ROZDZIAŁ VIII.

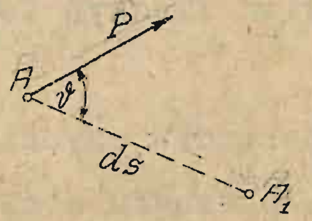
ZASADA PRACY PRZYGOTOWANEJ.

§ 73. POJĘCIE PRACY. Gdy mamy dwa wektory P i Q, tworzące ze sobą kąt ϑ, to jak wiadomo /§ 12/, ich iloczynem wektorowym nazywamy wektor $V\bar{P}.\bar{Q}$ równy pod względem wielkości $P.Q \sin\vartheta$. Natomiast ILOCZYNEM SKALOROWYM wektorów P i Q nazywać będziemy skalar $\bar{P}.\bar{Q}$. Pod względem wielkości /która go całkowicie określa/ iloczyn ten jest równy $P.Q\cos\vartheta$.

Pierwszy z nich zależy od porządku czynników, podczas gdy drugi jest od tego porządku niezależny. Czyli $V\bar{P}.\bar{Q} = -V\bar{Q}\bar{P}$ a $\bar{P}\bar{Q} = \bar{Q}.\bar{P}$. Iloczyn wektorowy występuje w mechanice pod nazwą MOMENTU, a iloczyn skalarowy pod nazwą PRACY.

PRACA ELEMENTARNA. Przypuśćmy, że na punkt A, należący do jakiegoś ruchomego ciała, działa siła P, że przesunęło się nieskończenie mało i punkt A zajął nowe położenie A_1 nieskończenie bliskie od pierwotnego. Nieskończenie małe przesunięcie A_1A_2 oznaczymy przez ds i nazwiemy PRZESUNIĘCIEM ELEMENTARNEM punktu A. Gdy kąt $(\widehat{P,ds})$ oznaczymy przez ϑ, to iloczyn skalarowy $dL = Pds.\cos\vartheta$ nazywamy pracą elementarną siły

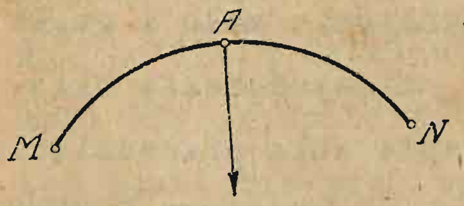
P na drodze AA_1 x/. Przypuśćmy, że $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, w takim razie $\cos\vartheta > 0$ i $dL > 0$ czyli praca elementarna siły P jest dodatnia. Gdy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, to $\cos\vartheta = 0$, a więc i $dL = 0$ t.zn. gdy siła jest prostopadła do przesunięcia elementarnego, to praca jej jest zerem. Wreszcie, gdy $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, to $\cos\vartheta < 0$ i $dL < 0$ czyli ujemne.



Rys. 71.

Przypuśćmy, że punkt A odbył skończoną drogę od punktu M do N i że na tej drodze działała siła P, która może być zmienna pod względem wielkości i kierunku.

Podzielmy drogę MN na nieskończenie małe elementy. Na każdym z nich siła P wykonywa pracę elementarną. Gdy zsumujemy te wszystkie prace, to otrzymamy pracę całkowitą siły P na drodze MN.



Rys. 72.

---

x/ Przesunięcie AA_1 jest nieskończenie małe, więc można uważać, że podczas niego siła P nie zmienia się ani co do wielkości, ani co do kierunku.

W statyce będziemy mieli do czynienia tylko z pracą elementarną.

§ 74. TWIERDZENIE ZASADNICZE O PRACY ELEMENTARNEJ.

I/. Przypuśćmy, że na punkt A działa pewna liczba sił $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ dowolnie rozłożonych w przestrzeni.

Wyznaczmy ich wypadkową i oznaczmy ją przez R. Przypuśćmy, że punkt A doznał nieskończenie małego przesunięcia $ds = AA_1$ i że kąty $(\widehat{P_1, ds})$, $(\widehat{P_2, ds}), (\widehat{P_3, ds})$ są odpowiednio równe ϑ_1, ϑ_2, $\vartheta_3, \ldots \vartheta$. Na zasadzie paragrafu 5 możemy napisać:

$$P_1 \cos\vartheta_1 + P_2 \cos\vartheta_2 + P_3 \cos\vartheta_3 + \ldots = R\cos\vartheta$$

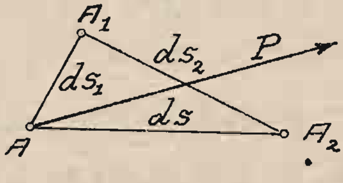
a mnożąc obydwie strony przez ds otrzymamy:

$$P_1 . ds . \cos\vartheta_1 + P_2 \, ds . \cos\vartheta_2 + P_3 . ds . \cos\vartheta_3 + \ldots = R \, ds . \cos\vartheta \quad (1)$$

Równanie /1/ wyraża twierdzenie, o które chodziło, a mianowicie: SUMA PRAC ELEMENTARNYCH SIŁ SKŁADOWYCH JEST RÓWNA PRACY ELEMENTARNEJ SIŁY WYPADKOWEJ.

II/. Przypuśćmy, że na A działa siła P i że ten punkt doznał dwóch nieskończenie małych przesunięć, najpierw $AA_1 = ds_1$, a następnie $A_1A_2 = ds_2$

Gdy połączymy punkty A i A_2, to odcinek $AA_2 = ds$ możemy uważać za przesunięcie wypadkowe tamtych dwóch / ds_1 i ds_2 /. Oznaczmy kąty $(\widehat{ds_1, P}), (\widehat{ds_2, P}), (\widehat{ds, P})$ odpowiednio przez $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta$.



Rys. 73.

Biorąc rzuty wszystkich przesunięć na kierunek siły P otrzymamy:

$$ds_1 \cos\vartheta_1 + ds_2 \cos\vartheta_2 + \ldots = ds . \cos\vartheta$$

Pomnóżmy obydwie strony tej równości przez P, to będziemy mieli:

$$P . ds_1 \cos\vartheta_1 + P ds_2 \cos\vartheta_2 = P . ds . \cos\vartheta .$$

Stąd wynika twierdzenie takie: SUMA PRAC ELEMENTARNYCH SIŁY NA PRZESUNIĘCIACH SKŁADOWYCH JEST RÓWNA PRACY ELEMENTARNEJ TEJ SIŁY NA PRZESUNIĘCIU WYPADKOWEM. Twierdzenie to dotyczy oczywiście dowolnej liczby przesunięć składowych.

§ 75. ANALITYCZNE WYRAŻENIE PRACY ELEMENTARNEJ.

Niech będzie prostokątny układ współrzędnych i punkt $A(x, y, z)$ w tym układzie. Dajmy na to, że na ten punkt A działa siła P. Rozłóżmy ją na 3 składowe P_x, P_y, P_z w kierunkach osi i przypuśćmy, że punkt A doznał nieskończenie małego przesunięcia do punktu $A_1(x+dx, y+dy, z+dz)$. Z tego wynika, że rzuty przesunięcia AA_1 na kierunki osi x, y, z są odpowiednio równe dx, dy, dz. Gdy pracę siły P na przesunięciu AA_1 oznaczymy przez dL, to na zasadzie pierwszego twierdzenia par. poprzedzającego:

$$dL = P_x dx + P_y dy + P_z dz \quad \ldots\ldots (1)$$

§ 76. PRACA ELEMENTARNA SIŁ CENTRALNYCH. Przypuśćmy, że na ruchomy punkt A działa siła P, która może się zmieniać pod względem wielkości, ale której linja działania przechodzi wciąż przez nieruchomy punkt O. Taka siła nazywa się CENTRALNĄ, a punkt O - ŚRODKIEM SIŁY CENTRALNEJ. Wyznaczmy pracę elementarną dL siły P przy nieskończenie małem przesunięciu punktu A.- Obieramy w tym celu prostokątny układ współrzędnych z początkiem O i oznaczmy współrzędne punktu A w tym układzie przez x, y, z. Dalej oznaczmy odległość OA przez r, a kąty kierunkowe linji OA przez α, β i γ.

Na zasadzie wzoru /1/ par. poprzedzającego, możemy napisać:

$$dL = P\cos\alpha\, dx + P\cos\beta\, dy + P\cos\gamma\, dz,$$

a ponieważ

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}; \quad \cos\beta = \frac{y}{r}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

więc

$$dL = P\left(\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r}\right) \quad \ldots\ldots (1)$$

Wiadomo, że $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, skąd po zróżniczkowaniu

$$2r\,dr = 2x.dx + 2y.dy + 2z.dz \ldots$$

lub

$$r.dr = x\,dx + y.dy + z.dz \quad \ldots\ldots (2)$$

Podstawiając do /1/ zamiast wyrażenia w liczniku nawiasu jego wartość z /2/ otrzymamy:

$$dL = P.dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Taka jest więc praca elementarna siły centralnej. Znak jej zależy od znaku czynników P i dr.

Siła centralna może być odpychająca lub przyciągająca.

W pierwszym przypadku uważamy ją za dodatnią, w drugim za ujemną. Gdy r wzrasta, to dr jest dodatniem. Gdy zaś r maleje, to dr jest ujemne. W przypadku szczególnym, gdy r pozostaje stałem, to $dr = 0$ i praca dL jest zerem.

Przypuśćmy, że do nieruchomego punktu O jest przymocowany punkt A zapomocą sznura nierozciągalnego, to naprężenie tego sznura jest siłą centralną. Naprężenie to nie wykona jednak pracy, bo odległość OA nie ulega zmianie. Gdyby sznur był rozciągliwy, to naprężenie mogłoby wykonać pracę.

Rozwiązane zadanie jest szczególnym przypadkiem pewnego zadania ogólniejszego, do którego przystąpimy obecnie.

Niech będą dwa punkty A_1 i A_2, które mogą należeć do jednego ciała lub do różnych. Odległość między tymi punktami oznaczamy przez r. Przypuśćmy, że działają na nie dwie siły równe i odwrotnie skierowane, każda z nich niech będzie równa R. Znajdziemy sumę prac elementarnych tych sił R. Obierzmy w tym celu prostokątny układ współrzędnych i oznaczmy współrzędne punktów A_1 i A_2 w tym układzie przez x_1, y_1, z_1 i x_2, y_2, z_2 a kąty kierunkowe prostej A_1A_2 przez α, β, γ. Praca elementarna dL_1 siły P, przyłożonej w A, jest oczywiście, równa

$$dL = P\cos\alpha\, dx_1 + P\cos\beta\, dy_1 + P\cos\gamma\, dz_1$$

lub

$$dL_1 = P(\cos\alpha\, dx_1 + \cos\beta\, dy_1 + \cos\gamma\, dz_1) \quad . . (4)$$

Tak samo dla siły P, przyłożonej w A_2 znajdziemy:

$$dL_2 = -P(\cos\alpha\, dx_2 + \cos\beta\, dy_2 + \cos\gamma\, dz_2) \quad . . (5)$$

Dodając /4/ i /5/ otrzymamy:

$$dL_1 + dL_2 = P[(dx_1 - dx_2)\cos\alpha + (dy_1 - dy_2)\cos\beta + (dz_1 - dz_2)\cos\gamma] \quad . (6)$$

wyrażeniu w nawiasie nadamy inną postać. Wiadomo, że $r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ stąd po zróżniczkowaniu:

$$2r\, dr = 2(x_1 - x_2)(dx_1 - dx_2) + 2(y_1 - y_2)(dy_1 - dy_2) + 2(z_1 - z_2)(dz_1 - dz_2)$$

a że

$$x_1 - x_2 = r\cos\alpha\,; \quad y_1 - y_2 = r\cos\beta\,; \quad z_1 - z_2 = r\cos\gamma.$$

więc

$$dr = (dx_1 - dx_2)\cos\alpha + (dy_1 - dy_2)\cos\beta + (dz_1 - dz_2)\cos\gamma$$

co podstawiając do /6/ otrzymamy:

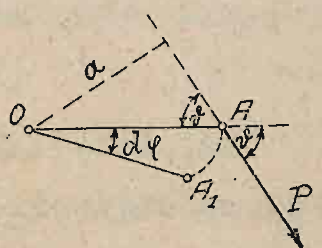
$$dL_1 + dL_2 = P\, dr \quad . . . . (7)$$

Gdy siły P są odpychającemi, to uważamy je za dodatnie. Gdy zaś siły są przyciągającemi - to za ujemne. W przypadku, gdy r jest stałe, $dr = 0$ i praca elementarna siły P jest zerem. Gdy punkt A_2 np. jest nieruchomy, to praca siły P, przyłożonej w tym punkcie jest zerem i $dL_1 = P.dr$.

Z tego widać, że wzór /3/ jest szczególnym przypadkiem wzoru /7/.

§ 77. PRACA ELEMENTARNA SIŁY, KTÓREJ PUNKT PRZYŁOŻENIA OBRACA SIĘ DOKOŁA OSI.

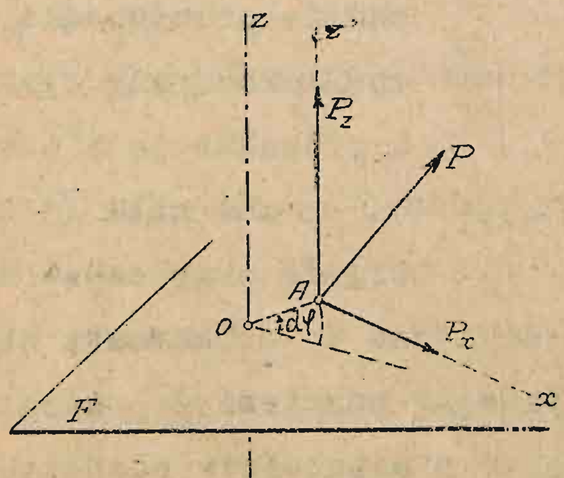
Rozpatrzmy najpierw przypadek szczególny. Przypuśćmy mianowicie, że siła działa w płaszczyźnie prostopadłej do osi obrotu. Niech oś obrotu będzie prostopadła np. do płaszczyzny rysunku i przecina ją w punkcie O, zaś siła P niech będzie przyłożona w punkcie A, odległym o r od O. Oznaczmy kąt $(\widehat{P, r})$ przez ϑ. Nadajmy punktowi A nieskończenie małe przesunięcie, a mianowicie obróćmy go o nieskończenie mały kąt $d\varphi = AOA_1$ około punktu O.



Rys: 74.

Ponieważ droga punktu A jest równa $r.d\varphi$ a kąt między tą drogą a siłą P jest $(\frac{\pi}{2} - \vartheta)$, więc $dL = P.r.d\varphi.\sin\vartheta$.

Poprowadźmy z punktu O prostopadłą do kierunku siły i długość tej prostopadłej OZNACZMY przez a i wtedy $a = r \sin\vartheta$ i $dL = P a \, d\varphi$. Ale Pa jest to moment M siły P względem punktu O, więc $dL = M d\varphi$, t.zn. praca elementarna siły jest w danym razie równa iloczynowi z momentu tej siły względem punktu O lub względem osi obrotu przez kąt obrotu dokoła osi. Kąt $d\varphi$ uważamy za dodatni, jeśli dla patrzącego z końca momentu punkt A obrócił się w kierunku ruchu wskazówki zegara.



Rys. 75.

Zajmiemy się teraz przypadkiem ogólnym. Przypuśćmy, że punkt A, na który działa siła P, skierowana jakkolwiek w przestrzeni obrócił się około osi z o kąt $d\varphi$.

Wyznaczyć pracę elementarną siły P.

Poprowadźmy przez punkt A płaszczyznę prostopadłą do osi obrotu i przypuśćmy, że ta płaszczyzna przecina oś w punkcie O. Dalej przez prostą z' równoległą do z, przechodzącą przez A oraz przez linję działania siły P poprowadźmy płaszczyznę. Przetnie ona płaszczyznę F według prostej, którą oznaczymy przez x. Rozłóżmy siłę P na składowe P_x i P_z w kierunku x i z'. Praca elementarna siły P jest równa sumie prac elementarnych sił P_x i P_z; lecz praca elementarna siły P_z jest zerem, bo jest ona prostopadła do płaszczyzny F, a więc i do przesunięcia, a z tego wynika, że praca elementarna siły P jest równa pracy elementarnej składowej P_x czyli $d\mathcal{L} = M . d\varphi$ gdzie M oznacza moment tej składowej względem punktu O, albo moment siły P względem osi z.

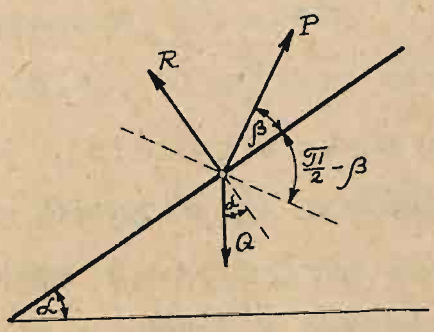
78. TWIERDZENIE. Przypuśćmy, że na punkt A działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ i dajmy na to, że te siły są w równowadze. W takim razie suma prac elementarnych tych sił na każdem przesunięciu jest zerem. Jest to prawie oczywiste. Istotnie: suma tych prac jest równa pracy elementarnej siły wypadkowej, ale ta wypadkowa jest zerem, więc praca przez nią wykonana także jest zerem.-

Odwrotnie: JEŻELI PRZY KAŻDEM PRZESUNIĘCIU SUMA PRAC ELEMENTARNYCH WSZYSTKICH SIŁ, DZIAŁAJĄCYCH NA PUNKT O JEST ZEREM, TO TE SIŁY SĄ W

RÓWNOWADZE.

Dajmy na to, że przy danem założeniu, siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$, działające na punkt O, posiadają wypadkową różną od zera. Gdy nadamy punktowi O nieskończenie małe przesunięcie w kierunku tej wypadkowej, to wykona ona pracę różną od zera, co jest sprzeczne z założeniem.

79. PRZYKŁADY. 1/ Na równi pochyłej zupełnie gładkiej i tworzącej z poziomem kąt α, leży ciężar Q, który chcemy utrzymać w równowadze za pomocą siły P, tworzącej z równią kąt β. Chodzi o wyznaczenie tej siły P. Prócz sił P i Q na ciężar działa także reakcja równi R; ponieważ równia jest całkowicie gładka, więc ta reakcja jest do równi prostopadła.

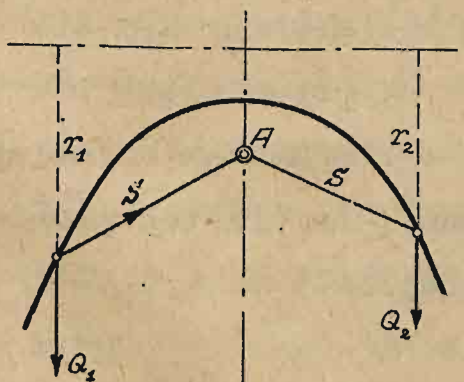


Rys. 76.

Te 3 siły P, Q i R są w równowadze, a z tego wynika, że przy wszelkiem przesunięciu suma ich prac elementarnych jest zerem. Aby nie wprowadzić nieznanej reakcji R obierzmy kierunek przesunięcia tak, aby praca jego była przytem zerem. Takim kierunkiem jest linja największego spadku równi. Dajmy więc ciężarowi nieskończenie małe przesunięcie dx w tym kierunku. Praca siły P jest $P.dx.\cos\beta$, a praca siły Q wynosi $-Q.dx.\sin\alpha$, a więc $P.dx.\cos\beta - Q.dx.\sin\alpha = 0$, skąd $P = \frac{Q.\sin\alpha}{\cos\beta}$. Aby znaleźć reakcję R musimy nadać ciężarowi jakieś inne przesunięcie, np. w kierunku prostopadłym do siły P. Przypuśćmy, że to przesunięcie jest równe dy. Łatwo znajdziemy, że:

$$R.dy.\cos\beta - Q.dy.\cos(\alpha+\beta) = 0 \quad \text{skąd} \quad R = Q\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$

II/. Na gładki drut, wygięty w kształcie paraboli, której oś jest pionowa, a wierzchołek zwrócony ku górze, nawleczono 2 ciężkie pierścienie.



Rys. 77.

W ognisku A paraboli umieszczono bloczek, przez który przerzucony sznur. - Końce sznura przymocowano do pierścieni. Jakie powinny być ciężary Q_1 i Q_2 pierścieni, aby w położeniu równowagi ich odległości od ogniska były odpowiednio równe r_1 i r_2 .

Poprowadźmy z każdego z pierścieni prostopadłe do kierownicy paraboli. Długości tych prostopadłych są równe odpowiednio także r_1 i r_2 .

Na lewy pierścień działają siły: ciężar Q_1 , naprężenie sznura S i reakcja drutu R_1 /normalna do drutu, bo jest on całkowicie gładki/. Tak samo na prawy pierścień działają: ciężar Q_2, naprężenie sznura S i reakcja normalna drutu R_2 .

Każdy z pierścieni ma być w równowadze, a więc sumy prac elementarnych sił Q_1, S i R_1 oraz Q_2, S i R_2 muszą być zerami. Aby nie wprowadzać reakcji R_1 i R_2 przesuniemy pierścienie na drucie, czyli w kierunkach normalnych do tych reakcji. Przypuśćmy, że przytem promienie r_1 i r_2 otrzymują przyrosty dr_1 i dr_2 . Praca siły Q_1 jest równa $Q_1 . dr_1$, gdyż rzut przesunięcia na kierunek siły $= dr$, a praca siły S wynosi $- S . dr_1$, gdyż jest to siła centralna, więc

$$Q_1 . dr_1 - S . dr_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Tak samo dla prawego pierścienia znajdziemy:

$$Q_2 . dr_2 - S . dr_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Z /1/ mamy: $Q_1 = S$, a z /2/ $Q_2 = S$, więc

$$Q_1 = Q_2$$

Z tego wynika, że ciężary pierścieni muszą być równe i że wówczas będą one w równowadze w każdem położeniu.

80. CIAŁA SZTYWNE.

Dowiedźmy, że: jeżeli układ sił, działających na ciało sztywne jest w równowadze, to suma prac elementarnych tych sił - jest zerem na każdem przesunięciu.

Przypuśćmy więc, że na ciało sztywne działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ pozostające w równowadze. Możemy uważać, że ciało składa się z oddzielnych cząsteczek i że każda z nich wywiera na każdą inną siłę przyciągającą lub odpychającą. Siły te, siły wewnętrzne, podlegają prawu akcji i reakcji: jeżeli jedna z cząsteczek wywiera na drugą pewną siłę, to druga wywiera na pierwszą siłę równą i odwrotną. Nadajmy ciału jakiegolwiek przesunięcie elementarne. Na pierwszą cząsteczkę działają niektóre siły zewnętrzne, czyli niektóre z sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ i prócz tego pewne siły wewnętrzne. Ponieważ cząsteczka jest w równowadze, przeto na owem przesunięciu suma prac tych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych razem jest równa zeru; toż samo dotyczy cząsteczki drugiej, trzeciej i t. d. Z tego wynika, że suma prac elementarnych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych działających na ciało, na owem przesunięciu jest zerem. Lecz suma prac elem. sił wewnętrznych jest sama przez się równa zeru, bo odległość pomiędzy dwiema cząsteczkami ciała sztywnego nie zmienia się podczas przesunięcia, a ponieważ te cząsteczki wywierają na siebie siły równe i odwrotne, przeto suma prac elem. takiej pary sił jest zerem i to samo dotyczy każdej innej pary sił wewnętrznych. A więc suma prac elem. sił zewnętrznych $P_1, P_2, P_3, \ldots$ jest równa zeru.

81. Twierdzenie odwrotne. Jeżeli suma prac elementarnych sił, działających na ciało sztywne jest na każdem przesunięciu równa zeru, to siły te są w równowadze.

Przypuśćmy naprzód, że na ciało sztywne działają tylko dwie siły P_1 i P_2, przyłożone odpowiednio w punktach A_1 i A_2, i że suma prac elementarnych tych sił jest zerem na każdem przesunięciu.

Nadajmy ciału takie przesunięcie elementarne, aby punkt A_1 pozostawał przy tem w spokoju, czyli obróćmy ciało nieskończenie mało około punktu A_1. Siła P_1 nie wykona żadnej pracy, bo jej punkt przyłożenia nie doznał przesunięcia, a z tego wynika, że praca elementarna siły P_2 jest zerem /bo suma prac sił P_1 i P_2 jest zerem/, co jest możliwe tylko wtedy, gdy siła ta jest prostopadła do drogi. Ale, gdy punkt A_1 pozostaje nieruchomym, to przesunięcie punktu A_2 leży na powierzchni kuli, o promieniu równym A_1A_2 i środku A_1, tak więc siła P_2 pozostaje wciąż normalną do każdego przesunięcia na tej kuli, a z tego wynika, że siła P_2 działa na promieniu A_1A_2. Gdy znów punkt A_2 będzie nieruchomy, a punktowi A_1 nadawać będziemy przesunięcia, to tak samo wypadnie, że siła P_1 musi leżeć na prostej A_1A_2. A zatem siły P_1 i P_2 działają na jednej prostej.

Nadajmy dalej ciału nieskończenie małe przesunięcie ds w kierunku A_1A_2, to na zasadzie założenia będziemy mogli napisać: $P_1 ds + P_2 ds = 0$ a stąd $P_1 = -P_2$ czyli siły P_1 i P_2 są równe i odwrotne, a prócz tego wiadomo, że działają na jednej prostej.

Z tego wynika, że siły te są w równowadze.

Przypuśćmy teraz, że na ciało sztywne działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ i że przy każdem przesunięciu suma prac elementarnych tych sił jest równa zeru. Dowiedźmy, że są one w równowadze.

Jeżeli ten układ sił nie jest w równowadze, to można go zrównoważyć, dodając doń jeszcze dwie siły R_1 i R_2, co wynika stąd, że układ $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ daje się sprowadzić do dwóch sił. Tak więc na ciało sztywne działają siły $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots R_1, R_2$, pozostające w równowadze, a zatem na każdem przesunięciu elementarnem suma ich prac elementarnych jest zerem. Ale suma prac elementarnych sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ jest według założenia sama przez się równa zeru, a zatem suma prac elementarnych sił R_1, R_2 jest przy każdem przesunięciu równa zeru, z czego znowu wynika, na zasadzie twierdzenia poprzedzającego, że R_1, R_2 się równoważą. Siły te więc nie mogły wywrzeć żadnego skutku i dany układ sił $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ jest w równowadze.

<u>82. Warunki równowagi, wyprowadzone z zasady pracy przygotowanej.</u> Gdy przyjmiemy zasadę pracy przygotowanej za dowiedzioną, to stąd będziemy

mogli wyprowadzić znane już poprzednio kryterja równowagi:

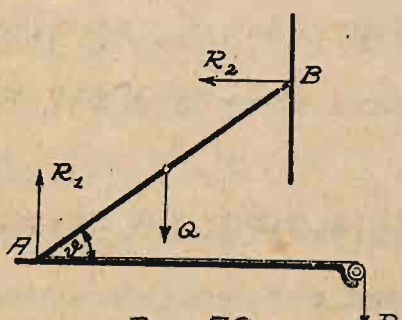
Przypuśćmy, że na ciało sztywne działa układ, złożony z sił $P_1, P_2, P_3, \dots\dots$ i że siły te są w równowadze; z zasady pracy przygotowanej wynika, że suma ich prac elementarnych jest zerem przy każdem przesunięciu. Przesuńmy ciało równoległe w kierunku dowolnej prostej x o dx. Punkty przyłożenia wszystkich sił doznają jednakowych przesunięć dx i suma prac elementarnych wszystkich sił będzie równa $\Sigma P_x . dx = 0$, gdzie P_x oznacza rzut siły P na prostą x; lecz dx jest wspólnym czynnikiem wszystkich wyrazów tej sumy, a z tego wprost wynika, że: $\Sigma P_x = 0$. czyli, że jeśli układ sił działających na ciało sztywne jest w równowadze, to suma rzutów tych sił na każdy kierunek jest zerem.

Obróćmy teraz ciało około dowolnej prostej z o kąt $d\varphi$. Praca elementarna siły P przytem wykonana jest równa $M d\varphi$, gdzie M jest momentem siły P względem osi z. A zatem

$$\Sigma M . d\varphi = 0$$

Lecz $d\varphi$ jest wspólnym czynnikiem, a z tego wynika, że $\Sigma M = 0$, czyli: jeżeli układ sił, działających na ciało sztywne, jest w równowadze, to suma momentów wszystkich sił tego układu względem dowolnej osi z jest zerem.

83. Przykłady. 1/ W płaszczyźnie pionowej jest ustawiona jednorodna sztaba, o ciężarze Q kg. i długości $2a$. Opiera się ona o pionową, gładką ścianę i poziomą, gładką podłogę.



Rys. 78.

Aby równowaga sztaby była zachowana urządzono tak: do końca A sztaby przymocowano sznur, przeprowadzono go przez otwór, wyrobiony w ścianie i przerzucono przez bloczek. Do końca sznura przyczepiono ciężar P. Wyznaczyć położenie równowagi sztaby. Zadanie sprowadza się do znalezienia kąta ϑ, jaki tworzy sztaba z poziomem w położeniu równowagi.

Na sztabę działają następujące siły: ciężar Q przyłożony w środku S sztaby, naprężenie sznura w punkcie A równe sile P, reakcja normalna R_1 podłogi w punkcie A i reakcja normalna R_2 ściany w punkcie B. Aby nie wprowadzać do rachunku reakcji R_1 i R_2, o które tymczasem nie chodzi, weźmiemy przesunięcie takie, aby punkt A poruszał się po podłodze, a punkt B po ścianie. Oznaczmy odległość punktu A od ściany przez x, a odległość punktu S od podłogi przez y. W takim razie przesunięcie punktu A będzie równe dx, a przesunięcie S - dy. Praca elem. siły P jest $-P.dx$ /znak "minus", bo gdy x otrzymuje przyrost dodatni, to P wykonywa pracę ujemną/. Rzut przesunięcia punktu S na kierunek siły Q jest równy dy, a więc praca siły Q wynosi $-Q\,dy$.

Siły R_1 i R_2 nie wykonają pracy, a zatem

$$-P.dx - Q.dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wyrazimy x i y w funkcji ϑ. Ponieważ

$$x = 2a\cos\vartheta, \quad y = a.\sin\vartheta,$$

skąd

$$dx = -2a\sin\vartheta.d\vartheta; \quad dy = a.\cos\vartheta.d\vartheta$$

Podstawiając te wartości w /1/ otrzymamy:

$$tg\vartheta = \frac{Q}{2P}$$

Przy pomocy tej samej metody znajdziemy reakcję R_1 i R_2. W tym celu weźmiemy przesunięcie dy całej sztaby w kierunku pionowym. Praca siły P przy tem przesunięciu jest równa 0. Praca reakcji R_1 jest równa $R_1 \cdot dy$, a praca siły Q wynosi $-Q\,dy$, więc $R_1 dy - Q \cdot dy = 0$ skąd $R_1 = Q$.

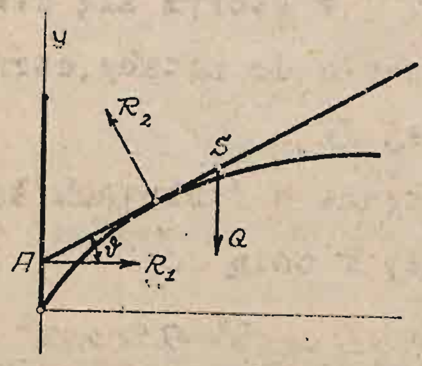
Tak samo, biorąc przesunięcie poziome dx całej sztaby otrzymamy:

$$R_2 dx - P \cdot dx = 0$$

skąd

$$R_2 = P$$

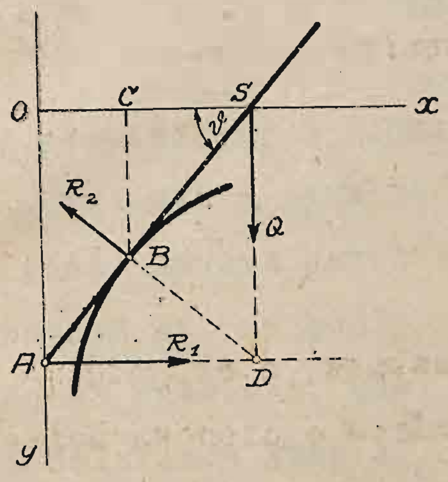
II. Gładka jednorodna sztaba, o długości $2a$ opiera się jednym swoim końcem o pionową ścianę i spoczywa na pewnej gładkiej krzywej. Jaką powinna być ta krzywa, aby równowaga była zachowana w każdem położeniu sztaby.



Rys. 79.

Obierzmy prostokątny układ współrzędnych w sposób taki: za oś y weźmy ślad ściany na płaszczyźnie rysunku, a początek układu O - dowolnie na tej osi. Oznaczmy współrzędne punktu S w tym układzie przez x, y.

Na sztabę działają 3 siły: siła ciążenia Q, reakcja ściany R_1 i reakcja szukanej krzywej R_2. Gdy przesuwamy sztabę tak, aby koniec A przesuwał się po ścianie i aby sztaba pozostawała w zetknięciu z krzywą, to prace sił R_1 i R_2 są zerami; aby i praca siły Q była zerem, to środek ciężkości S powinien pozostawać na prostej poziomej. Obieramy tę



Rys. 80.

prostą za oś x, a linję ściany za oś y. Owe trzy siły muszą przecinać się w jednym punkcie, prowadząc więc z punktu D, w którym się przecinają Q i R_1, prostopadłą do sztaby, otrzymamy punkt szukanej krzywej B.

Wyznaczymy jego współrzędne w funkcjach kąta ϑ, który sztaba tworzy z osią x.

$$x = OC = AB\cos\vartheta = AD\cos^2\vartheta = AS\cos^3\vartheta$$

ostatecznie

$$x = a\cos^3\vartheta; \quad y = CB = BS\sin\vartheta = SD\sin^2\vartheta = AS\sin^3\vartheta$$

ostatecznie

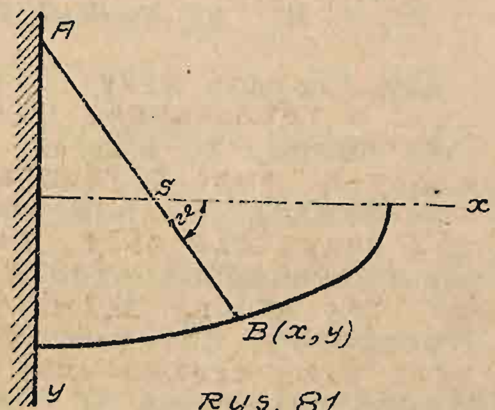
$$y = a\sin^3\vartheta$$

To są równania parametryczne szukanej krzywej. Podnosząc je do potęgi $^2/3$ i dodając, otrzymamy:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Jest to równanie astroidy. A więc szukana linja powinna być tą krzywą.

III. Sztaba AB o długości a opiera się jednym końcem (A) o pionową ścianę, a drugim (B) o pewną krzywą. Jaką powinna być ta krzywa, aby równowaga zachodziła przy wszelkich położeniach sztaby.



Rys. 81.

Znajdziemy, jak poprzednio, że środek ciężkości S powinien przy przesuwaniu sztaby pozostawać na pewnej prostej poziomej, którą obierzmy za oś x. Gdy oznaczymy współrzędne punktu B /za oś y obieramy ślad ściany/ przez x i y, a kąt między sztabą a poziomem przez ϑ, to otrzymamy:

$$x = a.\cos\vartheta\,;\; y = b.\sin\vartheta \qquad \text{gdzie } b = BS$$

Są to równania parametryczne elipsy. A więc szukaną krzywą jest elipsa, której osi leżą na osiach współrzędnych i są odpowiednio równe $2a$ i $2a$.

84. Układ ciał sztywnych. Niech będzie układ złożony z ciał sztywnych $A, B, C, \ldots$ i przypuśćmy, że na układ ten działają pewne siły zewnętrzne oraz wewnętrzne.

Jeśli przytem układ jest w równowadze, to przy wszelkich przesunięciach suma prac elementarnych wszystkich sił zewnętrznych i wewnętrznych jest zerem.

Istotnie: gdy układ jest w równowadze, to każde z ciał, do niego należących, jest w równowadze, a zatem równoważą się wszystkie siły, które działają np. na ciało A. Gdy nadamy układowi jakieś przesunięcie to suma prac elementarnych sił, działających na ciało A będzie zerem. Tak samo dowiedziemy, że i suma prac elementarnych sił działających na ciało B, jest zerem i t. d. Otrzymamy tym sposobem tyle równań, ile jest ciał w układzie, a dodając stronami te równania znajdziemy, że suma prac elem. wszystkich sił działających na układ /zarówno sił zewnętrznych, jak i wewnętrznych/ jest zerem.

Dowiedziemy też twierdzenie odwrotne: jeśli suma prac elementarnych wszystkich sił, działających na układ ciał jest zerem przy każdem przesunięciu, to układ jest w równowadze.

Możemy nadać układowi takie samo przesunięcie, aby wszystkie ciała z wyjątkiem A zostały w spokoju, a w takim razie wykonają pracę tylko siły działające na ciało A, i suma tych prac według założenia jest zerem. Tak więc przy każdem przesunięciu ciała A suma prac elem. sił na nie działających jest zerem, a zatem ciało A jest w równowadze. Tak samo dowiedziemy, że ciała $B, C, \ldots$ są w równowadze, a więc i cały układ jest w równowadze.

85. Przesunięcie dozwolone i przesunięcie wyobrażalne. Gdybyśmy przy tworzeniu równań musieli uwzględnić wszystkie siły, działające na układ, to byłoby to wielce niedogodne. Zwykle nadajemy układowi takie przesunięcie, aby do równań nie weszły siły, o które w zadaniu nie chodzi. - Istnieje pod tym względem pewna metoda ogólna.

Przypuśćmy, że układ ciał jest nieswobodny, t. zn., że może się poruszać tylko w pewien określony sposób. A więc np. może się zdarzyć, że niektóre z ciał układu są osadzone na nieruchomych osiach, pewne punkty innych mogą się posuwać po pewnych linjach lub po pewnych powierzchniach i.t.d.

Wogóle mogą zachodzić między różnemi ciałami układu oraz ciałami innemi różne połączenia. Możemy nadać układowi takie przesunięcie, aby połączenia nie zostały naruszone. Takie przesunięcie nazywa się <u>dozwolonem.</u> Jeśli natomiast nadamy układowi takie przesunięcie, że pewne połączenia zostają przez to zniesione, to mówimy o przesunięciu <u>wyobrażalnem.</u> Niekiedy trzeba się uciekać do tych przesunięć wyobrażalnych, gdy chodzi o wyznaczenie reakcji lub naprężeń sznurów nierozciągalnych, ale najczęściej stosujemy przesunięcia dozwolone. Wówczas pewne kategorje sił nie wykonają pracy i nie wejdą do równań.

Wyszczególnimy najważniejsze z sił, które nie wchodzą do równania pracy przygotowanej przy przesunięciach dozwolonych:

1/ Przypuśćmy, że punkt A jednego z ciał może się poruszać na pewnej linji lub pewnej powierzchni gładkiej. W takim razie ta linja lub powierzchnia wywiera na ciało reakcję normalną R i jeśli nadamy układowi przesunięcie dozwolone, to punkt A przesunie się po tej linji lub po powierzchni i reakcja R nie wykona pracy. Jeśli

----

linja lub powierzchnia są chropowate, to R wykona pracę i przy przesunięciu dozwolonem.

2/ Przypuśćmy, że pewne ciało układu jest osadzone na nieruchomej osi. Oś wywiera na ciało pewną reakcję R . Przy przesunięciu dozwolonem /obrót dokoła osi/ punkt przyłożenia tej reakcji nie przesunie się,a więc praca jej jest zerem.

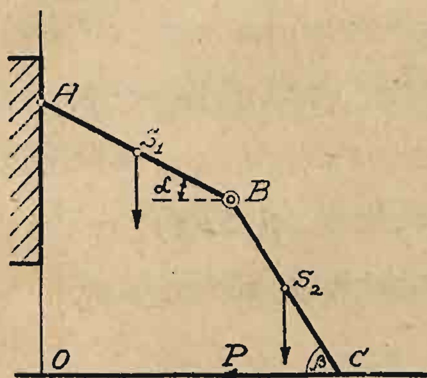
3/ Dwa ciała układu są połączone za pomocą przegubu. W przegubie działają na ciała reakcje równe i odwrotne i przy każdem przesunięciu dozwolonem prace ich będą równe i odwrotne. Z tego wynika, że suma prac elementarnych reakcji w przegubach jest zerem.

4/ Przypuśćmy wreszcie, że dwa ciała układu są połączone w punktach A_1 i A_2 sznurem nierozciągalnym.

W punkcie A_1 i A_2 działają więc naprężenia sznura równe i odwrotne. Przy dozwolonem przesunięciu odległość A_1A_2 nie ulega zmianie, a więc i suma prac elementarnych sił S jest zerem.

86. PRZYKŁADY. 1/ W punkcie A pionowej gładkiej ściany jest zawiasa, około której może się obracać sztaba AB . Ta sztaba jest połączona przegubowo z inną sztabą BC , która końcem C opiera się o gładką podłogę. Długość każdej sztaby jest

$=2a$, a ciężar każdej Q kg. Środki ciężkości sztab oznaczamy przez S_1 i S_2 /sztaby są jednorodne/. Sztaba AB tworzy z poziomem kąt α , a sztaba BC - kąt β . Oznaczmy jeszcze odległość punktu A od podłogi przez b . Aby równowaga sztab w opisanym położeniu była zachowana przykładamy do punktu C poziomą siłę P ; mamy wyznaczyć tę siłę.



Rys. 82:

Na układ złożony ze sztab AB i BC działają siły P, Q /w S_1/ i Q /w S_2/, a prócz tego różne reakcje: reakcja zawiasy A , reakcja podłogi w punkcie C i reakcja w przegubie B .

Ale żadna z tych reakcji nie wykona pracy przy przesunięciu dozwolonym, a więc trzeba się rachować tylko z siłami P, Q /w S_1/ i Q /w S_2/. Gdy nadamy układowi przesunięcie dozwolone /przy tem punkt C będzie się poruszał po podłodze/ i jeśli oznaczymy odległość punktów S_1 i S_2 od podłogi przez y_1 i y_2 , w odległości OC przez x , to suma prac elem. sił przy tem przesunięciu będzie:

$-P.dx - Qdy_1 - Qdy_2$ lub $P.dx + Q(dy_1 + dy_2) = 0$

ale $dy_1 + dy_2$ jest to różniczka od $(y_1 + y_2)$ a więc:

$$P.dx + Qd(y_1 + y_2) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wyrazimy x, y_1, y_2 w funkcji α i β. Długość x jest oczywiście równa rzutowi figury ABC na podłogę, a więc:

$$x = 2a.\cos\alpha + 2a\cos\beta = 2a(\cos\alpha + \cos\beta)$$

skąd

$$dx = -2a(\sin\alpha\, d\alpha + \sin\beta\, d\beta) \quad \ldots\ldots (2)$$

Tak samo y_1 jest rzutem figury CBS_1, a y_2 rzutem CS_2 na ścianę, a więc

$$y_1 = a(\sin\alpha + 2\sin\beta) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$y_2 = a.\sin\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Zaś dodając /3/ i /4/ otrzymamy:

$$y_1 + y_2 = a(\sin\alpha + 3\sin\beta) \ldots\ldots\ldots$$

skąd

$$d(y_1 + y_2) = a(\cos\alpha\, d\alpha + 3\cos\beta\, d\beta) \quad \ldots\ldots (5)$$

Podstawiając /2/ i /5/ do /1/ znajdziemy:

$$(Q\cos\alpha - 2P\sin\alpha)\,d\alpha = (2P\sin\beta - 3Q\cos\beta)\,d\beta \ldots (6)$$

Znajdźmy jeszcze zależność kątów α i β. W tym celu weźmy rzut figury ABC na kierunek pionowy, otrzymamy:

$$2a\sin\alpha + 2a\sin\beta = b$$

skąd

$$\cos\alpha \, d\alpha = \cos\beta \, d\beta$$

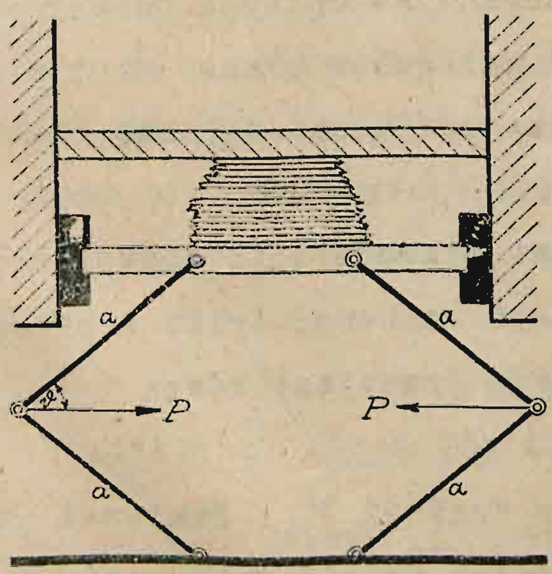
stąd i z /6/ otrzymamy: $P = \frac{Q}{tg\beta - tg\alpha}$

Gdy $\beta = \frac{\pi}{2}$, to $P = 0$, a więc w tym razie równowaga zachodzi sama przez się.

Gdy chcemy znaleźć, jaką siłę należy przyłożyć w C, aby sztaba tworzyła linję prostą, to zakładamy $\alpha = \beta$, a wtedy $P = \infty$.

Żadna siła nie może więc utrzymać w tym razie równowagi.

II/. Prasa kolankowa składa się z poziomej belki lub płyty, posiadającej na końcach suwaki, które mogą się ślizgać po pionowych ścianach. - Całe urządzenie jest symetryczne względem płaszczyzny pionowej. Na belce są umieszczone dwie zawiasy, w których są osadzone dwie jednakowe sztaby. Końce



Rys. 83.

tych sztab łączą się za pomocą przegubów z dwiema takiemi samemi sztabami, których końce są osadzone w zawiasach urządzonych pionowo pod górnemi. Pomiędzy płytą suwającą się a drugą płytą nieruchomą wstawia się ciało, które ma być sprasowane, a następnie naciskamy na przeguby. Wskutek tego sztaby będą miały tendencję do wyprostowania się, co spowoduje zgniecenie ciała.

Przypuśćmy, że każda ze sztab ma długość a i tworzy z poziomem kąt ϑ. Chodzi o to, z jakimi siłami poziomemi P trzeba działać na przeguby, aby wywrzeć na ciało siłę Q.

Oznaczmy odległość zawias dolnych od górnych przez y, odległość przegubów przez x, a odległość /stałą/ między zawiasami dolnemi /lub górnemi/ przez b.

Gdy nadamy układowi przesunięcie dozwolone, to będziemy się musieli rachować tylko z pracą sił P i Q. Suma tych prac jest równa

$$-Q\,dy - P.dx = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Wyraźmy x i y w funkcji ϑ. Ponieważ x jest to suma rzutów sztab na kierunek poziomy plus odległość b, więc

$$x = b + 2a\cos\vartheta \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Tak samo y, jako suma rzutów sztab na kierunek pionowy jest równe:

$$y = 2a.\sin\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Z /2/ i /3/ mamy:

$$dx = -2a.\sin\vartheta d\vartheta$$

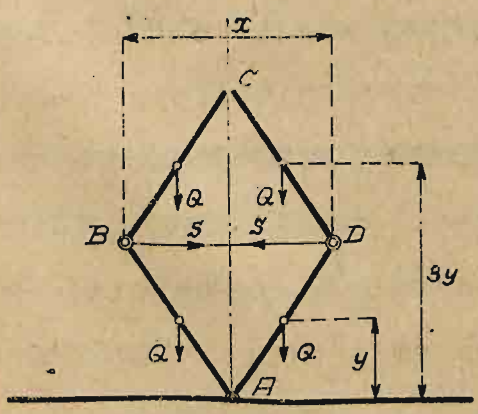
$$dy = 2a\cos\vartheta d\vartheta$$

Podstawiając te wartości w /1/ otrzymamy:

$$P = \frac{Q}{tg\vartheta}$$

Gdy ϑ jest $< \frac{\pi}{4}$, to $tg\vartheta$ jest > 0 i $P < Q$.

III/. Cztery sztaby jednakowe AB, BC, CD i DA są połączone gładkimi przegubami w punktach A, B, C i D, tworzą więc romb. Każda ze sztab waży Q kg. Romb ustawiony jest tak, że jego przekątnia AC jest pionem i punkt A opiera się na podstawie poziomej. W tem położeniu nie zachodzi równowaga, ale aby ona miała miejsce połączono nierozciągalnym sznurem punkty B i D.



Rys 84.

Chodzi o wyznaczenie naprężeń S, działających w sznurze BD. Musimy nadać układowi takie przesunięcie, aby naprężenia S wykonały pracę. W tym celu jest rzeczą konieczną oddalić lub zbliżyć punkty B i D , a ponieważ sznur jest nierozciągalny, więc to przesunięcie jest wyobrażalne. Przypuśćmy, że punkty B i D oddaliły się. W takim razie pracę wykonają tylko naprężenia S i ciężary Q .

Oznaczmy odległość BD przez x , a odległość pionową S_2 od A przez y . Przy wymienionem przesunięciu x wzrośnie o dx , a y o dy .

Siły Q /w S_1 i S_2 / wykonają pracę $-2Qdy$, zaś siły Q /w S_3 i S_4/ - $2.3.Q.dy$. Siły S jako centralne, wykonają pracę $S.dx$.
Więc:

$$-2.Q.dy - 2.3.Q.dy - Sdx = 0$$

skąd

$$S.dx - 8Qdy = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Oznaczmy dany kąt między BA i AD przez 2ϑ .

Ponieważ x jest to suma rzutów sztab na kierunek poziomy, a $4y$ - na pionowy, więc

$$x = 2a.\sin\vartheta \; ; \quad y = \frac{a}{2}\cos\vartheta$$

Stąd

$$dx = 2a\cos\vartheta\, d\vartheta \; ; \quad dy = -\frac{a}{2}\sin\vartheta\, d\vartheta$$

Stąd i z /1/ otrzymamy:

$$S = 2Q\,tg\vartheta .$$

.... ———

87. Równowaga trwała i chwiejna. Niech będzie jakikolwiek układ złożony z ciał $A_1, A_2, A_3, \dots$ Środki ciężkości tych ciał oznaczmy przez S_1, $S_2, S_3, \dots$, zaś ciężary ich przez $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ Przypuśćmy, że układ ten jest taki, że przy przesunięciu dozwolonem pracę wykonywują tylko siły ciążenia.

Poprowadźmy jakąkolwiek płaszczyznę poziomą; oznaczmy ją przez F, a odległość punktów S_1, $S_2, S_3, \dots$ od niej przez $y_1, y_2, y_3, \dots$ Gdy nadamy układowi nieskończenie małe przesunięcie, to suma prac elementarnych sił ciężkości będzie:

$$-Q_1 dy_1 - Q_2 dy_2 - Q_3 dy_3 - \dots \quad (1)$$

i ta suma jest zerem, jeśli układ jest w równowadze.

Przypuśćmy, że masy ciał układu są: $m_1, m_2, \dots$ więc:

$$Q_1 = m_1 g; \; Q_2 = m_2 g; \; Q_3 = m_3 g \dots \quad (2)$$

/ g oznacza tu współczynnik proporcjonalności/.

Gdy do wyrażenia /1/ przyrównanego do zera podstawimy zamiast $Q_1, Q_2, \dots$ ich wartości z /2/, to otrzymamy:

$$m_1 dy_1 + m_2 dy_2 + m_3 dy_3 + \dots = 0$$

albo, ponieważ $m_1, m_2, \dots$ są to wielkości stałe

$$d(m_1 y_1) + d(m_2 y_2) + d(m_3 y_3) + \dots = 0$$

Ale suma różniczek jest równa różniczce sumy, więc:

$$d(m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots\ldots) = 0$$

Wyrażenie, stojące w nawiasie, przedstawia moment statyczny układu względem płaszczyzny F. Możemy temu momentowi nadać inną postać. Oznaczmy w tym celu środek ciężkości całego układu przez S, odległość jego od płaszczyzny F przez y_0 a masę całego układu przez M, to jak wiadomo:

$$My_0 = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots\ldots$$

więc

$$d(My_0) = 0$$

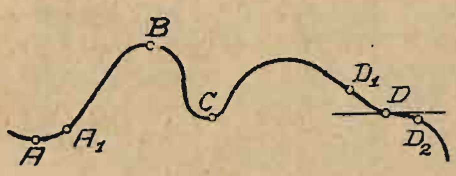
a że M jest stałą, to $dy_0 = 0$

A więc aby układ ciał był w równowadze koniecznem jest, aby $dy_0 = 0$. Jak sobie wytłomaczyć otrzymany wynik ?

Przypuśćmy, że układ posiada tylko jeden stopień swobody, t.zn., że podczas ruchu każdy punkt musi pozostawać na jednej określonej linji. Toż samo dotyczy i środka ciężkości układu. Pozostaje on na pewnej linji i równowaga układu zachodzi, gdy $dy_0 = 0$, czyli gdy wielkość y_0 osiąga maximum lub minimum, lub innemi słowy, gdy środek ciężkości układu zajmuje położenie najwyższe lub najniższe. Jeśli istnieje jeden stopień swobody, to położenie układu daje się określić za pomocą jednej znanej wielkości. Wielkość tę nazywamy współrzędną układu.

Dajmy na to, że pewien kąt ϑ jest taką współrzędną. Wtedy położenie środka ciężkości układu zależy tylko od kąta ϑ czyli $y_0 = f(\vartheta)$. Jeśli pragniemy znaleźć położenie równowagi układu, to trzeba znaleźć wartość ϑ z równania $f'(\vartheta) = 0$ i ten kąt wyznaczy całkowicie szukane położenie.

Zachodzi zasadnicza różnica między przypadkiem gdy y_0 osiąga maximum i gdy osiąga minimum. Różnica ta jest natury dynamicznej i tylko na zasadzie rozważań dynamicznych da się ściśle uzasadnić. Będziemy musieli poprzestać na dowodzie mniej ścisłym.



Rys. 85.

Przypuśćmy, że środek ciężkości układu zajął położenie najniższe w A. Gdy nadamy układowi małe przesunięcie, to środek ciężkości jego dojdzie do wyższego położenia A_1. Zostawmy następnie układ samemu sobie. Nie zostanie on wtedy w równowadze, a zacznie się poruszać i będzie opadał. Jego środek ciężkości będzie się zbliżał do położenia A czyli do położenia równowagi. Mówimy, że w położeniu tem równowaga jest trwała.

Przypuśćmy teraz, że środek ciężkości układu zajął położenie najwyższe: w punkcie B . Gdy nadamy układowi małe przesunięcie, to środek ciężkości zajmie niższe położenie B_1 . Jeśli pozostawimy układ samemu sobie, to bynajmniej nie będzie on dążył do pierwotnego położenia równowagi, ale będzie się od niego odchylał. Mówimy wtedy o równowadze nietrwałej lub chwiejnej. Gdy tor środka ciężkości posiada punkt przegięcia D , to również zachodzi równowaga. Jeśli przesuwamy środek ciężkości z punktu D do D_1 , to chociaż będzie on usiłował wrócić do punktu D , jednak wracając nie zatrzyma się w tym położeniu, ale przejdzie przez nie i będzie się dalej zachowywał tak, jak w przypadku równowagi chwiejnej.

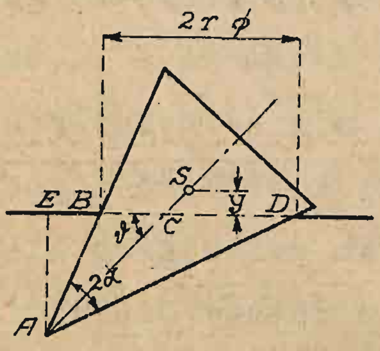
Gdy torem środka ciężkości jest prosta pozioma, to dy_0 stale jest zerem, a z tego wynika, że układ wciąż jest w równowadze trwałej. Mówimy wtedy o równowadze obojętnej.

Z powyższych rozważań wynika, że równowaga układu jest trwała, gdy środek ciężkości tego układu zajmuje położenie najniższe. Ale każde ciało można uważać za układ, złożony z cząsteczek sztywnych, a więc twierdzenie to dotyczy i takich ciał niesztywnych, jak płyny, sznury i t.d.

Niech więc będzie cięzki sznur jednorodny lub łańcuch, zawieszony w punktach A i B. Gdy jest on w równowadze, to tworzy łańcuchową pospolitą. Oznaczmy długość sznura przez l. Pomiędzy punktami A i B można poprowadzić nieskończenie wiele linji o długości l i sznur może utworzyć każdą z nich, ale w równowadze jest tylko wtedy, gdy tworzy katenoidę pospolitą. Z tego wnosimy, że z tych wszystkich linji katenoida posiada najniżej położony środek ciężkości.

Poprowadźmy jeszcze jakąś prostą x, nie przecinającą żadnej z tych linji o długości l i położoną niżej od nich i obróćmy całą figurę tej prostej, to utworzy się szereg powierzchni. Na zasadzie twierdzenia Guldina wielkość każdej z tych powierzchni jest równa długości tworzącej, równej l, pomnożonej przez drogę środka ciężkości. Ale środek ciężkości katenoidy pospolitej leży najniżej, a więc najbliżej prostej, a z tego wynika, że powierzchnia zatoczona przez taką katenoidę jest mniejszą od powierzchni zatoczonej przez każdą inną linję o długości l .

88. Przykład. W okrągły otwór, zrobiony w płycie poziomej, wstawiono gładki prosty stożek kołowy, o wysokości h i kącie przy wierzchołku 2α . Średnica otworu jest równa $2r$. Wyznaczyć położenie równowagi stożka.



Rys. 86.

Położenie to daje się określić za pomocą jednej wielkości np. za pomocą kąta osi stożka z poziomem. Oznaczmy ten kąt przez ϑ . Wiadomo, że środek ciężkości S stożka leży na jego wysokości w odległości 1/4 od podstawy. Oznaczmy odległość tego środka od płyty przez y i znajdźmy y w funkcji ϑ .

Z wierzchołka A stożka poprowadźmy prostopadłą do płyty i spodek tej prostopadłej oznaczmy przez E . Rzutem AS na kierunek pionowy jest $y + AE$, a że $AS = \frac{3}{4}h$ więc:

$$y + AE = \frac{3}{4}h \sin\vartheta \ldots\ldots\ldots (1)$$

AE z trójkąta AED jest równe

$$AE = AD \sin(\vartheta - \alpha)$$

Zaś z trójkąta ABD mamy:

$$\frac{AD}{2r} = \frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{\sin 2\alpha}$$

Z tego wynika, że $AE = \dfrac{2r \sin(\vartheta+\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$

Podstawiając tę wartość do /1/ otrzymamy:

$$y = \frac{3}{4}h \sin\vartheta - \frac{2r \sin(\vartheta+\alpha)\sin(\vartheta-\alpha)}{\sin 2\alpha}$$

Znajdźmy przy jakich wartościach ϑ, y osiąga maximum lub minimum.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}h\cos\vartheta - 2r\left[\frac{\sin(\vartheta-\alpha)\cos(\vartheta+\alpha) + \cos(\vartheta-\alpha)\sin(\vartheta+\alpha)}{\sin 2\alpha}\right]$$

Po uproszczeniu wypadnie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}h\cos\vartheta - \frac{2r \sin 2\vartheta}{\sin 2\alpha}$$

Przyrównajmy tę pochodną do zera:

$$\cos\vartheta\left(\frac{3}{4}h - \frac{4r \sin\vartheta}{\sin 2\alpha}\right) = 0$$

i jako odpowiedzi otrzymujemy: 1/ $\cos\vartheta = 0$ skąd $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ albo 2/ $\frac{3h}{4} - \frac{4r \sin\vartheta}{\sin 2\alpha} = 0$ skąd $\sin\vartheta = \frac{3h \sin 2\alpha}{16 r}$

Jeśli temu ostatniemu równaniu czyni zadość kąt γ , to czyni też zadość $\pi - \gamma$, a więc ogółem otrzymujemy 3 położenia równowagi. Ale zachodzi pewne ograniczenie. We wzorze na $\sin\vartheta$ licznik musi być mniejszy od mianownika, a więc $16r > 3h \cdot \sin 2\alpha$, gdy $3h \cdot \sin 2\alpha > 16r$, to istnieje tylko jedno położenie równowagi.

Chodzi jeszcze o to, czy znalezione położenia równowagi są trwałe czy też chwiejne. W tym celu znajdziemy drugą pochodną y względem ϑ. Znajdziemy:

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} = -\frac{3h \cdot \sin\vartheta}{4} - \frac{4r \cdot \cos 2\vartheta}{\sin 2\alpha}$$

Jeśli w tym wzorze założymy $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, to otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{d\vartheta^2} = -\frac{3h}{4} - \frac{4r}{\sin 2\alpha}$$

Gdy to wyrażenie jest dodatnie, to y osiągnęło minimum, a więc położenie równowagi jest trwałe. Zachodzi to, gdy $16r > 3h \sin 2\alpha$.

W tym razie istnieją więc 3 położenia równowagi środkowe trwałe i dwa boczne chwiejne.

Gdy natomiast $16r < 3h \cdot \sin 2\alpha$, to jest tylko jedno położenie równowagi i przytem równowaga jest chwiejna.

---ooOoo---

KONIEC.

SPIS RZECZY.

CZĘŚĆ I.

STATYKA.

Rozdział 1.

O siłach, działających na punkt.

Rozdział V.

O sznurach i łańcuchach.

Rozdział VI.

Przestrzenny układ sił.

Rozdział VII.

O środku ciężkości.

Rozdział VIII.