$$F + P\cos\alpha - Q\sin\alpha = 0$$

suma zaś rzutów tych sił na oś y /w kierunku N/ jest równa

$$N - P\sin\alpha - Q\cos\alpha = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$F = Q\sin\alpha - P\cos\alpha \qquad (3)$$

oraz:

$$N = P\sin\alpha + Q\cos\alpha \qquad (4)$$

Reakcja całkowita jest wypadkową tych 2 sił.

Jeśli równia jest całkowicie gładka, to reakcja styczna F jest zerem. Wtedy napiszemy:

$Q\sin\alpha - P\cos\alpha = 0$ skąd $P = Q\,tg\alpha$

Podstawmy tę wartość w /4/. Otrzymamy:

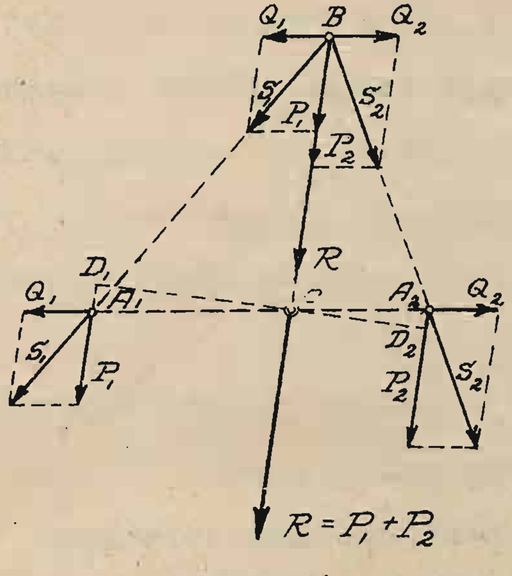
$$N = \frac{Q\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + Q\cos\alpha = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

co można łatwo otrzymać bezpośrednio.

ROZDZIAŁ II.

O SIŁACH RÓWNOLEGŁYCH.

20. WYPADKOWA SIŁ RÓWNOLEGŁYCH. Niech będą dwie siły równoległe P_1 i P_2, zwrócone w tę samą stronę i mające punkty przyłożenia w A_1 i A_2. Dowiedziemy, że siły te można zastąpić jedną, im równoważną.



Rys. 11

Połączmy punkty A_1 i A_2 i przyłóżmy na prostej $A_1 A_2$ do tych punktów dwie siły równe i odwrotne, a więc nie zmieniające skutku działania układu. Oznaczmy te siły przez Q_1 i Q_2 Znajdźmy wypadkową sił Q_1 i P_1 oraz Q_2 i P_2. Oznaczmy je odpowiednio przez S_1 i S_2. Siły S_1 i S_2 wywrą ten sam skutek, co siły dane, chociaż już równoległemi nie są. Przenieśmy punkty przyłożenia sił S_1 i S_2 do punktu przecięcia B prostych ich działania /siły P_1 i P_2 działają na ciało sztywne/. Rozłóżmy znowu siłę S_1 na dwie składowe, w kierunkach równoległych do Q_1 i P_1. Jako składowe otrzymamy dwie siły równe odpowiednio Q_1 i P_1. Tak samo postąpimy z siłą S_2 i otrzymamy dwie składowe, równe i równoległe do Q_2 i P_2. Siły Q_1 i Q_2, jako równe, odwrotne i działające na jednej prostej, znoszą się, zaś wypadkowa sił P_1 i P_2 jest równa ich sumie i posiada kierunek ich linji działania. Przenieśmy wreszcie punkt przyłożenia siły wypadkowej do punktu C. Otrzymaliśmy więc, że co do wielkości wypadkowa R jest równa $P_1 + P_2$, zaś kierunek jej jest zgodny z kierunkiem P_1 i P_2.

Znajdźmy jeszcze położenie punktu C na prostej A_1A_2. Weźmy momenty sił P_1 i P_2 względem punktu C. Znajdziemy, że moment siły P_1 jest równy $-P_1 \cdot CD_1$, zaś moment siły P_2 wynosi $+P_2 \cdot CD_2$. Moment wypadkowej względem tegoż punktu C jest równy zeru, a jednocześnie jest równy sumie momentów sił składowych, bo oczywiście moment siły R względem dowolnego punktu jest równy sumie momentów sił S_1 i S_2, ta zaś suma jest równa sumie momentów sił Q_1, Q_2, P_1 i P_2 lub ostatecznie sił P_1 i P_2. Z tego wynika, że $-P_1 CD_1 + P_2 CD_2 = 0$ skąd

$$\frac{CD_1}{CD_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

Z podobieństwa trójkątów CA_1D_1 i CA_2D_2 otrzymujemy

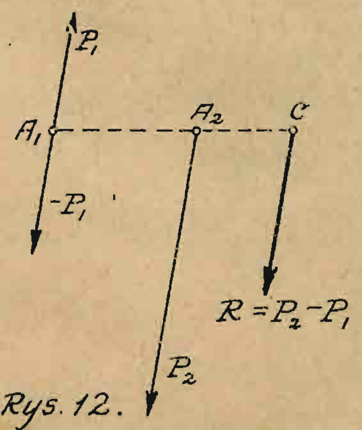
$$\frac{CD_1}{CD_2} = \frac{CA_1}{CA_2}$$

więc

$$\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1}$$

Z tego wynika, że punkt C dzieli wewnętrznie odcinek A_1A_2 na dwie części, odwrotnie proporcjonalnie do sił P_1 i P_2.

Zwrócimy uwagę na ważną okoliczność następującą: Położenie punktu C na prostej A_1A_2 jest niezależne od kierunku sił P_1 i P_2 a tylko od wielkości tych sił. Jeśli siły P_1 i P_2 zaczniemy obracać odpowiednio dokoła punktów A_1 i A_2 tak, aby te siły pozostawały stale równoległemi, to wielkość ich wypadkowej R nie ulegnie zmianie. Będzie się ona obracała dokoła punktu C, będąc wciąż równoległą do P_1 i P_2. Z powodu tej okoliczności nazwiemy punkt C środkiem sił równoległych.



Rys. 12.

Rozpatrzmy teraz wypadek, gdy siły P_1 i P_2 których wypadkową należy znaleźć, są równoległe, lecz kierunki ich są odwrotne. Zakładamy przytem, że siła P_2 jest większą niż P_1. Rozłóżmy siłę P_2 na dwie składowe równoległe i zwrócone w tę samą

---

stronę, z których jedna niech będzie równa P_1 pod względem wielkości /a$(-P_1)$, jeśli uwzględnimy kierunek/ i przyłożona w A_1. Drugą składową oznaczmy przez R. Jest ona przyłożona w punkcie C. Z tego, co powiedziano wynika, że $R = P_2 - P_1$.

Siła R oczywiście wywiera ten sam skutek co siły dane. <u>Siła ta jest zwrócona w kierunku większej składowej i jest równa różnicy sił P_2 i P_1.</u>

Wyznaczmy jeszcze położenie punktu C. Otrzymamy jak poprzednio, że $\frac{CA_1}{CA_2} = \frac{P_2}{P_1}$. Znaczy to, że punkt C dzieli zewnętrznie odcinek A_1A_2 na części odwrotnie proporcjonalne do sił P_1 i P_2.

Przekształcimy otrzymaną zależność, odejmując od stron po jedności. Znajdziemy:

$$\frac{CA_1 - CA_2}{CA_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \quad \text{lub} \quad \frac{A_1A_2}{CA_2} = \frac{P_2 - P_1}{P_1},$$

skąd

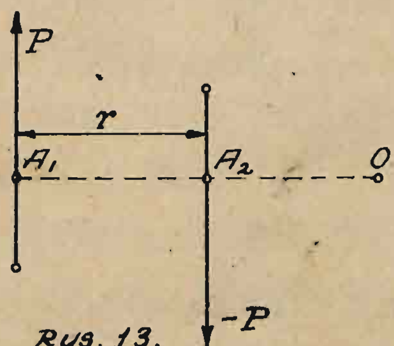
$$CA_2 = \frac{P_1}{P_2 - P_1} A_1A_2$$

Wzór ten pozwala znaleźć położenie punktu C na prostej A_1A_2.

<u>21. PARA SIŁ.</u> Gdy mamy dowolną liczbę sił równoległych, to możemy wogóle wyznaczyć ich wypadko-

wą, wyznaczając najpierw wypadkową dwóch z nich, następnie wypadkową tej wypadkowej oraz trzeciej siły i t.d. Może jednak zajść pewien, bardzo ważny wypadek szczególny. Przypuśćmy, że siły P_1 i P_2 są równe i odwrotne i nie działają na 1 punkt. W takim razie według powyższych twierdzeń, $R = 0$. Niemniej jednak takie 2 siły się nie równoważą, jak wskazuje doświadczenie. Przytem z wzorów otrzymanych wynika, że punkt przyłożenia siły R jest nieskończenie odległy /bo: $P_2 - P_1 = 0$/. W rzeczywistości takiemu wynikowi matematycznemu nie odpowiada nic. Nie istnieje taka jedna siła, która mogłaby wywrzeć taki sam skutek, jaki wywierają dwie siły równe i odwrotne /i nie działające na jeden punkt/. Takie dwie siły tworzą układ, zwany parą sił.

22. WŁASCIWOŚĆ PAR. Niech będzie para, złożona z sił P i $-P$



Rys. 13.

Odległość sił pary, nazywać będziemy ramieniem pary. Można uważać parę za układ sił i mówić o momencie układu względem punktu. Z par.12 widzimy, że moment ten jest wektorem swobodnym; dowiedziemy to jeszcze bezpośrednio. Obierzmy dowolny punkt O w płaszczyźnie pary i wyznaczmy moment układu względem tego punktu. W tym celu z O prowadzimy prostopadłą do sił pary i jej punktu przecięcia z linjami działania oznaczmy przez A_1 i A_2.

Moment siły P względem punktu O, będzie równy co do wielkości $P.OA_1$, zaś kierunek jego będzie prostopadły do płaszczyzny rysunku i zwrócony w tę stronę, z której widać ruch ciała, zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówki zegara.

Moment siły $-P$ będzie równy $-P.OA_2$ i będzie miał kierunek odwrotny do momentu siły P.

Obydwa te punkty leżą na jednej prostej i mają kierunki odwrotne, a więc wypadkowa ich jest równa ich różnicy i ma kierunek momentu większego. W danym razie ta wypadkowa wynosi

$$P.OA_1 - P.OA_2 = P(OA_1 - OA_2) = Pr.$$

Z tego wzoru wynika, <u>że moment pary sił nie zależy wcale od położenia punktu O na płaszczyźnie pary i jest równy sile pary, pomnożonej</u>

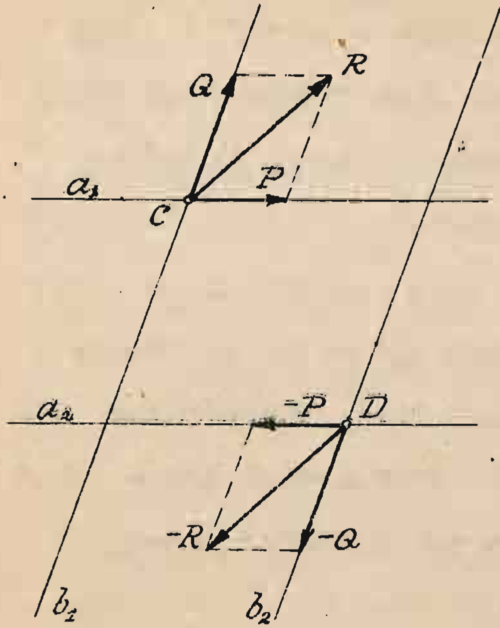
takiż [illegible] nie zależy od położenia punktu [illegible] przez ramię, przytem jeśli para usiłuje obrócić ciało w kierunku ruchu wskazówki zegara, to moment ten jest zwrócony do nas. Później uogólnimy to twierdzenie do wszystkich punktów przestrzeni.

Za parę można też uważać dwie siły równe, odwrotne i działające na jednej prostej. W tym razie moment pary względem dowolnego punktu jest zerem, bo ramię pary jest zerem.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne, działają dwie pary sił, leżące w jednej płaszczyźnie. Oznaczmy siły jednej z tych par przez P i $-P$, a drugiej przez Q i $-Q$. Siły pierwszej pary działają, dajmy na to, na prostych a_1 i a_2, drugiej zaś na prostych b_1 i b_2. Punkty przecięcia prostych a_1 z b_1 oraz a_2 z b_2 oznaczmy odpowiednio przez C i D.

Przenieśmy do punktu C punkty przyłożenia sił P i Q i do punktu D punkty przyłożenia sił $-P$ i $-Q$.

Wyznaczmy przy pomocy równoległoboku wypadkową sił, działających na C i oznaczmy ją przez R, a tak samo znajdźmy wypadkową $-R$ sił, działających na D.



Rys. 14.

Dwa równoległoboki przytem otrzymane, są sobie równe, mają bowiem boki równe i równoległe. A więc i przekątnie tych równoległoboków t.j. wypadkowe R i $-R$ są równe i równoległe, czyli tworzą nową parę sił, którą nazwiemy parą wypadkową danych par składowych. A więc, mając dwie pary można zawsze znaleźć parę wypadkową. Znajdźmy teraz, jaki jest moment pary wypadkowej.

Ponieważ momenty pary względem wszystkich punktów płaszczyzny są równe, więc możemy obliczyć np. momenty par względem punktu D .

Moment R względem D , jako moment wypadkowy, jest równy sumie momentów sił składowych. Ale moment R względem D jest to to samo, co moment pary wypadkowej, a więc moment pary wypadkowej jest równy sumie momentów par składowych.

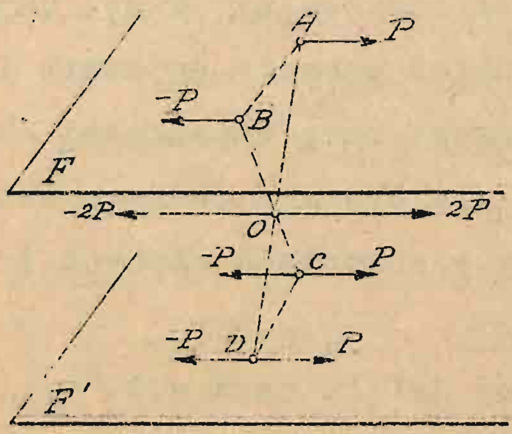
Można twierdzenie to uogólnić na dowolną liczbę par, czyli że zawsze możemy wyznaczyć parę wypadkową, która wywrze ten sam skutek, co dane pary składowe, przyczem moment jej jest równy sumie momentów par składowych.

Zachodzi ważny wypadek szczególny: Mamy, dajmy na to, dwie pary, których momenty są równe i odwrotne. W tym razie moment pary wypadkowej jest zerem, a para taka nie wywiera żadnego skutku. Innemi słowy: 2 pary o momentach równych i odwrotnych równoważą się.

Niech na ciało sztywne działa para sił (1), mająca moment M. Przyłóżmy do tego ciała inną parę (2), złożoną z innych sił i posiadającą inne ramię, ale której moment też $= M$ i wreszcie przyłóżmy parę (3) o momencie $= -M$.

Momenty par (2) i (3) są równe i odwrotne, więc pary te równoważą się, z czego wynika, że te trzy pary wywrą ten sam skutek, co para dana (1). Ale pary (1) i (3) równoważą się także, bo momenty ich są równe i odwrotne i gdy usuniemy te dwie pary, to pozostanie para (2), wywrze więc ona to samo działanie, co te trzy dane pary.

Stąd wynika znów, że para (2) wywrze ten sam skutek co para (1) . A zatem: działanie pary zależy tylko od jej momentu i można zmienić siły pary oraz ramię, aby tylko moment pozostawał bez zmiany, skutek działania pary nie ulega przytem zmianie.



Rys. 15.

Niech będzie teraz płaszczyzna F , w której działa para sił P i $-P$, przyłożonych w punktach A i C . Poprowadźmy płaszczyznę F' , równoległą do płaszczyzny F i w tej nowej płaszczyźnie poprowadźmy odcinek równy i równoległy do AB , a końce jego oznaczmy przez C i D . Figura $ABCD$ jest więc równoległobokiem. Przyłóżmy w punkcie C dwie siły równe i odwrotne, przyczem każda z nich ma być równa i równoległa do P . Tak samo w punkcie D przyłóżmy dwie siły równe, odwrotne oraz równoległe do P . Otrzymamy w ten sposób układ, złożony z 6 sił, który wywrze ten sam skutek, co dana para.

Połączymy punkty A z D oraz B z C . Są to przekątnie równoległoboku, a więc się przecinają. Niech O będzie tym punktem przecięcia; jest to także środek przekątni. Zwrócimy uwagę na siłę P, przyłożoną w A i na P, przyłożoną w D. Te 2 siły są równe, równoległe i zwrócone w tę samą stronę, a więc wypadkowa ich jest równa ich sumie, jest przyłożona w środku AD /czyli w O / i jest równoległa do sił składowych. Możemy więc uważać, że nie działają siły P /w A / i P /w D /, a zamiast nich mamy siłę $= 2P$, przyłożoną w O i równoległa do P.

Zwróćmy teraz uwagę na siły: $-P$ /w C / i $-P$ /w B / Są to dwie siły równe, równoległe i skierowane jednakowo, więc ich wypadkowa jest równa $-2P$ i jest równoległa do nich, a punktem jej przyłożenia jest O. Znów więc można usunąć siły $-P$ /w C / i $-P$ /w B /, a zamiast nich przyłożyć tę nową wypadkową.

Mamy teraz dwie siły: $2P$ i $-2P$, przyłożone w O i skierowane odwrotnie, a więc znoszące się.

Powstała więc tylko siła: $1°$... P w C i $2°$... $-P$, przyłożona w D, które tworzą parę i wywra ten sam skutek co dana para. Moment tej nowej pary jest oczywiście równy momentowi pary danej. Tak więc MOŻNA PRZESUNĄĆ DANĄ PARĘ DO PŁASZCZYZNY, RÓWNOLEGŁEJ DO PŁASZCZYZNY PARY I DZIAŁANIE PARY POZOSTANIE NIEZMIENIONEM.

GDY DANY JEST MOMENT PARY, TO PARA TA JEST CAŁKOWICIE OKREŚLONA.

Istotnie: gdy dany jest moment pary M , to wiadomo, że para działa w płaszczyźnie, prostopadłej do momentu, więc np. w płaszczyźnie przechodzącej przez początek odcinka, wyrażającego moment, przyczem jest ona zwrócona, tak że dla patrzącego z końca w kierunku początku para obraca ciało w kierunku ruchu wskazówki zegara.

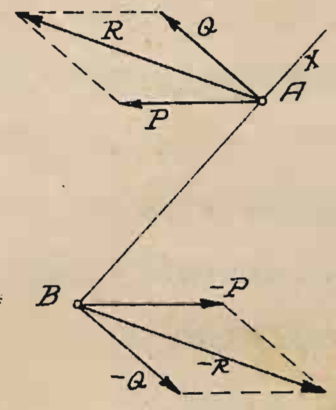
Ponieważ parę można przenosić do płaszczyzny równoległej, a także przesuwać w płaszczyźnie pary, więc z tego wynika, że MOMENT PARY JEST TO WEKTOR SWOBODNY.

Uogólnimy teraz twierdzenie poprzednio dowiedzione.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działają dwie pary, z których pierwsza ma moment M_1 , druga zaś M_2 . Dowiedziemy:

1-o. że ISTNIEJE ZAWSZE TAKA PARA, KTÓRA WYWRZE TEN SAM SKUTEK, CO DWIE PARY DANE. Parę tę nazywamy wypadkową, a pary dane składowemi.

2-o. że MOMENT PARY WYPADKOWEJ JEST SUMĄ GEOMETRYCZNĄ MOMENTÓW PAR SKŁADOWYCH.

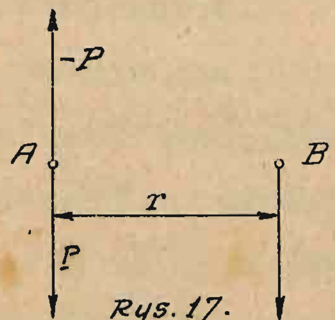


Rys. 16.

Niech X będzie prostą przecięcia płaszczyzn par. Obierzmy na niej dwa punkty A i B. Możemy tak przekształcić dane pary i tak je przesunąć w ich płaszczyznach, aby siły P i Q były przyłożone w A, i siły $-P$ i $-Q$ w B. Wyznaczmy teraz wypadkową R pierwszych dwóch i wypadkową $-R$ dwóch drugich. Oczywiście płaszczyzny równoległoboków są równoległe, równoległoboki są przystające, ich boki równe i równoległe, a zatem przekątnie są także równe i równoległe, czyli siły R i $-R$ tworzą parę, która wywrze ten sam skutek, co obydwie pary dane. Moment siły R względem punktu B jest sumą geometryczną momentów sił P i Q, innemi słowy moment pary wypadkowej jest sumą geometryczną momentów par danych.

Twierdzenie to łatwo uogólnić: Przypuśćmy, że na dane ciało sztywne działa pewna liczba par, o momentach M_1, M_2, M_3 i t.d. Momenty te są to wektory swobodne, możemy więc obrać ich początek w tym samym punkcie i wyznaczyć wektor wypadkowy; odpowiadająca mu para wywrze ten sam skutek, co pary składowe.

Przypuśćmy, że na ciało sztywne działa siła P, przyłożona w punkcie A i para, o momencie M, leżąca w jednej płaszczyźnie z siłą. Możemy siłę tej pary i ramię obierać dowolnie, byleby moment był równy M. Obierzmy więc P za siłę pary R, ramię zaś oznaczmy przez r. W takim razie $M = Pr$. Przesuńmy parę tak, aby punkt przyłożenia jednej z sił pary znalazł się w A i aby ta siła była odwrotna do P. Na punkt działają w ten sposób dwie siły równe i odwrotne, a więc równoważące się. Gdy usuniemy je, to zostanie tylko jedna siła P, przyłożona w B, i siła ta wywrze ten sam skutek, co dana siła i dana para, jest to wypadkowa układu.



Rys. 17.

GDY WIĘC DO SIŁY P DODAMY PARĘ M, TO SKUTEK BĘDZIE TEN, ŻE SIŁA PRZESUNIE SIĘ RÓWNOLEGŁE o $r = \frac{M}{P}$. Zachodzi pytanie, w którą stronę siła się przesunie ? Otóż:Moment wypadkowej względem każdego punktu musi być równy sumie momentów sił składowych. Moment danej siły P względem A jest równy zeru, więc moment wypadkowy układu względem A musi być równy momentowi pary. Gdy moment pary jest zwrócony do nas, to siłę P trzeba tak przesunąć, aby jej moment względem A był też do nas zwrócony.

ROZDZIAŁ III.

O PŁASKIM UKŁADZIE SIŁ.

UPROSZCZANIE PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ. Niech na ciało sztywne działa n sił: $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$, leżących w jednej płaszczyźnie. Taki układ sił nazywa się UKŁADEM PŁASKIM.

Gdy mamy płaski układ sił, to można zawsze znaleźć jego wypadkową; przenieśmy w tym celu, punkty przyłożenia P_1 i P_2 do punktu przecięcia ich linji działania i wyznaczmy wypadkową tych sił; dalej znajdźmy, w ten sam sposób, wypadkową tej wypadkowej i siły P_3 i t.d. Ostatecznie dojdziemy do wypadkowej całego układu.

Może tu zajść wypadek szczegółowy, dajmy na to, że znaleźliśmy wypadkową wszystkich sił