ra pary względem punktu A_2. Jest on więc prostopadły do płaszczyzny pary, zwrócony w tę stronę, z której widać parę w kierunku ruchu wskazówki zegara, a co do wielkości równy Pp t.j. iloczynowi z wektora przez ramię pary.

CZĘŚĆ I-sza.

STATYKA.

Rozdział 1.

O SIŁACH DZIAŁAJĄCYCH NA PUNKT.

13. PRZEDMIOT I PODZIAŁ MECHANIKI. Wśród zjawisk otaczającego nas świata wyróżniamy t.zw. zjawiska mechaniczne. Istnieją dwa rodzaje takich zjawisk, ruch ciała względem innych ciał i odkształcanie się ciał. Pomiędzy temi kategorjami zasadniczej różnicy niema, bo odkształcanie polega na ruchu jednych cząstek względem innych, ale dobrze jest odróżniać te dwie kategorje.

Mechanika jest to nauka o tych zjawiskach mechanicznych.

Dzieli się ona na dwie części, różne zasadniczo - cynematykę i cynetykę.

Cynematyka jest częścią opisową; bada ona jak się poruszają ciała, nie wchodząc w to, jakie czynniki wywierają wpływ na ruch. Cynematyka stoi w bardzo bliskim związku z geometrją. - Zasadnicza różnica polega na tem, że w cynematyce wchodzi w grę pojęcie czasu, z którym nie mamy do czynienia w geometrji.

Aby zdefinjować przedmiot cynetyki należy podać wyjaśnienie wstępne. Gdy mamy dwa ciała A i B, to ciało B może wywierać wpływ na ciało A, który się ujawnia w podniesieniu się temperatury, w zmianie stanu elektrycznego lub magnetycznego i t.d. ciała A. Ciało B może również wywierać wpływ mechaniczny na ciało A i pod działaniem B ciało A może się zacząć poruszać lub odkształcać. Dzieje się to, gdy ciała są w bezpośredniem zetknięciu lub gdy są połączone za pomocą łącznika materjalnego np. sznura. Ale ciało B może też wywierać wpływ na A gdy niema łącznika materjalnego. Wiadomem jest np., że magnes przyciąga żelazo, choć niema między niemi widomego pośrednika mechanicznego.

Gdy jedno ciało wywiera wpływ mechaniczny na drugie, to oddziaływanie to daje się zwykle określić za pomocą jednego wektora. Wektor ten nazywamy siłą. Tak np. jeśli przywiążemy do ciała sznur, to ciało może zacząć się poruszać, przyczem ruch ten zależy od kierunku sznura. Mamy tu więc do czynienia z wektorem. Pod względem wielkości można sądzić o tym wektorze z tego, jak silnie ciągniemy za sznur.

Siła nie jest to wektor swobodny, bo gdyby obrać punkt przyczepienia sznura do ciała gdzieindziej, to wywołałoby to inny skutek.- A więc skutek ten zależy od początku wektora. Ten początek nazywamy punktem przyłożenia siły lub punktem zaczepienia siły.

Gdy 2 ciała A i B stykają się tylko w jednym punkcie, to oddziaływanie ciała A na B też się da określić jedną siłą i punkt przyłożenia jest w punkcie zetknięcia. Jeśli ciała A i B są zetknięte w kilku punktach, to działanie jednego na drugi trzeba określić kilkoma siłami.

Gdy mamy ciała A i B i chodzi o zbadanie ruchu ciała A, a wiemy, jaką siłę wywiera ciało B, to możemy zapomnieć o istnieniu ciała B i rachować się tylko z siłą, która działa na A.

Jeśli siły działają na ciało, a mimo to one pozostaje w spoczynku, to mówimy, że siły się równoważą.

Niech będzie jakieś drobne ciało, przypuśćmy że działają na nie tylko 2 siły P i Q. Jeśli takie 2 siły się równoważą, to mówimy, że są one równe pod względem wielkości. Doświadczenie wskazuje, że siły takie są zawsze odwrotne.

Przypuśćmy, że na punkt działa kilka sił $P_1, P_2, \ldots\ldots$ w tym samym kierunku i że istnieje siła R, która je wszystkie równoważy.- W takim razie siła R musi mieć kierunek odwrotny do tamtych, mówimy, że pod względem wielkości jest ona równa sumie sił $P_1, P_2, \ldots\ldots$

Opierając się na definicji sił równych i sumy sił, możemy siły mierzyć. Obierzmy w tym celu pewną określoną siłę za jednostkę. W fizyce za taką jednostkę jest uważana dyna. Technicy posługują się kilogramem, jako jednostką sił. O sile, która może zrównoważyć siłę jednostkową, mówimy, że jest równa tej jednostce, jeśli siła może zrównoważyć 2 siły jednostkowe, działające w jednym kierunku, to mówimy, że zawiera ona 2 jednostki sił. Do porównywania sił służy dynamometr znany z kursu fizyki.

CYNETYKA JEST TO NAUKA O TEM, JAK SIĘ ZACHOWUJĄ CIAŁA POD DZIAŁANIEM SIŁ. Dzieli się ona na 2 części: STATYKĘ I DYNAMIKĘ.

Statyka jest to nauka o równowadze sił, a dynamika o ruchu ciał pod działaniem sił. Jest rzeczą oczywistą, że statyka stanowi tylko szczególny przypadek w dynamice. Specjalizując twierdzenie dynamiki moglibyśmy otrzymać z nich twierdzenie statyki.

W kursie naszym wyłożymy jednak najpierw statykę, a później dynamikę.

<u>14. PIERWSZA ZASADA STATYKI.</u> Statyka jest to nauka doświadczalna /podobnie jak i fizyka/ i polega na pewnych prawdach, które daje nam doświadczenie. Prawdy te są nieraz nazywane <u>aksiomatami</u> lub <u>zasadami statyki</u>.

Pierwszym z tych aksiomatów jest <u>zasada akcji i reakcji</u> /lub zasada działania lub oddziaływania/.

Niech będą dwa ciała A i B . Przypuśćmy, że A wywiera na B siłę P . Doświadczenie wskazuje, że i ciało B wywiera na A pewną siłę Q. Ta siła jest według zasady akcji i reakcji równa sile P co do wielkości, a odwrtona co do kierunku /przytem obydwie siły działają na jednej prostej/.

Że zasada ta jest słuszna, dowodzi fakt następujący.

Przypuśćmy, że ciała A i B stykają się, połączymy je np. za pomocą śruby; utworzą one wtedy jedną całość. Gdyby siła Q była większa od P, to całość miałaby tendencję do poruszania się w kierunku siły Q i gdyby zawiesić te ciała na sznurze, to odchyliłyby się w kierunku siły Q. Ale nie dostrzegamy nic podobnego. Więc siły P i Q muszą być równe i odwrotne.

O prawdziwości tej zasady przekonywa nas też fakt, że dalsze wnioski, jakie wyciągniemy z niej są zgodnie z doświadczeniem.

15. DRUGA ZASADA STATYKI. Drugą zasadą statyki jest przenoszenie siły. Siła nie jest wektorem swobodnym, ani też wektorem związanym z prostą. Że nie jest swobodnym - o tem mówiliśmy

już wyżej; dowiedziemy teraz, że i do tego drugiego rodzaju wektorów należeć nie może.

Wyobraźmy sobie sznur AB, rozciągnięty na podłodze. Przyłóżmy do końca B siłę P, mającą kierunek prostej AB. Pod działaniem tej siły sznur zacznie się poruszać. Jeśli punkt przyłożenia przeniesiemy do punktu A, to ruch będzie zupełnie inny, a zatem nie wolno przenosić punktu przyłożenia siły. Siła jest to więc wektor, związany z punktem.

Sznur należy do ciał odkształcających się pod działaniem sił, ale taką samą właściwość, w mniejszym lub większym stopniu, posiadają wszystkie inne ciała. Wynika to, między innemi, z rozumowania następującego:

Niech będzie pręt metalowy AB. Gdy do końca B przyłożymy siłę P, działającą w kierunku AB, to pręt zacznie się przesuwać. Podzielmy w myśli pręt na 2 części AC i CB. Te 2 części można uważać za 2 różne ciała i powiedzieć, że AC zaczęło się poruszać pod działaniem CB, a ponieważ poprzednio część CB działania takiego nie wywierała, przeto musiały w niej zajść pewne zmiany i oczywiście musiały one polegać na pewnem wydłużeniu. Wydłużenie to może być zupełnie niedostrzegalne, niemniej jednak musimy przyjmować istnienie jego, bo inaczej ruch pręta pod działaniem siły P byłby dla nas niezrozumiały.

Niech będzie jakiekolwiek ciało. Poprowadźmy dowolną prostą, która przetnie powierzchnię tego ciała w punkcie A i B. Przyłóżmy w punkcie A siłę P, skierowaną według prostej AB. Wywoła ona pewien określony ruch ciała i pewne odkształcenie. Usuńmy teraz siłę P z punktu A i przyłóżmy taką samą siłę w punkcie B. Pod działaniem tej siły ciało otrzyma też pewien ruch, prawie taki sam, jak poprzednio, i również pewne odkształcenie.- Lecz o ile w pierwszym przypadku odkształcenie polegać będzie na wydłużeniu, to w drugim - na skurczeniu. Skutki działania sił nie będą więc jednakowe. Gdyby przenieść punkt przyłożenia siły jeszcze do innego punktu prostej AB np. pośredniego między A i B, to odkształcenie byłoby jeszcze inne - jedna część ciała wydłużyłaby się, a inna część - skurczyła. Ale w ciałach takich jak żelazo, drzewo, kamień i t.d. te odkształcenia są bardzo małe i zwykle je pomijamy i uważamy, że ciało wcale nie ulega odkształceniu. Takie ciała, w których nie zachodzi odkształcenie pod działaniem sił nazywają się sztywnemi.

Kurs mechaniki będzie dotyczył głównie ciał sztywnych. Ale należy pamiętać, że ciało sztywne jest tylko abstrakcją i że pomijając odkształcenie, nie pomijamy jakiejś okoliczności drugorzędnej, lecz zasadniczą właściwość ciała. Spotkamy się w przyszłości z zagadnieniami takiemi, gdzie pomijać odkształcenia nie będzie wolno.

Tymczasem przyjmujemy jednak ciała za sztywne i możemy powiedzieć, że siła, działające na ciało sztywne, jest wektorem, związanym z prostą. Jest to właśnie zasada przenoszenia siły.

Wyciągniemy stąd pewien wniosek.

Niech będzie jakiekolwiek ciało sztywne. Poprowadźmy jakąś prostą i obierzmy na niej 2 punkty A i B . Przypuśćmy, że w tych punktach działają /na jednej prostej/ 2 siły P i Q równe i odwrotne. Siły te zrównoważą się, co wynika stąd, że siła jest wektorem związanym z prostą, więc punkt jej przyłożenia można przenieść do B bez zmiany skutku działania tej siły. A siły równe i odwrotne, mające wspólny punkt przyłożenia się równoważą, a zatem równoważą się także siły P i Q, przyłożone w A i B.

16. TRZECIA ZASADA STATYKI. Trzecim aksjomatem statyki jest zasada równoległoboku.

Przypuśćmy, na pewien punkt ciała działa pewna liczba sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Ponieważ siły są to wektory, więc możemy mówić o sumie geometrycznej lub o wektorze wypadkowym sił składowych $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots$ Przypuśćmy, że R jest tą sumą geometryczną. /Oczywiście będzie to siła wyobrażalna tylko/. Zasada równoległoboku głosi, że gdyby usunąć siły $P_1, P_2, P_3, \ldots$ a natomiast przyłożyć R, to ona wywołałaby ten sam skutek, co siły usunięte.

W przypadku szczególnym, gdy są 2 składowe, to wypadkowa stanowi przekątną równoległoboku, zbudowanego na tych składowych.

Zasada równoległoboku daje się stwierdzić doświadczalnie przy 2 składowych, gdy zaś mamy już ten dowód, to można go uogólnić dla dowolnej liczby składowych. Próbowano też drogą czysto rozumową dowieść tej zasady, ale żaden ze znanych dowodów nie jest całkowicie ścisły.

17. WARUNKI RÓWNOWAGI. Mamy jakieś małe ciało, powiedzmy punkt materjalny, dający określić swe położenie zapomocą 3 współrzędnych, tak jak punkt geometryczny. Oznaczmy to drobne ciało przez O. Przypuśćmy, że działa nań pewna liczba sił $P_1, P_2, P_3, \ldots$ Zachodzi pytanie: jakie warunki powinny być spełnione, aby ten układ sił był w równowadze. Oznaczmy wypadkową tych sił przez R. Według zasady równoległoboku wywoła ona ten sam skutek, co te wszystkie siły razem. Jeśli wypadkowa ta jest różna od zera, to ciało O nie pozostanie w spoczynku i zatem układ sił nie będzie w równowadze. Tak więc warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi sił jest, aby wypadkowa tych sił była zerem.

Nadamy teraz temu warunkowi postać analityczną. Obierzmy punkt O, na który działa układ sił $P_1, P_2, \ldots$ /typowa P /, za początek prostokątnego układu współrzędnych. Rzuty tych sił na osi x, y, z oznaczymy przez P_x, P_y, P_z, a w takim razie rzuty wypadkowej R na te osie są odpowiednio równe $\Sigma P_x, \Sigma P_y, \Sigma P_z$, a zatem sama wypadkowa R wyrazi się wzorem:

$$R = \sqrt{(\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2 + (\Sigma P_z)^2}$$

Ponieważ pod pierwiastkiem powyższego wzeru znajduje się suma trzech kwadratów, więc z tego wynika, że aby R równało się zeru, każdy z trzech składników tej sumy oddzielnie musi być równy zeru, czyli

$$\Sigma P_x = 0 \; ; \; \Sigma P_y = 0 \; ; \; \Sigma P_z = 0$$

Znaczy to, że aby układ sił był w równowadze sumy rzutów sił tego układu na 3 osie prostokątnego układu współrzędnych powinny być zerami.

Możemy twierdzenie to uogólnić w sposób następujący: Przypuśćmy, że na pewne ciało działają siły $P_1, P_2, \ldots$ i że sumy rzutów tych sił na 3 proste a, b, c, przechodzące przez punkt O i nie leżące w jednej płaszczyźnie są zerami. Dowiedziemy, że siły te są w równowadze.

Oznaczmy wypadkową sił $P_1, P_2, \ldots$ /jeśli ona istnieje/ przez R. Dowiedziemy, że

$$R = 0$$

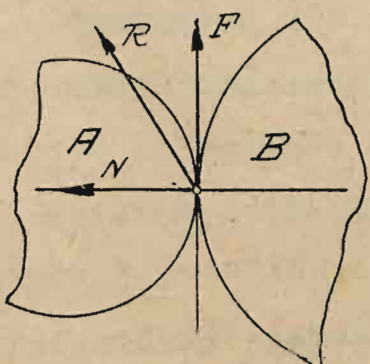
Zauważymy naprzód, że rzut wektora na prostą może być zerem w 2 przypadkach: 1/ gdy wektor jest prostopadły do tej prostej, lub

2/ gdy wektor ten jest zerem

W naszym przypadku rzuty wypadkowej R na wszystkie trzy proste a, b, c powinny być zerami, a więc tu wypadkowa powinna być prostopadła do tych wszystkich trzech prostych. Lecz to jest niemożliwe, bo nie leżą one w jednej płaszczyźnie, a więc $R = 0$, i układ $P_1, P_2, \ldots$ jest w równowadze

Ważny jest pewien przypadek szczególny powyższego twierdzenia. Przypuśćmy, że siły $P_1, P_2, \ldots$ leżą w jednej płaszczyźnie. W takim razie suma rzutów na prostą prostopadłą do tej płaszczyzny jest zerem, a zatem potrzeba jeszcze tylko aby sumy rzutów na dwie proste, położone w tej płaszczyźnie były zerami, by układ sił był w równowadze.

18. RODZAJE SIŁ Wyobraźmy sobie 2 ciała A i B /rys.7/, których powierzchnie stykają się w jednym punkcie C W takim razie każde z ciał wywiera na inne pewną siłę, która, dajmy na to, jest równa R.



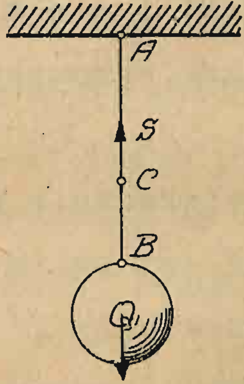
Rys. 7

Taką siłę będziemy nazywali reakcją ciała B na ciało A. Ponieważ powierzchnie ciał A i B stykają się, więc mają wspólną płaszczyznę styczną i wspólną normalną. Poprowadźmy przez reakcję R i przez wspólną normalną płaszczyznę. Ta płaszczyzna przetnie wspólną płaszczyznę styczną według prostej, stycznej do powierzchni. Rozłóżmy R na dwie składowe: 1/ w kierunku normalnej, 2/ w kierunku stycznej. Będziemy nazywali N - reakcją normalną, zaś F - reakcją styczną lub siłą tarcia. Z doświadczenia wiadomo, że im gładsza jest powierzchnia ciał, tym mniejsza jest w danych warunkach reakcja styczna. Możemy wyobrazić sobie ciała doskonale gładkie.- Wtedy siła tarcia jest zerem i pozostaje tylko reakcja normalna. W początkach będziemy zwykle rozważali takie ciała gładkie. Ale w naturze niema ciał doskonale gładkich, wszystkie są chropowate.

Nieraz wypadnie nam rozważać siły, wywierane zapomocą sznurów.

Mamy ciężki sznur, którego jeden koniec jest przymocowany do punktu nieruchomego A

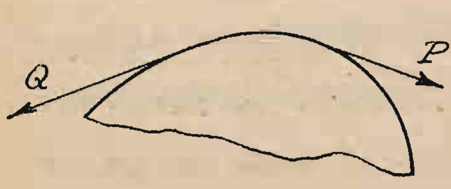
Na końcu sznura w punkcie B jest zawieszony ciężar Q , na który działa pionowo na dół siła ciężkości Q . Przypuśćmy, że sznur został przecięty w punkcie C : w takim razie



Rys. 8

dolna część sznura i ciężar spadną. Aby temu przeszkodzić należy w punkcie C przyłożyć pewną siłę S skierowaną pionowo do góry. Wtedy nie będzie spadania. Ponieważ i przed przecięciem sznura spadania nie było, więc i przed przecięciem musiała działać w punkcie C taka sama siła S , wywierana przez górną część sznura. Zasada akcji i reakcji głosi, że i dolna część sznura działa na górną z taką samą pod względem wielkości, lecz odwrotną co do kierunku siłą. Mówimy, że w punkcie C panuje naprężenie S i to naprężenie ma kierunek sznura. Oczywiście, że im bliżej A weźmiemy punkt sznura, tem większe znajdziemy naprężenie. W punkcie B naprężenie jest równe ciężarowi Q . Jeżeli sznur jest bardzo lekki w porównaniu z ciężarem Q , to możemy ciężaru jego nie rachować i wtedy /w przybliżeniu/ naprężenia we wszystkich punktach sznura będą jednakowe i równe Q . Zwykle, mówiąc o sznurze, będziemy go uważali za lekki i ciężar jego pomijali; w przyszłości jednak wprowadzimy poprawkę.

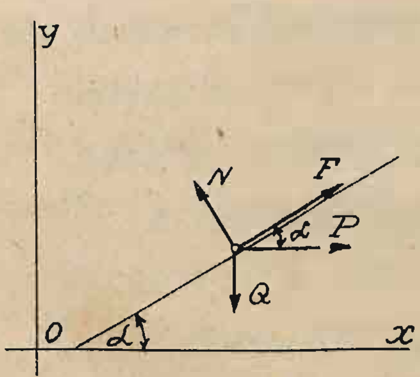
Niech będzie teraz jakaś powierzchnia materjalna i przypuśćmy, że część jej owija sznur. Przyłóżmy do końców sznura siły P i Q . Jeżeli P i Q są równe, to sznur nie będzie się przesuwał po powierzchni, bo niema żadnej racji, aby się poruszał w stronę siły P lub w stronę Q . Przypuśćmy, że siła Q cokolwiek wzrosła. Doświadczenie uczy, że i wówczas sznur nie zacznie się przesuwać,



Rys. 9.

gdyż między sznurem a powierzchnią powstanie tarcie. Różnica sił P i Q musi dojść do pewnej określonej wartości, by sznur zaczął się poruszać. Im bardziej gładkie są powierzchnie, tem mniejsza będzie ta różnica w chwili naruszenia równowagi, i gdyby powierzchnia była całkowicie gładką, to najdrobniejsza różnica sił P i Q wystarczyłaby, by sznur zaczął się poruszać.

Będziemy teraz uważali te powierzchnie za całkowicie gładkie, a zatem musimy uważać, że we wszystkich punktach lekkiego sznura, spoczywającego na takiej powierzchni, panują naprężenia jednakowe.



Rys. 10.

19. PRZYKŁAD. Wyobraźmy sobie płaszczyznę, tworzącą z poziomem kąt α. Jest to t.zw. równia pochyła. Równia ta nie jest gładka i może wywierać pewną reakcję styczną na ciało o ciężarze Q, które leży na niej.

Przypuśćmy, że na ciało działa pozioma siła P i że zostaje ono w równowadze. Chodzi o wyznaczenie reakcyi płaszczyzny na ciało. Reakcja ta rozkłada się na normalną N i styczną /siła tarcia/ F. A więc na ciało działają 4 siły: Q, P, F i N, z których

2 ostatnie są nieznane, i ciało jest w równowadze. Z tego wynika, że sumy rzutów tych sił na jakimkolwiek kierunku są zerami, przytem wystarcza by sumy tych rzutów na dwie osie były zerami, bo mamy do czynienia z układem płaskim. Najdogodniej jest obrać prostokątny układ współrzędnych, za oś x obierzmy kierunek poziomy, a w takim razie oś y będzie miała kierunek pionowy. Wyznaczmy sumę rzutów sił Q, P, F i N na oś x. Siła Q jest prostopadła do x, a więc rzut Q na tę oś jest zerem. Siła P jest równoległa do osi x, a więc rzut P na tę oś jest równy samej sile P. Siła F tworzy z osią x kąt α, a więc rzut F na tę oś jest równy $F\cos\alpha$ /kierunek dodatni, więc znak "plus"/.

Siła N wreszcie tworzy z poziomem kąt $90-\alpha$, a więc rzut N na oś x jest równy $-N\sin\alpha$ /kierunek ujemny, więc znak "minus"/. Więc suma rzutów wszystkich sił na oś x wynosi:

$$P + F\cos\alpha - N\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

Wyznaczmy podobnie sumę rzutów sił Q, P, F i N na oś y. Q ma kierunek ujemny na osi

y i jest do niej równoległa, a więc rzut na oś y jest równy $-Q$. Siła P jest prostopadła do osi y, a więc rzut jej na tę oś jest zerem. Siła F tworzy z osią y kąt, spełniający α do 90° i rzut jej ma kierunek dodatni, więc rzut ten jest równy $F\sin\alpha$. Siła N wreszcie tworzy z pionem kąt α, a więc rzut N na oś y jest równy $N\cos\alpha$ /kierunek dodatni/. Więc suma rzutów wszystkich sił na oś y wynosi:

$$-Q + F\sin\alpha + N\cos\alpha = 0 \qquad (2)$$

Otrzymaliśmy więc 2 równania /1/ i /2/, z dwiema niewiadomemi / F i N /. Łatwo je rozwiązać i znaleźć F i N.

U w a g a . Kierunki osi, na które bierze się rzuty sił, są zupełnie dowolne, ale pewne kierunki są dogodniejsze od innych. W danym np. przykładzie takimi dogodniejszymi kierunkami są kierunki niewiadomych reakcji normalnej i stycznej. Gdy weźmiemy rzuty na te kierunki, to otrzymamy równania, z których wartości niewiadomych otrzyma się bezpośrednio.

Otóż suma rzutów sił Q, P, N i F na oś x /w kierunku F / wynosi:

$$F + P\cos\alpha - Q\sin\alpha = 0$$

suma zaś rzutów tych sił na oś y /w kierunku N/ jest równa

$$N - P\sin\alpha - Q\cos\alpha = 0$$

Stąd otrzymujemy:

$$F = Q\sin\alpha - P\cos\alpha \qquad (3)$$

oraz:

$$N = P\sin\alpha + Q\cos\alpha \qquad (4)$$

Reakcja całkowita jest wypadkową tych 2 sił.

Jeśli równia jest całkowicie gładka, to reakcja styczna F jest zerem. Wtedy napiszemy:

$Q\sin\alpha - P\cos\alpha = 0$ skąd $P = Q\,tg\alpha$

Podstawmy tę wartość w /4/. Otrzymamy:

$$N = \frac{Q\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + Q\cos\alpha = \frac{Q}{\cos\alpha}$$

co można łatwo otrzymać bezpośrednio.

R O Z D Z I A Ł II.

O SIŁACH RÓWNOLEGŁYCH.

20. WYPADKOWA SIŁ RÓWNOLEGŁYCH. Niech będą dwie siły równoległe P_1 i P_2, zwrócone w tę samą stronę i mające punkty przyłożenia w A_1 i A_2. Dowiedziemy, że siły te można zastąpić jedną, im