

TREŚĆ: Prof. Dr. K. Weigel: Triangulacja bez pomiarów kątowych. — Inż. M. Bessağa: Zastosowanie zasady Castigliana do obliczania ram wieloprzęsłowych. — Inż. W. Olszak: Żelazne ścianki szczelne. — Wiadomości z literatury technicznej. — Nekrologja. — Biblijografja. — Zebrania i odczyty w Towarzystwie. — Sprawy Towarzystwa.

Dr. K. Weigel

Profesor Politechniki Lwowskiej.

## Triangulacja bez pomiarów kątowych.

### I. Uwagi wstępne.

Zasadę triangulacji bez pomiarów kątowych poruszano niejednokrotnie w literaturze geodezyjnej<sup>1)</sup>. Wszystkie jednak prace odnoszących autorów, odnoszą się do sieci triangulacyjnych płaskich, zakładanych na niewielkich obszarach, lub nawet do systemów linii pomiarowych; natomiast — o ile mi wiadomo — nikt nie zastanawiał się nad możliwością zastosowania tego sposobu do sieci I-rzędnych, względnie sieci geodezyjno-astroonomicznych.

Postawienie kwestji w sposób ostatnio podany ma jednak znaczenie zasadnicze, polegające nie tyle na uogólnieniu odpowiednich wzorów płaskich na sferyczne, czy też sferoidalne, (co ma znaczenie drugorzędne), ile na ustaleniu odpowiedniego postępowania przy pomiarze sieci I-rzędnych (bez pomiarów kątowych) i wykazaniu, dla jakich warunków metoda nowa będzie korzystniejszą od dotychczasowej.

Główną przyczyną, dla której nie zastanawiano się dotychczas nad pomiarem boków sieci pierwszorzędnych z wyjątkiem przypadku poligonów, które jednak nie tworzą sieci triangulacyjnych tylko je zastępują, jest fakt, że dopiero od niedawnego czasu zaczęto stosować na większą skalę pomiary długości drutami inwarowymi (metoda prof. Jäderina). Dziś jednak, kiedy sposób ten znalazł w świecie powszechne uznanie, należy zbadać, czy nie byłoby korzystniej przy sieciach I-rzędnych zakładać trójkąty o bokach większych, niż zazwyczaj dotychczas, których odcinki można by mierzyć pośrednio przy pomocy specjalnie w tym celu założonych stosunkowo dość krótkich baz.

Odpowiedź na to pytanie może nastąpić dopiero po dokładnym zbadaniu prawa przenoszenia się błędów w jednym i drugim przypadku.

### II. Błędy pomiaru bazy i jej rozwinięcia.

Przedewszystkiem należy zaznaczyć, że — jak to wykazał generał G. Perrier<sup>2)</sup> — na dokładność boku  $B$  sieci triangulacyjnej, rozwiniętego z podstawy (bazy)  $b$ , wpływa przy dzisiejszych metodach pomiarowych w nieproporcjonalnie większej mierze błąd rozwinięcia czyli sieci podstawowej, niż błąd pomiaru bazy.

Położmy:  $B = \lambda \cdot b$ , . . . . . 1)

wówczas kwadrat śr. błędu  $\mu_B$  boku  $B$  jest określony wzorem:  $\mu_B^2 = \lambda^2 \mu_b^2 + b^2 \mu_\lambda^2$ , . . . . . 2)

a kwadrat błędu śr. względnego:

$$\frac{\mu_B^2}{B^2} = \frac{\lambda^2}{B^2} \mu_b^2 + \frac{b^2}{B^2} \mu_\lambda^2, . . . . . 3)$$

przyczem  $\mu_b$  i  $\mu_\lambda$  są błędy śr. podstawy  $b$  i rozwinięcia jej  $\lambda$ .

Wstawiając z wzoru (1) wartości do (3)-go, otrzymujemy dalej:

$$\frac{\mu_B^2}{B^2} = \frac{\mu_b^2}{b^2} + \frac{\mu_\lambda^2}{\lambda^2} . . . . . 4)$$

Kwadrat względnego błędu śr. boku  $B$  jest równy sumie kwadratów względnych błędów śr. podstawy  $b$  i rozwinięcia  $\lambda$ .

Kładąc stosunek błędów śr. względnych:

$$\frac{\mu_b}{b} : \frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \operatorname{tg} \nu, . . . . . 5)$$

otrzymujemy po wyznaczeniu kąta  $\nu$  współczynniki:  $\sin \nu$  i  $\cos \nu$ , które służą do obliczenia błędu względnego boku  $B$ :

$$\frac{\mu_B}{B} = \frac{\mu_b}{b \sin \nu} = \frac{\mu_\lambda}{\lambda \cos \nu}; . . . . . 6)$$

jeśli zatem błędy względne podstawy  $b$  i jej rozwinięcia  $\lambda$  są:  $\frac{1}{M}$  i  $\frac{1}{N}$ , błąd względny boku  $B$  jest:

$$\frac{1}{M \sin \nu} = \frac{1}{N \cos \nu} . . . . . 7)$$

Zarazem podają nam  $\operatorname{cosec} \nu$  i  $\operatorname{sec} \nu$  stosunki błędów względnych boku  $B$  do błędów względnych podstawy  $b$  względnie rozwinięcia  $\lambda$ , lub co wychodzi na jedno stopień zmniejszenia się dokładności pomiarowej z powodu rozwinięcia podstawy  $b$  na bok  $B$ .

Związków (5), (6) i (7) nie podano jednak w celu ułatwienia obliczania błędów względnych boku  $B$  (choć spełniają one ubocznie i to zadanie), lecz dla lepszego oświetlenia omawianej sprawy. Jest bowiem rzeczą jasną, że znaczenie miarodajne ma w tym przypadku wielkość  $\operatorname{tg} \nu$  i że najkorzystniejsze warunki rozwinięcia są dla  $\operatorname{tg} \nu = 1$ .

W praktyce jest dokładność pomiaru podstawy z reguły znacznie większa, niż dokładność jej rozwinięcia. Ma to swe uzasadnienie w tem, że — o ile dokładność podstawy można łatwo powiększyć przez wielokrotność jej pomiaru — dokładność jej rozwinięcia zależy nie tylko od dokładności pomiaru kątów (i to w różnym stopniu dla każdego kąta) sieci podstawowej, ale także od jej kształtu i stosunku  $B : b$ , co powoduje, że przy niezbyt korzystnych warunkach trzeba by wykonać bardzo wielką ilość pomiarów kątowych, (aby powiększyć wagi kątów). O ile jednak kąt pewien spostrzegano  $n$  razy, można przyjąć dla — praktycznie biorąc — niewielkiej liczby  $n$ , że waga spostrzeganego kąta jest równa liczbie  $n$ ; natomiast, jeśli  $n$  jest tak wielką liczbą, że średni błąd średniej arytmetycznej (z owych  $n$  spostrzeżeń) jest przypuszczalnie mniejszy od wpływu błędów systematycznych (praktycznie nieuniknionych), waga kąta nie dosięga liczby  $n$ , a przyjęcie jej jako takiej odchyła się wraz z wzrastającą liczbą  $n$  coraz bardziej od właściwej wagi, tak że nadmierne powiększenie spostrzeżeń staje się bezcelowem (gdyż praktycznie waga nie wzrasta prawie zupełnie przy powiększaniu ilości spostrzeżeń).

<sup>1)</sup> I. I. Vorländer: „Ausgleichung der Fehler unmittelbar gemessener Längen in einfachen Linienverbindungen“ Zeitschr. f. Vermessungsw. 1873, str. 145; Otto Koll: „Die Theorie der Beobachtungsfehler u. d. Methode d. kl. Qu. Berlin 1893, str. 260; L. Krüger: „Bedingungsgleichungen für Liniennetze u. f. Rückwärtseinschnitte“, Potsdam, 1908; R. Schumann: „Zur Ausgleichung von Liniennetzen“, Mit. a. d. Markscheidewesen N. F. Heft 11, 1909, str. 11; E. Hammer: „Zur Ausgleichung von Streckennetzen“, Z. f. V. 1911, str. 517.

<sup>2)</sup> Bulletin géodésique (Union Géodésique et Géophysique Intern.) 1928 Nr. 17, str. 62 i nast. „Propositions de M. le Général Perrier pour les bases et les triangulations de 1-er ordre“.

W ostatnio zacytowanej pracy przyjął generał Perrier jako względny błąd rozwinięcia 200 jednostek na 6 miejscu logarytmicznym, wychodząc z założenia, że:

$$\frac{\mu_2}{\lambda} = \frac{1}{x} = \frac{d \log \text{nat } x}{dx} = \frac{200 \cdot 10^{-8}}{0.434294...} \quad 8)$$

I

Tabela dla wartości $\text{tg } \nu = \frac{\sin \nu}{\cos \nu}$		$\frac{\mu_2}{\lambda}$					
		1 200000	1 250000	1 300000	1 350000	1 400000	
$\frac{\mu_b}{b}$	1 500000	0.40 = $\frac{0.3715}{0.9287}$	0.50 = $\frac{0.4472}{0.8944}$	0.60 = $\frac{0.5145}{0.8575}$	0.70 = $\frac{0.5785}{0.8192}$	0.80 = $\frac{0.6247}{0.7808}$	a)
	1 750000	0.26 = $\frac{0.2577}{0.9662}$	0.33 = $\frac{0.3162}{0.9487}$	0.40 = $\frac{0.3715}{0.9287}$	0.46 = $\frac{0.4229}{0.9062}$	0.53 = $\frac{0.4706}{0.8823}$	b)
	1 1000000	0.20 = $\frac{0.1961}{0.9806}$	0.25 = $\frac{0.2425}{0.9702}$	0.30 = $\frac{0.2874}{0.9578}$	0.35 = $\frac{0.3303}{0.9438}$	0.40 = $\frac{0.3714}{0.9285}$	c)
	1 1250000	0.16 = $\frac{0.1579}{0.9875}$	0.20 = $\frac{0.1961}{0.9806}$	0.24 = $\frac{0.2334}{0.9724}$	0.28 = $\frac{0.2696}{0.9630}$	0.32 = $\frac{0.3047}{0.9524}$	d)
	1 1500000	0.13 = $\frac{0.1321}{0.9912}$	0.16 = $\frac{0.1643}{0.9864}$	0.20 = $\frac{0.1961}{0.9806}$	0.23 = $\frac{0.2272}{0.9738}$	0.26 = $\frac{0.2577}{0.9662}$	e)
		1)	2)	3)	4)	5)	

II

Tabela dla wartości $\frac{\mu_B}{B}$ i wzrostu dokł. w procentach		$\frac{\mu_2}{\lambda}$									
		1 200000	% 25	1 250000	% 50 [20%]	1 300000	% 75 [16.6]	1 350000	% 100 [14.3]	1 400000	
$\frac{\mu_b}{b}$	1 500000	1 186000	20.4	1 224000	38.5 [15.0]	1 257000	54.4 [11.5]	1 287000	68.2 [8.9]	1 312000	a)
	50% 1 750000	4.0% 1 198000	22.7	6.1% 1 237000	44.2 [17.5]	8.3% 1 279000	64.1 [13.8]	10.6% 1 317000	84.3 [11.8]	13.0% 1 353000	b)
	100% (33.3) 1 1000000	5.8% (1.5) 1 196000	23.7	8.5% (2.3) 1 243000	46.6 [18.5]	11.7% (3.2) 1 287000	68.4 [14.9]	15.2% (4.1) 1 330000	89.4 [12.4]	18.9% (5.2) 1 371000	c)
	150% (25.0) 1 1250000	6.3% (0.7) 1 197000	24.1	9.6% (1.1) 1 246000	47.8 [19.0]	13.4% (1.5) 1 292000	70.7 [15.5]	17.6% (2.0) 1 337000	92.3 [13.0]	21.9% (2.5) 1 381000	d)
	200% (20.0) 1 1500000	6.7% (0.4) 1 198000	24.4	10.3% (0.5) 1 246000	48.4 [19.4]	14.0% (0.7) 1 294000	71.9 [15.9]	18.9% (1.0) 1 341000	95.1 [13.4]	23.8% (1.4) 1 386000	e)
		1)	2)	3)	4)	5)					

Uwaga. Ze względu na zaokrąglenia poczynione przy obliczaniu  $\frac{\mu_B}{B}$  rachowano przyrosty dokładności boku B w procentach wedle wzorów:  $100 \frac{\cos \nu_{1,b} - \cos \nu_{1,a}}{\cos \nu_{1,a}}$ ,  $100 \frac{\cos \nu_{1,c} - \cos \nu_{1,a}}{\cos \nu_{1,a}}$  i t. d. przy wzrastającej dokładności  $\frac{\mu_b}{b}$ ; zaś wedle wzorów:

$$100 \frac{\sin \nu_{2,a} - \sin \nu_{1,a}}{\sin \nu_{1,a}}, 100 \frac{\sin \nu_{3,a} - \sin \nu_{1,a}}{\sin \nu_{1,a}} \text{ i t. d. przy wzrastającej dokładności } \frac{\mu_2}{\lambda}.$$

zatem  $x=217000$  (zaokr.), czyli błąd względny rozwinięcia wynosi w przybliżeniu 1 : 217000.

Dla lepszego uwidocznienia zależności błędu wzgl. boku sieci  $B$  od błędów wzgl. podstawy i jej rozwinięcia podaję dwie tabele, uwzględniając pięć wartości błędów wzgl. podstawy:  $\frac{1}{500000}$ ,  $\frac{1}{750000}$ ,  $\frac{1}{1000000}$ ,  $\frac{1}{1250000}$  i  $\frac{1}{1500000}$ , oraz pięć wartości błędów wzgl. jej rozwinięcia:  $\frac{1}{200000}$ ,  $\frac{1}{250000}$ ,  $\frac{1}{300000}$ ,  $\frac{1}{350000}$  i  $\frac{1}{400000}$ , (przyczem  $\frac{1}{300000}$  można uważać za przeciętną wartość względnych błędów lepszych rozwinięć podstawy, stosowanych w praktyce — przy stosunku  $\frac{B}{b}$  około 4 —).

Tablica I podaje nam wartości  $\operatorname{tg} \nu$  oraz  $\sin \nu$  i  $\cos \nu$  dla różnych  $\frac{\mu_b}{b}$  i  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda}$ , tablica II odpowiadające im wartości  $\frac{\mu_B}{B}$ , oraz przyrosty dokładności boku  $B$  w % przy zmianie  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda}$  i  $\frac{\mu_b}{b}$ . Cyfry w [ ] i ( ) są to przyrosty dokładności względem bezpośrednio poprzedzającej dokładności.

Z wyników przytoczonych na tabeli II, (a mających zazwyczaj miejsce w praktyce) widać, że przy małych dokładnościach (wzgl.) rozwinięcia podstawy podniesienie dokładności (wzgl.) pomiaru podstawy wpływa bardzo nieznacznie na dokładność (wzgl.) boku sieci tr.  $B$ ; i tak dla  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{200000}$  i  $\frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{500000}$  otrzymujemy  $\frac{\mu_B}{B} = \frac{1}{186000}$ , zaś przy zmniejszeniu się błędu  $\frac{\mu_b}{b}$  do  $\frac{1}{1500000}$  (a więc o 200%), maleje błąd  $\frac{\mu_B}{B}$  do  $\frac{1}{198000}$ , a więc zaledwie o 6.7%. Natomiast przy znacznych dokładnościach rozwinięcia podstawy t. j. małych wartościach  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda}$  warto jest stosować wielkie dokładności pomiaru podstawy t. j. małe  $\frac{\mu_b}{b}$ , gdyż np. dla  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{400000}$  i  $\frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{500000}$  mamy  $\frac{\mu_B}{B} = \frac{1}{312000}$ , zaś przy zmniejszeniu się  $\frac{\mu_b}{b}$  do  $\frac{1}{1500000}$  maleje błąd  $\frac{\mu_B}{B}$  do  $\frac{1}{386000}$ , a zatem o 23.8%.

Zwiększanie dokładności rozwinięcia podstawy jest zawsze korzystne tak przy małych, jak też (i to w większym stopniu) znacznych dokładnościach pomiaru podstawy, jak to widać z cyfr przytoczonych w tablicy. I tak dla  $\frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{500000}$  i  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{200000}$  mamy  $\frac{\mu_B}{B} = \frac{1}{186000}$ , zaś przy zmianie  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda}$  na  $\frac{1}{400000}$  zmniejsza się błąd  $\frac{\mu_B}{B}$  do wielkości  $\frac{1}{312000}$ , a zatem o 68.2%, ale jeszcze korzystniej przedstawia się sprawa przy  $\frac{\mu_b}{b} = \frac{1}{1500000}$ , wtedy zmiana  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{200000}$  na  $\frac{\mu_\lambda}{\lambda} = \frac{1}{400000}$ , powoduje zmianę z  $\frac{\mu_B}{B} = \frac{1}{198000}$  na  $\frac{\mu_B}{B} = \frac{1}{386000}$ ; względny błąd boku  $B$  zmniejsza się zatem aż o 95.1%.

### III. Prawo przenoszenia się błędów w łańcuchach trójkątów.

Zajmijmy się z kolei sprawą przenoszenia się błędów w łańcuchach trójkątów (stosowanych w sieciach wieńcowych i łącznych).

Weźmy na uwagę nasamprzód łańcuch trójkątów równobocznych, a zatem najkorzystniejszy. Wedle uwag zawartych w znanym dziele prof. W. Jordana<sup>3)</sup> wchodzi w tym przypadku w grę przy zastosowaniu pomiarów kątowych następujące formuły (pomijające wpływ błędu boku  $B$ ):

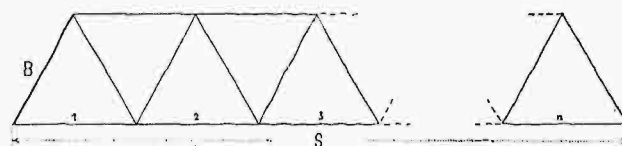
$$\begin{aligned} \mu'_s &= \frac{\mu}{\rho} B \operatorname{ctg} 60^\circ \sqrt{\frac{4n^3 - 3n^2 + 5n}{3}} = \\ &= \frac{\mu}{3\rho} B \sqrt{4n^3 - 3n^2 + 5n}, \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

$$\mu'_s = \frac{\mu}{\rho} B \operatorname{ctg} 60^\circ \sqrt{\frac{p^3 + 5p}{3}} = \frac{\mu}{3\rho} B \sqrt{p^3 + 5p}, (10)$$

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \frac{\mu}{\rho} B \operatorname{ctg} 60^\circ \sqrt{\frac{p^3 + 3p^2 - 4p}{3}} = \\ &= \frac{\mu}{3\rho} B \sqrt{p^3 + 3p^2 - 4p}, \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

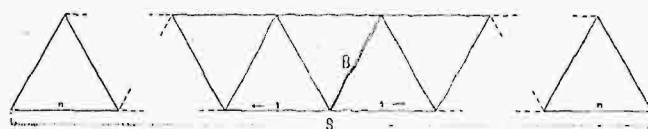
przyczem  $\mu$  oznacza błąd średni kąta, zaś  $\rho = 206264.8\dots$

Formuła (9) odnosi się do przypadku, gdy podstawa łańcucha, t. j. bok  $B$ , znajduje się na jednym z końców łańcucha poprzecznie do jego kierunku, a  $S = nB$  (patrz rys. 1).



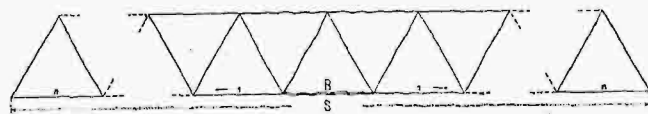
Rys. 1.

Formuła (10) wyznacza nam błąd średni długości  $S = p \cdot B$ , różniąc się tem od przypadku poprzedniego, że bok  $B$  znajduje się (poprzecznie) pośrodku łańcucha trójkątów (i jest rozwinięty  $n$  razy w obu kierunkach) (patrz rys. 2).



Rys. 2.

Wreszcie formuła (11) odnosi się do przypadku, gdy bok  $B$  znajduje się pośrodku łańcucha, a położenie jego jest zgodne z kierunkiem łańcucha; zarazem jest  $S = p \cdot B$ , a łańcuch rozwinięty poza bokiem  $B$  po  $n$  razy w obu kierunkach (patrz rys. 3).



Rys. 3.

W zacytowanym poprzednio dziele Jordana wprowadzono w miejsce wzoru (9), oraz (10) i (11) dwa wzory uproszczone (przy pominięciu potęg drugich i pierwszych  $n$  względnie  $p$ ):

$$\mu'_s = \frac{2\mu}{3\rho} B n \sqrt{n} \quad [\text{w miejsce wzoru (9)}] \quad \dots \quad (12)$$

<sup>3)</sup> „Handbuch der Vermessungskunde“ Jordan-Reinherz-Eggert tom III (1916) str. 150 i dalsze.

$$\mu'_s = \frac{\mu}{3\varrho} B p \sqrt{p} \quad [\text{w miejsce wzorów (10) i (11)}] \quad (13)$$

Z dwu ostatnich wzorów łatwo jest urobić wzory na błędy względne długości  $S$  (ze względu, że  $S=Bn$ , względnie  $S=Bp$ ), które podano u Jordana we formie:

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{2\mu}{3\varrho} \sqrt{n} \quad \text{i} \quad \dots \quad (14)$$

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{\mu}{3\varrho} \sqrt{p}; \quad \dots \quad (15)$$

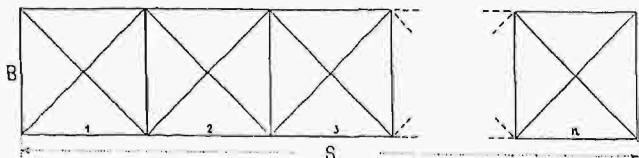
wzory te przekształcimy dla naszych celów następująco:

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{\mu}{309400} \sqrt{n} \quad \dots \quad (14^*)$$

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{\mu}{618800} \sqrt{p}. \quad \dots \quad (15^*)$$

Wzory te odnoszą się do przypadków, w których mierzono niezależne kąty (nie kierunki), ze względu jednak, że wprowadziliśmy w miejsce wzorów ściślejszych przybliżone, możemy sześć ostatnich wzorów używać i w przypadku pomiarów kierunkowych wprowadzając w miejsce błędu śr.  $\mu$  kąta, błąd śr. kierunku pomnożony przez  $\sqrt{2}$ .

Ponieważ celem zwiększenia dokładności łańcuchów trójkątów wprowadza się często pomiary kierun-



Rys. 4.

ków przekątni, łączących punkt  $P_i$  z punktem  $P_{i+3}$ , t. zw. łańcuchy podwójne, przeprowadziłem (podobnie jak w dziele Jordana) studjum nad błędem długości  $S$ , powstałej w łańcuchu podwójnym, składającym się z kwadratów o podstawie  $B$  jak to uwidoczniło na rys. 4.

Współczynniki równań warunkowych przedstawiają się w tym przypadku dla pomiarów kątów niezależnych następująco:

		1	2	3	4	5	6	7	8			
		9	10	11	12	13	14	15	16			
		17	18	19	20	21	22	23	24			
		25	26	27	28	29	30	31	32			
		:	:	:	:	:	:	:	:			
a	e	i	n	..	1	.	.	-1	-1	.	.	1
b	f	k	o	..	.	1	1	.	.	-1	-1	.
c	g	l	p	..	1	1	1	1	1	1	1	1
d	h	m	r	..	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

(warunki te są funkcjami wolnymi).

$$B_1 = B \frac{\sin(2)}{\sin(5)}, \quad B_2 = B \frac{\sin(1) \sin\{(3)+(4)\} \sin(10)}{\sin(5) \sin\{(7)+(8)\} \sin(13)}$$

$$B_3 = B \frac{\sin(1) \sin\{(3)+(4)\} \sin(9) \sin\{(11)+(12)\} \sin(18)}{\sin(5) \sin\{(7)+(8)\} \sin\{(15)+(16)\} \sin(13) \sin(21)}$$

$$[aa] = [bb] = [ee] = [ff] = [ii] = [kk] \text{ i t. d.} = 4,$$

$$[cc] = [dd] = [gg] = [hh] = [ll] = [mm] \text{ i t. d.} = 8.$$

Pochodne $F$	
względem	
$B_1$	$F_2 = B_1, F_5 = -B_1$
$B_1 + B_2$	$F_1 = B_2, F_2 = B_1, F_5 = -(B_1 + B_2), F_{10} = B_2, F_{13} = -B_3$
$B_1 + B_2 + B_3$	$F_1 = B_2 + B_3, F_1 = B_1, F_5 = -(B_1 + B_2 + B_3), F_9 = B_3, F_{10} = B_2, F_{13} = -(B_2 + B_3), F_{18} = B_3, F_{21} = -B_3$
$B_1 + B_2 + B_3 + B_4$	$F_1 = B_2 + B_3 + B_4, F_2 = B_1, F_5 = -(B_1 + B_2 + B_3 + B_4), F_9 = B_3 + B_4, F_{10} = B_2, F_{18} = -(B_2 + B_3 + B_4), F_{17} = B_4, F_{18} = B_3, F_{21} = -(B_3 + B_4), F_{26} = B_4, F_{29} = -B_4$
i t. d.	... i t. d.

Kładąc  $B=B_1=B_2=\dots=B_n$ , otrzymamy  $[FF]$  dla  $S=nB$

$$I_n = [FF] = 2B^2 \left\{ n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 1 - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} \right\} = 2B^2 \left\{ \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{n^2 - n}{2} \right\} = \frac{2B^2}{3} (n^3 + 2n).$$

Wyrazy dla wyznaczenia błędu średniego:

długości	$[aF]$	$[bF]$	$[dF]$	$[eF]$	$[fF]$	$[hF]$	$[iF]$	$[kF]$	$[mF]$	$[nF]$	$[oF]$	$[rF]$
$B_1$	$B_1$	$B_1$	$2B_1$	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$B_1 + B_2$	$B_1 + 2B_2$	$B_1$	$2B_1$	$B_2$	$B_2$	$2B_2$	.	.	.	.	.	.
$B_1 + B_2 + B_3$	$B_1 + 2(B_2 + B_3)$	$B_1$	$2B_1$	$B_2 + 2B_3$	$B_2$	$2B_2$	$B_3$	$B_3$	$2B_3$	.	.	.
$B_1 + B_2 + B_3 + B_4$	$B_1 + 2B_2 + 2B_3 + 2B_4$	$B_1$	$2B_1$	$B_2 + 2B_3 + 2B_4$	$B_2$	$2B_2$	$B_3 + 2B_4$	$B_3$	$2B_3$	$B_4$	$B_4$	$2B_4$
i t. d.												

Kładąc  $B=B_1=B_2=\dots=B_n$  otrzymamy dla wyznaczenia błędu średniego długości  $S=B_1+B_2+\dots+B_n$  następujące wyrażenia:

$$\frac{[aF]^2}{[aa]} = \frac{(2n-1)^2}{4} B^2, \quad \frac{[bF]^2}{[bb]} = \frac{B^2}{4}, \quad \frac{[dF]^2}{[dd]} = \frac{4}{8} B^2,$$

$$\frac{[eF]^2}{[ee]} = \frac{(2n-3)^2}{4} B^2, \quad \frac{[fF]^2}{[ff]} = \frac{B^2}{4}, \quad \frac{[hF]^2}{[hh]} = \frac{4}{8} B^2,$$

$$\frac{[iF]^2}{[ii]} = \frac{(2n-5)^2}{4} B^2, \quad \frac{[kF]^2}{[kk]} = \frac{B^2}{4}, \quad \frac{[mF]^2}{[mm]} = \frac{4}{8} B^2,$$

$$\frac{1}{4} B^2, \quad \frac{B^2}{4}, \quad \frac{4}{8} B^2.$$



$$II_n = \Sigma = \left\{ \frac{(2n-1)^2 + (2n-3)^2 + \dots + 1^2}{4} + \frac{3}{4}n \right\} B^2 =$$

$$= \left\{ \frac{4n^3 - n}{12} + \frac{3}{4}n \right\} B^2 = \frac{n^3 + 2n}{3} B^2.$$

Zatem kwadrat błędu średniego długości  $S$  (powstałego z rozwinięcia):

$$\mu'^2_s = \frac{\mu^2}{\rho^2} (I_n - II_n) = \frac{\mu^2 B^2}{\rho^2} \left\{ \frac{2(n^3 + 2n) - (n^3 + 2n)}{3} \right\} =$$

$$= \frac{\mu^2 B^2}{3\rho^2} (n^3 + 2n), \dots (16)$$

względnie:  $\mu'_s = \frac{\mu B}{\rho\sqrt{3}} \sqrt{n^3 + 2n}, \dots (17)$

Wprowadzając uproszczenie jak we wzorach (12) i (13) otrzymamy:

$$\mu'_s = \frac{\mu B n}{\rho\sqrt{3}} \sqrt{n}, \dots (18)$$

zaś błąd względny wobec  $S = B \cdot n$ :

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{\mu}{\rho\sqrt{3}} \sqrt{\frac{n}{n^3}} = \frac{\mu\sqrt{n}}{357250}, \dots (19)$$

O ile bok  $B$  znajduje się pośrodku łańcucha w równej odległości od obu jego końców, to przy zachowaniu resztą tych samych warunków co poprzednio, otrzymamy wobec tego, że  $S = 2nB$ , a  $2n = p$  [jak we wzorach (10) i (11)]:

$$\frac{\mu'_s}{S} = \frac{\mu}{2\rho\sqrt{3}} \sqrt{p} = \frac{\mu\sqrt{p}}{714500}, \dots (20)$$

Porównując wzory (14) z (19) i (15) z (20) widzimy, że pomiary kierunków wzdłuż przekątnej powiększają względną dokładność długości  $S$  tylko bardzo nieznacznie<sup>4)</sup>, bo zaledwie o około  $\frac{100(2-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\% = 15,5\%$ .

<sup>4)</sup> Licząc wedle wzoru dokładnego dopiero dla  $n > 3$ .

W ten sposób uzyskane wyniki odnoszą się jednak tylko do błędu śr.  $\mu'_s$  rozwinięcia boku  $B$ ; całkowity błąd średni długości  $S$   $\mu_s$  otrzymamy ze związku:

$$\mu_s^2 = n^2 \mu_B^2 + \mu'^2_s, \dots (21)$$

względnie:  $\mu_s^2 = p^2 \mu_B^2 + \mu'^2_s, \dots (22)$

zależnie czy  $S = nB$ , czy  $S = pB$ ; zaś kwadrat błędu względnego długości  $S$  przedstawia się w obu przypadkach:

$$\frac{\mu_s^2}{S^2} = \frac{\mu_B^2}{B^2} + \frac{\mu'^2_s}{S^2}, \dots (23)$$

Kładąc — jak poprzednio —:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\mu_B}{B} : \frac{\mu'_s}{S}, \dots (24)$$

otrzymamy analogicznie jak we wzorze (6):

$$\frac{\mu_s}{S} = \frac{\mu_B}{B \sin \psi} = \frac{\mu'_s}{S \cos \psi}, \dots (25)$$

Z uwzględnienia wzorów (6), (14) i (15) wynika, że dla łańcucha o trójkątach równobocznych:

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{\mu_b}{b \sin \nu} \cdot \frac{3\rho}{2\mu\sqrt{n}} = \sim 309400 \frac{\mu_b}{b \sin \nu \mu \sqrt{n}}, (26)$$

względnie:

$$\operatorname{tg} \psi_p = \frac{\mu_b}{b \sin \nu} \cdot \frac{3\rho}{\mu\sqrt{p}} = \sim 618800 \frac{\mu_b}{b \sin \nu \mu \sqrt{p}}; (27)$$

podobnie dostarcza nam porównanie wzorów (6), (19) i (20) w przypadku podwójnego łańcucha, składającego się z kwadratów z przekątnymi:

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{\mu_b}{b \sin \nu} \cdot \frac{\rho\sqrt{3}}{\mu\sqrt{n}} = 357260 \frac{\mu_b}{b \sin \nu \mu \sqrt{n}}, (28)$$

$$\operatorname{tg} \psi_p = \frac{\mu_b}{b \sin \nu} \cdot \frac{2\rho\sqrt{3}}{\mu\sqrt{p}} = 714520 \frac{\mu_b}{b \sin \nu \mu \sqrt{p}}. (29)$$

Po wyznaczeniu  $\operatorname{tg} \psi$  jednym z wzorów (26) do (29) oblicza się  $\frac{\mu_s}{S}$  przy pomocy wzoru (25).

(Dok. nast.).

Inż. Mieczysław Bessaga.

## Zastosowanie zasady Castigliana do obliczania ram wieloprzęśtowych.

Przedmiotem niniejszej pracy jest zastosowanie metody, opartej na zasadzie Castigliana. (a użytej już przezemnie do obliczania reakcyj belek ciągłych<sup>1)</sup>) w celu wyznaczenia poziomych i pionowych reakcyj oraz momentów podporowych w ustrojach ramowych wieloprzęśtowych o nieruchomych podporach.

Metoda ta polega na utworzeniu:

1) funkcji  $U_0 = \frac{1}{2} \int_{(n)} \frac{M^2}{EI} ds,$

przedstawiającej pracę odkształcenia całego układu, przy uwzględnieniu samego tylko zginania, a następnie:

2) funkcji pomocniczej  $U = U_0 + t_1 \varphi_1 + t_2 \varphi_2 + t_3 \varphi_3$ , w której  $t_1, t_2, t_3$  są niewiadomymi współczynnikami, zaś  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  stanowią trzy zasadnicze równania równowagi układu płaskiego, wreszcie na przyrównaniu do zera pochodnych funkcji  $U$  względem poszczególnych reakcyj i momentów utwierdzenia. Otrzymujemy w ten sposób szereg równań, które wraz z ogólnymi równaniami równowagi służą dla wyznaczenia niewiadomych. Tego rodzaju postępowanie przy obliczaniu reakcyj (i momentów utwierdzenia) opiera się na zasadzie „o najmniejszości pracy odkształcenia“, która głosi, że reakcje

<sup>1)</sup> W księdze psmiątkowej ku czci prof. M. Thulliego, która ukazała się drukiem.

w układzie statycznie niewyznaczalnym są takiej wielkości, iż czynią pracę odkształcenia najmniejszą (minimum). Musimy je zatem wyznaczyć z warunku:  $U_0 = \text{minimum}$ . A że wspomniane reakcje nie są od siebie niezależne, lecz związane trzema ogólnymi równaniami równowagi:

$$(I) \quad \begin{cases} \varphi_1 \equiv \Sigma V = 0 & (\text{suma sił pionowych} = 0) \\ \varphi_2 \equiv \Sigma M = 0 & (\text{suma momentów} = 0) \\ \varphi_3 \equiv \Sigma H = 0 & (\text{suma sił poziomych} = 0) \end{cases}$$

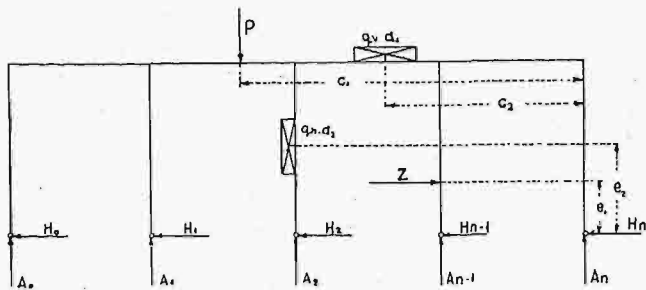
obliczenie ich — na podstawie prawideł matematyki — winno być przeprowadzone w sposób powyżej opisany, t. j. przez utworzenie funkcji pomocniczej  $U = U_0 + t_1 \varphi_1 + t_2 \varphi_2 + t_3 \varphi_3$  i przyrównanie jej pochodnych do zera.

Dla uproszczenia zagadnienia zajmować się będziemy tylko takimi ramami, których wszystkie rozpory (przęsła poziome) mają tę samą rozpiętość i ten sam stały przekrój, a zatem i moment bezwładności  $I_1$ , zaś wszystkie słupy wysokość  $h$  i moment bezwładności  $I_0$ .

### A) Ramy o słupach przegibnie u dołu umocowanych.

Rozpatrzmy najpierw takie ustroje ramowe, których wszystkie słupy są u dołu przegibnie umocowane, które nie posiadają zatem momentów utwierdzenia.

W tym wypadku zagadnienie sprowadza się zasadniczo do wyznaczenia  $2(n+1)$  reakcyj, a to poziomych  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_n$ , i pionowych  $A_0, A_1, \dots, A_n$ .



Rys. 1.

Przyrównując do zera pochodne cząstkowe funkcji  $U = U_0 + t_1 \varphi_1 + t_2 \varphi_2 + t_3 \varphi_3$  względem poszczególnych reakcyj, otrzymamy — razem z 3 równaniami równowagi — układ równań (II), złożony z  $(2n+5)$  równań linjowych, zawierający  $2n+5$  niewiadomych, a to prócz  $2n+2$  niewiadomych reakcyj jeszcze trzy wyżej wspomniane współczynniki  $t_1, t_2, t_3$ :

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{\partial U}{\partial A_0} = 0 & \frac{\partial U}{\partial A_1} = 0 & \dots & \frac{\partial U}{\partial A_n} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial H_0} = 0 & \frac{\partial U}{\partial H_1} = 0 & \dots & \frac{\partial U}{\partial H_n} = 0 \\ \varphi_1 = 0 & \varphi_2 = 0 & \varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Uwzględniając, że  $t_1 = 0$ , co wynika z równości  $\frac{\partial U}{\partial A_n} = t_1 = 0$ , dostaniemy — po odrzuceniu równania  $\varphi_1 = 0$  (mogącego służyć jedynie do wyznaczania reakcji  $A_n$ ) — układ (III) złożony z  $(2n+3)$  równań z  $(2n+3)$  niewiadomymi:  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, H_0, H_1, \dots, H_n, t_2, t_3$ :

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{a_{00}}{EI_1} \cdot l^3 \cdot A_0 + \dots + \frac{a_{0, n-1}}{EI_1} \cdot l^3 \cdot A_{n-1} + \frac{b_{00}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot H_0 + \dots + \frac{b_{0, n-1}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot A_{n-1} + n l t_2 = \psi'_{00} \\ \frac{a_{n-1, 0}}{EI_1} \cdot l^3 \cdot A_0 + \dots + \frac{a_{n-1, n-1}}{EI_1} \cdot l^3 \cdot A_{n-1} + \frac{b_{n-1, 0}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot H_0 + \dots + \frac{b_{n-1, n-1}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot H_{n-1} + 1 l t_2 = \psi_{n-1, 0}' \\ \frac{c_{00}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot A_0 + \dots + \frac{c_{0, n-1}'}{EI_1} \cdot h \cdot l^2 \cdot A_{n-1} + \left( \frac{d_{00}''}{EI_0} h^3 + \frac{d_{00}'}{EI_1} h^2 l \right) H_0 + \frac{d_{01}'}{EI_1} h^2 l H_1 + \dots + \frac{d_{0, n-1}'}{EI_1} h^2 l \cdot H_{n-1} + 1 t_2 = \psi_{01}' \\ \frac{c_{10}'}{EI_1} h \cdot l^2 \cdot A_0 + \dots + \frac{c_{1, n-1}'}{EI_1} h \cdot l^2 \cdot A_{n-1} + \frac{d_{10}'}{EI_1} h^3 l H_0 + \left( \frac{d_{11}''}{EI_0} h^3 + \frac{d_{11}'}{EI_1} h^2 l \right) \cdot H_1 + \dots + \frac{d_{1, n-1}'}{EI_1} h^2 l \cdot H_{n-1} + 1 t_2 = \psi_{11}' \\ \dots \\ 0 \cdot A_0 + \dots + 0 A_{n-1} + 0 H_0 + 0 H_1 + \dots + \frac{d_{nn}''}{EI_0} h^3 \cdot H_n + 1 t_2 = \psi_{n1}' \\ \varphi_2 \equiv A_0 n l + A_1 \cdot (n-1) l + \dots - \Sigma(Pc, q_v d c_1, Z e_1, q_h d e) = 0 \\ \varphi_3 \equiv H_0 + H_1 + \dots + H_n - \Sigma(Z, q_h \cdot d) = 0. \end{cases}$$

Dla uzyskania bardziej symetrycznej postaci równań, pomnożymy pierwszych  $(2n+1)$  równań przez  $\frac{EI_1}{l^3}$ , przedostatnie przez  $\frac{1}{l}$ , oraz wprowadzimy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \frac{EI_1}{l^2} \cdot t_2 = t_{00} & \quad \frac{EI_1}{l^2} \cdot t_3 = t_{01} \\ \frac{b_{ik}'}{l^3} \cdot h \cdot l^2 = b_{ik} & \quad \frac{c_{ik}'}{l^2} \cdot h \cdot l^2 = c_{ik} \\ \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{d_{ii}''}{l^3} h^3 + \frac{d_{ii}'}{l^3} h^2 l = d_{ii} & \quad \frac{d_{ik}'}{l^3} h^2 l = d_{ik} \end{aligned}$$

W ten sposób układ równań (III) przejdzie w układ (IV):

$$(IV) \quad \begin{cases} a_{00} A_0 + a_{01} A_1 + \dots + a_{0, n-1} A_{n-1} + b_{00} H_0 + \dots + b_{0, n-1} H_{n-1} + n t_{00} = \psi_{00} \\ a_{n-1, 0} A_0 + a_{n-1, 1} A_1 + \dots + a_{n-1, n-1} A_{n-1} + b_{n-1, 0} H_0 + \dots + b_{n-1, n-1} H_{n-1} + 1 t_{00} = \psi_{n-1, 0} \\ c_{00} A_0 + c_{01} A_1 + \dots + c_{0, n-1} A_{n-1} + d_{00} H_0 + \dots + d_{0, n-1} H_{n-1} + 1 t_{01} = \psi_{01} \\ \dots \\ c_{n-1, 0} A_0 + c_{n-1, 1} A_1 + \dots + c_{n-1, n-1} A_{n-1} + d_{n-1, 0} H_0 + d_{n-1, n-1} H_{n-1} + 1 t_{01} = \psi_{n-1, 1} \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot A_1 + \dots + 0 \cdot A_{n-1} + 0 \cdot H_0 + \dots + 0 \cdot H_{n-1} + d_{nn} H_n + 1 t_{01} = \psi_{n, 1} \\ n \cdot A_0 + (n-1) A_1 + \dots + 1 \cdot A_{n-1} + 0 \cdot H_0 + \dots + 0 \cdot H_n = \psi_2 \\ 0 \cdot A_0 + 0 \cdot A_1 + \dots + 0 \cdot A_{n-1} + 1 \cdot H_0 + \dots + 1 \cdot H_n = \psi_3. \end{cases}$$

W powyższym układzie równań  $\psi_{00}, \psi_{10}, \dots, \psi_{01}, \psi_{11}, \dots, \psi_2, \psi_3$  stanowią pewne wyrażenia, zależne tylko od ilości pręseł ramy, oraz rodzaju obciążeń zewnętrznych, a niezawierające niewiadomych reakcyj.

Współczynniki przy niewiadomych tworzą wyznacznik symetryczny  $D_{2n}$ , posiadający  $2n+3$  wierszy i tyleż kolumn. Ostatnia kolumna tego wyznacznika (i analogicznie ostatni wiersz) posiada na  $n+1$ -szym,  $n+2$ -gim ...  $2n+1$ -szym miejscu jedynki, natomiast zaś zera. Przedostatnia kolumna (i wiersz) składa się z szeregu malejącego liczb naturalnych:  $n, n-1, \dots, 2, 1$ , następnie zaś, aż do końca ze samych zer. Po odrzuceniu ostatnich 2 kolumn i wierszy pozostaje wyznacznik symetryczny  $(2n+1)$ -szego rzędu  $\bar{D}_{2n}$ , którego wyrazy, oznaczone przez:

$$\begin{matrix} a_{ik} & b_{ik} \\ c_{ik} & d_{ik} \end{matrix}$$

tworzą cztery charakterystyczne grupy (podwyznaczniki).

$$\text{Lewa górna grupa } D_n = \begin{vmatrix} a_{00} & \dots & a_{0, n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1, 0} & \dots & a_{n-1, n-1} \end{vmatrix}$$

tworzy wyznacznik symetryczny  $n$ -tego rzędu, zupełnie identyczny z „wyznacznikiem podstawowym” omówionym szczegółowo w wyżej wspomnianym moim artykule z książki pamiątkowej ku czci prof. Thulliego.

Poszczególne wyrazy wyznacznika  $D_a$  określają wzory:

$$\begin{aligned} a_{00} &= \frac{n^3}{3} & a_{ii} &= \frac{(n-i)^3}{3} \\ a_{ik} &= a_{ki} = a_{ii} + (i-k) \frac{(n-i)^2}{2} & & \text{(dla } k < i) \end{aligned}$$

$$\text{Prawa górna grupa } D_{a_k} = \begin{vmatrix} b_{00}, b_{01}, \dots, b_{0, n-1}, 0 \\ b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1, n-1}, 0 \\ \dots \\ b_{n-1, 0}, b_{n-1, 1}, \dots, b_{n-1, n-1}, 0 \end{vmatrix}$$

jest wyznacznikiem prostokątnym, posiadającym  $n$  wierszy,  $n+1$  kolumn, przy czym w ostatniej kolumnie występują same zera.

Wyrazy  $b_{ik}$  wynikają z wzorów:

$$b_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{n l} h(x-il) dx = \frac{1}{2} \gamma (n-i)^2 \quad \left( \text{gdzie } \gamma = \frac{h}{l} \right)$$

$(k_1 \leq i)$

$$b_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} h(x-il) dx = \frac{1}{2} \gamma [(n-i)^2 - (k_2-i)^2]$$

$(k_2 > i)$

Przez skreślenie ostatniej kolumny w wyznaczniku prostokątnym  $D_{ah}$  otrzymamy wyznacznik kwadratowy  $\bar{D}_{na}$  o następujących własnościach:

a) Wyrazy na głównej przekątnej

$$b_{ii} = \frac{1}{2} \gamma (n-i)^2 \quad \dots \quad (1)$$

stanowią — idąc od dołu ku górze — szereg utworzony z kwadratów kolejno po sobie następujących liczb naturalnych, pomnożonych przez stały współczynnik  $\frac{1}{2} \gamma$ .

b) Wyrazy na lewo od głównej przekątnej są równe wyrazowi na głównej przekątnej, leżącemu w tym samym wierszu.

c) Wyrazy na prawo od głównej przekątnej określa wzór:

$$b_{ik} = b_{ii} - \frac{1}{2} \gamma (k-i)^2 \quad \dots \quad (2)$$

$(k > i)$

co można przekształcić na:

$$b_{ik} = b_{kk} + \gamma (n-k)(k-i) \quad \dots \quad (3)$$

$(k > i)$

Wzór (3) wskazuje na to, że wyrazy w  $k$ -tej kolumnie, począwszy od wyrazu na głównej przekątnej, tworzą — idąc od dołu ku górze — postęp arytmetyczny, o różnicy  $\Delta = \gamma(n-k)$ , a zatem w ostatniej kolumnie różnica ta wynosi  $\gamma$ , w przedostatniej  $2\gamma$ , dalej  $3\gamma$  i t. d.

Co się tyczy lewej dolnej grupy  $D_{ah}$  wyznacznika  $\bar{D}_{2n}$ , złożonej ze współczynników  $c_{ik}$ , to po usunięciu z niej ostatniego wiersza, składającego się ze samych zer, pozostaje z niej wyznacznik kwadratowy symetryczny

$$\bar{D}_{na} = \begin{vmatrix} c_{00} & \dots & \dots & \dots & c_{0, n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1, 0} & \dots & \dots & \dots & c_{n-1, n-1} \end{vmatrix}$$

$D_{24} =$	$\frac{64}{3}$	$\frac{27}{2}$	$\frac{20}{3}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 16$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 15$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 12$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 7$	0	4	0
	$\frac{27}{2}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 9$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 9$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 8$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 5$	0	3	0
	$\frac{20}{3}$	$\frac{14}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 3$	0	2	0
	$\frac{11}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	0	1	0
	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 16$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 9$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$\frac{1}{3} \gamma^3 k + 4\gamma^2$	$3\gamma^2$	$2\gamma^2$	$\gamma^2$	0	0	1
	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 15$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 9$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$3\gamma^2$	$\frac{1}{3} \gamma^3 k + 3\gamma^2$	$2\gamma^2$	$\gamma^2$	0	0	1
	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 12$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 8$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 4$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$2\gamma^2$	$2\gamma^2$	$\frac{1}{3} \gamma^3 k + 2\gamma^2$	$\gamma^2$	0	0	1
	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 7$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 5$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 3$	$\frac{1}{2} \gamma \cdot 1$	$\gamma^2$	$\gamma^2$	$\gamma^2$	$\frac{1}{3} \gamma^3 k + \gamma^2$	0	0	1
	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3} \gamma^3 k$	0	1
	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	

Warto zauważyć, że przez skreślenie dwóch kolumn w tym wyznaczniku t. j. 1-szej i  $(n+1)$ -szej (t. j. piątej), i dwóch odpowiednich wierszy, powstanie z niego wyznacznik  $D_{2,3}$ ; postępując dalej w sposób analogiczny, otrzymamy  $D_{2,2}$ , a wreszcie  $D_{2,1}$ .

Przystępujemy z kolei do wyznaczenia prawych stron układu równań (IV) t. j. wyrażeń  $\psi$ . Rozpatrzmy tu wpływ ciężarów skupionych pionowych  $P$  i poziomych  $Z$ , oraz obciążeń jednostajnie rozłożonych pionowych  $q'$  i poziomych  $q''$ .

a) Wpływ jednego ciężaru pionowego skupionego w odstępnie  $(i+a)l$  od lewej podpory.

$$(0 \leq a \leq 1)$$

w którym

$$c_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{n l} (x-k_1 l) h dx = \frac{1}{2} \gamma [(n-k_1)^2 - (i-k_1)^2]$$

$(k_1 < i)$

$$c_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} (x-k_2 l) h dx = \frac{1}{2} \gamma (n-k_2)^2$$

$(k_2 \geq i)$

Z powyższych wzorów wynika, że wyznacznik  $\bar{D}_{na}$  powstaje z  $\bar{D}_{ah}$  niejako przez obrót o  $180^\circ$  dokoła głównej przekątnej, czyli — innymi słowy — przez zamianę kolumn na wiersze, a wierszy na kolumny.

Pozostaje jeszcze do omówienia prawa dolna część wyznacznika  $\bar{D}_{2n}$ , t. j. wyznacznik kwadratowy  $(n+1)$ -go rzędu  $D_h$ , utworzony ze współczynników  $d_{ik}$ , określonych wzorami:

$$d_{ik_1} = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{n l} h^2 dx = \gamma^2 (n-i)$$

$(k_1 < i)$

$$d_{ii} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_0^h z^2 dz + \frac{1}{l^3} \int_{il}^{n l} h^2 dx = \frac{1}{3} \gamma^3 k + \gamma^2 (n-i)$$

$$d_{ik_2} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} h^2 dx = \gamma^2 (n-k_2)$$

$(k_2 > i)$

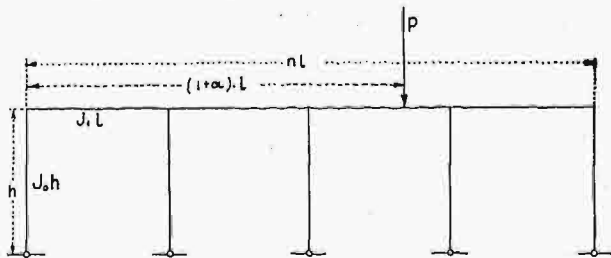
Wyznacznik  $D_h$  jest symetryczny i posiada następujące własności:

a) Wyrazy na głównej przekątnej tworzą — idąc od dołu ku górze — postęp arytmetyczny, którego pierwszy wyraz  $d_{n,n} = \frac{1}{3} \gamma^3 k$ , różnica  $\Delta = \gamma^2$ .

b) Wyrazy na lewo od głównej przekątnej, położone w tym samym wierszu są sobie równe przy czym wyrazy z różnych wierszy stanowią również — idąc od dołu ku górze — postęp arytmetyczny, którego pierwszym wyrazem jest zero, a różnica wynosi  $\gamma^2$ .

c) Z powodu symetryczności wyznacznika, własność jego, opisana pod b) określa zarazem i wyrazy na prawo od głównej przekątnej.

Przez wyznaczenie grup  $D_a$ ,  $D_{ah}$ ,  $D_{na}$ ,  $D_h$  jest wyznacznik  $D_{2n}$  zupełnie określony, a tem samym i lewe strony równań układu (IV). Jako przykład podano poniżej wyznacznik  $D_{2n}$  dla  $n=4$ , charakteryzujący ramę czteropiętłową.



Rys. 2.

$$\psi_{k_1, 0} = \frac{1}{l^3} \int_{(i+a)l}^{n l} P \cdot [x - (i+a)l] (x - k_1 l) dx =$$

$(k_1 \leq i)$

$$= P \cdot \frac{1}{8} [2n^3 - 2(i+\alpha)^3 - 3(i+\alpha+k_1)n^2 + 3(i+\alpha+k_1)(i+\alpha)^2 + 6(i+\alpha)k_1n - 6(i+\alpha)^2k_1]$$

$$\psi_{k_2,0} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} P[x-(i+\alpha)l](x-k_2 l) dx =$$

$$(k_2 > i) = P \cdot \frac{1}{8} [2n^3 - 2k_2^3 - 3(i+\alpha+k_2)n^2 + 3(i+\alpha+k_2)k_2^2 + 6(i+\alpha)k_2n - 6(i+\alpha)k_2^2]$$

$$\psi_{k_1,1} = \frac{1}{l^3} \int_{(i+\alpha)l}^{n l} P[x-(i+\alpha)l] h dx =$$

$$(k_1 \leq i) = P \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot [n-(i+\alpha)]^2$$

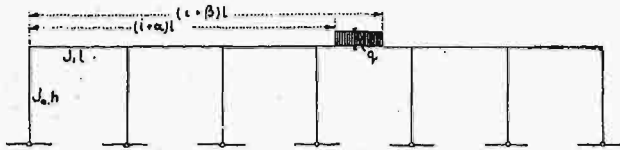
$$\psi_{k_2,1} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} P[x-(i+\alpha)l] h dx =$$

$$(k_2 > i) = P \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot \{ [n-(i+\alpha)]^2 - [k_2-(i+\alpha)]^2 \}$$

$$\psi_2 = P[n-(i+\alpha)]$$

$$\psi_3 = 0.$$

b) Wpływ obciążenia pionowego  $q'$ , jednostajnie rozłożonego między punktem  $(i+\alpha)l$ , a punktem  $(i+\beta)l$ . ( $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ )



Rys. 3.

$$\psi_{k_1,0} = \frac{1}{l^3} \int_{(i+\alpha)l}^{(i+\beta)l} \frac{q'[x-(i+\alpha)l]^2}{2} (x-k_1 l) dx +$$

$$(k_1 \leq i) + \frac{1}{l^3} \int_{(i+\beta)l}^{n l} q'(\beta-\alpha)l \cdot \left[ x - \left( i + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) l \right] (x-k_1 l) dx$$

$$\psi_{k_2,0} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} q'(\beta-\alpha)l \cdot \left[ x - \left( i + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) l \right] (x-k_2 l) dx$$

$$(k_2 > i)$$

$$\psi_{k_1,1} = \frac{1}{l^3} \int_{(i+\alpha)l}^{(i+\beta)l} \frac{q'[x-(i+\alpha)l]^2}{2} \cdot h \cdot dx +$$

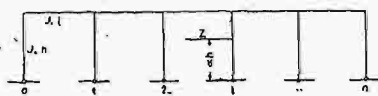
$$(k_1 \leq i) + \frac{1}{l^3} \int_{(i+\beta)l}^{n l} q'(\beta-\alpha)l \cdot \left[ x - \left( i + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) l \right] \cdot h \cdot dx$$

$$\psi_{k_2,1} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} q'(\beta-\alpha)l \cdot \left[ x - \left( i + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) l \right] \cdot h \cdot dx$$

$$(k_2 > i)$$

$$\psi_2 = q(\beta-\alpha)l \cdot \left[ n - \left( i + \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \right]$$

$$\psi_3 = 0.$$



Rys. 4.

c) Wpływ siły poziomej, skupionej  $Z$  działającej w kierunku od strony lewej ku prawej na  $i$ -ty słupek w odległości  $\alpha \cdot h$  od jego spodu.

$$\psi_{k_1,0} = \frac{1}{l^3} \int_{k_1 l}^{n l} Z(1-\alpha)h \cdot (x-k_1 l) dx =$$

$$(k_1 < i) = Z \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot (1-\alpha) [(n-k_1)^2 - (i-k_1)^2]$$

$$\psi_{k_2,0} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} Z(1-\alpha)h \cdot (x-k_2 l) dx = Z \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot (1-\alpha) \cdot (n-k_2)^2$$

$$(k_2 \geq i)$$

$$\psi_{k_1,1} = \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} Z(1-\alpha)h \cdot h \cdot dx = Z \gamma^2 (1-\alpha) \cdot (n-i)$$

$$(k_1 < i)$$

$$\psi_{i,1} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_{\alpha h}^h Z(z-\alpha \cdot h) z \cdot dz + \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} Z(1-\alpha)h \cdot h \cdot dx =$$

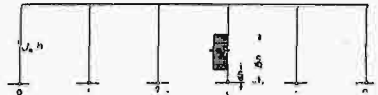
$$= Z \cdot \left\{ \frac{1}{3} \gamma^3 k(1-\alpha^3) - \frac{1}{2} \gamma^3 k \cdot \alpha(1-\alpha^2) + (1-\alpha) \gamma^2 \cdot (n-i) \right\}$$

$$\psi_{k_2,1} = \frac{1}{l^3} \int_{k_2 l}^{n l} Z(1-\alpha)h \cdot h \cdot dx = Z(1-\alpha) \cdot \gamma^2 \cdot (n-k_2)$$

$$\psi_2 = Z \cdot \left( -\frac{\alpha h}{l} \right) = Z \cdot (-\alpha \gamma)$$

$$\psi_3 = Z \cdot 1.$$

d) Wpływ obciążenia poziomego  $q''$ , jednostajnie rozłożonego, działającego na  $i$ -ty słupek między przekrojem  $\alpha h$  a  $\beta h$ .



Rys. 5.

$$\psi_{k_1,0} = q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \gamma [(n-k_1)^2 - (i-k_1)^2]$$

$$(k_1 < i)$$

$$\psi_{k_2,0} = q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \gamma \cdot (n-k_2)^2$$

$$(k_2 \geq i)$$

$$\psi_{k_1,1} = q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \gamma^2 (n-i)$$

$$(k_1 < i)$$

$$\psi_{i,1} = \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_{\alpha h}^{\beta h} q'' \frac{(z-\alpha h)^2}{2} \cdot z \cdot dz +$$

$$+ \frac{I_1}{I_0} \cdot \frac{1}{l^3} \int_{\beta h}^h q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( z - \frac{\alpha+\beta}{2} h \right) z \cdot dz +$$

$$+ \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) h \cdot h \cdot dx$$

$$\psi_{k_2,1} = q''(\beta-\alpha)h \cdot \left( 1 - \frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cdot \gamma^2 (n-k_2)$$

$$(k_2 > i)$$

$$\psi_2 = q''(\beta-\alpha)h \cdot (-1) \cdot \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \gamma$$

$$\psi_3 = q''(\beta-\alpha)h \cdot 1.$$

e) Wpływ pionowych, skupionych, równych ciężarów  $P$ , działających w połowie każdego przęsła poziomego.

$$\psi_{i,0} = \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} P \left( x - \frac{l}{2} \right) (x-i l) dx +$$

$$+ \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} P \left( x - \frac{3l}{2} \right) (x-i l) \cdot dx = \dots$$

$$\dots + \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} P \left[ x - \left( \frac{2i-1}{2} \right) l \right] (x-i l) dx +$$

$$+ \frac{1}{l^3} \int_{\frac{2i+1}{2} l}^{n l} P \left[ x - \left( \frac{2i+1}{2} \right) l \right] (x-i l) dx + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{l^3} \int_{\frac{2n-1}{2} l}^{n l} P \left[ x - \left( \frac{2n-1}{2} \right) l \right] (x-i l) dx$$

$$\psi_{i,0} = P \left\{ \frac{1}{12} (n^4 - i^4) + \frac{1}{48} \cdot [(2i+1)^3 + (2i+3)^3 + \dots + (2n-1)^3] - \frac{1}{8} i [(2i+1)^2 + (2i+3)^2 + \dots + (2n-1)^2] \right\}$$

$$\psi_{i,1} = \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} P \left( x - \frac{l}{2} \right) h \cdot dx +$$

$$\dots + \frac{1}{l^3} \int_{i l}^{n l} P \left[ x - \left( \frac{2i-1}{2} \right) l \right] h \cdot dx +$$

$$+ \frac{1}{l^3} \int_{\frac{2i+1}{2} l}^{n l} P \left[ x - \left( \frac{2i+1}{2} \right) l \right] h \cdot dx + \dots$$



$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{l^3} \int_{\frac{2n-1}{2}l}^{nl} P \left[ x - \left( \frac{2n-1}{2} \right) l \right] h \cdot dx = \\
 & = P \cdot \frac{1}{8} \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n-1} (2k+1)^2 \\
 & \quad P \cdot \frac{l}{2} [1 + 3 + \dots + (2n-1)] \\
 \psi_2 & = \frac{P \cdot \frac{l}{2} [1 + 3 + \dots + (2n-1)]}{l} = P \cdot \frac{1}{2} n^2 \\
 \psi_3 & = 0.
 \end{aligned}$$

f) Wpływ pionowych, skupionych, równych ciężarów  $P$ , działających w  $\frac{1}{s}, \frac{2}{s}, \dots, \frac{s-1}{s}$ -tej części rozpiętości każdego przęsła poziomego.

$$\begin{aligned}
 \psi_{i0} & = P \cdot \left\{ \frac{1}{12} (s-1) (n^4 - i^4) + \frac{1}{6s^3} \sum_{k=1}^{n-1} [(sk+1)^3 + (sk+2)^3 + \dots \right. \\
 & \quad \left. + (sk+s-1)^3] - \frac{1}{2s^2} \cdot i \sum_{k=1}^{n-1} [(sk+1)^2 + (sk+2)^2 + \dots \right. \\
 & \quad \left. + (sk+s-1)^2] \right\} \\
 \psi_{i1} & = P \cdot \frac{1}{2s^2} \gamma \cdot \sum_{k=1}^{n-1} [(sk+1)^2 + (sk+2)^2 + \dots + (sk+s-1)^2] \\
 \psi_2 & = P \cdot \frac{s-1}{2} \cdot n^2 \\
 \psi_3 & = 0.
 \end{aligned}$$

g) Wpływ obciążenia pionowego, jednostajnie rozłożonego  $q''$ , działającego na całej rozpiętości wszystkich przęseł poziomych.

$$\begin{aligned}
 \psi_{i0} & = \frac{1}{24} (3n^4 - 4in^3 + i^4) \cdot ql \\
 \psi_{i1} & = \frac{1}{l^3} \int_{il}^{ni} qx \cdot \frac{x}{2} \cdot h dx = \frac{1}{6} \gamma (n^3 - i^3) \cdot ql \\
 \psi_2 & = \frac{1}{2} n^2 \cdot ql \\
 \psi_3 & = 0.
 \end{aligned}$$

h) Wpływ obciążenia poziomego, jednostajnie rozłożonego  $q''$ , działającego na całą wysokość  $i$  tego słupa.

$$\begin{aligned}
 \psi_{k_1, 0} & = q'' \cdot h \cdot \frac{1}{4} \gamma \cdot [(n-k_1)^2 - (i-k_1)^2] \\
 & \quad (k_1 < i) \\
 \psi_{k_2, 0} & = q'' \cdot h \cdot \frac{1}{4} \gamma (n-k_2)^2 \\
 & \quad (k_2 > i) \\
 \psi_{k_1, 1} & = q'' \cdot h \cdot \frac{1}{2} \gamma (n-i) \\
 & \quad (k_1 < i) \\
 \psi_{k_2, 1} & = q'' \cdot h \cdot [\frac{1}{8} \gamma^3 k + \frac{1}{2} \gamma^2 (n-i)] \\
 & \quad (k_2 > i) \\
 \psi_2 & = q'' \cdot h \cdot (-\frac{1}{2} \gamma) \\
 \psi_3 & = q'' \cdot h \cdot 1.
 \end{aligned}$$

Zachodziłaby jeszcze kwestja, w jaki sposób należy interpretować znak  $+$  względnie  $-$ , otrzymany jako wynik obliczenia danej reakcji pionowej lub poziomej. Otóż w całym powyższym obliczeniu przyjmowano, że reakcje pionowe działają od góry, zaś poziome od strony prawej ku lewej, uważając te właśnie kierunki działania sił za dodatnie.

Jako moment zgięcia w rozporze uważano moment wszystkich sił, działających na lewo od danego przekroju, zaś jako moment zgięcia w słupie — moment sił działających na dany słup poniżej danego przekroju, przyjmując przytem moment obracający odnośny przekrój w kierunku zgodnym z ruchem wskazówki zegarowej za dodatni, w przeciwnym zaś za ujemny.

Przy takiej właśnie interpretacji znaku sił oraz wielkości i znaku momentów zgięcia, otrzymano po odpowiednich przekształceniach i podstawieniach (o których była mowa powyżej) i po przeniesieniu wyrazów wolnych od niewiadomej na prawą stronę układ równań (IV), którego współczynniki przy niewiadomych i wyrazy wolne zostały następnie odpowiednimi wzorami szczegółowo określone.

Wobec powyższego otrzymany w wyniku rozwiązania równań układu (IV) znak  $+$  oznacza dla reakcji pionowej kierunek ku górze, zaś dla poziomej kierunek od strony prawej ku lewej, znak  $-$  natomiast kierunki przeciwne. (C. d. n.)

Inż. Wacław Olszak.

## Żelazne ścianki szczelne.

Myśl poddaną przez p. Inż. M. Rapaczyńskiego w interesującym jego sprawozdaniu o „Runięciu filara rzeczno Nro II przyszłego mostu na Sanie pod Kurylówką” (*Czasop. T.* 1932, Nr. 17), by grodzie drewniane przekraczające głębokość 10,0 m, jako niecelowe, zastępować w miarę możliwości przez ścianki żelazne i wysunięcie w związku z tem postulatu pod adresem hutnictwa krajowego o objęcie swym programem produkcji odpowiednich typów pozwałam sobie uzupełnić następującymi uwagami:

Wykończony w roku 1927 most drogowy pod Goczałkowicami, przekraczający Wisłę w ciągu drogi Katowice-Bielsko w miejscu dawnej granicy austriacko-niemieckiej, (ogólna długość mostu 180 m), fundowany być miał w myśl projektu zatwierdzonego przez Śląski Urząd Wojewódzki w Katowicach na wierconych palach zbrojonych systemu Wolfsholza wzgl. Straussa z zastosowaniem 4 $\frac{1}{2}$ -wzgl. 6-metrowych drewnianych ścianek szczelnych dla filarów sąsiadujących z korytem rzeki.

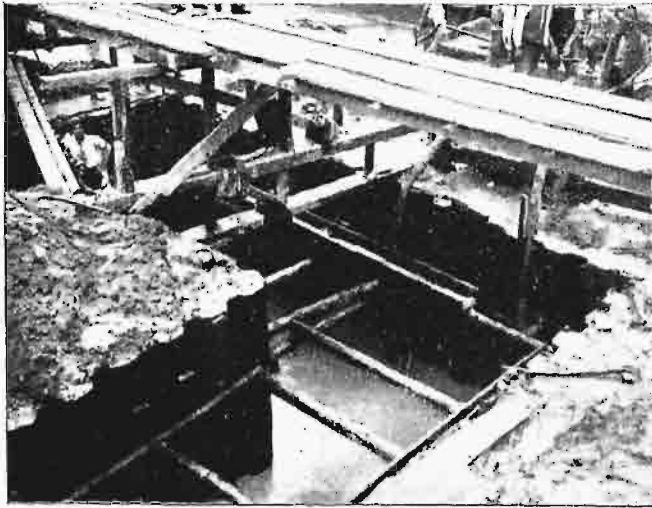
W trakcie wykonywania robót okazało się jednak, że warstwy żwirowo-piaskowe, kilku-wzgl. kilkunastometrowej miąższości w tem miejscu, są tak dalece zwarte i zbite, iż nietylko ścianka drewniana 6-metrowa (a więc nawet grubo poniżej wymienionych przez Inż. R. 10 m) — pomijając już praktyczną niemożliwość wykonania jej z pożądaną szczelnością — nie da się normalnym sposobem — pflukanie jako zbyt kosztowne

i niekoniecznie skuteczne z góry wykluczono — zabić do żądanej głębokości, gdyż albo głowy brusew uległy kompletnemu rozbiciu, albo też dolne ich końce odginały się o 180° i w miarę zabijania brusew podchodziły z powrotem pod górę (o czem przekonano się wyciągnawszy przy pomocy kafara kilka takich szczególnie „opornych” brusew) — ale nawet wiercenie pali — mimo pomysłowych metod przedsiębiorcy budowy, Inż. A. Hajduka, używania zgęszczonego powietrza dla rozluźnienia żwiru i piasku objętego rurowaniem pala — natrafiało na tak poważne trudności, iż programowy postęp robót a nawet możliwość ich wykończenia mocno zostały zagrożone.

Gdy jeszcze zaszła nieprzewidziana pierwotnym projektem potrzeba głębszego fundowania dalszych 3 filarów wskutek przyszłego na tym odcinku przełożenia koryta Wisły — sięgnąć musiano do innego skutecznego sposobu fundowania: osadzenia ław filarów i lewobrzeżnego przyczółka wprost na podłożu żwirowym, zabezpieczonem żelazną ścianką szczelną. Wobec braku odpowiedniego typu na rynku krajowym zastosowano ściankę żelazną pomysłu Inż. Hajduka, w wykonaniu Huty „Pokój”, Nowy Bytom, o czem już swego czasu na innym miejscu<sup>1)</sup> wspominałem. Elementy ścianki tej powstały ze znitowania w kształcie litery „S” dwóch

<sup>1)</sup> Olszak W.: „Most na Wisłę pod Goczałkowicami”, *Technik* 1928, Nr. 4.

żelaznych podkładów kolejowych (maksymalna ich długość walcowania w tym czasie wynosiła  $6\frac{1}{2}$  m, przy czym specjalna listewka, również dodatkowo donitowana,



Żelazna ścianka szczelna wraz z wykopem pod lewobrzeżny przyczółek.

zastępowała „zamek”. Z elementów tych utworzono również 2 typy narożników, tak że zarówno prostokątne

ścianki dla ław filarów jak i nieco bardziej skomplikowane dla przyczółka wyszły bardzo lekko i czysto. Jako kierownik wspomnianej budowy z ramienia Sl. Urz. Woj. miałem sposobność przekonać się, że ścianka ta okazała się w praktyce zarówno pod względem technicznym jak i ekonomicznym w zupełności zadowalniająca, przy czym na szczególne podkreślenie zasługuje jej praktycznie całkowita szczelność. Umieszczone poniżej zdjęcie przedstawia wykop pod lewobrzeżny przyczółek w obrębie takiej ścianki szczelnej.

O ile mi wiadomo ścianka żelazna podobnego rodzaju znalazła również — jednak już w charakterze grodzi — zastosowanie przy jednej z poważniejszych budowli w Województwie Krakowskim.

Ponieważ w państwach sąsiednich stosowanie ścianek żelaznych — oparte na pomysłnych doświadczeniach ostatnich dziesiątków lat — dla wielu najróżnorodniejszych budowli rozpowszechnia się coraz bardziej, należy mieć nadzieję, że i Syndykat Polskich Hut Żelaznych umożliwi polskiemu budownictwu inżynierskiemu korzystanie z tego rodzaju elementów konstrukcyjnych. Aż do tego czasu podany powyżej, wypróbowany już sposób — choć pozostanie on tylko surogatem — może jednak w razie rzeczywistej potrzeby z powodzeniem znaleźć zastosowanie — a zwrócenie uwagi na tę — może nie wszystkim znaną — okoliczność stanowi główny cel niniejszej notatki.

## Wiadomości z literatury technicznej.

### Tunele.

— **Przewietrzanie tunelu Holland w Nowym Jorku.** Tunel Holland oddany do użytku w r. 1927 wykazuje olbrzymi wzrost ruchu (przeciętnie 25% z roku na rok) tak, iż prawdopodobnie granicę swjej przelotności w rocznej wysokości 16 mil. pojazdów, osiągnie w roku 1938.

Przewietrzanie tunelu wykonywane jest z pomocą 84 wentylatorów, pomieszczonych w 4 szybach wentylacyjnych, z popędem elektrycznym.

Zanieczyszczenie powietrza spowodowane jest wydmuchami z samochodów, w szczególności zaś znaczną zawartością tlenku węgla (CO), który jak wiadomo, jest bardzo szkodliwy nawet w znacznym rozcieńczeniu. Doświadczalnie stwierdzonem zostało, iż 0,04% zawartość tlenku węgla w powietrzu nie daje jeszcze powodu do żadnych obaw, przy ilości 0,06% występują już lekkie dolegliwości dla organizmu ludzkiego, które jednakże ustępują natychmiast po przedostaniu się na świeże powietrze. Przy zawartości 0,08% dolegliwości są już cięższe, a następstwa ich znikają dopiero po godzinach.

Ażeby zawartość tlenku węgla utrzymać w granicy 0,01%, koniecznym jest dostarczenie do wymienionego tunelu 1 mil. m<sup>3</sup> świeżego powietrza w godzinie.

Świeże powietrze doprowadzone jest otworami rozłożonymi jednostajnie wzdłuż całej długości tunelu a usytuowanymi przy krawężnikach jezdni. Powietrze zużyte wprowadza się otworami umieszczonymi w stropie.

Podobny sposób przewietrzania zastosowano również w tunelu Hudson, który ma stanowić drugie połączenie Nowego Jorku z Weehawken oraz w znajdującym się w budowie tunelu pod Skaldą w Antwerpii. (*Verkehrstechnik* Nr. 22/32).

— **Tunel drogowy w Liverpool'u.** Budowany obecnie tunel drogowy pod rzeką Mersey w Liverpool'u znajduje się na ukończeniu. Koszta budowy, które preliminowane były początkowo w wysokości 5 mil. £, przekroczą prawdopodobnie 6,5 mil. £. Powód tak znacznego przekroczenia leży w znacznej części w konieczności powiększenia instalacji służących do przewietrzania a uwzględniających już doświadczenia,

jakie w tej mierze poczyniono w tunelu Holland w Nowym Jorku. (*Strassenbau u. Strassenunterhaltung* Nr. 16/32).

E. B.

### Żelazo - beton.

— **Obliczanie naprężeń przyczepnych w belkach żalbetowych** omawia prof. Wacław Paszkowski w *Przeglądzie Budowlanym* (1932, nr. 1). Autor dochodzi do wniosku, że nie potrzebujemy obliczać tych naprężeń, jeżeli pewien stosunek między średnicą wkładki  $\delta$  i rozpiętością  $l$  nie zostanie przekroczony. Normy niemieckie stawiają tylko warunek, by  $\delta \leq 25$  mm. Autor stwierdza, że to jest niedostatecznym, że  $\delta : l \leq \frac{1}{30}$  a w niektórych wypadkach  $\frac{1}{15}$ .

Dr. M. Thullie.

## NEKROLOGJA.

**Śp. Dr. Tadeusz Obmiński** Profesor Politechniki Lwowskiej, Komandor orderu Odrodzenia Polski, zmarł we Lwowie dnia 18 lipca 1932 r.

Urodzony we Lwowie dnia 16 kwietnia 1874 r. tutaj ukończył szkołę średnią i Politechnikę, poczem dla pogłębienia studjów wyjechał na Politechnikę do Charlottenburga. Po powrocie do Lwowa oddał się pracy zawodowej i w krótkim czasie znalazł się w szeregu najbardziej czynnych i znanych architektów.

Równoległe z zajęciami zawodowymi pracował naukowo jako asystent, a następnie konstruktor przy Katedrze Budownictwa ogólnego, zarazem podejmując z dużym zapałem studia badawcze nad architekturą zabytków budownictwa drewnianego; na podstawie pracy p. t. „Geneza budownictwa drewnianego w Polsce“ otrzymuje w r. 1908 stopień naukowy doktora nauk technicznych.

W październiku 1910 obejmuje w charakterze zwyczajnego profesora Katedrę Budownictwa ogólnego; zarazem wykłada „Prowadzenie budowy i kosztorysy“ oraz „Ustawy budownicze“. Katedrę tą z wielkim pożytkiem dla Politechniki i jej studentów prowadzi do ostatniej chwili swego życia. Mimo rozległych obowiązków związanych z tak ważną i silnie frekwentowaną placówką, sprawował kilkakrotnie urząd dziekana Wydziału architektury, a w roku 1916/17 Rektora Politechniki Lwowskiej.



Brał też czynny udział w wielu komisjach artystycznych i społecznych, piastował urząd członka Rady miejskiej, a w okresie 1928—1930 był pierwszym zastępcą Komisarza m. Lwowa.



Wszelkie przygotowanie zawodowe predystynowało Go na profesora wyższej uczelni; wykładając konstrukcje budowlane ujmował problemy konstrukcyjne nie tylko od strony statyczno-inżynierskiej, ale umiał odczuć i pokazać całą ich wartość estetyczną i piękno architektoniczne. Posiadał wybitny zmysł konstrukcyjny i intuicję, pozwalającą mu na wyczuwanie właściwej konstrukcji, której trafność potwierdzały późniejsze obliczenia techniczne. Umiał słowem głoszonym z katedry rozbudzić u słuchaczy zapał nie tylko dla studjów nad budownictwem ogólnym, ale i nad specjalnym jego działem, to jest budownictwem drewnianym, którego to przedmiotu był pierwszym na Politechnice docentem.

W cennej spuściźnie naukowego dorobku ś. p. Zmarłego znajduje się bogaty zbiór zdjęć zabytków budownictwa drewnianego, a to kościołów, cerkwi, dworków i zagród włościańskich, dziś już przeważnie nieistniejących, które częściowo omawiał na łamach Sprawozdań Komisji historii i sztuki, publikowanych przez Akademię Umiejętności w Krakowie. Bogaty ten plon, pozostawiony w tece i dotychczas niestety nie wydany, świadczy nie tylko o gruntownym znawstwie, ale i niezwykle umiłowaniu przedmiotu.

Ś. p. Profesor Obmiński był poważnym badaczem architektury polskiej, w której widział wysokie wartości artystyczne w jej oryginalnych motywach konstrukcyjnych

i dekoracyjnych; nie tylko okiem znawcy obejmował jej zabytki, ale i z serdecznym umiłowaniem odnosił się do nich, gdziekolwiek się z nimi zetknął; znanym był Jego pietyzm do zabytków architektury i sztuki miasta Lwowa, którego znał każdy zakątek, i w którym długoletnią troską i staraniem otaczał Katedrę łacińską jako jej stały konserwator. Na jej usługi oddał całą swoją wiedzę techniczną i architektoniczną, przeprowadzając roboty konserwacyjne i odkrywcze, a na krótko przed śmiercią ujął je w pracy „Rekonstrukcja Katedry lwowskiej, dawne i dzisiejsze” publikowanej w „Studjach lwowskich”, wydanych w r. 1932. Wraz z konserwacją Katedry przeprowadzał roboty związane z konserwacją Kaplicy Boimów, pałacu Arcybiskupów lwowskich, oraz innych obiektów zabytkowych w Małopolsce. Godność członka Grona konserwatorów dla Galicji wschodniej i Centralnej Komisji dla zabytków sztuki w Wiedniu dała Mu możność długoletniej i skutecznej opieki nad zabytkami już w okresie przed wielką wojną; po odzyskaniu niepodległości powołany został w skład komisji konserwatorskiej Zamków królewskich w Krakowie i Warszawie.

Poza temi licznymi zajęciami resztę czasu poświęcał opracowaniu planów licznych budowli szkolnych (ostatnio gmachu Biblioteki Politechniki we Lwowie), kościelnych (ostatnio kościoła na Łyczakowie), a świetna znajomość konstrukcji ułatwiała mu niecodzienne zadania przy opracowaniu planu lotnisk wojskowych.

Nazwisko Jego spotykamy często na pierwszych miejscach w konkursach architektonicznych.

Nieubłagana, a szybko rozwijająca się choroba przecięła pasmo Jego pracowitego żywota; odszedł od nas pozostawiając po sobie głęboki żal u kolegów, których sympatję sobie zaskarbił. Nie mniejszą miłość zdobył też wśród licznych uczniów, rozsianych po całej Polsce, którzy mieli w Nim nie tylko przewodnika, lecz przede wszystkim prawdziwego przyjaciela, który umiał stanąć w ich obronie ilekroć i gdziekolwiek zachodziła tego potrzeba.

Cześć Jego pamięci!

#### BIBLIOGRAFJA.

**Książki nadesłane.** Inż. B. Nawrocki: „Personel a marotrastwo”. Wydawnictwo Ligi Pracy. Warszawa 1932.

„Sprawozdanie z działalności Związku Polskich Hut Żelaznych w r. 1931”.

Prof. Inż. I. Szowheniw: „Silniki wietrzne”. Nakł. Pol. Kom. Energetycznego. Skład główny Księgarnia Techniczna. Warszawa 1932.

Bulletin de l'union des Sociétés Savantes Polonaises de Léopol Nr. 11 et. 12.

#### Zebrania i odczyty w Towarzystwie.

5. X. 1932. Prof. Edwin Hauswald: „Wrażenia z Hollandji i ze Zjazdu Racjonalnej Organizacji”.

12. X. 1932. Inż. Roman Rogowski: „Budowa wodociągu Zakładu Kulparkowskiego Lotniska w Skniłowie”.

19. X. 1932. Prof. Maksymiljan Matakiewicz: „Ustawa o ustroju szkolnictwa”.

22. X. 1932. Zebranie Towarzystwa.

24. X. 1932. Inż. R. Żaliński: „Przyczynę do teorii pługów kruszących”.

26. X. 1932. Inż. K. Filasiewicz: „Szkoły zawodowe w nowej ustawie o ustroju szkolnictwa”.

4. XI. 1932. Inż. Arch. Józef Awin: „Rzeźba a Architektura”.

## SPRAWY TOWARZYSTWA.

**Protokół Walnego Zgromadzenia Członków Polskiego Tow. Politechn. z dnia 16 marca 1932 r.**

Prezes Inż. Stanisław Rybicki otwiera o godz. 18-tej Walne Zgromadzenie, stwierdzając prawomocność uchwał.

Po powitaniu członków obecnych w ilości 67, zaprasza przewodniczący na skrutatorów Inż. K. Gąsiorowskiego, Prof. E. Bratro i Dr. Inż. A. Pareńskiego, zaś na sekretarzy Inż. Z. Marynowskiego i Inż. A. Tomaszewskiego.

Na wstępie Prezes Rybicki poświęcił kilka słów pamięci zmarłym w roku ubiegłym członkom (Jarosław Biliński,

Józef Jaskólski, Herz Oehlberg, Karol Meissner, Marjan Starzecki, Albin Zazula i Jan Zeitleben). Zgromadzenie wysłuchało słów Prezesa stojąc i uczciło pamięć zmarłych przez chwilę milczenia.

Przed przystąpieniem do sprawozdania z działalności Towarzystwa nastąpiło uroczyste wręczenie dyplomu członka honorowego P. T. P. Prof. Dr. Maksymiljanowi Matakiewiczowi. Prezes Rybicki, wręczając dyplom honorowy przypomniał zebrany liczne zasługi Pana Prof. Dr. Matakiewicza na polu nauki i w życiu społecznym, a w szczególności długoletnią pracę w Polskim Tow. Politechnicznym.

Ponieważ protokół ostatniego Walnego Zgromadzenia został ogłoszony w Nr. 21 *Czasopisma Technicznego* z dnia 10 listopada 1931 r., zaś sprawozdanie z czynności Wydziału w Nr. 5 *Czasopisma Technicznego* z dnia 10 marca 1932 r. przyjęto protokół i sprawozdanie Wydziału Głównego do wiadomości bez odczytywania. Dalszą część wypełniło przemówienie Prezesa Rybickiego, podane poniżej w skróceniu:

„54 rok istnienia Towarzystwa minął i przeszedł do historii a szczególnie naszej działalności, składające się bądź to z zabiegów, podjętych u władz z własnej inicjatywy Towarzystwa, bądź to z wydanych orzeczeń o projektach ustaw i przepisów, przekazanych nam przez Władze, znajdując się drukowane w Nr. 5 *Czasop. Techn.* Praca Towarzystwa w dziedzinie naukowej odzwierciedla się z jednej strony w odczytach, wygłoszonych w naszym Towarzystwie, z drugiej strony w artykułach, ogłoszonych w *Czasopiśmie Technicznym*. Rozwinęła się ona w ubiegłym roku bujniej, aniżeli w latach poprzednich głównie dzięki ożywionej działalności Sekcji Towarzystwa. Obok dawnych Sekcji Hydrotechnicznej, Mechaników, Elektryków i Naukowej Organizacji, które swoim zwyczajem bardzo pilnie pracowały, powstały nowe Sekcje: Inżynierów Architektów, Geodezyjna i Ogólna, które rozwinęły zaraz od chwili powstania bardzo ożywioną działalność.

Przesilenie gospodarcze, które ogarnęło wszystkie dziedziny produkcji, a o którym wspomniano już na zeszłorocznym Wal. Zebraniu, wywołuje szereg zgubnych skutków, a między innymi najzgubniejszy pod postacią bezrobocia. Rzesze krociowe bezrobotnych rosna z każdym tygodniem, a do nich zalicza się także liczny zastęp pracowników umysłowych i naszych kolegów inżynierów. Troska wywołana przesileniem gospodarczym i rosnącym bezrobociem, ciążąca na wszystkich umysłach wywołała w naszym Towarzystwie liczne głosy, domagające się, aby te ważne i aktualne tematy były przedmiotem rozważań naszego Towarzystwa i stąd powstała myśl do utworzenia osobnej sekcji dla tego celu, która znalazła rzeczywistnienie w Sekcji Ogólnej.

Dwie sprawy mające wielką doniosłość dla kół inżynierskich zajmowały nas w Towarzystwie, a mianowicie: projekt utworzenia Izby Inżynierskich i zamierzenia zniesienia Ministerstwa Robót Publicznych. Ministerstwo Robót Publ. mimo upływu długiego czasu od chwili wręczenia przez Z. P. Z. T. projektu ustawy o Izbach Inżynierskich, nie zajęło stanowiska wobec naszych wniosków. Utworzenie urzędowej reprezentacji inżynierów uważamy w chwili obecnej jako ważne z uwagi, iż kryzys gospodarczy dotknął bardzo ciężko świat inżynierski, wobec czego urzędowa organizacja inżynierów, która by się zajęła szukaniem pracy dla bezrobotnych inżynierów, stała się piękną potrzebą. Powtórne projekty nowej konstytucji przewidują, że Senat ma się składać w części z członków organizacji gospodarczych i zawodowych o charakterze prawnopublicznym. W razie uchwalenia projektu nowej konstytucji w czasie, gdy Izby Inżynierskie nie będą jeszcze istniały, inżynierowie byłiby wykluczeni z reprezentacji w Senacie, podczas gdy inne koła zawodowe miałyby tam swoje przedstawicielstwo.

Co się tyczy zamiaru zwinięcia Min. Rob. Publ., Towarzystwo nie spuściło z oka tej ważnej sprawy, ogłaszając w *Czasop. Techn.* szereg opinii w tej materji oraz wpływając na Z. P. Z. T. celem zajęcia stanowiska w tej sprawie.

Dotkliwą przeszkodą w działalności był brak funduszków i szczupłość naszych lokalności“.

W końcu Prezes składa podziękowanie wszystkim członkom Wydziału Głównego za gorliwą współpracę dla dobra Towarzystwa.

Inż. Gąsiorowski przypomina, że właśnie upływa piętnaście lat od chwili, w której obecny Prezes Inż. Rybicki objął kierownictwo spraw Towarzystwa. Wskazuje na ważniejsze prace Towarzystwa w ostatnim piętnastoleciu, a więc sprawę odbudowy kraju w r. 1917, pracę nad memorjałem o organizacji władz technicznych w Polsce, ustawę o ochronie tytułu inżyniera, utworzenie Związku Polskich Zrzeszeń Technicznych, zawiązanie Związku Polskich Towarzystw Naukowych we Lwowie, walkę z anarchją społeczną przez utworzenie S. S. S. we Lwowie, akcję zmierzającą do utworzenia Izby Inżynierskich w Polsce, akcję przeciwko zniesieniu Min. Robót Publ. i wiele innych i kończy swe przemówienie życzeniem, by Prezes Rybicki, jeszcze długie lata przewodził Towarzystwu.

Prezes Rybicki dziękuje za słowa uznania, zastrzega się jednak przed przecenianiem jego zasług, ponieważ jak to już nieraz podkreślał, Towarzystwo zawdzięcza swój rozwój i poważne stanowisko przede wszystkim długoletniej tradycji, harmonijnej atmosferze i koleżeńskij współpracy.

W dalszym ciągu składa sprawozdanie Redaktor *Czasopisma Technicznego* Prof. Bratro.

Imieniem Komisji Rewizyjnej odczytuje Inż. Gąsiorowski wniosek o udzielenie ustępującemu Wydziałowi absolutorjum wraz z podziękowaniem za pracę około rozwoju Towarzystwa. Wniosek ten przyjęto jednogłośnie.

Wniosek Przem. Oddziału P. T. P. w sprawie obniżenia wkładek członkom Oddziału Przemysłowego postanowiono ze względu na niezgodność ze Statutem P. T. P. odrzucić.

Inż. Makulski, Prezes Oddziału P. T. P. w Stanisławowie przedstawia imieniem członków Oddziału Stanisławowskiego trudności połączone z pokryciem wydatków administracyjnych Oddziału i stawia wniosek o przelanie pewnej części wkładek członkowskich na rzecz Oddziału. Po dłuższej dyskusji przekazano tę sprawę na wniosek P. Prof. Dr. Nadolskiego Wydz. Głównemu do definitywnego rozstrzygnięcia.

Do nowego Wydziału wybrano na podstawie wniosków Komisji Matki:

Wydział Główny: Prezes Inż. St. Rybicki; pozostają w Wydziale członkowie: Inż. M. Bessaga, Prof. E. Bratro, Inż. E. Bronarski, Inż. K. Knaus, Inż. St. Kozłowski, Inż. T. Laskiewicz, Prof. Dr. M. Matakiewicz, Prof. K. Zipser. Nowi członkowie: Wiceprezesa: Prof. Dr. O. Nadolski i Inż. P. Prachtel-Morawiański. Członkowie: Dr. W. Aulich, Inż. A. Broniewski, Inż. T. Jarosz, Inż. Z. Kalityński, Prof. D. Krzyczkowski, Inż. A. Tomaszewski, Inż. Z. Marynowski, Inż. St. Sladek. Zastępca członka Wydziału: Inż. E. Wilczkiewicz.

Komisja rewizyjna: Inż. K. Gąsiorowski, Inż. K. Biernacki, Inż. M. Kuczyński, Inż. E. Nechaj i Inż. K. Winiarz.

Sąd konkursowy im. Barona Gostkowskiego: Członkowie: Prof. E. T. Geisler, Prof. W. Minkiewicz, Prof. Dr. M. Matakiewicz. Zastępcy członków: Prof. Z. Ciechanowski, Prof. D. Krzyczkowski, Prof. K. Zipser.

Sąd polubowny (18 członków): Inż. St. Aleksandrowicz, Inż. K. Biernacki, Inż. T. Dujanowicz, Inż. K. Engel, Inż. K. Gąsiorowski, Prof. E. Hauswald, Prof. E. Krzen, Inż. P. Krzyworączka, Inż. M. Kuczyński, Inż. K. Lisowski, Inż. M. Łużecki, Inż. M. Maślanka, Prof. W. Minkiewicz, Prof. Dr. T. Obmiński, Prof. G. Sokolnicki, Inż. St. Tarwid, Prof. Dr. M. Thullie, Inż. B. Winnicki.

Sąd honorowy (15 członków): Inż. K. Biernacki, Prof. Dr. P. Dziwiński, Inż. M. Dzięwoński, Inż. K. Engel, Prof. St. Łukasiewicz, Inż. L. Früauff, Inż. K. Gąsiorowski, Prof. Z. Klemensiewicz, Inż. G. Müldner, Prof. E. Geisler, Prof. Dr. K. Wątorok, Inż. A. Weiss, Inż. J. Witkiewicz, Prof. Dr. R. Witkiewicz, Inż. K. Żardecki.