ROZDZIAŁ VI.

39. O PRZESTRZENNYM UKŁADZIE SIŁ.

Rozważmy teraz działanie na ciała sztywne sił, jakkolwiek skierowanych w przestrzeni.

Rozpoczniemy od paru przypadków szczególnych.

40. SKRĘTNIK. Przypuśćmy, że układ sił jest złożony z jednej siły $/P/$ i z jednej pary, której moment $/M/$ jest równoległy do siły /t.j. płaszczyzna pary jest do siły prostopadła/. Ponieważ moment pary jest wektorem swobodnym, więc początek A jego możemy obrać dowolnie, a więc np. w punkcie przyłożenia siły P. Taki układ sił nazywa się SKRĘTNIKIEM. Usiłuje on nadać ciału ruch śrubowy.

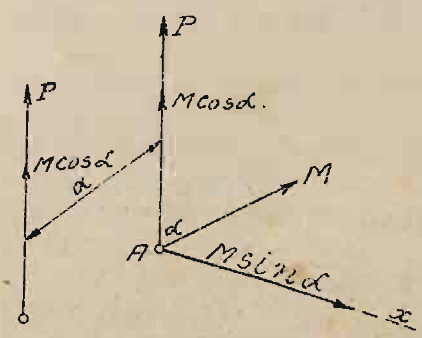
Gdy moment pary skrętnika jest zerem, to skrętnik sprowadza się do siły, a gdy siła skrętnika jest zerem, to sprowadza się on do pary, a więc siła i para są szczególnemi przypadkami skrętnika.

41. INNY UKŁAD. Dajmy na to, że mamy układ, złożony z siły P, przyłożonej w punkcie A i z pary, mającej moment o jakimkolwiek kierunku. Obierzmy znowu początek tego momentu w punkcie A i oznaczmy kąt, jaki tworzy moment z siłą przez α.

Dowiedźmy, że TAKI UKŁAD DAJE SIĘ ZAWSZE SPROWADZIĆ DO SKRĘTNIKA.

Poprowadźmy w płaszczyźnie wektorów M, P prostą x, prostopadłą do P i rozłóżmy M na 2 składowe w kierunku P i x. Te składowe są odpowiednio równe $M\cos\alpha$ i $M\sin\alpha$.

Zwróćmy uwagę na $M\sin\alpha$. Składowa ta działa w płaszczyźnie, przechodzącej przez punkt A i prostopadłej do x a z tego wynika, że $M\sin\alpha$ jest momentem pary, leżącej w jednej płaszczyźnie z siłą P, a taka para i taka siła sprowadzają się do jednej siły, która leży w tej samej płaszczyźnie i jest odległa od siły P o $a = \frac{M.\sin\alpha}{P}$

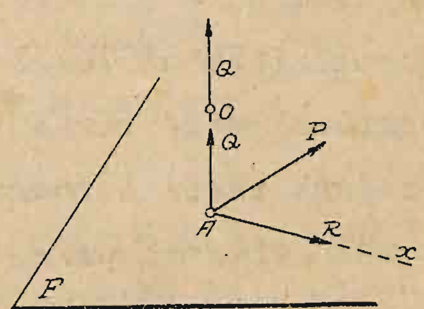


Rys. 44.

W ten sposób sprowadziliśmy dany układ do innego, złożonego z siły P i z pary, o momencie $M\cos\alpha$, który jest do siły równoległy. Można przenieść początek tego momentu do punktu przyłożenia siły, wówczas otrzymamy skrętnik c.b.d.d.

42. REDUKCJA UKŁADU. Niech będzie jakieś ciało sztywne i przypuśćmy, że działa nań układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Układ taki można sprowadzić do prostszego różnemi sposobami.

Obierzmy np. w przestrzeni dowolny punkt O i dowolną płaszczyznę F. Dowiedźmy, że układ powyższy daje się sprowadzić do jednej siły, przyłożonej w punkcie O i do jednej siły /lub jednej pary/, działającej w płaszczyźnie F.



Rys. 45.

Dajmy na to, że jedna z sił układu np. P przecina płaszczyznę F w punkcie A. Połączmy punkty A i O i oznaczmy prostą przecięcia płaszczyzn PAO i F przez x.

Rozłóżmy siłę P na 2 składowe w kierunku OA i x i oznaczmy te składowe przez Q i R, a następnie przenieśmy punkt przyłożenia siły Q do punktu O. A zatem siłę P rozłożyliśmy na 2 składowe, z których jedna jest położona w płaszczyźnie F, a druga jest przyłożona w punkcie O. Tak samo uczyńmy z innemi siłami układu, to otrzymamy n sił, położonych w płaszczyźnie F i n sił, przyłożonych w punkcie O. Wszystkie siły, przyłożone w O posiadają zawsze wypadkową, która jest również przyłożona w O, zaś wszystkie siły, działające w płaszczyźnie F dają się zawsze sprowadzić albo do jednej siły, albo do jednej pary c.b.d.d.

Inny sposób uproszczenia układu przestrzennego jest następujący: przypuśćmy, że siła P, przyłożona w A jest jedną z sił układu. Obierzmy w przestrzeni dowolny punkt O, który nazwiemy PUNKTEM REDUKCJI lub ŚRODKIEM REDUKCJI UKŁADU. Przyłóżmy w tym punkcie 2 siły równe i odwrotne, z których każda jest równa i równoległa do P. Dana siła P i $-P$ tworzą parę, której moment jest taki sam, jak moment siły P względem O, możemy więc daną siłę P zastąpić przez tę parę i siłę przyłożoną w O. Postąpmy tak samo ze wszystkiemi innemi siłami układu, to otrzymamy n sił, przyłożonych w O i n par.

Te n sił posiadają siłę wypadkową, którą oznaczymy przez R, a n par mają zawsze parę wypadkową, moment tej ostatniej oznaczymy przez

---

N Jest to suma geometryczna momentów par składowych lub suma geometryczna momentów sił danych względem O. A WIĘC CAŁY UKŁAD SPROWADZILIŚMY DO JEDNEJ SIŁY I DO JEDNEJ PARY. c.b.d.d.

Siła R nie zależy, ani pod względem wielkości ani pod względem kierunku od położenia punktu O w przestrzeni. Jest to oczywiste, bo gdy obierzemy punkt ten gdzieindziej, niż poprzednio, to wskutek tego ani wielkości ani też kierunek sił składowych nie ulegną zmianie, a więc nie zmieni się również wypadkowa R.

Inaczej jest z momentem N pary wypadkowej, ten zależy oczywiście od położenia punktu O.

Widzieliśmy poprzednio, że siła R i para N sprowadzają się do skrętnika, a więc UKŁAD SIŁ DAJE SIĘ ZAWSZE SPROWADZIĆ DO SKRĘTNIKA. Osią tego skrętnika jest prosta działania jego siły. Nosi ona nazwę OSI CENTRALNEJ UKŁADU LUB OSI POINSOTA.

Siła skrętnika wypadkowego będzie równa R a para skrętnika będzie miała moment równy $N.\cos\alpha$, gdzie α jest kątem $/\widehat{R,N}/$ Innemi słowy: moment pary skrętnika jest równy rzutowi momentu N na siłę R. Jest oczywistem, że rzut ten jest niezależny od położenia środka redukcji w przestrzeni, a z tego wynika, że jest on dla danego układu wielkością stałą, czyli t.zw. niezmiennikiem układu.

43. ANALITYCZNE WYZNACZENIE SKRĘTNIKA WYPADKOWEGO.

Niech będzie prostokątny układ współrzędnych x, y, z i pewien układ sił, składający się z siły P_1, tworzącej z osiami kąty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ i przyłożonej w punkcie $A_1/x_1, y_1, z_1/$, dalej z siły P_2, której kąty kierunkowe są $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ i która przyłożona jest w $A_2/x_2, y_2, z_2/$ i.t.d. Wszystkich sił jest n. Środek redukcji O obieramy za początek układu współrzędnych. Oznaczmy siłę wypadkową przez R, kąty, które ona tworzy z osiami przez $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r$, a moment pary wypadkowej przez N i wreszcie kąty tego momentu z osiami przez $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Mamy wyznaczyć R, N i te sześć kątów.

Dajmy na to, że do układu należy siła $P(\alpha, \beta, \gamma)$, przyłożona w punkcie $A(x, y, z)$. Przyłóżmy w punkcie O dwie siły równe i odwrotne, z których każda jest równa i równoległa do P. Otrzymaliśmy więc siłę P, przyłożoną w O i parę, złożoną z siły danej P i z $-P$. Rozłóżmy siłę P, przyłożoną w O na 3 składowe w kierunku osi i oznaczmy te składowe odpowiednio przez P_x, P_y i P_z. Na zasadzie twierdzeń ogólnych o wektorach możemy napisać:

$$P_x = P\cos\alpha \; ; \; P_y = P\cos\beta \; ; \; P_z = P\cos\gamma \; ;$$

gdzie P, α, β, γ są znane.

Oznaczmy dalej moment pary P i $-P$ przez M i rozłóżmy go na 3 składowe, również w kierunkach osi. Oznaczmy te składowe odpowiednio przez M_x, M_y, M_z.

Składowe te wyznaczymy łatwo zważywszy, że moment pary P i $-P$ wzgl. punktu O jest to to samo, co moment siły P, przyłożony w A względem tegoż punktu. Wyprowadzono poprzednio /par.11/, że

$$M_x = y.P_z - z.P_y \; ; M_y = z.P_x - x.P_z \; ; M_z = x.P_y - y.P_x$$

czyli, że takie są momenty składowych P_x, P_y i P_z względem punktu O.

Tak więc zamiast siły P mamy teraz 3 siły P_x, P_y i P_z, działające w kierunkach osi współrzędnych, oraz 3 momenty M_x, M_y, M_z skierowane również według tych osi.

Uczyńmy to samo ze wszystkiemi innemi siłami, to otrzymamy $3n$ sił, skierowanych według osi i $3n$ momentów par, posiadających także kierunki osi.

Siła R jedna z ośmiu niewiadomych, jest wypadkową tych $3n$ sił i na tej zasadzie wyznaczymy ją.

Rzuty siły R na osie x, y i z są równe sumom rzutów sił układu na odpowiednie osie, czyli

$$R_x = \Sigma P_x \ ; \ R_y = \Sigma P_y \ ; \ R_z = \Sigma P_z$$

Stąd

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Wyznaczymy teraz kąty kierunkowe siły R, czyli α_r, β_r, γ_r. Rzut siły R na oś x jest R_x, więc: $R_x = R \cdot \cos\alpha_r$, skąd $\cos\alpha_r = \frac{R_x}{R}$

Tak samo otrzymamy: $\cos\beta_r = \frac{R_y}{R}$; $\cos\gamma_r = \frac{R_z}{R}$

W ten sposób siła R została wyznaczona zarówno pod względem wielkości, jak i pod względem kierunku.

Wyznaczymy teraz moment N i jego kąty kierunkowe $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$. Ponieważ rzuty momentu na osie x, y i z są równe sumie rzutów momentów składowych na odpowiednie osie, więc:

$$N_x = \sum M_x \qquad N_y = \sum M_y \qquad N_z = \sum M_z$$

Stąd

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

Wreszcie będzie:

$$\cos\alpha_n = \frac{N_x}{N}; \quad \cos\beta_n = \frac{N_y}{N}; \quad \cos\gamma_n = \frac{N_z}{N}$$

Wyznaczymy jeszcze kąt ϑ pomiędzy momentem wypadkowym N i siłą wypadkową R. Wiemy, że

$$\cos\vartheta = \cos\alpha_r \cos\alpha_n + \cos\beta_r \cos\beta_n + \cos\gamma_r \cos\gamma_n$$

Ponieważ we wzorze tym wszystkie cosinusy są znane, więc i $\cos\vartheta$ został wyznaczony, a tem samem i kąt ϑ. Podstawiając do ostatniego wzoru, tylko co znalezione wartości na cosinusy, otrzymamy:

$$\cos\vartheta = \frac{R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z}{R.N} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Pomnóżmy obie strony tego wzoru przez N, będziemy mieli:

$$N.\cos\vartheta = \frac{R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z}{R.}$$

Wyrażenie $N\cos\vartheta$ jest to rzut momentu N na siłę R, jest to więc niezmiennik układu sił, t.zn. że wielkość ta nie zależy od położenia środka redukcji w przestrzeni, a ponieważ i mianownik R jest wielkością niezmienną, więc z tego wynika że i licznik powyższego ułamka ma wartość dla danego układu stałą, czyli jest również niezmiennikiem

Przypuśćmy, że

$$R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z' = 0$$

W takim razie, jak wynika z wzoru /1/ $\cos\vartheta = 0$ i $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. A więc moment pary wypadkowej jest prostopadły do siły wypadkowej, a z tego wynika, że ta para i siła leżą w jednej płaszczyźnie.

Wiadomo, że siła i para, leżące w jednej płaszczyźnie, sprowadzają się zawsze do jednej siły.- Wnioskujemy więc, że jeśli niezmiennik

$$R_x N_x + R_y N_y + R_z N_z$$

jest zerem, to układ sprowadza się do jednej siły.

Przypuśćmy teraz, że $R = 0$ W tym razie układ sprowadza się do jednej pary.

44. WARUNKI RÓWNOWAGI PRZESTRZENNEGO UKŁADU SIŁ.

Aby przestrzenny układ sił pozostawał w równowadze, jest koniecznem, aby siła wypadkowa i para wypadkowa były zerami. Otrzymujemy więc warunki:

$$R = 0 \quad \ldots\ldots (1); \quad N = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Lecz $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ i aby ono było równe zeru, to każdy z wyrazów, stojących pod pierwiastkiem musi oddzielnie być zerem. Czyli inną postacią warunku /1/ są 3 równania następujące: $R_x = 0$; $R_y = 0$ $R_z = 0$. Inaczej $\Sigma P_x = 0$; $\Sigma P_y = 0$; $\Sigma P_z = 0$

Tak samo ponieważ $N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$ więc $N_x = 0$; $N_y = 0$; $N_z = 0$ czyli $\Sigma M_x = 0$; $\Sigma M_y = 0$; $\Sigma M_z = 0$

Aby więc przestrzenny układ sił był w równowadze, musi być spełnionych sześć warunków, a mianowicie:

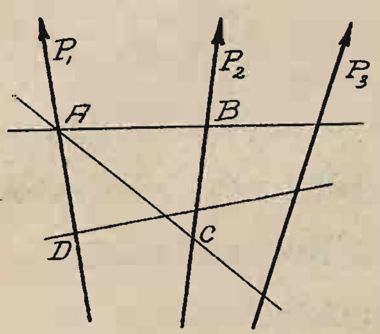
Sumy rzutów wszystkich sił układu na osi x, y, z powinny być zerami.

Sumy momentów wszystkich sił układu względem osi x, y, z powinny być zerami.

Ale za osie współrzędnych można obrać dowolne proste w przestrzeni, a z tego wynika, że: JEŚLI PRZESTRZENNY UKŁAD SIŁ JEST W RÓWNOWADZE, TO SUMA

RZUTÓW SIŁ TEGO UKŁADU NA KAŻDY KIERUNEK ORAZ SUMA MOMENTÓW WZGLĘDEM KAŻDEJ PROSTEJ PRZESTRZENI JEST ZEREM.

Rozpatrzmy pewien przypadek szczególny.



Rys. 46.

Załóżmy, że układ składa się z trzech sił P_1, P_2 i P_3 i że pozostaje on w równowadze. Dowiedziemy, że TE TRZY SIŁY UKŁADU LEŻĄ W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE i przechodzą przez jeden punkt.

Obierzmy na linji działania siły P_1 dowolny punkt A i połączmy go z punktem B, wziętym dowolnie na linji działania siły P_2.

Ponieważ układ jest w równowadze, więc suma momentów sił tego układu względem prostej AB musi być zerem. Lecz siła P_1 przecina prostą AB więc moment jej względem tej prostej jest zerem. Tak samo moment siły P_2 względem prostej AB jest zerem, i z tego wynika, że i moment siły P_3 względem tejże prostej AB jest zerem. Lecz moment siły względem prostej tylko wtedy może być zerem, gdy siła ta przecina ową prostą, z czego wnosimy, że siła P_3 przecina prostą AB.

Obierzmy dalej na linji działania siły P_2 inny punkt C i połączmy go z A, to tak, jak poprzednio, dowiedziemy, że prosta AC przecina siłę P_3.

Z tego wynika, że siła P_3 leży w płaszczyźnie ABC /bo przecina ona dwie proste tej płaszczyzny/. Dowiedliśmy więc, że siła P_3, leży w jednej płaszczyźnie z siłą P_2. Należy jeszcze dowieść, że w tej płaszczyźnie leży P_1.

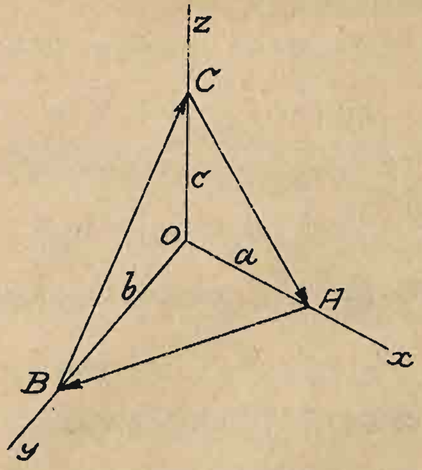
Gdy poprowadzimy w tej płaszczyźnie ABC jakąś prostą, to powtarzając z nią rozumowanie poprzedzające przekonamy się, że ta prosta musi przeciąć siłę P_1

Przypuśćmy, że D jest tym punktem przecięcia, to oczywiście punkt ten leży w płaszczyźnie ABC Tak więc już mamy dwa punkty siły P_1 /A i D/, leżące w płaszczyźnie ABC, a z tego wynika, że ta siła także leży w owej płaszczyźnie c.b.d.d.

45. PRZYKŁADY. 1/ Niech będzie prostokątny układ współrzędnych oraz płaszczyzna, przecinająca osie współrzędnych w punktach A, B i C i tworząca na tych osiach odcinki odpowiednio równe a, b, c.

Przypuśćmy, że odcinki AB, BC, CA, OA,

OB i OC wyobrażają siły.



Rys. 47.

Chodzi o wyznaczenie kąta ϑ między siłą wypadkową i momentem pary wypadkowej.

Za środek redukcji obieramy początek współrzędnych O. Rzut siły wypadkowej R na oś x /$=R_x$/ jest równy sumie rzutów wszystkich sił układu, będzie więc:

$$R_x = a$$

Oznaczmy rzuty siły R na osie y i z odpowiednio przez R_y i R_z, biorąc rzuty wszystkich sił układu na te osi, znajdziemy $R_y = b$ oraz $R_z = c$.

Stąd

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Wyznaczmy teraz moment pary wypadkowej N. Oznaczmy rzuty tego momentu na osi x, y, z odpowiednio przez N_x, N_y i N_z. Rzut N_x momentu jest równy sumie momentów wszystkich sił układu względem osi x. Biorąc te momenty, otrzymamy:

$$N_x = b.c;\ N_y = c.a;\ N_z = a.b.$$

Stąd

$$N = \sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}$$

Na zasadzie paragrafu poprzedzającego:

$$\cos\vartheta = \frac{N_x R_x + N_y R_y + N_z R_z}{NR} = \frac{3.a.b.c}{\sqrt{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)(a^2+b^2+c^2)}} \quad (1)$$

Znajdźmy jeszcze warunki, jakie winny być spełnione, aby oś centralna układu przechodziła przez punkt O.

Jeśli oś centralna przechodzi przez punkt O, to układ sprowadza się do skrętnika, przyczem moment pary tego skrętnika leży na linji działania siły wypadkowej, czyli kąt ϑ jest równy 0 albo π.

W pierwszym przypadku $\cos\vartheta = 1$, w drugim zaś $\cos\vartheta = -1$. Gdy podstawimy we wzorze /1/ jakąś z tych dwóch wartości $\cos\vartheta$ i podniesiemy otrzymany rezultat stronami do kwadratu, to otrzymamy:

$$9a^2b^2c^2 = (b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)(a^2+b^2+c^2)$$

lub

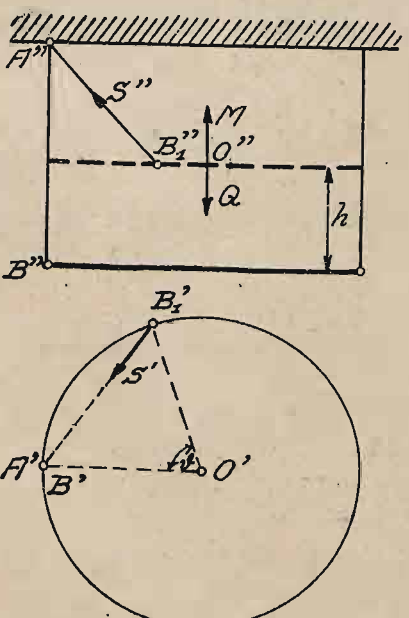
$$a^2(b^2-c^2)^2 + b^2(c^2-a^2)^2 + c^2(a^2-b^2)^2 = 0$$

Z tego wynika, że każde z wyrażeń, stojących w nawiasach jest oddzielnie równe zeru /ponieważ $a^2 \neq 0,\ b^2 \neq 0,\ c^2 \neq 0$ /, czyli $b^2-c^2=0,\ c^2-a^2=0$ $a^2-b^2=0$, a stąd $b=\pm c;\ c=\pm a;\ a=\pm b$

zaś ograniczając nasze rozwiązania tylko do pierwszej ćwiartki otrzymamy $b = c$; $c = a$

$a = b$ lub $a = b = c$.

II/. Tarcza kołowa o promieniu $= a$ i ciężarze Q jest zawieszona na n pionowych sznurach, przyczepionych w jednakowych odległościach do jej obwodu. Długość każdego sznura $= 2a$ /czyli równa się średnicy tarczy/. Przyłóżmy do tarczy parę sił, działającą w płaszczyźnie tarczy tak, aby pionowy jej moment był skierowany w górę. Wskutek działania tej pary tarcza, pozostając poziomą, obróci się i podniesie się w górę, a sznury przybiorą położenie ukośne. Tak



Rys. 48.

więc np. sznur $AB/A'B', A''B''/$ zajął obecnie położenie $AB_1/A'B_1', A''B_1''/$ a tarcza w tem nowem położeniu jest o h wyżej od pierwotnego. Chodzi o wyznaczenie momentu pary, przyłożonej do tarczy.

Na tarczę działają następujące siły: 1/ siła ciężkości Q, przyłożona do środka tarczy O, 2/ para, o momencie nieznanym, który oznaczymy przez M oraz 3/ naprężenie n sznurów, z których każde niech będzie S. Pod działaniem tych sił tarcza pozostaje w równowadze.

Poprowadźmy przez środek O prostą pionową i weźmy rzuty wszystkich sił układu na jej kierunek, to otrzymamy:

$$-Q+n.S.\cos\varphi=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

gdzie φ oznacza kąt każdego ze sznurów z pionem.

Gdy weźmiemy momenty wszystkich sił układu względem prostej z, to będziemy mieli:

$$M-n.S.\sin\varphi.a.\cos\frac{\vartheta}{2}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

{Moment siły S wzgl. prostej z został tu wyznaczony w znany już sposób. przez punkt O poprowadziliśmy płaszczyznę, prostopadłą do prostej z /czyli płaszczyznę tarczy/ i wyznaczyliśmy moment rzutu siły S na tę płaszczyznę względem punktu i ten moment jest równy momentowi siły względem prostej z.}

Pomiędzy kątami ϑ i φ zachodzi prosty związek: zwróćmy uwagę na sznur AB w nowem położeniu. Ten sznur tworzy z pionem kąt φ, więc jego rzut na płaszczyznę poziomą jest równy $2a.\sin\varphi$. Lecz z trójkąta $A'O'B'$ wynika, że ten sam rzut jest równy $2a.\sin\frac{\vartheta}{2}$. Więc

$$2a.\sin\varphi = 2a.\sin\frac{\vartheta}{2} \text{ skąd } \varphi = \frac{\vartheta}{2}$$

Podstawmy tę wartość $\frac{\vartheta}{2}$ do /2/:

$$n.S.a.\sin\varphi\cos\varphi = M \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Z równań /1/ i /3/ rugujemy S, dzieląc drugie z nich przez pierwsze. Otrzymamy:

$$\sin\varphi = \frac{M}{a.Q} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Wyrazimy jeszcze $\sin\varphi$ w funkcji h.

Rzut sznura AB na kierunek pionowy jest równy $2a\cos\varphi$. Skądinąd wiadomo, że ten sam rzut jest także równy $2a-h$, więc

$$2a\cos\varphi = 2a-h \text{ skąd } \cos\varphi = \frac{2a-h}{2a}$$

a $\sin = \dfrac{\sqrt{(4a-h)h}}{2a}$ i podstawiając tę wartość $\sin\varphi$ do /4/, otrzymamy:

$$M = \frac{Q\sqrt{(4a-h)h}}{2}$$

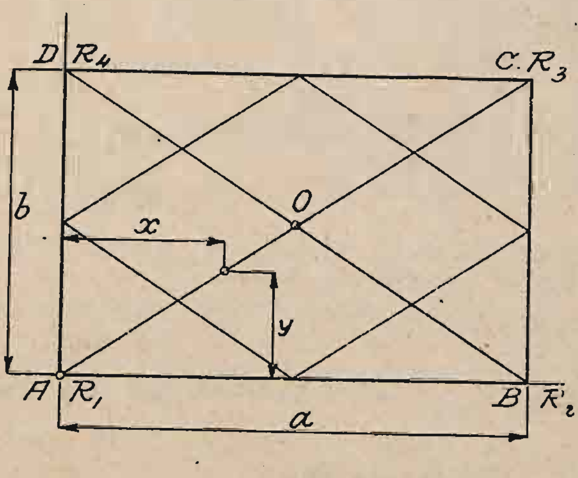
Wyznaczmy jeszcze naprężenie jednego ze sznurów. Z równania /1/ mamy:

$S = \frac{Q}{n.\cos\varphi}$ skąd $S = \frac{2Q.a}{n(2a-h)}$. Gdyby h było zerem, to otrzymalibyśmy:

$$M = 0 \quad \text{a} \quad S = \frac{Q}{n}$$

Ten wynik daje się przewidzieć bezpośrednio. Gdyby tarcza podniosła się aż do sufitu, to byłoby $h = 2a$, skąd $M = Q.a, S = \infty$. Oznacza to, że nie możemy doprowadzić tarczy do sufitu, bo przedtem sznury się zerwą.

III/. Prostokątny stół $ABCD$ spoczywa na czterech nogach, umieszczonych w wierzchołkach. Długość stołu $= a$, szerokość zaś $= b$. Na stole kładziemy ciężar, ważący Q kg.



Rys. 49.

Odległość tego ciężaru od krawędzi AD oznaczmy przez x, odległość zaś od krawędzi AB przez y. Załóżmy jeszcze, że ciężar Q jest tak wielki, że ciężar stołu wobec niego jest bardzo mały i można go nie brać w rachubę.

Mamy wyznaczyć reakcje, które podłoga wywiera na nogi stołu.

Oznaczmy te nieznane reakcje podłogi na nogi A, B, C i D odpowiednio przez R_1, R_2, R_3 i R_4 i obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za początek współrzędnych weźmy punkt A, za oś x prostą AB, za oś y prostą AD i wreszcie za oś z prostą, przechodzącą przez A i prostopadłą do płaszczyzny stołu.

Na stół działa więc pięć sił: Q, R_1, R_2, R_3 i R_4 i wszystkie są skierowane pionowo, a z tego wynika, że rzuty każdej z nich na osi x i y są zerami, czyli, że biorąc rzuty na te osi żadnych równań nie otrzymamy.

Pozostaje tylko oś z i gdy weźmiemy rzuty na jej kierunek, to będziemy mieli:

$$R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = Q \quad \ldots\ldots (1)$$

Biorąc momenty względem osi x i y otrzymamy:

$$-R_3 b - R_4 b + Qy = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

$$R_2 a + R_3 a - Qx = 0 \quad \ldots\ldots (3)$$

Suma momentów względem osi z również nie da żadnego równania, bo wszystkie siły układu są do tej osi równoległe, a więc moment każdej z nich względem tej osi jest zerem.

Otrzymaliśmy więc trzy równania, zawierające cztery niewiadome i pozatem więcej równań ułożyć nie możemy. Z tego wynika, że reakcje R_1, R_2, R_3 i R_4 są nieokreślone: jedną z nich można zawsze obrać dowolnie, a wtedy wyznaczymy trzy pozostałe. Innemi słowy: jest nieskończona liczba układów reakcji, czyniących zadość warunkom równania. Tego rodzaju siły nazywają się STATYCZNIE NIEWYZNACZALNEMI.

Jest rzeczą oczywistą, że w rzeczywistości reakcje te są określone, więc zachodzi pytanie, dlaczego nie możemy ich wyznaczyć ?

Otóż: nie uwzględniliśmy pewnej ważnej okoliczności, przyjęliśmy bowiem milcząco, że stół jest ciałem sztywnem, a ciał takich w naturze niema - wszystkie ciała odkształcają się pod działaniem sił. Już we wstępie do statyki powiedzieliśmy, że nie biorąc w rachubę odkształcalności ciał, nie pomijamy jakiejś cechy drugorzędnej, lecz zasadniczą właściwość ciał i gdy się z nią nie liczymy, to otrzymujemy niekiedy rozwiązanie nieokreślone, albo nawet błędne.- Że istotnie w tym razie ze sprężystością liczyć się musimy, przekonywa nas uwaga następująca: przypuśćmy, że mamy stół o czterech nogach, z których trzy są drewniane, a czwarta stanowi miękka spiralna sprężyna, której długość naturalna mało przewyższa długość nogi, oczywiście ta czwarta noga prawie nie będzie podpierała stołu, gdyż naprężenie sprężyny jest bardzo małe. Albo też niech będzie płyta, zawieszona na czterech pionowych sznurach, przyczem trzy z nich są zwykłe, konopne, a jeden cienki gumowy, słabo rozciągnięty. I tu płytę będą podtrzymywały prawie całkowicie trzy pierwsze sznury.

W naszym zadaniu założymy, że odkształcenie jest wprost proporcjonalne do sił działających, czyli, że skrócenie nogi A stołu wynosi kR_1 gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Tak samo skrócenie nogi B jest kR_2 i t.d. Przypuszczamy prócz tego, że blat pozostaje płaskim. Aby uzależnić od siebie te odkształcenia połączmy punkty A i C oraz B i D, to na przecięciu prostych AC i BD otrzymamy punkt O, który jest środkiem prostokąta $ABCD$ /czyli blatu stołu/. Końce przekątni AC opadły o kR_1 i kR_3, więc środek tej przekątni opadł o

$$\frac{kR_1 + kR_3}{2}$$

Końce drugiej przekątni opadły o kR_2 i kR_4 a więc jej środek o $\frac{kR_2 + kR_4}{2}$, a że środek przekątni AC jest również środkiem BD, więc $\frac{kR_1 + kR_3}{2} = \frac{kR_2 + kR_4}{2}$ skąd

$$R_1 + R_3 = R_2 + R_4 \ldots\ldots\ldots (4)$$

W ten sposób otrzymaliśmy jeszcze czwarte równanie i reakcje podłogi dadzą się wyznaczyć. Zobaczymy, jaki warunek powinien być spełniony, aby ciężar Q wspierał się tylko na trzech nogach. Przypuśćmy więc, że $R_3 = O$. Wtedy równania /1/, /2/, /3/ i /4/ przekształcą się w następujące:

$$R_1 + R_2 + R_4 = Q$$

$$R_4 b = Qy$$

$$R_2 a = Qx$$

$$R_1 = R_2 + R_4$$

Rugujemy z tych równań reakcje R_1, R_2 i R_4

Wypadnie $$\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{b}{2}} = 1$$

Jest to równanie linji prostej, przyczem $\frac{a}{2}$ i $\frac{b}{2}$ są to odcinki, jakie tworzy ta prosta na osiach współrzędnych. Wynik ten oznacza, że gdy ciężar Q będzie położony na tej prostej, to stół będzie się wspierał tylko na trzech nogach.

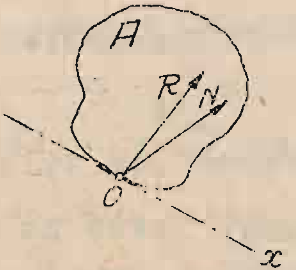
Gdy, powtarzając poprzednie rozumowanie, założymy kolejno, że $R_1 = 0$, $R_2 = 0$ i $R_3 = 0$, to otrzymamy, że aby stół wspierał się tylko na trzech nogach, to ciężar Q musi leżeć na obwodzie rombu, którego wierzchołki są w środkach krawędzi stołu.

46. PRZYPADKI SZCZEGÓLNE RÓWNOWAGI PRZESTRZENNEGO UKŁADU SIŁ.

Na ciało sztywne A, którego jeden punkt /rys.52/ jest nieruchomy, działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ a prócz tego reakcja w punkcie O. Chodzi o to, jakie warunki powinny być spełnione, aby ciało pozostawało w spoczynku.

Obieramy za środek redukcji punkt O i sprowadźmy układ sił do jednej wypadkowej R i do jednej pary wypadkowej, o momencie N. Poprowadźmy przez punkt O, jakąkolwiek prostą x, byle nie prostopadłą do momentu N i weźmy momenty wszystkich sił układu względem tej prostej.

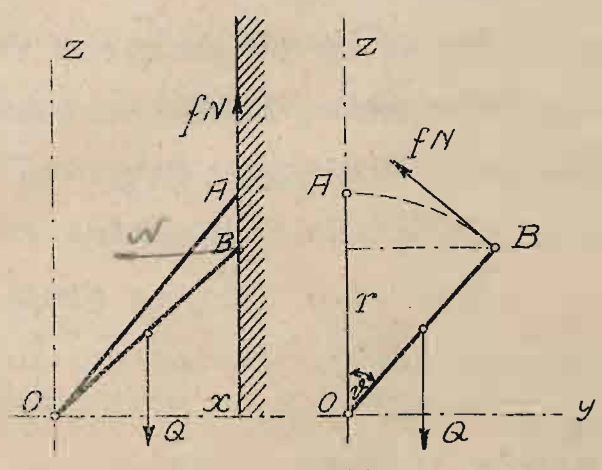
Moment wypadkowej R, a tak samo moment reakcji ciała B na A, działającej w punkcie O, względem prostej x są zerami. Pozostaje jeszcze moment pary wypadkowej. Ponieważ prosta x nie jest prostopadła do N, więc rzut tego momentu na tę prostą nie mógłby być zerem i nie mogłaby zachodzić równowaga, a z tego wynika, że WARUNKIEM KONIECZNYM RÓWNOWAGI DANEGO UKŁADU JEST, ABY MOMENT PARY WYPADKOWEJ N BYŁ ZEREM, czyli, aby siła geometryczna momentów sił układu względem O była zerem. Łatwo zrozumieć, że warunek ten jest dostateczny. Istotnie: przypuśćmy, że $N = O$, zatem cały układ sprowadza się do siły R, przyłożonej w O i ta siła równoważy się z reakcją w punkcie O.



Rys. 50.

47. PRZYKŁADY I. Sztaba o długości a i ciężarze Q jest umocowana luźno w punkcie O. W pewnej odległości od O sztaba opiera się o pionową ścianę, tworząc z nią dany kąt α. Współczynnik tarcia między sztabą a ścianą jest równy f.

Przypuśćmy, że sztaba się obraca, pozostając ciągle w zetknięciu ze ścianą, czyli że opisuje na niej koło. Niech OA będzie początkowem położeniem sztaby, a OB - położeniem skrajnem, kiedy zachodzi jeszcze równowaga, ale tarcie jest już całkowicie rozwinięte. Gdyby jeszcze cokolwiek odchylić sztabę, to zaczęłaby ona już spadać. Chodzi o wyznaczenie tego krańcowego położenia równowagi sztaby. Innemi słowy: chodzi o wyznaczenie kąta $\vartheta = \measuredangle AOB$.



Rys. 51.

Na sztabę działają następujące siły: 1/ siła ciężkości Q, 2/ reakcja normalna N ściany, 3/ siła tarcia $=fN$, skierowana po stycznej do koła o promieniu r, które zakreśla sztaba przy obrocie, 4/ reakcja przegubu w punkcie O, o nieznanym kierunku i wielkości.

Aby nie wprowadzić reakcji Nr.4, poprowadźmy przez punkt O prostą pionową z i weźmy momenty wszystkich sił układu względem tej prostej.

Moment siły Q względem prostej z jest zerem, bo siła ta jest równoległa do niej. Moment siły N jest równy $N.r.\sin\vartheta$. W celu wyznaczenia momentu siły fN prowadzimy płaszczyznę, prostopadłą do osi z i przechodzącą przez punkt O i bierzemy moment rzutu siły fN na tę płaszczyznę względem punktu O, to będzie to to samo, co moment siły fN względem osi z. Otrzymamy stąd, że moment ten jest:

$-fN\cos\vartheta.a.\sin\alpha$ i $N.r.\sin\vartheta - fN.\cos\vartheta.a.\sin\alpha = 0$..(1)

To równanie byłoby dostatecznem do wyznaczenia kąta ϑ, ale wyznaczymy jeszcze i reakcję N. W tym celu weźmiemy momenty względem prostej x, prostopadłej do ściany i przechodzącej przez punkt O. Moment siły N względem tej prostej jest zerem, moment siły Q jest $Q\frac{r}{2}\sin\vartheta$, a wreszcie moment siły fN jest $-fN.r$, więc

$$Q\frac{r}{2}\sin\vartheta - fN.r = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Z /1/ mamy

$$r.\sin\vartheta - f\cos\vartheta.a.\sin\alpha = 0 \ldots.$$

a że $r = a\cos\alpha$ więc $\cos\alpha.\sin\vartheta = f\sin\alpha\cos\vartheta$

dzieląc przez $\cos\alpha.\cos\vartheta$ wypadnie $tg\vartheta = f.tg\alpha$

Z /2/ mamy:

$$N = \frac{Q \cdot \sin\vartheta}{2f} = \frac{Q\,tg\alpha}{\sqrt{1+f^2tg^2\alpha}}$$

W przypadku szczególnym, gdy sztaba tworzy ze ścianą kąt $\alpha = \frac{\pi}{4}$ otrzymujemy $tg\vartheta = f = tg\alpha$ lub $\vartheta = \varphi$, gdzie φ jest kątem tarcia.

Niech będzie jakiekolwiek ciało, osadzone na osi, sztywno złączonej z ciałem i przypuśćmy, że jest osadzona w dwóch łożyskach A i B, uważanych za punkty.

Dajmy na to, że na ciało działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ oraz reakcje łożysk.- Obierzmy łożysko A za środek redukcji i sprowadźmy układ do jednej siły wypadkowej R i do jednej pary wypadkowej N.

Rozłóżmy siłę R na 2 składowe w kierunku AB oraz w kierunku do AB prostopadłym. Pierwszą z tych składowych oznaczmy przez R_1, drugą przez R_2. Rozłóżmy dalej moment N na dwie składowe w tych samych kierunkach i oznaczmy składową w kierunku AB przez N_1, zaś drugą składową przez N_2. Weźmy momenty wszystkich sił układu względem prostej AB. Momenty reakcji łożysk, jak również momenty sił R_1 i R_2 oraz rzut momentu N_2 są zerami. Pozostaje tylko rzut momentu N_1. Z tego wynika, że warunkiem koniecznym równowagi układu jest, aby było $N_1 = 0$ czyli, aby suma momentów wszystkich sił układu względem osi AB była zerem.

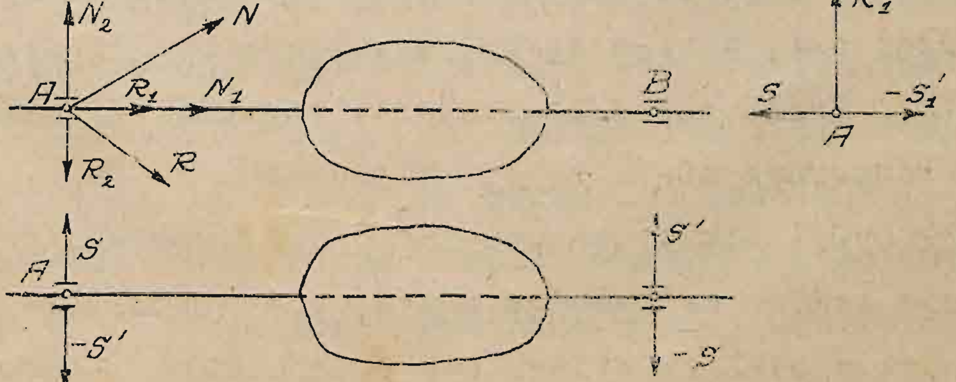
Oznaczmy odległość łożysk AB przez a, a każdą z sił pary N_2 przez S, to oczywiście $S.a = N_2$, skąd $S = \frac{N_2}{a}$.

A więc para N_2 składa się z dwóch takich sił S. Ta para wywołuje w każdym z łożysk reakcję równą i odwrotną do S. Oznaczymy te reakcje przez S' i $-S'$. Innemi słowy i para N_2 równoważy się z reakcjami łożysk S' i $-S'$.

Siła R_1 stara się wysunąć oś z łożysk. Ale łożyska nie mogą wywierać reakcji, skierowanych wzdłuż osi, a więc nie mogą też równoważyć siły R_1. Jeśli więc nie zachodzi równość $R_1 = 0$, to równowaga nie może być zachowana. Ale łożyska mogą być i tak urządzone, aby mogły wywierać reakcję wzdłuż osi. Można w tym celu przymocować do osi w pobliżu łożysk dwa pierścienie, które nie pozwoliłyby osi przesuwać się. Wtedy składowa R_1 może już nie być zerem i w takim razie jest ona zrównoważona przez reakcje osiowe łożysk

Innemi słowy: suma tych reakcji osiowych jest równa składowej R_1. Jednakowoż nie mamy możności wyznaczenia każdej z tych reakcji oddzielnie, gdyż więcej równań od jednego, zawierających te dwie reakcje, nie biorąc w rachubę sprężystości wału, nie otrzymamy. Mamy więc znów do czynienia z reakcjami statycznie niewyznaczalnemi.

Przypuśćmy, że składowa R_1 siły R jest zerem. Pozostaje jeszcze składowa R_2 tejże siły i jest ona zrównoważona reakcją łożyska A, którą oznaczymy przez R_1'. W takim razie ogólna reakcja, jaką wywiera łożysko A, jest wypadkową reakcji R_1' i S'.



Rys. 52.