POMIARY ELEKTROTECHNICZNE

TOM I.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA. — TOM XXV.

KAZIMIERZ DREWNOWSKI,
PROFESOR PAŃSTW. SZKOŁY PRZEMYSŁOWEJ, B. ADJUNKT POLITECHNIKI WE LWOWIE.

POMIARY ELEKTROTECHNICZNE

PODRĘCZNIK DO UŻYTKU WYŻSZYCH SZKÓŁ TECHNICZNYCH

TOM I.

I.: POMIARY WIELKOŚCI ELEKTROTECHNICZNYCH.
II.: BADANIA PRZYRZĄDÓW, MATERYAŁÓW, IZOLACYI, LAMP I AKUMULATORÓW.

CENA 8 KORON.

LWÓW 1914. — WYDAWNICTWO BIBLIOTEKI POLITECHNICZNEJ
Z I. ZWIĄZKOWEJ DRUKARNI WE LWOWIE, UL. LINDEGO L. 4.

Przedmowa.

„Pomiary elektrotechniczne" powstały z moich wykładów w laboratoryum elektrotechnicznem na Politechnice lwowskiej. Stąd charakter książki metodyczny, przystosowany do wymogów wyższych szkół technicznych. Student znajdzie w niej wskazówki, jak się ma brać do pomiaru, inżynier odświeży sobie poznane poprzednio metody.

Niniejszy tom składa się z dwuch części i zawiera pomiary zasadniczych wielkości elektrotechnicznych (Część I.), oraz badania i pomiary przyrządów, materyałów, izolacyi, lamp, akumulatorów (Część II.), stanowiące niejako praktyczne zastosowanie poznanych zasad w I. części. Jest to cały obszar objęty obecnie ćwiczeniami w Laboratoryum elektrotechnicznem I. na Politechnice lwowskiej.

Tom II., który znajduje się w opracowaniu, będzie zawierał zakres laboratoryum II. i III., t. j. badania i pomiary maszyn elektrycznych, oraz zasady pomiarów przy wysokiem napięciu.

Z charakteru książki wynika, że starałem się w niej uwzględnić przedewszystkiem nowsze metody pomiarów i badań, oraz t. zw. metody klasyczne, z których wyszły metody, dziś stosowane w praktyce. Przy opracowaniu części I. położyłem nacisk na celowość pomiaru t. j. na to, aby ćwiczący zdawał sobie sprawę z celu pomiaru i mógł należycie ocenić wartość samego pomiaru. W tym celu uwzględniłem prawie przy każdej metodzie sposoby wyznaczania błędów i najlepszych warunków pomiaru.

Słownictwo użyte w książce opiera się przeważnie na słownictwie przyjętem przez Sekcyę elektrotechników Towarzystwa Politechnicznego we Lwowie, a oznaczenia i kierunek obrotu wektorów na postanowieniach międzynarodowej komisyi elektrotechnicznej (I. E. C.).

Przy wydawnictwie i układaniu książki doznałem nader życzliwego poparcia i wskazówek prof. Romana Dzieślewskiego, oraz obecnego adjunkta laboratoryum elektrotechnicznego inż. Wacława Günthera. Niech mi będzie wolno złożyć im na tem miejscu wyrazy podziękowania.

Autor.

We Lwowie, w październiku 1913.

Treść.

Część II.

Dostrzeżone omyłki.

Str. 22. 4 wiersz od dołu zamiast g ma być G
„ 44. 9 „ „ góry „ przyłożonej *SEM* ma być przyłożonemu napięciu
„ 44. 3 „ „ dołu „ i_1 ma być i
„ 47. 8 „ „ góry i n. zamiast woltametr ma być voltametr
„ 48. 1 i 2 wiersz od dołu zamiast C ma być c
„ 83. 2 wiersz od dołu zamiast odpowiada ma być nie odpowiada
„ 84. 9 i 11 wiersz od góry zamiast e ma być e_2
„ 89. 12 wiersz od dołu zamiast τ ma być T_0
„ 99. w rys. 51a zamiast $V_v = V_R$ ma być $V_v = V_g$
„ 99. 5 wiersz od dołu zamiast wskazanie ma być wskazane

Literatura ogólna.

Brion: Leitfaden zum elektrotechnischen Praktikum. 1910.
Gerard: Mesures électriqueus. III. wyd. 1908.
Hallo-Land: Elektrische u. Magnetische Messungen. 1906.
Heinke: Handbuch der Elektrotechnik. II. tom. Messtechnik. 1905 i 1908.
Kohlrausch: Lehrbuch der praktischen Physik. XI. wyd. 1910.
Linker: Elektrotechnische Messkunde. II. wyd. 1913.

Wstęp.

1. Metody pomiarów.

Pomiary elektrotechniczne, jak wogóle pomiary wielkości fizycznych, mogą być

bezpośrednie, jeżeli polegają na porównywaniu mierzonej wielkości z taką samą znaną n. p. pomiar długości za pomocą metra, pomiar oporu w mostku Wheatstone'a, albo

pośrednie, przy których uwzględnia się także inne wielkości tworzące z mierzoną zasadnicze prawa matematyczne lub fizyczne, n. p. pomiar powierzchni zapomocą długości podniesionej do kwadratu, pomiar oporu na podstawie prawa Ohma.

Wielkości elektrycznych nie można mierzyć wprost, lecz zapomocą przyrządów, w których pomiar sprowadza się często do odczytywania podziałki (n. p. galwanometru), a więc do pomiaru długości. Przy pomiarach można w tym względzie zastosować następujące metody:

Metodę odchyłową, która polega wprost na mierzeniu długości, o jaką się skazówka przyrządu mierniczego odchyli. Wskazania przyrządu są wtedy zależne od różnych sił działających, jak prąd elektryczny, sprężyna, magnes itp. Z tego względu jest ona mniej dokładna, niż

metoda zerowa, przy której staramy się osiągnąć taki stan, aby działanie wyżej wymienionych sił zmniejszyć do możliwych granic. Jest to najbardziej dokładny sposób pomiarów, wymagający jednak dłuższego czasu; używa się go przeto głównie przy pomiarach bardzo dokładnych, laboratoryjnych.

Zbliżoną do zerowej jest metoda równych odchyleń, przy której pomiar polega na porównywaniu dwuch wielkości w ten sposób, że pomiar każdej wielkości obywa się osobno, ale tak, że przy obu pomiarach wytwarza się ten sam stan równowagi układu, sprowadzając oba razy skazówkę galwanometru do tego samego odchylenia.

W praktyce technicznej stosuje się powszechnie metodę odchyłową.

2. Błędy.

Pomiaru bezwzględnie pewnego wykonać nie można i zawsze popełnia się błąd, t. zn. że wartość otrzymana z pomiaru różni się od wartości rzeczywistej tej mierzonej wielkości o jakąś wielkość. Z tem należy się zawsze liczyć i uwzględniać wpływ błędów na wynik pomiaru.

Według pochodzenia rozróżniamy błędy: stałe i zmienne.

Błędy stałe. — Źródło ich leży w samej metodzie pomiaru lub w przyrządzie mierniczym, a mianowicie albo w trwałej zmianie stałej przyrządu n. p. skutkiem zaniku magnetyzmu magnesów lub siły skręcającej sprężyny, albo w czasowej zmianie n. p. skutkiem tarcia chwilowego, działania obcych pól magnetycznych lub elektrycznych, temperatury itp. Błędy stałe mogą powstać także skutkiem niedbałości spostrzegającego.

Taki błąd można usunąć albo wyrównać przez zmianę metody, przez sprawdzenie czyli wycechowanie przyrządu, przez powtórzenie pomiaru przy zmienionym układzie połączeń, przez zmianę kierunku prądu itp., a wreszcie przez zmianę spostrzegającego.

Niektóre błędy stałe, n. p. skutkiem wpływu temperatury, można, znając ich przyczynę i skutki, uwzględnić rachunkowo przez wprowadzenie t. zw. poprawek.

Uwzględnienie poprawek jest nieodzowne przy pomiarach precyzyjnych; jeżeli jednak błąd popełniony przez zaniedbanie poprawki jest znacznie mniejszy, aniżeli błąd popełniony przy spostrzeganiu, wtedy można poprawkę opuścić. Jako praktyczną granicę, powyżej której należy już poprawkę uwzględnić, można przyjąć $\frac{1}{10}$ błędu granicznego.

Przy obliczaniu poprawek posługuje się zwykle wzorami skróconymi (p. str. 14).

Błędy zmienne. — Są to błędy właściwe, występujące przy pomiarze zawsze, nawet jeżeli się usunęło błędy stałe. Objawiają się one tem, że przy pomiarze powtórzonym kilkakrotnie, otrzymuje się wartości różne. Błędy zmienne pochodzą z niedoskonałości ludzkich zmysłów, którymi spostrzegamy, najczęściej oka, n. p. przy odczytywaniu wychylenia skazówki galwanometru, albo przy fotometrowaniu światła.

Przy nabraniu pewnej wprawy w odczytywaniu i przy zastosowaniu należytych środków można odczytywać bardzo dokładnie, a więc zmniejszyć błędy; nigdy ich jednak nie można zupełnie usunąć. Takimi środkami pomocniczymi są nonius, szkło powiększające, skazówka bardzo cienka, podkładka zwierciadlana do uniknięcia paralaksy itp.

Wyrównywanie błędów zmiennych wymaga całego szeregu spostrzeżeń; wtedy każde poszczególne spostrzeżenie będzie obarczone jakimś błędem. Te poszczególne błędy pozwalają nam — na podstawie teoryi błędów — określić wpływ błędu spostrzeżenia na wynik pomiaru.

Błędy zmienne rozróżniamy według rodzaju następujące:

1. **Błąd graniczny** Δ_{gr}. — Jest to największy błąd, jaki wolno popełnić, a właściwie poza jaki nie powinno się wyjść przy pomiarze. Zależy on od dokładności lub czułości danego przyrządu mierniczego, a także od zdolności spostrzegania.

Błąd graniczny może być:

bezwzględny, — jeżeli podaje się go wprost w jednostkach mierzonej wielkości; albo

względny, — jeżeli odnosi się go w procentach do mierzonej wielkości.

Błąd graniczny mogący powstać przy danej metodzie, można z góry określić, znając dany przyrząd i warunki pomiaru; zwykle przyjmuje się n. p. że opornice zatyczkowe mają dokładność do 0,1—0,2%, czyli ich błąd graniczny wynosi 0,1—0,2%, normale samoindukcyjne 0,3—0,5%, przyrządy techniczne 0,5—1,0%, odchylenia igiełki galwanometru można odczytać z dokładnością 0,1—0,25 podziałki i t. p. Te błędy można sprawdzić przez wycechowanie danych przyrządów i przez uwzględnienie dokładności spostrzegania.

Przy pomiarach elektrotechnicznych, nawet jeżeli mamy do czynienia z jedną tylko zmienną, to jednak nie otrzymujemy szukanej wielkości wprost zapomocą bezpośredniego porównania jej z jednostką, jak to jest n. p. przy pomiarze długości zapomocą metra, a więc długości; zawsze przychodzi jeszcze przyrząd pomocniczy, mierniczy, zapomocą którego porównuje się daną wielkość z normalną i, zależnie od sposobu pomiaru, mamy metodę zerową lub odchyłową. W ten sposób mamy do czynienia przynajmniej z dwiema wielkościami różnorodnemi, z których jedna może być stałą, a druga zmienną, obie jednak obarczone są błędami, których suma stanowi błąd graniczny.

Najczęściej stosuje się metody zerowe; wtedy przy określaniu błędu granicznego należy uwzględnić i błąd, jaki się popełnia przez niedokładne nastawienie skazówki galwanometru na 0, wzgl. przez to, że galwanometr jest za mało czuły i nie reaguje do pewnej granicy na prąd płynący przez niego. To samo odnosi się do metody równych odchyleń. Przy metodzie odchyłowej natomiast mamy tem samem błąd graniczny odchylenia galwanometru zawarty w samej metodzie, gdyż szukana wielkość jest funkcyą odchylenia (n. p. pomiar pojemności przez porównanie).

Błąd graniczny odchylenia galwanometru wyznacza się zapomocą badania t. zw. czułości układu ze względu na galwanometr. Jest to wpływ umyślnego błędu, odpowiadającego najmniejszemu odchyleniu galwanometru, które się przyjmuje stosownie do dokładności metody, czułości galwanometru i zdolności spostrzegania (0,1—0,25 podziałki).

Przy wyznaczaniu błędu granicznego, jeżeli funkcya posiada tylko jeden człon, najlepiej jest stosować różniczkowanie logarytmiczne, różniczkując logarytm funkcyi.

2. Błąd średni. — Jest to błąd, jaki się rzeczywiście popełnia przy pomiarze; oblicza się go na podstawie rachunku prawdopodobieństwa z całego szeregu spostrzeżeń.

Błąd średni może być:

błędem poszczególnego pomiaru lub

błędem średniej wartości pomiarów;

dalej może być:

bezwzględny lub

względny, jak przy błędach granicznych;

wreszcie rozróżniamy błąd średni

prawdopodobny Δ_{pr}, który otrzymuje się — według rachunku prawdopodobieństwa — przez pomnożenie błędu średniego przez 0,674. O otrzymanej w ten sposób liczbie można z równem prawdopodobieństwem powiedzieć, że błąd popełniony rzeczywiście jest od niej zarówno większy jak i mniejszy.

3. Wyrównywanie błędów.

Sposoby wyznaczania błędów i określania ich wpływu na wynik pomiaru zależą od tego, czy metoda pomiaru posiada jedną czy więcej zmiennych spostrzeganych (niezależnych).

I. Metoda posiada jedną zmiennę niezależną

$$y=f(x).$$

Wielkość y mierzy się zapomocą szeregu spostrzeżeń wielkości x, której funkcyą jest y.

1. Błąd graniczny.

Błąd graniczny określa się ze względu na zmiennę niezależną x, najlepiej zapomocą różniczkowania logarytmicznego, stosownie do metody, jakiej się używa.

Funkcyę $y=f(x)$,

można przedstawić jako $y=Cx$

z tego logarytm naturalny $\log_n y=\log_n C+\log_n x$,

po zróżniczkowaniu będzie $\frac{dy}{y}=\frac{dC}{C}+\frac{dx}{x}$.

Ponieważ to są wartości skończone, piszemy

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta C}{C}+\frac{\Delta x}{x},$$

co przedstawia błąd graniczny względny.

Jeżeli stała C jest liczbą niemianowaną, to jej pochodna $=0$, czyli $\frac{\Delta C}{C}$ odpada i błąd graniczny określa się błędem zmiennej. Jeżeli zaś w stałej C zawarte są pewne wielkości fizyczne, które utrzymujemy podczas pomiaru stałemi, to one są także obarczone błędami, które trzeba uwzględnić.

Ogólnie oznaczymy błąd graniczny:

a) bezwzględny $\Delta_g y=f(\Delta_g x)$

b) względny $\frac{\Delta_g y}{y}=\frac{f(\Delta_g x)}{f(x)}$ (ewent. w %).

Przy metodach zerowych i równych odchyleń, trzeba jeszcze uwzględnić błąd graniczny galwanometru, czyli t. zw.

czułość układu. Po sprowadzeniu układu do równowagi (galwanometr na 0 lub na danem odchyleniu), zmieniamy x o δx tak długo, aż dostaniemy założone odchylenie Δa skazówki galwanometru. Wtedy y obliczone według $x+\delta x$ będzie

$$y' = y + \delta y = f(x+\delta x),$$

a
$$\frac{\delta y}{y} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{f(x)} = \frac{F(\delta x)}{f(x)},$$

co będzie miarą czułości układu.

Wtedy błąd graniczny:

a) bezwzględny $\Delta_g y = f(\Delta_g x) + \delta y$,

b) względny $\frac{\Delta_g y}{y} = \frac{f(\Delta_g x)}{y} + \frac{\delta y}{y}$ (ewent. w %).

2. Błąd średni.

Celem wyznaczenia błędu średniego robi się n spostrzeżeń zmiennej niezależnej x i z poszczególnych spostrzeżeń oblicza się szukaną wielkość y. W ten sposób otrzymuje się n pomiarów wielkości y, z których każdy obarczony będzie błędem Δy, powstałym skutkiem błędu spostrzeżenia Δx.

Dla $y = f(x)$ będzie wynik po uwzględnieniu
błędu $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$,
czyli $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, a więc
błąd bezwzględny $\Delta y = F(\Delta x)$,
a błąd względny $\frac{\Delta y}{y} = \frac{F(\Delta x)}{f(x)}$.

Z tego widać, że błąd średni wyniku jest funkcyą błędu spostrzeżenia. Jeżeli ta zależność jest linijna $y = C.x$, to błąd wyniku jest proporcyonalny do błędu spostrzeżenia; można więc odrazu obliczyć z n spostrzeżeń średni błąd x, wtedy błąd wyniku bezwzględny będzie $\Delta y = C.\Delta x$, a względny $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta x}{x}$.

Jeżeli funkcya ma kształt $y = C.x^2$,

to błąd będzie $y + \Delta y = C(x+\Delta x)^2 = Cx^2\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^2$,

z tego na podstawie wzorów skróconych

$$y + \Delta y = y\left(1 + 2\frac{\Delta x}{x}\right)$$
$$= y + 2y\frac{\Delta x}{x},$$

czyli
$$\Delta y = 2y\frac{\Delta x}{x}$$

a
$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{2\Delta x}{x},$$

błąd względny wyniku jest więc 2 razy większy od błędu spostrzeżenia.

Do tego samego dojdziemy stosując różniczkowanie logarytmiczne

$$y = C.x^2$$
$$\log_n y = \log_n C + 2\log_n x$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}.$$

W podobny sposób można się przekonać, że jeżeli $y = C\sqrt{x}$, to błąd wyniku jest 2 razy mniejszy od błędu spostrzeżenia.

Z tego względu najlepiej jest przy obliczaniu błędów postępować tak, jak na początku wskazano, to jest obliczać je nie ze spostrzeżeń, lecz z poszczególnych pomiarów.

Błędy średnie znajduje się więc w następujący sposób: Robi się n pomiarów badanej wielkości y, z których oblicza się średnią arytmetyczną $y_{śr}$ i wyznacza się różnice Δ między poszczególnemi wartościami y a $y_{śr}$, $\Delta = y_{śr} - y$, wtedy:

błąd średni: a) bezwzględny:

α) poszczególnego pomiaru: $\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{n-1}}$

β) średnią wartość " $E = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta^2)}{n(n-1)}} = \pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$

b) względny:

α) poszczególnego pomiaru: $\pm\frac{\varepsilon}{y_{śr}}$ (ewent. w %)

β) średniej wartości " $\pm\frac{E}{y_{śr}}$ (" " ")

Znak $\pm$ oznacza, że błąd spostrzeżenia, w ten sposób znaleziony, może być z równą dokładnością wzięty jako większy jak i mniejszy od rzeczywistej wartości.

Ilość spostrzeżeń n zależy od tego jak pomiar wypada; jeżeli różnice między poszczególnemi spostrzeżeniami są nieznaczne, to można się zadowolić paroma spostrzeżeniami; zwykle $n = 5$ do 10. Jeżeli otrzyma się spostrzeżenie bardzo różniące się od reszty, to z dostateczną pewnością można to przypisać fałszywemu spostrzeganiu i poprostu usunąć z rachunku, a na to miejsce wziąć inne. Przy tem trzeba jednak postępować z wszelką uwagą, aby nie popełnić omyłki i przekonać się poprzednio, czy nie zachodzi tu jaki błąd stały; wtedy należy go usunąć lub uwzględnić poprawkę.

W ostatecznym wyniku pomiaru należy uwzględnić błąd prawdopodobny, obliczony z błędu bezwzględnego.

Ponieważ szukana wielkość i jej błąd bardzo się od siebie różnią co do wielkości, byłoby wykonywanie działań niemi bardzo żmudne, dlatego w takich razach używa się — jak to już zaznaczono — wzorów skróconych (p. str. 14.).

Przykład:

Pomiar oporu żarówki zapomcą galwanometru różnicowego.

Opór badany X równa się oporowi porównawczemu R, jeżeli igiełka galwanometru stoi na zerze, co osiąga się przez regulowanie oporu R. Pomiar powtórzono pięciokrotnie, przyczem otrzymano szereg wartości R czyli X (ponieważ $X = R$), z których oblicza się średnią i wyznacza średni błąd według następującego protokołu pomiaru:

L. p.	$R = X$	$X_{śr}$	ΔX	$(\Delta X)^2$
1	294,2		0,0	0,00
2	294,3		0,1	0,01
3	294,1	294,2	−0,1	0,01
4	294,0		−0,2	0,04
5	294,4		0,2	0,04
				$\Sigma(\Delta X)^2 = 0,10$

Błąd średni:

a) bezwzględny:

α) poszczególnego pomiaru: $\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{\Sigma(\Delta X)^2}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0,10}{4}} = \pm\ 0,158;$

β) średniej wartości: $E = \pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} = \pm\ 0,0706;$

γ) prawdopodobny średniej wartości: $\pm\ 0,0706 \,.\, 0,674 = \pm\ 0,0476.$

b) względny:

α) poszczególnego pomiaru: $\pm\frac{\varepsilon}{X} = \pm\frac{0,158}{294,2} = \pm 0,000536 = \pm 0,0536\,\%;$

β) średniej wartości: $\pm\frac{E}{X} = \pm\frac{0,0706}{294,2} = \pm\ 0,00024 = \pm\ 0,024\,\%.$

Wynik ostateczny:

$$X = 294,2 \pm 0,0476\ \Omega.$$

Błąd graniczny pomiaru t. j. największy, poza jaki nie można wyjść, obliczy się według $\frac{\Delta_g X}{X} = \frac{\Delta_g R}{R} + \frac{\delta X}{X}$, gdzie $\Delta_g R$ przyjmuje się ze względu na opornicę 0,1%, a δX wyznacza się, badając czułość układu. Jeżeli przy zmianie oporu R o $\delta R = 0{,}05$, otrzymaliśmy odchylenie igiełki galwanometru 0,1 podziałki, to $\delta X = 0{,}05$.

Błąd graniczny:

a) bezwzględny: $\Delta_g X = \Delta_g R + \delta X = 0{,}2942 + 0{,}05 = 0{,}2992$;

b) względny:

$$\frac{\Delta_g X}{X} = \frac{\Delta_g R}{R} + \frac{\delta X}{X} = \frac{0{,}002 \,.\, 294{,}2}{294{,}2} + \frac{0{,}05}{294{,}2} = 0{,}002169 = 0{,}2169\%,$$

jest więc znacznie większy od średniego, co wskazuje, że pomiar został uskuteczniony z dostateczną dokładnością.

II. Metoda posiada więcej zmiennych niezależnych.

$$y = f(x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots).$$

Wielkość y mierzy się zapomocą szeregu spostrzeżeń wielkości x_1, x_2, $x_3, \ldots$, których funkcyą jest y.

Tu mogą zachodzić dwa wypadki:

A. Zmienne niezależne spostrzega się jednocześnie.

Wtedy błędy poszczególne wyznacza się ze względu na całą funkcyę. Błąd wyniku znajduje się zapomocą różniczkowania cząstkowego $y = f(x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots)$.

$$\Delta y = \pm \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\partial x_1} \Delta x_1 \pm \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\partial x_2} \Delta x_2 \pm \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3, \ldots)}{\partial x_3} \Delta x_3 \pm \ldots$$

Jeżeli oznaczymy $\frac{\partial f(x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_n}$ przez λ_n, a Δx_n przez ε_n, to

$$\Delta y = \pm \lambda_1 \varepsilon_1 \pm \lambda_2 \varepsilon_2 \pm \lambda_3 \varepsilon_3 \pm \ldots$$

Znaki $\pm$ oznaczają, że z góry nie można powiedzieć, jakie będą znaki $+$ czy $-$.

1. Błąd graniczny wyniku będzie sumą poszczególnych błędów granicznych, t. zn. zakładamy, że wszystkie znaki są dodatnie;

bezwzględny: $\Delta_g y = \Sigma(\lambda,\ \varepsilon)$

względny: $\frac{\Delta_g y}{y} = \frac{\Sigma(\lambda,\ \varepsilon)}{y}$ (ewent. w %).

Błąd graniczny obliczamy zapomocą różniczkowania cząstkowego danej funkcyi.

2. Błąd średni wyniku będzie — według metody najmniejszych kwadratów — drugim pierwiastkiem z sumy kwadratów poszczególnych błędów;

bezwzględny: $\Delta y = \sqrt{(\lambda_1 \varepsilon_1)^2 + (\lambda_2 \varepsilon_2)^2 + (\lambda_3 \varepsilon_3)^2 + \ldots}$

względny: $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\sqrt{(\lambda_1 \varepsilon_1)^2 + (\lambda_2 \varepsilon_2)^2 + (\lambda_3 \varepsilon_3)^2 + \ldots}}{y}$

Błąd średni będzie zarazem błędem prawdopodobnym.

Praktycznie stosuje się to w ten sposób, że pomiar powtarza się kilkakrotnie i każdorazowo oblicza się szukaną wielkość; ze znalezionych w ten sposób wartości bierze się średnią i wyznacza średni błąd wyniku.

Jeżeli funkcya ma tylko jeden człon, to najlepiej zastosować tu różniczkowanie logarytmiczne.

Przykład:

Pomiar oporu zapomocą ampermetru i voltmetru.

Pomiar odbywa się przez przepuszczenie prądu J przez opór X i mierzenie spadku napięcia E, spowodowanego danym prądem.

Wynik oblicza się na podstawie następującego protokołu:

L. p.	J	E	X	$X_{śr}$	ΔX	$(\Delta X)^2$
1	2,47	6,79	0,364		0,000	0,000000
2	2,20	6,12	0,360		−0,004	16
3	3,25	8,76	0,371	0,364	0,007	49
4	2,78	7,63	0,365		0,001	1
5	2,09	6,08	0,360		0,004	16
						$\Sigma(\Delta X)^2 = 0,000082$

Błąd średni wyniku:

a) bezwzględny: $\Delta X = \pm\sqrt{\frac{0,000082}{5.4}} = \pm 0,002015,$

b) względny: $\frac{\Delta X}{X} = \pm\frac{0,002015}{0,364} = \pm 0,00558 = \pm 0,558\%.$

Wynik ostateczny:

$$X = 0,364 \pm 0,002015\,\Omega.$$

Błąd graniczny wyznacza się według:

$$\frac{\Delta_g X}{X} = \frac{\Delta_g J}{J} + \frac{\Delta_g E}{E},$$

gdzie $\Delta_g J$ i $\Delta_g E$ obiera się ze względu na skalę i dobroć przyrządów; ampermetr i voltmetr można było odczytać z dokładnością do 2 dziesiątych części podziałki, co odpowiadało 0,02 A i 0,02 V; w tem mieściła się i dokładność cechowania przyrządów, tak, że błąd graniczny względny jest

$$\frac{\Delta_g X}{X} = 0,02 + 0,02 = 0,04 = 4\%,$$

a więc znacznie większy niż średni.

B. Zmienne niezależne spostrzega się niejednocześnie.

Wtedy błędy poszczególnych zmiennych wyznacza się osobno, a więc błąd graniczny $\Delta_g x_1$, $\Delta_g x_2$, $\Delta_g x_3, \ldots$, zakładając go dla każdej zmiennej i obliczając z tego — przy zachowaniu reguł podanych pod A — poszczególne błędy graniczne $\Delta_g y'$, $\Delta_g y''$, $\Delta_g y'''$..., których suma daje błąd graniczny wyniku

$$\Delta_g y = \Delta_g y' + \Delta_g y'' + \Delta_g y''' + \ldots;$$

a błąd średni Δx_1, Δx_2, Δx_3..., obliczając średnie wartości x_1, x_2, x_3... i ich błędy według I i tak otrzymane wartości wstawiając do wzoru na y, przyczem przyjmuje się po kolei, że jedna zmienna jest obarczona błędem a inne nie, w ten sposób otrzyma się szereg błędów $\Delta y'$, $\Delta y''$, $\Delta y'''$..., z których oblicza się średni błąd wyniku

$$\Delta y = \sqrt{(\Delta y')^2 + (\Delta y'')^2 + (\Delta y''')^2 + \ldots}$$

Błędy względne oblicza się jak poprzednio.

Jeżeli nie idzie o wyznaczenie poszczególnych błędów Δx_1, Δx_2, Δx_3... i ich wpływu na wynik pomiaru, lecz tylko o ostateczny błąd wyniku, to można z każdorazowych wartości x_1, x_2, x_3... obliczyć y i z tak otrzymanego szeregu wartości y wziąć średnią i wyznaczyć średni błąd według I.

Przykład:

Pomiar pojemności kondenzatora przez porównanie z normalnym.

Pojemność mierzona $C = C_n \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, gdzie C_n jest to pojemność kondenzatora normalnego, tutaj $C_n = 0{,}82\,\mu F$, α_1 odchylenie odpowiadające pojemności C, a α_2 pojemności C_n. Oba spostrzeżenia α_1 i α_2 robi się niezależnie od siebie i powtarza 5 razy, z czego bierze się średnie wartości. Błędy wyznacza się na podstawie następującego protokołu pomiaru:

L. p.	α_1	$\alpha_{1\,śr}$	$\Delta\alpha_1$	$(\Delta\alpha_1)^2$	α_2	$\alpha_{2\,śr}$	$\Delta\alpha_1$	$(\Delta\sigma_2)^2$
1	7,625		0,028	0,000784	6,125		−0,040	0,001600
2	7,625		0,028	0784	6,200		0,035	0,001225
3	7,610	7,597	0,013	0169	6,250	6,165	0,085	0,007225
4	7,550		−0,047	2209	6,150		−0,015	0,000225
5	7,575		−0,022	0484	6,100		−0,065	0,004225
				$\Sigma(\Delta\alpha_1)^2 = 0{,}004430$				$\Sigma(\Delta\alpha_2)^2 = 0{,}014500$

Pojemność badaną oblicza się z wartości średnich:

$$C = C_n \frac{\alpha_{1\,śr}}{\alpha_{2\,śr}} = 0{,}82 \frac{7{,}597}{6{,}165} = 0{,}82 \,.\, 1{,}23 = 1{,}008\,\mu F.$$

Błąd średni zmiennej α_1:

a) bezwzględny: $\Delta\alpha_1 = \pm \sqrt{\frac{\Sigma(\Delta\alpha_1)^2}{n(n-1)}} = \pm \sqrt{\frac{0{,}004430}{20}} = \pm\, 0{,}01484;$

b) względny: $\frac{\Delta\alpha_1}{\alpha_1} = \pm \frac{0{,}01484}{7{,}597} = \pm\, 0{,}001955 = \pm 0{,}1955\%_0.$

Błąd średni zmiennej α_2:

a) bezwzględny: $\Delta\alpha_2 = \pm\sqrt{\frac{0{,}014500}{20}} = \pm 0{,}0269$;

b) względny: $\frac{\Delta\alpha_2}{\alpha_2} = \pm \frac{0{,}0269}{6{,}165} = \pm 0{,}00436 = \pm 0{,}436\%$.

Błąd średni wyniku:

α) ze względu na $\Delta\alpha_1$:

$$C' = C_n \frac{\alpha_{1\,śr} + \Delta\alpha_1}{\alpha_{1\,śr}} = 0{,}82 \frac{7{,}597 + 0{,}01484}{6{,}165} = 1{,}010,$$

a więc $\Delta C' = C - C' = 1{,}008 - 1{,}010 = -0{,}002$;

β) ze względu na $\Delta\alpha_2$:

$$C'' = C_n \frac{\alpha_{1\,śr}}{\alpha_{1\,śr} + \Delta\alpha_2} = 0{,}82 \frac{7{,}597}{6{,}165 + 0{,}0269} = 1{,}003,$$

a więc $\Delta C'' = C - C'' = 1{,}008 - 1{,}003 = 0{,}005$;

czyli ostatecznie błąd:

a) bezwzględny: $\Delta C = \sqrt{(\Delta C')^2 + (\Delta C'')^2} = \sqrt{(-0{,}002)^2 + (0{,}005)^2} = 0{,}00538$,

b) względny: $\frac{\Delta C}{C} = \frac{0{,}00538}{1{,}008} = 0{,}534\%$.

Wynik ostateczny:

$$C = 1{,}008 \pm 0{,}00538\,\mu F.$$

Błąd graniczny wyznacza się przez różniczkowanie logarytmiczne wzoru na C i dodanie poszczególnych członów

$$\frac{\Delta_g C}{C} = \frac{\Delta_g C_n}{C_n} + \frac{\Delta_g \alpha_1}{\alpha_1} + \frac{\Delta_g \alpha_2}{\alpha_2},$$

gdzie przyjmuje się $\Delta_g C_n$ ze względu na kondenzator normalny $0{,}1\%$, a $\Delta_g\alpha_1$ i $\Delta_g\alpha_2$ jako odchylenia galwanometru balistycznego 0,25 podziałki.

Błąd a) bezwzględny: $\Delta_g C = 0{,}001 \,.\, 1{,}008 + 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}501008$,

b) względny: $\frac{\Delta_g C}{C} = \frac{0{,}001 \,.\, 1{,}008}{1{,}008} + \frac{0{,}25}{7{,}597} + \frac{0{,}25}{6{,}165} = 7{,}46\%$,

jest więc znacznie większy od znalezionego średniego.

Powyższe metody *A* i *B* mogą być kombinowane, t. zn. metoda posiada kilka zmiennych, z których jedne są między sobą zależne, a inne nie. Wtedy należy grupy zmiennych od siebie zależnych traktować razem.

4. Najlepsze warunki pomiaru.

Przez odpowiednią dyskusyę metody pomiaru można z góry określić warunki, w jakich powinien się pomiar odbywać, aby średni błąd względny wyniku był najmniejszy, czyli znaleźć minimum błędu.

Ponieważ ten błąd jest zwykle funkcyą jednej lub kilku zmiennych, przeto minimum tego błędu będzie, jeżeli pochodna tej funkcyi będzie $=0$, a druga pochodna dodatnia.

Jeżeli więc $y=f(x)$, to średni błąd względny

$$\frac{dy}{y}=\frac{F(dx)}{f(x)}=\varphi(x),$$

a minimum będzie jeżeli $\frac{d\varphi(x)}{dx}=0$, a $\varphi'(x)>0$.

Jeżeli zaś $y=f(x_1, x_2, x_3 \ldots)$,

to $$\frac{dy}{y}=\varphi(x_1, x_2, x_3\ldots),$$

a minima poszczególnych błędów będą, jeżeli

$$\frac{d\varphi(x_1, x_2, x_3,\ldots)}{dx_1}=0, \quad \frac{d\varphi(x_1, x_2, x_3,\ldots)}{dx_2}=0, \quad \frac{d\varphi(x_1, x_2, x_3,\ldots)}{dx_3}=0,\ldots$$

Przy pomiarach elektrotechnicznych — zwłaszcza w praktyce — mierzona wielkość jest często funkcyą odchylenia skazówki przyrządu mierniczego

$$x=C.\alpha,$$

wtedy błąd średni $$\frac{dx}{x}=\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Widać z tego, że błąd średni wyniku będzie tem mniejszy, im odchylenie α większe. Stosownie do tego trzeba dobierać takie warunki pomiaru, aby α było jak największe. Ponieważ jednak α jest funkcyą x, nie można bez zmiany jednej wielkości zmienić drugą. Udać się to więc może wtedy, jeżeli x można zmienić o tyle, że tylko jego pewną, ściśle określoną część się mierzy, n. p. przy pomiarze natężenia prądu galwanometrem z zastosowaniem upustu; wtedy upust można tak zregulować, aby odchylenie α było największe. Praktycznie osiąga się to przez użycie przyrządu o większej czułości na miejsce mniej czułego, który daje odchylenia w granicach początku podziałki.

Przykład: Pomiar natężenia prądu zapomocą busoli stycznych.

Busola opatrzona jest upustem, który pozwala zmieniać dowolnie stałą C; natężenie prądu jest:

$$J=C.\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

średni błąd względny $$\frac{dJ}{J}=\frac{\dfrac{d\alpha}{C.\cos^2\alpha}}{C.\,\mathrm{tg}\,\alpha}=\frac{2\,d\alpha}{\sin 2\alpha}=\varphi(\alpha).$$

Minimum tej funkcyi będzie, jeżeli

$$\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0.$$

Warunek ten będzie spełniony, jeżeli $\alpha = 45^0$; czyli najlepszy warunek pomiaru busolą stycznych jest wtedy, kiedy $\alpha = 45^0$, co można osiągnąć przez regulowanie upustu.

Jeżeli nie można osiągnąć najlepszych warunków pomiaru, to trzeba ile możności do nich się zbliżyć, nie warto jednak przy tem posuwać się do ostatecznych granic, gdyż błąd średni waha się bardzo mało w pobliżu teoretycznie najlepszych warunków. Z tego powodu wystarczy znaleść najlepsze warunki pomiaru dla błędu granicznego, którego wyznaczenie jest prostsze niż średniego.

Dyskusya błędu granicznego daje nam jeszcze inne wskazania, jak należy pomiar odbywać. Z błędu granicznego odrazu można poznać, które wielkości należy dokładniej od innych spostrzegać; będą to te, które dają dotyczący błąd graniczny większy. Jeżeli więc przychodzi n. p. we wzorze jakaś wielkość podniesiona do kwadratu, to jej wpływ na błąd graniczny wyniku będzie 2 razy większy niż innych; jeżeli jest pod pierwiastkiem, to będzie 2 razy mniejszy i t. p.

Błędy graniczne poszczególnych zmiennych pozwalają również przepisać z góry, z jaką dokładnością należy wykonywać poszczególne spostrzeżenia. Jeżeli błąd graniczny jednej zmiennej różni się znacznie od drugiej, n. p. z powodu mniej czułych przyrządów, to odczytywanie z wielką dokładnością na innych przyrządach przyniesie tylko nieznaczne poprawienie błędu rzeczywistego, nie zawsze jest więc konieczne.

Przy opisywaniu poszczególnych metod podano także najlepsze warunki pomiaru.

5. Wzory skrócone.

W wypadkach, w których jakiś wyraz matematyczny zawiera człony bardzo od siebie się różniące, można zastosować wzory skrócone, jeżeli ten wyraz da się przedstawić w formie $(1 \pm \delta)^m$, gdzie δ jest wobec 1 bardzo małe, a m jest jakąkolwiek liczbą, a więc także 1. Wtedy można wyższe potęgi δ wobec 1 opuścić, a wzory przybiorą następujące formy:

1. $(1 \pm \delta)^m = 1 \pm m\delta.$
2. $\sqrt[m]{1 \pm \delta} = 1 \pm \frac{1}{m}\delta.$

3. $\frac{1}{(1\pm\delta)^m}=1\mp m\delta.$

4. $\frac{1}{\sqrt[m]{1\pm\delta}}=1\pm\frac{1}{m}\delta.$

5. $(1\pm\delta)(1\pm\varepsilon)(1\pm\xi)\ldots=1\pm\delta\pm\varepsilon\pm\xi\pm\ldots$

6. $\frac{(1\pm\delta)(1\pm\varepsilon)\ldots}{(1\pm\xi)(1\pm\eta)\ldots}=1\pm\delta\pm\varepsilon\pm\ldots\mp\xi\mp\eta\ldots$

7. $\sin\delta=\delta$ przeto $\sin(x+\delta)=\sin x+\delta\cos x.$

8. $\cos\delta=1$ $\qquad\cos(x+\delta)=\cos x-\delta\sin x.$

9. $\operatorname{tg}\delta=\delta$ $\qquad\operatorname{tg}(x+\delta)=\operatorname{tg}x+\frac{\delta}{\cos^2 x}.$

10. $\log_n(1+\delta)=\delta-\frac{1}{2}\delta^2.$

11. $\log_n(x+\delta)=\log_n x+\frac{\delta}{x}-\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{x^2}.$

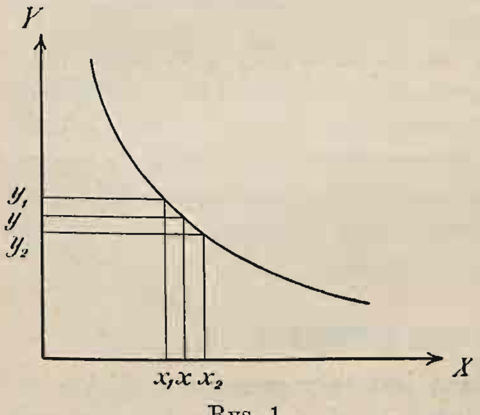
12. $\log_n\frac{x+\delta}{x-\delta}=2\frac{\delta}{x}+\frac{2}{3}\frac{\delta^3}{x^3}.$

13. $\sqrt{\delta_1\delta_2}=\frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)$, jeżeli δ_1 i δ_2 bardzo mało się różnią.

Znak $\pm$ i $\mp$ oznacza, że górne znaki odnoszą się do siebie, a dolne do siebie.

6. Interpolacya.

Jeżeli przy pomiarze wielkości y, będącej funkcyą x *(rys. 1.)*, należy ją do pewnej ściśle określonej wartości x sprowadzić (n. p. przy pomiarze oporu metodą odchyłową do pewnego odchylenia skazówki galwanometru) i nie można tego uskutecznić, a tylko otrzymuje się wartości sąsiednie x_1 i x_2, tak, że $x_1 < x < x_2$, a więc $y_1 > y > y_2$, to można przyjąć, że część krzywej objęta temi wielkościami, jest prosta.



Rys. 1.

Wtedy $\qquad\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y}{y_1-y_2}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

z tego $$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Takie postępowanie nazywa się interpolacyą.

Przy metodach zerowych stosuje się interpolacyę, jeżeli igiełki galwanometru nie można sprowadzić do 0. Jeżeli więc przy mierzeniu jakiejś funkcyi y, — która $=k.x$, skoro odchylenie igiełki $\alpha=0$, — nie można wartości x tak nastawić, aby $\alpha=0$, lecz otrzymuje się odchylenie:

α' w prawo przy x' t. zn. zamiast y otrzymuje się y',
$-\alpha''$ w lewo „ $x'+1$ „ „ „ „ „ „ y'',

to stosując interpolacyę i podstawiając za y wartości x, otrzymamy:

$$y=x'+\frac{x'+1-x'}{\alpha''+\alpha'}(0+\alpha') \quad \text{czyli}$$

$$y=x'+\frac{\alpha'}{\alpha'+\alpha''}, \quad \text{a więc ostatecznie}$$

$$y=k\left(x'+\frac{\alpha'}{\alpha'+\alpha''}\right).$$

O ile te obie wartości, z których ma się obliczyć na podstawie interpolacyi mierzoną wielkość, różnią się zanadto od siebie, tak że części krzywej objętej niemi nie można uważać za prostą, to trzeba się uciec do interpolacyi graficznej. Do tego potrzeba jednak przynajmniej trzech wartości x, aby móc przez nie poprowadzić krzywę; wtedy między niemi na tej krzywej leży szukana wartość y.

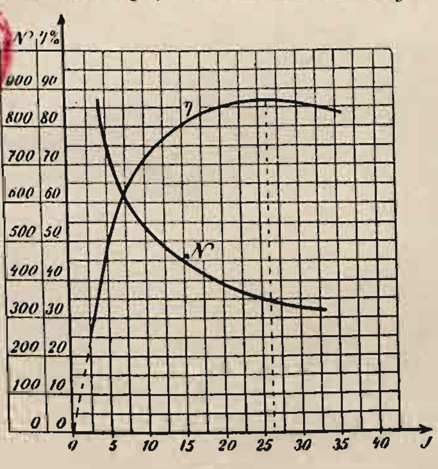
W razie, jeżeli mierzona wielkość leży poza znalezionemi wartościami, stosuje się graficzną extrapolacyę, która jest znacznie mniej dokładną od interpolacyi, ponieważ zwykle trudno jest określić ze ścisłością dalszy przebieg krzywej, zwłaszcza na jej końcach. Z tego powodu dobrze jest znaleść więcej wartości x, głównie takich, które mają większy wpływ na przebieg krzywej w szukanym kierunku.

7. Wykazy i wykresy.

Jeżeli wynikiem pomiaru jest cały szereg wartości y, różniących się od siebie a zależnych od x, to dla lepszego przeglądu należy je ułożyć w wykazy, a na podstawie tych wykazów sporządzić wykresy.

Zwłaszcza te ostatnie dają nam nie tylko obraz przebiegu szukanych wielkości, zmieniających się z innemi, ale pozwalają nam także zmniejszyć wpływ błędów, jakiemi obarczone są poszczególne wielkości. Zwykle bowiem dostajemy jako wynik pomiaru jakąś krzywą, która musi mieć przebieg ciągły; na mocy więc interpolacyi można z poszczególnych wartości wypośrodkować właściwą krzywą. Wtedy wartości zanadto odbiegające od tej krzywej, można uważać za błędne i ewentualnie dany pomiar poprawić. Należy tu jednak postępować z wszelką ostrożnością, aby nie popełnić omyłki. Czasem przebieg krzywej, który nam się wydaje na pierwszy rzut oka nieprawdopodobny, jest najzupełniej uzasadniony.

Wykresy mają wielkie znaczenie zwłaszcza przy pomiarach maszyn jako t. zw. charakterystyki. Wtedy poszczególne wartości otrzymane przy pomiarze t. zw. odczyty, służą tylko do oryentacyi przy wykreślaniu charakterystyk; z chwilą gdy to już mamy, tylko wartości na tych krzywych się znajdujące, są dla nas miarodajne i niemi należy się posługiwać przy dalszych obliczeniach. Jeżeli n. p. przy pomiarze maszyny dostaliśmy cały szereg wartości napięcia i natężenia w funkcyi jakiejś innej wielkości, to chcąc otrzymać przebieg mocy w tej samej funkcyi, nie można mnożyć tych poszczególnych wartości przez siebie, lecz nakreślić krzywe napięcia i natężenia i dopiero odpowiednie rzędne tych krzywych pomnożyć przez siebie, a otrzyma się nową krzywą mocy. W ten sposób wyrównuje się błędy, gdyż wartości na krzywej uważamy za poprawione.



Rys. 2.

Wykresy należy najlepiej tak sporządzać, żeby wartości zmiennej niezależnej x przedstawić jako odcięte, a funkcye jako rzędne. Dla przejrzystości należy o ile możności zaczynać zawsze od $y=0$ i $x=0$, aby punkt zerowy był w środku układu;

skale należy obierać dla tych samych wielkości równe (n. p. wolty w jednej skali, ampery w jednej i t. p.) i zaznaczać je w równych odstępach od początku układu. Poszczególnych wartości znalezionych, nie zaznacza się osobno. Natomiast normalne wartości trzeba oznaczyć, aby móc się odrazu z wykresu zoryentować co do własności danej maszyny.

Na *rys. 2.* podany jest wzór, w jaki sposób należy sporządzać wykresy. Przedstawione tam są krzywe wydajności η i obrotów N w zależności od natężenia prądu J motoru szeregowego, biorącego przy pełnem obciążeniu normalnie 26,5 A. Część kreskowaną krzywej wydajności otrzymano przez extrapolacyę.

O błędach i ich wyrównywaniu w zastosowaniu do fizyki i elektrotechniki można znaleść obszerniejsze uwagi w podanych dziełach Kohlrauscha i Gérarda.