С. К. Куницкій.
Адъюнктъ Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

НАЧАЛА СТАТИКИ СООРУЖЕНІЙ.

ОСНОВАНІЯ ГРАФИЧЕСКИХЪ СПОСОБОВЪ РАЗСЧЕТА СООРУЖЕНІЙ.

Съ 61-мъ политипажемъ въ текстѣ.

ВТОРОЕ ИСПРАВЛЕННОЕ И УЛУЧШЕННОЕ ИЗДАНІЕ.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Изданіе К. Л. Риккера.
Невскій просп., № 14.
1897.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 5 іюля 1896 года.

Предисловіе.

Настоящій выпускъ составляетъ дополненіе къ напечатанному авторомъ въ 1893 году труду подъ заглавіемъ: „Основанія графическихъ способовъ разсчета мостовъ простыхъ системъ“ и заключаетъ въ себѣ изложеніе общихъ началъ графическаго разсчета стропилъ балочной системы, а также стропильныхъ и мостовыхъ арочныхъ фермъ съ тремя шарнирами. Сверхъ этого, предлагаемый трудъ содержитъ въ главѣ І-й первоначальныя свѣдѣнія изъ Графической Статики, а въ главахъ ІІ-й и ІІІ-й изложеніе въ сжатомъ видѣ, какъ общихъ основаній примѣненія статическихъ условій равновѣсія къ опредѣленію усилій въ частяхъ сооруженій, такъ и сущности различныхъ способовъ графическаго разсчета фермъ.

Послѣднимъ двумъ главамъ авторъ придаетъ нѣкоторое значеніе въ смыслѣ установленія правильнаго общаго взгляда на предметъ.

Въ важности сознательнаго отношенія со стороны пользующихся разсчетами къ основнымъ предположеніямъ механики сооруженій, какъ для надлежащаго примѣненія разсчета, такъ и для правильнаго пониманія значенія его результатовъ,— авторъ неоднократно имѣлъ случай убѣдиться въ теченіе двѣнадцатилѣтней педагогической дѣятельности своей въ Институтѣ Инженеровъ путей сообщенія.

При составленіи настоящаго труда авторъ воспользовался, главнымъ образомъ, слѣдующими сочиненіями изъ числа литературныхъ источниковъ, указанныхъ выше въ особомъ перечнѣ, а именно:

Hoskins. „The Elements of Graphic Statics". New-York, 1892, при чемъ изъ этого сочиненія заимствовалъ, между прочимъ, излагаемый въ англійскихъ и американскихъ учебникахъ очень удобный способъ обозначенія, какъ силъ, такъ и частей сооруженій, называемый способомъ Боо (Bow's notation); Koechlin „Applications de la Statique graphique". Paris 1889; Müller-Breslau „Elemente der graphischen Statik", 1881; Crotti „La Teoria dell'Elasticità", Milano, 1888.

Нѣкоторыя части главъ I-й, II-й и III-й, конецъ главы IV-й, начало главы V-й, а также глава VII-я самостоятельно разработаны авторомъ; въ остальномъ автору принадлежитъ лишь изложеніе и планъ труда.

Приведеніе въ главѣ I-й первоначальныхъ свѣдѣній изъ Графической Статики имѣетъ цѣлью дать возможность читателямъ, вовсе незнакомымъ съ нею, пользоваться для практическихъ примѣненій, какъ предлагаемымъ выпускомъ, такъ и выпускомъ 1893 года.

С. Куницкій.

С.-Петербургъ.
24 Ноября 1894 года.

Нѣкоторыя сочиненія относящіяся къ литературѣ предмета.

Hoskins. Tke Elements of graphic Statics. New-York. 1892.
Du Bois. Elements of graphical Statics. 1877.
Lévy. La statique graphique et ses applications aux constructions. Paris 1874.
Maurer. Statique Graphique. Paris. 1882.
Koechlin. Applications de la Statique Graphique. Paris. 1889.
Castigliano. Théorie de l'équilibre des systemès élastiques. Turin. 1879.
Müller Breslau. Elemente der graphischen Statik. 1881.
Müller-Breslau. Die Graphische Statik der Baukonstruktion. Leipzig. 1892.
Ott. Graphische Statik. Prag. 1883.
Jeep. Das Graphische Rechnen und die Graphostatik. Weimar. 1887
Saviotti. La Statica Grafica. Milano. 1888.
Crotti. La Teoria dell'Elasticità. Milano. 1888.

«*Qual'è il principio più generale della*
«*meccanica? E il principio che l'azione è*
«*eguale e contraria alla reazione*».

Crotti. *La Teoria dell'Elasticità.*
(pag. 31).

Milano. 1888.

Предисловіе ко второму изданію.

Первое изданіе настоящаго труда, появившагося въ концѣ 1894 года, въ теченіе двухъ лѣтъ вполнѣ исчерпано; это обстоятельство побудило автора выпустить предлагаемое второе изданіе, исправленное и улучшенное помѣщеніемъ чертежей въ видѣ политипажей въ текстѣ, а не на отдѣльныхъ листахъ, приложенныхъ въ концѣ книги, какъ это было сдѣлано въ первомъ изданіи.

Настоящій выпускъ составляетъ собственно первую часть труда, вторая часть коего, изданная въ 1896 году (вторымъ изданіемъ) фирмою К. Л. Риккера подъ заглавіемъ: *„Начала Статики Сооруженій“*, заключаетъ въ себѣ изложеніе основаній графическихъ способовъ разсчета мостовъ простыхъ системъ.

Считаю долгомъ выразить мою искреннюю признательность издательской фирмѣ К. Л. Риккера за тщательное изданіе, въ особенности же за помѣщеніе политипажей въ текстѣ.

С. Куницкій.

3-го августа 1896 года
С.-Петербургъ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

I. Первоначальныя свѣдѣнія изъ Графической Статики.

II. Основанія примѣненія статическихъ условій равновѣсія къ опредѣленію усилій въ частяхъ сооруженій.

III. Основанія разсчета сооруженій, носящихъ названіе фермъ.

IV. Опредѣленіе усилій въ стропильныхъ фермахъ балочной системы.

ВВЕДЕНІЕ.

Всякое инженерное сооруженіе должно вообще удовлетворять одновременно слѣдующимъ условіямъ:

1) *цѣлесообразности*, т. е. соотвѣтствовать своему назначенію;

2) *устойчивости, прочности* и *жесткости*, т. е. размѣры всего сооруженія и каждой его части должны соотвѣтствовать тѣмъ наибольшимъ силамъ, которымъ сооруженіе можетъ подвергаться, и предполагаемой продолжительности службы сооруженія, смотря по тому — временное ли оно, или постоянное; это соотвѣтствіе должно быть опредѣлено надлежащимъ разсчетомъ; при этомъ качества матеріала, употребляемаго въ сооруженіе, должны соотвѣтствовать той прочности матеріала, которая принята въ основаніе при опредѣленіи размѣровъ частей сооруженія;

3) внѣшнимъ своимъ видомъ производить пріятное впечатлѣніе на глазъ и внушать увѣренность въ надлежащей устойчивости, прочности и жесткости, и

4) наименьшей стоимости, т. е. удовлетвореніе вышеприведеннымъ тремъ условіямъ должно достигаться съ возможно меньшими затратами.

Для удовлетворенія условію устойчивости сооруженія, т. е. сопротивленія всего сооруженія или отдѣльныхъ его частей опрокидыванію и сдвиганію дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ, надлежитъ выбрать соотвѣтственнымъ образомъ главные размѣры сооруженія и придать надлежащее устройство опорнымъ его частямъ*).

Для удовлетворенія существенному для многихъ сооруженій условію жесткости, т. е. сопротивленія боковому въ различныхъ плоскостяхъ выгибу или выпучиванію (называемому также про-

*) По сему предмету см., между прочимъ: „Основныя данныя для проектированія верхняго строенія металлическихъ желѣзнодорожныхъ мостовъ“, С. К. Куницкій. 1891 г.

дольнымъ изгибомъ)*) длинныхъ частей сооруженія, подвергающихся сжатію,— слѣдуетъ придавать упомянутымъ ихъ частямъ, каковы напр. колонны, стойки, сжатые пояса и сжатые раскосы мостовъ, стропильныя ноги и т. п., — поперечные размѣры увеличенные, по надлежащему повѣрочному разсчету, противъ размѣровъ, полученныхъ по разсчету прочности на одно лишь сжатіе, не принимая во вниманіе продольнаго изгиба.

Наконецъ, обыкновенныя условія прочности опредѣляютъ размѣры частей сооруженій въ предположеніи простаго сжатія (безъ продольнаго изгиба) или вытягиванія или поперечнаго изгиба.

Для опредѣленія достаточности размѣровъ частей сооруженія необходимо знать усилія, дѣйствующія на эти части.

По способу опредѣленія этихъ усилій инженерныя сооруженія можно раздѣлить на двѣ группы:

а) сооруженія *статически-опредѣлимыя*, усилія въ частяхъ коихъ могутъ быть опредѣлены на основаніи однихъ лишь законовъ Статики твердыхъ тѣлъ, и

б) сооруженія *статически-неопредѣлимыя* (усилія въ частяхъ коихъ не могутъ быть опредѣлены на основаніи однихъ лишь законовъ Статики твердыхъ тѣлъ), требующія для опредѣленія усилій въ составныхъ ихъ частяхъ разсмотрѣнія обстоятельствъ, сопровождающихъ упругія измѣненія сооруженія подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ.

Изъ этого ясно, что для опредѣленія усилій въ частяхъ сооруженій статически-неопредѣлимыхъ, вообще говоря, нужно предварительно задаться поперечными размѣрами частей такихъ сооруженій или сдѣлать нѣкоторыя предположенія о поперечныхъ размѣрахъ частей сооруженія, чтобы судить объ упругихъ его измѣненіяхъ**). Поэтому въ *статически-неопредѣлимыхъ сооруженіяхъ*, вообще говоря, усилія (и напряженія на кв. единицу площади поперечнаго сѣченія частей), вызываемыя дѣйствіемъ данныхъ внѣшнихъ силъ, опредѣляются по заданнымъ поперечнымъ размѣрамъ частей сооруженія, т. е. эти размѣры *провѣряются*.

Въ *статически-опредѣлимыхъ* сооруженіяхъ, напротивъ того,

---

*) По сему предмету см., между прочимъ, статью инженера А. Н. Фролова Журналъ Министерства путей сообщенія 1889 годъ и сочиненіе Инженера Ф. С. Ясинскаго „Опытъ развитія теоріи продольнаго изгиба". 1893 г.

**) Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что въ практикѣ, за немногими исключеніями, обыкновенно примѣняются такого рода сооруженія, которыя по своему устройству не даютъ подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ другихъ измѣненій, кромѣ измѣненій зависящихъ отъ упругихъ свойствъ матеріала сооруженія; статически-измѣняемыя системы, каковы нѣкоторые типы подкосныхъ мостовъ и висячіе мосты, находятъ себѣ сравнительно рѣдкое примѣненіе.

поперечные размѣры частей сооруженія вычисляются по опредѣленнымъ изъ условій Статики усиліямъ въ этихъ частяхъ, соотвѣтствующимъ даннымъ внѣшнимъ силамъ.

Какъ провѣрка, такъ и вычисленіе поперечныхъ размѣровъ частей сооруженій основываются на томъ, что для прочности сооруженія напряженіе на кв. единицу площади поперечнаго сѣченія каждой его части не должно превосходить нѣкотораго предѣльнаго допускаемаго напряженія, зависящаго отъ свойствъ матеріала, назначенія сооруженія, предполагаемой продолжительности его службы, смотря по тому, временное ли оно или постоянное, и способа дѣйствія на сооруженіе внѣшнихъ силъ.

Предѣльныя допускаемыя напряженія устанавливаются на основаніи опытныхъ данныхъ и наблюденій надъ существующими сооруженіями.

Для облегченія опредѣленія или провѣрки усилій въ частяхъ сооруженій дѣлаются нѣкоторыя предположенія, какъ относительно способа дѣйствія внѣшнихъ силъ, такъ и относительно самой конструкціи сооруженій.—Эти предположенія, вообще говоря, не соотвѣтствуютъ дѣйствительности; вотъ почему имѣютъ особенно важное значеніе, какъ осторожный выборъ предѣльныхъ допускаемыхъ напряженій, такъ и надлежащая разработка конструктивныхъ деталей, такъ какъ эти обстоятельства являются гарантіей прочности и безопасности сооруженій.

Удовлетвореніе этимъ условіямъ лежитъ внѣ области точнаго разсчета и составляетъ предметъ искусства. Отъ опытности и искусства инженера зависитъ надлежащая оцѣнка такихъ обстоятельствъ и условій, которыя, не поддаваясь точному разсчету, могутъ однако имѣть иногда серьезное вліяніе на устойчивость, прочность и безопасность сооруженій.

Если принять во вниманіе условія болѣе близкія къ дѣйствительности, то пришлось бы къ *основнымъ усиліямъ* или соотвѣтственно къ *основнымъ напряженіямъ* прибавить нѣкоторыя *дополнительныя* усилія или соотвѣтственно *дополнительныя напряженія* *).

Предметъ настоящаго выпуска состоитъ преимущественно въ краткомъ изложеніи графическихъ пріемовъ для опредѣленія *основныхъ усилій* въ частяхъ сооруженій **).

---

*) Относительно дополнительныхъ напряженій см., между прочимъ: Schäffer und Sonne, „Handbuch der Ingenieurwissenschaften II Band". Der Brückenbau 2 Abtheilung. 1890; Engesser „Die Zusatz-Kräfte und Nebenspannungen" 1892, а также С. К. Куницкій: „Второстепенныя напряженія въ фермахъ желѣзныхъ мостовъ" 1884 г.

**) Относительно опредѣленія основныхъ усилій въ нѣкоторыхъ мостовыхъ сооруженіяхъ см., между прочимъ: С. К. Куницкій „Основанія графическихъ способовъ разсчета мостовъ простыхъ системъ", 1893 г. и второе изданіе (К. Л. Риккера) 1896 г.

I.

Первоначальныя свѣдѣнія изъ Графической Статики.

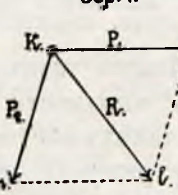
При рѣшеніи задачъ графической Статики силы изображаются по величинѣ и направленію отрѣзками прямыхъ линій.

Для заданія какой либо силы необходимо указать ея линію дѣйствія, т. е. прямую параллельно которой сила должна дѣйствовать, точку приложенія силы и ея направленіе въ ту или другую сторону по линіи дѣйствія, изображаемое стрѣлкою, и величину силы.

Величина силы измѣряется въ опредѣленномъ масштабѣ длиною того отрѣзка прямой, который изображаетъ данную силу. За единицу силы принимается нѣкоторая длина, которая и откладывается по прямой, изображающей данную силу, столько разъ, сколько данная сила содержитъ единицъ силы.

1) Сложеніе силъ, приложенныхъ къ матеріальной точкѣ.

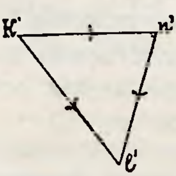
Чер. 1.



Пусть на данную матеріальную точку K (черт. 1) дѣйствуютъ двѣ силы P_1 и P_2, величины и направленія коихъ заданы отрѣзками Km и Kn соотвѣтствующихъ прямыхъ. По правилу параллелограмма силъ равнодѣйствующая силъ Km и Kn равна діагонали Kl параллелограмма $Kmnl$ и дѣйствуетъ по направленію отъ точки K къ точкѣ l.

Треугольникъ Knl называется *треугольникомъ силъ.* Этотъ треугольникъ, представленный отдѣльно на чертежѣ 2-мъ, а именно $\triangle$—къ $K'n'l'$ содержитъ какъ данныя силы, такъ и ихъ равнодѣйствующую, по величинѣ и направленію.

Чер. 2.

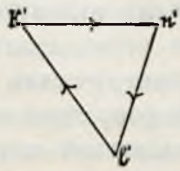


Представимъ себѣ, что по периметру разсматриваемаго треугольника силъ движется нѣкоторая матеріальная точка отъ геометрической точки K' по направленію, показанному на каждой сторонѣ треугольника стрѣлкою. Легко видѣть, что упомянутая матеріальная точка должна двигаться отъ геометрической точки K' къ точкѣ n' и, затѣмъ отъ точки n' къ точкѣ l', но далѣе она не можетъ двигаться, такъ какъ направленіе стрѣлки на прямой $K'l'$ противоположно направленію отъ точки l' къ точкѣ K'. Слѣдовательно: *если въ треугольникѣ силъ одна сторона изображаетъ равнодѣйствующую, то воображаемая ма-*

теріальная точка, которую мы представляемъ себѣ движущеюся по периметру его по направленіямъ стрѣлокъ, не можетъ пройти по всему периметру.

Если бы сила Kl имѣла противоположное направленіе, именно $l'K'$ (чер. 3), то равнодѣйствующая трехъ силъ P_1; P_2 и R, приложенныхъ къ заданной матеріальной точкѣ K, была бы равна нулю, т. е. силы находились бы въ равновѣсіи. Легко видѣть, что въ этомъ случаѣ матеріальная точка, движущаяся по периметру треугольника силъ $K'n'l'K'$ по направленіямъ стрѣлокъ, могла бы пройти по всему периметру треугольника. Слѣдовательно, *если три силы, дѣйствующія на данную матеріальную точку, находятся въ равновѣсіи, то воображаемая матеріальная точка, которую мы представляемъ себѣ движущеюся по периметру треугольника этихъ силъ, можетъ пройти по всему периметру.*

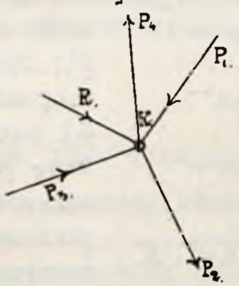
Чер. 3.



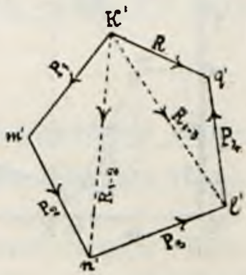
При числѣ заданныхъ силъ, дѣйствующихъ на матеріальную точку, большемъ двухъ,—для опредѣленія равнодѣйствующей ихъ, строится *многоугольникъ силъ*, называемый также *планомъ силъ*.

Для сложенія силъ P_1; P_2; P_3 и P_4 *) (чер. 4), дѣйствующихъ на матеріальную точку K, строится (чер. 5) посредствомъ треугольника $K'm'n'$ равнодѣйствующая R_{1-2} силъ P_1 и P_2, затѣмъ посредствомъ треугольника $K'n'l'$—равнодѣйствующая R_{1-3} силъ R_{1-2} и P_3 и, наконецъ, посредствомъ треугольника $K'l'q'$—равнодѣйствующая R силъ R_{1-3} и P_4, т. е. общая равнодѣйствующая всѣхъ силъ: P_1; P_2; P_3 и P_4.

Чер. 4.



Чер. 5.



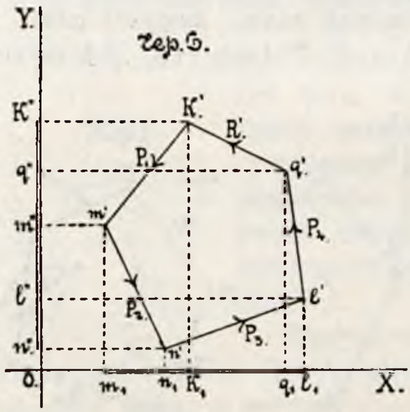
Изъ чертежа 5-го легко видѣть, что для построенія общей равнодѣйствующей R нѣтъ надобности строить предварительно частныя равнодѣйствующія R_{1-2}; R_{1-3} и что достаточно построить на заданныхъ силахъ многоугольникъ, откладывая каждую слѣдующую силу въ сторону ея направленія отъ конца предыдущей. Отрѣзокъ $K'q'$ прямой, соединяющей послѣднюю точку q' съ на-

*) Какъ относительно этихъ силъ, такъ и въ дальнѣйшемъ изложеніи, будемъ всегда предполагать, что всѣ силы лежатъ въ одной плоскости (плоскости дѣйствія силъ).

чальною точкою K', представитъ искомую общую равнодѣйствующую по величинѣ и по направленію. Точка ея приложенія есть данная матеріальная точка K'.

Легко видѣть, какъ уже было показано по отношенію къ треугольнику силъ, представляющему частный случай многоугольника силъ, что когда одна сторона этого многоугольника представляетъ равнодѣйствующую, то матеріальная точка, движущаяся по периметру многоугольника силъ по направленіямъ стрѣлокъ, пройдя по всѣмъ слагающимъ, не можетъ однако пройти по всему периметру, такъ какъ стрѣлка равнодѣйствующей направлена въ сторону противоположную направленію движенія упомянутой матеріальной точки. Слѣдовательно: *если въ многоугольникѣ (планѣ силъ) одна сторона представляетъ равнодѣйствующую, то воображаемая матеріальная точка, которую мы представляемъ себѣ движущеюся по периметру его по направленіямъ стрѣлокъ, не можетъ пройти по всему периметру.*

Въ этомъ случаѣ многоугольникъ (планъ) силъ называется *разомкнутымъ* многоугольникомъ въ отличіе отъ *замкнутаго* многоугольника (плана) силъ, который получился бы, если бы сила R имѣла противоположное направленіе (чер. 6). Система силъ P_1; P_2; P_3; P_4 и R', изображенныхъ сторонами многоугольника (черт. 6), находится въ равновѣсіи, такъ какъ равнодѣйствующая этой системы силъ равна нулю. Матеріальная точка, приведенная въ поступательное движеніе послѣдовательнымъ приложеніемъ силъ, принадлежащихъ къ упомянутой системѣ, возвратилась бы въ первоначальное свое положеніе.



Если силы, приложенныя къ данной матеріальной точкѣ, находятся между содою въ равновѣсіи, то построенный на этихъ силахъ многоугольникъ (планъ) силъ будетъ замкнутый, т. е. воображаемая матеріальная точка, которую мы представимъ себѣ движущеюся по периметру этого многоугольника, можетъ пройти по всему периметру и возвратиться въ первоначальное свое положеніе.

Изъ чертежа 6-го, на коемъ показаны проекціи замкнутаго многоугольника силъ на оси X-овъ и $У$-овъ видно, что алгебраическая сумма проекцій сторонъ замкнутаго треугольника на данныя оси, (а слѣдовательно на любую ось), равна нулю, что приводитъ къ извѣстнымъ условіямъ Статики: $\Sigma X = 0; \Sigma Y = 0$.

Многоугольникъ (планъ) силъ можно строить, откладывая заданныя силы въ произвольномъ порядкѣ, при чемъ однако необходимо соблюдать условіе, чтобы воображаемая движущаяся матеріальная точка могла имѣть по периметру, образованному составляющими силами, непрерывное движеніе, т. е. каждую слѣдующую силу надобно строить отъ конца предыдущей въ сторону указаннаго стрѣлкою направленія слѣдующей силы.

Пусть дана система силъ дѣйствующихъ на данную матеріальную точку, но *не уравновѣшивающихся взаимно*; построеніемъ многоугольника заданныхъ силъ опредѣлимъ ихъ *равнодѣйствующую*, которую будетъ представлять замыкающая сторона многоугольника, если на ней будетъ показано стрѣлкою направленіе отъ начала первой заданной силы до конца послѣдней изъ заданныхъ силъ. Въ построенномъ такимъ образомъ многоугольникѣ можно дѣлать различныя комбинаціи, каждая изъ коихъ будетъ соотвѣтствовать новому заданію, а именно: любую изъ силъ этого многоугольника можно принять за равнодѣйствующую остальныхъ силъ, которыя въ этомъ случаѣ представятъ собою заданныя силы.

Въ многоугольникѣ силъ дѣйствующихъ на данную матеріальную точку и взаимно уравновѣшивающихся любая изъ силъ уравновѣшиваетъ остальныя.

2) Сложеніе заданныхъ силъ, дѣйствующихъ на различныя матеріальныя точки неизмѣняемой системы (абсолютно-твердаго тѣла).

Пусть дана неизмѣняемая система (абсолютно-твердое тѣло), имѣющая плоскость симметріи, въ которой лежатъ всѣ заданныя силы дѣйствующія на тѣло и приложенныя въ различныхъ его точкахъ по различнымъ направленіямъ. Величина и направленіе равнодѣйствующей заданныхъ силъ, дѣйствующихъ на разсматриваемое тѣло, могутъ быть легко опредѣлены построеніемъ, точно такимъ же образомъ какъ и въ предыдущемъ случаѣ,—многоугольника (плана) силъ.

Въ этомъ легко убѣдиться, выстраивая, по правилу параллелограмма силъ, послѣдовательно равнодѣйствующія: сперва двухъ изъ числа заданныхъ силъ, потомъ третьей данной силы и равнодѣйствующей двухъ первыхъ силъ, четвертой силы и равнодѣйствующей трехъ первыхъ силъ и т. д.

При построеніи этихъ равнодѣйствующихъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что условія равновѣсія неизмѣняемой системы (или, вообще, результатъ дѣйствія на нее данныхъ силъ) не измѣняются:

1) отъ перенесенія точки приложенія силы но направленію ея дѣйствія, и

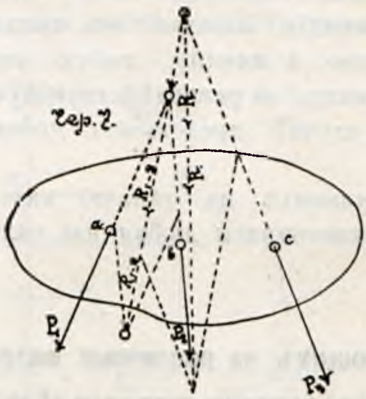
2) отъ прикрѣпленія къ неизмѣняемой системѣ матеріальныхъ (невѣсомыхъ) точекъ, связанныхъ съ нею неизмѣняемыми (невѣсомыми) связями.

Первое изъ этихъ замѣчаній даетъ намъ возможность строить равнодѣйствующую двухъ заданныхъ силъ, приложенныхъ къ двумъ различнымъ точкамъ неизмѣняемой системы, если продолженія этихъ силъ пересѣкаются между собою.

Второе изъ этихъ замѣчаній даетъ намъ возможность находить равнодѣйствующую силъ, продолженія коихъ пересѣкаются между собою внѣ предѣловъ данной неизмѣняемой системы.

При построеніи, на основаніи приведенныхъ выше указаній, равнодѣйствующей заданныхъ силъ, дѣйствующихъ на различныя точки данной неизмѣняемой системы, опредѣлятся какъ величина и направленіе, *такъ и положеніе* равнодѣйствующей R этихъ силъ въ плоскости ихъ дѣйствія (черт. 7).

Однако, въ Графической Статикѣ положеніе этой равнодѣйствующей опредѣляется болѣе простымъ и *общимъ пріемомъ, примѣнимымъ и къ случаю нахожденія равнодѣйствующей параллельныхъ силъ*, на основаніи нижеслѣдующихъ соображеній.

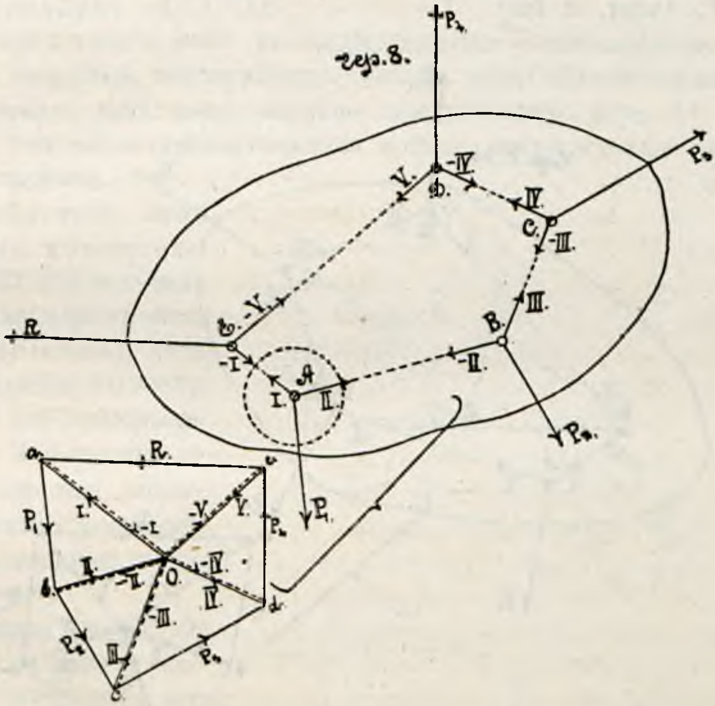


Пусть заданы силы P_1; P_2; P_3 и P_4, дѣйствующія на различныя точки абсолютно-твердаго тѣла (черт. 8). Введемъ новую систему вспомогательныхъ силъ попарно взаимно уничтожающихся, слѣдовательно не нарушающихъ условій равновѣсія тѣла, а именно: къ произвольной точкѣ A, взятой на силѣ P_1, приложимъ двѣ силы I и II, уравновѣшивающія эту силу P_1 и имѣющія произвольныя направленія, напримѣръ AE и AB. Величины этихъ вспомогательныхъ силъ найдутся изъ треугольника aOb, въ которомъ $aO \parallel AE$ и $Ob \parallel AB$; направленія дѣйствія этихъ силъ показаны стрѣлками I и II.

Продолжимъ силу II до пересѣченія P_2 въ B и повторимъ для силы P_2 дѣйствіе, исполненное для P_1, а именно: приложимъ въ B двѣ силы, уравновѣшивающія эту силу P_2, изъ коихъ одна—II должна быть равна и противоположна силѣ II, а другая опредѣляется по величинѣ и направленію третьей стороной Oc

треугольника bOc. Направленіе дѣйствія этихъ составляющихъ опредѣляется стрѣлками силъ—II и III.

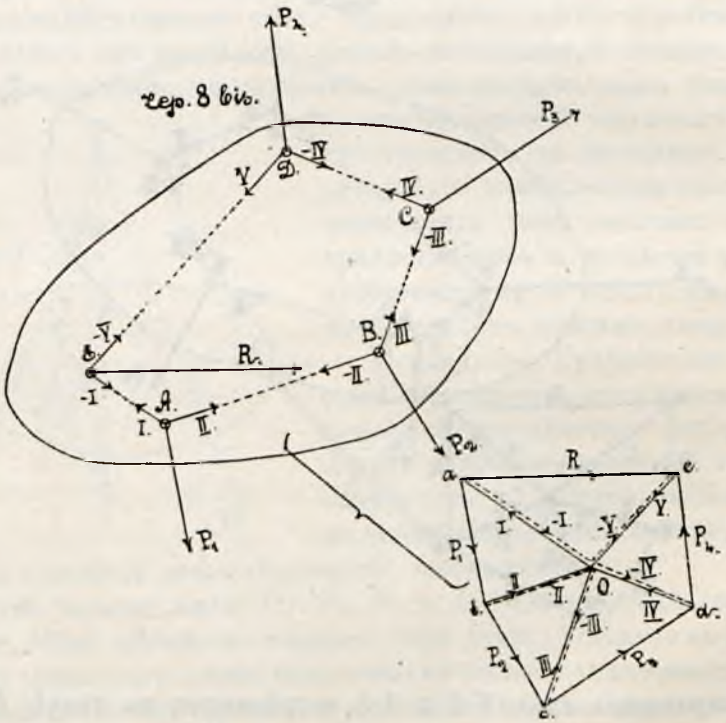
Въ точкѣ C, получающейся отъ пересѣченія направленія силъ III и P_3, приложимъ вспомогательныя силы: одну—III, равную и противоположную силѣ III, и другую силу IV, величина и направленіе коей опредѣляется прямою, соединяющею d съ O. Въ точкѣ D, т. е. въ пересѣченіи силъ IV и P_4, прикладываемъ двѣ силы, уравновѣшивающія силу P_4, изъ коихъ одна—IV, равна и противоположна силѣ IV-й, а другая V-я $= eO$.



Направленія силъ V-й и I-й встрѣчаются въ точкѣ E.

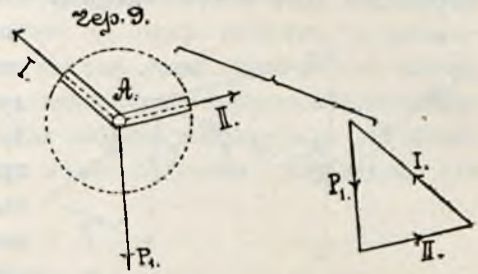
Если приложить въ этой точкѣ силу R, величина и направленіе коей опредѣлены на многоугольникѣ силъ такимъ образомъ, чтобы онъ замыкался и двѣ силы — I и — V, равныя и противоположныя силамъ I и V, приложеннымъ къ точкамъ A и D, то изъ треугольника aOe легко видѣть, что точка E при дѣйствіи на нее трехъ этихъ силъ находится въ равновѣсіи.

Такимъ образомъ, каждая изъ точекъ: A, B, C, D и E находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ трехъ силъ, но изъ этихъ силъ — равныя и противоположныя силы I и — I, дѣйствующія въ A и E, силы II и — II, дѣйствующія въ A и B, силы III и — III, дѣйствующія въ B и C, силы IV и — IV, дѣйствующія въ C и D, и силы V и — V, дѣйствующія въ D и E, взаимно уничтожаются; слѣдовательно сила R, проходящая черезъ точку E и имѣющая направленіе ea, при которомъ стрѣлка силы R направлена въ ту же сторону, какъ и стрѣлки остальныхъ сторонъ многоугольника силъ, *уравновѣшиваетъ* силы P_1, P_2, P_3 и P_4, а слѣдовательно сила R, имѣющая противоположное направленіе, т. е. ae, при которомъ стрѣлка силы R направлена въ сторону противоположную стрѣлкамъ остальныхъ сторонъ многоугольника силъ, представляетъ *равнодѣйствующую* данныхъ силъ P_1, P_2, P_3 и P_4 (черт. 8 bis).

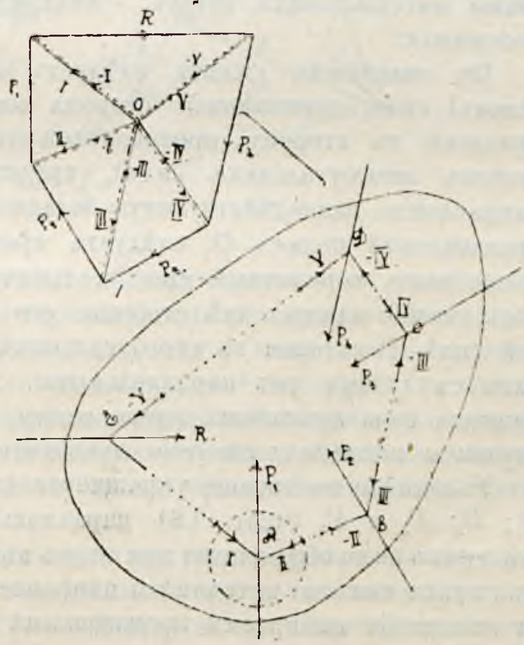


Матеріальныя точки A, B, C, D, E данной неизмѣняемой системы (абсолютно-твердаго тѣла) можно себѣ представить связанными между собою неизмѣняемыми связями, образующими многоугольникъ $ABCDE$, съ которымъ въ свою очередь неизмѣннымъ образомъ связаны всѣ остальныя матеріальныя точки тѣла. При направленіи силъ, показанномъ на черт. 8, многоугольникъ $ABCDE$ можно представить себѣ въ видѣ *нерастяжимой нити или нерастяжимой веревки*, находящейся внутри тѣла, такъ какъ изъ равновѣсія силъ около каждой изъ матеріальныхъ точекъ A; B;

C; D и E легко убѣдиться (черт. 9), что связь должна подвергаться вытягивающимъ усиліямъ, а именно, вырѣзывая мысленно часть тѣла около какой либо изъ точекъ, видимъ, что силы, дѣйствующія на связи, направлены въ наружную ихъ сторону, т. е. вытягиваютъ связи.



При направленіи силъ, показанномъ на черт. 10, многоугольнкъ $ABCDE$ можно представить себѣ въ видѣ системы *несжимаемыхъ* и *негибкихъ* стержней, образующихъ какъ бы родъ многоугольной жесткой рамки, такъ какъ, подобно предыдущему, черт. 11, легко видѣть, что части многоугольника должны подвергаться сжимающимъ усиліямъ.

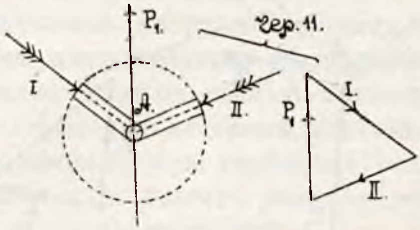


Вслѣдствіе этой аналогіи многоугольникъ $ABCDE$ получилъ названіе *веревочнаго многоугольника*, хотя правильнѣе было-бы назвать его *многоугольникомъ вспомогательныхъ силъ* или *многоугольникомъ положенія* (опредѣляющимъ положеніе силъ).

Прямыя Oa, Ob, Oc и т. д. въ многоугольникѣ (планѣ) силъ называются *лучами*, а точка O — *полюсомъ*. Разстояніе полюса отъ какой нибудь изъ силъ, представляющихъ стороны этого многоугольника, называется *полюснымъ разстояніемъ*.

Какъ видно изъ чертежей 8, 8 bis и 10-го, каждый лучъ въ многоугольникѣ (планѣ) силъ соотвѣтствуетъ двумъ силамъ, направленнымъ по сторонамъ веревочнаго многоугольника, равнымъ между собою по величинѣ и имѣющимъ одну линію дѣйствія, но различныя направленія, показанныя стрѣлками; такъ напримѣръ, лучъ Oa (черт. 8) соотвѣтствуетъ силамъ I и — I; лучъ Ob —

силамъ II и — II; лучъ *Oc* — силамъ III и — III; лучъ *Od* — силамъ IV и — IV и лучъ *Oe* — силамъ V и — V. Для нагляднаго выраженія того обстоятельства, что каждый лучъ соотвѣтствуетъ двумъ силамъ, имѣющимъ противоположныя направленія, вдоль лучей проведены на чертежахъ 8, 8 bis и 10-мъ пунктирныя прямыя (которыя собственно должны совпадать съ лучами), изображающія силы обратнаго направленія: — I; — II; — III; — IV и — V.



Стрѣлки на лучахъ и на пунктирныхъ прямыхъ показываютъ направленія силъ. На прочихъ чертежахъ, съ цѣлью ихъ упрощенія, упомянутыя пунктирныя прямыя не показаны.

Такимъ образомъ, для опредѣленія равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ данной неизмѣняемой системы матеріальныхъ точекъ, — надлежитъ произвести слѣдующія построенія:

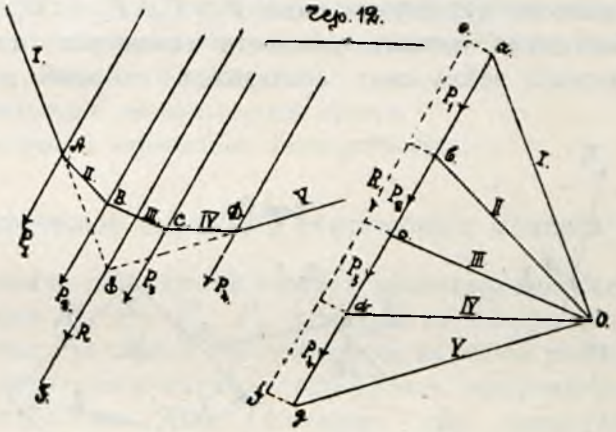
На заданныхъ силахъ слѣдуетъ построить многоугольникъ (планъ) силъ, замыкающая сторона коего (стрѣлка которой направлена въ сторону противоположную стрѣлкамъ остальныхъ сторонъ многоугольника силъ), представитъ по величинѣ и по направленію равнодѣйствующую заданныхъ силъ. Затѣмъ, выбравъ произвольный полюсъ *O*, слѣдуетъ провести лучи I; II; III и т. д. и построить веревочный многоугольникъ *ABCD*... такимъ образомъ, чтобы каждыя двѣ стороны его взаимно пересѣкались на той силѣ *P*, которая въ многоугольникѣ силъ образуетъ треугольникъ съ лучами имъ параллельными. *Равнодѣйствующая R заданныхъ силъ проходитъ черезъ точку, въ которой пересѣкаются первая и послѣдняя сторона веревочнаго многоугольника.*

Указанное построеніе упрощается въ томъ случаѣ, когда силы P_1; P_2; P_3 и P_4 (черт. 12) параллельны между собою; многоугольникъ силъ обращается при этомъ въ прямую *ef*. Равнодѣйствующая этихъ силъ по величинѣ и направленію $= ef$, а для опредѣленія ея положенія выбираемъ произвольный полюсъ *O*, проводимъ лучи *Oa*, *Ob*, *Oc*... и строимъ веревочный многоугольникъ *IABCDV*. На пересѣченіи крайнихъ сторонъ его *IE* и *VE* получается точка *E*, опредѣляющая положеніе равнодѣйствующей *R*. Построеніе равнодѣйствующей параллельныхъ силъ имѣетъ, между прочимъ, широкое примѣненіе при графическихъ опредѣленіяхъ центровъ тяжести площадей фигуръ, имѣющихъ сложное очертаніе, а также матеріальныхъ кривыхъ и ломаныхъ линій и т. п.

Изъ изложеннаго выше видно, что слѣдуетъ различать веревочные многоугольники *замкнутые* и *незамкнутые*.

Веревочный многоугольникъ называется замкнутымъ, когда стороны его образуютъ сомкнутую ломаную линію, такъ что воображаемая матеріальная точка можетъ пройти по всему периметру этого многоугольника, двигаясь все въ одну сторону, и возвратиться въ то мѣсто, откуда она начала свое движеніе и когда, при этомъ, каждая изъ вершинъ веревочнаго многоугольника расположена на линіи дѣйствія *одной изъ заданныхъ силъ.* При построеніи замкнутаго веревочнаго многоугольника послѣдняя его сторона совпадаетъ съ первою.

Черт. 12.



Въ замкнутомъ веревочномъ многоугольникѣ три силы, сходящіяся у каждой изъ его вершинъ, взаимно уравновѣшиваются.

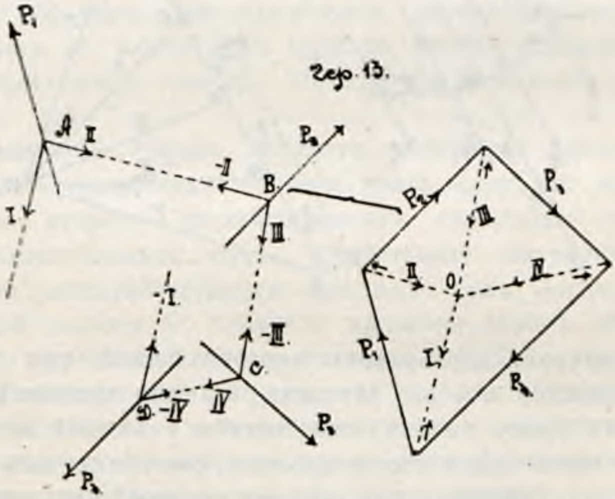
Каждымъ тремъ силамъ, сходящимся у каждой изъ вершинъ замкнутаго веревочнаго многоугольника, соотвѣтствуетъ въ многоугольникѣ силъ треугольникъ взаимно уравновѣшивающихся силъ, образуемый заданною силою и двумя лучами, представляющими по величинѣ и по направленію силы уравновѣшивающія заданную силу.

Такимъ образомъ, каждыя три изъ упомянутыхъ силъ по ихъ положенію опредѣляются веревочнымъ многоугольникомъ, а по величинѣ и направленію соотвѣтствующимъ многоугольникомъ силъ, съ нанесенными на немъ лучами.

3) Условія равновѣсія плоской неизмѣняемой системы.

Одно изъ этихъ условій равновѣсія очевидно состоитъ въ томъ, чтобы равнодѣйствующая силъ, дѣйствующихъ на систему, была равна нулю, для чего необходимо, чтобы *многоугольникъ силъ*, построенный согласно предыдущему, *былъ замкнутый.* Если равнодѣйствующая силъ дѣйствующихъ на систему равна нулю, то система, находившаяся до приложенія силъ въ покоѣ, не получитъ поступательнаго движенія. Что же касается движенія вращательнаго, то таковое и въ этомъ случаѣ возможно, если система данныхъ силъ приводится къ *парѣ силъ*, т. е. къ двумъ равнымъ, параллельнымъ между собою и направленнымъ въ противоположныя стороны силамъ, приложеннымъ къ двумъ точкамъ системы, не лежащимъ на прямой параллельной линіи дѣйствія упомянутыхъ силъ.

Разсмотримъ такой случай. Пусть (черт. 13) на данную неизмѣняемую систему дѣйствуютъ силы P_1; P_2; P_3 и P_4, приложенныя къ различнымъ точкамъ плоскости симметріи системы, причемъ направленія всѣхъ силъ совпадаютъ съ этою плоскостью.



Послѣ построенія веревочнаго многоугольника для этихъ силъ— оказывается, что *крайнія его стороны параллельны между собою*, т. е. веревочный многоугольникъ не замыкается.

Разсматривая веревочный многоугольникъ $IABCDI$ какъ часть данной матеріальной системы, связанную неизмѣнно со всей системой,—видимъ, что, такъ какъ равнодѣйствующая силъ P_1; P_2; P_3 и P_4 по величинѣ равна нулю (смотри многоугольникъ силъ) и такъ какъ силы II и —II; III и—III; IV и —IV попарно взаимно уравновѣшиваются,—то для равновѣсія всей системы необходимо къ точкамъ A и D приложить силы равныя и прямопротивоположныя дѣйствующимъ на эти точки силамъ I и —I.

Изъ этого легко видѣть, что разсматриваемая система не будетъ находиться въ равновѣсіи, а должна вращаться подъ вліяніемъ пары силъ I и —I, разстояніе коихъ одной отъ другой h называется *плечомъ* пары силъ, а произведеніе $I \times h$ изъ силы на плечо—*моментомъ пары силъ*.

Представимъ себѣ, что положеніе силы P_4 задано было бы иначе, а именно эта сила была-бы передвинута параллельно самой себѣ влѣво настолько, что положеніе вспомогательной силы —I совпало-бы въ одну прямую съ положеніемъ вспомогательной силы I, тогда веревочный многоугольникъ былъ бы замкнутъ, силы —I и I взаимно уничтожились бы и данная матеріальная система находилась бы въ равновѣсіи.

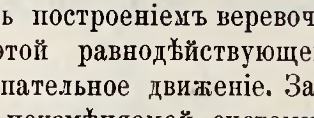
Слѣдовательно, для равновѣсія плоской матеріальной системы должны быть соблюдены *два условія*, а именно: *силы, дѣйствующія на систему, должны давать:*

1) *замкнутый многоугольникъ силъ, и*
2) *замкнутый веревочный многоугольникъ.*

4) Графическое выраженіе статическаго момента силъ.

Представимъ себѣ, что на плоскую неизмѣняемую систему дѣйствуютъ силы P_1; P_2; P_3: P_4, лежащія въ плоскости симметріи этой системы; пусть силы эти приводятся къ одной равнодѣйствующей R, которую мы съумѣли опредѣлить построеніемъ веревочнаго многоугольника. Подъ вліяніемъ этой равнодѣйствующей данная система получитъ нѣкоторое поступательное движеніе. Закрѣпимъ неподвижно одну точку данной неизмѣняемой системы, находящуюся внѣ линіи дѣйствія равнодѣйствующей R; тогда подъ вліяніемъ послѣдней система получитъ вращателное движеніе около нѣкоторой оси, проходящей черезъ закрѣпленную точку. Обстоятельства вращенія системы существенно зависятъ отъ момента вращенія, т. е. отъ произведенія изъ силы R на плечо ея относительно оси вращенія (на разстояніе линіи дѣйствія силы отъ закрѣпленной точки системы). Дѣйствіе силы R, въ данномъ случаѣ, можемъ представить себѣ наглядно какъ дѣйствіе силы на рычагъ, плечо коего равно разстоянію линіи дѣйствія силы R до точки вращенія рычага.

Черт. 14.



Означенный моментъ вращенія, называемый въ Статикѣ статическимъ моментомъ, графически можетъ быть измѣряемъ удвоенною площадью треугольника, имѣющаго вершину въ закрѣпленной точкѣ системы и построеннаго на отрѣзкѣ прямой, изображающемъ данную силу (черт. 14).

Моменты, вращающіе по направленію часовой стрѣлки, условимся считать положительными, а моменты, вращающіе въ сторону обратную движенію часовой стрѣлки,—отрицательными.

Обращаясь къ чертежу 15-му, гдѣ точка A представляетъ собою точку, относительно которой желаемъ знать моментъ данныхъ силъ или равнозначащій моментъ ихъ равнодѣйствующей,—видимъ, что если провести черезъ точку A прямую параллельную линіи дѣйствія R, то изъ подобія треугольниковъ aOd и MNL найдется:

$$y : r = R : H,$$

или

$$yH = Rr.$$

Объясненіе къ чер. 15 bis. Точка A дана. $AL \parallel R$. Первая сторона веревочнаго многоугольника $BCDM$ есть I; послѣдняя его сторона есть V: обѣ эти стороны совпадаютъ въ одну прямую. Точка N (сравн. чер. 15) совпадаетъ съ точкою L; слѣдовательно отрѣзокъ $NL = y = o$.

Слѣдовательно, *статическій моментъ данныхъ силъ относительно данной точки равенъ произведенію изъ полюснаго разстоянія (H) равнодѣйствующей на отсѣченный продолженными крайними сторонами веревочнаго многоугольника отрѣзокъ (y) прямой параллельной равнодѣйствующей и проходящей черезъ данную точку.*

Полюсное разстояніе измѣряется на планѣ силъ и *представляетъ нѣкоторую силу*, а *упомянутый отрѣзокъ прямой параллельной равнодѣйствующей представляетъ* нѣкоторое плечо, т. е. *ли-*

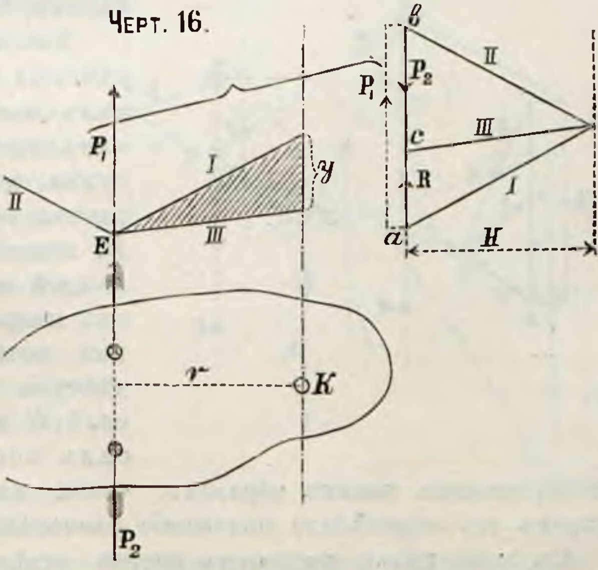
нейную величину. Найденный моментъ силъ—отрицательный. Чтобы провести систему въ равновѣсіе, т. е. уравновѣсить упомянутый отрицательный моментъ равнымъ ему положительнымъ моментомъ,—прибавимъ къ данной системѣ силъ P_1; P_2; P_3 и P_4 силу R_1, равную по величинѣ равнодѣйствующей R данныхъ силъ и совпадающую съ линіею ея дѣйствія, но направленную въ сторону противоположную направленію равнодѣйствующей R, и построимъ вновь веревочный могоугольникъ, который теперь замкнется. Легко видѣть, что для новой системы силъ P_1; P_2; P_3; P_4 и R_1 сумма моментовъ ихъ относительно любой точки вращенія равна нулю. Сверхъ того, легко видѣть, что при новой системѣ силъ для любой точки вращенія $y=0$.

Итакъ, *для всякаго замкнутаго веревочнаго многоугольника равнодѣйствующая данныхъ силъ равна нулю и отрѣзокъ, отсѣкаемый продолженіемъ первой и послѣдней сторонъ веревочнаго многоугольника на любой прямой равенъ нулю.*

Изъ изложеннаго ясно, что условіе замкнутости веревочнаго многоугольника равносильно условію Статики, что сумма моментовъ всѣхъ данныхъ силъ относительно любой точки должна быть равна нулю, т. е. $\Sigma M = 0$.

Частный случай построенія статическаго момента относительно данной точки представляетъ черт. 16-й. На этомъ чертежѣ имѣемъ двѣ силы P_1 и P_2 различныя по величинѣ и по направленію, но имѣющія одну общую линію дѣйствія; требуется при помощи веревочнаго многоугольника построить статическій моментъ равнодѣйствующей этихъ силъ относительно точки K. Строимъ планъ силъ abc; отрѣзокъ ac изобразитъ по величинѣ и по направленію равнодѣйствующую данныхъ силъ.

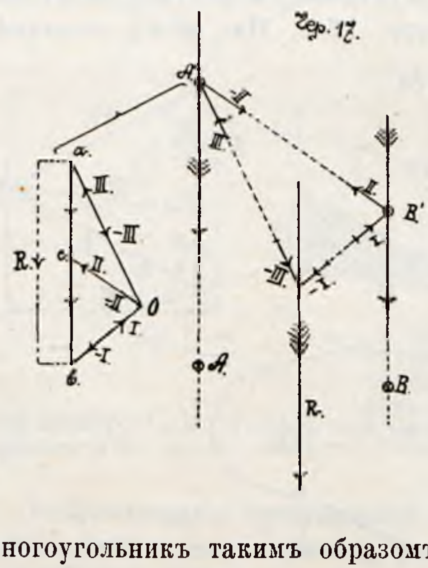
Черт. 16.



Строимъ веревочный многоугольникъ: изъ произвольной точки E, взятой на линіи дѣствія силы P_1, проводимъ сторону веревочнаго многоугольника I параллельно направленію луча Oa; изъ той же точки E проводимъ сторону веревочнаго многоугольника *II* параллельно лучу *Ob* до встрѣчи съ линіею дѣйствія силы P_2; эта точка встрѣчи въ данномъ случаѣ есть точка *E*; изъэтой точки проводимъ крайнюю сторону *III* веревочнаго многоугольника паралельно лучу *Oc*. Точка пересѣченія двухъ крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника опредѣлитъ собою точку приложенія равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2; эта точка, въ данномъ случаѣ, опять совпадаетъ съ точкою *E*. Проведемъ черезъточку *K* прямую параллельную линіи дѣйствія равнодѣйствующей силъ P_1 и P_2, т. е. въ данномъ случаѣ прямую параллельную общей линіи дѣйствія этихъ силъ. Продолженія двухъ крайнихъ сторонъ веревочнаго многоугольника *I* и *III* отсѣкутъ на упомянутой прямой, проведенной черезъ *A*, отрѣзокъ *y*, произведеніе коего па полюсное разстояніе *H* и выразитъ величину искомаго момента. Результаты построенія выражаетъ на черт.16-омъ заштрихованный треугольникъ.

5) Примѣненіе веревочнаго многоугольника къ разложенію силъ на параллельныя имъ слагающія.

1) Пусть дана сила *R* (чер.17); требуется разложить ее на двѣ параллельныя ей составляющія, проходящія черезъ данныя точки *A* и *B*.

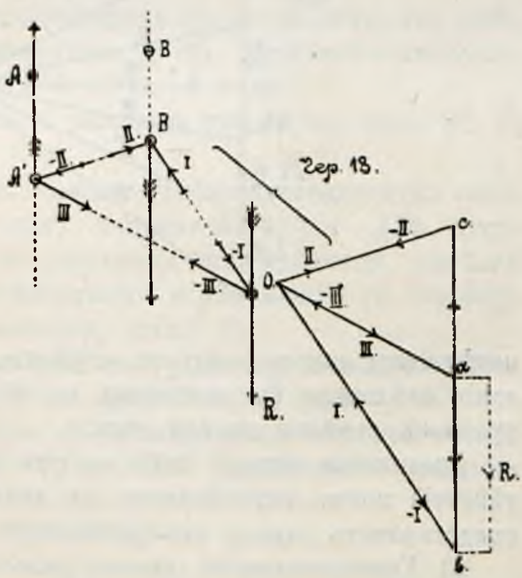


Точки приложенія и линіи дѣйствія двухъ искомыхъ силъ намъ извѣстны; сверхъ того, намъ извѣстна алгебраическая сумма величинъ этихъ силъ, равная величинѣ данной силы *R*; неизвѣстны лишь величины каждой изъ искомыхъ силъ и ихъ направленія. Черезъ данныя точки проведемъ линіи дѣйствія силъ параллельныхъ силѣ *R* и для двухъ искомыхъ силъ построимъ веревочный многоугольникъ такимъ образомъ, чтобы пересѣченіе крайнихъ сторонъ его опредѣлило положеніе равнодѣйствующей *R*.

Съ этою цѣлью построимъ сперва отдѣльно многоугольникъ силъ, представляющій въ данномъ случаѣ отрѣзокъ прямой длиною *R*; изъ произвольнаго полюса *O* проведемъ лучи *Oa* и *Ob*.

Параллельно лучамъ *Oa* и *Ob* черезъ произвольную точку, взятую на равнодѣйствующей *R*, построимъ стороны веревочнаго многоугольника I-ую и III-ую, найдемъ его вершины A' и B' и среднюю его сторону $A'B'$. Параллельно послѣдней построимъ въ многольникѣ силъ лучъ Oc. Отрѣзки ac и cb по величинѣ и по направленію представятъ искомыя силы. Въ самомъ дѣлѣ, изъ приведеннаго выше объясненія значенія построенія веревочнаго многоугольника (стр. 10-я; черт. 8 bis) слѣдуетъ, что силы сходящіяся у каждой изъ вершинъ A' и B', взаимно уравновѣшиваются; слѣдовательно, слагающая силы R, проходящая черезъ точку A', должна уравновѣшиваться съ силами—II и III, а слагающая силы R, проходящая черезъ точку B, должна уравновѣшиватся съ силами I и II. Въ планѣ силъ—треугольникъ Oca соотвѣтствуетъ силамъ сходящимся у вершины A' веревочнаго многоугольника; треугольника Ocb соотвѣтствуетъ силамъ, сходящимся у вершины B'—веревочнаго многоугольника. Изъ сравненія тѣхъ и другихъ силъ ясно, что отрѣзокъ ac по величинѣ и направленію представляетъ одну изъ искомыхъ слагающихъ, а отрѣзокъ cb—вторую.

Точки A *и* B могутъ быть заданы или по одну сторону силы R, или по разныя стороны этой силы. Второму случаю соотвѣтствуетъ рѣшеніе задачи, показанное на чертежѣ 17-мъ; первому случаю соотвѣтствуетъ рѣшеніе задачи, показанное на чертежѣ 18-мъ.



2) Пусть даны точки приложенія и линія дѣйствія двухъ параллельныхъ силъ; требуется опредѣлить величины этихъ силъ такимъ образомъ, чтобы онѣ уравновѣшивали данную систему силъ параллельныхъ между собою и данной линіи дѣйствія (чер. 19).

Эта задача сводится къ предыдущей, а именно:

1) опредѣляется равнодѣйствующая данной системы силъ;

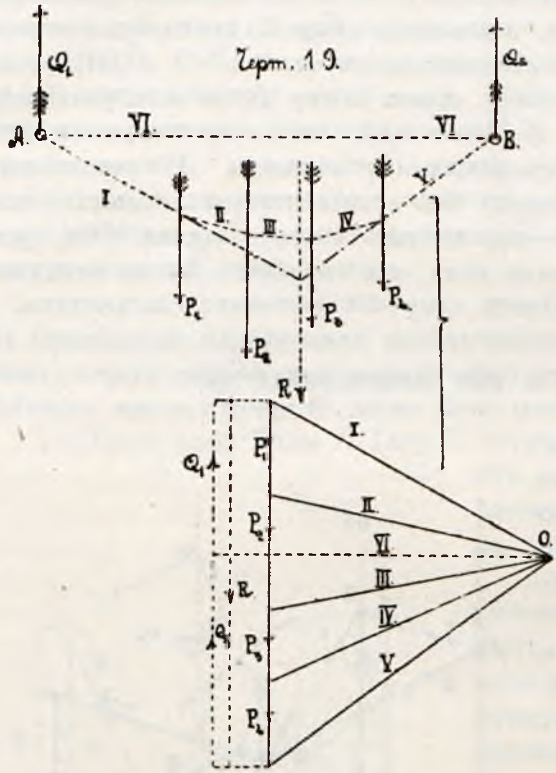
2) найденная равнодѣйствующая разлагается на двѣ параллельныя ей составляющія согласно предыдущему.

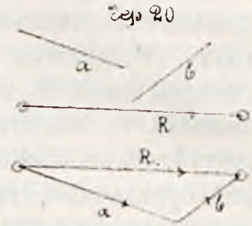
Приведенныя задачи имѣютъ примѣненіе при опредѣленіи опорныхъ противодѣйствій въ балкахъ и въ балочныхъ фермахъ.

6) Случаи разложенія силъ на слагающія имъ непараллельныя.

1) *Разложеніе данной силы на двѣ слагающія по даннымъ линіямъ дѣйствія ей непараллельнымъ.*

Даны сила R и линіи дѣйствія a и b двухъ слагающихъ, на которыя требуется ее разложить (чер. 20).





Задача сводится къ построенію треугольника силъ, у котораго одна сторона есть данная сила, а двѣ другія параллельны двумъ даннымъ линіямъ дѣйствія. Направленія слагающихъ опредѣляются стрѣлками, направленными въ сторону противоположную стрѣлкѣ данной силы.

Если бы искомыя силы должны были уравновѣшивать данную силу, то стрѣлки, показывающія ихъ направленія слѣдовало бы поставить въ ту же сторону, въ какую направлена стрѣлка данной силы.

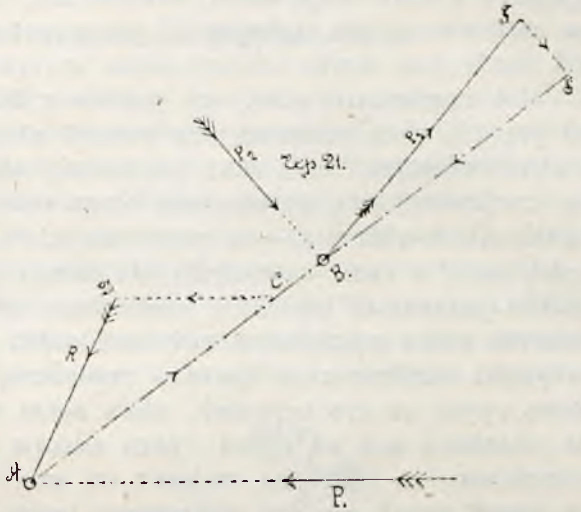
Разложеніе данной силы на три и болѣе слагающихъ, линіи дѣйствія коихъ пересѣкаются съ данною силою въ одной точкѣ, представляетъ задачу неопредѣленную.

2) *Уравновѣшиваніе данной силы помощью трехъ силъ непересѣкающихся въ одной точкѣ.*

Эта задача имѣетъ примѣненіе при опредѣленіи усилій въ составныхъ частяхъ инженерныхъ сооруженій, имѣющихъ видъ фермъ.

На чер. (21-мъ) показаны данная сила R и положенія трехъ силъ P_1; P_2 и P_3, которыя не пересѣкаются въ одной точкѣ.

При равновѣсіи четырехъ силъ, сила уравновѣшивающая двѣ изъ нихъ, равна и прямо-противоположна силѣ, уравновѣшивающей двѣ остальныя силы. Продолжимъ силу P_1 до пересѣченія въ точкѣ A съ силою R; сила уравновѣшивающая R и P_1 должна пройти черезъ точку A.



Такъ какъ силы P_2 и P_3 пересѣкаются между собою въ точкѣ B, то сила уравновѣшивающая P_2 и P_3 должна пройти черезъ точку B.

Имѣя же въ виду, что обѣ силы уравновѣшивающія: первая — силы R и P_1, а вторая — силы P_2 и P_3, — должны быть между собою равны и прямо-противоположны, для равновѣсія всѣхъ четырехъ силъ, — видимъ, что линія дѣйствія каждой изъ упомянутыхъ двухъ уравновѣшивающихъ силъ должна пройти черезъ обѣ точки A и B.

Зная это, легко опредѣлить величину каждой изъ силъ: P_1; P_2 и P_3, а именно:

1) строимъ треугольникъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ, а именно: силы R; P_1 и силы, направленной по AB; пусть треугольникъ этотъ ACD; на сторонахъ его покажемъ стрѣлки въ ту сторону, въ которую направлена стрѣлка силы R; отрѣзокъ CD представитъ искомую величину силы P;

2) строимъ треугольникъ взаимно-уравновѣшивающихся силъ: P_2; P_3 и силы направленной по продолженію прямой AB отъ точки B и имѣющей величину AC и направленіе CA; пусть этотъ треугольникъ BFF; отрѣзки FE и BF представятъ искомыя величины силъ P_2 и P_3.

II.

Основанія примѣненія статическихъ условій равновѣсія къ опредѣленію усилій въ частяхъ сооруженій.

1) Различіе между тѣлами абсолютно-твердыми и упругими.

Въ Статикѣ разсматриваются системы *неизмѣнно*-связанныхъ матеріальныхъ точекъ, т. е. такъ называемыя абсолютно-твердыя тѣла, форма коихъ подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ не можетъ измѣниться. При разсчетахъ же сооруженій приходится имѣть дѣло съ тѣлами упругими, т. е. такими, разстоянія между частицами коихъ подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ измѣняются, причемъ и видъ сооруженій измѣняется, они деформируются, и, въ зависимости отъ деформацій, развиваются въ частяхъ сооруженій болѣе или менѣе значительныя внутреннія силы.

Изъ сказаннаго ясно, что условія дѣйствія внѣшнихъ силъ на упругія тѣла разнятся отъ условій ихъ дѣйствія на тѣла абсолютно-твердыя. Тогда какъ равновѣсіе абсолютно-твердаго тѣла не измѣняется отъ перенесенія точки приложенія силы по направленію ея дѣйствія,—въ упругомъ тѣлѣ получаются различныя деформаціи и силы взаимодѣйствія между частицами, а слѣдовательно различныя состоянія равновѣсія, смотря по тому, гдѣ находится точка приложенія внѣшней силы. Вертикальный упругій стержень находится въ другихъ условіяхъ, когда къ нему приложенъ грузъ въ его вершинѣ, чѣмъ когда этотъ грузъ приложенъ на половинѣ или на одной трети высоты стержня. Только по отношенію къ дѣйствію стержня на его основаніе безразлично: въ какой точкѣ его оси приложенъ грузъ. Разсматривая равноплечій рычагъ, напр. коромысло вѣсовъ, легко видѣть, что по отношенію къ этому коромыслу, представляющему упругое тѣло, не безразлично: положимъ ли мы на каждую чашку вѣсовъ по одинаковому грузу или приложимъ двойной грузъ по серединѣ коромысла; одинаковое дѣйствіе въ томъ и другомъ случаѣ получается только по отношенію къ точкѣ опоры, къ которой подвѣшено коромысло вѣсовъ.

Столь извѣстное въ Статикѣ понятіе о равнодѣйствующей нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ различнымъ точкамъ абсолютно твердаго тѣла,—по отношенію къ упругимъ тѣламъ, строго говоря, теряетъ свое значеніе, такъ какъ деформація тѣла существенно зависитъ отъ точки приложенія внѣшней силы.

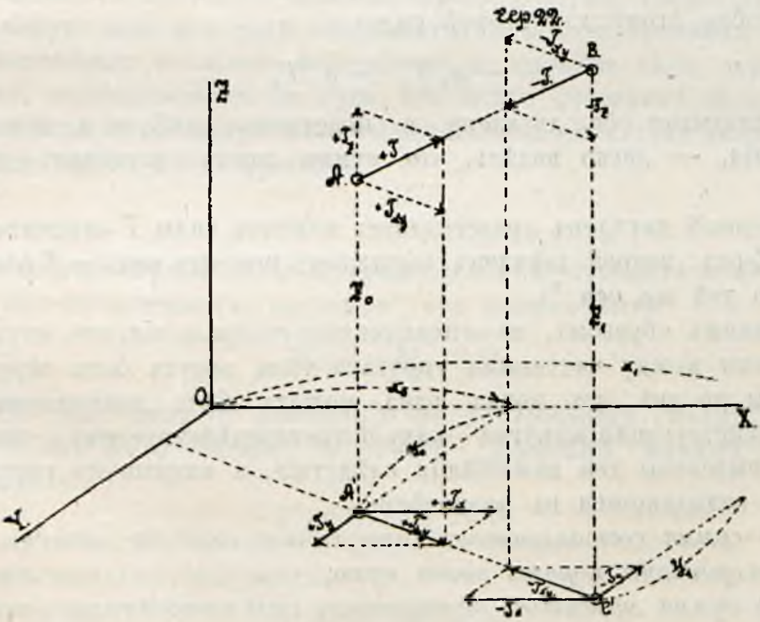
По этой же причинѣ нельзя, вообще говоря, безъ измѣненія деформаціи тѣла, т. е. безъ измѣненія условій внутренняго его равновѣсія,—поворачивать пары внѣшнихъ силъ въ плоскости ихъ дѣйствія или измѣнять плечи силъ, составляющихъ пару, съ соотвѣтственнымъ измѣненіемъ величины силъ (лишь бы моментъ пары силъ сохранилъ свою величину); между тѣмъ, по законамъ Статики то и другое возможно по отношенію къ абсолютно твердому тѣлу безъ нарушенія условій его равновѣсія.

Дѣйствіе внѣшней силы на части упругаго тѣла, находящіяся въ отдаленіи отъ точки приложенія этой силы къ тѣлу, какъ извѣстно, приписывается вліянію, оказываемому каждою частицею упругаго тѣла на сосѣднія частицы. Отсюда понятно, что всякій законъ, которому подчиняется дѣйствіе внѣшней силы на какую либо часть упругаго тѣла долженъ быть выведенъ изъ законовъ взаимодѣйствія смежныхъ частицъ упругаго тѣла.

2) Условія равновѣсія упругаго тѣла.

Самое общее начало механики состоитъ въ томъ, что *дѣйствіе равно и прямопротивоположно противодѣйствію*; это начало составляетъ также основную гипотезу теоріи взаимодѣйствія частицъ упругаго тѣла. Всякое дѣйствіе, которое производитъ частица A упругаго тѣла на другую его частицу B, вызываетъ равное и прямопротивоположное дѣйствіе частицы B на частицу A.

Упругое тѣло можемъ представить себѣ въ видѣ системы матеріальныхъ точекъ, связанныхъ между собою упругими связями, напр. въ видѣ прямолинейныхъ невѣсомыхъ и негибкихъ упругихъ



стержней, могущихъ подвергаться вытягиванію и сжатію; дѣйствіе каждаго изъ такихъ стержней на матеріальныя точки тѣла можетъ быть замѣнено двумя равными и прямопротивоположными силами, направленными по прямой, соединяющей обѣ матеріальныя точки (черт. 22.)

Поэтому, если между двумя частицами упругаго тѣла дѣйствуетъ сила, составляющія коей по осямъ коордпнатъ суть: T_x;

T_y; T_z, то дѣйствуетъ также сила, соотвѣтствующія составляющія коей: $-T_x$; $-T_y$; $-T_z$. Пусть x_0; y_0; z_0—координаты точки приложенія первой силы; координаты точки приложенія второй силы опредѣляются тѣми условіями, что эта точка находится на прямой параллельной направленію силы и проходящей черезъ точку (x_0; y_0; z_0). Направленіе первой силы составляетъ съ осями координатъ углы, косинусы коихъ пропорціональны величинамъ T_x; T_y; T_z; слѣдовательно координаты точки приложенія второй силы получатъ соотвѣтственно значенія:

$$x_1 = x_0 + \lambda T_x;\ y_1 = y_0 + \lambda T_y;$$

$$z_1 = z_0 + \lambda T_z,$$

гдѣ λ есть нѣкоторый численный коэффиціентъ.

Составимъ двучлены: для первой силы

$$x_0 T_y - y_0 T_x$$

и подобно этому для второй силы:

$$-x_1 T_y + y_1 T_x$$

Складывая оба двучлена и подставляя вмѣсто x_1 и y_1 ихъ значенія, — легко видѣть, что сумма этихъ двуленовъ равна нулю,

Первый двучленъ представляетъ моментъ силы T относительно оси Z-овъ, второй двучленъ выражаетъ моментъ силы $-T$ относительно той же оси *).

Такимъ образомъ, на основаніи того соображенія, что внутреннія силы между частицами упругаго тѣла могутъ быть сгруппированы по двѣ, изъ коихъ одна можетъ быть разсматриваема какъ дѣйствующая, а другая—какъ ей противодѣйствующая,—могутъ быть выведены два важнѣйшія слѣдствія, а именно въ упругомъ тѣлѣ, находящемся въ равновѣсіи:

1) *сумма составляющихъ внутреннихъ силъ на каждую изъ осей координатъ порознь равна нулю*;

2) *сумма моментовъ внутреннихъ силъ относительно каждой изъ осей координатъ порознь равна нулю.*

---

*) Моменты эти получаются слѣдующимъ образомъ: разлагаемъ силу T на составляющія по двумъ направленіямъ, а именно по направленію параллельному оси Z-овъ и по направленію нормальному къ той же оси; произведеніе изъ нормальной составляющей на разстояніе ея до оси Z-овъ и выражаетъ величину искомаго момента; имѣя въ виду, что моментъ равнодѣйствующей равенъ суммѣ моментовъ составляющихъ, беремъ (вмѣсто упомянутаго произведенія) сумму моментовъ составляющихъ силы T по осямъ X-овъ и Y-овъ относительно оси Z-овъ. Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что моменты вращающіе по направленію часовой стрѣлки считаются положительными, а вращающіе по обратному направленію — отрицательными.

Разсмотримъ упругое тѣло, находящееся въ напряженномъ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ; этому напряженному равновѣсію соотвѣтствуетъ нѣкоторая деформація тѣла и нѣкоторыя внутреннія силы между его частицами. Внѣшнія силы могутъ быть массовыя (называемыя также объемными), т. е. приложенныя къ каждой частицѣ тѣла, какъ напримѣръ собственныя вѣсъ, или поверхностныя, приложенныя лишь въ опредѣленныхъ мѣстахъ поверхности тѣла, каковы напримѣръ противодѣйствій опоръ тѣла или сосредоточенныя внѣшнія нагрузки, или, наконецъ, внѣшнія давленія, приложенныя ко всѣмъ точкамъ поверхности тѣла (какъ напримѣръ давленіе воздуха).

Выдѣлимъ мысленно въ этомъ тѣлѣ произвольную матеріальную точку (частицу) упругаго тѣла; если она находится въ равновѣсіи, то всѣ силы (внутреннія и внѣшнія), приложенныя къ ней, должны взаимно уравновѣшиваться, т. е. равнодѣйствующая всѣхъ этихъ силъ должна быть равна нулю.

Отсюда слѣдуетъ, что называя черезъ U сумму составляющихъ (на какую либо изъ осей координатъ) всѣхъ внутреннихъ силъ, приложенныхъ ко *всѣмъ матеріальнымъ точкамъ* тѣла, черезъ V сумму составляющихъ на туже ось всѣхъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ данному тѣлу,—найдемъ, что для случая равновѣсія должно имѣть мѣсто уравненіе

$$U + V = 0.$$

Называя черезъ M_u и M_v сумму соотвѣтствующихъ моментовъ, на томъ-же основаніи, находимъ, что должно быть:

$$M_u + M_v = 0.$$

Но такъ какъ по отношенію къ внутреннимъ силамъ, какъ только что было указано, въ случаѣ равновѣсія имѣютъ мѣсто уравненія:

$$U = 0; \quad M_u = 0.$$

то окончательно получаемъ:

$$V = 0; \quad M_v = 0,$$

т. е. *внѣшнія силы, дѣйствующія на упругое тѣло, находящееся въ равновѣсіи,—должны составлять систему силъ взаимно уравновѣшивающихся между собою,* какъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ приложены къ абсолютно-твердому тѣлу или къ одной матеріальной точкѣ.

Такимъ образомъ, и для случая равновѣсія упругаго тѣла *необходимо,* чтобы внѣшнія силы удовлетворяли условіямъ Статики.

Однако удовлетвореніе внѣшними силами условіямъ Статики *недостаточно* для того, чтобы утверждать, что упругое тѣло дѣйствительно находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ этихъ внѣшнихъ силъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если къ концамъ упругаго стержня приложить по его оси двѣ равныя и прямопротивоположныя силы, направленныя при томъ такъ, чтобы стержень вытягивался, то, хотя система такихъ двухъ силъ и удовлетворяетъ условіямъ Статики, но вслѣдствіе одного этого обстоятельства разсматриваемый стержень еще не будетъ находиться въ равновѣсіи, такъ какъ онъ подъ дѣйствіемъ этихъ силъ будетъ удлиняться вслѣдствіе своей упругости. Стержень придетъ только тогда въ состояніе равновѣсія, когда при удлиненіи въ немъ разовьются такія внутреннія силы, которыя необходимы для равновѣсія каждой матеріальной точки стержня, т. е. когда стержень получитъ деформацію, соотвѣтствующую состоянію равновѣсія подъ дѣйствіемъ данныхъ внѣшнихъ силъ.

Такимъ образомъ, *для равновѣсія упругаго тѣла необходимо должно существовать условіе, чтобы какъ каждая частица, такъ и каждая часть тѣла* (мысленно выдѣленная) *находились, въ отдѣльности, въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нимъ внѣшнихъ и внутреннихъ силъ, развившихся при деформаціи тѣла.*

3) Вліяніе деформацій упругаго тѣла.

Разсматриваемыя нами условія равновѣсія относятся къ *деформированному* состоянію тѣла, при которомъ положенія отдѣльныхъ частей тѣла, (напр. элементовъ сквозныхъ фермъ), относительно неподвижныхъ осей координатъ вообще измѣнились сравнительно съ положеніемъ этихъ частей до деформаціи тѣла; слѣдовательно, при опредѣленіи усилій (внутреннихъ силъ) въ частяхъ упругихъ тѣлъ, надлежало-бы принять во вниманіе то относительно расположеніе и тѣ размѣры отдѣльныхъ частей тѣла, которыя соотвѣтствуютъ не заданному первоначальному расположенію этихъ частей и первоначальнымъ ихъ размѣрамъ, а *окончательному деформированному состоянію тѣла.* Въ Статикѣ сооруженій разсматриваются лишь упругія деформаціи, зависящія отъ статическаго дѣйствія внѣшнихъ силъ. Внѣшнія силы предполагаются возрастающими постепенно отъ нуля до заданныхъ окончательныхъ ихъ значеній, такимъ образомъ, что во всякій моментъ, во все время деформаціи тѣла, существуетъ равновѣсіе между внѣшними и вызываемыми ими внутренными силами и тѣло не получаетъ колебательнаго движенія около положенія равновѣсія.

При опредѣленіи усилій или соотвѣтственно напряженій въ частяхъ упругаго тѣла, находящагося въ напряженномъ равновѣсіи, *необходимо* обратиться къ разсмотрѣнію вліянія деформаціи тѣла въ нижеслѣдующихъ случаяхъ:

1) когда деформація тѣла обусловливаетъ появленіе *новыхъ внѣшнихъ силъ*, не дѣйствовавшихъ на тѣло въ первоначальномъ его состояніи (напримѣръ, балка лежитъ на двухъ опорахъ и подъ нею въ очень маломъ отъ нея разстояніи находится неподвижный предметъ; при прогибѣ балки подъ дѣйствіемъ нѣкоторыхъ внѣшнихъ силъ, она можетъ коснуться упомянутаго неподвижнаго предмета, противодѣйствіе коего дальнѣйшему прогибу балки, представитъ новую внѣшнюю силу, на нее дѣйствующую и обусловленную размѣромъ прогиба, т. е. деформаціи балки);

2) когда деформація тѣла обусловливаетъ появленіе *новыхъ функцій* данныхъ внѣшнихъ силъ, существенно измѣняющихъ условія равновѣсія (напримѣръ, упругій прямолинейный стержень сжимается двумя силами, приложенными по его концамъ и направленными по оси стержня; если какая либо посторонняя причина сообщитъ боковой выгибъ оси стержня, то каждая изъ упомянутыхъ двухъ силъ даетъ нѣкоторый *изгибающій моментъ* относительно той же оси; появленіе плеча этого момента, а слѣдовательно и самаго момента, т. е. новой функціи внѣшнихъ силъ, будетъ зависѣть отъ деформаціи стержня, который будетъ уже подверженъ не одному сжатію, но сжатію и изгибу; этотъ случай извѣстенъ подъ названіемъ случая „продольнаго изгиба“);

3) когда, несмотря на отсутствіе условій, только что указанныхъ въ 1-мъ и 2-мъ случаяхъ, усилія въ частяхъ упругаго тѣла не могутъ быть опредѣлены на основаніи однихъ лишь законовъ статики, (сюда относятся всѣ статически-неопредѣлимыя сооруженія, въ томъ числѣ и статически-неопредѣлимыя сквозныя фермы).

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ при опредѣленіи усилій и соотвѣтственно напряженій въ частяхъ сооруженій, т. е. при составленіи для этой цѣли условій равновѣсія, вліяніемъ деформаціи *по ея малости* сравнительно съ размѣрами сооруженій и ихъ частей, можно пренебречь. Сравнительная малость деформацій обусловливается тѣмъ обстоятельствомъ, что внѣшнія силы, дѣйствующія на сооруженія, предполагаются не превосходящими нѣкотораго предѣла, внутри коего напряженія матеріала въ частяхъ сооруженія остаются пропорціональными деформаціямъ (т. е. не превосходятъ предѣла упругости), при чемъ предполагается, что по удаленіи внѣшнихъ силъ деформаціи уничтожаются и сооруженіе возвращается къ первоначальному своему состоянію.

Сверхъ того, какъ опытъ, такъ и результаты теоретическихъ изслѣдованій Barré de Saint-Venant и Boussinesq показываютъ, что при опредѣленіи напряженій и деформацій въ частяхъ тѣла, отдаленныхъ отъ точекъ приложенія внѣшнихъ силъ, если тѣло имѣетъ *призматическую* форму, т. е. если длина его значительно превосходитъ наибольшій поперечный его размѣръ (а равно въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ), возможно безъ чувствительной погрѣшности *(за исключеніемъ частей тѣла, расположенныхъ непосредственно вблизи точекъ приложенія внѣшнихъ силъ)* замѣнить дѣйствіе заданной системы внѣшнихъ силъ дѣйствіемъ другой системы внѣшнихъ силъ, приложенной къ той же части тѣла и *статически равнозначащей* первой системѣ. Очевидно, что равнодѣйствующая заданной системы внѣшнихъ силъ, дѣйствующей на опредѣленную часть тѣла, удовлетворяетъ этому условію. Это обстоятельство въ значительной мѣрѣ облегчаетъ опредѣленіе внутреннихъ напряженій (соотвѣтственно внутреннихъ усилій) въ призматическихъ упругихъ тѣлахъ *). Въ сущности внѣшнія силы, дѣйствующія на сооруженія, представляютъ собою не что иное, какъ воображаемыя равнодѣйствующія давленій, производимыхъ на сооруженія другими упругими тѣлами.

4) Способъ сѣченій.

Послѣ приведенныхъ выше предварительныхъ объясненій способы опредѣленія усилій въ частяхъ статически-опредѣлимыхъ сооруженій становятся вполнѣ понятными. Всѣ эти способы основаны на мысленномъ *выдѣленіи* (отсѣченіи) части сооруже-

*) Въ видѣ поясненія замѣтимъ здѣсь, что указаннымъ обстоятельствомъ пользуются при изслѣдованіи напряженій и деформацій въ призматическихъ упругихъ тѣлахъ въ тѣхъ случаяхъ, когда внѣшнія силы приложены не къ основаніямъ, а къ другимъ частямъ призматическаго тѣла. При этомъ примѣняются тѣ формулы теоріи упругости, которыя выведены въ предположеніи, что внѣшнія силы приложены лишь къ основаніямъ призматическаго тѣла и распредѣлены опредѣленнымъ образомъ по этимъ основаніямъ. Для возможности примѣненія упомянутыхъ формулъ въ указанныхъ случаяхъ, достаточно принять за воображаемое основаніе или оконечность призмы какое-либо поперечное ея сѣченіе и предположить, что къ этому сѣченію приложена равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на всю часть призмы по одну сторону этого сѣченія. Тѣ же формулы, относящіяся къ условіямъ внутренняго равновѣсія упругаго призматическаго тѣла, могутъ быть примѣняемы почти съ такою же степенью приближенія, т. е выражаютъ почти такъ же хорошо результаты наблюденій и измѣреній, когда упругое тѣло, при значительной длинѣ его, сравнительно съ поперечными размѣрами, имѣетъ форму не вполнѣ призматическую, но нѣсколько коническую, или же, когда ось его имѣетъ видъ плоской кривой. Во всѣхъ этихъ случаяхъ возможно принять какое-либо сѣченіе тѣла за основаніе, напримѣръ правой части тѣла и приложить къ этому основанію равнодѣйствующую силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть этого тѣла, или принять это сѣченіе за основаніе лѣвой части тѣла и приложить къ нему равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на правую часть тѣла.

нія съ приложенными къ ней внѣшними силами и на приложеніи къ ней нѣкоторыхъ неизвѣстныхъ силъ, замѣняющихъ собою дѣйствіе остальной части сооруженія на выдѣленную его часть. Эти неизвѣстныя силы представляютъ собою — *внутреннія силы по отношенію ко всему сооруженію* и въ то же время *являются внѣшними силами по отношенію къ мысленно выдѣленной* (отсѣченной) *части сооруженія.*

5) Противодѣйствія опоръ сооруженій.

Совокупность извѣстныхъ и неизвѣстныхъ силъ, дѣйствующихъ на выдѣленную (мысленно) часть сооруженія, должна, въ случаѣ равновѣсія сооруженія, удовлетворять условіямъ статики; изъ этихъ условій и опредѣляются неизвѣстныя силы, выражающія собою искомыя усилія въ частяхъ сооруженій.

Къ числу извѣстныхъ внѣшнихъ силъ относятся:

1) заданныя внѣшнія силы, напр. различнаго рода нагрузки;

2) опорныя противодѣйствія или реакціи, оказываемыя на данное сооруженіе тѣлами, которыя составляютъ его опоры.

Опорныя противодѣйствія въ статически-опредѣлимыхъ сооруженіяхъ опредѣляются изъ условій статики, примѣненныхъ ко всему сооруженію.

Поэтому общій порядокъ разсчета долженъ состоять:

1) въ опредѣленіи опорныхъ противодѣйствій;

2) затѣмъ, въ опредѣленіи усилій въ частяхъ сооруженій.

По отношенію къ опорнымъ противодѣйствіямъ или реакціямъ, которыя равны и прямопротивоположны давленіямъ, производимымъ на опоры сооруженіемъ, подъ дѣйствіемъ приложенныхъ къ нему внѣшнихъ силъ, необходимо замѣтить, что число и направленіе ихъ зависятъ отъ числа опоръ и устройства опорныхъ частей сооруженій.

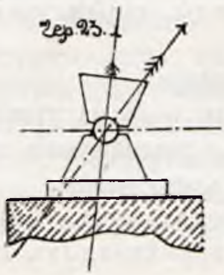
Для опредѣленія опорнаго противодѣйствія, какъ вообще для всякой силы, необходимо знать его линію дѣйствія, точку приложенія, величину и направленіе.

На черт. 26 показано устройство опорной части сооруженія, опредѣляющее точку приложенія и направленіе опорнаго противодѣйствія, а именно сооруженіе опирается на балансиръ съ шарниромъ, скользящій по каткамъ. Какъ вращеніе балансира около шарнира, такъ и скольженіе балансира по каткамъ, предполагаются происходящими безъ тренія.

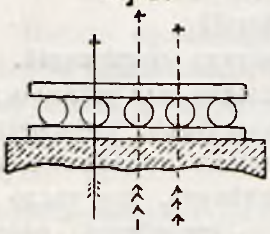
Очевидно, что точка приложенія опорнаго противодѣйствія опредѣляется центромъ шарнира, такъ какъ если бы опорное противодѣйствіе проходило внѣ центра шарнира, то и равное и прямопротивоположное ему опорное давленіе проходило бы внѣ центра шарнира, а слѣдовательно шарниръ повернулся бы около своей оси, т. е. не было бы равновѣсія.

Легко видѣть, что направленіе опорнаго сопротивленія должно быть *нормально* къ линіи катанія катковъ. Въ самомъ дѣлѣ, если бы это направленіе составляло нѣкоторый уголъ съ упомянутою линіею, то и равное и прямопротивоположное ему давленіе на опору составляло бы тотъ же уголъ съ линіею катанія катковъ. Это давленіе возможно было бы разложить на двѣ составляющія, а именно по линіи катанія и по нормали къ линіи катанія. Такъ какъ, по сдѣланному предположенію, балансиръ скользитъ по каткамъ безъ тренія, то онъ сдвинулся бы съ своего мѣста, т. е. равновѣсіе нарушилось бы.

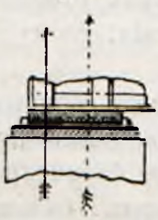
Чер. 23.



Чер. 24



Чер. 25

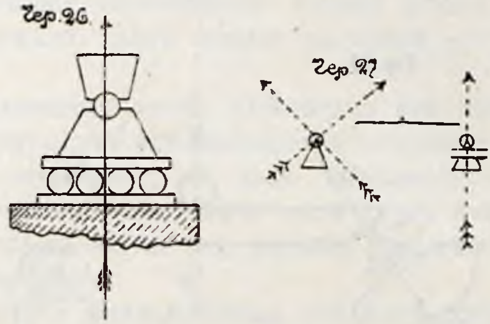


На (чер. 23) показано устройство такъ называемой неподвижной (относительно поступательныхъ перемѣщеній, но допускающей вращеніе) опорной части сооруженія. Изъ предыдущаго легко видѣть, что это устройство опредѣляетъ собою только точку приложенія опорнаго противодѣйствія.

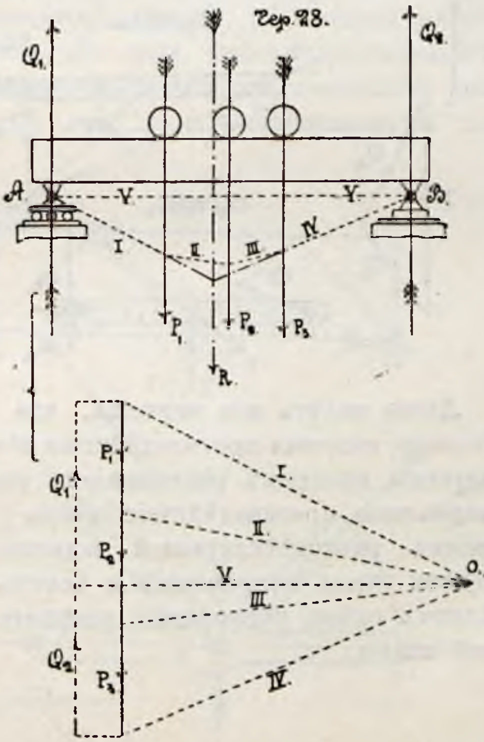
Наконецъ, на черт. (24 и 25) показаны устройства опорныхъ частей, опредѣляющія лишь линіи дѣйствія опорныхъ реакцій, но не опредѣляющія точекъ приложенія этихъ реакцій; эти опорныя части имѣютъ видъ подушекъ на каткахъ или салазокъ и состоятъ изъ двухъ подушекъ, изъ коихъ верхняя, скрѣпленная съ сооруженіемъ, скользитъ по нижней, скрѣпленной съ опорою сооруженія, при чемъ скольженіе предполагается происходящимъ безъ тренія. Эти опорныя части называются скользящей опорой или салазками.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи будемъ придерживаться условныхъ обозначеній, показанныхъ на чер. (27), а именно *опорную часть опредѣляющую* своимъ устройствомъ *лишь точку приложенія опорнаго противодѣйствія* будемъ обозначать кружкомъ; *опорную же часть опредѣляющую* своимъ устройствомъ *какъ точку приложенія, такъ и линію дѣйствія опорнаго противодѣйствія,* будемъ обозначать кружкомъ съ двумя горизонтальными черточками подъ нимъ.

Представимъ себѣ горизонтальную балку, подверженную дѣйствію данныхъ вертикальныхъ силъ расположенныхъ въ одной плоскости, совпадающей съ продольною плоскостью симметріи балки, и при томъ опирающуюся однимъ концомъ на опорную часть, устроенную по чер. (26), а другимъ на опорную часть, устроенную по чертежу (23); опредѣлимъ опорныя противодѣйдствія данной балки.



Изъ плана силъ, чер. (28) легко видѣть, что оба опорныя противодѣйствія направлены по вертикали вверхъ; величина же каждаго изъ нихъ опредѣляется изъ условія, что веревочный многоугольникъ, построенный на заданныхъ силахъ и на двухъ силахъ (опорныхъ противодѣйствіяхъ) неизвѣстныхъ въ отдѣльности по величинѣ, но извѣстныхъ по положенію, по направленію и по суммѣ ихъ величинъ, равной величинѣ равнодѣйствующей заданныхъ внѣшнихъ силъ, долженъ быть замкнутымъ (чер. 28).



Приведенная выше задача свелась къ опредѣленію двухъ неизвѣстныхъ по двумъ условіямъ:

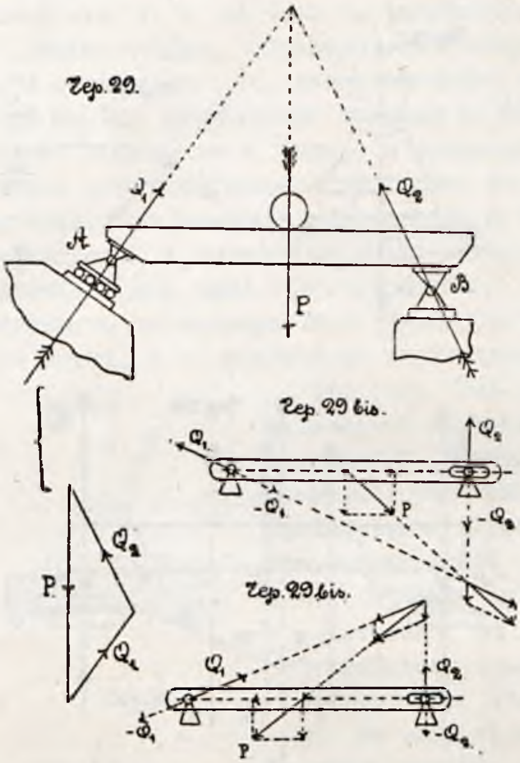
1) что многоугольникъ силъ долженъ быть замкнутый, и

2) что веревочный многоугольникъ долженъ быть замкнутый.

Какъ извѣстно, для равновѣсія плоской системы должны быть удовлетворены три условія статики:

$$\Sigma X = 0$$
$$\Sigma Y = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

Первое изъ этихъ условій, а именно, что сумма проекцій всѣхъ силъ на горизонтальную ось (X—овъ) должна быть равна



нулю, приводится къ тожеству, такъ какъ заданныя силы вертикальны, а два остальныя уравненія, выражающія соотвѣтственно, что сумма проекцій всѣхъ силъ на вертикальную ось (Y—овъ) должна быть равна нулю, и что сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно произвольной точки, лежащей въ плоскости дѣйствія силъ, должна быть равна нулю, опредѣляютъ величины двухъ неизвѣстныхъ опорныхъ противодѣйствій.

Разсмотримъ еще случай, показанный на чер. (29) и 29 bis.

Легко видѣть изъ чертежа, что опорныя давленія, а слѣдовательно, опорныя противодѣйствія и въ этомъ случаѣ могутъ быть получены простымъ разложеніемъ равнодѣйствующей, такъ какъ направленіе противодѣйствія опоры *(A)* встрѣчается съ направленіемъ равнодѣйствующей заданныхъ внѣшнихъ силъ. Точка встрѣчи этихъ направленій и центръ шарнира опоры *(B)* опредѣляютъ собою направленіе опорнаго давленія и противодѣйствія этой опоры.

III.

Основанія разсчета сооруженій, носящихъ названіе фермъ.

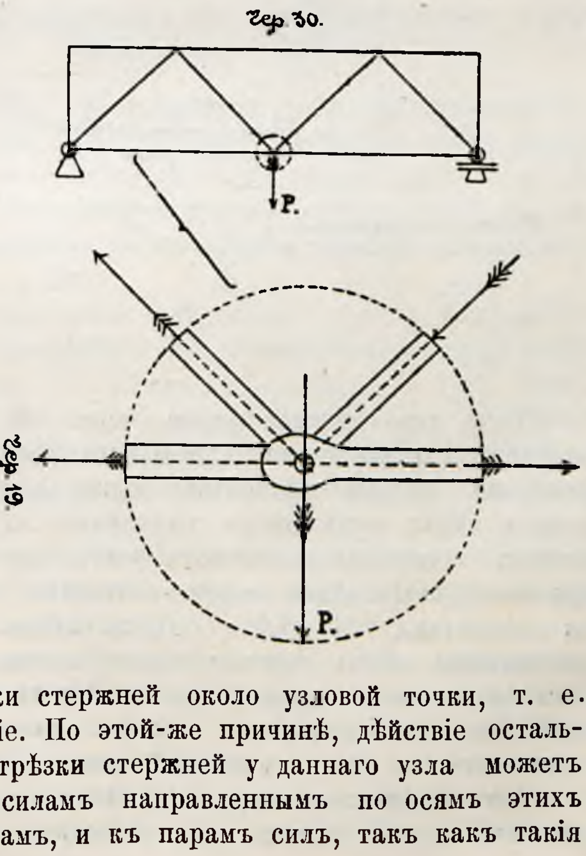
1) Основныя опредѣленія и разсчетныя предположенія.

Фермами называются системы упругихъ стержней, соединенныхъ между собою по концамъ и образующихъ сомкнутую фигуру (сомкнутый многоугольникъ), состоящій обыкновенно изъ системы треугольниковъ.

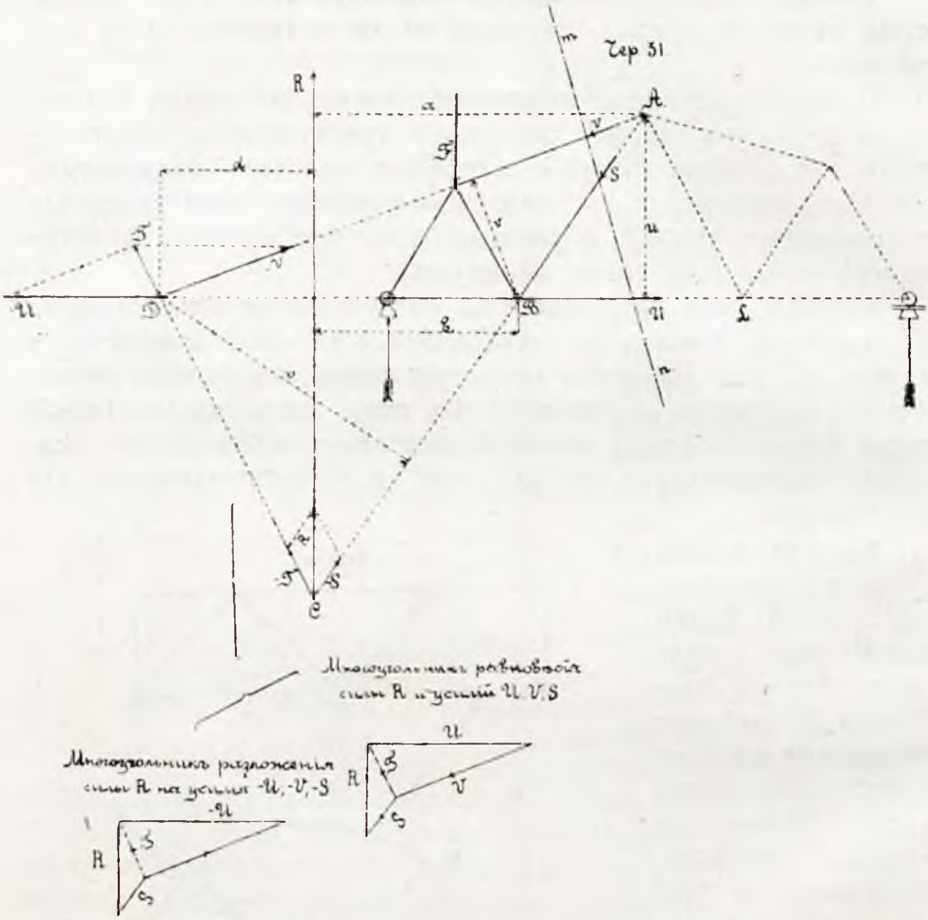
Предметъ нашего разсмотрѣнія составляютъ *плоскія* фермы, т. е. такія оси, всѣхъ стержней коихъ лежатъ въ одной плоскости.

Отдѣльные стержни, называемые также элементами или частями фермъ, въ статикѣ сооруженій предполагаются соединенными между собою помощью шарнировъ въ такъ называемыхъ *узловыхъ точкахъ* (т. е. точкахъ пересѣченія осей двухъ или нѣсколькихъ стержней) и свободно (т. е. *безъ тренія*), вращающимися около осей этихъ шарнировъ.

Внѣшнія силы предполагаются приложенными исключительно къ узловымъ точкамъ и находящимися въ одной плоскости, а именно въ той плоскости симметріи фермы, въ которой расположены оси всѣхъ ея стержней. Въ силу этихъ предположеній части фермъ (стержни) могутъ подвергаться исключительно усиліямъ, направленнымъ по ихъ оси, т. е. вытягивающимъ или сжимающимъ.



Въ самомъ дѣлѣ, выдѣлимъ мысленно изъ данной фермы какой либо узелъ (черт. 30) съ приложенной къ нему внѣшней силой P.— Дѣйствіе остальной части фермы на отрѣзки стержней, сходящихся въ данномъ узлѣ, выразится нѣкоторыми неизвѣстными намъ силами. Очевидно, что для равновѣсія узла эти силы должны проходить черезъ узловую точку, иначе онѣ бы повернули соотвѣтствующіе отрѣзки стержней около узловой точки, т. е. нарушили бы равновѣсіе. По этой-же причинѣ, дѣйствіе остальной части фермы на отрѣзки стержней у даннаго узла можетъ привестись лишь къ силамъ направленнымъ по осямъ этихъ стержней, а не къ силамъ, и къ парамъ силъ, такъ какъ такія пары могли бы повернуть соотвѣтствующіе отрѣзки стержней около узловыхъ точекъ и тѣмъ нарушить равновѣсіе.



Пусть дана плоская ферма (черт. 31); проведемъ линію mn, отсѣчемъ ею мысленно лѣвую часть фермы отъ правой и разсмотримъ условія равновѣсія лѣвой части фермы. Чтобы отсѣченная лѣвая часть фермы находилась въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ заданныхъ внѣшнихъ силъ къ ней приложенныхъ и противодѣйствія лѣвой опоры необходимо, чтобы къ разсѣченнымъ ея элементамъ FA; BA и BL приложены были нѣкоторыя силы, замѣняющія собою дѣйствіе правой части фермы на лѣвую. Эти послѣднія силы и должны уравновѣшиваться съ равнодѣйствующей заданныхъ внѣшнихъ силъ и противодѣйствія опоры, приложенныхъ къ разсматриваемой части фермы.

Противодѣйствія опоръ опредѣляются заранѣе изъ условій равновѣсія всей фермы подъ дѣйствіемъ заданныхъ внѣшнихъ силъ, какъ это было уже изложено по отношенію къ балкѣ лежащей на двухъ опорахъ.

Равнодѣйствующая заданныхъ внѣшнихъ силъ и противодѣйствія опоры, приложенныхъ къ лѣвой части фермы, опредѣлится по величинѣ и по направленію помощію плана силъ, а ея положеніе построится помощію веревочнаго многоугольника.

Для опредѣленія, по извѣстнымъ заданнымъ внѣшнимъ силамъ и противодѣйствіямъ опоръ, — усилій въ частяхъ данной фермы (внутреннихъ силъ по отношенію ко всей фермѣ) наиболѣе употребительны нижеслѣдующіе графическіе способы, — примѣнимые непосредственно лишь къ статически - опредѣлимымъ или такъ называемымъ *простымъ* фермамъ, т. е. къ фермамъ, обладающимъ тѣмъ свойствомъ, что по отношенію къ каждому элементу фермы можно провести прямую линію разсѣкающую ферму на двѣ части, такимъ образомъ, что эта прямая, сверхъ даннаго элемента, встрѣтитъ еще не болѣе двухъ элементовъ фермы, въ коихъ усилія неизвѣстны.

2) **Способъ Кульмана,** *основанный на непосредственномъ разложеніи силъ.*

Положимъ (черт. 31), что найденная равнодѣйствующая заданныхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть фермы (до сѣченія mn), и противодѣйствія лѣвой опоры есть сила R. Разложимъ эту равнодѣйствующую на три составляющія по направленіямъ трехъ мысленно разсѣченныхъ линіею mn элементовъ фермы (FA; BA и BL).

Съ этою цѣлью продолжимъ направленіе одного изъ разсѣченныхъ элементовъ, напримѣръ AB до пересѣченія его въ точкѣ C съ равнодѣйствующею R. Затѣмъ разложимъ въ этой точкѣ силу R на двѣ силы, изъ коихъ одна S направлена по линіи разсѣченнаго элемента AB фермы, а другая T проходитъ черезъ точку D пересѣченія продолженій двухъ остальныхъ разсѣченныхъ элементовъ.

Сила T въ свою очередь можетъ быть разложена на двѣ силы U и V, направленныя по линіямъ двухъ остальныхъ разсѣченныхъ элементовъ FA и BL фермы.

Эти послѣдовательныя разложенія могутъ быть сдѣланы помощію многоугольника силъ (черт. 31), причемъ опредѣлятся по величинѣ и по направленію искомыя внутреннія усилія въ элементахъ FA; BA и BL данной фермы.

Направленіе этихъ усилій покажетъ: какіе изъ упомянутыхъ элементовъ будутъ вытянуты и какіе сжаты. Какъ извѣстно, взаимно-уравновѣшивающіяся силы образуютъ замкнутый многоугольникъ, т. е. стрѣлки этихъ силъ идутъ въ одномъ направленіи. Такъ какъ направленіе равнодѣйствующей R извѣстно, то въ многоугольникѣ силъ остается показать стрѣлки остальныхъ силъ (черт. 31) въ томъ же направленіи.

Затѣмъ слѣдуетъ начертить соотвѣтствующія стрѣлки по осямъ разсѣченныхъ элементовъ фермы справа сѣченія mn и смотря по тому, направлены ли стрѣлки во внутрь разсѣченной части, т. е. справа на лѣво или внаружу разсѣченной части, т. е. слѣва на право, — соотвѣтствующіе элементы фермы будутъ сжаты или вытянуты. Чертежъ (31) показываетъ, что элементы AF и AB сжаты, а элементъ BL — вытянутъ.

3) **Способъ Риттера**, *т. е. способъ статическихъ моментовъ.*

Этотъ способъ основанъ на примѣненіе того условія Статики, что для равновѣсія неизмѣняемой системы сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно произвольной точки системы должна быть равна нулю. За точку, около которой берется сумма моментовъ, — выбирается всегда точка пересѣченія двухъ элементовъ фермъ или двухъ прямыхъ, составляющихъ продолженіе элементовъ фермъ. Такимъ образомъ, изъ неизвѣстныхъ усилій въ трехъ разсѣченныхъ прямою линіею элементахъ — моменты двухъ усилій относительно избранной точки равны нулю, такъ какъ направленія упомянутыхъ усилій проходятъ черезъ эту точку. Слѣдовательно, остается взять моментъ одного неизвѣстнаго усилія и моментъ равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ относительно той же точки.

Разсмотримъ лѣвую часть фермы (черт. 31), мысленно отдѣленную отъ правой сѣченіемъ mn. Усиліе въ элементѣ AB фермы можемъ найти, беря моментъ Rd равнодѣйствующей R внѣшнихъ силъ относительно точки D пересѣченія остальныхъ двухъ разсѣченныхъ элементовъ фермы и раздѣляя этотъ моментъ на разстояніе s точки D отъ направленія AB разсматриваемаго элемента.

Усилія въ трехъ разсѣченныхъ элементахъ могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

Усиліе S въ элементѣ AB:

$$S = \frac{Rd}{s}$$

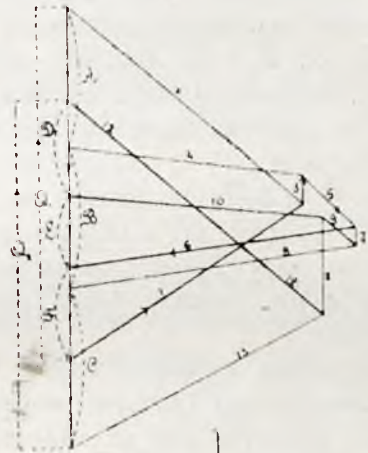
Усиліе U въ элементѣ BL:

$$U = \frac{Ra}{u}$$

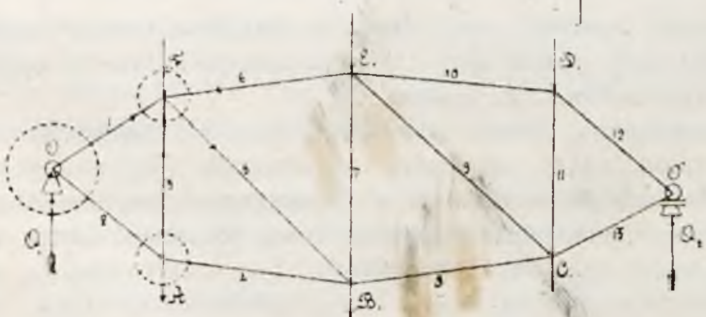
Усиліе V въ элементѣ AF:

$$V = \frac{Rb}{v}$$

Направленія этихъ усилій могутъ быть легко опредѣлены изъ соображенія, что для равновѣсія моментъ искомаго усилія долженъ быть равенъ и прямопротивоположенъ моменту равнодѣйствующей внѣшнихъ силъ. Отсюда слѣдуетъ, напримѣръ, что усиліе S должно быть показано (стрѣлкою) съ правой стороны сѣченія mn съ такимъ направленіемъ, чтобы оно стремилось произвести вращеніе около точки D въ сторону противоположную тому вращенію, которое стремится произвести около той же точки равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ R.



Черт 32.



Если при этомъ усиліе S будетъ направлено во внутрь лѣваго отрѣзка элемента BA, т. е. справа на лѣво, то элементъ BA будетъ сжатъ; въ противномъ случаѣ онъ будетъ вытянутъ.

4) **Способъ Кремона**, сущность коего состоитъ въ послѣдовательномъ вычерчиваніи, — помощію многоугольниковъ силъ для

отдѣльныхъ узловъ, (начиная отъ одной изъ опорныхъ точекъ и переходя отъ одного узла къ другому), — общаго многоугольника, какъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на ферму, такъ и усилій во всѣхъ ея элементахъ.

Этотъ способъ называется также способомъ *взаимныхъ діаграммъ,* такъ какъ упомянутый обшій многоугольникъ силъ имѣетъ видъ діаграммы, находящейся въ опредѣленномъ соотношеніи съ діаграммой, представляющей расположеніе усилій и внѣшнихъ силъ въ самой фермѣ.

Разсмотримъ (черт. 32) рѣшетчатую ферму, подверженную дѣйствію заданныхъ внѣшнихъ силъ, обозначенныхъ буквами A; B; C; D; E и F. Каждый элементъ фермы обозначенъ нумеромъ, который, вмѣстѣ съ тѣмъ, обозначаетъ усиліе, дѣйствующее въ данномъ элементѣ фермы.

На черт. (32), напримѣръ, слѣдуетъ начать отъ опорной точки O и идти по узламъ въ слѣдующемъ порядкѣ: O; A; F; B; E; C; D и O'. Слѣдуетъ переходить отъ узла O къ узлу A, а не къ узлу F, такъ какъ въ узлѣ A сходятся всего три элемента фермы; между тѣмъ какъ въ узлѣ F сходятся четыре элемента.

Заданныя внѣшнія силы, т. е. нагрузки узловъ и опорныя противодѣйствія (которыя очевидно должны быть опредѣлены заранѣе) строятся всѣ въ одномъ многоугольникѣ силъ, (который обращается въ данномъ случаѣ въ прямую линію по параллельности всѣхъ внѣшнихъ силъ), — въ слѣдующемъ порядкѣ:

$$Q_1;\ A;\ B;\ C;\ Q_2;\ D;\ E \text{ и } F.$$

Этотъ порядокъ есть тотъ, въ которомъ точка движущаяся по периметру фермы отъ O по направленію къ A встрѣчаетъ силы, приложенныя къ узламъ.

Разсмотримъ условія равновѣсія узла O. Вырѣжемъ мысленно этотъ узелъ, какъ показано на чертежѣ (32) изъ фермы; для того, чтобы вырѣзанный узелъ O находился въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ приложенной къ нему силы Q_1, необходимо, чтобы по направленію отрѣзковъ элементовъ 1-го и 2-го фермы къ нему были приложены нѣкоторыя силы, замѣняющія собою дѣйствіе остальной части фермы на отрѣзанный узелъ и уравновѣшивающія силу Q_1. Эти силы построятся извѣстнымъ способомъ въ многоугольникѣ силъ.

Отъ узла O переходимъ къ узлу A; въ немъ должны уравновѣшиваться силы: A; 2; 3; 4. Силы A и 2 извѣстны: первая какъ заданная, — вторая же изъ условія равновѣсія узла O; усилія 3 и 4 — неизвѣстны; они опредѣлятся, если провести въ многоугольникѣ силъ изъ конца силы 2-й прямую параллельную элементу 3-му фермы, а изъ конца силы A — прямую параллельную элементу 4-му фермы. Такимъ образомъ построится замкнутый многоугольникъ 2 A 43, опредѣляющій величину усилій 3-го и 4-го.

Отъ узла A переходимъ къ узлу F, въ которомъ усилія 5 и 6 неизвѣстны, между тѣмъ какъ усилія 1; 3 и заданная нагрузка F — извѣстны. Въ многоугольникѣ силъ строимъ многоугоугольникъ F; 1; 3; 5; 6, проводя изъ конца силы F прямую параллельную элементу 6-му фермы, а изъ конца силы 3 прямую параллельную элементу 5-му фермы. Построенный такимъ образомъ многоугольникъ опредѣляетъ усилія 5-е и 6-е.

Послѣ узла F переходимъ послѣдовательно къ узламъ B; E; C; D и O', при чемъ на одной діаграммѣ получаемъ всѣ усилія, дѣйствующія въ элементахъ фермы.

Для повѣрки правильности чертежа можетъ служить то обстоятельство, что усилія 13-е и 12-е должны уравновѣшиваться съ противодѣйствіемъ Q_2 — правой опоры.

На черт. (32) всѣ усилія сжимаюшія и сжимаемые элементы фермы показаны толстыми линіями; тогда какъ вытягиваемые элементы фермы и вытягивающія усилія показаны тонкими линіями. Направленія усилій опредѣляются въ каждомъ узлѣ изъ того условія, что всѣ силы сходящіяся въ узлѣ должны взаимно уравновѣшиваться. Такъ, напримѣръ, для узла F, зная направленіе силы, представляющей нагрузку этого узла, — мы должны показать направленія силъ 1; 3; 5; 6 — стрѣлками такимъ образомъ, чтобы образовался замкнутый многоугольникъ. Соотвѣтственныя стрѣлки наносятся затѣмъ на элементы фермы, при чемъ всѣ стрѣлки, направленныя къ узлу F указываютъ, что подлежашіе элементы подвергаются сжатію; стрѣлки же направленныя отъ узла F указываютъ па вытягивающія усилія.

5) **Сравненіе вышеприведенныхъ трехъ способовъ опредѣленія усилій въ элементахъ фермъ.**

Два первыхъ способа предпочтительны передъ способомъ Кремона въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло съ подвижною нагрузкою, какъ напримѣръ при разсчетѣ мостовыхъ фермъ. Эти способы позволяютъ опредѣлить непосредственно усиліе въ какомъ либо элементѣ фермы, не прибѣгая къ опредѣленію усилій въ другихъ ея элементахъ. Такъ какъ наибольшія усилія въ различныхъ элементахъ фермы получаются при различныхъ расположеніяхъ нагрузки, то, примѣняя одинъ изъ двухъ первыхъ способовъ, мы избавляемся отъ необходимости опредѣлять—для каждаго расположенія нагрузки — усилія во всѣхъ элементахъ фермы, какъ это приходится дѣлать при пользованіи способомъ Кремона.

Напротивъ того, въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣемъ дѣло съ неподвижною нагрузкою, какъ напримѣръ въ стропилахъ,—примѣненіе способа Кремона болѣе быстро ведетъ къ цѣли, давая возможность опредѣлить на одномъ чертежѣ усилія во всѣхъ элементахъ фермы.

6) **Способъ линій вліянія** (инфлюэнтныхъ кривыхъ).

Усилія въ частяхъ фермъ, какъ видно изъ изложенія приведенныхъ выше трехъ способовъ разсчета,—получаются на основаніи статическихъ условій равновѣсія. Для плоской системы эти условія, какъ извѣстно, выражаются аналитически тремя уравненіями:

$$\Sigma X = 0;$$
$$\Sigma Y = 0;$$
$$\Sigma M = 0;$$

означающими, что сумма проекцій на ось X-въ, сумма проекцій на ось Y-въ и сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на систему, должны быть порознь равны нулю при равновѣсіи системы. Въ эти уравненія силы входятъ въ первой степени, такъ что, опредѣляя на основаніи этихъ уравненій нѣкоторыя неизвѣстныя силы въ функціи другихъ—извѣстныхъ, получимъ первыя въ видѣ линейныхъ функцій вторыхъ.

Относительно этихъ линейныхъ функцій замѣтимъ, что, въ данномъ случаѣ, онѣ имѣютъ видъ:

$$F(P) = \eta\ P,$$

гдѣ η — нѣкоторая постоянная величина (численный коэффиціентъ), какъ это легко видѣть изъ уравненій равновѣсія *).

Слѣдовательно, неизвѣстное усиліе въ какой либо части фермы, которое назовемъ черезъ S_0 можетъ быть выражено въ функціи данной внѣшней силы, т: е. нагрузки P въ видѣ

$$S_0 = \eta P,$$

*) Для поясненія замѣтимъ, что разсматривая, какъ это принято въ техникѣ, собственный вѣсъ фермы какъ нѣкоторую нагрузку, можемъ представить себѣ *невѣсомую* ферму въ такомъ состояніи равновѣсія, когда она не подвергается дѣйствію какихъ-либо нагрузокъ и потому вовсе не напряжена. Это воображаемое состояніе называется состояніемъ *естественнаго равновѣсія*.

Изъ этого ясно, что когда нагрузка (къ которой причисляется и собственный вѣсъ) равна нулю, то и усилія въ элементахъ фермы равны нулю.

а въ функціи нѣсколькихъ данныхъ внѣшнихъ силъ въ видѣ:

$$S_0 = \eta_1 P_1 \pm \eta_2 P_2 \pm \ldots \pm \eta_n P_n;$$

какъ это непосредственно слѣдуетъ изъ условій равновѣсія. Коэффиціенты η могутъ быть положительные или отрицательные; они не зависятъ отъ величины груза P, но зависятъ отъ положенія его въ томъ или другомъ мѣстѣ фермы (въ томъ или другомъ ея узлѣ).

Замѣтимъ, что

$$S_0 = {}_1S_0 \pm {}_2S_0 \pm {}_3S_0 + \ldots \pm {}_nS_0,$$

гдѣ

$$\begin{aligned} {}_1S_0 &= \pm \eta_1 P_1 \\ {}_2S_0 &= \pm \eta_2 P_2 \\ {}_3S_0 &= \pm \eta_3 P_3 \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ {}_nS_0 &= \pm \eta_n P_n, \end{aligned}$$

т. е. усиліе въ какомъ нибудь элементѣ фермы отъ совокупнаго дѣйствія системы данныхъ внѣшнихъ силъ (нагрузокъ) равно алгебраической суммѣ усилій отъ каждой изъ данныхъ внѣшнихъ силъ (нагрузокъ) въ отдѣльности.

Если бы на ферму дѣйствовали грузы

$$P_1 = P_2 = P_3 = \ldots = P_n = 1,$$

то мы бы имѣли:

$$S_0 = \eta_1 \pm \eta_2 \pm \eta_3 \pm \ldots \pm \eta_n.$$

Если бы нѣкоторые изъ упомянутыхъ грузовъ были бы равны нулю, то въ выраженіи S_0 обратились бы въ нуль соотвѣтствующіе члены.

Передвигая грузъ равный единицѣ по пролету фермы отъ лѣвой опоры къ правой (заставляя грузъ занимать послѣдовательно различные узлы фермы), мы могли бы для каждаго его положенія опредѣлить изъ условій равновѣсія соотвѣтствующій коэффиціентъ η, а именно: η_1; η_2; η_3 и т. д., соотвѣтственно различнымъ разстояніямъ единичнаго груза отъ лѣвой опоры. Коэффиціенты η называются *числами вліянія* (инфлюэнтными числами).

Откладывая эти разстоянія какъ абсциссы, а соотвѣтствующіе коэффиціенты η какъ ординаты, получимъ нѣкоторую линію, называемую *линіею вліянія* (инфлюэнтною кривою) для усилій въ данномъ элементѣ фермы. Для того, чтобы узнать, какое усиліе получается въ разсматриваемомъ элементѣ фермы при дѣйствіи на нее системы неизмѣнно связанныхъ грузовъ P_1; P_2; P_3; P_4 и т. д.,—могущихъ занимать различныя положенія по длинѣ фермы, при опредѣленномъ положеніи системы грузовъ, — стоитъ для этого положенія взять сумму произведеній изъ грузовъ на соотвѣтствующія имъ ординаты линіи вліянія.

Тогда получится:

$$S_0 = \Sigma P\eta = \pm P_1\eta_1 \pm P_2\eta_2 \pm P_3\eta_3 \pm \ldots \pm P_n\eta_n \pm \ldots$$

Передвигая данную систему грузовъ по линіи вліянія и опредѣляя каждый разъ упомянутую сумму, — легко опредѣлить положенія системы грузовъ, дающія maximum или minimum этой суммы, т. е. наибольшее или наименьшее значеніе усилія въ разсматриваемомъ элементѣ фермы.

Для этой цѣли данную систему грузовъ чертятъ на полоскѣ толстой бумаги или на тонкой линейкѣ въ томъ же масштабѣ разстояній, какъ и линію вліянія, и передвигаютъ по длинѣ послѣдней.

Линіи вліянія очень удобно примѣнять при изслѣдованіи усилій въ мостовыхъ фермахъ. Площадь, заключенная между осью абциссъ и кривою вліянія, называется *площадью вліянія* (инфлюэнтною площадью) *).

IV.

Опредѣленіе усилій въ стропильныхъ фермахъ балочной системы.

Стропильными фермами балочной системы называются такія стропильныя фермы, которыя *подъ дѣйствіемъ вертикальной нагрузки производятъ на свои опоры исключительно вертикальныя давленія.*

Стропильныя фермы, кромѣ вертикальныхъ внѣшнихъ силъ, каковы: нагрузка отъ собственнаго вѣса и снѣга, подвергаются еще дѣйствію силъ наклонныхъ, каково давленіе вѣтра.

Наибольшія усилія въ элементахъ стропильныхъ фермъ опредѣляются на основаніи невыгоднѣйшихъ комбинацій давленія вѣтра и снѣга, причемъ слѣдуетъ имѣть въ виду, что давленіе вѣтра можетъ дѣйствовать одновременно или на одну или на

*) Относительно примѣненія линій вліянія къ разсчету мостовыхъ фермъ см., между прочимъ: С. К. Куницкій. „Основанія графическихъ способовъ разсчета мостовъ простыхъ системъ". 1893 г. (и второе изданіе К. Л. Риккера 1896 г.).

другую половину фермы, т. е. представляетъ нагрузку одностороннюю; тогда какъ давленіе снѣга можетъ дѣйствовать одновременно на обѣ половины фермы.

Стропильныя фермы разсчитываются отдѣльно на вертикальныя внѣшнія силы, отдѣльно, на давленіе вѣтра, затѣмъ составляется таблица усилій, вызываемыхъ въ элементахъ фермы каждою причиною отдѣльно; и, наконецъ, комбинаціи тѣхъ изъ полученныхъ такимъ образомъ усилій, которыя могутъ проявляться одновременно, алгебраически суммируются для полученія наибольшихъ, по численной величинѣ, значеній какъ сжимающаго, такъ и вытягивающаго, усилій въ каждомъ элементѣ фермы.

При разсчетѣ на вертикальныя силы слѣдуетъ въ упомянутую таблицу вписать усилія во *всѣхъ* элементахъ фермы отдѣльно для случая, когда снѣгъ покрываетъ лѣвую часть фермы и отдѣльно для случая, когда снѣгъ покрываетъ правую часть фермы. При разсчетѣ на давленіе вѣтра слѣдуетъ въ ту же таблицу вписать усилія во *всѣхъ* элементахъ фермы отдѣльно для случая, когда вѣтеръ давитъ на правую часть фермы и отдѣльно для случая, когда онъ давитъ на лѣвую часть фермы.

Въ отдѣльной графѣ таблицы пишутся усилія въ элементахъ фермы, вызываемыя собственнымъ ея вѣсомъ. Всѣ эти усилія вписываются съ соотвѣтствующими знаками, причемъ условливаются обозначать знакомъ + сжатіе, а знакомъ — вытягиваніе (или обратно).

Наконецъ, въ ту же таблицу вносятся соотвѣтственно наибольшія, по численной величинѣ, (положительныя или отрицательныя) суммы усилій, могущихъ дѣйствовать одновременно въ каждомъ элементѣ фермы.

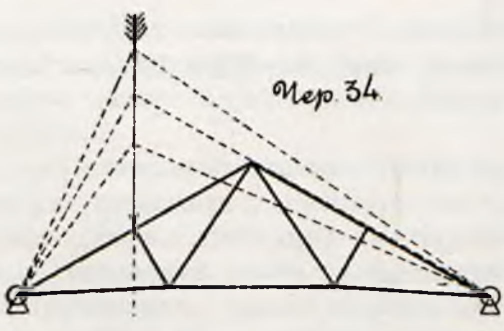
Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній о ходѣ разсчета стропильныхъ фермъ, покажемъ, какъ опредѣляются въ нихъ усилія сперва отъ вертикальныхъ нагрузокъ, а потомъ — отъ давленія вѣтра.

При этомъ покажемъ удобный способъ обозначенія силъ и элементовъ фермъ. Каждая изъ отдѣльныхъ площадокъ, на которыя раздѣляется осями элементовъ фермы вся площадь ограниченная наружнымъ ея очертаніемъ, а также каждая изъ площадей внѣ наружнаго очертанія фермы, между двумя внѣшними силами, приложенными къ ея узламъ, обозначается буквою или другимъ знакомъ, какъ показано на черт. (33). Каждый элементъ фермы и каждая внѣшняя сила, приложенная къ узламъ фермы, обозначаются двумя буквами, соотвѣтствующими площадкамъ по обѣ стороны даннаго элемента фермы или данной внѣшней силы. Такъ напримѣръ *ab*; *bc*; *cd*—представляютъ наименованія линій дѣйствія соотвѣтствующихъ внѣшнихъ силъ; затѣмъ *gh*; *hb*; *hi*—представляютъ обозначенія соотвѣтствующихъ элементовъ фермы. Замѣтимъ здѣсь, что, какъ извѣстно, оси элементовъ фермы представляютъ также линіи дѣйствія внутреннихъ усилій въ соотвѣтствующихъ элементахъ.

Узелъ, въ которомъ сходятся нѣсколько элементовъ фермы, обозначается совокупностью буквъ, принадлежащихъ всѣмъ соприкасающимся въ узлѣ площадкамъ; такъ напр. *bcihb*; *hijgh*—представляютъ наименованія двухъ узловъ.

Соотвѣтственно приведенному выше опредѣленію стропильной фермы балочной системы, устройство опорныхъ частей ея должно быть таково, чтобы одна изъ опорныхъ частей стропилъ допускала лишь вращеніе около нѣкоторой горизонтальной оси, но не допускала поступательнаго движенія ни по какому направленію, другая же опорная часть допускала вращеніе около нѣкоторой горизонтальной оси и скольженіе безъ тренія по горизонтальной линіи, но не допускала вертикальнаго перемѣщенія ни вверхъ, ни внизъ. При такомъ устройствѣ опорныхъ частей, какъ мы видѣли раньше (чер. 28, 29 и 29 bis), опорныя противодѣйствія статически опредѣлимы и могутъ быть найдены, какъ то было уже показано (чер. 28), при помощи построенія веревочнаго многоугольника.

Замѣтимъ здѣсь, что если бы обѣ опорныя части стропилъ допускали только одно вращеніе, не допуская никакого поступательнаго движенія, то для каждой опорной части стропилъ мы имѣли бы двѣ неизвѣстныя, а именно направленіе и величину опорнаго противодѣйствія, а всего четыре неизвѣстныя; если бы мы пожелали опредѣлить опорныя противодѣйствія по горизонтальнымъ и вертикальнымъ ихъ составляющимъ, то для каждой опоры имѣли бы опять-таки двѣ неизвѣстныя составляющія: вертикальную и горизонтальную. Между тѣмъ, число уравненій Статики для случая, когда внѣшнія силы наклонны, составляетъ—три, а для случая вертикальныхъ внѣшнихъ силъ—два.



Чер. 34

Чер. (34) показываетъ, что, когда обѣ опорныя части стропилъ не допускаютъ никакого поступательнаго движенія, то равнодѣйствующая внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на такую ферму, можетъ быть статически разложена какъ угодно на два направленія, проходящія черезъ опорныя точки; слѣдовательно задача представляется статически—неопредѣлимою.

2. Опредѣленіе усилій отъ вертикальной нагрузки.

Зная внѣшнія силы, дѣйствующія на стропильную ферму, подверженную дѣйствію вертикальной нагрузки,—легко найти внутреннія усилія въ ея элементахъ, причемъ удобнѣе всего пользоваться способомъ Кремона.

Построеніе плана силъ (чер. 33) начинается съ узла *gabh*. Отдѣливъ этотъ узелъ мысленно отъ остальной части фермы какъ показано пунктиромъ), мы видимъ, что онъ находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ четырехъ силъ, а именно: противодѣйствія лѣвой опоры, направленнаго по линіи *ga*; нагрузки, дѣйствующей по линіи *ab*, и усилій въ элементахъ *bh* и *hg*. Изъ этихъ силъ двѣ (опорное противодѣйствіе и нагрузка) вполнѣ извѣстны; для построенія неизвѣстныхъ силъ остается лишь начертить многоугольникъ, двѣ стороны котораго представляютъ по величинѣ и направленію извѣстныя силы, а двѣ другія стороны направлены параллельно элементамъ *bh* и *hg*.

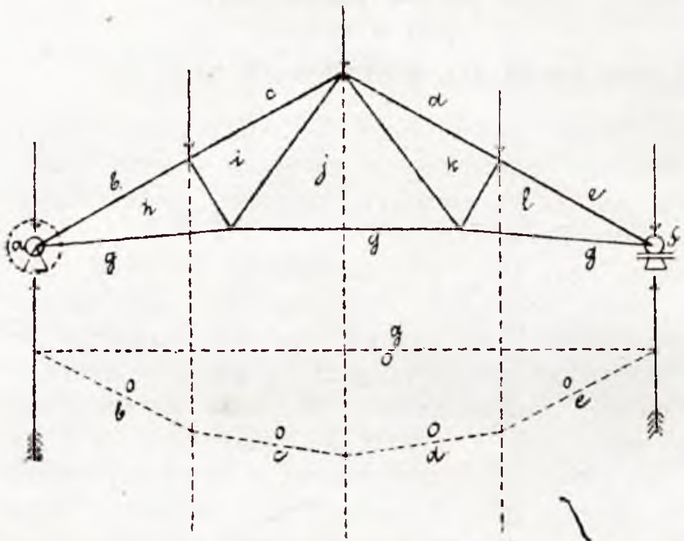
Очевидно, что отрѣзки BH и HG выражаютъ соотвѣтственно величины усилій въ элементахъ *bh* и *hg*. Родъ этихъ усилій опредѣляется по предыдущему и легко видѣть, что элементъ *bh* подвергается сжатію, а элементъ *hg*—вытягиванію (черт. 35).

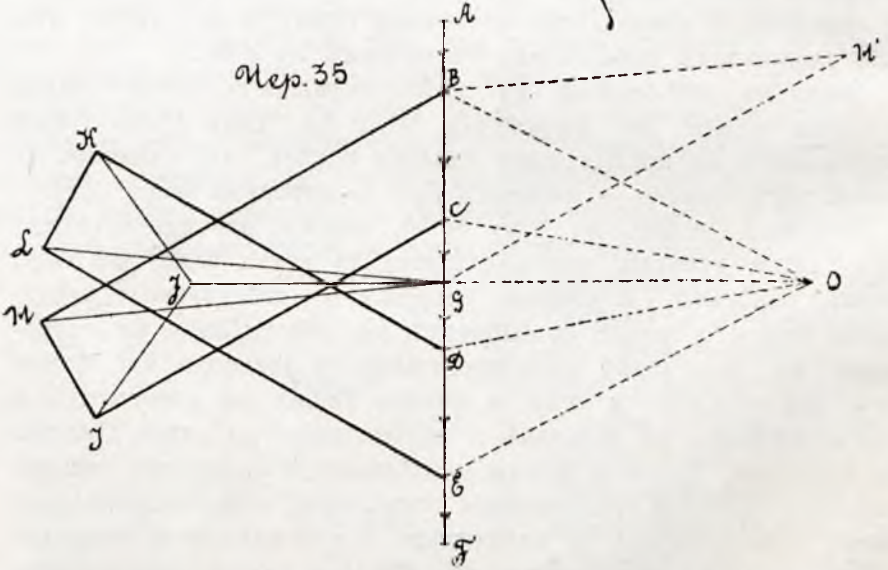
Переходя затѣмъ къ узлу *bcihb*, видимъ, что изъ четырехъ силъ, линіи дѣйствія коихъ сходятся въ этомъ узлѣ, двѣ силы вполнѣ извѣстны, а именно: нагрузка *bc*, дѣйствующая вертикально внизъ, и усиліе въ элементѣ *hb*, дѣйствующее по направленію къ узлу (такъ какъ оно сжимаетъ элементъ *hb*); между тѣмъ, двѣ остающіяся силы, а именно усилія въ элементахъ *ci* и *hi* неизвѣстны по величинѣ и направленію, но линіи дѣйствія ихъ извѣстны. Для опредѣленія послѣднихъ силъ строимъ четыреугольникъ $HBCJH$. Направленія этихъ силъ, опредѣляющія родъ усилій, дѣйствующихъ въ элементахъ *ci* и *hi* находятся по предыдущему, причемъ оказывается, что оба эти усилія—сжимающія.

Продолжая описанное построеніе для всѣхъ узловъ, получимъ діаграмму показанную на чертежѣ (35).

Очевидно, что нагрузки AB и EF могли бы быть пропущены, причемъ усилія въ элементахъ фермы остались бы безъ измѣненія. Пропуская эти нагрузки, мы получили бы полный многоугольникъ внѣшнихъ силъ $BCDEGB$; опорныя противодѣйствія при этомъ обратились-бы въ GB и EG; діаграмма же усилій осталась бы безъ измѣненія.

Чер. 33.





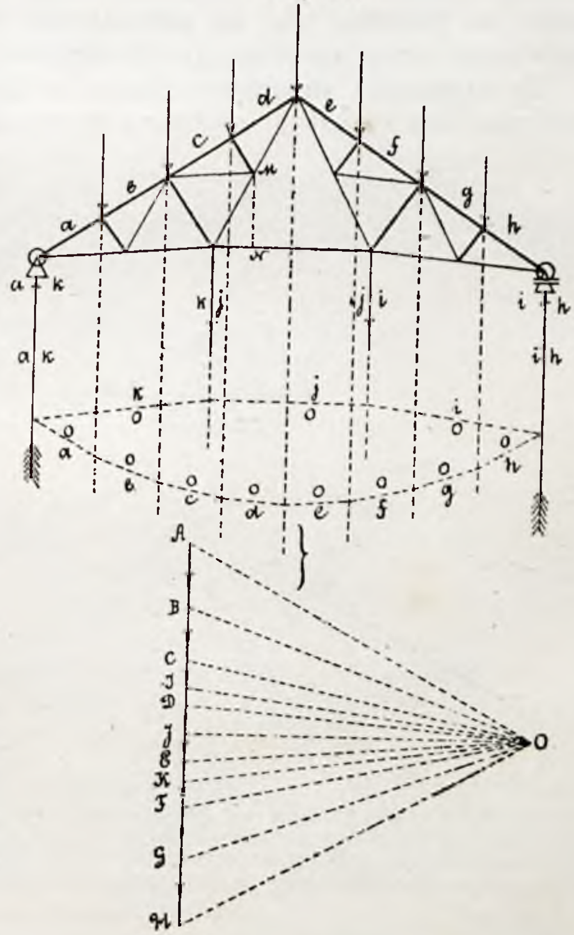
Чер. 35

Изъ изложеннаго усматривается большое удобство принятаго здѣсь способа обозначеній (называемаго способомъ Боо). Отрѣзокъ прямой представляющій величину усилія въ какомъ либо элементѣ фермы обозначается въ діаграммѣ усилій тѣми же буквами, которыми обозначается тотъ же элементъ въ схемѣ фермы. Эта схема представляетъ положенія усилій въ пространствѣ и можетъ быть называема поэтому *діаграммой положенія* усилій, въ отличіе отъ *діаграммы величинъ* усилій.

При построеніи діаграммы величинъ усилій, которую для простоты будемъ называть діаграммой усилій слѣдуетъ, какъ уже ранѣе было сказано, внѣшнія силы и опорныя противодѣйствія располагать (въ многоугольникѣ внѣшнихъ силъ) въ томъ последовательномъ порядкѣ въ какомъ ихъ точки приложенія встрѣчаются по периметру фермы.

При разсмотрѣніи стропильныхъ фермъ могутъ встрѣчаться случаи, когда нагрузки расположены не только въ верхнихъ, но и въ нижнихъ узлахъ по периметру фермы. Наконецъ, можетъ быть случай приложенія нагрузки въ нѣкоторомъ узлѣ внутри периметра фермы, какъ, напр., въ узлѣ *M* (черт. 36). Въ этомъ случаѣ, при построеніи діаграммы усилій принимаютъ, что грузъ этотъ дѣйствуетъ въ точкѣ *N* периметра фермы, т. е. въ той точкѣ, въ которой линія дѣйствія груза, приложеннаго въ узлѣ *M* пересѣкаетъ наружный элементъ фермы, причемъ предполагается въ ферму какъ бы введеннымъ воображаемый элементъ *MN*. Это предположеніе не измѣняетъ усилій въ дѣйствительныхъ элементахъ фермы, а между тѣмъ при такомъ способѣ построенія достигается полная взаимность схемы фермы и діаграммы усилій. На черт. 36 показано построеніе опорныхъ сопротивленій для случая, когда нагрузки приложены и въ нижнихъ узлахъ фермы.

Черт. 36.



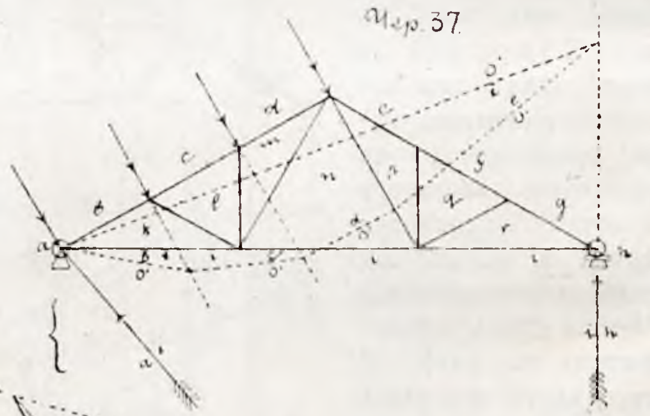
3. Опредѣленіе усилій отъ давленія вѣтра.

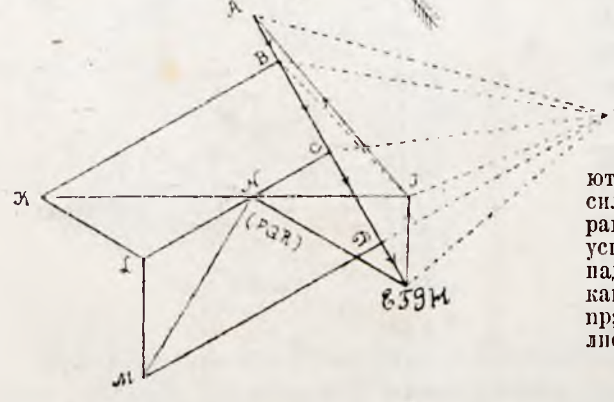
Эта задача сводится къ построенію опорныхъ противодѣйствій отъ наклонныхъ давленій вѣтра, могущихъ дѣйствовать одновременно либо на одну, либо на другую половину фермы.

Опорное противодѣйствіе той опоры, по которой крайній узелъ стропильной фермы можетъ скользить безъ тренія, направлено вертикально вверхъ и точка приложенія его извѣстна; значитъ, неизвѣстна лишь величина этого противодѣйствія.

Опорное противодѣйствіе второй опоры, относительно которой лѣвый крайній узелъ стропильной фермы не имѣетъ никакого поступательнаго перемѣщенія, неизвѣстно ни по величинѣ, ни по линіи его дѣйствія, ни по направленію; извѣстна лишь точка приложенія этого опорнаго противодѣйствія.

По заданнымъ внѣшнимъ силамъ и тѣмъ даннымъ, которыя извѣстны относительно опорныхъ противодѣйствій, необходимо



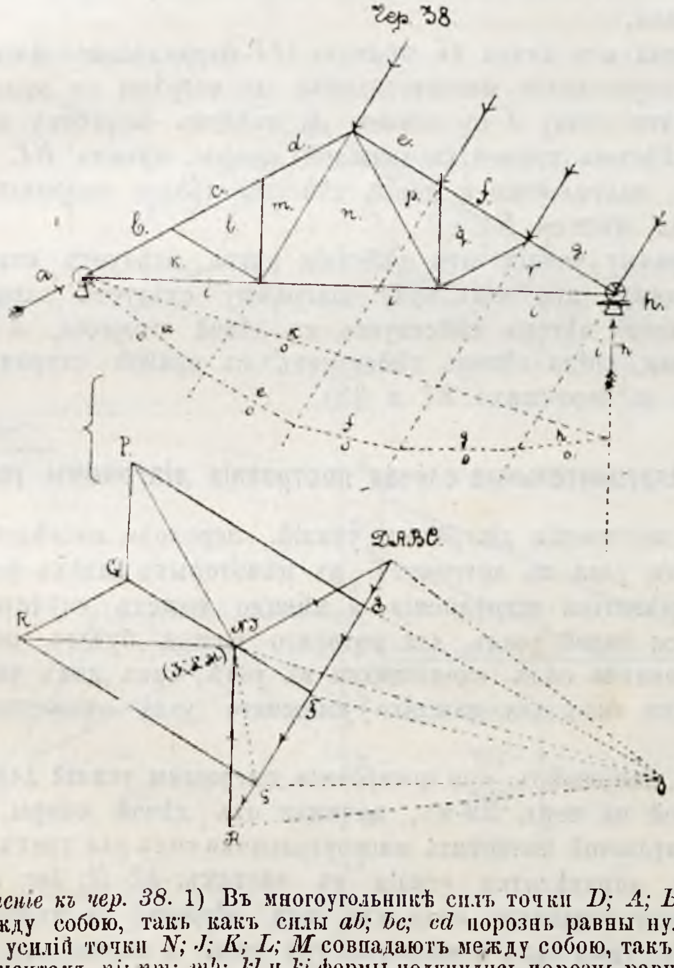


Объясненіе къ чер. 37-му. 1) Въ многоугольникѣ силъ точки E; F; G и H совпадаютъ между собою, такъ какъ силы ef; fg и gh порознь равны нулю. 2) Въ діаграммѣ усилій точки P; Q и R совпадаютъ съ точкою N, такъ какъ усилія въ элементахъ np; pq и qr фермы получились порознь равными нулю.

построить замкнутый многоугольникъ силъ и замкнутый веревочный многоугольникъ; эти построенія и опредѣлятъ вполнѣ неизвѣстныя опорныя противодѣйствія.

Ходъ построенія слѣдующій (черт. 37): строится многоугольникъ данныхъ внѣшнихъ силъ $ABCDE$, — представляющій въ данномъ случаѣ прямую, изъ точки E проводится въ этомъ многоугольникѣ прямая EI параллельно направленію опорнаго противодѣйствія правой опоры; дальше многоугольникъ этотъ строить нельзя, такъ какъ неизвѣстна величина этого противодѣйствія.

Выбирая произвольно полюсъ O', строимъ лучи $O'A$; $O'B$; $O'C$; $O'D$ и $O'E$ и затѣмъ строимъ веревочный многоугольникъ,



Объясненіе къ чер. 38. 1) Въ многоугольникѣ силъ точки D; A; B; C совпадаютъ между собою, такъ какъ силы ab; bc; cd порознь равны нулю. 2) Въ діаграммѣ усилій точки N; J; K; L; M совпадаютъ между собою, такъ какъ усилія въ элементахъ ni; nm; mb; kl и ki фермы получились порознь равными нулю, 3) Линія дѣйствія противодѣйствія лѣвой опоры совпадаетъ съ осью лѣвой стропильной ноги.

имѣя въ виду, что точка приложенія противодѣйствія неподвижной (лѣвой) опоры намъ извѣстна, а именно проводимъ черезъ эту точку прямую параллельную лучу $O'B$ до встрѣчи съ продолженіемъ линіи дѣйствія внѣшней силы bc; изъ полученной точки пересѣченія проводимъ прямую параллельно лучу CO' до встрѣчи съ продолженіемъ линіи дѣйствія внѣшней силы ed, изъ полученной точки пересѣченія проводимъ прямую параллельно лучу DO' до встрѣчи съ продолженіемъ линіи дѣйствія внѣшней силы de; изъ полученной точки пересѣченія проводимъ прямую параллельно лучу EO' до встрѣчи съ направленіемъ противодѣйствія подвижной (правой опоры); соединяя полученную точку пересѣченія съ точкой приложенія противодѣйствія неподвижной (лѣвой) опоры, получимъ замыкающую сторону веревочнаго многоугольника.

Проведя изъ точки O' прямую $O'I$ параллельно замыкающей сторонѣ веревочнаго многоугольника до встрѣчи съ прямой EI. и соединивъ точку I съ точкою A, найдемъ величину опорнаго противодѣйствія правой (подвижной) опоры, именно EI, а также величину, направленіе и линію дѣйствія лѣваго опорнаго противодѣйствія, именно IA.

Діаграмму усилій отъ дѣйствія вѣтра слѣдуетъ строить по предыдущему, при чемъ одну діаграмму слѣдуетъ строить для случая, когда вѣтеръ дѣйствуетъ съ лѣвой стороны, а вторую для случая, когда вѣтеръ дѣйствуетъ съ правой стороны (какъ показано на чертежахъ 37 и 38).

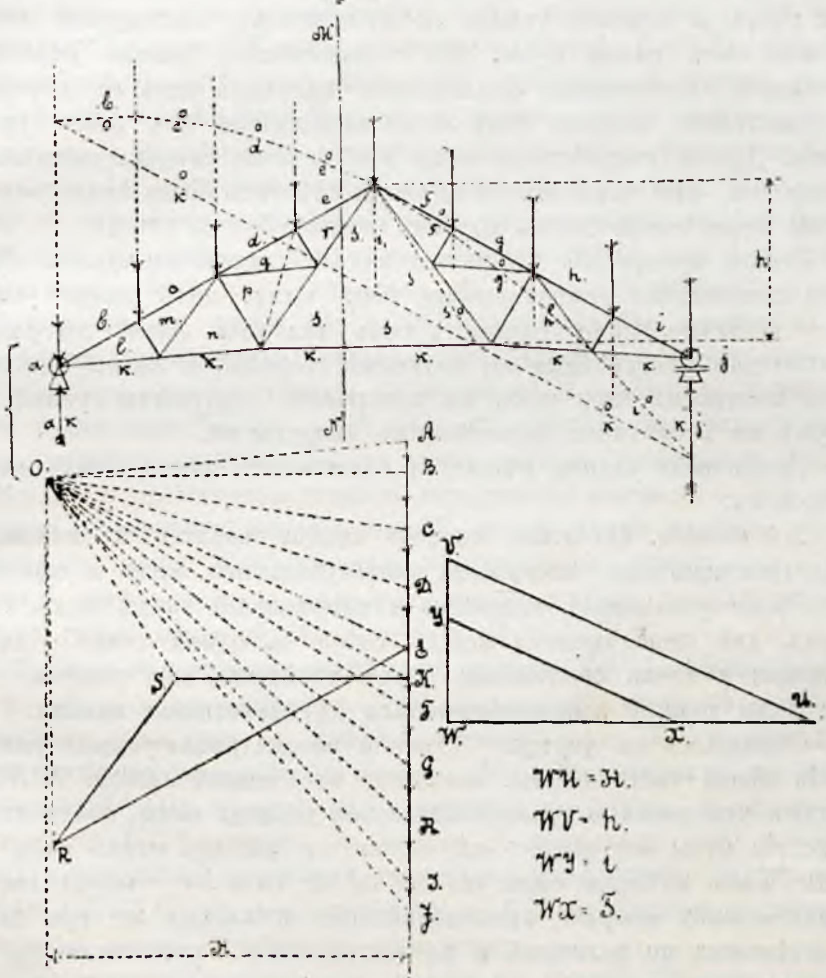
4. Затруднительные случаи построенія діаграммы усилій.

При построеніи діаграммы усилій, переходя послѣдовательно отъ одного узла къ другому, — въ нѣкоторыхъ видахъ фермъ могутъ встрѣтиться затрудненія, а именно можетъ случиться, что встрѣтится такой узелъ, для котораго нельзя будетъ построить многоугольника силъ, сходящихся въ узлѣ, такъ какъ число неизвѣстныхъ силъ для каждаго смежнаго узла окажется болѣе двухъ.

Такъ, напримѣръ, при построеніи діаграммы усилій для фермы, показанной на черт. 39-мъ, начиная отъ лѣвой опоры, можно безъ затрудненій начертить многоугольники силъ для трехъ узловъ, при чемъ опредѣлятся усилія въ частяхъ: bl; lk; lm; cm; mn; nk; но многоугольникъ силъ для узла $cdqpnmc$ не можетъ быть построенъ, такъ какъ неизвѣстны три силы, а именно: въ частяхъ dq; qp; pn.

Въ узлѣ же $knpnsk$ усилія въ частяхъ: np; ps и sk неизвѣстны. Задача представляется поэтому какъ-бы статически неопредѣлимою,на самомъ-же дѣлѣ эта неопредѣленность только кажущаяся. Дѣйствительно, разсмотримъ часть фермы, находящуюся по лѣвой сторонѣ сѣченія $M'N'$. Она находится въ равновѣсіи подъ дѣйствіемъ восьми силъ: пять изъ нихъ (четыре заданныя внѣшнія силы и одно опорное противодѣйствіе — извѣстны); остающіяся неизвѣстныя три силы представляютъ собою усилія въ частяхъ *er*; *rs* и *sk*. Нахожденіе-же этихъ силъ, если онѣ не параллельны между собою или если онѣ не пересѣкаются въ одной точкѣ,

Чер. 39.



Объясненіе къ черт. 39. Сторона *oa* веревочнаго многоугольника обращается въ точку. Сторона *oj* веревочнаго многоугольника обращается въ точку.— Сторона *or* веревочнаго многоугольника обращается въ точку.

представляетъ задачу вполнѣ опредѣленную. Въ этомъ легче всего убѣдиться на основаніи того начала Статики, что для равновѣсія плоской системы сумма моментовъ всѣхъ силъ относительно любой точки въ плоскости дѣйствія силъ должна быть равна нулю. Возьмемъ моменты упомянутыхъ восьми силъ относительно точки пересѣченія двухъ изъ числа неизвѣстныхъ силъ, а именно усилій въ частяхъ *er* и *rs*. На основаніи упомянутаго начала Статики и замѣчая, что моменты усилій *er* и *rs* относительно избранной точки равны нулю, имѣемъ: алгебраическая сумма моментовъ заданныхъ внѣшнихъ силъ и опорнаго противодѣйствія лѣвой опоры и момента усилія *sk* относительно избранной точки должна быть равна нулю. Въ составленномъ такимъ образомъ уравненіи единственная неизвѣстная величина есть *sk*, которая, слѣдовательно, можетъ быть легко опредѣлена изъ этого уравненія. Другія неизвѣстныя силы могутъ быть найдены подобнымъ способомъ, при чемъ всегда моменты слѣдуетъ брать относительно точки пересѣченія двухъ другихъ неизвѣстныхъ усилій.

Задача построенія діаграммы усилій становится такимъ образомъ совершенно опредѣленною, такъ какъ, коль скоро усиліе *sk* — извѣстно, многоугольникъ силъ для узла *knpsk* содержитъ только двѣ неизвѣстныя по величинѣ стороны, и потому можетъ быть построенъ, при чемъ къ построенію діаграммы усилій въ фермѣ не встрѣтится дальнѣйшихъ затрудненій.

Графически задача рѣшается однимъ изъ приведенныхъ ниже способовъ:

1-й способъ. По этому способу задача сводится къ нахожденію, (посредствомъ построенія многоугольника силъ и веревочнаго многоугольника), величинъ и направленій трехъ силъ, (изъ коихъ двѣ пересѣкаются между собою въ одной точкѣ), линіи дѣйствія и точки приложенія коихъ извѣстны, при условіи, что эти силы должны уравновѣшиваться съ извѣстными силами.

Обращаясь къ чертежу 39-му и разсматривая условія равновѣсія лѣвой части фермы, мысленно отсѣченной линіею $M'N'$,— видимъ что взаимно уравновѣшиваться должны силы, коихъ линіи дѣйствія суть; *ka*; *ab*; *bc*; *cd*; *de*; *er*; *rs*; *sk*; изъ этихъ силъ заданы, какъ внѣшнія силы *ab*; *bc*; *cd*; *de*; сила *ka* — опредѣляется заранѣе какъ опорное противодѣйствіе; остальныя же три силы, неизвѣстныя по величинѣ и по направленію. представляютъ собою искомыя усилія въ элементахъ *ea*; *rs* и *sk* данной фермы. Сохраняя приведенный выше порядокъ силъ, построимъ многоугольникъ силъ для тѣхъ изъ нихъ, величины и направленія коихъ извѣстны. Пусть извѣстная часть многоугольника силъ есть *KABCDE*, неизвѣстную же часть его пусть представляетъ линія *ERSK*.

Выберемъ произвольный полюсъ *O* и проведемъ лучи къ точкамъ *K*, *A*, *B*, *C*, *D* и *E* многоугольника силъ; затѣмъ проведемъ соотвѣтствующія стороны веревочнаго многоугольника, начнемъ со стороны *oe*, причемъ проведемъ эту сторону черезъ точку пересѣченія линій дѣйствія двухъ неизвѣстныхъ усилій *er* и *rs*; затѣмъ послѣдовательно построимъ стороны веревочнаго многоугольника *od*, *oc*, *ob*, *oa*, *ok*. Сторона веревочнаго многоугольника *ok* пересѣкаетъ линію дѣйствія усилія *sk* въ точкѣ, черезъ которую должна пройти слѣдующая сторона веревочнаго многоугольника, параллельная неизвѣстному пока направленію луча *OS*, (такъ какъ длина *SK* есть величина искомая). Если бы сторона *oe* веревочнаго многоугольника была проведена не черезъ точку пересѣченія элементовъ *er* и *rs*, а черезъ какую либо другую точку линіи *er*, то для сомкнутія веревочнаго многоугольника пришлось бы построить между линіями *er* и *rs* еще одну сторону *or* веревочнаго многоугольника параллельную неизвѣстному лучу *OR*; на линіи *rs* получилась бы при этомъ еще одна вершина веревочнаго многоугольника, по соединеніи которой съ точкою пересѣченія линій *ok* и *ks* получилась бы прямая *os* — послѣдняя (замыкающая) сторона веревочнаго многоугольника.

При проведеніи стороны *oe* веревочнаго многоугольника черезъ точку пересѣченія линій *er* и *rs* вершины веревочнаго многоугольника, расположенныя на этихъ линіяхъ, совпадаютъ между собою и съ упомянутою точкою пересѣченія линіи *er* и *rs* и сторона *or* веревочнаго многоугольника, между этими линіями обращается въ точку. Слѣдовательно, замыкающая сторона *os* веревочнаго многоугольника получится отъ соединенія прямою линіею точекъ пересѣченія линій *er* и *rs* и *ok* и *ks*.

Проведя въ многоугольникѣ силъ прямую $KS \parallel$ элементу фермы *ks* и черезъ полюсъ прямую $OS \parallel$ замыкающей сторонѣ веревочнаго многоугольника *os*, найдемъ величину силы *KS*, изображающей усиліе въ элементѣ *ks* фермы. Затѣмъ, построивъ въ многоугольникѣ силъ прямую $RS \parallel$ элементу *rs* фермы и изъ точки *E* прямую $ER \parallel$ элементу *er* фермы до взаимнаго ихъ пересѣченія, получимъ замкнутый многоугольникъ силъ, а именно *KABCDERSK*, въ которомъ *RS* и *ER* изобразятъ величины усилій въ соотвѣтствующихъ элементахъ.

Для построенія діаграммы усилій по способу Кремона достаточно знать *KS* и кажущаяся статическая-неопредѣленность задачи тотчасъ-же исчезаетъ, но опредѣленіе *RS* и *ER* указаннымъ способомъ можетъ послужить для повѣрки построеній взаимной діаграммы; замѣчательно, что приведенный выше способъ приводитъ къ построенію линій *ER*, *RS* и *SK* именно въ тѣхъ положеніяхъ, въ коихъ онѣ встрѣчаются въ полной діаграммѣ усилій.

Веревочный многоугольникъ, послужившій для вышеприведеннаго построенія, въ той его части, которая относится къ внѣшнимъ силамъ, можетъ совпадать съ соотвѣтствующею частью веревочнаго многоугольника, служащаго для построенія противодѣйствій опоръ фермы. Если такое совпаденіе желательно, для упрощенія построеній, то необходимо имѣть въ виду два условія: 1) построеніе веревочнаго многоугольника слѣдуетъ начинать со стороны *oe*, которая должна проходить черезъ точку пересѣченія *er* и *rs*, и 2) полюсъ долженъ быть выбранъ такимъ образомъ, чтобы сторона *ok* была наклонна подъ возможно большимъ угломъ къ линіи *ks* (для удобства построенія точки пересѣченія этихъ линій).

Впрочемъ, построеніе веревочнаго многоугольника можно бы начать и со стороны *ok*, которая въ этомъ случаѣ должна проходить черезъ точку пересѣченія элементовъ *rs* и *sk* фермы.

2-й способъ. Этотъ способъ основанъ на началѣ моментовъ. На мысленно отсѣченную линіею $M'N'$ лѣвую часть фермы дѣйствуютъ восемь силъ, изъ коихъ пять (заданныя внѣшнія силы (нагрузки) и противодѣйствіе лѣвой опоры) извѣстны, а три силы, (коихъ линіи дѣйствія суть *er*, *rs* и *sk*), неизвѣстны по величинѣ и направленію. Алгебраическая сумма моментовъ всѣхъ этихъ силъ относительно произвольной точки въ плоскости ихъ дѣйствія должна быть равна нулю. За точку относительно которой будемъ брать моменты силъ, примемъ точку пересѣченія элементовъ *er* и *rs* фермы, при этомъ очевидно моменты усилій, дѣйствующихъ въ этихъ элементахъ относительно избранной точки порознь равны нулю. Затѣмъ сумма моментовъ пяти извѣстныхъ силъ въ совокупности съ моментомъ усилія *sk* должна быть равна нулю.

Сумма моментовъ извѣстныхъ силъ относительно избранной точки, какъ было ранѣе доказано (стр. 16), опредѣляется слѣдующимъ образомъ: черезъ точку, относительно которой берутся моменты, проводимъ прямую параллельную линіи дѣйствія равнодѣйствующей упомянутыхъ извѣстныхъ силъ, (т. е. въ данномъ случаѣ вертикальную линію), и измѣряемъ отрѣзокъ этой прямой, заключенный между сторонами *oe* и *ok* веревочнаго многоугольника; пусть длина этого отрѣзка есть i_1. Искомый моментъ тогда будетъ $+i_1H$, гдѣ H есть полюсное разстояніе. (Знакъ плюсъ поставленъ передъ значеніемъ момента, такъ какъ, согласно условію, моменты, вращающіе отъ лѣвой руки къ правой, т. е. въ сторону вращенія часовой стрѣлки, приняты за положительные). Пусть T неизвѣстная сила, линія дѣйствія коей *sk*, плечо этой силы есть h. Для составленія условія моментовъ допустимъ, что сила T представляетъ усиліе, вытягивающее элементъ *sk*; въ такомъ случаѣ сила T должна быть направлена въ правую сторону и моментъ ея отрицательный, значеніе его есть $-Th$.

Слѣдовательно

$$-Th + Hi_1 = 0;$$

или

$$T = \frac{i_1}{h} H.$$

Изъ этого уравненія можетъ быть найдено T. Построеніе T можетъ быть сдѣлано графически слѣдующимъ образомъ: строимъ (черт. 39) треугольникъ WUV, у котораго сторона $WU = H$ (единицъ силы), а сторона $WV = h$ (единицъ разстоянія). На послѣдней сторонѣ откладываемъ отрѣзокъ $WY = i_1$ (единицъ разстоянія) и проводимъ YX параллельно къ VU. Тогда WX (единицъ силы) представитъ силу T. Это слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ WVU и WYX, на основаніи коего находимъ пропорцію:

$$\frac{T}{H} = \frac{i_1}{h}.$$

Построеніе упрощается, если полюсное разстояніе H взять равнымъ столькимъ единицамъ силы, сколько единицъ разстоянія заключается въ h, или если принять H кратнымъ отъ h. Въ самомъ дѣлѣ, полагая $H = nh$, имѣемъ:

$$T = \frac{i_1 nh}{h} = ni_1.$$

Если $n = 1$, $T = i_1$.

Усиліе въ части sk есть вытягивающее, такъ какъ T оказалось положительнымъ, т. е. направленнымъ именно такъ, какъ это было предположено (въ правую сторону).

Каковъ бы ни былъ въ дѣйствительности родъ усилія, при составленіи уравненія предполагается всегда, что усиліе есть вытягивающее; затѣмъ, смотря по знаку найденнаго изъ уравненія значенія усилія, окажется было ли сдѣланное предположеніе согласно съ дѣйствительностью или нѣтъ.

5) Другіе способы построенія діаграммы усилій въ затруднительныхъ случаяхъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ при рѣшеніи задачъ, подобныхъ предыдущей, можно съ удобствомъ воспользоваться слѣдующими пріемами:

1) Опредѣлимъ (черт. 39) равнодѣйствующую внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на часть фермы по одну сторону сѣченія $M'N'$. Эта равнодѣйствующая находится въ равновѣсіи съ тремя неизвѣстными силами, дѣйствующими въ элементахъ er, rs и sk фермы.

На планѣ сила упомянутая равнодѣйствующая по величинѣ и направленію изобразится отрѣзкомъ KE, причемъ линія дѣйствія этой равнодѣйствующей должна пройти черезъ точку пересѣченія сторонъ oe и ok веревочнаго многоугольника.

Такъ какъ эта точка находится внѣ предѣловъ чертежа, то вмѣсто равнодѣйствующей KE возьмемъ двѣ силы, а именно: KA—противодѣйствіе лѣвой опоры фермы, линія дѣйствія коего есть ka и AE—равнодѣйствующую четырехъ заданныхъ внѣшнихъ силъ (нагрузокъ), линія дѣйствія коего опредѣляется пересѣченіемъ сторонъ oa и oe веревочнаго многоугольника (изъ коихъ первая oa не показана на чертежѣ).

Затѣмъ опредѣляются усилія въ трехъ элементахъ er, rs и sk изъ того условія что эти усилія, должны уравновѣшиваться съ силою KA; потомъ опредѣляются усилія въ тѣхъ же частяхъ, уравновѣшивающіяся съ силою AE. Полученныя въ обоихъ случаяхъ усилія въ соотвѣтствующихъ элементахъ суммируются алгебраически и полученныя суммы даютъ окончательно искомыя усилія.

2) Для рѣшенія той же задачи иногда примѣняютъ слѣдующее разсужденіе: устранимъ элементы pq и qr фермы и введемъ въ ферму новый элементъ, изображенный пунктирною линію (на черт. 39). Очевидно это не измѣняетъ усилія въ элементѣ sk, такъ какъ, внѣшнія силы, дѣйствующія на ферму по лѣвую сторону сѣченія $M'N'$, остались при этомъ безъ измѣненія. Но при такомъ измѣненіи вида фермы устраняется затрудненіе, встрѣченное при построеніи діаграммы усилій обыкновеннымъ способомъ. Въ самомъ дѣлѣ, дойдя до узла $nmcdqpn$, мы увидимъ, что всѣ силы, сходящіяся въ этомъ узлѣ, извѣстны, за исключеніемъ двухъ. Построимъ діаграмму усилій обыкновеннымъ способомъ до тѣхъ поръ, пока не опредѣлимъ усилія въ элементѣ sk фермы. Затѣмъ возстановимъ заданный видъ фермы и повторимъ построеніе діаграммы, пользуясь уже извѣстнымъ значеніемъ усилія SK.

Описанный способъ удобенъ, но онъ не во всѣхъ случаяхъ примѣнимъ. Напримѣръ, если въ узлѣ $pqrsp$ приложенъ грузъ, то элементы pq и qr фермы не могутъ быть оба устранены, а слѣдовательно упомянутый способъ построенія діаграммы усилій не можетъ быть примѣненъ. Въ подобныхъ случаяхъ, для рѣшенія задачи слѣдуетъ прибѣгнуть къ одному изъ способовъ, объясненныхъ выше.

При построеніи діаграммы усилій для какой либо фермы слѣдуетъ имѣть въ виду, что во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда какимълибо сѣченіемъ возможно раздѣлить ферму на двѣ части, разсѣкая при этомъ лишь три элемента, которые непараллельны между собою и не встрѣчаются въ одной точкѣ, усилія въ трехъ разсѣченныхъ элементахъ вполнѣ опредѣлимы помощью приведенныхъ выше пріемовъ, если извѣстны внѣшнія силы дѣйствующія на ферму; опредѣленіе этихъ усилій можетъ быть сдѣлано по одному изъ показанныхъ способовъ.

Если при раздѣленіи фермы на двѣ части число элементовъ фермы, встрѣчаемыхъ въ какомъ либо сѣченіи, болѣе трехъ, то усилія въ этихъ элементахъ не могутъ быть опредѣлены показанными пріемами за исключеніемъ случая, когда, кромѣ трехъ изъ этихъ элементовъ, усилія въ остальныхъ элементахъ извѣстны.

Часто встрѣчаются случаи, что въ одномъ сѣченіи фермы попадаются четыре элемента; тогда надо дѣвать другія сѣченія, чтобы убѣдиться нельзя ли провести такое сѣченіе фермы, въ которомъ встрѣчались-бы лишь три элемента, въ числѣ коихъ былъ-бы одинъ изъ упомянутыхъ четырехъ элементовъ; если это окажется возможнымъ, то задача *статически-опредѣлима* (сравн. сѣч. M' N' и элементъ sk чер. 39).

V.

Опредѣленіе усилій въ арочныхъ фермахъ съ тремя шарнирами.

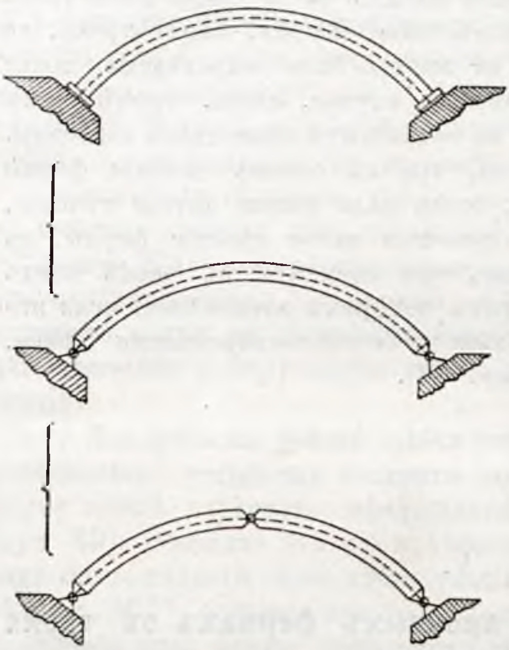
1) Общія замѣчанія.

Арками называются такого рода сооруженія, которыя подъ дѣйствіемъ вертикальной нагрузки и собственнаго вѣса производятъ на свои опоры, сверхъ вертикальнаго давленія, еще *горизонтальный* распоръ, направленный въ наружную сторону, т. е. стремятся какъ бы раздвинуть опоры, причемъ вызываютъ въ послѣднихъ, сверхъ вертикальныхъ противодѣйствій, еще и горизонтальныя опорныя реакціи, направленныя во внутрь сооруженія.

Нижнее очертаніе арочныхъ фермъ и ось арокъ, имѣющихъ видъ призматическихъ брусьевъ, представляютъ плоскія кривыя, обращенныя вогнутою стороною къ низу; эти кривыя чаще всего представляютъ или параболу или дугу круга. Плоскость кривизны арки или арочной фермы совпадаетъ съ плоскостью симметріи поперечныхъ ея сѣченій и, вмѣстѣ съ тѣмъ, съ плоскостью внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ аркѣ.

Смотря по конструктивнымъ условіямъ, обезпечивающимъ большую или меньшую степень подвижности арокъ подъ дѣйствіемъ нагрузки, таковыя подраздѣляются (черт. 40) на:

Чер. 40.



1) арки съ закрѣпленными пятами,

2) арки съ двумя шарнирами (въ пятахъ), и

3) арки съ тремя шарнирами (въ пятахъ и въ ключѣ).

Всѣ три рода арокъ по отношенію къ своимъ опорнымъ точкамъ имѣютъ одно общее свойство, а именно каждая изъ этихъ арокъ имѣетъ на каждой изъ двухъ опоръ, по крайней мѣрѣ, одну неподвижную точку. Въ аркахъ съ закрѣпленными пятами, какъ эта точка, такъ и всѣ остальныя точки каждаго изъ опорныхъ сѣченій закрѣплены неподвижно; въ аркахъ же съ шарнирами въ пятахъ опорныя сѣченія могутъ вращаться около неподвижной точки. Вслѣдствіе этого точки приложенія опорныхъ противодѣйствій въ аркахъ съ шарнирами въ пятахъ заранѣе извѣстны, именно опорныя давленія и противодѣйствія при равновѣсіи арки должны проходить чрезъ неподвижную точку на опорѣ, т. е. чрезъ центръ шарнира, иначе не было бы равновѣсія, такъ какъ арка вращалась бы около оси шарнира. Въ аркахъ съ закрѣпленными пятами, напротивъ того, точки приложенія опорныхъ давленій или опорныхъ противодѣйствій заранѣе не извѣстны: линіи дѣйствія опорныхъ давленій или опорныхъ противодѣйствій могутъ встрѣчать опорныя сѣченія въ большемъ или меньшимъ разстояніи отъ оси арки, образуя при этомъ, такъ называемые опорные моменты (моменты закрѣпленія), которые могутъ быть замѣнены нѣкоторыми парами силъ.

Такимъ образомъ, число неизвѣстныхъ опорныхъ противодѣйствій составляетъ:

1) въ аркахъ съ закрѣпленными пятами, для каждой пяты по три, а именно: опорный моментъ и вертикальную и горизонтальную

составляющія опорнаго противодѣйствія, а всего для арки 6 неизвѣстныхъ;

2) въ аркахъ съ шарнирами въ пятахъ для каждой пяты по два неизвѣстныхъ а именно: вертикальную и горизонтальную составляющія опорнаго противодѣйствія, а всего четыре неизвѣстныхъ.

Между тѣмъ, для опредѣленія этихъ неизвѣстныхъ мы имѣемъ всего три уравненія Статики:

$$\sum X = 0,$$
$$\sum Y = 0$$

и

$$\sum M = 0$$

Слѣдовательно, арки двухъ упомянутыхъ выше родовъ представляютъ собою сооруженія *статически-неопредѣлимыя*, причемъ въ аркѣ съ закрѣпленными пятами число статически неопредѣлимыхъ опорныхъ реакцій составляетъ три, а въ аркахъ съ шарнирами въ пятахъ всего одно, такъ какъ при введеніи шарнировъ въ пятахъ опорные моменты становятся равными нулю.

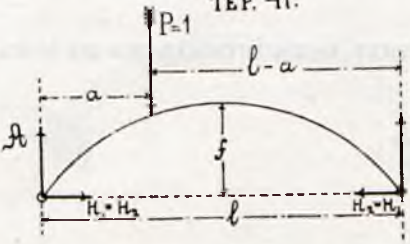
Если въ арку съ шарнирами въ пятахъ ввести еще одинъ шарниръ, подраздѣляющій арку на двѣ части (черт. 40), то моментъ всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на каждую часть арки отдѣльно относительно оси этою шарнира, долженъ быть равенъ нулю, иначе разсматриваемая часть арки не находилась бы въ равновѣсіи, а вращалась бы около оси шарнира. Другими словами равнодѣйствующая усилій, передающихся отъ одной изъ частей арки — другой, должна проходить черезъ ось шарнира, подраздѣляющаго арку на двѣ части.

Введеніе третьяго шарнира даетъ возможность написать еще одно уравненіе для опредѣленія неизвѣстныхъ опорныхъ реакцій, которое, вмѣстѣ съ предыдущими тремя уравненіями Статики, даетъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ; отсюда слѣдуетъ, что арка съ тремя шарнирами представляетъ сооруженіе *статически-опредѣлимое*.

Добавочное уравненіе есть уравненіе моментовъ всѣхъ силъ дѣйствующихъ на одну часть арки относительно оси средняго шарнира; въ это уравненіе не входятъ новыя неизвѣстныя величины, такъ какъ реакція второй части арки на разсматриваемую ея часть должна, какъ выше замѣчено, проходить черезъ центръ средняго шарнира и, слѣдовательно, давать относительно оси этого шарнира моментъ равный нулю.

Если бы не было средняго шарнира и мы бы разрѣзали арку по срединѣ и написали уравненіе моментовъ для средняго сѣченія арки, то въ это уравненіе вошелъ бы неизвѣстный моментъ внутреннихъ силъ, развивающихся въ аркѣ, вообще говоря не равный нулю, и замѣняющій собою дѣйствіе отсѣченной части арки на разсматриваемую ея часть.

Чер. 41.



Пусть имѣемъ (черт. 41) арку съ двумя шарнирами въ пятахъ, нагруженную однимъ грузомъ $P=1$, приложеннымъ въ разстояніи a отъ лѣвой опоры и въ разстояніе $l-a$ отъ правой опоры, гдѣ l— есть разстояніе между осями шарнировъ или такъ называемый разсчетный пролетъ арки. Посмотримъ насколько представляется возможнымъ опредѣлить опорныя противодѣйствія для этой арки; вертикальныя составляющія опорныхъ противодѣйствій назовемъ: для правой опоры A, для лѣвой B, горизонтальныя составляющія опорныхъ противодѣйствій обозначимъ соотвѣтственно H_1 и H_2. Для опредѣленія этихъ четырехъ неизвѣстныхъ Статика даетъ намъ три условія:

$$\sum X=0$$
$$\sum Y=0$$
$$\sum M=0$$

Такъ какъ внѣшняя сила, дѣйствующая на арку въ данномъ случаѣ вертикальна, то изъ перваго условія Статики непосредственно слѣдуетъ:

$$H_1-H_2=0, \text{ или } H_1=H_2.$$

Для того, чтобы получить значеніе A, воспользуемся третьимъ условіемъ Статики, причемъ моментъ будемъ брать относительно оси шарнира, находящагося на правой опорѣ, потому что при этомъ войдетъ въ уравненіе моментовъ только одна неизвѣстная величина, именно A. Въ самомъ дѣлѣ линіи дѣйствія реакцій B, H_1 и H_2 проходятъ чрезъ ось праваго шарнира арки, а потому даютъ относительно этой оси моменты равные нулю.

$$M=Al-P(l-a)=0$$

при $P=1$

$$A=\frac{l-a}{l}.$$

Изъ второго уравненія Статики, зная A, найдемъ B, а именно,

$$\sum Y=A+B-1=0.$$

находимъ:

$$\frac{-a}{l} + B - 1 = 0,$$

или

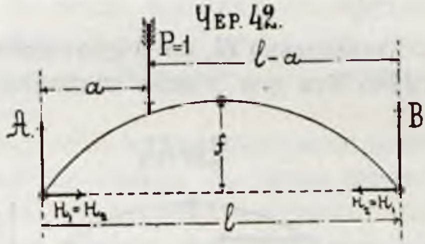
$$B = \frac{a}{l},$$

т. е. вертикальныя составляющія опорныхъ противодѣйствій опредѣляются какъ въ балкѣ свободно-лежащей на двухъ опорахъ.

Остается неизвѣстная величина горизонтальной составляющей опорныхъ противодѣйствій, именно: $H_1 = H_2 = H$.

Если арка имѣетъ три шарнира, то горизонтальная составляющая опорнаго противодѣйствія $H_1 = H_2 = H$ опредѣляется непосредственно изъ того условія, что сумма моментовъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на одну часть арки (заключенную между двумя шарнирами) относительно оси средняго шарнира, равна нулю, а именно (черт. 42):

Чер. 42.



$$-Hf + \frac{Al}{2} - P\left(\frac{l}{2} - a\right) = 0;$$

такъ какъ

$$A = \frac{P(l-a)}{l},$$

то

$$H = P\frac{(l-a)-(l-2a)}{2f}$$

или

$$H = P\frac{a}{2f}$$

Если

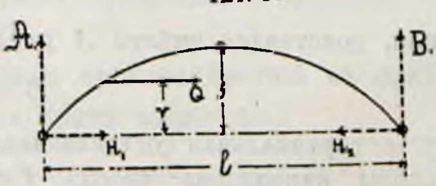
$$P = 1,$$

то

$$H = \frac{a}{2f}.$$

Если бы на арку съ тремя шарнирами, вмѣсто внѣшней вертикальной силы (груза P), дѣйствовала нѣкоторая внѣшняя сила Q горизонтальная, (напр. давленіе вѣтра), то реакціи опоръ получили бы нижеслѣдующія значенія.

Чер. 43.



Изъ условія $\sum M = 0$ относительно оси праваго шарнира въ пятахъ, предполагая сперва, что реакціи опоръ направлены какъ показано на чертежѣ (43), имѣемъ:

$$Al + Qr = 0,$$

или

$$A = -\frac{Qr}{l},$$

т. е. вертикальная составляющая противодѣйствія лѣвой опоры нанаправлена внизъ (черт. 44).

Изъ условія $\sum M = 0$, относительно оси средняго шарнира (шарнира въ ключѣ арки) имѣемъ (черт. 43):

$$\frac{Al}{2} - Q(f - r) - H_1 f = 0$$

или, подставляя вмѣсто A найденное значеніе, окончательно находимъ:

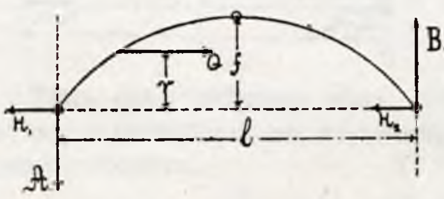
$$H_1 = -\left(\frac{2f - r}{2f}\right) Q,$$

такъ какъ $f > r$, то

$$1 > \frac{2f - r}{2f} > 0,$$

слѣдовательно H_1 по абсолютной величинѣ менѣе Q и направлено влѣво отъ оси лѣваго шарнира, т. е. въ наружу арки (черт. 44).

Чер. 44.



Изъ условія $\sum X = 0$ находимъ:

$$H_1 + Q + H_2 = 0,$$

или, подставляя вмѣсто H_2 его значеніе:

$$-\left(\frac{2f - r}{2f}\right) Q + Q + H_2 = 0,$$

откуда

$$H_2 = -Q + \left(\frac{2f - r}{2f}\right) Q,$$

т. е.

$$H_2 = -Q\frac{r}{2f}.$$

Слѣдовательно H_2 по абсолютной величинѣ менѣе Q и направлено отъ оси праваго шарнира влѣво, т. е. во внутрь арки.

Наконецъ, изъ условія $\sum Y = 0$, имѣемъ:

$$A + B = 0,$$

или, подставляя вмѣсто A найденное его значеніе, получимъ:

$$B = \frac{Qr}{l},$$

т. е. вертикальная составляющая опорнаго противодѣйствія правой опоры направлена вверхъ. Силы A и B образуютъ пару силъ съ плечомъ l, моментъ который равенъ моменту данной силы Q относительно оси праваго шарнира.

Всякую наклонную внѣшнюю силу, дѣйствующую на арку, мы можемъ разложить на двѣ составляющія вертикальную и горизонтальную; для каждой изъ этихъ составляющихъ, на основаніи изложеннаго выше, съумѣемъ найти опорныя противодѣйствія; затѣмъ, суммируя алгебраически найденныя, такимъ образомъ, опорныя противодѣйствія, опредѣлимъ окончательно значенія ихъ соотвѣтствующія заданной наклонной силѣ.

Изъ того, что было изложено объ опорныхъ противодѣйствіяхъ, вызываемыхъ горизонтальною силою, ясно, что (если не принимать во вниманіе вліянія собственнаго вѣса арки и постоянной ея нагрузки), внѣшнія силы, дѣйствующія на одну половину арки, могутъ вызывать въ одной изъ пятъ арки стремленіе къ поднятію и къ сдвиженію во внутрь арки (во внутрь пролета). Въ дѣйствительности это обстоятельство можетъ имѣть мѣсто въ тѣхъ случаяхъ, когда вліяніе внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на одну половину арки, преобладаетъ надъ вліяніемъ собственнаго вѣса арки и постоянной ея нагрузки. Въ этихъ случаяхъ конструкція опорныхъ частей арокъ должна быть такова, чтобы она препятствовала поднятію арокъ съ пятъ и сдвиженію ихъ концовъ во внутрь пролета.

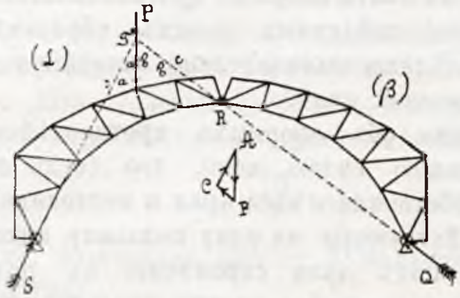
Для болѣе рельефнаго выдѣленія того, что сказано выше относительно опорныхъ противодѣйствій въ аркахъ съ тремя шарнирами, замѣтимъ, что и въ балкахъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, одна изъ опоръ, именно опора неподвижная, можетъ дать *горизонтальное* опорное противодѣйствіе. Случаи эти имѣютъ мѣсто при дѣйствіи на балку внѣшнихъ силъ *горизонтальныхъ* или *наклонныхъ* къ *горизонту* (къ числу такихъ силъ относятся усиліе передаваемое рельсамъ ведущими колесами паровоза (сила тяги), усилія передаваемыя рельсамъ колесами подвижнаго состава при торможеніи его, давленіе вѣтра, дующаго вдоль оси моста и встрѣчающаго боковыя поверхности поперечныхъ балокъ моста и т. п.). Такого рода силы даютъ горизонтальныя составляющія, уравновѣшивающіяся съ горизонтальною составляющею реакціи неподвижной опоры балки. (См. черт. 29 bis).

Въ аркахъ же *обѣ* опоры даютъ *горизонтальныя составляющія* опорныхъ противодѣйствій *и въ случаѣ вертикальной нагрузки*.

2) Графическое построеніе опорныхъ противодѣйствій въ аркѣ (или арочной фермѣ) съ тремя шарнирами.

Разсмотримъ дѣйствіе на арку одной лишь внѣшней силы P (см. черт. 45). Назовемъ одну часть арки между двумя шарнирами черезъ α, а другую часть арки черезъ β и разсмотримъ послѣднюю. На эту часть дѣйствуютъ лишь двѣ силы: противодѣйствіе правой опоры Q и давленіе, производимое лѣвою частью арки α въ точкѣ R. Такъ какъ при равновѣсіи фермы β эти двѣ силы должны между собою уравновѣшиваться, то онѣ должны имѣть общую линію дѣйствія, т. е. онѣ должны быть направлены по прямой QR.

Чер. 45.



Разсмотримъ теперь ферму α. На нее дѣйствуютъ три внѣшнія силы: заданная сила P, противодѣйствіе лѣвой опоры S и противодѣйствіе правой фермы въ точкѣ R. Послѣдняя сила равна и прямопротивоположна давленію, производимому фермою α на ферму β, слѣдовательно линія дѣйствія ея есть прямая QR. Такъ какъ, при равновѣсіи фермы α, три силы, на нее дѣйствующія, должны находиться въ равновѣсіи, то линіи дѣйствія ихъ должны пересѣкаться въ одной точкѣ; для нахожденія этой точки продолжаемъ прямую QR до встрѣчи съ линіею дѣйствія заданной внѣшней силы P.—Назовемъ эту точку T; въ такомъ случаѣ, ST—представитъ линію дѣйствія реакціи S лѣвой опоры арки.—Величины опорныхъ противодѣйствій могутъ быть опредѣлены построеніемъ треугольника силъ, этотъ треугольникъ есть ACB (черт. 45), при чемъ AB—представляетъ заданную силу P, BC—есть величина противодѣйствія направленнаго по линіи QR (или bc), а CA есть противодѣйствіе, направленное по линіи ST (или ca). Очевидно, что треугольникъ ABC можетъ быть разсматриваемъ какъ многоугольникъ внѣшнихъ силъ или для фермы α, или для всей арки, состоящей изъ двухъ фермъ: α и β, а BC—изображаетъ давленіе, производимое фермою β на ферму α въ точкѣ R, или давленіе производимое фермою β на ея опору въ точкѣ Q.

Если на арку дѣйствуютъ, сверхъ силы P, еще другія силы въ другихъ точкахъ (будутъ ли то какія-либо нагрузки, зависящія отъ давленія на арку постороннихъ тѣлъ или отъ собственнаго ея вѣса) *), то опорныя противодѣйствія, вызываемыя каждою силою, могутъ быть найдены отдѣльно, какъ изложено выше; равнодѣйствующая всѣхъ этихъ частныхъ противодѣйствій для

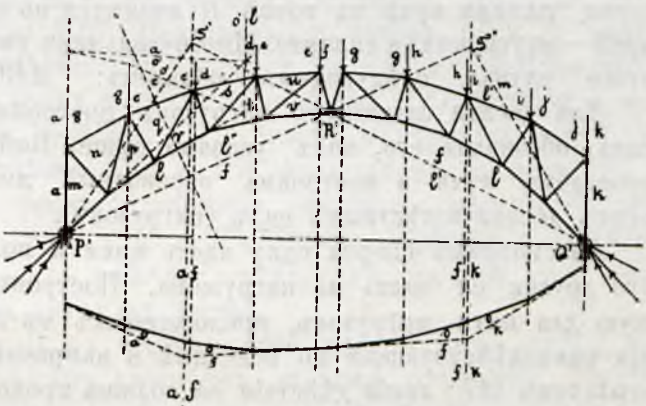
*) Собственный вѣсъ арки разсматривается какъ нѣкоторая дѣйствующая на нее нагрузка.

каждой опоры и представитъ полное опорное противодѣйствіе данной опоры для случая совмѣстнаго дѣйствія всѣхъ силъ. Удобный способъ построенія опорныхъ противодѣйствій отъ нѣсколькихъ силъ, дѣйствующихъ на арки одновременно,— показанъ ниже.

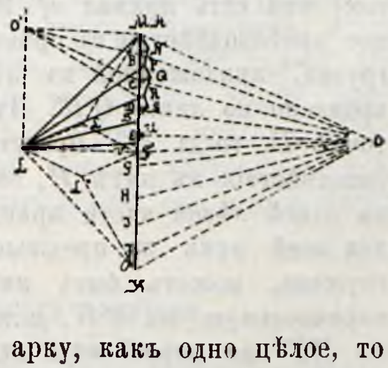
3) Построеніе опорныхъ противодѣйствій и усилій въ частяхъ арочной фермы, вызываемыхъ дѣйствіемъ на нее произвольной системы вертикальныхъ грузовъ.

На черт. 46 изображена арочная ферма, состоящая изъ двухъ частей, въ пятахъ коихъ P' и Q' помѣщены шарниры, при чемъ обѣ части фермы соединены между собою въ точкѣ R' посредствомъ шарнира. Положимъ, что всѣ нагрузки приложены къ верхнимъ узламъ, при чемъ линіи дѣйствія нагрузокъ обозначены по принятому способу.

Чер. 46



Объясненіе къ чер. 46-му. Въ многоугольникѣ силъ: LA совпадаетъ съ ML; AM обращается въ нуль.



Задача сводится къ опредѣленію опорныхъ противодѣйствій, такъ какъ построеніе діаграммы усилій въ частяхъ фермы не представляетъ никакихъ затрудненій, коль скоро найдены будутъ опорныя противодѣйствія.

Такъ какъ намъ придется разсматривать въ нѣкоторыхъ случаяхъ одну изъ фермъ, составляющихъ арку, а въ другихъ случаяхъ — всю арку, какъ одно цѣлое, то прежде всего представляется необходимымъ выдѣлить внѣшнія силы, дѣйствующія на каждую изъ двухъ частей арки, а именно:

1) На *лѣвую* часть арки дѣйствуютъ: пять заданныхъ нагрузокъ, опорное противодѣйствіе въ точкѣ R' (производимое правою частью арки) и опорное противодѣйствіе въ лѣвой пятѣ P' арки. Многоугольникъ этихъ силъ обозначимъ буквами $ABCDEFLA$. Значеніе этихъ буквъ легко понятно изъ соотвѣтствующихъ обозначеній, показанныхъ на схемѣ фермы, гдѣ малыми буквами $abcdefla$ обозначаются положенія въ пространствѣ частей фермы и внѣшнихъ силъ, къ ней приложенныхъ.

2) На правую часть арки дѣйствуютъ пять заданныхъ нагрузокъ и два опорныхъ противодѣйствія; многоугольникъ этихъ силъ обозначимъ буквами: $FGHIJKLF$. При этомъ замѣтимъ, что FL и LF представляютъ двѣ равныя и прямопротивоположныя силы, а именно силы взаимнодѣйствія (давленіе и противодѣйствіе) между двумя частями арки въ точкѣ R'.

3) На всю арку (т. е. на обѣ части, разсматриваемыя какъ одно цѣлое) дѣйствуютъ: десять заданныхъ нагрузокъ и опорныя противодѣйствія въ пятахъ P' и Q'. (Силы взаимнодѣйствія между двумя частями арки въ точкѣ R' являются по отношенію ко всей аркѣ—внутренними силами). Многоугольникъ силъ обозначимъ для этого случая слѣдующимъ образомъ: $ABCDEFGHIJKLA$.

Для десяти заданныхъ нагрузокъ построимъ многоугольникъ силъ, обозначая его, какъ указано выше. Выберемъ полюсъ O, проведемъ лучи и построимъ веревочный многоугольникъ для этихъ десяти извѣстныхъ силъ (нагрузокъ).

Разсмотримъ сперва одну часть арки и положимъ на время, что другая ея часть не нагружена. Построимъ ровнодѣйствующую для пяти нагрузокъ, приложенныхъ къ лѣвой части арки; эта равнодѣйствующая по величинѣ и направленію изображается отрѣзкомъ AF; линія дѣйствія ея должна проходить черезъ точку пересѣченія сторонъ oa и of веревочнаго многоугольника, а потому она есть прямая af. Изъ предыдущаго извѣстно, что опорное противодѣйствіе въ правой пятѣ Q' вызываемое дѣйствіемъ нагрузки, приложенной къ лѣвой части арки, должно быть направлено по линіи $Q'R'$. Пусть $Q'R'$ пересѣкаетъ прямую af въ точкѣ T', тогда $P'T'$ представитъ линію дѣйствія опорнаго противодѣйствія въ пятѣ P', зависящаго отъ нагрузки, приложенной къ одной лѣвой части арки. Слѣдовательно многоугольникъ силъ для всей арки въ предположеніи, что правая ея часть не нагружена, можетъ быть найденъ, проведя изъ точки F прямую параллельную къ $Q'R'$, и изъ точки A прямую параллельную къ $P'T'$ до пересѣченія ихъ въ точкѣ L'. Величины опорныхъ противодѣйствій изобразятся: для пяты P' отрѣзкомъ $L'A$, а для пяты Q' отрѣзкомъ FL'. (Линія дѣйствія опорнаго противодѣйствія пяты Q' обозначена буквами fl').

Затѣмъ разсмотримъ правую часть арки, полагая на время, что лѣвая часть арки не нагружена. Равнодѣйствующая пяти нагрузокъ правой части арки есть FK, а линія ея дѣйствія, проходящая чрезъ точку пересѣченія сторонъ of и ok веревочнаго многоугольника, есть fk. Опорныя противодѣйствія въ пятахъ P' и Q' для этого случая имѣютъ соотвѣтственно линіи дѣйствія $P'R'$ и $Q'T''$, найденныя такимъ же образомъ, какъ и въ первомъ случаѣ. Для опредѣленія величинъ и направленій этихъ опорныхъ противодѣйствія слѣдуетъ провести изъ точки K прямую параллельную $Q'T''$ и изъ точки F прямую параллельную $P'R'$ и продолжить эти прямыя до пересѣченія въ точкѣ L''. Многоугольникъ силъ для арки въ предположеніи нагруженія лишь одной правой ея части есть $FGHIJKL''F$.

Примемъ теперь во вниманіе одновременное нагруженіе обѣихъ частей арки. Противодѣйствіе пяты P' въ этомъ случаѣ представитъ очевидно равнодѣйствующую двухъ частныхъ опорныхъ противодѣйствій $L'A$ и $L''F$, а противодѣйствіе пяты Q'— представитъ равнодѣйствующую двухъ частныхъ опорныхъ противодѣйствій FL' и KL''. Проведемъ изъ точекъ L'' и L' линіи, параллельныя соотвѣтственно къ FL' и къ FL'' и пересѣкающіяся въ точкѣ L; при этомъ получатся: отрѣзокъ $L''L$ равный и параллельный FL' и отрѣзокъ LL' равный и параллельный $L''F$. Слѣдовательно, отрѣзки KL и LA представятъ по величинѣ и по направленію равнодѣйствующія опорныхъ противодѣйствій соотвѣтственно въ пятахъ Q' и P'. Такимъ образомъ построится полный многоугольникъ внѣшнихъ силъ, какъ для всей арки, такъ и для каждой изъ двухъ ея частей.

Діаграмма усилій въ частяхъ арки можетъ быть затѣмъ построена обыкновеннымъ способомъ, начиная отъ пяты P'. На (черт. 46) построена эта діаграмма для лѣвой части арки.

Если-бы нагрузки были приложены къ нижнимъ узламъ, то опорныя противодѣйствія, вызываемыя этими нагрузками, могли бы быть найдены такимъ же образомъ, какъ и для случая нагрузокъ, приложенныхъ въ верхнихъ узлахъ, но, ранѣе построенія усилій, слѣдуетъ при этомъ построить многоугольникъ внѣшнихъ силъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ нагрузки встрѣчаются, если слѣдовать по очертанію фермы отъ одной опоры къ другой.

4) Случай симметрической нагрузки.

Построеніе опорныхъ противодѣйствій и усилій въ трехъшарнирной аркѣ въ значительной степени упрощается въ томъ случаѣ, когда обѣ части арки совершенно одинаковы и симметрично нагружены.

Упрощенія эти состоятъ въ слѣдующемъ:

1) Относительно противодѣйствій изъ условія симметріи слѣдуетъ, что силы взаимнодѣйствія между двумя частями арки въ точкѣ R' должны быть *горизонтальны*. Поэтому, обращаясь къ чертежу и разсматривая какую либо изъ двухъ частей арки, напримѣръ лѣвую,—можемъ найти для нагрузки обѣихъ частей арки линію дѣйствія опорнаго противодѣйствія лѣвой пяты, проведя горизонтальную прямую изъ точки R' до встрѣчи съ прямой af, т. е. съ линіей дѣйствія равнодѣйствующей нагрузки лѣвой части арки; прямая соединяющая эту точку пересѣченія съ точкою P' и представитъ искомую линію дѣйствія опорнаго противодѣйствія лѣвой пяты арки. По величинѣ оба опорныхъ противодѣйствія опредѣляются, если провести въ многоугольникѣ силъ: изъ точки F—прямую горизонтальную, а изъ точки A прямую параллельную найденной линіи дѣйствія опорнаго противодѣйствія пяты арки, до взаимнаго пересѣченія сихъ прямыхъ.

2) Для построенія діаграммы усилій въ частяхъ арки достаточно построить діаграмму усилій только для одной ея части, такъ какъ для каждой изъ двухъ частей, при одинаковости ихъ и симметричности нагрузки, получаются одинаковыя діаграммы.

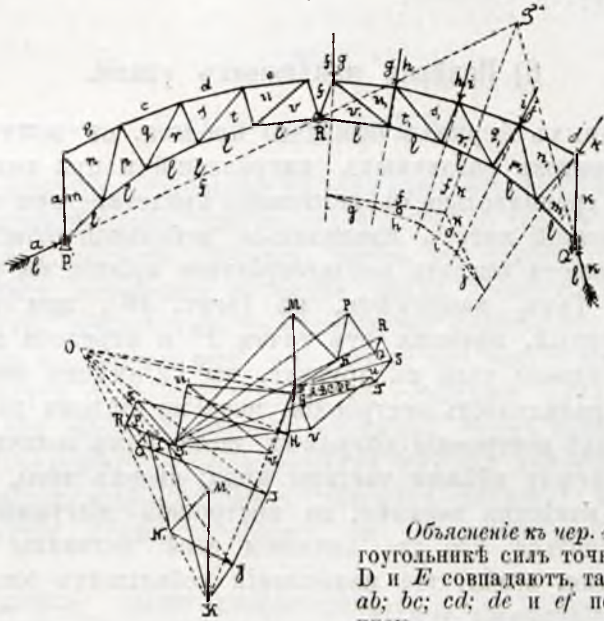
5) Построеніе діаграммы усилій отъ давленія вѣтра.

Такъ какъ давленію вѣтра подвергается либо одна, либо другая часть фермы, то построеніе усилій отъ вѣтра нѣсколько упрощается, а именно линія дѣйствія опорнаго противодѣйствія одной изъ опоръ извѣстна, слѣдовательно построеніе линіи дѣйствія опорнаго противодѣйствія второй опоры не представляетъ никакихъ затрудненій (см. чер. 47).

При опредѣленіи нагрузокъ на узлы арочной фермы отъ давленія вѣтра принимается, что на каждый узелъ приходится половина давленія вѣтра на соотвѣтствующую панель фермы, прилегающую къ разсматриваемому узлу (причемъ безъ большой погрѣшности можно вмѣсто криволинейныхъ частей верхняго очертанія арки разсматривать прямыя касательныя къ этому очертанію или хорды). При криволинейной верхней поверхности арки линія дѣйствія давленія вѣтра для даннаго узла принимается по нормали къ кривой верхняго очертанія арки въ данномъ узлѣ. Поэтому, многоугольникъ силъ для давленій отъ вѣтра при криволинейномъ верхнемъ очертаніи арки представляетъ ломаную, а не прямую линію. На чер. 47 этотъ многоугольникъ есть

FGHIJK. Опорныя противодѣйствія обозначимъ черезъ *KL* и *LF*. Такъ какъ на другой части арки (по чер. 47 на лѣвой части)

Чер. 47.



Объясненіе къ чер. 47-му. Въ многоугольникѣ силъ точки *F; A; B; C;* D и *E* совпадаютъ, такъ какъ силы *ab; bc; cd; de* и *ef* порознь равны нулю.

не имѣется никакихъ нагрузокъ, то точки *ABCDEF* должны совпасть между собою. Выбравъ полюсъ *O*, построимъ веревочный многоугольникъ, какъ показано на чертежѣ, и опредѣлимъ линію дѣйствія равнодѣйствующей всѣхъ давленій отъ вѣтра, приложенныхъ въ узлахъ фермы. Эта линія дѣйствія *fk* проведена параллельно прямой *FK* черезъ точку пересѣченія сторонъ *of* и *ok* веревочнаго многоугольника. Продолжая *fk* до встрѣчи съ $P'R'$ въ точкѣ T'', найдемъ $Q'T''$—линію дѣйствія опорнаго противодѣйствія пяты Q'. Затѣмъ многоугольникъ силъ можетъ быть сомкнутъ проведеніемъ до взаимнаго пересѣченія прямыхъ: *KL*, параллельной $Q'T''$ и *FL*, параллельной $P'R'$. Такъ какъ при этомъ опорныя противодѣйствія *KL* и *LF* вполнѣ опредѣляются по величинѣ, то діаграмма усилій можетъ быть построена безъ затрудненій.

Діаграмма усилій построена для обѣихъ частей арки, какъ показано на чертежѣ.

Если обѣ части арки симметричны, то нѣтъ надобности строить діаграмму усилій для случая дѣйствія вѣтра на другую часть арки; усилія въ соотвѣтственныхъ частяхъ арки для этого случая опредѣляются прямо изъ діаграммы уже построенной для перваго случая. Въ случаѣ, когда отдѣльныя части арки не симметричны, слѣдуетъ построить двѣ діаграммы усилій: отдѣльно для дѣйствія вѣтра съ одной стороны и отдѣльно для дѣйствія вѣтра съ другой стороны.

6) Повѣрка найденныхъ усилій.

Въ арочныхъ фермахъ большого пролета, въ коихъ имѣется много элементовъ различныхъ направленій и при томъ небольшой длины сравнительно съ величиною пролета,—при построеніи діаграммъ усилій могутъ накопляться небольшія ошибки, сумма которыхъ можетъ оказать неблагопріятное вліяніе на результатъ построенія. Такъ, напримѣръ, на (черт. 46), при построеніи діаграммы усилій, начиная отъ точки P' и переходя послѣдовательно отъ одного узла къ другому, мы не имѣемъ возможности провѣрить правильность построенія, пока не дойдемъ до точки R'. Въ этой точкѣ построеніе діаграммы даетъ намъ величину взаимнодѣйствія между обѣими частями арки; сверхъ того, эта величина намъ извѣстна заранѣе, до построенія діаграммы усилій. Можетъ случиться, что два значенія этой величины окажутся неодинаковыми, вслѣдствіе накопленія небольшихъ ошибокъ при построеніи діаграммы усилій.

Способъ сѣченій (способъ Кульмана) даетъ возможность провѣрить правильность построенія діаграммы усилій въ любой ея части, не требуя построенія половины всей діаграммы для возможности повѣрки правильности ея построенія. Для примѣра, возьмемъ на черт. 46 сѣченіе, пересѣкающее элементы cq, qr и rl и примѣнимъ условія равновѣсія къ мысленно отсѣченной части фермы по лѣвую сторону взятаго сѣченія. На эту часть фермы дѣйствуютъ силы LA, AB, BC, CQ, QR и RL. Выберемъ полюсъ O' и построимъ для упомянутой системы силъ—веревочный многоугольникъ, при чемъ сторону $o'c$ веревочнаго многоугольника проведемъ черезъ точку пересѣченія элементовъ cq и qr фермы. Проведемъ послѣдовательно стороны веревочнаго многоугольника $o'c$, $o'b$, $o'a$, $o'l$, продолжая послѣднюю до пересѣченія съ элементомъ lr фермы. Чрезъ найденную точку пересѣченія проведемъ сторону веревочнаго многоугольника $o'r$, которая также должна пройти черезъ точку пересѣченія элементовъ cq и qr. Коль скоро $o'r$ извѣстно, соотвѣтствующій лучъ $O'R$ можетъ быть построенъ въ многоугольникѣ силъ и, затѣмъ, проведя изъ точки L прямую параллельную lr, найдемъ точку R. Слѣдовательно, можемъ замкнуть многоугольникъ силъ, такъ какъ направленія двухъ остающихся силъ (cq и qr) извѣстны.

Такъ какъ усилія въ трехъ упомянутыхъ элементахъ фермы извѣстны, то имѣются данныя для провѣрки правильности построенія діаграммы усилій.

VI.

Сложныя фермы.

Тѣ фермы, по отношенію къ каждому элементу коихъ нельзя провести прямой линіи, разсѣкающей ферму *въ какомъ либо мѣстѣ* на двѣ части, такимъ образомъ, чтобъ эта прямая, сверхъ *даннаго* элемента, встрѣчала не болѣе двухъ элементовъ фермы, въ коихъ усилія неизвѣстны, — называются *сложными*. Эти фермы *статически неопредѣлимыя*, т. е. такія, что усилія въ элементахъ ихъ не могутъ быть опредѣлены на основаніи однихъ законовъ Статики; для *точнаго* разсчета сложныхъ фермъ необходимо разсмотрѣніе условій, сопровождающихъ упругія деформаціи фермы.

Приблизительный разсчетъ сложныхъ фермъ *) основывается на разложеніи сложныхъ фермъ на составляющія ихъ простыя фермы.

Приведенные выше графическіе способы разсчета простыхъ фермъ примѣняются при разсчетѣ сложной фермы къ составляющимъ ее отдѣльнымъ простымъ фермамъ, при чемъ результаты разсчетовъ алгебрически суммируются для тѣхъ элементовъ, которые входятъ въ составъ двухъ или нѣсколькихъ простыхъ фермъ. При этомъ нагрузка сложной фермы раздѣляется между простыми фермами такимъ образомъ, что простыя фермы выдѣляются съ приходящимися на ихъ узлы нагрузками. Раздѣленіе нагрузки сложной фермы на равныя части по числу простыхъ фермъ, входящихъ въ составъ сложной фермы, менѣе точно.

VII.

Линіи вліянія для арочныхъ фермъ съ тремя шарнирами.

Разсчетъ арокъ, подверженныхъ нагрузкѣ отъ системъ подвижныхъ грузовъ, каковы арки мостовыя, удобнѣе производить по линіямъ вліянія.

*) Съ точностью, въ большинствѣ случаевъ, достаточною для практическихъ цѣлей.

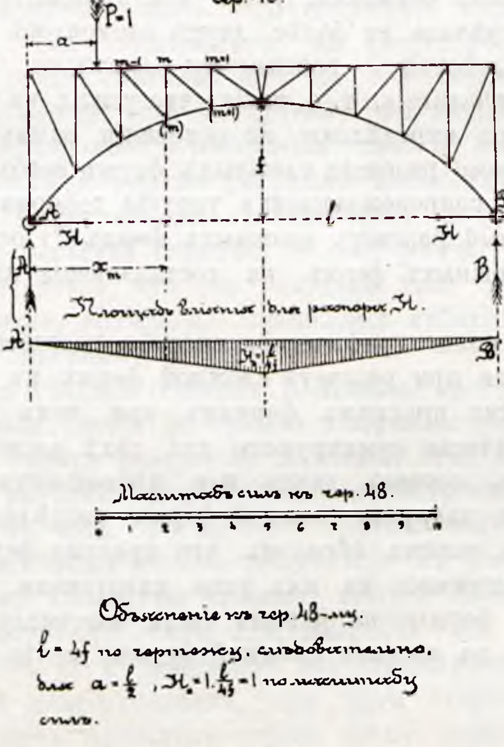
1) Линія и площадь вліянія для распора арки.

На стр. 61-й было указано, что для трехъ-шарнирной арки, подверженной дѣйствію одного груза, равнаго единицѣ, распоръ H арки имѣетъ слѣдующее значеніе:

$$H = \frac{a}{2f}.$$

Это выраженіе распора отъ единичной нагрузки даетъ воз-

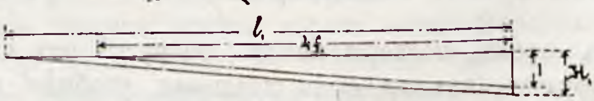
Черт. 48.



Объясненіе къ черт. 48-му.
$l = 4f$ по чертежу, слѣдовательно, для $a = \frac{l}{2}$, $H_0 = 1 \cdot \frac{l}{4f} = 1$ по масштабу силъ.

Черт. 48 bis.

Построеніе величины $H_0 = 1 \cdot \frac{l_1}{4f_1}$ для случая $l_1 \gtrless 4f_1$



можность непосредственно построить линію вліянія для распора арки.

Для $a = \frac{l}{2}$, имѣемъ

$$H_0 = \frac{l}{4f},$$

слѣдовательно упомянутая линія (черт. 48) состоитъ изъ двухъ наклонныхъ прямыхъ, имѣющихъ для абсциссы $a = \frac{l}{2}$ общую ординату $H_0 = \frac{l}{4f}$.

Въ самомъ дѣлѣ:

1) для груза $P = 1$, находящагося на разстояніи a отъ лѣвой опоры арки, при $a < \frac{l}{2}$, находимъ:

$$H : \frac{l}{4f} = a : \frac{l}{2}$$

$$H = \frac{a}{2f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2) Для груза $P = 1$, находящагося на разстояніи $a > \frac{l}{2}$ отъ лѣвой опоры, изъ условія, что сумма моментовъ всѣхъ силъ дѣйствующихъ на лѣвую половину арочной фермы относительно оси средняго шарнира должна быть равна нулю, имѣемъ:

$$1 \cdot \frac{(l-a)}{l} \cdot \frac{l}{2} - Hf = o,$$

т. е.

$$H = \frac{l-a}{2f}.$$

По чертежу находимъ:

$$H : \frac{l}{4f} = (l-a) : \frac{l}{2}$$

или

$$H = \frac{l-a}{2f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Заштрихованная на чертежѣ (48) площадь называется площадъю вліянія для распора арки.

2) Линія и площадь вліянія для момента внѣшнихъ силъ относительно даннаго узла арочной фермы.

Построимъ площадь вліянія для момента внѣшнихъ силъ относительно даннаго узла m арочной фермы,

При этомъ построеніи слѣдуетъ различать три случая, а именно: когда грузъ равный единицы находится на участкѣ арки:

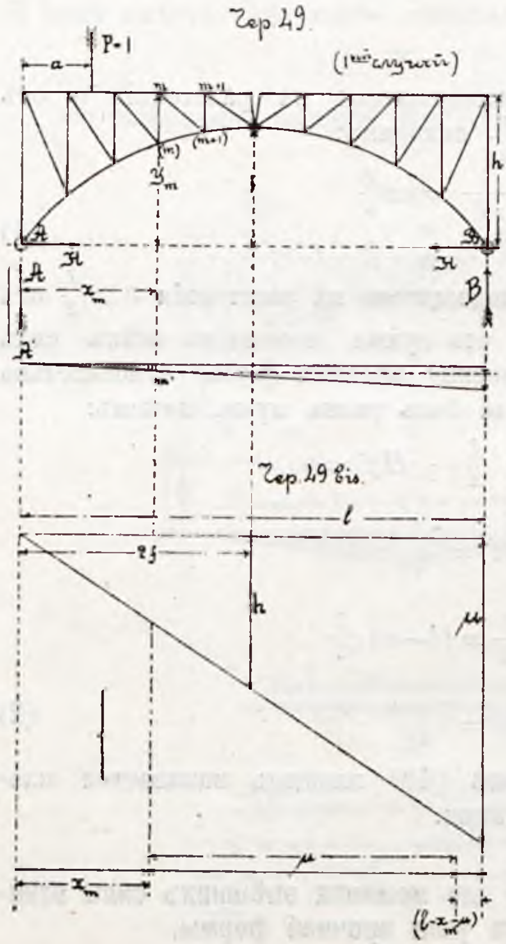
1) между абсциссами: $x = 0$ и $x = x_m$;

2) между абсциссами: $x = x_m$ и $x = \frac{l}{2}$, и

3) между абсциссами: $x = \frac{l}{2}$ и $x = l$.

1-й случай (черт. 49). Грузъ равный единицѣ приложенъ къ арочной фермѣ на разстояніи a отъ лѣвой опоры. Предѣлы перемѣнной величины a: $a=0$ и $a=x_m$. Значеніе изгибающаго момента внѣшнихъ силъ въ точкѣ m есть:

$$M_m' = Ax_m - Hy_m - 1\ .\ (x_m - a)$$



$$A = \frac{1\ .\ (l-a)}{l}$$

$y_m = h = const$, для всѣхъ верхнихъ узловъ фермы,

$$H = \frac{a}{2f}$$

$$x_m = const.$$

$$M_m' = a\left(1 - \frac{x_m}{l} - \frac{h}{2f}\right)..(3)$$

Это есть уравненіе прямой линіи, при чемъ, при: $a=0$; $M_m'=0$ при $a=l$; $M_m' = l - x_m - \frac{hl}{2f}$; $l - x_m$ есть разстояніе точки m до правой опоры, прямо измѣряемое на чертежѣ (49), $\frac{hl}{2f} = \mu$ выражаетъ величину отрѣзка прямой линіи, каковая величина можетъ быть легко построена графически (чер. 49 bis), на основаніи пропорціи:

$$\mu : h = l : 2f.$$

Слѣдовательно, зная разность величинъ отрѣзковъ: $(l - x_m)$ и μ, — получимъ ординату M_m' для абсциссы $a=l$.

Прямая выражаемая уравненіемъ (3) построится по двумъ точкамъ:

$$a=0;\ M_m'=0$$

и

$$a=l;\ M_m' = (l - x_m) - \mu.$$

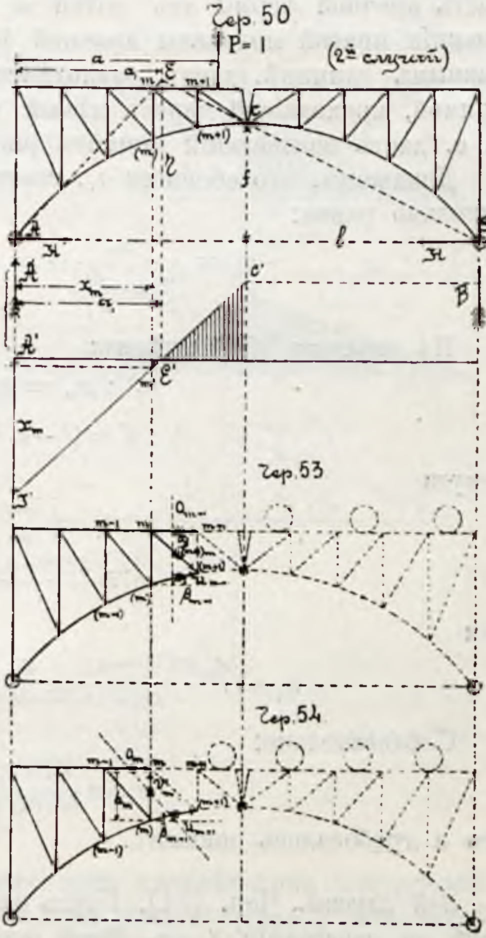
Для разсматриваемаго вопроса имѣютъ значеніе ординаты этой прямой лишь въ предѣлахъ:

$$a=0 \text{ и } a=x_m.$$

2-й случай. Чер. (50). Грузъ равный единицѣ приложенъ къ аркѣ на разстояніи a отъ лѣвой опоры. Предѣлы перемѣнной величины a суть: $a = x_m$ и $a = \frac{l}{2}$. Значеніе изгибающаго момента внѣшнихъ силъ въ точкѣ m есть:

$$M_m'' = Ax_m - Hy_m = x_m - a\left(\frac{x_m}{l} + \frac{h}{2f}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Во второй части этого уравненія первый членъ—постоянный, второй — перемѣнный. Уравненіе это при перемѣнной величинѣ a, выражаетъ собою прямую линію, начальная ордината коей есть x_m.



При
$a = 0$; $M''_m = x_m$.

При
$a_1 = \frac{x_m}{\frac{x_m}{l} + \frac{h}{2f}}$; $M''_m = 0$.

При
$a = \frac{l}{2}$, $M''_m = \frac{x_m}{2} - \frac{hl}{4f}$.

Для геометрическаго построенія a_1, соотвѣтствующаго $M'' = 0$, замѣтимъ, что въ точкѣ m очевидно (черт. 50) получится изгибающій моментъ равный нулю при томъ положеніи груза, когда прямая EA проходитъ черезъ точку m; поэтому на инфлюэнтной линіи моментовъ стоитъ отмѣтить абсциссу, соотвѣтствующую точкѣ E и положить, что для этой абсциссы $M''_m = 0$. Соединяя точки I' и E' прямою и продолжая эту прямую до пересѣченія съ вертикалью, проходящею чрезъ средній шарниръ въ точкѣ C', получимъ отрѣзокъ m' E' C', ограничивающій инфлюэнтную площадь моментовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая лѣвую часть арки отъ лѣвой опоры до сѣченія m (черт. 50), на которую дѣйствуетъ грузъ равный единицѣ, расположенный такимъ образомъ, что прямая EA проходитъ черезъ точку m, видимъ, что единственная сила, дѣйствующая на эту часть арки, есть реакція лѣвой опоры, направленная по прямой проходящей черезъ точку m. Разсматривая моментъ относительно точки m всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на арку отъ лѣвой ея опоры до этого сѣченія, легко видѣть, что изгибающій моментъ внѣшнихъ силъ въ точкѣ m равенъ нулю. Въ этомъ же легко убѣдиться, разсматривая изгибающій моментъ относительно точки m внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на правую часть арочной фермы отъ точки m до правой опоры, а именно: реакція правой половины арочной фермы, сложенная съ грузомъ равнымъ единицѣ, дастъ равнодѣйствующую, направленную по прямой, проходящей черезъ лѣвый шарниръ и черезъ точку m, т. е. дастъ изгибающій моментъ равный нулю.

Докажемъ, что абсцисса a_1, соотвѣтствующая точкѣ E, дѣйствительно равна:

$$a_1 = \frac{x_m}{\frac{x_m}{l} + \frac{h}{2f}} = \frac{2fl\,x_m}{hl + 2f\,x_m}.$$

По чертежу (50) имѣемъ:

$$a_1 : x_m = \eta : h$$

$$\eta : f = (l - a_1) : \frac{l}{2},$$

откуда

$$a_1 = \frac{x_m \eta}{h}$$

$$\eta = \frac{2f(l-a_1)}{l},$$

или

$$a_1 = \frac{x_m 2f(l-a_1)}{hl} = \frac{x_m}{hl}[2fl - 2fa_1].$$

Слѣдовательно:

$$a_1 = \frac{2fl\,x_m}{hl + 2fx_m},$$

что и требовалось доказать.

3-й случай. Чер. (51). Грузъ равный единицѣ приложенъ къ аркѣ на разстояніи a отъ лѣвой опоры. Предѣлы для a:

$$a = \frac{l}{2} \text{ и } a = l.$$

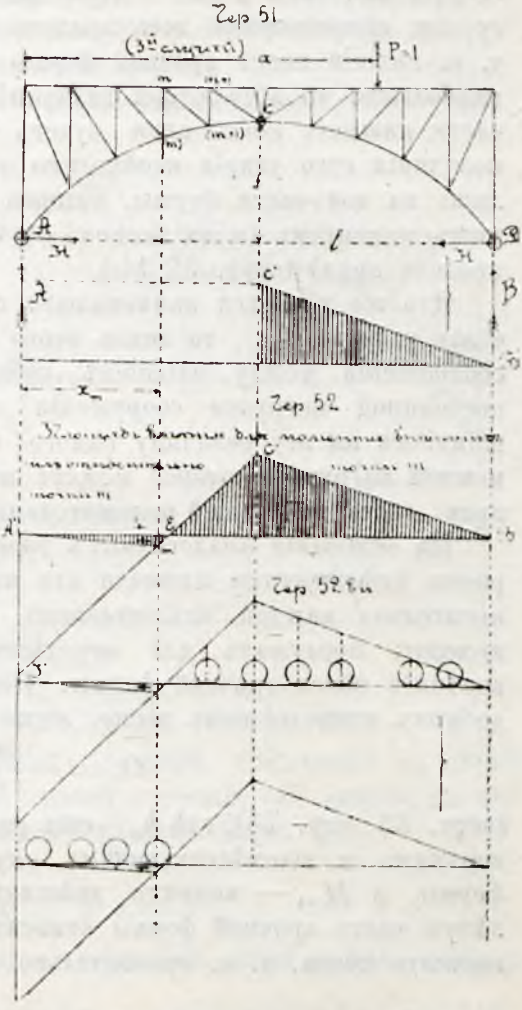
Напишемъ выраженіе момента относительно точки m внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть арки (отъ лѣвой опоры до точки m):

$$M'''_m = Ax_m - Hy_m$$

$$A = 1\frac{(l-a)}{l}.$$

При разсмотрѣніи инфлюэнтной линіи горизонтальнаго распора H было найдено (стр. 73), что для этого случая

$$H = \frac{l-a}{2f}.$$



Слѣдовательно:

$$M'''_m = \frac{(l-a)}{l} x_m - \frac{(l-a)}{2f} y_m;$$

$$y_m = h;$$

$$M'''_m = x_m - \frac{a x_m}{l} - \frac{(l-a)}{2f} h.$$

При

$$a = l;\ M'''_m = 0.$$

При

$$a = \frac{l}{2};\quad M'''_m = \frac{x_m}{2} - \frac{lh}{4f},$$

т. е., при

$$a = \frac{l}{2} M'''_m = M''_m.$$

По найденнымъ двумъ точкамъ построится прямая $C'B'$.

Такимъ образомъ, инфлюэнтная площадь для момента внѣшнихъ силъ относительно точки m вполнѣ опредѣляется.

Зная значенія M_m возможно опредѣлить усилія въ частяхъ нижняго пояса арочной фермы изъ формулы:

$$U_{m+1} = + \frac{M_m}{h_m \cos\beta_{m+1}},$$ гдѣ M_m само по себѣ можетъ быть отрицательно или положительно.

Въ самомъ дѣлѣ, дѣлая мысленно сѣченіе арки непосредственно вправо отъ узла m и замѣняя дѣйствіе правой отсѣченной части арки на лѣвую (черт. 53, стр. 75) нѣкоторыми силами, которыя мы будемъ первоначально предполагать вытягивающими,— видимъ, что условіе Статики $\sum M = 0$ для точки m выразится слѣдующимъ образомъ, если моменты, вращающіе по направленію часовой стрѣлки, считать положительными:

$$M_m - U_{m+1} h_m \cos\beta_{m+1} = 0.$$

Такъ какъ часть инфлюэнтной площади моментовъ, соотвѣтствующая *отрицательнымъ* значеніямъ моментовъ M_m, больше той части сей площади, которая соотвѣтствуетъ положительнымъ моментамъ (см. черт. 52), то U_{m+1} какъ отъ собственнаго вѣса сооруженія, такъ и отъ всякой равномѣрно-распредѣленной нагрузки, покрывающей весь пролетъ арки, будетъ *отрицательно*, т. е. нижній поясъ арочной фермы будетъ *сжатъ*. Точно также наибольшее по абсолютной величинѣ усиліе въ разсматриваемой части нижняго пояса арки будетъ сжимающее, такъ какъ для полученія сего усилія необходимо поставить временную нагрузку лишь на той части фермы, которая соотвѣтствуетъ отрицательнымъ моментамъ (и въ данномъ случаѣ занимаетъ большую часть пролета арки) (черт. 52 bis).

Что же касается наименьшаго по абсолютной величинѣ значенія усилія U_{m+1}, то знакъ этого усилія будетъ зависѣть отъ соотношенія между вліяніемъ собственнаго вѣса или вообще постоянной нагрузки сооруженія на величину U_{m+1} и между вліяніемъ на эту величину самого большаго числа грузовъ временной нагрузки, которое можетъ помѣститься на части пролета арки, соотвѣтствующей положительнымъ моментамъ (черт. 52 bis).

На основаніи аналогичныхъ разсужденій могутъ быть построены инфлюэнтныя площади для моментовъ внѣшнихъ силъ относительно каждой изъ узловыхъ точекъ нижняго пояса; эти моменты послужатъ для опредѣленія усилій O_m въ частяхъ верхняго пояса арочной фермы. Посредствомъ разсужденій, подобныхъ приведеннымъ выше, легко найти, что

$$O_m = -\frac{M_{(m)}}{h_m}$$

(черт. 54, стр. 75), гдѣ h_m—есть разстояніе по вертикали между верхнимъ и соотвѣтствующимъ ему нижнимъ узлами арочной фермы, а $M_{(m)}$ — моментъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую часть арочной фермы относительно соотвѣтствующаго узла нижняго пояса, т. е. относительно точки (m).

3) Линія и площадь вліянія для усилія въ данномъ раскосѣ арочной фермы.

Инфлюэнтная площадь для усилія D въ раскосѣ арочной фермы можетъ быть легко построена, исходя изъ способа статическихъ моментовъ.

I-й *Случай*. Грузъ, равный единицѣ, приложенъ къ арочной фермѣ съ лѣвой стороны той панели, въ которой находится разсматриваемый раскосъ (чер. 55).

Предѣлы для a:

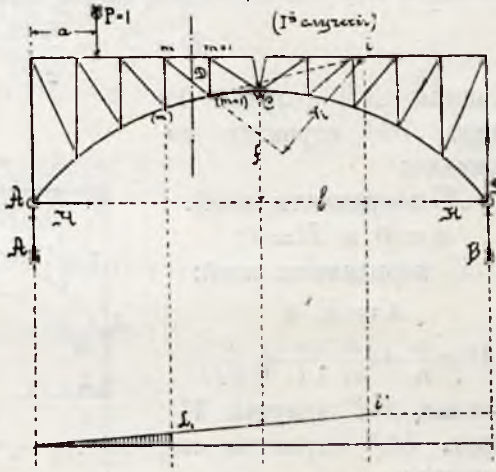
$$a = 0 \text{ и } a = x_m.$$

Для опредѣленія усилія D въ раскосѣ m $(m+1)$ разсѣчемъ арочную ферму мысленно на двѣ части, какъ показано на чертежѣ, и напишемъ условіе Статики $\sum M = 0$ для лѣвой отсѣченной части арочной фермы относительно точки i пересѣченія продолженныхъ направленій поясовъ этой фермы.

$$M_i' = Ax_i - Hh - 1\ (x_i - a) - Dr_i = 0,$$

откуда:

Чер. 55.



$$D = \frac{Ax_i - Hh - (x_i - a)}{r_i} = \\ = \frac{\frac{(l-a)}{l}x_i - \frac{ah}{2f} - x_i + a}{r_i}$$

или

$$D = \frac{a}{r_i} - \frac{a}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\}$$

Это выраженіе, въ которомъ перемѣнная величина есть a, представляетъ уравненіе прямой линіи.

При

$$a = 0;\ \ D = 0;$$

при

$$a = x_m;\ D = \frac{x_m}{r_i} - \frac{x_m}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\}.$$

II-й *Случай*. Грузъ, равный единицѣ, приложенъ къ лѣвой половинѣ арочной фермы съ правой стороны той панели, въ которой находится разсматриваемый раскосъ (черт. 56).

Предѣлы для a:

$$a = x_{m+1} \ \text{ и } \ a = \frac{l}{2}$$

Примѣняя тотъ же ходъ разсужденій, какъ и для перваго случая, находимъ:

$$M''_i = Ax_i - Hh - Dr_i = 0;$$

$$D = \frac{Ax_i - Hh}{r_i}$$

или

$$D = \frac{x_i}{r_i} - \frac{a}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\}$$

Это выраженіе, въ которомъ a есть величина перемѣнная, представляетъ собою уравненіе прямой линіи.

При

$$a = x_{m+1};\ D = \frac{x_i}{r_i} - \frac{x_{m+1}}{r_i}\left(\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right)$$

при

$$a = \frac{l}{2};\ D_{\text{II}} = \frac{x_i}{r_i} - \frac{l}{2r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\}$$

Изслѣдуя уравненія, найденныя для D въ I-мъ и II-мъ случаяхъ внѣ указанныхъ предѣловъ, внутри которыхъ эти уравненія имѣютъ значеніе для построенія инфлюэнтныхъ площадей, легко замѣтить, что при $a=x_i$ обѣ прямыя, выражаемыя этими уравненіями, пересѣкаются въ одной точкѣ, которой ордината есть:

$$D = \frac{x_i}{r_i} - \frac{x_i}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\}.$$

Прямая $A''i$ (случай I) (черт. 55) строится по точкамъ:

1) A'' координаты коей:

$a=0$ и $D=0$;

2) i', координаты коей:

$a = x_i$ и

$$D = \frac{x_i}{r_i} - \frac{x_i}{r_i}\left(\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right)$$

Прямая $I''i'$ (случай II) (черт. 56) строится по точкамъ:

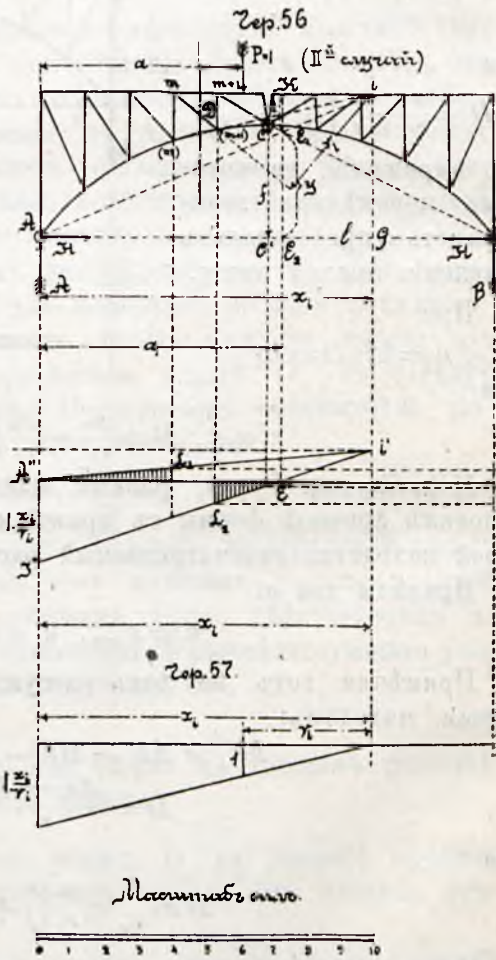
1) I'', координаты коей:

$a=0$ и $D=\frac{x_i}{r_i}$ Черт. (57)

2) i', координаты коей:

$a = x_i$ и

$$D = \frac{x_i}{r_i} - \frac{x_i}{r_i}\left(\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right)$$



Точка i' можетъ быть построена, продолжая $I''E''$ до пересѣченія съ вертикалью ii', для чего надо построить точку E''. — Эта же точка, какъ видно изъ чертежа, соотвѣтствуетъ координатѣ a_1, опредѣляющейся изъ уравненія:

$$0 = \frac{x_i}{r_i} - \frac{a_1}{r_i}\left(\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right),$$

отсюда

$$a_1 = \frac{2lfx_i}{2fx_i + hl}.$$

Легко видѣть, что это значеніе a_1 можетъ быть построено на (черт. 56), если изъ пересѣченія прямыхъ iA и CB провести вертикаль до встрѣчи съ прямой AB; отрѣзокъ AE_2 или равный ему отрѣзокъ $A''E''$ и изобразитъ искомую величину:

$$a_1 = \frac{2lfx_i}{2fx_i + hl}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ подобія треугольниковъ:

$$\Delta BC'C \backsim \Delta E_1E_2B$$

имѣемъ:

$$l - a_1 : \frac{l}{2} = y : f,$$

откуда:

$$a_1 = \frac{2fl - ly}{2f}$$

Изъ подобія же треугольниковъ:

$$\Delta\, AGi \backsim \Delta\, KE_1 i$$

имѣемъ:

$$z : h = x_i - a_1 : x_i$$

откуда

$$z = \frac{h(x_i - a_1)}{x_i}.$$

Замѣчая, что $y = h - z$, находимъ:

$$y = h - \frac{h(x_i - a)}{x_i}.$$

Поставляя найденное значеніе y въ выраженіе для a_1 и опредѣляя изъ полученнаго уравненія a_1, находимъ окончательно:

$$a_1 = \frac{2flx_i}{2fx_i + hl},$$

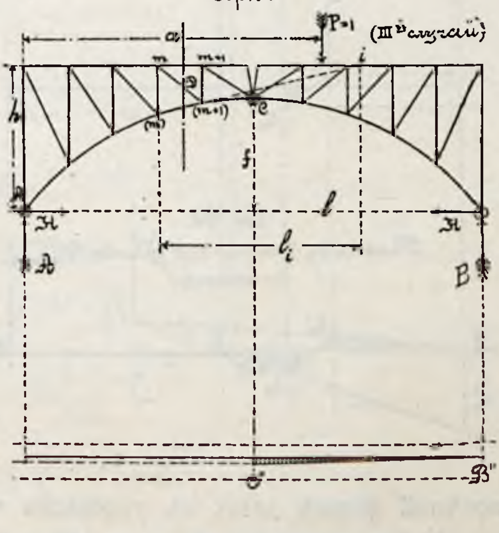
что и требовалось доказать.

Построивъ прямыя

$I''E''i'$ и $A''i'$,

видимъ по предѣламъ для a соотвѣтствующимъ I-му и соотвѣтственно II-му случаямъ, что значеніе для построенія инфлюэнтной площади имѣютъ лишь части $m''E''$ и $A''m'$ сихъ прямыхъ.

Чер. 58.



III-й *случай*. Грузъ, равный единицѣ, приложенъ къ правой половинѣ арочной фермы. Чер. (58).

Предѣлы для a:

$$a = \frac{l}{2} \text{ и } a = l.$$

Для этого случая, сравнительно со случаемъ II-мъ, разница состоитъ лишь въ значеніи распора H, а именно:

$$H = \frac{l-a}{2f};$$

$$\text{вмѣсто } \frac{a}{2f}.$$

Составляя уравненіе моментовъ относительно точки i внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую мысленно отсѣченную часть арки, находимъ, что

$$D_{\text{III}} = \frac{x_i}{r_i} - \frac{a}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} - \frac{h}{2f}\right\} - \frac{lh}{2fr_i}.$$

Это выраженіе представляетъ уравненіе прямой.

При

$$a = l,\ D_{\text{III}} = 0;$$

при

$$a = \frac{l}{2};\ D_{\text{III}} = D_{\text{II}}.$$

Построеніе по найденнымъ двумъ точкамъ прямой C'' B'' (чер. 58) не представляетъ никакихъ затрудненій.

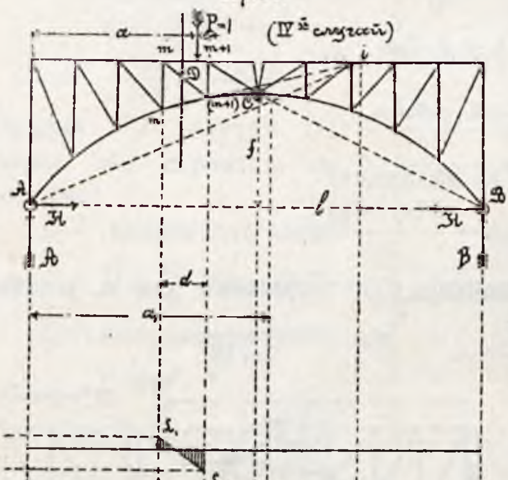
IV-й *случай*. Грузъ, равный единицѣ, находится въ предѣлахъ разсматриваемой панели. Чер. (59).

Предѣлы для a:

$$a = x_m \text{ и } a = x_m + 1.$$

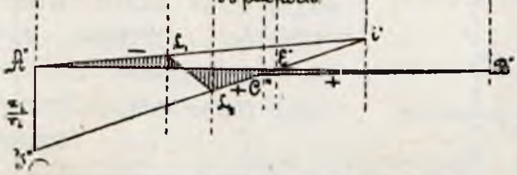
Замѣтимъ, что относительно дѣйствія грузовъ на арку дѣлаются при разсчетѣ арки два предположенія:

Чер. 59.



Чер. 60.

Площадь вліянія для усилія $D_{m(m+1)}$ въ раскосъ.



1) что давленія грузовъ могутъ передаваться арочной фермѣ лишь въ узловыхъ точкахъ, и

2) что передача въ узлы давленій отъ грузовъ, приходящихся между узлами, совершается по закону рычага.

Назовемъ длину панели черезъ d и разстояніе груза равнаго единицѣ, находящагося въ сей панели справа разсматриваемаго сѣченія, отъ праваго узла разсматриваемой панели черезъ e.

На лѣвый узелъ будетъ дѣйствовать давленіе

$$1 \cdot \frac{e}{d}.$$

Если взять сумму моментовъ относительно точки i всѣхъ внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую отсѣченную часть фермы, то найдется:

$$M = Ax_i - Hh - D_{IV}r_i - 1\frac{e}{d}(x_i - x_m) = 0.$$

Откуда

$$D_{IV} = \frac{Ax_i - Hh - (x_i - x_m)\frac{e}{d}}{r_i}.$$

Опредѣляя вертикальную составляющую A опорнаго противодѣйствія лѣвой опоры, вызываемаго двумя грузами:

$$1 \cdot \frac{e}{d} \text{ и } 1\frac{(d-e)}{d},$$

приложенными соотвѣтственно въ узлахъ арочной фермы, абсциссы коихъ суть:

$$x_m \text{ и } x_{m+1} \text{ и замѣчая, что } x_{m+1} = x_m + d,$$

найдемъ:

$$A = \frac{(l-x_m)}{l}\frac{e}{d} + \frac{(l-x_{m+1})}{l}\frac{(d-e)}{d}$$

или

$$A = \frac{l-(x_m+d-e)}{l}.$$

Замѣчая, что

$$x_m + d - e = a,$$

имѣемъ

$$A = \frac{l-a}{l}.$$

Подобно выводу для A, найдемъ H:

$$H = \frac{x_m}{2f} \cdot \frac{e}{d} + \frac{x_{m+1}}{2f} \cdot \frac{(d-e)}{d}$$

или

$$H = \frac{x_m + d - e}{2f}.$$

Замѣчая, что

$$x_m + d - e = a,$$

имѣемъ:

$$H = \frac{a}{2f}.$$

Подставляя въ выраженіе D_{IV} найденныя значенія A и H, получимъ:

$$D_{\text{IV}} = \frac{\{l-(x_m+d-e)\}}{l}\frac{x_i}{r_i} - \frac{(x_m+d-e)}{2f}\frac{h}{r_i} - \frac{(x_i-x_m)}{r_i}\frac{e}{d} \quad . . . (5)$$

При $e=0$

$$D_{\text{IV}} = \frac{(l-x_m-d)}{l}\frac{x_i}{r_i} - \frac{(x_m+d)}{2f}\frac{h}{r_i}.$$

Замѣчая, что

$$x_m + d = x_{m+1},$$

можемъ написать:

$$D_{\text{IV}} = \frac{(l-x_{m+1})}{l}\frac{x_i}{r_i} - \frac{x_{m+1}}{2f}\frac{h}{r_i}$$

или

$$D_{\text{IV}} = \frac{x_i}{r_i} - \frac{x_{m+1}}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\},$$

т. е.

$$D_{\text{IV}} = D_{\text{II}},$$

для случая, когда

$$a = x_{m+1}.$$

При $e=d$

$$D_{\text{IV}} = \frac{(l-x_m)}{l}\frac{x_i}{r_i} - \frac{x_m}{2f}\frac{h}{r_i} - \frac{(x_i-x_m)}{r_i},$$

или

$$D_{\text{IV}} = \frac{x_m}{r_i} - \frac{x_m}{r_i}\left\{\frac{x_i}{l} + \frac{h}{2f}\right\},$$

т. е. при $e=d$

$$D_{\text{IV}} = D_{\text{I}}$$

для случая, когда

$$a = x_m \quad .$$

Съ измѣненіемъ e между двумя предѣлами

$$e = d \text{ и } e = 0$$

D_{IV} измѣняется по закону прямой линіи, какъ это видно изъ уравненія (5).

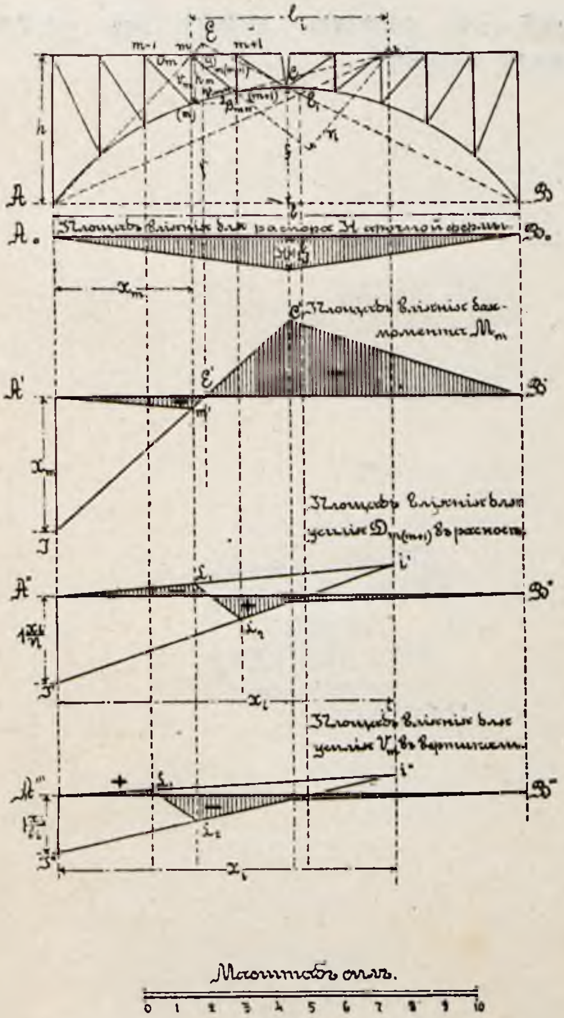
Послѣ этихъ замѣчаній построеніе прямой, ординаты коей выражаютъ D_{IV}, не представляетъ затрудненій; стоитъ только соединить точки L_1 и L_2 прямою (черт. 59). На черт. 60 показана полная площадь вліянія для усилія $D_{m\,(m+1)}$ въ раскосѣ арочной фермы.

4) Линія и площадь вліянія для усилія въ вертикали арочной фермы.

Построеніе инфлюэнтной площади для усилій V въ вертикаляхъ арочной фермы съ тремя шарнирами производится на основанiи разсужденій аналогичныхъ вышеприведеннымъ, послужившимъ для построенія инфлюэнтной площади для усилій D въ раскосахъ арочной фермы.

На (черт. 61) въ нижней его части показана инфлюэнтная площадь для усилія (V_m) въ вертикали, соотвѣтствующей m—ому узлу арочной фермы.

Черт. 61.



Въ этомъ случаѣ i представляетъ точку пересѣченія линій дѣйствія усилій

$$O_m \text{ и } U_{m+1},$$

которая, при прямолинейномъ верхнемъ поясѣ арочной формы, совпадаетъ съ точкою пересѣченія линій дѣйствія усилій

$$O_{m+1} \text{ и } U_{m+1}\,.$$

Отрѣзокъ

$$A''I'' = 1\,\frac{x_i}{l_i}\,,$$

гдѣ l_i—выражаетъ длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки i на направленіе усилія V_m; прямая L_1 L_2 — соотвѣтствуетъ панели отъ узла m—до узла m.

На чертежѣ (61) показаны вмѣстѣ всѣ упомянутыя выше линіи и площади вліянія.