względem każdego punktu musi być równy sumie momentów sił składowych. Moment danej siły P względem A jest równy zeru, więc moment wypadkowy układu względem A musi być równy momentowi pary. Gdy moment pary jest zwrócony do nas, to siłę P trzeba tak przesunąć, aby jej moment względem A był też do nas zwrócony.

ROZDZIAŁ III.

O PŁASKIM UKŁADZIE SIŁ.

UPROSZCZANIE PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ. Niech na ciało sztywne działa n sił: $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$, leżących w jednej płaszczyźnie. Taki układ sił nazywa się UKŁADEM PŁASKIM.

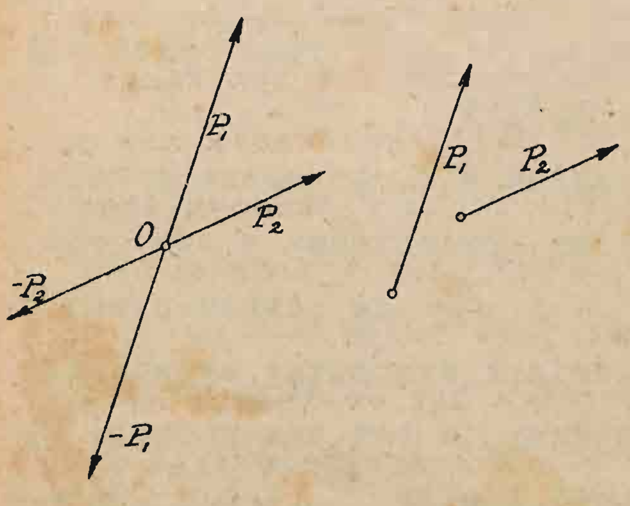
Gdy mamy płaski układ sił, to można zawsze znaleźć jego wypadkową; przenieśmy w tym celu, punkty przyłożenia P_1 i P_2 do punktu przecięcia ich linji działania i wyznaczmy wypadkową tych sił; dalej znajdźmy, w ten sam sposób, wypadkową tej wypadkowej i siły P_3 i t.d. Ostatecznie dojdziemy do wypadkowej całego układu.

Może tu zajść wypadek szczególny, dajmy na to, że znaleźliśmy wypadkową wszystkich sił układu, prócz ostatniej i przypuśćmy, że ta wypadkowa jest siłą równą i odwrotną i nie leżącą na jednej prostej z P_n. W takim razie ta wypadkowa wraz z P_n tworzy parę, stanowiącą już prosty element, którego wypadkowej znaleźć nie można.

Powiemy, wobec tego, że PŁASKI UKŁAD SIŁ SPROWADZA SIĘ ALBO DO SIŁY WYPADKOWEJ, ALBO DO PARY WYPADKOWEJ.

Ze względu na wagę tego twierdzenia, dowiedziemy je jeszcze inaczej.

Obierzmy dowolny punkt O, który nazwiemy ŚRODKIEM REDUKCJI UKŁADU i przyłóżmy doń siły P_1 i $-P_1$ równe i odwrotne, przyczem każda z nich ma być równa P_1 i do niej równoległa. Dana siła P_1 i $-P_1$, tworzą parę, prócz tego mamy siłę P_1, przyłożoną w O.



Rys. 18.

A więc zamiast siły P_1 otrzymaliśmy siłę i parę. Tak samo postąpmy z innemi siłami układu. Otrzymamy w ten sposób n sił przyłożonych w O i n par. Wszystkie te pary posiadają parę wypadkową o momencie $= N$. Wypadkową siłę, przyłożoną w O oznaczmy przez R. Cały układ sprowadza się więc do pary o momencie $= N$ i do wypadkowej R, lecz para i siła znów sprowadzają się do siły i w rezultacie otrzymujemy jedną siłę wypadkową. Gdy jednak siła wypadkowa $R = O$, to cały układ sprowadza się do jednej pary o momencie N.

Może zajść jeszcze taki wypadek, że cały układ jest w równowadze. Ale i w tym razie możemy powiedzieć, że układ sprowadza się do jednej wypadkowej, ale że ta wypadkowa jest zerem albo też do jednej pary wypadkowej, lecz moment tej pary jest zerem.

Jeśli układ sprowadza się do jednej siły wypadkowej R, to wtedy oczywiście rzut siły wypadkowej na dowolny kierunek równy jest sumie rzutów sił składowych, a moment tej siły wypadkowej względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił składowych.

Weźmy inny wypadek: Przypuśćmy, że cały układ sprowadza się do jednej pary wypadkowej. W tym razie rzut sił pary na dowolny kierunek jest równy sumie rzutów sił składowych na ten kierunek. Ale suma rzutów sił pary jest zawsze zerem, więc suma rzutów wszystkich sił składowych też jest zerem. Suma momentów sił pary względem dowolnego punktu /lub moment pary/ jest równa sumie momentów sił składowych względem każdego punktu jest w tym wypadku stała i równa N /t.j. momentowi pary/.

Gdy wszystkie siły równoważą się, to suma rzutów na każdy kierunek jest równa zeru i suma momentów tych sił względem dowolnego punktu jest też zerem.

Gdy znamy sumy rzutów sił układu płaskiego na pewne kierunki lub sumy momentów względem pewnych punktów, to możemy już wyciągnąć stąd bardzo ważne wnioski, dotyczące tego układu. Wyjaśnimy to na szeregu przykładów.

1/ Przypuśćmy, że układ płaski złożony jest z sił $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots$ i jest wiadomo, że suma rzutów tych sił na jakąś prostą X jest zerem.- W takim razie układ ten może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej, ale ta siła musi być prostopadła do prostej x. Ale układ ten może się też sprowadzać do pary wypadkowej, albo może być w równowadze.

2/ Sumy rzutów sił układu na dwie proste nierównoległe x i y są zerami. Wnosimy stąd, że układ nie może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej, bo ta siła musiałaby być prostopadła do obydwóch prostych x i y, co jest niemożliwe. Ale układ może się sprowadzać do pary wypadkowej, a może także być w równowadze.

3/ Załóżmy, że sumy rzutów na trzy proste x, y i z są zerami, przytem te proste są nierównoległe. Są więc trzy warunki, którym czyni zadość układ. Już z dwóch warunków /rzuty na dwie proste są zerami/ wynika, że układ sprowadza się albo do pary wypadkowej albo jest w równowadze, a wówczas suma rzutów na każdy inny kierunek jest zerem, a więc trzeci warunek jest następstwem dwóch pierwszych i nic nowego nie daje.

4/ Suma momentów względem pewnego punktu O

----

jest zerem. Stąd wynika, że układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, bo moment takiej pary byłby zerem. Ale układ taki może się sprowadzać do siły wypadkowej i siła ta przechodzi przez O, albo też układ jest w równowadze.

5/ Sumy momentów względem dwóch punktów O_1 i O_2 są zerami. W tym razie układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, ale albo do siły wypadkowej i ta siła działa na prostej O_1O_2 albo też jest w równowadze.

6/ Sumy momentów względem 3 punktów, nie leżących na jednej prostej, są zerami.

Układ nie może się sprowadzać do pary wypadkowej, albo też nie może sprowadzać się do siły, bo jej linja działania musiałaby przechodzić przez wszystkie trzy punkty, co jest sprzeczne z założeniem, iż te punkty nie leżą na jednej prostej. Pozostaje więc trzecia alternatywa: układ jest w równowadze.

7/ Suma rzutów wszystkich sił układu na prostą x jest zerem i sumy momentów wszystkich sił względem dwóch punktów O_1 i O_2 są zerami. Jeżeli prosta O_1O_2 jest prostopadła do prostej x, to układ może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej, działającej na prostej O_1O_2.

Ale jeśli O_1O_2 nie jest prostopadłe do osi x, to układ nie może się sprowadzać do jednej siły wypadkowej. Nie może się także sprowadzać do pary wypadkowej, a więc jest w równowadze.

8/ Sumy rzutów wszystkich sił układu na dwie dowolne, lecz nierównoległe proste x i y są zerami i suma momentów względem dowolnego punktu O jest zerem.

Układ nie może się sprowadzać do siły wypadkowej, bo siła ta musiałaby być jednocześnie prostopadłą do prostych x i y. Nie może się też sprowadzać do pary wypadkowej, bo moment nie byłby zerem. Więc układ jest w równowadze.

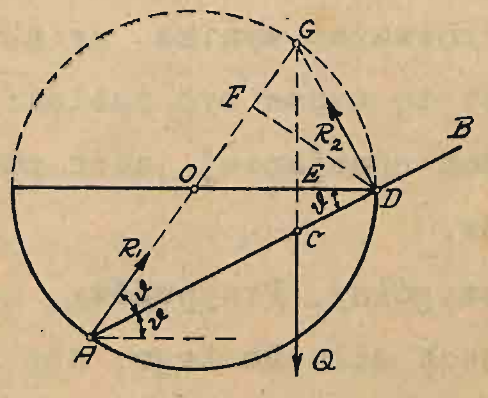
Z powyższych rozważań wynika, że aby układ był w równowadze, to muszą być spełnione trzy warunki, z których conajmniej jeden powinien dotyczyć momentów.

Przypadek szczególny. Przypuśćmy, że układ składa się z trzech sił. Do tego, aby był on w równowadze jest koniecznem, aby wszystkie siły przechodziły przez jeden punkt, albo żeby były równoległe. Jest to prawie oczywiste.- Istotnie, niech układ składa się z sił P_1, P_2 i P_3. Jeśli ma on być w równowadze, to suma momentów względem wszystkich punktów musi być zerem. Weźmy sumę momentów względem punktu O, w którym przycinają się linje działania sił P_1 i P_2. Suma ta więc musi być zerem. Moment siły P_1 względem O jest zerem, bo P_1 przechodzi przez O. Tak samo moment siły P_2 jest zerem. Więc i moment siły P_3 względem O musi być zerem, czyli siła P_3 przechodzi przez O.

PRZYKŁAD. Naczynie półkuliste o promieniu r wewnątrz gładkie, jest ustawione tak, że górna podstawa jest pozioma. Wkładamy do tego naczynia gładki, jednorodny pręt AB, o długości $2l$. Wyznaczyć położenie równowagi pręta. Położenie pręta będzie wyznaczone, gdy znajdziemy kąt

$$\vartheta = \measuredangle ODA$$

t.j. nachylenie pręta do poziomu.



Rys. 19.

Na pręt działają następujące siły: 1/ siła ciężkości Q, przyłożona w środku pręta C,

2/ reakcja R_1 naczynia w A, normalna do ściany naczynia, a więc skierowana ku O,
3/ reakcja R_2 naczynia w D, normalna do obrzeża i do pręta.

Mamy więc trzy niewiadome ϑ, R_1 i R_2, a dla ich wyznaczania trzeba mieć trzy równania. Ponieważ układ ma być w równowadze, więc muszą być spełnione trzy warunki: suma rzutów na dwa dowolne kierunki i moment względem jakiegoś punktu muszą być zerami. Wystarczają jednak 2 równania, jeśli nie wprowadzimy do rachunku jednej z reakcji, np. R_2.

Weźmiemy naprzód rzuty sił układu na kierunek pręta. Rzut R_2 na ten kierunek jest zerem. Kąt między reakcją R_1 a prętem AB jest $= \vartheta$ /bo trójkąt AOD jest równoramienny/, więc rzut R_1 na AB będzie $= R_1 \cos\vartheta$, a rzut Q jest $= -Q\sin\vartheta$. Zatem będzie:

$$R_1 \cos\vartheta - Q\sin\vartheta = 0 \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

Weźmiemy teraz sumę momentów względem punktu D; moment reakcji R_2 jest zerem. Suma momentów dwóch pozostałych sił względem D jest:

$$R_1 . DF - Q\,ED = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

gdzie DF jest ramieniem momentu siły R_1 a ED

ramieniem siły Q. Przekształcimy równanie (2):
Kąt $\sphericalangle FOD = 2\vartheta$ jako zewnętrzny trójkąta AOD; więc:

$$FD = OD \sin 2\vartheta = r \sin 2\vartheta;$$

zaś $ED = CD \cos\vartheta,$

a że $CD = AD - AC = 2r\cos\vartheta - l,$

więc $ED = (2r\cos\vartheta - l)\cos\vartheta.$

a podstawiając w /2/ otrzymamy:

$$2R_1 r \sin\vartheta \cos\vartheta - Q(2r\cos\vartheta - l)\cos\vartheta = 0. \quad (3)$$

a ponieważ z równania /1/ mamy:

$$R_1 \cos\vartheta = Q \sin\vartheta$$

przeto

$$2r\sin^2\vartheta - (2r\cos\vartheta - l)\cos\vartheta = 0$$

albo

$$4r\cos^2\vartheta - l\cos\vartheta - 2r = 0$$

Zanim rozwiążemy to równanie względem ϑ, zauważymy, że do tegoż równania można dojść krótszą drogą. Mianowicie na pręt działają 3 siły i aby zachodziła równowaga, to siły te muszą przechodzić przez jeden punkt, czyli siła Q musi przejść przez punkt przecięcia reakcji R_1 i R_2. R_2 i AD tworzą kąt prosty wpisany, a więc oparty na średnicy. Z tego wynika, że R_2 i R_1 przecinają się na obwodzie koła w punkcie G i przez G przechodzi linja działania siły Q . Rzut średnicy AG na kierunek poziomy musi być równy rzutowi AC na ten kierunek, t.j.

$$2r\cos 2\vartheta = l\cos\vartheta \quad \text{skąd} \quad 4r\cos^2\vartheta - l\cos\vartheta - 2r = 0$$

Doszliśmy więc do tego samego rezultatu, co poprzednio.

Z /4/ możemy wyciągnąć wniosek taki: nie zawiera ono wcale Q t.j. położenie równowagi nie zależy od ciężaru pręta. Możnaby to przewidzieć bezpośrednio, bo nam chodzi o wyznaczenie pewnej funkcji trygonometrycznej, której wymiar jest zerowy. Mogłaby więc ona być równa tylko stosunkowi dwóch sił, a że mamy daną tylko jedną siłę Q więc nie może od niej zależeć kąt ϑ.

Nie każdy pręt da się tak wstawić do danego naczynia, aby była zachowana równowaga, bo gdy pręt będzie zbyt krótki, to wpadnie do naczynia, zaś gdy długość będzie za duża, to środek ciężkości pręta znajdzie się po za naczyniem i pręt wypadnie. Z tego wnosimy, że długość pręta musi być zawarta w pewnych określonych granicach, które wyznaczymy.

Załóżmy w /4/: $\cos\vartheta = x$. Wtedy przybierze ono postać następującą: $4rx^2 - lx - 2r = 0$ . . (5)

Równanie /5/ posiada 2 pierwiastki, których iloczyn jest równy $-\frac{2r}{4r}$, czyli jest ujemny. Z tego wynika, że te pierwiastki mają znaki różne. Pierwiastek ujemny jest w danym razie nieprzydatny, bo kąt ϑ musi być mniejszy od $\frac{\pi}{2}$.

Oznaczmy pierwiastki te przez x_1 i x_2 w takim razie lewa strona równania ostatniego da się przedstawić w postaci

$$u = 4r(x - x_1)(x + x_2) \ldots\ldots (6)$$

Czynniki $4r$ i $(x + x_2)$ są tu zawsze dodatnie, a więc znak funkcji zależy tylko od wyrazu $(x - x_1)$. Ponieważ cosinus nie może być większy od 1, więc x_1 jest < 1 i gdy zamiast x napiszemy 1, to wyraz $x - x_1$ będzie dodatni i funkcja u też przybierze wartość dodatnią. A zatem: $4r - l - 2r > 0$ skąd $l < 2r$. A więc pręt nie powinien być dłuższy od średnicy naczynia. Wyprowadzimy teraz drugi warunek, dotyczący długości pręta. Ponieważ AD jest mniejsze od AB /t.j część pręta jest mniejsza od całego/ więc $2l > 2r\cos\vartheta$; $\cos\vartheta < \frac{l}{r}$.

Gdy nadamy zmiennej x wartość $\frac{l}{r}$, to drugi czynnik funkcji u będzie napewno dodatni i u przybierze wartość dodatnią, zatem

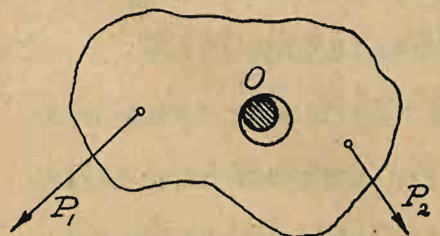
$$\frac{4rl^2}{r^2} - \frac{l.l}{r} - 2r > 0 \quad \text{i} \quad l > r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Granice długości pręta są więc następujące:

$$r\sqrt{\frac{2}{3}} < l < 2r.$$

PRZYPADKI SZCZEGÓLNE UKŁADU PŁASKIEGO.

1/ Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne, osadzone na osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Otwór, zrobiony w ciele na oś, zarówno jak i oś są cylindryczne, przyczem średnica otworu jest cokolwiek większa od średnicy osi, dzięki czemu ciało może się swobodnie obracać. Zetknięcie osi z ciałem zachodzi tylko na jednej tworzącej cylindrów, a w przekroju - - tylko w jednym punkcie i w tym punkcie działa reakcja osi na ciało. Reakcja ta może być normalna /bo zakładamy, że oś jest całkowicie gładka/, lecz niewiadomo z góry, jaki kierunek ona posiada, gdyż nie wiemy, na której tworzącej zachodzi zetknię-



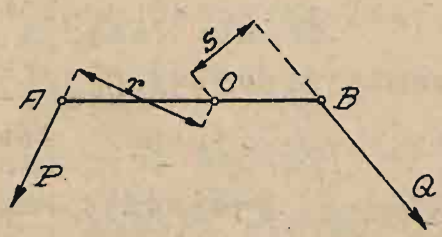
Rys. 20.

cie cylindrów.

Niech na dane ciało sztywne działa układ płaski ciał, złożony z sił $P_1, P_2, P_3 \ldots\ldots$. Do układu tego nie zaliczamy reakcji osi. Przypuśćmy, że suma momentów układu względem O jest zerem; w tym razie układ albo jest w równowadze i żadnego działania nie wywiera, albo też sprowadza się do jednej wypadkowej, która przechodzi przez punkt O, wywołując reakcję osi, która ją równoważy. TAK WIĘC DOSTATECZNYM WARUNKIEM RÓWNOWAGI UKŁADU $P_1, P_2, P_3, \ldots$ JEST ABY SUMA MOMENTÓW TYCH SIŁ WZGLĘDEM O BYŁA ZEREM.

Zastosujemy powyższe twierdzenie do dźwigni.

Drążek AB jest osadzony na osi, w punkcie O. Na końcu drążka działają siły P i Q, leżące w płaszczyźnie rysunku. Jedna z tych sił nazywa się siłą poruszającą, a druga oporem.



Rys. 21.

Aby równowaga dźwigni była zachowana, to suma momentów sił P i Q względem O

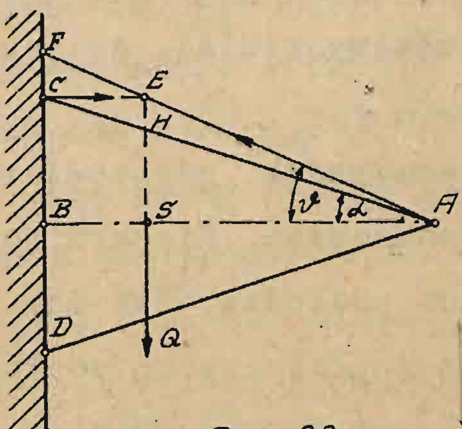
musi być zerem. Moment siły Q względem O jest $=Qs$, zaś moment P - jest $=-Pr$, więc warunek równowagi brzmi tak: $Qs-Pr=0$

Reakcja osi równoważy wypadkową sił P i Q, a więc jest równa i odwrotna do tej wypadkowej.

2/ Dwa ciała A i B przystają do siebie na pewnej części powierzchni. Podzielmy tę powierzchnię na nieskończenie małe elementy i uważajmy, że A wywiera pewną reakcję na każdy z tych elementów ciała B oddzielnie. Będziemy więc mieli nieskończenie wiele nieskończenie małych reakcji ciała A na B. Jeśli taki układ posiada wypadkową, to mówimy o niej, że jest to reakcja ciała A na B.

Często spotyka się przypadek, gdy powierzchnia zetknięcia jest płaszczyzną. Niech więc np. prostopadłościan stoi na podłodze, tak aby jedna ściana jego stykała się z płaszczyzną podłogi.- Podłoga będzie wywierała na poszczególne nieskończenie małe elementy podstawy nieskończenie małe reakcje. Wszystkie reakcje będą równoległe i zwrócone pionowo w górę. Posiadają one wypadkową, która jest do nich równoległa, a więc zwrócona też pionowo do góry i równa ich sumie. Z góry nie wiadomo jednak, gdzie ta wypadkowa jest przyłożona. W każdym razie punkt jej przyłożenia musi leżeć wewnątrz podstawy i tylko w granicach tej podstawy może zmieniać położenie.- Jeśli naciśniemy np. z góry na lewą część prostopadłościanu, to punkt przyłożenia wypadkowej przesunie się w lewo. Gdy prostopadłościan zaczyna obracać się dokoła jednej z krawędzi podstawy, to ten punkt przyłożenia zajmuje położenie krańcowe na owej krawędzi.

PRZYKŁAD: Prosty, kołowy stożek, o wysokości $= h$ i kącie u wierzchołka $= 2\alpha$ opiera się podstawą CD o gładką pionową ścianę. Wierzchołek stożka jest połączony ze ścianą przy pomocy sznura AF. Wyznaczyć największą długość sznura, przy której równowaga jeszcze jest możliwa.



Rys. 22.

Na stożek działają następujące siły: siła ciężkości Q, przyłożona w środku ciężkości S stożka /który jest odległy od wierzchołka o 3/4 wysokości stożka/; naprężenie sznura, przyłożone w wierzchołku stożka A i reakcja ściany na podstawę stożka, skierowana poziomo. Punkt przyłożenia tej reakcji leży między punktami C i D, nie jest jednak z góry wiadomy.

Ponieważ na stożek działają 3 siły, więc warunki równowagi wymagają, aby przechodziły one przez jeden punkt. Dajmy na to, że sznur leży na tworzącej AC stożka. Wtedy linja działania siły, przyłożonej w A, przecina się z linją działania siły Q w punkcie H i przez ten sam punkt musi przechodzić linja działania reakcji ściany. Jeśli koniec sznura będziemy przywiązywali coraz wyżej nad C, to punkt przyłożenia reakcji ściany będzie się podnosił, a wraz z tem długość sznura będzie wzrastała. Jednak punkt przyłożenia tej reakcji nie przejdzie poza punkt C, t.j. po za najwyższy punkt podstawy stożka. W tym razie sznur będzie więc posiadał największą możliwą długość, którą należy wyznaczyć.

Oznaczmy kąt między sznurem a podstawą przez ϑ. Wtedy będzie $AF = \frac{h}{\cos\vartheta}$. Trzeba jeszcze wyrazić $\cos\vartheta$ w funkcji znanych wielkości. Z trójkąta ESA mamy: $tg\,\vartheta = \frac{ES}{AS}$, a że

$ES = CB$ i $AS = \frac{3}{4}h$, więc :

$$tg\vartheta = \frac{4CB}{3h} \quad . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

CB z trójkąta ABC jest równa $h\,tg\alpha$

więc $tg\vartheta = \frac{4h\,tg\alpha}{3h} = \frac{4tg\alpha}{3}$ a stąd i z /1/ wypada $AF = \frac{h\sqrt{9+16tg^2\alpha}}{3}$. W przypadku szczególnym, gdy kąt $2\alpha = 90°$, to

$$AF = \frac{5}{3}h$$

ciał

RÓWNOWAGA UKŁADU SIŁ. Niech będzie układ, złożony z ciał $A, B, C, \ldots\ldots$ i niech na te ciała działają pewne siły $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$, tworzące układ płaski. Wiadomo, że każda siła pochodzi od jakiegoś ciała. Jeśli siły pochodzą od ciał, nie należących do układu, to nazywać je będziemy siłami ZEWNĘTRZNEMI. Prócz tych działają też na układ siły, wywierane przez ciała, należące do tego układu i te siły nazywać będziemy WEWNĘTRZNEMI.

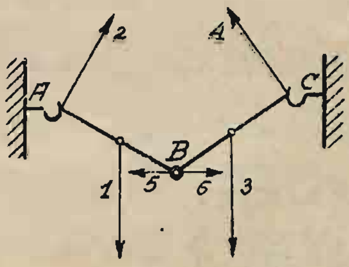
Siłą wewnętrzną będzie więc np. reakcja ciała A na B, lub B na C i t.d.

Niech będą 2 sztaby AB i CB, połączone ze sobą za pomocą luźnego przegubu i zawieszone wolnemi końcami na hakach, wbitych w nieruchome ściany.

Na układ, złożony z tych dwóch sztab działają siły następujące:

1/ Siła ciężkości pręta AB. Jest to siła zewnętrzna, gdyż pochodzi od ciała nie należącego do układu /mianowicie od ziemi/.

2/ Reakcja haka na pręt AB. Jest to również siła zewnętrzna, bo wywołuje ją hak.



Rys. 23.

3/ Siła ciężkości pręta BC i

4/ Reakcja haka na pręt BC. Te dwie ostatnie siły są również zewnętrzne, na tej samej zasadzie, co dwie pierwsze.

5/ Sztaba AB wywiera pewną siłę na sztabę BC w przegubie B i

6/ Taką samą siłę wywiera BC na AC. Te siły są wewnętrzne, bo pochodzą od ciał, które należą do układu.

Niech będzie znów układ, złożony z ciał A, B, C, ... , na które działają siły zewnętrzne i wewnętrzne, leżące w jednej płaszczyźnie.

Układ jest przytem w równowadze i każde z ciał układu jest również w równowadze. Z tego wynika, że np. siły, działające na ciało A są w równowadze, zatem suma rzutów tych wszystkich sił na dowolny kierunek i suma momentów względem dowolnego punktu są zerami. To samo dotyczy ciał $B, C, \ldots\ldots$

Weźmy jakąś prostą x i wyznaczmy sumę rzutów na nią wszystkich sił, działających na ciało A. Suma ta będzie zerem. Tak samo suma rzutów na tę prostą wszystkich sił działających na ciało B będzie zerem i t.d. Wyznaczając w ten sam sposób sumy rzutów sił, działających na wszystkie ciała układu, otrzymamy tyle równań, ile jest ciał w układzie, a dodając te równania, otrzymamy po lewej stronie sumę rzutów wszystkich sił działających na układ i ta suma jest zerem. Ale siły wewnętrzne występują zawsze parami, siły należące do każdej pary są równe i odwrotnie, a zatem suma ich rzutów jest zerem. Z tego wynika, że z owej sumy rzutów odpadną rzuty sił wewnętrznych i zostanie tylko suma rzutów sił zewnętrznych i ta jest równa zeru.

A więc warunkiem równowagi układu sił jest, ABY SUMA RZUTÓW WSZYSTKICH SIŁ ZEWNĘTRZNYCH NA DOWOLNY KIERUNEK BYŁA ZEREM.

Tak samo należy dowieść, że SUMA MOMENTÓW WSZYST-

KICH SIŁ ZEWNĘTRZNYCH WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU MUSI BYĆ ZEREM.

Z tego wynika, że gdyby te siły zewnętrzne działały na jedne ciała sztywne, to byłyby w równowadze. Dlatego też mówi się, że GDY UKŁAD JEST W RÓWNOWADZE, TO SIŁY ZEWNĘTRZNE RÓWNOWAŻĄ SIĘ SAME PRZEZ SIĘ.

Do tego samego dojść można na innej jeszcze drodze, wprowadziwszy nowy aksjomat statyczny.

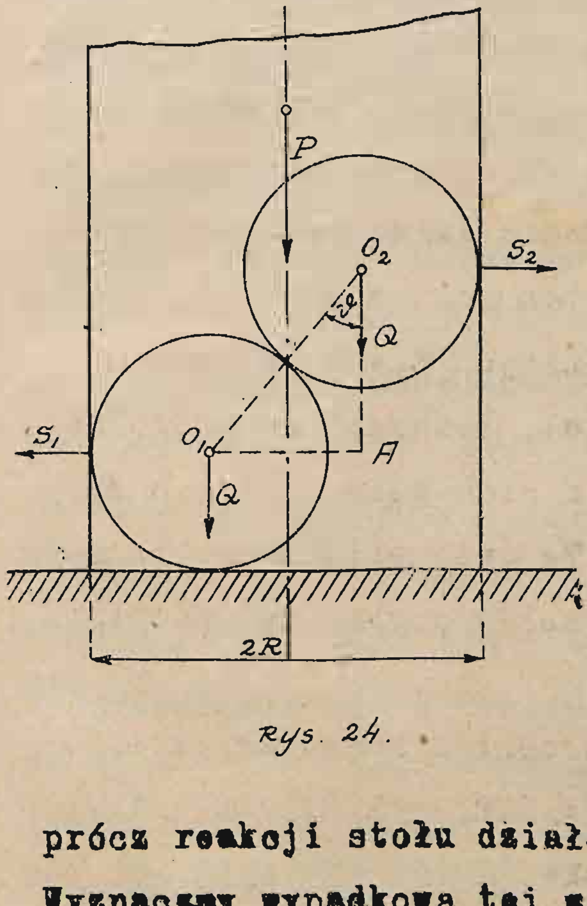
Mamy układ ciał sztywnych, pozostający w równowadze. Wprowadźmy do tego układu nowe połączenia, tak aby układ został usztywniony, t.j. aby utworzyło się jedno ciało sztywne. Otóż aksjomat ów głosi, że POŁĄCZENIA TE NIE ZAKŁÓCĄ RÓWNOWAGI. Aby udowodnić, opierając się na tym aksjomacie twierdzenia o warunkach równowagi układu, załóżmy, że na układ złożony z ciał $A, B, C, \ldots$ działają siły zewnętrzne $P_1, P_2, \ldots\ldots$ i jest on w równowadze. Przypuśćmy, że układ ten został usztywniony i zamiast ciał $A, B, C, \ldots$ mamy tylko jedno ciało sztywne, na które działają siły $P_1, P_2, \ldots\ldots$ Na zasadzie nowego aksjomatu, ciało to jest w równowadze, a zatem suma rzutów sił $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ na każdy kierunek i suma ich momentów względem każdej prostej jest zerem.

Gdy mamy układ ciał sztywnych, to jak dowiedliśmy, warunkiem równowagi jego jest, aby siły zewnętrzne nań działające równoważyły się same przez się. Jest to warunek konieczny, ale nie wystarczający. Można łatwo wskazać przykład, kiedy warunek ten jest spełniony, a mimo to równowaga nie istnieje. Niech np. układ składa się z dwóch kul, leżących na podłodze. Przyłóżmy do jednej z nich siłę P, a do drugiej siłę $-P$. Te dwie siły zewnętrzne równoważą się, lecz kule, pomimo to, zostaną wprawione w ruch.

Wystarczającym warunkiem równowagi układu ciał jest, ABY RÓWNOWAŻYŁY SIĘ SIŁY DZIAŁAJĄCE NA KAŻDE CIAŁO ZOSOBNA.

PRZYKŁADY. 1/ Na stole ustawiony jest prosty kołowy cylinder /rys.24/ wewnątrz próżny, o promieniu $=R$. Do tego cylindra włożono dwie kule jednakowe, przyczem promień każdej z nich $=r$, ciężar zaś każdej $=Q$. Jaki powinien być ciężar cylindra, aby ten nie został przewrócony. Na cylinder działają: 1/ ciężar P

na osi, 2/ reakcje S_1 i S_2 kul dolnej i górnej; siły te są poziome, i wreszcie 3/ reakcja stołu pionowa.



Rys. 24.

Biorąc rzuty na kierunek poziomy, otrzymamy:

$S_1 - S_2 = 0$ skąd

$S_1 = S_2 = S$

Ponieważ siły S_2 i S_1 są równe, odwrotne i nie leżące na jednej prostej, więc tworzą parę. Moment tej pary jest równy $S\,2r\cos\vartheta$ gdzie ϑ oznacza kąt O_1O_2A. Na cylinder prócz reakcji stołu działa siła P i para S. Wyznaczmy wypadkową tej siły i tej pary. Wiadomo, że będzie nią siła równoległa do P i odległa od niej o $\dfrac{S.2r.\cos\alpha}{P}$. Dla równowagi jest konieczne, aby tę wypadkową równoważyła reakcja podłogi. Ta ostatnia nie może wyjść po za granicę podstawy, innemi słowy odległość jej od osi nie może być większa od R, a zatem w przypadku skrajnym $\frac{S.2r.\cos\vartheta}{P} = R$ skąd

$$P = \frac{2.S.r.\cos\vartheta}{R} \quad \ldots\ldots (1)$$

Jest to najmniejsza wartość siły P. Wyznaczymy jeszcze reakcję S. Na kulę górną działają 3 siły S, Q i reakcja kuli dolnej, działająca na prostej $O_1 O_2$. Siły te równoważą się, a więc suma ich momentów względem każdego punktu jest zerem.

Weźmy sumę momentów względem punktu O_1, otrzymamy:

$$-S.2r.\cos\vartheta + Q2r\sin\vartheta = 0$$

skąd

$$S = Q\,tg\vartheta \quad \ldots\ldots (2)$$

Podstawiając te wartości w /1/ znajdziemy:

$$P = \frac{2Q.r.\sin\vartheta}{R} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Trzeba jeszcze w tym wzorze zastąpić ϑ przez znane wielkości. Z trójkąta $O_1 A O_2$ mamy

$$\sin\vartheta = \frac{O_1 A}{O_1 O_2} = \frac{R-r}{r}$$

Więc ostatecznie:

$$P = \frac{2Q.r(R-r)}{Rr} = \frac{2Q}{R}(R-r)$$

Taki powinien być conajmniej ciężar cylindra.

Gdy wyprowadzimy jakiś ogólny wzór mechaniczny, chcemy sprawdzić, czy przy tem wyprowadzaniu nie popełniliśmy błędu, to możemy dokonać tego przez stosowanie otrzymanego wzoru ogólnego do wypadków szczególnych, możliwie najprostszych.

Jeśli wynik jest w zgodzie z bezpośredniem naszem doświadczeniem, to możemy się spodziewać, że błędu nie zrobiliśmy. Nie upoważnia to nas jednak do zupełnej pewności.

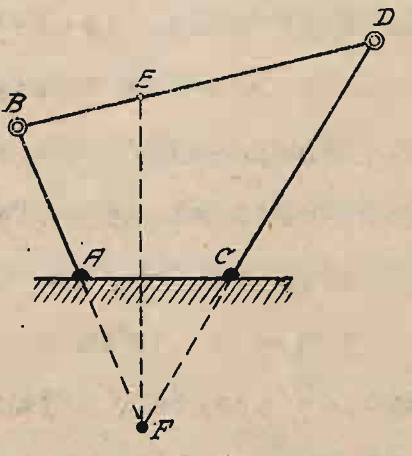
Postąpmy w taki sposób w naszem zadaniu i wykonajmy dwie próby. Załóżmy najpierw, że średnica kuli $2r=$ średnicy cylindra $2R$. Możemy powiedzieć, że w tym wypadku równowaga będzie zachowana sama przez się, gdyż jedna kula będzie się znajdowała pionowo nad drugą, skąd wynika, że najmniejszy potrzebny ciężar cylindra, jak i reakcja S są zerami. Istotnie, czyniąc powyższe założenie we wzorach /2/ i /4/, czyli podstawiając $\vartheta=0,\ r=R$ otrzymamy: $S=0,\ P=0$

Weźmy teraz inny przypadek szczególny, mianowicie załóżmy, że $R=2r$. W tym razie jedna kula będzie leżała około drugiej i równowaga będzie zachodziła sama przez się, t.j. że najmniejsza wartość P, jak i S są zerami. Ponieważ w tym wypadku $\vartheta = 90°$, więc z /2/ i /4/ znajdujemy $S = \infty$; $P = Q$.

Otrzymaliśmy więc wyniki sprzeczne z przewidywaniem.

Czy jednak stąd można wnioskować, że zadanie zostało źle rozwiązane ?

2/ Sztaby AB i CD, osadzone na nieruchomych zawiasach A i C są połączone przegubowo sztabą BD. Sztaby są lekkie, t.zn. ciężaru ich nie będziemy brali w rachubę. W którym punkcie sztaby BD należy zawiesić ciężar, aby równowaga była zachowana ?



Rys. 25.

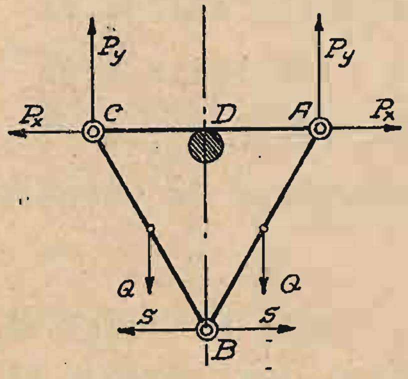
Zwróćmy uwagę na układ, złożony z 3 sztab danych. Siły zewnętrzne, działające na ten układ są następujące: ciężar zawieszony na BD, reakcja podłogi, działająca na AB w zawiasie

A , reakcja podłogi, działająca na CD w zawiasie C . Siły te muszą się równoważyć, a zatem muszą przechodzić przez jeden punkt.

Trzeba więc wyznaczyć kierunki reakcji zawias A i C i przez punkt przecięcia tych kierunków, przeprowadzić pion, który będzie linją działania ciężaru, zawieszonego na sztabie BD .

Wogóle niewiadomo z góry, jakie kierunki mają reakcje zawias, tu jednak mamy do czynienia z wypadkiem prostym, w którym kierunki te dadzą się łatwo przewidzieć. Zwróćmy uwagę na sztabę AB . Działają na nią dwie siły: reakcja zawiasy A i reakcja sztaby BD w przegubie i te dwie siły muszą się równoważyć. Lecz dwie siły mogą się równoważyć tylko wtedy, gdy działają na jednej prostej, skąd wynika, że linją działań tych sił jest linja AB /bo punkty ich przyłożenia leżą na tej prostej/. Tak samo dowiedziemy, że reakcja zawiasy C musi mieć kierunek sztaby CD . Przedłużając kierunki sztab AB i CD aż do przecięcia, znajdziemy punkt, przez który należy poprowadzić pion. Na przecięciu tego pionu ze sztabą BD znajduje się punkt E , w którym należy zawiesić ciężar.

3/ Trzy jednakowe sztaby, z których każda waży Q kg. są połączone za pomocą przegubów, tworząc trójkąt równoboczny ABC. Zawieszamy ten trójkąt na kołku D, tak, aby opierał się w środku górnej sztaby AC, która ma położenie poziome. Wyznaczyć reakcje w przegubach.



Rys. 26.

Zauważmy najpierw, że układ jest symetryczny względem pionu BD, zatem reakcje w przegubach A i C są równe. Wystarcza więc wyznaczyć tylko jedną z nich np. reakcję w A.

Zwróćmy uwagę na sztabę AB. Działają na nią następujące siły: 1/ Siła ciężkości Q, przyłożona w środku tej sztaby i skierowana pionowo w dół. 2/ Reakcja P sztaby AC, przyłożona w przegubie A. Kierunek tej reakcji jest nieznany, rozkładamy ją na dwie składowe: poziomą P_x i pionową P_y. 3/ Reakcja sztaby BC w przegubie B. Kierunek tej reakcji da się z góry przewidzieć. Reakcje sztab BC na AB i AB na BC są równe i odwrotne, a ponieważ układ jest symetryczny względem pionu, przechodzącego przez B , więc obydwie te reakcje są poziome. Oznaczymy je przez S .

Na sztabę AB działają więc te 3 siły i aby one były w równowadze, to suma ich rzutów na dowolny kierunek i suma momentów względem dowolnego punktu musi być zerem. Weźmy sumę rzutów na kierunek poziomy. Znajdziemy odrazu, że $P_x = S$ . . . . (1)

Gdy znów weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to będzie:

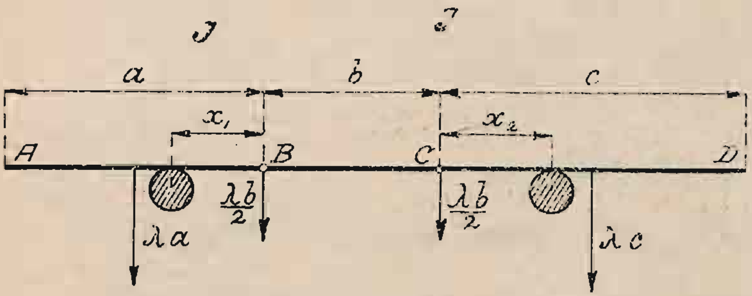
$$P_y = Q \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

Wreszcie weźmiemy sumę momentów względem punktu A . Gdy oznaczymy długość każdej sztaby przez a , to moment siły S względem A będzie: $S.a.\cos 30^\circ$, a moment siły Q wyniesie $Q\frac{a}{4}$. Warunek równowagi wymaga, aby $S.a.\cos 30^\circ - Q\frac{a}{4} = 0$, skąd $S = \frac{Q}{2\sqrt{3}}$

Biorąc pod uwagę /1/ i /2/ otrzymamy:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \frac{Q\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

4/ Trzy sztaby AB, BC i CD , różniące się tylko długościami, są połączone przegubami w punktach B i C . Ciężary ich są proporcjonalne do długości, wynoszą więc odpowiednio λa, λb, λc, gdzie λ jest współczynnikiem proporcjonalności i a, b, c oznaczają odpowiednio długości sztab.



Rys. 27.

Ustawiamy te 3 sztaby tak, aby tworzyły linję prostą i kładziemy je na dwóch kółkach, położonych na jednym poziomie. Jakie położenie należy dać kołkom względem sztab, aby równowaga była zachowana ?

Oznaczmy odległość kołka lewego od przegubu B przez x_1, zaś odległość kołka prawego od C przez x_2. Na układ sztab działają następujące siły: ciężary sztaby przyłożone w środkach ciężkości odpowiednich sztab i skierowane pionowo na dół, reakcje kołków, reakcje w przegubie B i C. Rozłóżmy reakcję w przegubie B, działającą na sztabę BC na 2 składowe: poziomą i pionową i to samo zróbmy z reakcją w przegubie C. Składowe pionowe tych reakcji muszą równoważyć ciężar sztaby BC t. j. λb i oczywiście każda z nich musi się równać $\frac{\lambda b}{2}$.

Zwróćmy dalej uwagę na sztabę AB. Działają na nią 3 siły: ciężar λa, reakcja kołka i reakcja w przegubie B, której składowa pionowa $P = \frac{\lambda b}{2}$.

Te 3 siły muszą być w równowadze; weźmy sumę ich momentów względem lewego kołka. Otrzymamy:

$$\frac{\lambda b}{2} x_1 - \lambda a \left(\frac{a}{2} - x_1\right) = 0$$

stąd mamy

$$b x_1 - a^2 + 2 a x_1 = 0$$

wreszcie

$$x_1 = \frac{a^2}{2a + b}$$

Analogicznie $x_2 = \frac{c^2}{2c + b}$. W szczególnym przypadku, gdy $a = b = c$, to $x_1 = x_2 = \frac{a}{3}$

ROZDZIAŁ IV.

20. 35 - 48 (45)

O TARCIU.

TEORJA TARCIA. Uważaliśmy dotychczas, że gdy 2 ciała stykają się, to wywołują tylko reakcję normalną do stykających się powierzchni. Zapowiedzieliśmy jednak, że uwzględnimy w przyszłości