ROZDZIAŁ VII.

O ŚRODKU CIĘŻKOŚCI.

48. MOMENT STATYCZNY PUNKTU MATERJALNEGO.

Niech będzie w przestrzeni jakaś płaszczyzna, którą oznaczymy przez F oraz pewne ciało, tak drobne, aby położenie jego w przestrzeni dało się określić za pomocą trzech współrzędnych, tak jak położenie punktu geometrycznego. Ciało, tak zdefinjowane nazywać będziemy PUNKTEM MATERJALNYM. - Przypuśćmy, że dany punkt materjalny ma masę m i, że jest odległy od płaszczyzny F o odległość równą z.

Utwórzmy iloczyn $m.z$ Iloczyn taki nazywać będziemy MOMENTEM PIERWSZEGO STOPNIA PUNKTU m WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY F, albo też częściej będziemy używali dla oznaczenia jego nazwy takiej: MOMENT STATYCZNY PUNKTU m WZGLĘDEM PŁASZCZYZNY F. Ponieważ odległość z może być dodatnia, równa zeru i ujemna, więc i moment statyczny może być dodatni, równy zeru lub ujemny.

49. PRZECIĘTNA ODLEGŁOŚĆ GRUPY PUNKTÓW MATERJALNYCH OD PŁASZCZYZNY. Niech będzie pewna liczba punktów materjalnych i pewna płaszczyzna F. Oznaczymy masy tych punktów przez m_1, m_2, m_3, ..., a odległość ich od płaszczyzny F odpowiednio przez z_1, z_2, z_3, ... Utwórzmy momenty statyczne tych wszystkich punktów względem płaszczyzny F i weźmy sumę tych momentów, to otrzymamy $m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \dots$ lub krócej:

$$\Sigma . mz .$$

Suma ta nazywa się momentem statycznym grupy punktów względem płaszczyzny F. Niektóre wyrazy tej sumy mogą być dodatnie, inne ujemne, a więc i suma może być albo dodatnia, albo ujemna, albo wreszcie równa zeru.

Oznaczmy sumę mas wszystkich punktów czyli Σm przez M i dobierzmy tak odległość z_0, aby zachodziła równość:

$$Mz_0 = \Sigma mz \quad \dots\dots\dots (1)$$

W takim razie z_0 nazywamy średnią odległością grupy punktów od płaszczyzny F. Z /1/ wynika, że:

$$z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$$

50. PRZECIĘTNA ODLEGŁOŚĆ CIAŁA OD PŁASZCZYZNY.

Niech będzie teraz płaszczyzna F i jakieś ciało. Podzielmy to ciało na bardzo drobne części, tak drobne, aby każda z nich mogła być uważana za punkt materjalny. Oznaczmy masy tych punktów przez $m_1, m_2, \dots$ a odległość ich od płaszczyzny F przez $z_1, z_2, \dots$. Możemy więc dane ciało uważać za grupę punktów materjalnych i wyznaczywszy moment statyczny ciała względem płaszczyzny F czyli Σmz znajdziemy, że średnia odległość ciała od płaszczyzny F jest równa

$$z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$$ gdzie M oznacza masę ciała.

ŚRODEK MASY. Niech będzie prostokątny układ współrzędnych z osiami x, y, z i początkiem O i niech będzie jakakolwiek grupa punktów materjalnych lub jakieś ciało materjalne, które możemy uważać za zbiór punktów materjalnych. Oznaczmy przez m typową cząstkę, a współrzędne jej względem danego układu przez x, y i z. Wiadomo, że moment statyczny całego ciała względem płaszczyzny yOz jest $\Sigma m\cancel{z}$, zaś jeśli x_0 oznacza przeciętną odległość ciała od tej płaszczyzny to $x_0 = \frac{\Sigma mx}{M}$, gdzie M oznacza masę ciała.

Tak samo znajdziemy, że przeciętne odległości ciała od płaszczyzn xOz i xOy są: $y_0 = \frac{\Sigma my}{M}$

$z_0 = \frac{\Sigma mz}{M}$. Możemy wyznaczyć taki punkt, którego współrzędne są równe x_0, y_0, z_0. Dajmy na to, że punkt S jest tym punktem. Będziemy go nazywali środkiem masy ciała, albo środkiem ciężkości ciała, chociaż odrazu musimy zwrócić uwagę na to, że ta ostatnia nazwa nie jest całkowicie właściwa, bo "środek masy" i "środek ciężkości" nie są to dwa pojęcia identyczne.

51. PRZECIĘTNA ODLEGŁOŚĆ CIAŁA OD JAKIEJKOLWIEK PŁASZCZYZNY. Dowiedziemy, że ODLEGŁOŚĆ ŚRODKA CIĘŻKOŚCI OD JAKIEJKOLWIEK PŁASZCZYZNY JEST RÓWNA PRZECIĘTNEJ ODLEGŁOŚCI CIAŁA OD TEJ PŁASZCZYZNY.

Niech będzie jakaś płaszczyzna F, mająca równanie:

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma - \delta = 0$$

Odległość typowego elementu $m(x,y,z)$ ciała od płaszczyzny F jest równa

$$d = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta.$$

Pomnóżmy obydwie strony tej równości przez m, to otrzymamy $md = m(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta)$ a moment całego ciała względem F :

$$\Sigma md = \Sigma m(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \delta)$$

Inaczej:

$$\Sigma md = \cos\alpha\Sigma mx + \cos\beta\Sigma my + \cos\gamma\Sigma mz - \delta\Sigma m$$

Ale

$$\Sigma mx = Mx_0 \; ; \Sigma my = My_0 \; ; \Sigma mz = Mz_0 \; ; \Sigma m = M$$

gdzie M oznacza masę całego ciała, a x_0, y_0, z_0 współrzędne środka ciężkości.

Więc

$$\Sigma md = Mx_0\cos\alpha + My_0\cos\beta + Mz_0\cos\gamma - M\delta$$

albo

$$\Sigma m.d = M(x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - \delta)$$

i że

$$x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - \delta = d_0$$

gdzie d_0 oznacza odległość środka ciężkości ciała od płaszczyzny F, więc $\Sigma md = Md_0$

skąd

$$d_0 = \frac{\Sigma md}{M}$$

Z tego wynika, że: POŁOŻENIE PUNKTU S W CIELE NIE ZALEŻY OD UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH, A WIĘC I OD POŁOŻENIA CIAŁA W PRZESTRZENI.

52. TWIERDZENIA POMOCNICZE: 1/ Niech będzie kilka ciał: pierwsze z nich oznaczymy przez I, masę jego przez M_1, a środek ciężkości przez S_1, dla drugiego użyjemy odpowiednie symboli II, M_2, S_2

i t.d. Niech jeszcze $Z_0', Z_0'', \ldots$ i t.d. oznaczają przeciętne odległości ciał I, II i t.d. od danej płaszczyzny F. Rozkładamy każde z ciał na drobne elementy, z których typowym niech będzie m, zaś odległość jego od płaszczyzny $F \ldots = z$. Sumujemy iloczyny mz dla każdego ciała oddzielnie, a następnie weźmiemy sumę tych wszystkich sum. Otrzymamy $\Sigma_1 mz + \Sigma_2 mz + \ldots\ldots$

Suma ta wyraża moment statyczny układu ciał względem płaszczyzny F. Ponieważ:

$$\Sigma_1 mz = M_1 Z_0' \; ; \Sigma mz = M_2 Z_0'', \ldots$$

więc moment statyczny układu ciał względem F jest równy $M_1 Z_0' + M_2 Z_0'' + \ldots$ a przeciętna odległość układu od płaszczyzny F wynosi:

$$Z_0 = \frac{M_1 Z_0' + M_2 Z_0'' + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}$$

Wyobraźmy sobie, że masa ciała I-go, skoncentrowała się w punkcie S_1, masa II-go w S_2 i t.d.

Otrzymamy więc zamiast układu ciał grupę punktów materjalnych o masach $M_1, M_2, \ldots$ i przeciętna odległość tej grupy od płaszczyzny F jest równa:

$$\frac{M_1 Z_0' + M_2 Z_0'' + \ldots}{M_1 + M_2 + \ldots}$$

Z tego widać, że gdy chodzi o wyznaczenie środka ciężkości pewnego układu ciał, to możemy uważać, że masa każdego z ciał jest skoncentrowana w jego środku ciężkości.

Twierdzenie to bywa nieraz użyteczne i przy wyznaczaniu środka ciężkości ciała pojedyńczego, zdarza się bowiem, że dane są środki ciężkości pewnych części jego. W tym razie uważamy każdą z części za punkt materjalny o masie równej masie owej części i wyznaczamy środek ciężkości takiej grupy punktów.

II/. Niech będzie jakakolwiek płaszczyzna P i pewna grupa punktów materjalnych w niej leżących. Oznaczmy tę płaszczyznę przez F, a masy tych punktów przez $m_1, m_2, \ldots$ Moment statyczny każdego z tych punktów względem płaszczyzny F jest oczywiście zerem, a zatem i moment statyczny całej grupy jest zerem. Z tego wynika, że środek ciężkości tej grupy leży w płaszczyźnie F.

III/. Niech będzie pewna liczba punktów materjalnych, położonych na prostej x. Oznaczmy te punkty przez $m_1, m_2, \ldots$ Środek ciężkości tej grupy punktów leży w każdej płaszczyźnie, przechodzącej przez prostą x , a więc leży na prostej x .

IV/. Niech będą dwa punkty materjalne m_1 i m_2 Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia środek ciężkości S tych dwóch punktów leży na prostej, łączącej je. Chodzi tylko o wyznaczenie, w którym punkcie ?

Oznaczmy nieznaną odległość Sm_1 przez x_1 zaś Sm_2 przez x_2 . Poprowadźmy przez S płaszczyznę F , prostopadłą do prostej m_1m_2. Ponieważ ta płaszczyzna przechodzi przez środek ciężkości grupy punktów, więc moment statyczny tej grupy względem F jest zerem.

Będzie więc $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ z czego wynika, że S leży pomiędzy m_1 i m_2 i $\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$

Czyli, że ŚRODEK CIĘŻKOŚCI PUNKTÓW m_1 i m_2 DZIELI ODCINEK m_1m_2 WEWNĘTRZNIE NA CZĘŚCI ODWROTNIE PROPORCJONALNE DO MAS TYCH PUNKTÓW. Jeśli w przypadku szczególnym, masy m_1 i m_2 są równe, to środek ciężkości dzieli odcinek m_1m_2 na dwie równe części.

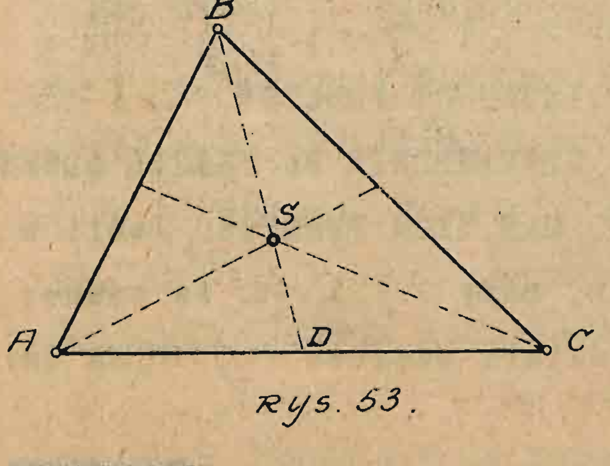
V/. Niech będzie jakieś ciało, składające się z dwóch części symetrycznych mechanicznie x/

---

x/ Symetrja mechaniczna ciała polega na tem, że względem płaszczyzny F . Środek ciężkości każdej pary elementów symetrycznych leży w płaszczyźnie F , a więc i środek ciężkości całego ciała leży w tej płaszczyźnie. Tak samo jeśli ciało ma oś symetrji, to środek ciężkości ciała leży na tej osi, a jeżeli ciało posiada środek symetrji, to środek ten jest środkiem ciężkości.

Przy pomocy tych twierdzeń dają się wyznaczyć środki ciężkości wielu ciał. Więc np. środek ciężkości pręta jednorodnego, leży w środku tego pręta. Środek ciężkości kuli jednorodnej leży w środku kuli, środek ciężkości kołowego cylindra jednorodnego leży w środku osi cylindra i t.d.

53. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI TRÓJKĄTA. W wierzchołku trójkąta ABC są umieszczone trzy masy, z których każda jest równa m . Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości grupy, złożonej z tych trzech punktów.



Rys. 53.

Środek ciężkości dwóch z tych trzech mas np. tych, które

---

elementy symetryczne posiadają masy równe. Ciało symetryczne geometrycznie względem pewnej płaszczyzny może nie być symetryczne mechanicznie.

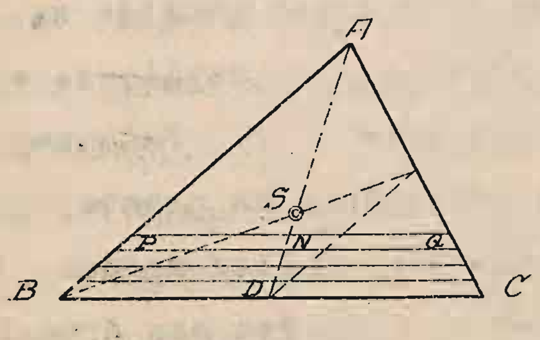
leżą w A i C leży w środku D boku AC. Możemy uważać, że masy tych dwóch punktów są skoncentrowane w tym punkcie D, czyli, że w punkcie D znajduje się masa $2m$. Połączmy punkty B i D, to oczywiście na prostej BD /czyli na środkowej boku AC / leży środek ciężkości punktów A, B i C. Ten sam środek leży również na każdej innej środkowej trójkąta ABC.

Ponieważ w punkcie D jest skoncentrowana masa $2m$, a masa w punkcie B jest m, więc środek ciężkości S punktów B i D leży w takiej odległości od B i D, że $BS = 2DS$.

Innemi słowy, ŚRODEK CIĘŻKOŚCI danej grupy punktów LEŻY NA JEDNEJ ZE ŚRODKOWYCH TRÓJKĄTA W ODLEGŁOŚCI 2/3 TEJ ŚRODKOWEJ OD ODPOWIEDNIEGO WIERZCHOŁKA. Po za rozwiązaniem naszego właściwego zadania, t.j. znalezienia środka ciężkości danej grupy punktów, otrzymaliśmy jeszcze dowód następującego twierdzenia geometrycznego: wszystkie środkowe trójkąta przecinają się w jednym punkcie.

54. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI JEDNORODNEGO POLA TRÓJKĄTNEGO ABC. Podzielmy dane pole na pas-

ki elementarne prostemi równoległemi do boku BC



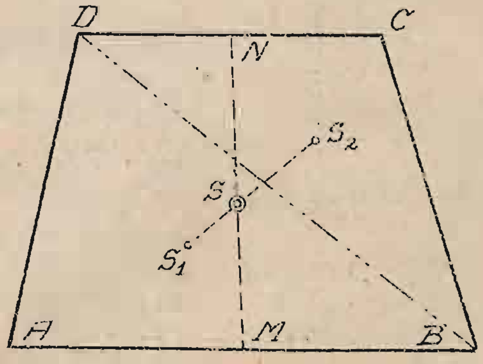
Rys. 54.

i połączmy środek tego boku D z wierzchołkiem A. Prosta AD przetnie prostą PQ, jedną z owych równoległych do BC, w punkcie N, który jest oczywiście środkiem odcinka PQ. Widzimy, że środki wszystkich odcinków, równoległych do BC leżą na AD.

Możemy uczynić każdy pasek dowolnie wąskim, a zatem środek ciężkości każdego z nich leży w środku geometrycznym /podobnie, jak środek ciężkości cienkiego pręta/, czyli na prostej AD.- Z tego wynika, że środek ciężkości całego trójkąta leży na środkowej AD. Dowiedziemy tak samo, że środek ciężkości trójkąta leży na każdej z dwóch pozostałych środkowych t.j. leży w tem samem miejscu, co środek ciężkości trzech jednakowych mas, umieszczonych w wierzchołkach.

55. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI POLA TRAPEZU. Niech będzie trapez $ABCD$. Podzielimy 'go na wązkie paski prostemi, równoległemi do podstaw dowiedzie-

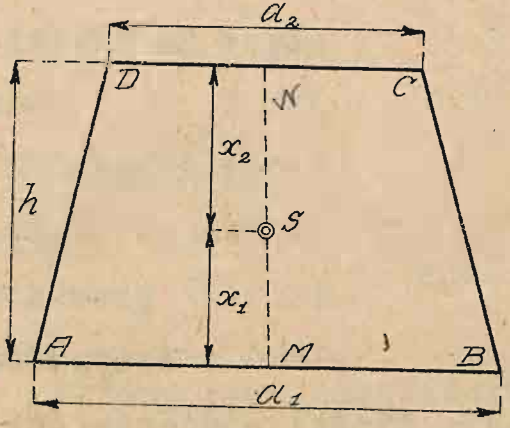
my z łatwością, że środek ciężkości trapezu leży na prostej, łączącej środki podstaw. Oznaczymy te środki przez M i N. Podzielmy dalej trapez $ABCD$ na dwa trójkąty: ABD i BCD przekątnią BD. Przypuśćmy, że



Rys. 55.

w punktach S_1 i S_2 leżą środki ciężkości tych trójkątów. Oczywiście, że środek ciężkości S trapezu leży na prostej $S_1 S_2$, a że leży on jednocześnie na środkowej MN, więc leży w punkcie przecięcia się $S_1 S_2$ z MN. Punkt ten można wyznaczyć przy pomocy konstrukcji następującej.

Oznaczmy wysokość przez h, podstawę dolną przez a_1, górną przez a_2 i przypuśćmy, że środek ciężkości S jest odległy od podstawy dolnej o x_1, a od górnej o x_2. Poprowadźmy przez prostą AB płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny trapezu i wyznaczmy moment statyczny tej płaszczyzny względem prostej AB. Wiadomo, że pole trapezu jest równe $\frac{a_1 + a_2}{2} h$. Jeśli przez μ oznaczymy masę 1 m^2 pola trapezu, to $\frac{a_1 + a_2}{2} h \mu$ wyraża masę całego trapezu, a $\frac{a_1+a_2}{2}h\mu x_1$ - jest momentem statycznym trapezu względem AB. Jest rzeczą oczywistą, że położenie środka ciężkości nie może być zależne od μ, a



Rys. 56.

zatem bez straty na ogólności zadania możemy założyć $\mu = 1$, czyli, że moment statyczny trapezu względem AB jest równy:

$$\frac{a_1+a_2}{2}h.x_1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Suma momentów statycznych trójkątów ABD i BCD względem AB jest równa:

$$\frac{a_1h}{2}\frac{h}{3}+\frac{a_2h}{2}\frac{h}{3} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

A że oczywiście /1/ = /2/, więc:

$$\frac{(a_1+a_2)h}{2}x_1 = \frac{a_1h}{2}\cdot\frac{h}{3}+\frac{a_2h}{2}\cdot\frac{h}{3}$$

skąd

$$3(a_1+a_2)x_1 = (a_1+2a_2)h \quad \ldots\ldots (3)$$

Biorąc moment statyczny trapezu względem DC otrzymamy analogicznie:

$$3(a_1+a_2)x_2=(2a_1+a_2)h \quad \ldots\ldots (4)$$

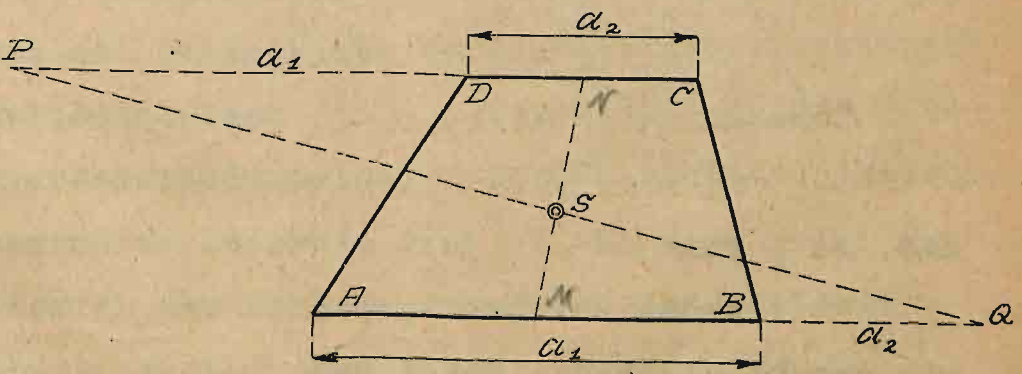
Dzieląc /3/ przez /4/ będziemy mieli:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{\frac{a_1}{2}+a_2}{a_1+\frac{a_2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Oczywiście, że stosunek ten wyznacza całkowicie położenie punktu S na środkowej MN, gdyż

$$\frac{MS}{SN}=\frac{x_1}{x_2}$$

Wykreślimy równanie /5/. Odmierzymy na prostej



Rys. 57.

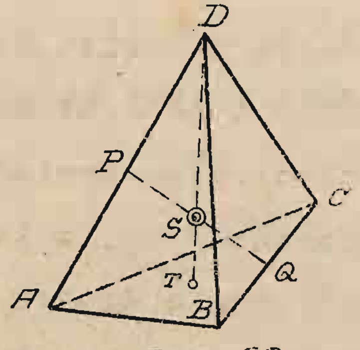
DC od punktu D odcinek $DP=a_1$, zaś na prostej AB od punktu B - odcinek $BQ=a_2$ i połączmy punkty P i Q, to w przecięciu ze środkową MN otrzymamy szukany środek ciężkości S trapezu $ABCD$.

Istotnie, z trójkątów podobnych MSQ i NDP mamy: $\frac{MS}{SN} = \frac{MQ}{NP}$, a że $MQ = \frac{a_1}{2} + a_2$ zaś

$NP = a_1 + \frac{a_2}{2}$ więc $\frac{MS}{SN} = \frac{\frac{a_1}{2} + a_2}{a_1 + \frac{a_2}{2}}$

56. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI MAS, UMIESZCZONYCH W WIERZCHOŁKACH CZWOROŚCIANU.

Dajmy na to, że w wierzchołkach czworościanu $ABCD$ znajdują się cztery punkty, każdy o masie m. Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości S tej grupy punktów.



Rys. 58.

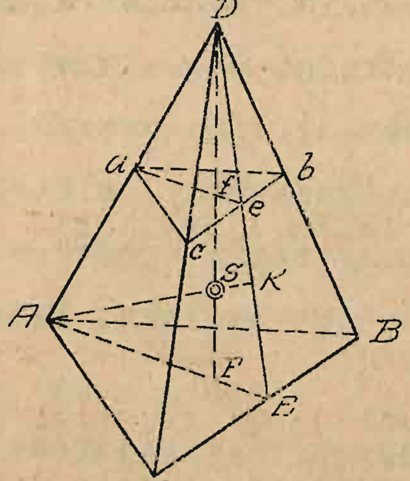
Wyznaczymy najpierw środek ciężkości punktów, umieszczonych w wierzchołkach ABC. Przypuśćmy, że punkt T jest tym środkiem ciężkości. Możemy uważać, że w punkcie T jest skoncentrowana masa $= 3m$ i zadanie nasze sprowadza się do znalezienia środka ciężkości dwóch mas: jednej, znajdującej się w $T(3m)$ i drugiej w punkcie $D(m)$. Szukany środek ciężkości leży oczywiście na prostej DT w takich odległościach od T i D, że $DS = \frac{3}{4} DT$. Tak samo moglibyśmy dowieść że szukany środek ciężkości leży na prostych, łączących trzy pozostałe wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości ścian przeciwległych, a z tego wynika twierdzenie geometryczne takie: proste, łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości ścian przeciwległych przecinają się w jednym punkcie.

Możemy jeszcze inaczej rozwiązać nasze zadanie: znajdźmy środek ciężkości mas, umieszczonych w wierzchołkach A i D. Środek ten leży, oczywiście, w środku krawędzi AD w punkcie P. Tak samo w punkcie Q, będącym środkiem krawędzi BC, leży środek ciężkości mas, umieszczony w punktach B i C. Możemy więc uważać, że w punktach P i Q są zgrupowane masy, z których każda jest równa $2m$ i oczywiście środek ciężkości czworościanu leży w środku odcinka, łączącego punkty P i Q.

Doszlibyśmy do tego samego środka ciężkości, gdybyśmy przeprowadzili poprzednie rozumowanie nad parami krawędzi AB i DC lub BD i AC, a z tego wynika twierdzenie geometryczne: trzy proste, łączące środki przeciwległych krawędzi czworościanu przecinają się w jednym punkcie.

57. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI OBJĘTOŚCI CZWOROŚCIANU $ABCD$.

Dzielimy czworościan na warstwy elementarne płaszczyznami równoległemi do jednej ze ścian. Niech jedną z tych płaszczyzn będzie abc i niech E będzie środkiem krawędzi BC. Prosta DE dzieli na pół wszystkie odcinki takie, jak bc, równoległe do BC, a prócz tego widać, że proste AE i ae są równoległe. Gdy odmierzymy $AF = 2/3\,AE$, to F będzie środkiem ciężkości podstawy ABC. Poprowadźmy prostą DF, przetnie ona ae w punkcie f. Z podobieństwa trójkątów wypadnie, że



Rys. 59.

$$\frac{af}{AF} = \frac{ae}{AE}, \text{ zatem}$$

$$af = \frac{2.ae}{3}, \text{ z czego}$$

znów wynika, że jest środkiem ciężkości trójkąta abc. Widzimy, że środki ciężkości wszystkich warstw elementarnych leżą na prostej DF, a więc na tejże prostej leży środek ciężkości całego czworościanu. Środek ciężkości czworościanu leży na każdej prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany, a zatem leży w tym samym punkcie, co środek ciężkości czterech jednakowych mas, umieszczonych w wierzchołkach. Wiadomo z twierdzenia poprzedzającego, że jest on odległy od wierzchołka D czworościanu o odległość $DS = 3/4 DF$.

Poprowadźmy jeszcze z wierzchołka D prostopadłą do przeciwległej ściany, a przez środek ciężkości S płaszczyznę, równoległą do ABC. Z podobieństwa trójkątów wypadnie, że ta płaszczyzna przetnie ową prostopadłą w odległości 1/4 jej długości od podstawy, czyli, że środek ciężkości jest odległy o 1/4 wysokości czworościanu od podstawy.

56. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI PIRAMIDY WIELOKĄTNEJ I STOŻKA.

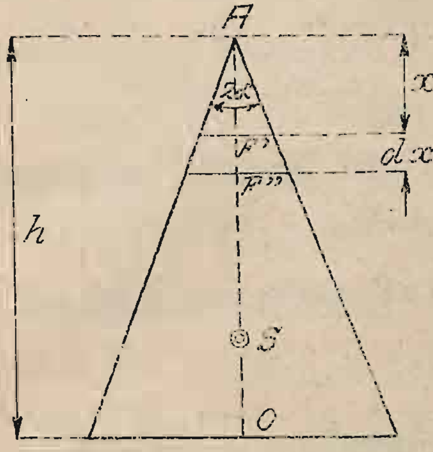
Dowiedziemy, że środek ciężkości piramidy wielokątnej leży na prostej, łączącej wierzchołek piramidy ze środkiem ciężkości podstawy w odległości 1/4 wysokości piramidy od podstawy. Istotnie: postępując podobnie, jak w wypadku poprzedzającym, dzielimy piramidę na warstwy elementarne płaszczyznami równoległemi do podstawy. Wszystkie te przecięcia są podobne do podstawy, a środek ciężkości każdej warstwy leży na prostej, łączącej wierzchołek ze środkiem ciężkości podstawy. Oczywiście i środek ciężkości piramidy leży na tej samej prostej.

Rozkładamy następnie podstawę na trójkąty. Łącząc wierzchołki tych trójkątów z wierzchołkiem piramidy, podzielmy piramidę na czworościany, posiadające wspólny wierzchołek. Środki ciężkości wszystkich czworościanów leżą w płaszczyźnie, równoległej do podstawy i położonej w odległości 1/4 wspólnej wysokości od podstawy. Na tej samej wysokości leży środek ciężkości piramidy c.b.d.d.

Jeżeli podstawa piramidy jest krzywolinjowa, to uważamy ją za wielobok o nieskończenie krótkich bokach. Wypada więc prawidło następujące: Aby wyznaczyć środek ciężkości stożka, łączymy wierzchołek V ze środkiem ciężkości F podstawy i odmierzamy na VF od wierzchołka $VS = 3/4\, VF$. Punkt S będzie środkiem ciężkości stożka.

W przypadku szczególnym, gdy dany stożek jest prostym kołowym jego środek ciężkości leży na osi, w odległości 3/4 wysokości od wierzchołka. Dowiedziemy jeszcze to twierdzenie bezpośrednie.

Niech będzie stożek prosty, kołowy, mający wysokość $FO = h$ i kąt wierzchołkowy $= 2\alpha$.



Rys. 60.

Przez wierzchołek A poprowadźmy płaszczyznę F równoległą do podstawy i wyznaczmy moment statyczny stożka względem tej płaszczyzny. Podzielmy w tym celu stożek na nieskończenie cienkie warstwy płaszczyznami, równoległemi do podstawy. Niech F' i F'' będą dwiema takiemi sąsiedniemi płaszczyznami. Wytną one ze stożka warstwę o grubości dx. Objętość tej warstwy, mogącej być uważaną za cylinder o wysokości dx, jest $\pi r^2 dx$, gdzie r oznacza promień koła przekroju. Jeżeli założymy, że gęstość masy stożka jest $\mu = 1$, to masa warstwy będzie równa także $\pi r^2 dx$, a moment statyczny warstwy względem płaszczyzny F będzie $\pi . r^2 dx . x$. Oznaczmy przez dN ten elementarny moment statyczny.- Ponieważ $r = x . tg \alpha$, więc możemy też napisać, że

$$dN = \pi . x^3 tg^2 \alpha . dx .$$

Stąd moment statyczny całego stożka

$$N = \pi . tg^2 \alpha \int_0^h x^3 dx = \pi tg^2 \alpha \frac{h^4}{4} .$$

Masa całego stożka jest równa objętości, pomnożonej przez gęstość, czyli

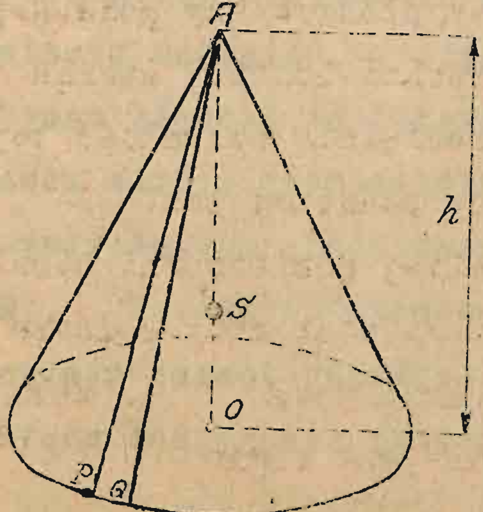
$$M = \frac{\pi . h^2 tg^2 \alpha . h}{3} = \frac{\pi . h^3 tg^2 \alpha}{3}$$

Stąd odległość środka ciężkości stożka od płaszczyzny F jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = 3/4\, h$.

Otrzymaliśmy więc rezultat zgodny z poprzedzającym.

59. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI POWIERZCHNI STOŻKOWEJ.

Niech będzie znowu prosty stożek kołowy o wysokości $AO = h$ o promieniu podstawy $= r$ i tworzącej $= a$. Znajdziemy najpierw środek ciężkości powierzchni bocznej tego stożka.



Rys. 61.

Środek ten będzie leżał na osi symetrji lub na osi AO stożka, trzeba więc jeszcze tylko wyznaczyć położenie tego środka na osi.

Podzielmy obwód podstawy stożka na nieskończenie małe elementy i punkty podziału połączmy z wierzchołkiem A, to otrzymamy nieskończenie wąskie trójkąty. Środek ciężkości każdego z tych trójkątów leży na tworzącej stożka w odległości 1/3 tej tworzącej od podstawy stożka, a z tego wynika, że środki ciężkości wszystkich trójkątów będą leżały w jednej płaszczyźnie, równoległej do podstawy. Płaszczyzna ta dzieli wysokość stożka w stosunku 1:2 i w punkcie przebicia tej płaszczyzny z wysokością będzie leżał środek ciężkości powierzchni bocznej stożka. Oznaczmy ten środek przez S_1. Oczywiście $OS_1 = \frac{1}{3} OA$.

Wyznaczmy teraz środek ciężkości całej powierzchni stożka. Wyznaczymy w tym celu moment statyczny tej powierzchni względem płaszczyzny podstawy.

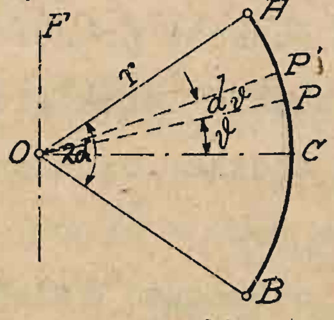
Ponieważ masa powierzchni bocznej stożka $(\mu = 1)$ wynosi $\pi . r . a$, zaś przeciętnie odległość tej powierzchni od płaszczyzny podstawy jest $\frac{h}{3}$, więc moment statyczny całkowitej powierzchni stożka jest równy $\frac{\pi . r . a . h}{3}$ /moment statyczny podstaw jest zerem/. Oznaczmy ten moment przez N. Masa całkowitej powierzchni stożka jest równa

$$M = \pi . r . a . + \pi . r^2 = \pi . r (a + r)$$

a więc odległość środka ciężkości tej powierzchni od płaszczyzny podstawy jest

$$Z_0 = \frac{\pi . r . a . h}{3 . \pi . r (a + r)} = \frac{a . h}{3 (a + r)}$$

§ 60. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI ŁUKU KOŁA. Niech będzie cienki jednorodny pręt, mający postać łuku koła. Połączmy końce A i B tego pręta ze środkiem O koła i oznaczmy kąt AOB przez 2α, a promień koła przez r. Aby wyznaczyć środek ciężkości łuku AB postąpmy tak:



Rys. 62.

Połączmy środek O koła ze środkiem C łuku AB. Prosta OC tworzy, oczywiście, z promieniami OA i OB równe kąty α, jest więc osią symetrji łuku AB i na niej leży środek ciężkości tego łuku.

Poprowadźmy przez punkt O płaszczyznę F, prostopadłą do OC i wyznaczmy moment statyczny łuku AB względem tej płaszczyzny.

W tym celu podzielmy łuk AB na nieskończenie małe elementy, z których typowym niech będzie łuk PP'. Oznaczmy kąty: POC przez ϑ, POP'

przez $d\vartheta$. Oczywiście długość elementu PP' jest $r.d\vartheta$. Jeżeli założymy, jak zwykle, że ciężar jednostki długości łuku $\mu=1$, to $r.d\vartheta$ będzie wyrażało masę łuku i gdy tę masę pomnożymy przez odległość elementu od płaszczyzny P, czyli przez $r.\cos\vartheta$, to moment statyczny tego elementu będzie równy:

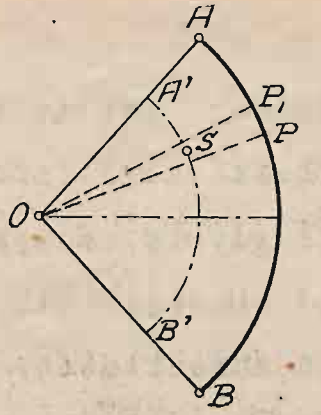
$$dN = r.d\vartheta.r.\cos\vartheta = r^2\cos\vartheta.d\vartheta;$$

moment zaś statyczny całego łuku wynosi:

$$N = r^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\cos\vartheta.d\vartheta = 2r^2\sin\alpha.$$

Masa całego łuku $M=2r.\alpha$, więc odległość środka ciężkości łuku od płaszczyzny F jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = \frac{r.\sin\alpha}{\alpha}$. Przypuśćmy, że łuk jest półkolem. W tym razie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i $x_0 = \frac{2r}{\pi}$.

61. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI WYCINKA KOŁOWEGO. Niech ACB będzie łukiem wycinka, a O środkiem. Promień wycinka oznaczymy przez r, a kąt AOB przez 2α i prowadzimy dwusieczną OC kąta AOB. Dzielimy następnie wycinek na elementarne trójkąty, o jednakowych polach, jednym z nich jest dajmy na to OPP'. Możemy skoncentrować masę tego trójkąta w jego środku ciężkości t.j. w takim punkcie S_1, że $OS_1 = \frac{2}{3}OP$. Czyniąc



Rys. 63.

to samo w każdym trójkącie, otrzymamy szereg cząsteczek o jednakowych masach rozłożonych na łuku kołowym $A'B'$. W granicy cząstki te utworzą jednorodny łuk koła, możemy więc wyznaczyć środek ciężkości wycinka przy pomocy wzorów par. poprzedzającego. Odległość jego od środka O będzie $x_0 = \frac{2.r}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ gdyż $\frac{2}{3} r$ jest promieniem łuku $A'B'$.

Dla pola półkola otrzymamy $x_0 = \frac{4.r}{3\pi}$, bo $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

§ 62. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI ODCINKA KOŁOWEGO. Wyznaczymy łatwo na zasadzie paragrafu poprzedzającego, zwróciwszy uwagę na to, że odcinek otrzymuje się przez odrzucenie trójkąta od wycinka.

§ 63. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI RZUTU FIGURY PŁASKIEJ. Niech będzie jakakolwiek figura płaska, mająca pole F i środek ciężkości S. Wyznaczymy rzut prostokątny tej figury na jakąś płaszczyznę. Pole rzutu oznaczmy przez F', a środek ciężkości rzutu przez S'. Dowiedziemy, że punkt S'

jest rzutem środka ciężkości S , czyli, że RZUT ŚRODKA CIĘŻKOŚCI FIGURY PŁASKIEJ JEST ŚRODKIEM CIĘŻKOŚCI RZUTU JEJ FIGURY. W tym celu obieramy najprzód układ współrzędnych tak, aby osie x, y leżały w płaszczyźnie rzutów. Oznaczmy kąt między płaszczyznami F i F' przez γ . W takim razie, jak wiadomo

$$F' = F\cos\gamma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Rozbijając pole F na bardzo drobne elementy, niech pole jednego z nich będzie równe f , a współrzędne x, y, z . Pole rzutu tego elementu oznaczmy przez f' . Współrzędne tego rzutu będą, oczywiście, $x, y, 0,$ zaś między f i f' będzie zachodziła zależność taka:

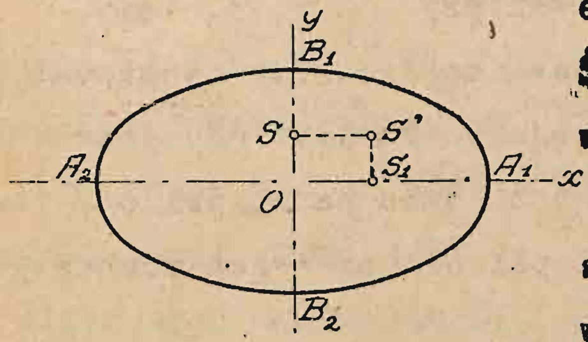
$$f' = f\cos\gamma \quad \ldots\ldots (2)$$

Oznaczmy moment statyczny przez F' względem płaszczyzny yOz . Będzie on oczywiście, równy $\Sigma f'x$. Ponieważ pole rzutu figury F jest równe F' , a gęstość powierzchniowa jest równa 1, więc masa tego pola jest również F' , zaś $x_0' = \frac{\Sigma f'x}{F'}$ jest odległością środka ciężkości figury F' od płaszczyzny yOz . Ponieważ inaczej $x_0' = \frac{\Sigma f\cos\gamma \cdot x}{F \cdot \cos\gamma}$ więc $x_0' = \frac{\Sigma f \cdot x}{F}$

Ale temu samemu jest równa współrzędna x_0 punktu S. Tak samo dowiedlibyśmy, że współrzędne y_0 i y_0' punktów S i S' są równe. Innemi słowy punkt S' jest rzutem punktu S.

§ 64. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI POLA ELIPTYCZNEGO.

Niech będzie elipsa, mająca osi $2a$ i $2b$. Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości połowy tej elipsy np. $A_1B_1A_2$. Środek ten będzie oczywiście leżał na prostej OB_1 jako na osi symetrji, należy tylko wyznaczyć położenie owego środka na tej osi.



Rys. 64.

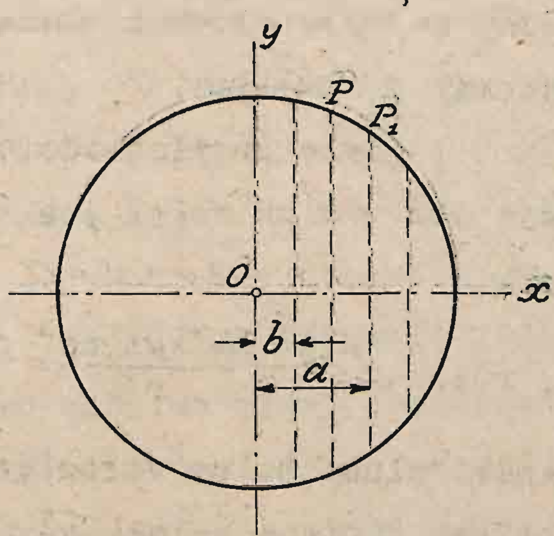
Daną elipsę możemy uważać za prostokątny rzut koła, o średnicy $A_1A_2 = 2a$ i o środku O. Z tego wynika, że $OB_1 = b$ jest rzutem promienia tego koła, a zatem $b = a\cos\gamma$, gdzie γ oznacza kąt między płaszczyznami: elipsy i koła. Stąd: $\cos\gamma = \frac{b}{a}$.

Oznaczmy przez T środek ciężkości półkola. Na zasadzie twierdzenia § poprzedzającego, środek ciężkości S pola $A_1B_1A_2$ jest rzutem punktu S, a zatem odcinek OS jest rzutem odcinka OT i $OS = OT\cos\gamma$ czyli $OS = \frac{4a}{3\pi}\frac{b}{a} = \frac{4b}{3\pi}$, gdyż odległość środka półkola od jego środka ciężkości jest równa $\frac{4a}{3\pi}$.

Aby wyznaczyć środek ciężkości pola półelipsy $B_1A_1B_2$ możemy je uważać znów, jako rzut półkola o średnicy $= 2a$ i o środku O, przytem jedna połowa tego półkola znajduje się nad płaszczyzną elipsy, druga zaś nad nią. Oczywiście środek ciężkości S_1 półelipsy $B_1A_1B_2$ leży na osi OA_1, czyli razem ze środkiem ciężkości półkola, zaś odległość jego od punktu O jest $OS_1 = \frac{4a}{3\pi}$, czyli jest taka sama, jak odległość środka ciężkości półkola od tegoż punktu O.

§ 65: ŚRODEK CIĘŻKOŚCI ĆWIARTKI ELIPSY np. A_1OB_1 wyznaczymy w sposób taki: zwróćmy uwagę na dwie ćwiartki elipsy A_2OB_1 i A_1OB_1. Środek ciężkości tych ćwiartek leży na jednakowych odległościach od osi A_1A_2, a prosta łącząca je musi przechodzić przez punkt S. Czyli że środek ciężkości ćwiartki A_1OB_1 leży na prostej równoległej do A_1A_2 i przechodzącej przez S. Z drugiej strony tak samo dowiedziemy, że musi on leżeć na prostej, przechodzącej przez S_1 i równoległej do B_1B_2, a zatem szukany środek ciężkości leży w punkcie S' na przecięciu tych dwóch prostych. Odległość punktu S' od osi A_1A_2 jest, oczywiście, równa $\frac{4b}{3\pi}$, zaś odległość od osi B_1B_2 wynosi $\frac{4a}{3\pi}$.

§ 66. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI STREFY KULISTEJ. Niech będzie kula, o promieniu r i środku O. Poprowadźmy dwie płaszczyzny równoległe, odległe od środka kuli o a i $b(<r)$. Te płaszczyzny wytną z powierzchni kuli strefę, której środek ciężkości mamy wyznaczyć.



Rys. 65.

Obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za oś x weźmy prostą, przechodzącą przez O i prostopadłą do płaszczyzn przekroju, osi y i z obieramy w płaszczyźnie prostopadłej do x w punkcie O.

Wyznaczmy moment statyczny strefy względem płaszczyzny yOz. W tym celu podzielmy powierzchnię strefy na nieskończenie drobne elementy, płaszczyznami prostopadłemi do osi x .- Niech kolejne dwie z tych płaszczyzn przecinają obwód koła, położonego w płaszczyźnie rysunku w dwóch punktach P_1 i P_2 . Możemy uważać powierzchnię, zawartą między temi płaszczyznami za ścięty stożek, a w takim razie masa jego $(\mu=1)$ wynosi $ds.2y.\pi$, gdzie ds oznacza długość łuku PP_1 , a y promień koła średniego.- Stąd, moment statyczny tej powierzchni elementarnej względem płaszczyzny zOy jest $dN=ds.2y.\pi.x$, gdzie x jest odciętą punktu P . Ponieważ $ds^2=dx^2+dy^2$, a $x^2+y^2=r^2$, skąd $2xdx+2ydy=0$ lub $dy=-\frac{x.dx}{y}$, więc $ds^2=\frac{(x^2+y^2)dx^2}{y^2}=\frac{r^2dx^2}{y^2}$ albo $ds=\frac{r.dx}{y}$ /znak "plus" bo ze wzrostem x wzrasta też s /. Zatem $dN=\frac{r.dx}{y}\cdot 2y.\pi.x$ skąd $dN=r.dx.2\pi.x$. Całkując otrzymamy

$$N=2\pi.r\int_b^a x\,dx=\pi r^2(a^2-b^2)$$

. Masę strefy znajdziemy łatwo, zważywszy, że masa elementarna

$$dM=ds.2y.\pi=\frac{r.dx}{y}\cdot 2y.\pi=r.dx.2\pi$$

skąd

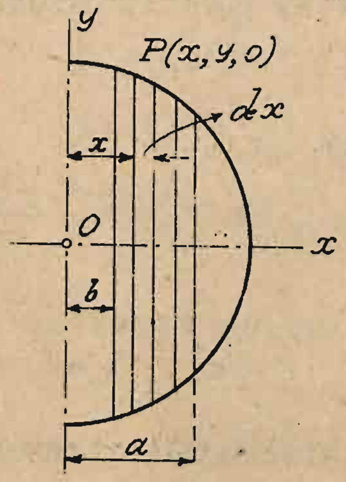
$$M=\int_b^a r\,dx.2\pi=2\pi r(a-b)$$

Szukana odległość środka ciężkości strefy od płaszczyzny yOz jest równa $x_0 = \frac{N}{M} = \frac{a+b}{2}$

Jeśli strefa jest półkulą, to $a = r$, $b = 0$ a wtedy $x_0 = \frac{r}{2}$.

§ 67. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI WARSTWY SFERYCZNEJ.

Niech będzie kula o promieniu r i przypuśćmy, że została z niej wycięta strefa dwiema płaszczyznami równoległemi, których odległości od środka O kuli są odpowiednio równe b i a . Chodzi o wyznaczenie środka ciężkości objętości zawartej między temi płaszczyznami i strefą. Obierzmy układ współrzędnych, jak w przykładach poprzedzających. Oczywiście środek ciężkości warstwy leży na osi x , należy tylko znaleźć odległość jego od środka O.



Rys. 66.

Podzielmy w tym celu bryłę na nieskończenie cienkie warstwy, płaszczyznami prostopadłemi do osi x . Dajmy na to, że dwie kolejne płaszczyzny podziału są odległe od środka O , odpowiednio o x i $x + dx$. Wyznaczmy moment statyczny warstwy, zawartej między temi płaszczyznami względem płaszczyzny yZ. Możemy uważać tę warstwę za nieskończenie cienki cylinder, którego promień podstawy $= y$, a wysokość $= dx$

W takim razie szukany moment statyczny będzie: $dN = \pi . y^2 dx . x$, a jeżeli uwzględnimy, że $x^2 + y^2 = r^2$ to otrzymamy; $dN = \pi(r^2 - x^2)x . dx$

Moment statyczny całej strefy względem osi x jest równy;

$$N = \pi \int_b^a (r^2x - x^3)\,dx = \pi \Big/ \frac{r^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \Big/_b^a = \frac{\pi(a^2-b^2)}{4}(2r^2-a^2-b^2)$$

Masa nieskończenie cienkiej warstwy $(\mu = 1)$ wynosi

$$dM = \pi . y^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx$$

skąd

$$M = \pi \int_b^a (r^2 - x^2)\,dx = \pi \Big/ r^2x - \frac{x^3}{3} \Big/_b^a = \frac{1}{3}\left\{\pi(a-b)(3r^2-a^2-ab-b^2)\right\}$$

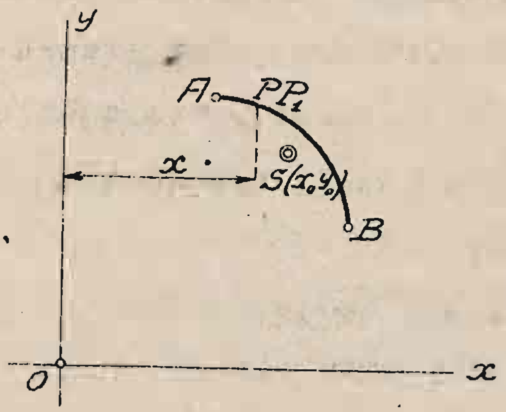
Szukana odległość środka ciężkości całej warstwy od punktu O jest więc równa;

$$x_0 = \frac{N}{M} = \frac{3(a+b)(2r^2-a^2-b^2)}{4(3r^2-a^2-ab-b^2)}$$

W przypadku szczególnym, gdy $b = 0$, a $a = r$ otrzymamy dla półkuli: $x_0 = \frac{3}{8}r$.

<u>§ 68. PIERWSZE TWIERDZENIE GULDINA.</u> Niech bę-

dzie prostokątny płaski układ współrzędnych x, y



Rys. 67.

Przypuśćmy, że dana jest jakaś linja, mająca końce A i B. Wyznaczmy moment statyczny tej linji względem osi y. W tym celu podzielmy tę linję na nieskończenie małe elementy, z których każdy ma długość ds / s – jest długością całej linji AB /. Przypuśćmy, że PP_1 jest jednym z tych elementów. Jeżeli współrzędne jego oznaczymy przez x i y, to jego moment statyczny względem osi y będzie $ds.x$, zaś, jako moment statyczny całej linji AB względem tej osi znajdziemy $\int ds.x$.

Przypuśćmy, że środek ciężkości linji AB znajduje się w punkcie $S(x_o, y_o)$. W takim razie, oczywiście:

$$\int ds.x = s.x_o$$

Dajmy na to, że linja AB zaczęła się obracać dokoła osi y i obróciła się o nieskończenie mały kąt $d\vartheta$. Każdy punkt tej linji odbył nieskończenie krótką drogę prostopadłą do płaszczyzny układu współrzędnych. Droga punktu P wynosi $x.d\vartheta$, zaś powierzchnia, zakreślona przez łuk ds przy tem nieskończenie małem przesunięciu jest $ds.x.d\vartheta$. Stąd powierzchnia, zakreślona przez całą linję AB wyraża się przez

$$\int ds.x\,d\vartheta = d\vartheta\int x.ds \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

a że $\int x\,ds = s.x_0$, więc owa powierzchnia jest równa $s.x_0.d\vartheta$, gdyż $d\vartheta$ uważamy za stałe.

Przypuśćmy, że linja AB obróciła się o skończony kąt ϑ. W takim razie powierzchnia przytem zakreślona jest równa:

$$\int_0^{\vartheta} s.x_0\,d\vartheta = s.x_0\int_0^{\vartheta} d\vartheta = s(x_0.\vartheta)$$

Ponieważ $x_0\vartheta$ jest to droga, którą zatoczył środek ciężkości S, przy obrocie o kąt ϑ, więc możemy powiedzieć: POWIERZCHNIA, ZAKREŚLONA PRZEZ JAKĄŚ LINJĘ PRZY OBROCIE JEJ DOKOŁA PEWNEJ OSI JEST RÓWNA ILOCZYNOWI Z DŁUGOŚCI TEJ LINJI PRZEZ DROGĘ JAKĄ ODBYŁ PRZYTEM ŚRODEK CIĘŻKOŚCI.

PRZYKŁADY: 1/ Niech będzie prosty stożek kołowy, mający promień podstawy r i tworzącą a. Wyznaczyć powierzchnię boczną tego stożka.

Możemy uważać, że powierzchnia ta powstała przez obrót tworzącej, dokoła osi (AO). Ponieważ środek ciężkości tworzącej leży w jej środku (C), odległym od osi obrotu o $\frac{r}{2}$, więc droga, przebyta przez ten punkt przy obrocie jest $l = 2.\pi \cdot \frac{r}{2}$. Powierzchnia boczna stożka jest więc równa iloczynowi l przez a czyli:

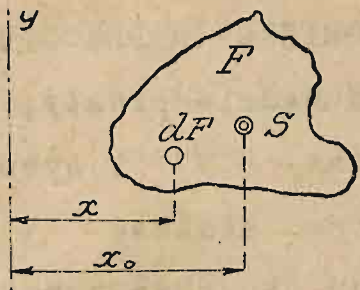
$$2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot a = \pi . r . a .$$

II/. Niech będzie koło, o promieniu r i oś y leżąca z tem kołem w jednej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że odległość środka koła od osi y jest równa a. Wyznaczyć powierzchnię utworzoną przez obrót koła dokoła krzywej tworzącej /koła/ jest $2.\pi . r$, a droga, zataczana przez środek ciężkości tej krzywej wynosi $2.\pi . a$, a zatem szukaną powierzchnią S:

$$S = 2\pi r . 2.\pi . a = 4\pi^2 a . r .$$

§ 69. DRUGIE TWIERDZENIE GULDINA. Niech będzie dana oś y i jakakolwiek figura płaska, o polu F, leżąca w jednej płaszczyźnie z tą osią.

Znajdźmy moment statyczny figury F względem osi y. W tym celu podzielmy tę figurę na nieskończenie małe elementy, z których typowe ma pole $= dF$ i jest odległe od osi z x. Moment statyczny elementu dF względem osi y jest równy $dF.x$, a moment statyczny całej figury względem tejże osi jest $\int dF.x$.



Rys. 68.

Przypuśćmy, że odległość środka ciężkości S pola od osi y wynosi x_o, to oczywiście $\int dF.x = F.x_o$

Wyobraźmy sobie, że figura F obróciła się dokoła osi y o nieskończenie mały kąt $d\vartheta$. Przy tym obrocie element dF zatoczył bryłę, którą można uważać za elementarny cylinder o podstawie dF i wysokości $x.d\vartheta$. Zatem objętość utworzonego cylindra jest $dF.x.d\vartheta$, a objętość bryły zatoczonej przez całą figurę F wynosi $\int dF.x.d\vartheta = d\vartheta \int dF.x$ /bo $d\vartheta$ jest stałe/. Ale ponieważ $\int dF.x = F.x_o$, więc objętość ta $= F x_o . d\vartheta$. Przypuśćmy, że figura F obróciła się o skończony kąt ϑ, to będziemy mogli napisać:

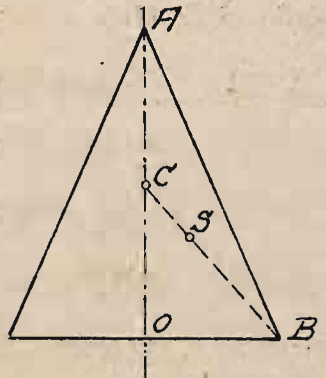
$$\int_0^{\vartheta} F.x_o.d\vartheta = F.x_o.\vartheta \quad \ldots\ldots\ (1)$$

Wzór /1/ wyraża twierdzenie o które chodziło. Można je wysłowić tak: OBJĘTOŚĆ BRYŁY, KTÓRĄ WY-

TWORZYŁO POLE F JEST RÓWNĄ ILOCZYNOWI Z POLA PRZEZ DŁUGOŚĆ DROGI, KTÓRĄ OBIEGŁ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI.

§ 70. PRZYKŁADY. 1/ Niech będzie prosty, kołowy stożek, mający promień podstawy $= r$ i wysokość $= h$. Wyznaczyć objętość tego stożka.

Możemy uważać, że objętość stożkowa powstała przez obrót trójkąta AOB dokoła osi AO, a zatem ta objętość jest równa iloczynowi z pola trójkąta AOB przez drogę, jaką obiegł jego środek ciężkości. Pole $\triangle AOB$ jest równe $\frac{r.h}{2}$, ponieważ środek ciężkości S jest odległy od środka C wysokości AO, o



Rys. 69.

$CS = \frac{1}{3} BC$ więc promień koła, jakie obiegł on przy obrocie jest równy $\frac{r}{3}$, a droga przezeń przebyta wynosi $\frac{2\pi . r}{3}$. Stąd szukana objętość równa się: $\frac{r.h}{2} \cdot \frac{2\pi . r}{3} = \frac{1}{3}\pi . r^2 h$.

II/. Niech będzie koło, o promieniu r i oś y leżąca z tem kołem w jednej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że odległość środka koła od osi y jest równa a. Wyznaczyć objętość, utworzoną przez obrót koła dokoła osi y, czyli objętość pierścienia.-

Pole figury tworzącej jest równe πr^2 , a droga, którą obiegł środek ciężkości wynosi $2\pi . a$. Stąd szukana objętość równa się:

$$\pi . r^2 . 2\pi . a = 2\pi^2 a . r^2 .$$

III. Wyznaczyć, opierając się na pierwszem twierdzeniu Guldina, środek ciężkości półokręgu, o promieniu r i środku O .

Oczywiście szukany środek ciężkości leży na osi symetrji półkola t.j. na prostej, przechodzącej przez środek O i prostopadłej do krańcowej średnicy AB . Dajmy na to, że odległość środka ciężkości S od środka O jest równa x .

Przypuśćmy, że półkole obraca się dokoła średnicy AB , to powierzchnia P przez nie zatoczona jest równa iloczynowi z długości linji tworzącej $(= \pi . r)$ przez drogę, którą odbył środek ciężkości $(= 2\pi . x_0)$. A zatem $P = \pi r . 2\pi x_0$. Lecz jest to powierzchnia kuli, a zatem:

$P = 4\pi . r^2$, więc $r . 2\pi . x_0 = 4\pi r^2$.

skąd $x_0 = \frac{2 . r}{\pi}$.

IV. Wyznaczyć, opierając się na drugim twierdzeniu Guldina, środek ciężkości półkola, o promieniu r i środku O .

Oznaczmy odległość środka ciężkości S od punktu O przez x_0 i przypuśćmy, że półkole obraca się około AB. W takim razie objętość powstałej bryły wynosi $V = \frac{\pi . r^2}{2} 2\pi x_0$. Lecz jest to kula, a zatem $V = \frac{4}{3}\pi . r^3$, więc

$$\frac{\pi . r^2}{2} 2\pi . x_0 = \frac{4}{3}\pi . r^3 \text{ stąd } x_0 = \frac{4r}{3}.$$

§ 71. UWAGI NAD OGÓLNOŚCIĄ TWIERDZEŃ GULDINA.

Jeśli figura tworząca przecina oś obrotu, to twierdzenia Guldina są nieważne. Istotnie: przypuśćmy, że punkty tej krzywej P_1 i P_2 leżą po stronach odwrotnych osi obrotu, w takim razie odcięte ich x_1, x_2 mają znaki odwrotne, a zatem odpowiednie elementy powierzchni lub objętości, jako zawierające czynnik $x.d\vartheta$ będą miały także znaki odwrotne. Całka daje sumę takich elementów, wziętych z właściwymi znakami, a więc, jeżeli oś przecina figurę, to twierdzenia Guldina dają różnicę powierzchni lub objętości, które zataczają dwie części figury, położone po odwrotnych stronach osi obrotu.

Twierdzenia Guldina dają się uogólnić w innym kierunku.

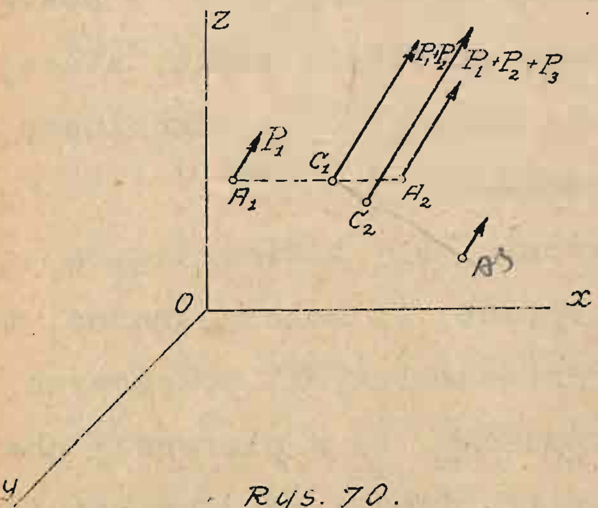
Dajmy na to, że figura F porusza się w przestrzeni tak, że jej środek ciężkości S opisuje pewną linję krzywą s. Przypuśćmy, że ta figura F pozostaje wciąż normalną do s. Dowiedziemy, że przy tym ruchu powstanie bryła, której objętość jest równa polu figury F, pomnożonem przez drogę środka ciężkości.

Jest to prawie oczywiste. Gdy bowiem figura porusza się w opisany sposób, to możemy uważać, że obraca się ona dokoła osi chwilowych, położonych w jej płaszczyźnie. Przypuśćmy, że w pierwszej chwili figura F obróciła się dokoła osi chwilowej o kąt $d\vartheta_1$, w następnej chwili o $d\vartheta_2$, dalej o $d\vartheta_3$ i t.d., to oczywiście każdego obrotu chwilowego dotyczy twierdzenie Guldina, a więc dotyczy też ono ruchu całkowitego c.b.d.d.

§ 72. ZNACZENIE MECHANICZNE ŚRODKA MASY. Niech będzie prostokątny układ współrzędnych. Dajmy na to, że mamy jakieś ciało sztywne, do którego należą punkty $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$ . . . .

Przypuśćmy, że na te punkty działają siły równoległe: w punkcie A_1 - siła P_1, a w A_2 - P_2 ....

Wypadkowa tych sił równa się ich sumie i jest do nich równoległa. Chodzi o wyznaczenie punktu przyłożenia tej wypadkowej. Dajmy na to, że wypadkowa sił P_1 i P_2 leży w punkcie $C_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$



Rys. 70.

to oczywiście

$$\frac{A_1C_1}{C_1A_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

lub

$$\frac{\xi_1 - x_1}{x_2 - \xi_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

Stąd

$$(P_1 + P_2)\xi_1 = P_1 x_1 + P_2 x_2 \quad (1)$$

Dalej wyznaczmy wypadkową sił $(P_1 + P_2)$ i P_3. Dajmy na to, że jest ona przyłożona w punkcie $C_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$. Otrzymamy analogicznie do /1/:

$$(P_1 + P_2 + P_3)\xi_2 = (P_1 + P_2)\xi_1 + P_3 x_3$$

albo

$$(P_1 + P_2 + P_3)\xi_2 = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3$$

Wogóle

$$(P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)\xi = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x + \ldots$$

gdzie ξ oznacza odciętą punktu $C(\xi, \eta, \zeta)$
albo inaczej $\xi \Sigma P = \Sigma P x$, skąd $\xi = \dfrac{\Sigma P x}{\Sigma P}$

Tak samo:

$$\eta = \frac{\Sigma P y}{\Sigma P} \quad \text{i} \quad \zeta = \frac{\Sigma P z}{\Sigma P}$$

Należy zwrócić uwagę na tę okoliczność, że jak wynika z otrzymanych wzorów, współrzędne punktu C przyłożenia wypadkowej sił $P_1, P_2, P_3 \dots$ nie zależą wcale od kierunku tych składowych. - Przypuśćmy, że wszystkie składowe obracają się dokoła punktu C, pozostając równoległemi. W takim razie ich wypadkowa też będzie się obracała dokoła tegoż punktu. Ten punkt C nazywają ŚRODKIEM UKŁADU SIŁ RÓWNOLEGŁYCH.

Niech będzie w przestrzeni jakieś ciało sztywne. Podzielmy je na bardzo drobne elementy, z których jeden niech ma masę m_1, drugi $m_2, \dots$

Jeśli ciało znajduje się w znacznej odległości od środka ziemi w stosunku do jego rozmiarów, to można uważać, że ciężary elementów tego ciała są proporcjonalne do mas. Tak więc ciężar pierwszego elementu jest równy gm_1, drugiego $gm_2, \dots$ gdzie g oznacza współczynnik proporcjonalności.

Linje działania tych sił schodzą się w środku ziemi, a więc przy naszem założeniu co do odległości ciała od tego środka, możemy przyjąć, że w przybliżeniu linje te są równoległe, a zatem stosując wyżej wyprowadzone wzory znajdziemy, że współrzędne punktu przyłożenia wypadkowej czyli współrzędne środka sił równoległych są:

$$x_0 = \frac{\Sigma g m . x}{\Sigma g m} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}; \quad y_0 = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}; \quad z_0 = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$$

Ale tak samo, jak wiadomo, wyrażają się współrzędne środka masy ciała. A zatem ŚRODEK SIŁ CIĄŻENIA DZIAŁAJĄCYCH NA RÓŻNE ELEMENTY CIAŁA ZNAJDUJĄ SIĘ W ŚRODKU MASY i możemy powiedzieć, że siła ciążenia jest przyłożona w środku masy[x/].

Należy przytem poczynić następujące uwagi:

1-o. O wypadkowej sił równoległych może być mowa tylko w tym razie, gdy działają one na ciało sztywne. A więc środek ciężkości w ścisłym znaczeniu tego wyrazu posiadają tylko ciała sztywne, podczas gdy środek masy istnieje w każdym ciele i w każdym układzie ciał.

2-o. Punkt przyłożenia siły ciężkości w ciele sztywnem tylko wtedy leży w środku masy, gdy rozmiary ciała są drobne w stosunku do odległości od środka ziemi. Jeżeli warunek ten nie jest spełniony, to linja działania wypadkowej siły ciężkości może nie przechodzić przez środek masy, a zatem ten punkt nie może być wówczas uważany za punkt przyłożenia tej siły.

---

x/ Właśnie środek masy w znaczeniu punktu przyłożenia siły ciążenia nazywa się środkiem ciężkości.