KOMISJA WYDAWNICZA
Towarzystwa Bratniej Pomocy Studentów Politechniki Warszawskiej

MECHANIKA

CZĘŚĆ I.

STATYKA

WEDŁUG WYKŁADÓW
prof. ZYGMUNTA STRASZEWICZA
W POLITECHNICE WARSZAWSKIEJ.

WYDANIE IV.

№ Wyd. 158.

WARSZAWA — 1923.

Skład Główny Komisji Wydawniczej: Politechnika — Polna 3. Telefon 88-60
Druk. i Litografja „SATURN" Marszałkowska 91. Tel. 20-44.

ROZDZIAŁ WSTĘPNY.

O SKALARACH I WEKTORACH.

1. SKALARY. Wielkości, z któremi mamy do czynienia w mechanice, dadzą się podzielić na dwie kategorje: SKALARY i WEKTORY.

Skalar jest to wielkość nie pozostająca w związku z żadnym określonym kierunkiem przestrzeni. Daje się ona całkowicie określić jedną parą jednostek znanych. Tak np. skalarem jest czas.- Gdy powiedziano, że pewne wydarzenie trwało tyle a tyle godzin, czy minut, to czas trwania tego wydarzenia jest całkowicie określony. Zamiast podawać liczbę można wskazać odcinek odpowiedniej skali. Skala taka urządza się na linji prostej, albo na jakiej innej linji. Pewna znana długość, odmierzona na tej linji, odpowiada obranej jednostce. Skala czasu urządza się najczęściej na okręgu koła i zazwyczaj godzinie odpowiada łuk, długości $\frac{\pi r}{6}$, gdzie r oznacza promień koła.

Prócz czasu do skalarów należą: masa, praca, siła żywa, potencjał i inne.

2. WEKTORY. Wektor jest to wielkość, pozostająca w związku z pewnym kierunkiem przestrzeni. Wek-

tor nie daje się całkowicie określić za pomocą jednej liczby, gdyż trzeba jeszcze wskazać ów kierunek. Tak więc wektor należy określać pod względem WIELKOŚCI i KIERUNKU.

Prostym przykładem wektora jest przesunięcie jakiegoś drobnego przedmiotu, powiemy punktu ruchomego. Dajmy na to, że punkt ten zajmuje znane położenie A i wiadomo, że ma być przesunięty o 3 metry. Dane te nie określają jeszcze przesunięcia, gdyż na ich zasadzie nie umielibyśmy wskazać, gdzie znajduje się punkt ruchomy po dokonaniu przesunięcia. Wiadomo jedynie, że nowe położenie znajduje się gdzieś na powierzchni kuli, zataczonej z punktu A , promieniem $3m$.

Jeżeli posługujemy się metodami analitycznemi, to określamy kierunek przesunięcia lub wogóle kierunek wektora tak, jak się to robi w geometrji analitycznej, t.j. za pomocą stosownych kątów kierunkowych. Jeżeli stosujemy metody wykreślne, to określamy kierunek wektora odcinkiem prostej, na którym jeszcze wskazać potrzeba, w którą stronę jest zwrócony wektor. Jeżeli więc odcinek MN ma określać kierunek przesunięcia, to należy wskazać np. za pomocą strzałki, czy przesunięcie ma się odbyć w stronę od M do N, czy też w stronę odwrotną. W przypadku pierwszym punkt M zwie się POCZĄTKIEM odcinka, a N – KOŃCEM.

Pod względem wielkości wektor określa się tak samo, jak skalar, a więc liczbą albo długością, wskazaną na skali. Dogodnie jest odznaczać tę długość na tym samym odcinku, który ma wskazywać kierunek, albo wprost nadawać odcinkowi temu taką właśnie długość. Odcinek taki określa wektor nietylko co do kierunku, ale i co do wielkości.

Przypuśćmy dla przykładu, że na przyjętej skali przesunięć, przesunięciu jednego metra odpowiada jeden centymetr. W takim razie przesunięcie, o którym wyżej była mowa, będzie całkowicie określone odcinkiem MN, wskazującym kierunek przesunięcia i posiadającym długość 3 cm.

Do kategorji wektorów należą: siła, moment, szybkość, przyśpieszenie i t.d.

3. RODZAJE WEKTORÓW. Przesunięcie punktu ruchomego z danego położenia A nazywamy WEKTOREM, ZWIĄZANYM Z PUNKTEM A. Umówiono się obierać początek odcinka MN, który ma określać przesunięcie, właśnie w tym punkcie A. Tym sposobem, mając dany odcinek MN, nietylko znamy przesu-

nięcie co do wielkości i kierunku, ale wiemy jeszcze, z jakiego położenia wyrusza punkt przesuwany.

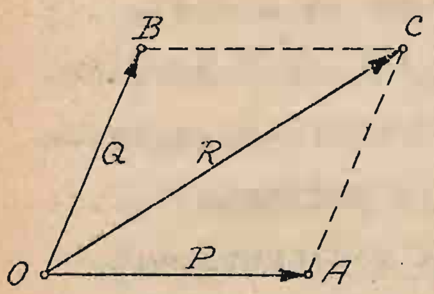
Przypuśćmy teraz, że chodzi o przesunięcie nie punktu, lecz cienkiego i prostego pręta, powiedzmy linji prostej w kierunku tejże prostej. Oczywiście wszystkie punkty tej prostej doznają jednakowych przesunięć, zarówno pod względem wielkości, jak i kierunku. Gdy znamy przesunięcie jednego punktu, to znamy przesunięcie wszystkich innych, a zatem takie przesunięcie prostej możemy całkowicie określić za pomocą jednego odcinka. Początek tego odcinka obierzemy naturalnie w jednym z punktów przesuwanej prostej, w którymkolwiek, bo żaden nie wyróżnia się z pośród ogółu. Oczywiście i cały odcinek będzie leżał na tej prostej. Takie przesunięcie prostej wzdłuż tej prostej nazywamy WEKTOREM ZWIĄZANYM Z TĄ PROSTĄ.

Dajmy teraz na to, że przesuwa się cała bryła, przyczem wszystkie jej punkty doznają przesunięć jednakowych, zarówno co do kierunku, jak i co do wielkości. Początek odcinka, określającego takie przesunięcie, możemy obrać w dowolnym punkcie bryły, albo nawet w dowolnym punkcie przestrzeni, uważając, że bryła rozciąga się w przestrzeni nieograniczenie. Takie przesunięcie bryły nazywa się WEKTOREM SWOBODNYM.

Wektory wogóle dzielą się na trzy kategorje: wektory związane z punktami, wektory związane z prostemi i wektory swobodne. Wektor związany z punktem lub raczej odcinek, określający ten wektor, posiada zupełnie określone położenie w przestrzeni. Wektor związany z prostą musi pozostawać na pewnej określonej prostej, ale możemy go na niej przenosić dowolnie, wektor swobodny możemy dowolnie przenosić w przestrzeni.

4. SUMA GEOMETRYCZNA. W zakres mechaniki wchodzą zagadnienia, w których mamy pewną liczbę wektorów oraz innych danych, a chodzi o wyznaczenie nowego wektora, czyniącego zadość pewnym określonym warunkom. Zagadnienia tego rodzaju dają się często sprowadzić do pewnych działań typowych, które mamy właśnie poznać.

Niech będą dwa wektory $P = OA$ i $Q = OB$ mające wspólny początek O. Mogą to być wektory, związane z punktem O, albo wektory związane z prostemi OA i OB, albo wreszcie



Rys. 1

wektory swobodne. Wyznaczmy nowy wektor R w sposób następujący: prowadzimy z końca B wektora Q odcinek BC, równy i równoległy do OA. Otóż początkiem wektora R ma być punkt O, a końcem punkt C.

Wyznaczenie takiego wektora R nazywa się DODAWANIEM GEOMETRYCZNEM, albo WEKTOREM WYPADKOWYM, albo wreszcie wprost WYPADKOWĄ WEKTORÓW P i Q, a te dwa ostatnie WEKTORAMI SKŁADOWYMI wektora R. Pisze się symbolicznie:

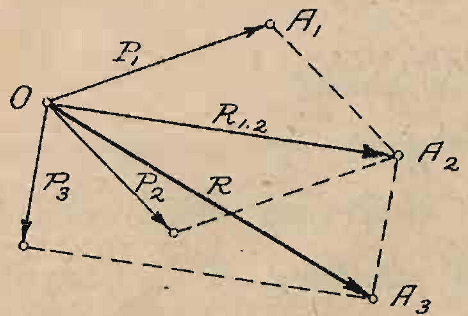
$$R = P + Q \;;$$

W równaniu tem znaki $=$ i $+$ mają inne znaczenie niż w algebrze zwykłej, czyli w algebrze skalarów.

Z figury wynika bezpośrednio, że moglibyśmy otrzymać wektor R, prowadząc z punktu A odcinek równy i równoległy do OB, a zatem wektory składowe są równouprawnione i w sumie $P+Q$ porządek składników nie odgrywa żadnej roli.

Wyrazimy to symbolicznie pisząc: $P+Q = Q+P$

Wektor wypadkowy R można także wyznaczyć, jako przekątnię równoległoboku, zbudowanego na wektorach składowych. Niech teraz będą 3 wektory P_1, P_2, P_3, posiadające wspólny początek O i położone jakkolwiek w przestrzeni /a więc niekoniecznie w jednej płaszczyźnie/



Rys. 2.

Wyznaczmy nowy wektor R w sposób następujący: z końca A_1 wektora P_1 prowadzimy odcinek A_1A_2 równy i równoległy do wektora P_2, a następnie z punktu A_2 prowadzimy A_2A_3, równe i równoległe do P_3. Początkiem szukanego wektora R ma być O, a końcem A_3. Wektor R zowie się sumą geometryczną albo wektoreem wypadkowym wektorów: P_1, P_2, P_3 -,które nazywamy składowymi.

Piszemy:

$$R = P_1 + P_2 + P_3$$

Aby więc otrzymać wektor wypadkowy należy utworzyć wielobok $OA_1A_2A_3$, którego boki są odpowiednio równoległe do wektorów składowych.

Łatwo się przekonać, że porządek, w którym następują po sobie te boki, nie wywiera wpływu na wynik ostateczny. Z rys.2 widać, że $R = R_{1.2} + P_3$ gdzie $R_{1.2} = P_1 + P_2$. Lecz otrzymalibyśmy tę samą sumę $R_{1.2}$, prowadząc z końca wektora P_2 odcinek równy i równoległy do P_1 , a więc zamiana pomiędzy bokami OA_1 i A_1A_2 nie wywiera wpływu na sumę ostateczną.

Można również uczynić zamianę pomiędzy bokami A_1A_2 i A_2A_3 czyli pomiędzy składnikami $P_2 P_3$, co nie wpłynie na sumę R . Oczywiście odcinek A_2A_3 jest równy i równoległy do sumy wektorów $P_2 P_3$, którą oznaczymy przez $R_{2.3}$, a zatem R można uważać za sumę wektorów P_1 i $R_{2.3}$; lecz otrzymalibyśmy ten sam odcinek A_2A_3 równy i równoległy do P_2 , prowadząc naprzód z A_2 odcinek równy i równoległy do P_3 , a następnie z końca tego odcinka odcinek równy i równoległy do P_2 .Powiedzmy krótko, że suma geometryczna $P_1+P_2+P_3$ nie zależy od porządku składników.

Tak samo zupełnie tworzy się suma geometryczna czterech, pięciu i więcej wektorów i sumy te nie zależą również od porządku składników.

Jeżeli wszystkie wektory składowe są położone na jednej prostej, to i wektor wypadkowy będzie leżał na tejże prostej i będzie równy sumie algebraicznej wektorów składowych. Tak więc sumę algebraiczną możemy uważać za szczególny przypadek sumy geometrycznej.

Często bardzo wypada rozwiązywać zagadnienia odwrotnie: dany jest wektor R, wyznaczyć pewną liczbę wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$, dla których R jest sumą geometryczną, czyli, innemi słowy, rozłożyć wektor R na wektory składowe $P_1, P_2, \ldots\ldots$. Mogą być przytem postawione jeszcze inne warunki, którym szukane wektory składowe mają czynić zadość.

5. RZUTY WEKTORÓW. W mechanice często mamy do czynienia z prostokątnymi rzutami wektorów na płaszczyzny i proste.

Rzut taki możemy zawsze uważać za wektor, którego początek i koniec są rzutami początku i końca wektora rzucanego czyli oryginału.

Niech będą wektory $P_1, P_2, \ldots$ posiadające wspólny początek O, lecz położone jakkolwiek w przestrzeni /rys.2/. Utwórzmy wielobok OA_1A_2 i wyznaczmy wektor wypadkowy R. Obierzmy następnie dowolną płaszczyznę rzutów i zbudujmy rzut całej figury na tej płaszczyźnie. Części składowe rzutu będziemy oznaczać temi samemi literami, co odpowiednie części oryginału, kreskując je dla odróżnienia. Ponieważ rzuty prostokątne dwóch odcinków, równych i równoległych, są równe i równoległe, przeto odcinek $A_1'A_2'$ będzie równy wektorowi P_2' i równoległy do niego, odcinek $A_2'A_3'$ do P_3' i t.d. Stąd wynika, że wektor R' będzie sumą geometryczną wektorów $P_1', P_2', \ldots\ldots$ A zatem RZUT WEKTORA WYPADKOWEGO NA PŁASZCZYZNĘ JEST SUMĄ GEOMETRYCZNĄ RZUTÓW WEKTORÓW SKŁADOWYCH.

Weźmy teraz rzut tej samej figury /2/ na dowolnie obraną oś rzutów. Na osi tej będziemy odróżniali kierunek dodatni od ujemnego, jak to się dzieje w geometrji analitycznej. Jeżeli rzut wektora jest zwrócony w stronę dodatnią, to będziemy go uważali za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.

Widać bezpośrednio z figury, że R' co do wielkości i znaku równa się sumie algebraicznej odcinków $O'A_1'$, $A_1'A_2', \ldots$, gdzie porządek liter określa znak, który składnikowi przypisać należy. Jeżeli np. punkt A_2' leży po stronie dodatniej punktu A_1', to odcinek $A_1'A_2'$ uważamy za dodatni, w razie przeciwnym za ujemny.- Lecz $O'A_1' = P_1'$ odcinek $A_1'A_2'$ jest równy co do wielkości i zgodny co do kierunku z P_2' i t.d., a zatem RZUT WEKTORA WYPADKOWEGO NA OŚ JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ RZUTÓW WEKTORÓW SKŁADO-

WYCH. Twierdzeniu temu nadamy postać równania algebraicznego. W tym celu zawrzemy naprzód umowę następującą: jeżeli mamy dwie proste, na których odróżniamy kierunki, to za kąt pomiędzy niemi będziemy uważali ten z dwóch kątów przeciwległych, którego obydwa boki biegną od wierzchołka.

Oznaczmy teraz przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ kąty pomiędzy wektorami $P_1, P_2, \ldots R$ i osią rzutów. W takim razie rzuty tych wektorów na oś będą zarówno co do wielkości bezwzględnej, jak i znaku odpowiednio równe: $P_1 \cos\alpha_1, P_2 \cos\alpha_2 \ldots$ $\ldots R \cos\alpha_r$ i twierdzenie powyższe wyrazi się tak: $R\cos\alpha_r = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 \ldots$ lub krócej: $R\cos\alpha_r = \Sigma P\cos\alpha$.

6. METODA ANALITYCZNA SUMOWANIA. Na drugiem twierdzeniu paragrafu poprzedzającego jest oparta metoda analityczna wyznaczania wektora wypadkowego.

Mamy więc wyznaczyć pod względem wielkości kierunku wektor wypadkowy danych wektorów $P_1, P_2 \ldots\ldots$, posiadających wspólny początek O. Obierzmy punkt O za początek prostokątnego układu współrzędnych X, Y, Z i oznaczmy odpowiednio przez $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ kąty, które dane wektory tworzą z osiami, czyli ich kąty kierunkowe. Szukany wektor wypadkowy oznaczymy przez R, a jego rzuty na osi przez R_x, R_y, R_z. Na zasadzie wzmiankowanego twierdzenia będzie:

$$R_x = \Sigma P\cos\alpha \quad R_y = \Sigma P\cos\beta \quad R_z = \Sigma P\cos\gamma$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Oznaczmy jeszcze przez $(\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$ kąty kierunkowe wektora R. Znajdziemy, że $\cos\alpha_r = \frac{R_x}{R}$; $\cos\beta_r = \frac{R_y}{R}$; $\cos\gamma_r = \frac{R_z}{R}$. Mając $R, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r$ znamy wektor wypadkowy co do wielkości i kierunku.

7. RZUT TRÓJKĄTA. W dalszym ciągu będą użyteczne pewne twierdzenia geometryczne, które przytoczymy na tem miejscu.

Niech będzie trójkąt ABC i jego rzut $A'B'C'$ na jakąkolwiek płaszczyznę F. Oznaczmy przez S i S' pola oryginału i rzutu, a przez α kąt pomiędzy płaszczyzną trójkąta i płaszczyzną F, dowiedziemy, że

$$S' = S\cos\alpha$$

Rozważmy naprzód przypadek szczególny, gdy jeden z boków trójkąta np. AB jest równoległy do F. Jeżeli CD jest wysokością oryginału, to $C'D'$ jest wysokością rzutu i $S' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'D'$. Lecz $A'B' = AB$; $C'D' = CD \cos\alpha$, zatem $S' = \frac{1}{2} A'B' \cdot C'D' \cos\alpha = S' = S\cos\alpha$ c.b.d.d.

Przypuśćmy teraz, że trójkąt ABC ma położenie jakiekolwiek. Poprowadźmy przez wierzchołek A płaszczyznę równoległą do F; przetnie ona bok BC w punkcie D i prosta AD będzie równoległa do F. Oznaczmy teraz przez S_1 i S_2 pola trójkątów ABD i ACD przez S_1' i S_2' pola ich rzutów. Na zasadzie powyższego będzie $S_1' = S_1 \cos\alpha$; $S_2' = S_2 \cos\alpha$; skąd otrzymamy związek żądany. Twierdzenie powyższe daje się bardzo łatwo uogólnić.

Przypuśćmy naprzód, że S i S' są polami dowolnego wieloboku i jego rzutu na płaszczyznę F. Wielobok możemy podzielić na trójkąty i stosując dowiedzione twierdzenie do każdego z nich i dodając otrzymane równania, otrzymamy znowu $S' = S\cos\alpha$.

Gdy granicę figury płaskiej stanowi linja krzywa, to możemy uważać taką figurę za wielobok o nieskończenie krótkich bokach, a zatem twierdzenie nasze rozciąga się do wszystkich figur płaskich.

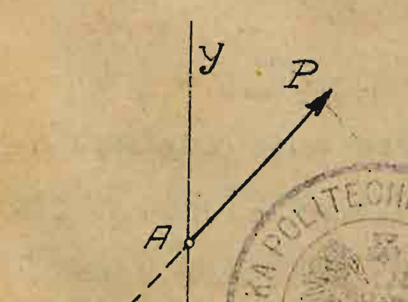
8. MOMENT WZGLĘDEM PUNKTU. W teorji wektorów obok dodawania zasadniczą rolę odgrywają dwa działania inne. Wynikiem jednego z nich jest wektor zwany ILOCZYNEM WEKTOROWYM, a wynikiem drugiego skalar, zwany ILOCZYNEM SKALAROWYM. Działania te wyłożymy jedynie w tej postaci, w której będą nam potrzebne, w dalszym ciągu nie będziemy nawet używali powyższych zasad ogólnych, posługujemy się zamiast tego nazwami MOMENT i PRACA, używanemi częściej w technice.

Działanie pierwsze rozważymy na tem miejscu, o drugiem będzie mowa później.

Niech będzie wektor $P = AB$, związany z punktem lub prostą i niech będzie prócz tego punkt O . Poprowadźmy przez O prostą prostopadłą do płaszczyzny OAB . Gdy spojrzymy z jakiegoś punktu C tej prostej na płaszczyznę OAB , to zobaczymy, że wektor P jest, dajmy na to, zwrócony w tę stronę, w którą posuwa się koniec wskazówki zegarowej, obracając się około punktu O . Gdybyśmy patrzyli na OAB z innego punktu tejże prostej, położonego na odwrotnej stronie płaszczyzny, to dla nas ZWROT wektora P byłby odwrotny do biegu wskazówki zegarowej.

Odetnijmy od punktu O w stronę C P/p umówionych jednostek długości, gdzie p oznacza odległość wektora P od punktu O i nazywa się RAMIENIEM MOMENTU, innemi słowy odmierzamy na OC, na odpowiedniej skali, podwójne pole trójkąta OAB. Otrzymamy wektor, związany z punktem O i posiadający początek w O Wektor ten zowie się MOMENTEM WEKTORA P WZGLĘDEM O. Krótko mówiąc, MOMENT WEKTORA P WZGLĘDEM PUNKTU O JEST TO WEKTOR, PROSTOPADŁY DO PŁASZCZYZNY, ZAWIERAJĄCEJ O i P, ZWRÓCONY W TĘ STRONĘ Z KTÓREJ WIDAĆ P W KIERUNKU BIEGU WSKAZÓWKI ZEGAROWEJ, A POD WZGLĘDEM WIELKOŚCI RÓWNY ILOCZYNOWI Z WEKTORA P PRZEZ RAMIĘ.

Oczywiście moment ani pod względem kierunku, ani wielkości, nie zależy od położenia wektora P na prostej AB.



Rys. 3.

Jeżeli punkt O leży na AB, to moment jest równy zeru.

Niech będą wektory $P_1, P_2, \ldots\ldots$ /typowy wektor P /, położone w jednej płaszczyźnie, np. w płaszczyźnie rysunku i posiadające wspólny początek A. Ich wektor wypadkowy oznaczmy przez R. Niech będzie prócz tego w tejże płaszczyźnie jakikolwiek punkt O. Obierzmy O za początek prostokątnego układu współrzędnych, oś Z obierzemy prostopadle do płaszczyzny rysunku, a oś Y poprowadzimy przez punkt A. Oczywiście momenty wszystkich wektorów $P_1, P_2 \ldots R$ leżą na osi Z, przypisujemy im znaki $+$ lub $-$ stosownie do tego, czy są zwrócone w stronę dodatnią czy ujemną tej osi. Oznczmy jeszcze przez $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots \varphi$ kąty, które wektory $P_1, P_2, P_3 \ldots R$ tworzą z osią x, a przez $p_1, p_2, p_3, \ldots \ldots r$ ich odległość od O. Biorąc rzuty na oś x otrzymamy $R\cos\varphi = \Sigma P\cos\alpha$. Mnożymy następnie obydwie strony tego równania przez OA gdy uwzględnimy, że $OA\cos\alpha = p$ i $OA\cos\varphi = r$, to wypadnie

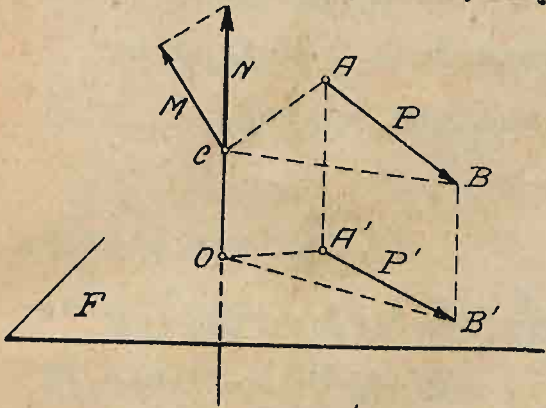
$$Rr = \Sigma Pp.$$

Równanie to wyraża twierdzenie następujące:

MOMENT WEKTORA WYPADKOWEGO WEKTORÓW, POŁOŻONYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE, WZGLĘDEM PUNKTU TEJŻE PŁASZCZYZNY JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW WEKTORÓW SKŁADOWYCH.

Twierdzenie to jest przypadkiem szczególnym twierdzenia ogólniejszego, które poznamy w jednym z paragrafów następnych /10/.

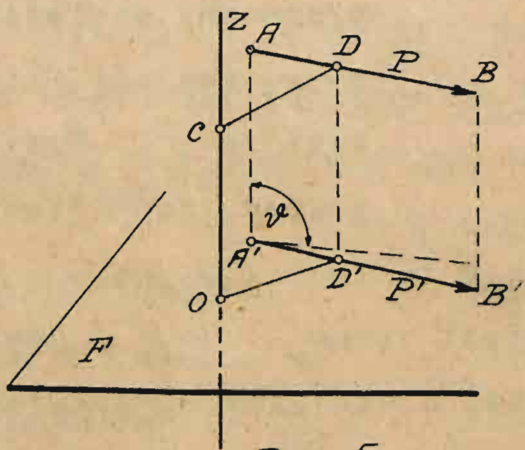
9. MOMENT WZGLĘDEM PROSTEJ. Niech będzie wektor $P=AB$, związany z punktem lub prostą i jakąkolwiek prostą Z. Obierzmy na niej dowolny punkt C i wyznaczmy względem niego moment M wektora P. Przypuśćmy, że M tworzy z prostą Z kąt γ; w takim razie rzut N momentu na prostą Z jest równy $M\cos\gamma$. Dowiedziemy, że rzut ten jest niezależny od położenia punktu C na prostej.



Rys. 4.

W tym celu poprowadźmy dowolnie płaszczyznę F, prostopadłą do prostej Z; przetnie ona tę prostą w punkcie O. Jeżeli rzutem punktów A, B na F są punkty A', B', to rzutem trójkąta ABC będzie trójkąt $A'B'C'$, przy każdem położeniu punktu C na prostej Z. Podwójne pole trójkąta $ABC=M$ i płaszczyzna ABC tworzy z F kąt γ /płaszczyzny te są odpowiednio prostopadłe do boków kąta γ/, a za-

tem podwójne pole trójkąta $A'B'O = M\cos\gamma = N$
Znaczy to, że rzut N jest dla wszystkich punktów prostej Z wielkością stałą. Ten rzut N momentu M zowie się <u>momentem</u> wektora P względem osi Z. Jest to wektor związany z prostą Z i oczywiście równy co do wielkości i kierunku momentowi wektora $P'=A'B'$ względem punktu O.



Rys. 5.

Znajdziemy jeszcze dla wektora N pewne wyrażenie, które bywa często użyteczne. Dajmy na to, że $CD=p$ jest najkrótszą odległością pomiędzy prostemi AB i Z i D' jest rzutem punktu D. Ponieważ prosta CD jest równoległa do płaszczyzny rzutów, przeto $CD = OD' = p$. Prosta OD' jako prostopadła do AB i DD' jest prostopadłą do płaszczyzny rzucającej prostej AB, a więc do $A'B'$. Z tego wynika, że OD' jest ramieniem wektora P' i $N = P'p$. Oznaczmy jeszcze przez ϑ kąt pomiędzy P i Z. W takim razie kąt pomiędzy P i P' będzie $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ i

$P' = P \sin \vartheta$.

Ostatecznie otrzymamy:

$$N = Pp \sin \vartheta$$

Moment wektora P względem prostej Z jest równy zeru.

1. jeżeli $p = 0$ t.j. jeżeli proste Z i AB się przecinają i
2. jeżeli $\vartheta = 0$ t.j. jeżeli proste Z i AB są równoległe.

Wogóle moment wektora względem osi jest zerem, jeżeli wektor i oś leżą w jednej płaszczyźnie.

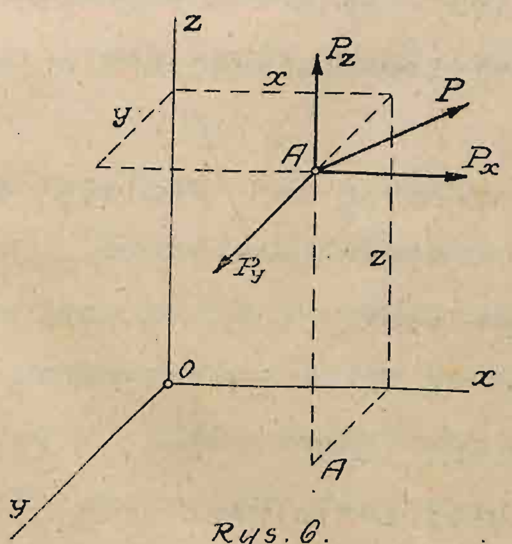
10. MOMENT WYPADKOWY. Niech wektory $P_1, P_2, P_3, \ldots$ i ich wypadkowa R i niech będzie prócz tego jakakolwiek prosta Z. Prowadzimy, jak poprzednio, płaszczyznę F prostopadłą do Z i przecinającą tę prostą w punkcie O. Rzut R' wektora R na F będzie wypadkowa rzutów $P_1', P_2', P_3', \ldots$ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Ponieważ wektory $P_1', P_2', \ldots$ tworzą układ płaski, przeto moment wektora wypadkowego R' względem punktu O będzie równy sumie algebraicznej momentów wektorów składowych $P_1, P_2, P_3, \ldots$ względem Z. Wogóle moment wektora wypadkowego względem osi jest równy sumie momentów wek-

torów składowych.

Weźmy teraz ten sam układ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots R$ i jakikolwiek punkt O. Wyznaczmy względem O momenty $M_1, M_2, \ldots$ wektorów $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots$ oraz momenty N wektora R. Ponieważ $M_1, M_2 \ldots$ są to wektory posiadające wspólny początek, możemy przeto wyznaczyć ich wektor wypadkowy; oznaczmy go przez N'. Dowiedziemy, że N i N' nie różnią się ani pod względem wielkości, ani kierunku.

W tym celu poprowadźmy przez O trzy osie współrzędne x, y, z. Rzut wektora N' na oś x jest równy sumie rzutów wektorów $M_1, M_2 \ldots$ Lecz rzuty momentów $M_1, M_2 \ldots$ na oś x są momentami wektorów $P_1, P_2 \ldots\ldots$ względem tejże, a suma ich w myśl twierdzenia poprzedzającego jest równą momentowi wypadkowej R względem x czyli rzutowi momentu N na tę prostą. Stąd wynika, że rzuty wektorów N i N' na oś x muszą być równe, ponieważ też samo dotyczy dwóch osi pozostałych, przeto wektory N i N' nie mogą się różnić pod żadnym względem. Dowiedliśmy więc twierdzenie takie - moment wektora wypadkowego względem dowolnego punktu jest równy sumie geometrycznej momentów wektorów składowych tegoż punktu.

11. ANALITYCZNE WYRAŻENIE MOMENTU. W prostokątnym układzie współrzędnych dany jest początek $A(x,y,z)$ wektora P oraz rzuty P_x, P_y, P_z tego wektora na osi. Pragniemy wyznaczyć moment M wektora P względem początku O. Uczyńmy tu naprzód pewną uwagę ogólną, dotyczącą obiegu układów współrzędnych.



Rys. 6.

Spójrzmy z jakiegoś punktu osi /rys.6/, położonego po stronie dodatniej od O, na tę część płaszczyzny xy, która leży pomiędzy stronami dodatniemi osi x i y. Wskazówka zegara, leżącego na tej płaszczyźnie tarczą do nas, posunęłaby się od osi x ku osi y. Powiemy, że oś y następuje po osi x w kierunku ruchu wskazówki zegarowej.-

Tak samo oś z następuje po osi y i oś x po osi z. W taki sposób będziemy zawsze obierali osi współrzędnych. Na załączonym rysunku mamy wyobrażony ten wypadek, w którym wszystkie wielkości dane t.j x, y, z, P_x, P_y, P_z są dodatnie.

Wyznaczmy naprzód rzuty M_x, M_y, M_z szukanego momentu M na osi współrzędnych, czyli momenty wektora P względem osi. W tym celu rozkładamy wektor P na 3 składowe w kierunkach osi. Oczywiście składowe te są równe danym rzutom P_x, P_y, P_z.

M_z czyli moment wektora P względem osi z jest równy sumie momentów wektorów P_x, P_y, P_z. Moment pierwszego jest równy $-y.P_x$ /znak -, gdyż moment jest zwrócony w kierunku ujemnym osi z /, moment drugiego wynosi $x.P_y$ i wreszcie moment trzeciego jest równy zeru. Zatem wypadnie $M_z = xP_y - yP_x$. Tak samo znajdziemy:

$$M_x = yP_z - zP_y \quad i \quad M_y = zP_x - xP_z;$$

a

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

Dalej otrzymamy $\cos\alpha = \frac{M_x}{M}; \cos\beta = \frac{M_y}{M}; \cos\gamma = \frac{M_z}{M},$

gdzie α, β, γ oznaczają kąty kierunku momentu M.

Jeżeli mamy wyznaczyć moment wektora P nie względem początku O, lecz względem jakiegoś innego punktu $O'(\xi, \eta, \zeta)$, to we wzorach powyższych wypadnie zamiast x, y, z napisać x', y', z' czyli współrzędne punktu A w układzie, którego początek leży w O', a osi są odpowiednio równoległe do x, y, z, zatem

$$x' = x - \xi \,; \; y' = y - \eta \,; \; z' = z - \zeta$$

Będzie zatem

$$M_z = (x - \xi) P_y - (y - \eta) P_x \text{ i t.d.}$$

12. PARA WEKTORÓW. Niech będą dwa wektory równe, równoległe, ale zwrócone w strony odwrotne. Każdy z nich oznaczmy przez P, a ich początki odpowiednio przez A_1 i A_2. Mówimy że te wektory tworzą parę wektorów, nazywamy płaszczyznę, w której one leżą, płaszczyzną pary, a odległość pomiędzy nimi /oznaczmy ją przez p / ramieniem pary.

Obierzmy w przestrzeni jakikolwiek punkt A i wyznaczmy względem niego momenty M' i M'' obydwóch wektorów pary, a następnie sumę geometryczną M tych momentów. Nazywamy M

momentem pary względem punktu A. Wyznaczymy ten moment przy pomocy wzorów paragrafu poprzedzającego.

W tym celu oznaczymy współrzędne punktów A_1, A_2, A odpowiednio przez (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) i (x, y, z), a rzuty na osi pierwszego z wektorów pary przez P_x, P_y, P_z; w takim razie rzuty drugiego będą $-P_x, -P_y, -P_z$. Otrzymamy teraz łatwo rzuty momentów M' i M'' na oś z, a mianowicie:

$$M_z' = (x_1 - x)P_y - (y_1 - y)P_x \quad i \quad M_z'' = -(x_2 - x)P_y + (y_2 - y)P_x$$

Oczywiście rzut wypadkowej M, czyli $M_z = M_z' + M_z''$ a więc

$$M_z = (x_1 - x_2)P_y - (y_1 - y_2)P_x$$

Analogiczne wzory otrzymamy na M_x i M_y. Widzimy, że M_x, M_y, M_z są niezależne od (x, y, z), a więc moment pary M jest ani co do wielkości, ani co do kierunku niezależny od położenia punktu A. Względem wszystkich punktów przestrzeni momenty pary wektorów są jednakowe, możemy więc powiedzieć, że moment pary jest to wektor swobodny.

Z ostatniego wzoru na M_z widać, że moment pary nie różni się od momentu pierwszego wektora pary względem punktu A_2. Jest on więc prostopadły do płaszczyzny pary, zwrócony w tę stronę, z której widać parę w kierunku ruchu wskazówki zegara, a co do wielkości równy Pp t.j. iloczynowi z wektora przez ramię pary.

CZĘŚĆ I-sza.

STATYKA.

Rozdział 1.

O SIŁACH DZIAŁAJĄCYCH NA PUNKT.

13. PRZEDMIOT I PODZIAŁ MECHANIKI. Wśród zjawisk otaczającego nas świata wyróżniamy t.zw. zjawiska mechaniczne. Istnieją dwa rodzaje takich zjawisk, ruch ciała względem innych ciał i odkształcanie się ciał. Pomiędzy temi kategorjami zasadniczej różnicy niema, bo odkształcanie polega na ruchu jednych cząstek względem innych, ale dobrze jest odróżniać te dwie kategorje.

Mechanika jest to nauka o tych zjawiskach mechanicznych.

Dzieli się ona na dwie części, różne zasad-