to stosunek $\frac{r}{R}$ powinien być jaknajmniejszy.

Jeśli nie chodzi o podniesienie ciężaru Q, ale o to aby nie dopuścić do spadania jego, to najmniejszą siłę, jaką można to uczynić, znajduje się tak: Przypuśćmy, że siła P jest tak mała, że tarcie w punkcie A jest całkowicie rozwinięte. Gdyby ta siła P była cokolwiek mniejszą, to już zacząłby się spadek ciężaru. Różnica między zadaniem obecnem, a tylko co rozwiązanem polega na tem że teraz tarcie działa w kierunku odwrotnym, niż poprzednio. Wobec tego należy we wzorze /4/ zmienić tylko znaki przed tymi wyrazami, w skład których wchodzi φ. Wtedy otrzymamy:

$$P = Q\frac{R - r\sin\varphi}{R + r\sin\varphi}.$$

ROZDZIAŁ V.

O SZNURACH I ŁAŃCUCHACH

32. POJECIE SZNURA. Sznur, lina lub łańcuch posiadają tę własność, że mogą w nich zachodzić tylko naprężenia podłużne. Jeśli przypuścimy, że sznur jest przymocowany do jakiegoś ciała, to nie możemy na nie wywierać za pośrednictwem sznura innego działania prócz ciągnienia.

Jeśli sznur odpowiada ściśle tej definicji, to mówimy, że jest on doskonale wiotki. W sznurach istotnych, a zwłaszcza w grubych linach, mogą zachodzić również małe naprężenia poprzeczne. W dalszym ciągu będzie mowa jedynie o sznurach doskonale wiotkich.

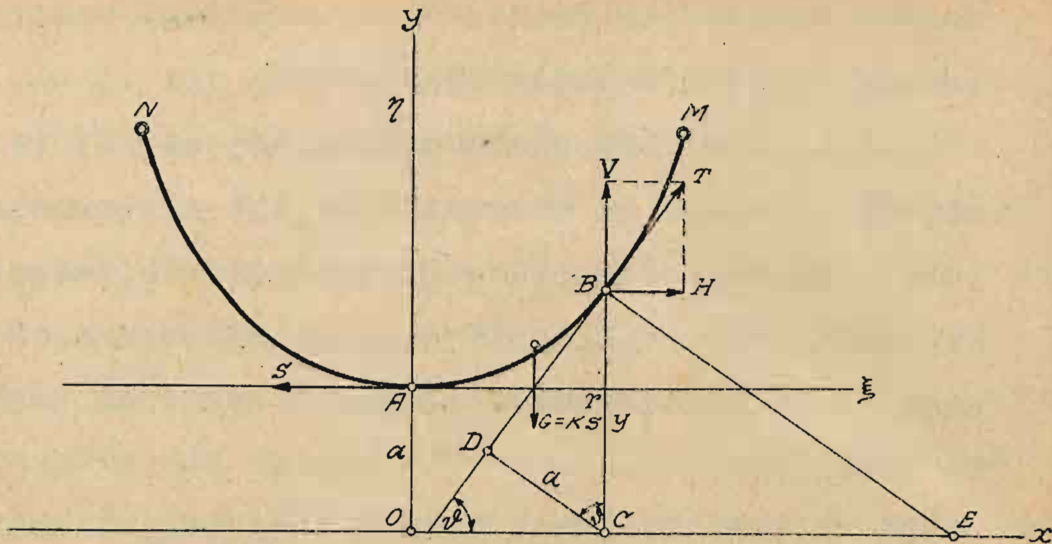
33. KATENOIDA LUB KRZYWA ŁAŃCUCHOWA. Niech będzie jakiś ciężki sznur jednorodny lub niejednorodny, t.zn. ciężar jednostki jego długości może nie być wielkością stałą.

Umocujmy końce tego sznura w punktach M i N, to przybierze on postać pewnej krzywej, którą nazywamy KATENOIDĄ lub KRZYWĄ ŁAŃCUCHOWĄ.

Najniższy punkt A tej krzywej nazywamy jej wierzchołkiem. Przetnijmy sznur w tym punkcie.

Gdybyśmy chcieli, aby część AM nie zmieniła się ani pod względem kształtu, ani pod względem położenia, to trzebaby przyłożyć w A pewną siłę poziomą S, równą naprężeniu, które panowało w tym punkcie.

Przypuśćmy dalej, że sznur został przecięty jeszcze w innym punkcie, np. w B. W tym punkcie przed



Rys. 37.

rozcięciem panowało również pewne naprężenie w kierunku stycznej do łańcuchowej i gdybyśmy chcieli, aby część AB nie zmieniała się, ani pod względem kształtu, ani pod względem położenia, to trzebaby przyłożyć w B siłę T, równą owemu naprężeniu i działającą w kierunku stycznej. Na każdy element części AB sznura działa jeszcze siła ciężkości. Gdyby sznur zesztywniał, to równowaga nie zostałaby zachwiana. Możemy więc uważać sznur za sztywny, a zatem możemy mówić o wypadkowej Q owych sił ciężkości. Będzie ona przyłożona w środku ciężkości wyciętej części sznura.

A więc na sznur /który uważamy za sztywny/ działają 3 siły: S, T i Q. Ponieważ zachodzi równowaga, więc te siły muszą przechodzić przez jeden punkt, a zatem STYCZNE W PUNKTACH A i B DO ŁAŃCUCHOWEJ MUSZĄ SIĘ PRZECINAĆ NA PIONIE, PRZECHODZĄCYM PRZEZ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI ŁUKU AB.

Twierdzenie powyższe jest zupełnie ogólne, dotyczy ono wszystkich łańcuchowych.

Wyprowadzimy teraz dwie inne własności katenoidy.

Rozłóżmy siłę T na 2 składowe: poziomą i pionową i oznaczmy pierwszą z nich przez H, drugą zaś przez V. Weźmy sumę rzutów wszystkich sił, działających na łuk AB, na kierunek poziomy. Ponieważ rzuty sił V i Q są zerami, więc otrzymujemy $H=S$ t.zn. NAPRĘŻENIA POZIOME SĄ WE WSZYSTKICH PUNKTACH ŁAŃCUCHOWEJ JEDNAKOWE.

Jeśli weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to otrzymamy $V=Q$, t.zn. NAPRĘŻENIE pionowe POZIOME (V) W JAKIMKOLWIEK PUNKCIE ŁAŃCUCHOWEJ JEST RÓWNE CIĘŻAROWI ŁUKU, ZAWARTEGO MIĘDZY TYM PUNKTEM A WIERZCHOŁKIEM.

<u>34. KATENOIDA POSPOLITA.</u> Niech będzie sznur jednorodny, umocowany w punktach M i N. Krzywa, jaką on tworzy, zwisając, nazywa się ŁAŃCUCHOWĄ

POSPOLITĄ lub KATENOIDĄ POSPOLITĄ. Wyprowadzimy jej równanie.

Obierzmy układ współrzędnych w sposób taki: za oś y uważajmy pion, przechodzący przez wierzchołek A katenoidy; aby zaś obrać położenie osi x oznaczmy naprężenie sznura w wierzchołku A przez S. Gdy przetniemy sznur w tym punkcie, to aby część AM nie zmieniła się, trzeba przyłożyć w A siłę, równą naprężeniu t.j. $= S$. Oznaczmy ciężar jednego metra sznura przez k i przypuśćmy, że a metrów sznura waży S kg. czyli $S = ka$.

Urządźmy w A mały bloczek i przeciąwszy sznur o a metrów od A w stronę N przerzućmy go przez ów bloczek; zwisająca część sznura wytworzy siłę $= S$ i łuk AM nie ulegnie żadnej zmianie.

Koniec O zwisającego sznura obierzmy właśnie za początek współrzędnych, a prostą, przechodzącą przez O i prostopadłą do osi y - za oś x. Weźmy dowolny punkt B na katenoidzie. W tym punkcie działa pewne naprężenie T. Gdyby więc przeciąć sznur w punkcie B, to dla tego aby łuk AB nie zmienił się, trzeba przyłożyć w B siłę T.

Załóżmy, że r metrów sznura waży T kg. t.j. $T = kr$. Odetnijmy sznur o r metrów wyżej od punktu B i przerzućmy go przez bloczek, umieszczony w tym punkcie; zwisająca część sznura wytworzy siłę $= T$ i łuk AB nie ulegnie żadnej zmianie.

A więc, gdy na łuk AB działać będą siły S i T, a oprócz tego ciężar sznura, równy ks /gdzie s oznacza długość łuku AB /, to ta część sznura pozostanie w równowadze. Z tego wynika, że siły S i T równoważą się. Gdy weźmiemy sumy rzutów tych sił, na kierunki: poziomy i pionowy, to otrzymamy równania:

$$k.r.\cos\vartheta - k.a = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$k.r.\sin\vartheta - k.s = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

gdzie ϑ oznacza kąt, który styczna do łańcuchowej w punkcie B tworzy z osią x. Z /1/ i /2/ otrzymamy:

$$r.\cos\vartheta = a \quad \ldots\ldots (3)$$

$$r.\sin\vartheta = s \quad \ldots\ldots (4)$$

Podnosząc do kwadratu równania /3/ i /4/ i dodając je znajdziemy, że: $r^2 = a^2 + s^2 \quad \ldots (5)$

Podzielmy równanie /4/ przez /3/, będzie:

$$tg\,\vartheta = \frac{s}{a} \qquad (6)$$

Ponieważ

$$tg\,\vartheta = \frac{dy}{dx} \qquad (7)$$

gdzie x, y oznaczają współrzędne punktu B, zatem:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a} \qquad (8)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe z trzema zmiennemi x, y i s. Możemy się jednak pozbyć jednej z nich np. s. Zróżniczkujemy w tym celu równanie /8/ względem x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\frac{ds}{dx} \qquad (9)$$

Jak wiadomo $ds^2 = dx^2 + dy^2$,

skąd

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (10)$$

/Pozostawimy znak $+$, bo s jest wzrastającą funkcją zmiennej x /. Zatem podstawiając to do /9/ otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (11)$$

Otrzymaliśmy więc równanie różniczkowe drugiego rzędu z dwiema zmiennemi. Aby obniżyć rząd tego równania oznaczmy $\frac{dy}{dx}$ przez p czyli

$$\frac{dy}{dx} = tg\vartheta = p \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Różniczkując /12/ względem x będziemy mieli

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \qquad \ldots\ldots\ldots (13)$$

Podstawiając /13/ do /11/ otrzymamy:

$$dx = \frac{a.dp}{\sqrt{1+p^2}} \qquad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe pierwszego rzędu. Całkując otrzymamy:

$$x = a.lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) + A_1 \qquad \ldots\ldots (15)$$

gdzie A_1 jest stałą całkowania. Wyznaczmy tę stałą. W tym celu załóżmy $x=0$. Tej wartości x odpowiada wierzchołek A łańcuchowej; styczna w tym punkcie tworzy z osią x kąt 0^0, a więc również $p=0$. Podstawiając te wartości do równania /15/ znajdziemy, że $A_1 = 0$, a więc

$$x = a\,lg\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) \qquad \ldots\ldots (16)$$

Rozwiążmy teraz równanie /16/ względem p i aby tego dokonać przekształćmy je w sposób taki:

$$p+\sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x}{a}} \qquad \ldots\ldots\ldots (17)$$

a biorąc odwrotność obydwóch stron równania /17/ otrzymamy:

$$\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}} = e^{-\frac{x}{a}}$$

Gdy pomnożymy licznik i mianownik prawej strony przez $p+\sqrt{1+p^2}$, to będzie:

$$p-\sqrt{1+p^2}=e^{-\frac{x}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots (18)$$

Gdy dodamy stronami równania /17/ i /18/, to będziemy mieli:

$$p=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (19)$$

a ponieważ $p=\frac{dy}{dx}$, więc

$$dy=\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)dx$$

Całkując te równania otrzymamy:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)+A_2 \quad \ldots \ldots (20)$$

gdzie A_2 jest stałą całkowania. Wyznaczmy tę stałą. Jeśli założymy $x=0$, to odpowiada temu $y=a$, a podstawiając w /20/ tę wartość y otrzymamy $A_2=0$, a więc:

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots (21)$$

Jest to równanie katenoidy pospolitej. Z równania tego wnosimy, że jest to krzywa przestępna, dalej, że jest symetryczna względem osi y, bo gdy podstawimy wartości $(-x, y)$ zamiast (x, y), to równanie nie ulegnie zmianie. Oś y nazywa się OSIĄ łańcuchowej, oś x jej KIEROWNICĄ, a długość a - PARAMETREM. Wyznaczmy teraz długość s łuku AB w funkcji x. Z równania /6/ mamy: $s=a.\,tg\vartheta$.

Inaczej możemy napisać $s = a p$, bo $tg\vartheta = p$ zaś podstawiając wartość p z równania /19/ otrzymamy:

$$s = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Podnieśmy /21/ i /22/ do kwadratu i odetnijmy je stronami, to będziemy mieli:

$$y^2 - s^2 = \frac{a^2}{4} \cdot 2e^{\frac{x}{a}} \cdot 2e^{-\frac{x}{a}} = a^2 \quad \text{czyli} \quad a^2 + s^2 = y^2$$

a uwzględniając /5/ otrzymamy:

$$y = r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

To znaczy, że koniec linki, przerzucony przez blok w punkcie B zwisa aż do kierownicy, czyli, że naprężenie w tym punkcie jest równe ciężarowi linki, o długości rzędnej y .

Zależności, zachodzące pomiędzy wielkościami a, r, s, y i ϑ łatwo zapamiętać przy pomocy wykresu następującego. Niech będzie łańcuchowa z wierzchołkiem A i osiami, obranemi, jak poprzednio.

Obierzmy na łańcuchowej dowolny punkt B /rys. 37/ i poprowadźmy z niego prostopadłą BC do osi x , a z jej spodka C prostopadłą CD do stycznej w punkcie B . Spodek tej ostatniej oznaczmy przez D . W trójkącie BCD kąt $\measuredangle BCD = \vartheta$

t j. równa się kątowi nachylenia stycznej do osi x. Prócz tego zachodzą następujące zależności

$$BC = y\,;\; \overset{=a}{DC} = y\cos\vartheta\,;\; \overset{=s}{BD} = y\sin\vartheta .$$

Zaś uwzględniając równania /3/, /4/ i /23/ możemy napisać $BD = s$ i $DC = a$.

Mając więc w wyobraźni powyższy rysunek można pamiętać główne zależności, charakteryzujące katenoidę.

Wyznaczmy jeszcze promień krzywizny katenoidy w dowolnym punkcie np. w B. Wiadomo, że promień krzywizny ρ jest równy $\frac{ds}{d\vartheta}$, a że dla katenoidy $s = a\,tg\,\vartheta$, więc $\rho = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{a}{\cos^2\vartheta}$

Długość normalnej w punkcie B jest równa:

$$BE = \frac{y}{\cos\vartheta} = \frac{a}{\cos^2\vartheta}$$

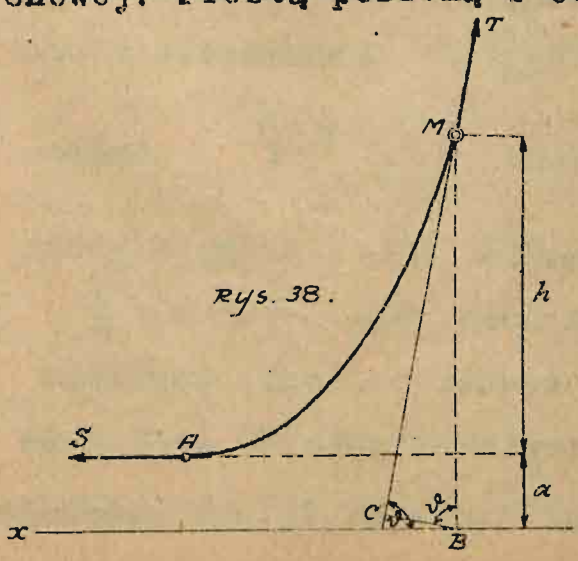
Z tego wynika, że DŁUGOŚĆ PROMIENIA KRZYWIZNY W DOWOLNYM PUNKCIE KATENOIDY JEST RÓWNA DŁUGOŚCI NORMALNEJ W TYM PUNKCIE.

Dla promienia krzywizny w wierzchołku katenoidy $(\vartheta = 0)$ znajdziemy $\rho = a$. Im silniej będziemy odciągnęli za końca sznura, tym krzywizna łańcuchowej w wierzchołku będzie mniejsza, t.zn. tem większy będzie promień krzywizny w tym punkcie, a zatem parametr łańcuchowej będzie wzrastał, a kierownica będzie się oddalała.

Przypuśćmy, że sznur przybrał kształt prostej. Wtedy promień krzywizny jest nieskończenie wielki, a zatem również i parametr łańcuchowej ma wartość nieskończenie wielką i naprężenie sznura w wierzchołku jest nieskończenie wielkie. Z tego wynika, że żadna siła nie może wyprostować całkowicie sznura.

35. PRZYKŁADY. 1/ Mamy ciężki sznur o długości l metr, przyczem jeden metr jego waży K kg. Jeden z końców sznura jest umocowany w punkcie M, zaś drugi styka się w punkcie A z poziomą powierzchnią gruntu. Wysokość punktu M nad poziomem $= h$. Wyznaczyć naprężenie sznura w punkcie M.

Ponieważ sznur jest styczny do poziomu w punkcie A, więc ten punkt jest wierzchołkiem łańcuchowej. Prostą poziomą i odległą od A o a metrów uważajmy, jak poprzednio, zaś oś x /t.j. za kierownicę łańcuchowej/, oczywiście, że rzędna punktu M będzie równa:



Rys. 38.

$$h + a$$

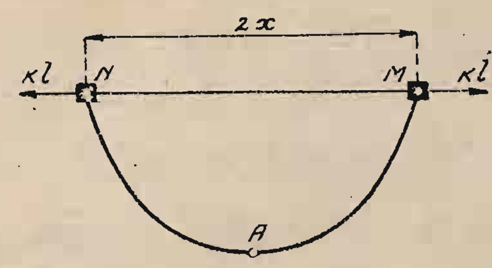
Naprężenie w dowolnym punkcie łańcuchowej jest równe ciężarowi sznura, zwisającego pionowo od tego punktu do kierownicy, a więc w danym razie jest równe ciężarowi $(h+a)$ metrów sznura.- Ponieważ 1 m. sznura waży k kg.; więc naprężenie w punkcie M czyli

$$T = k(h+a) \quad \ldots\ldots\ldots /1/$$

Gdy w tem równaniu wyrazimy a przez znane wielkości, to będziemy mogli uważać zadanie za rozwiązane.

Poprowadźmy styczną do łańcuchowej w punkcie M i prostopadłą MB do kierownicy, a z punktu B prostopadłą BC do owej stycznej; jak wiadomo odcinek BC jest równy parametrowi a łańcuchowej, zaś MC jest długością łuku AM. Z trójkąta MBC otrzymujemy $(h+a)^2 = a^2+l^2$, skąd $a = \frac{l^2-h^2}{2h}$. Podstawmy tę wartość na a w /1/. Znajdziemy, że $T = k\left(\frac{l^2+h^2}{2h}\right)$. Naprężenie $S = ka$ w punkcie A jest równe $S = k\frac{l^2-h^2}{2h}$. Łatwo również znajdziemy, że kąt α, który styczna w punkcie M tworzy z osią x ... $= arctg\frac{l}{a}$.

III. Na nieruchomy drążek poziomy, zupełnie gładki, nawleczone dwa pierścienie M i N i do pierścieni przymocowano końce ciężkiego łańcucha o długości $2l$. Gdyby ten układ pozostawić



Rys. 39.

samemu sobie, to pierścienie M i N zeszłyby się ze sobą i łańcuch przybrałby położenie pionowe.- Aby temu zapobiec przykładamy do pierścienia dwie siły równe i odwrotne. Każda z tych sił jest równa ciężarowi połowy długości łańcucha, czyli kl, gdzie k oznacza ciężar 1m. łańcucha.- Chodzi o wyznaczenie odległości pierścienia w stanie równowagi. Tę nieznaną odległość oznaczymy przez $2x$.

Przypuśćmy, że punkt A jest wierzchołkiem łańcuchowej. Z jednej strony wiadomo, że naprężenia poziome są we wszystkich punktach łańcuchowej jednakowe, a więc naprężenie w A = naprężeniu w $M = kl$, z drugiej zaś strony naprężenie w wierzchołku katenoidy jest ka , gdzie a oznacza parametr tej krzywej. Z tego wynika, że

$$kl = ka \quad \text{lub} \quad l = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

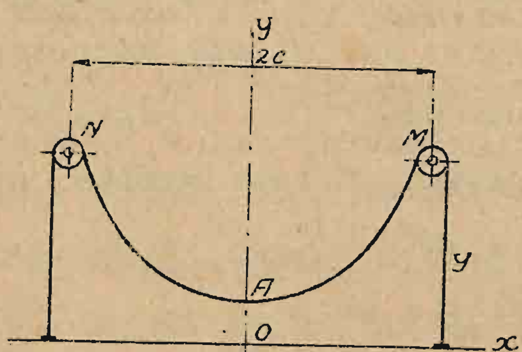
t.zn. że połowa długości łańcucha równa się parametrowi katenoidy. Zastosujmy wzór na długość łuku katenoidy, do łuku AM, uwzględniając /1/ otrzymamy $l = \frac{l}{2}(e^{\frac{x}{l}} - e^{-\frac{x}{l}})$, skąd

$$-e^{-\frac{x}{l}} + e^{\frac{x}{l}} = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Wyznaczamy z tego równania x. Dla uproszczenia zakładamy $e^{\frac{x}{l}} = u$, oczywiście $e^{-\frac{x}{l}} = \frac{1}{u}$ i równanie /2/ przybierze postać taką $u - \frac{1}{u} - 2 = 0$ skąd $u^2 - 2u - 1 = 0$ i $u = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ale u może być tylko dodatnie, bo takim jest $e^{\frac{x}{l}}$ przy każdej wartości x, a więc we wzorze powyższym należy uwzględnić tylko znak plus. Zatem $e^{\frac{x}{l}} = 1 + \sqrt{2}$. Logarytmując to równanie otrzymamy: $x = l.\log(1+\sqrt{2})$.

III/. Dwa gładkie kołki M i N leżą na jednym poziomie. Odległość pomiędzy nimi jest równa $2c$. Zawieśmy na tych kołkach ciężki sznur, w sposób, wskazany na rysunku. Jeśli sznur będzie zbyt krótki, to zsunie się z kołków do środka. Chodzi o to, jaka powinna być conajmniej długość sznura, aby równowaga była możliwa.



rys. 40.

Oznaczmy długość całego sznura przez $2l$, długość części zwisającej pionowo przez y, zaś długość łuku MN przez $2s$. Na zasadzie znanych zależności będziemy mogli napisać:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}} + e^{-\frac{c}{a}}\right); \quad s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{c}{a}} - e^{-\frac{c}{a}}\right);$$

a dodając te dwa równania stronami otrzymamy:

$y + s = a e^{\frac{c}{a}}$. Ale $y + s = l$

więc $l = a e^{\frac{c}{a}}$ . . . . (1)

Należy znaleźć, przy jakiej wartości parametru a wartość l jest najmniejsza. W tym celu różniczkujemy równanie /1/ względem a i przyrównujemy rezultat do zera:

$$\frac{dl}{da} = e^{\frac{c}{a}} - \frac{c.a.e^{\frac{c}{a}}}{a^2} = 0$$

skąd

$$e^{\frac{c}{a}}\left(1 - \frac{c}{a}\right) = 0; \quad 1 - \frac{c}{a} = 0 \quad i \quad a = c$$

Łatwo się przekonać, że ta wartość a odpowiada minimum, a nie maksymum, gdyż o maksymum w danem zadaniu nie może być mowy; - jakkolwiek długi, a większy od minimum byłby sznur, zawsze zajdzie równowaga.

Podstawiając $a = c$ w /1/ otrzymamy:

$$2l = 2ce$$

---

36. Dalszy ciąg teorji łańcuchowej. Niech będzie łańcuchowa, utworzona przez sznur, przymocowany w punktach M i N. Osie obieramy, jak zwykle i pozostawiamy bez zmiany wszystkie poprzednie oznaczenia. Wówczas będzie:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Równanie to przekształcimy w sposób następujący.

Zmieńmy układ spółrzędnych, przesuwając oś x, równolegle do wierzchołka A i współrzędne bieżące w tym zmodyfikowanym układzie oznaczymy przez ξ i η /rys.37/ - to oczywiście $x = \xi$; $y = \eta + a$. Podstawiając te wartości w /1/, otrzymamy:

$$\eta + a = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}}\right)$$

Rozwińmy w szereg funkcje wykładnicze $e^{\frac{\xi}{a}}$ i $e^{-\frac{\xi}{a}}$. Będziemy mieli

$$e^{\frac{\xi}{a}} = 1 + \frac{\xi}{a} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + \ldots \quad (3)$$

$$e^{-\frac{\xi}{a}} = 1 - \frac{\xi}{a} + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + \ldots \quad (4)$$

Dodając /3/ i /4/ otrzymamy:

$$e^{\frac{\xi}{a}} + e^{-\frac{\xi}{a}} = 2\left[1 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\xi}{a}\right)^4 + \ldots\right] \quad (5)$$

gdyż wyrazy z nieparzystemi potęgami ξ znoszą się.

Gdy wyrażenie /5/ podstawimy do równania /2/, to znajdziemy, że

$$\eta = a\left[\frac{1}{1.2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \frac{1}{1.2.3.4}\left(\frac{\xi}{a}\right)^4 + \dots\right]$$

Im bardziej płaski jest sznur, tem większy jest parametr a. Jeśli sznur jest tak silnie wyciągnięty, że a jest większe od c, gdzie $2c$ oznacza rozpiętość sznura, czyli odległość MN, to oczywiście $\xi < a$ i $\frac{\xi}{a}$ jest ułamkiem właściwym.

Jeśli sznur jest bardzo silnie wyciągnięty, to ułamek ten jest mały, wobec czego znaczenie wyrazów z czwartą i wyższemi potęgami $\frac{\xi}{a}$ jest małe wobec wyrazu pierwszego i możemy je pominąć, poprzestając na pierwszem przybliżeniu.

Otrzymamy więc $\eta = \frac{a}{2}\left(\frac{\xi}{a}\right)^2$ lub $\xi^2 = 2a\eta$

Jest to równanie paraboli z wierzchołkiem w A i stycznej do osi odciętych. Więc w przybliżeniu można uważać płaską łańcuchową za parabolę i tak się często postępuje.

Rozważmy teraz pewien przypadek szczególny sznura niejednorodnego.

Niech będzie taki sznur, umocowany w dwóch punktach M i N. Przypuśćmy, że ciężar łuku sznura jest wprost proporcjonalny do jego rzutu poziomego. Chodzi o to, jaką linję tworzy sznur w tym razie.

Obierzmy za początek układu wierzchołek O łańcuchowej i za oś rzędnych pion, przechodzący przez O. Oś odciętych będzie styczna do łańcuchowej w O. Niech naprężenie sznura w punkcie O będzie równe S. Obierzmy dowolny punkt B łańcuchowej; naprężenie w nim będzie miało kierunek stycznej do łańcuchowej. Oznaczmy je przez T i załóżmy, że styczna ta tworzy z osią x kąt ϑ. Gdy przetniemy sznur w punktach O i B, to aby łuk OB pozostawał w spoczynku trzeba przyłożyć w tych punktach owe siły S i T. Rzut łuku OB na oś x jest równy x, a zatem ciężar tego łuku wynosi $K.x$, gdzie K oznacza ciężar jednostki długości.

Siły S, T i Kx muszą być w równowadze, a z tego wynika, że rzuty ich na każdy kierunek są zerami.

Weźmy rzut na kierunki poziomy i pionowy, to otrzymamy bezpośrednio

$$T\cos\vartheta = S \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

$$T\sin\vartheta = Ks \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Dzieląc /2/ przez /1/ otrzymamy: $tg\vartheta = \frac{K.x}{S}$

a że $tg\vartheta = \frac{dy}{dx}$, więc $\frac{dy}{dx} = \frac{K.x}{S}$. Jest to równanie różniczkowe łańcuchowej. Inaczej $dy = \frac{K.x}{S}dx$

Całkując to równanie otrzymamy $y = \frac{K.x^2}{2S} + C$

gdzie C jest stałą całkowania. Gdy $x = 0$, to $y = 0$, a z tego wynika, że C musi być zerem.

Ostatecznie otrzymujemy więc $y = \frac{K.x^2}{2S}$ lub

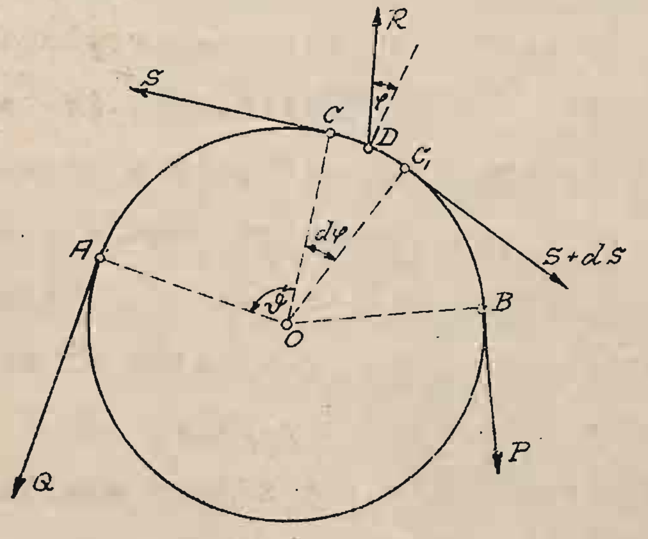
$$x^2 = \frac{2.S.y}{K}$$

Jest to równanie paraboli, której osią jest oś rzędnych i która jest styczna do osi odciętych w O. A więc w danym razie łańcuchowa ma kształt paraboli.

Powyższy wynik ma zastosowanie np. w mostach wiszących. Mosty takie urządza się w ten sposób. Na przeciwległych brzegach rzeki zawiesza się dwa łańcuchy równoległe i przy pomocy prętów pionowych łączy się je z poziomym pomostem. Ten pomost stanowi obciążenie łańcuchów /ciężar prętów można pominąć/, które jest proporcjonalne do długości pomostu czyli do rzutu poziomego łuku. Z tego wynika, że łańcuchy utworzą parabolę.

37. Sznur na powierzchni. Na nieruchomą tarczę

kołową jest zarzucony sznur, który styka się z nią w 2 punktach A i B . Połączmy te punkty ze środkiem tarczy i niech kąt, zawarty między promieniami OA i OB będzie równy α , a współczynnik tarcia między sznurami i tarczą niech będzie $= f$.



Rys. 41.

Przypuśćmy, że na jeden koniec sznura działa siła Q , chodzi o to, z jaką siłą P należy działać na drugi koniec, by sznur zaczął się przesuwać.

Obierzmy na sznurze dowolny punkt C i połączmy go z O , a kąt AOC oznaczmy przez ϑ . Weźmy jeszcze inny punkt C_1 , nieskończenie bliski i połączmy go również z O , to utworzy się kąt $COC_1 = d\vartheta$. Na nieskończenie krótki element sznura CC_1 działają następujące siły: 1/ Naprężenie sznura równe S , na stycznej do niego w punkcie C . 2/ Naprężenie w punkcie C_1 , również styczne do sznura. Pod względem wielkości różnić się ono będzie nieskończenie mało od S i będzie równe $S+dS$, gdyż naprężenia sznura wzrastają w kierunku A do B. 3/ Reakcja tarczy, równa R. Możemy uważać, że jest ona przyłożona w środku D elementu CC_1. Zakładamy, że tarcie między sznurem a tarczą jest całkowicie rozwinięte, ale jeszcze istnieje równowaga. Reakcja tworzy z normalną do tarczy kąt tarcia φ, przytem jest ona zwrócona w lewo, gdyż siła P usiłuje przesunąć sznur w prawo. Te 3 siły: S, $S+dS$ i R mają być w równowadze, a z tego wynika, że ich rzuty na każdy kierunek są zerami.

Bierzemy rzuty na kierunek stycznej do tarczy w punkcie D; ponieważ siły S i $S+dS$ tworzą z tą styczną kąty $\frac{d\vartheta}{2}$, więc otrzymamy:

$$(S+dS)\cos\frac{d\vartheta}{2}-S\cos\frac{d\vartheta}{2}=R\sin\varphi \quad \ldots (1.)$$

Rzuty na kierunek normalnej w tym samym punkcie:

$$(S+dS)\sin\frac{d\vartheta}{2}+S\sin\frac{d\vartheta}{2}=R\cos\varphi \quad \ldots (2)$$

Ponieważ $d\vartheta$ jest nieskończenie małe, przeto $\cos\frac{d\vartheta}{2}=1$, $\sin\frac{d\vartheta}{2}=\frac{d\vartheta}{2}$ i z /1/ i /2/ otrzymamy:

$$ds = R\sin\varphi \qquad \dots\dots\dots (3)$$

$$(2S + dS)\frac{d\vartheta}{2} = R\cos\varphi \qquad \dots\dots\dots (4)$$

Równanie /4/ można napisać jeszcze tak:

$$S \cdot d\vartheta = R\cos\varphi \qquad \dots\dots\dots (5)$$

gdyż $\frac{dS \cdot d\vartheta}{2}$ jest nieskończenie mała drugiego rzędu, a przeto można ją pominąć.

Gdy podzielimy równanie /3/ przez /5/, to otrzymamy $\frac{dS}{S \cdot d\vartheta} = f$, bo $tg\varphi = f$. Stąd mamy $\frac{dS}{S} = f\,d\vartheta$, zaś całkując

$$lg S = f\vartheta + C \qquad \dots\dots\dots (6)$$

gdzie C jest stałą całkowania. Punktowi A odpowiada $\vartheta = 0$, a naprężenie S w tym punkcie równa się Q, więc $lg Q = C$ i równanie /6/ będzie brzmiało tak $lg\frac{S}{Q} = f\vartheta$ lub wreszcie

$$S = Q e^{f\vartheta} \qquad \dots\dots\dots (7)$$

Mając wzór /7/ możemy łatwo wyznaczyć naprężenie w każdym punkcie. Gdy założymy $\vartheta = \alpha$, to otrzymamy:

$$P = Q e^{f\alpha} \qquad \dots\dots\dots (8)$$

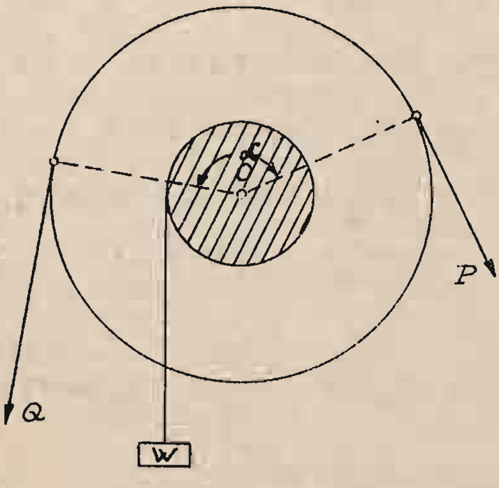
Przy takiej sile P jeszcze zachodzi równowaga. Aby sznur zaczął się posuwać na tarczy, P powinno być większe.

Następujący przykład okaże, jak szybko wzrasta siła P, ze zwiększeniem się kąta α.

Przypuśćmy, że sznur jest całkowicie owinięty na tarczy, to równanie /8/ przybierze postać taką: $P = Q e^{f \cdot 2\pi}$. Załóżmy, że sznur jest konopny, a tarcza drewniana. W tym razie f jest bliski $\frac{1}{2}$, a zatem: $P = Q \cdot e^{\pi}$, zaś podstawiając zamiast e i π ich wartości będziemy mieli: $P = Q(2,71)^{3,14} \cong 23Q$. A więc siła, jaką trzeba działać na koniec sznura by ciężar Q, zawieszony na drugim końcu zaczął się poruszać, powinna być około 23 razy większa od Q.

Przypuśćmy teraz, że sznur dwukrotnie owija tarczę. Wtedy otrzymamy: $P = Q e^{4f\pi} = Q e^{2\pi} \cong 529Q$. Zastosujemy wzór /8/ do rozwiązania następującego zadania praktycznego.

Mamy windę, urządzoną w sposób taki: na osi, której śladem w płaszczyźnie rysunku jest punkt O, jest osadzony bęben o promieniu r. Do bębna tego jest przymocowana linka, na końcu której wisi ciężar W. Na tej samej osi O jest osadzona tarcza o promieniu R, na jej obwód zarzucamy sznur, obejmujący kąt α i wywieramy na końce sznura siły P i Q.



Rys. 42.

Przypuśćmy, że $P > Q$, to siła P usiłuje nadać lince ruch w kierunku wskazówki zegara, tarcie działa na linkę w kierunku odwrotnym, a na tarczę w tym samym.- Gdy siła P będzie dostatecznie duża, to pod działaniem sił tarcia tarcza zacznie się obracać, a ciężar pójdzie w górę. Chodzi o to, jakie powinny być conajmniej do tego siły P i Q. Przypuśćmy, że jeszcze zachodzi równowaga. Linka nie powinna się ślizgać po tarczy, a zatem możemy uważać, że jest ona przymocowana do tarczy i że siły P, Q działają wprost na tarczę. Tak więc na ciało sztywne, składające się z bębna i tarczy działają 3 siły : P, Q i W i usiłują nadać mu ruch obrotowy około punktu O. Warunkiem dostatecznym równowagi jest, aby suma momentów względem O była zerem. Biorąc momenty względem tego punktu otrzymamy $PR - QR - Wr = 0$ skąd:

$$P - Q = \frac{W.r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Taką więc powinna być różnica sił P i Q, aby zachodziła równowaga. Chodzi jeszcze o to, by P i Q były jaknajmniejsze. Oczywistem jest, że siła P będzie najmniejszą, gdy Q będzie najmniejsze. Oznaczmy stosunek $\frac{P}{Q}$ przez λ, to

$$P = Q\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

i podstawiając tę wartość P do /1/ otrzymamy:

$$(\lambda - 1)Q = \frac{Wr}{R}, \text{ skąd } \quad Q = \frac{W.r}{R(\lambda-1)} \quad \ldots (3)$$

Aby Q było najmniejsze, λ musi być największe. Należy więc tylko znaleźć największą możliwą wartość λ. Lecz stosunek $\frac{P}{Q}$ jest największy wtedy, gdy tarcie pomiędzy linką i tarczą jest całkowicie rozwinięte. Wówczas

$P = Q\,e^{f\alpha}$ t. j. $\lambda = e^{f\alpha}$

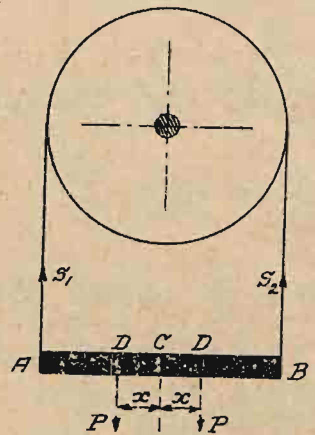
Gdyby jeszcze λ wzrosło, to znaczyłoby to, że albo siła P wzrosła, albo Q - zmalała. - W jednym, jak i w drugim wypadku rozpocząłby się poślizg linki po tarczy. Podstawiając tę wartość λ do /3/ otrzymamy: $Q = \frac{W.r}{R(e^{f\alpha}-1)}$

zaś

$$P = \frac{W.r.e^{f\alpha}}{R(e^{f\alpha}-1)} = \frac{W.r}{R(1-e^{-f\alpha})}$$

Są to najmniejsze wartości sił P i Q. Jeżeli tarcie ma być mniejsze od granicznego, to trzeba zmniejszyć λ, powiększając P i Q.

38. PRZYKŁAD. Nieruchoma tarcza o promieniu r jest osadzona na osi w płaszczyźnie pionowej. Na tarczę zarzucamy sznur, do którego końców, zwisających pionowo, przywiązujemy ciężką sztabę AB o długości $2r$ i wadze Q kg. Na sztabie w odległości x od jej środka C zawieszono ciężar P. Gdyby ciężar ten zawieszono w punkcie C, to wzrosłoby tylko naprężenie zwisających części sznurów, ale równowaga nie byłaby zachwiana. Nie zostanie ona jednak zachwiana i wtedy, gdy przesuniemy ciężar P ze środka sztaby w lewo, lub w prawo na pewną odległość, nie przekraczającą pewnego maksymum. Przypuśćmy, że w punktach D i D_1, odległych od C o x są skrajne położenia ciężaru, a zatem ciężar P możemy przesuwać dowolnie między punktami D i D_1, nie naruszając równowagi. Chodzi o wyznaczenie tej odległości x.



Rys. 43.

Oznaczmy naprężenie w sznurach przez S_1 i S_2. Przy skrajnem położeniu ciężaru P_2, tarcie jest całkowicie rozwinięte, a więc możemy zastosować wzór $S_1 = S_2 e^{f\alpha}$. W danym razie $\alpha = \pi$, więc

$$S_1 = S_2 e^{f\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Ponieważ sztaba pozostaje w równowadze, więc suma rzutów sił S_1, S_2, P i Q na każdy kierunek i suma momentów względem każdego punktu muszą być zerami. Gdy weźmiemy rzuty na kierunek pionowy, to otrzymamy:

$$S_1 + S_2 = P + Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Suma momentów względem punktu C będzie:

$$S_1 r - S_2 r - Px = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Podstawiając w /2/ i /3/ wartość S_1 z /1/ otrzymamy:

$$S_2 (e^{f\pi} + 1) = P + Q \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

a także

$$S_2 (e^{f\pi} - 1) = \frac{Px}{r} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Dzieląc /5/ przez /4/ znajdziemy, po przekształceniu $x = \frac{(P+Q)r}{P} \cdot \frac{e^{f\pi}-1}{e^{f\pi}+1}$. Jeżeli $x = r$, to można zawieszać ciężar P w dolnym punkcie sztaby, wówczas:

$$P = \frac{Q}{2}(e^{f\pi} + 1)$$