

Przy oznaczeniach, jak na fig. 18; otrzymujemy równania momentów:

$$(R_A \sin \zeta + X_A \sin \zeta + Y_A \cos \zeta) h + Z_A b = 0$$

$$R_A = - \left\{ X_A + Y_A \cot \zeta + \frac{Z_A b}{\sin \zeta} \right\} \quad . \quad . \quad 10)$$

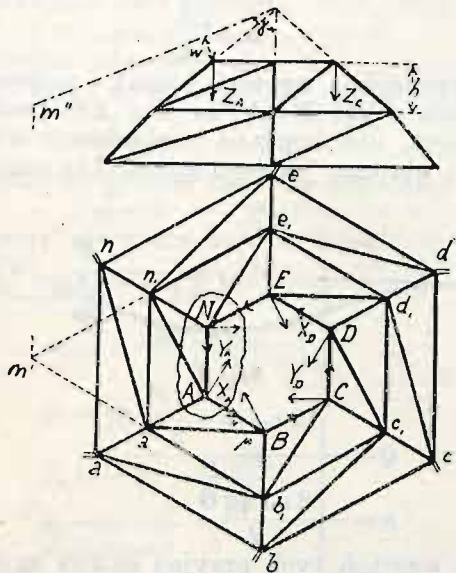


Fig. 18.

Podobnie znajdziemy  $R_B \dots R_N$ .

Dla znalezienia sił w przekątnej możemy przyjąć moment względem osi  $a_1 b_1$  (dla węzła A); w równaniu na  $D$  wystąpi wtedy (znana już) siła w pierścieniu. Możemy jednak znaleźć  $D$  bezpośrednio, kładąc przekrój około punktów A i N, a tem samym przecinając pręty  $AB, Aa_1, An_1, Nn_1, Ne_1$  i  $NE$ .

Pręty  $NE, Ne_1$  i  $Nn_1$  leżą wszystkie w jednej płaszczyźnie; z przeciętych prętów węzła A nie leży tylko  $An_1 = D_A$  w płaszczyźnie  $ABb_1 a_1$ ; przyjmując zatem, jako oś momentów, krawędź przecięcia obu płaszczyzn, otrzymamy wzór, w którym jako niewiadoma przychodzi tylko  $D_A$ .

Rozłożmy siłę w  $D_A$  na składową w kierunku  $Aa_1$  ( $D_{kA}$  nie przyczyniającą się wcale do wielkości momentu) i składową w kierunku  $AN$  ( $D_{rA}$ ); wynoszą one:

$$\left. \begin{aligned} D_{rA} &= D_A \frac{\sin \mu}{\sin (\mu + \nu)} = \rho D_A \\ D_{kA} &= D_A \frac{\sin \nu}{\sin (\mu + \nu)} = \kappa D_A \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 11)$$

Ze składowych sił zewnętrznych  $Y_A$  rozkładamy w kierunku  $AB$  i  $NA$ , siły  $X_N$  i  $Y_N$ , zaś w kierunkach  $EN$  i  $NA$ . Składowe w kierunku  $NA$  wynoszą dla nich:

$$\frac{Y_A}{\sin \zeta}, \quad X_N, \quad Y_N \cot \zeta.$$

Otrzymamy więc równanie:

$$\left( -\rho D_A - \frac{Y_A}{\sin \zeta} + X_N + Y_N \cot \zeta \right) w + (Z_N - Z_A) \sin \gamma \cdot \frac{s}{2} = 0 \quad . \quad . \quad 12)$$

z którego możemy znaleźć bezpośrednio  $D_A$ .

Dla wyznaczenia sił w krokwiach najlepiej zrobić przekrój około A, obierając za oś  $BN$ ; ponieważ składowe sił leżące w płaszczyźnie  $AB \dots N$  dają moment równy zero, więc na wyznaczenie siły w  $K_A$  otrzymujemy wzór stosunkowo prosty ( $\beta$  jest kątem nachylenia krokwi):

$$K_A = - \frac{Z_A}{\sin \beta} - \kappa D_A \quad . \quad . \quad 13)$$

Istnieją jeszcze inne metody kopuł<sup>1)</sup>; największe zastosowanie ma jednak metoda Müller-Breslau'a, a dla ciężarów pionowych metoda Schwedlera.

Obliczenia powyższe upraszczają się o wiele dla dachów wieżowych i namiotowych, których krokwie przebiegają w liniach prostych.

Do wyznaczenia sił wewnętrznych w kopułach o wypełnieniu siatkowym najbardziej nadaje się metoda momentów. (Dok. n.)

<sup>1)</sup> Np. podobna do wyżej opisanej metoda rzutów.

## Obliczanie belek o kracie czworokątnej metodą Ed. Joyant'a.

Prawdziwa wdzięczność należy się p. dr. W. Balickiemu za ogłoszenie cennej pracy o belkach Vierendeela, dotychczas prawie zupełnie u nas nieznanych, a jednak posiadających już dość przykładów zastosowania w budowlach inżynierskich, dość bogatą literaturę i nawet parę systemów obliczania.

Dr. Balicki podał w „*Czasopiśmie technicznym*“ teorię tych belek według Vierendeela. — Nawiązując do pracy powyższej, pragnę dodać parę słów o metodzie postępowania Ed. Joyant'a, ogłoszonej w „*Annales des travaux publics de Belgique*“ 1902, str. 223.

W belce o kracie czworokątnej (fr. *poutre à arcades*, n. *Leiter, Pfostenfachwerk*) mamy dla każdego pręta trzy niewiadome: siłę podłużną, siłę poprzeczną i moment zginający; zatem dla belki o  $p$  polach (dla  $2p$  pasów i  $p+1$  słupów, otrzymujemy  $9p+3$  niewiadomych. Na wyznaczenie ich możemy ustawić w każdym węźle po trzy warunki równowagi, co czyni dla całej belki  $6(p+1)$  równań od których jednak musimy odjąć trzy warunki równowagi sił zewnętrznych; na podstawie statyki uzyskujemy zatem  $6p+3$

warunków; resztę, tj.  $4p$  warunków, otrzymamy na mocy teorii sprężystości.

Biorąc pod uwagę jeden węzeł górny i jeden dolny, możemy ustawić nast. równania:

$$\left. \begin{aligned} S_{k-1} - S_k + \pi_k &= 0 \\ S_{k-1}' - S_k' - \pi_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 1)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{k-1} - Q_k - q_k &= 0 \\ Q_{k-1}' - Q_k' + q_k + P_k &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \mu_{k-1} - \mu_k - \nu_k + \frac{1}{2} Q_{k-1} l_{k-1} + \frac{1}{2} Q_k l_k + \frac{1}{2} \pi_k h &= 0 \\ \mu_{k-1}' - \mu_k' + \nu_k + \frac{1}{2} Q_{k-1}' l_{k-1} + \frac{1}{2} Q_k' l_k + \frac{1}{2} \pi_k h &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 3)$$

Podstawiając  $k=1$ , mamy:

$$S_1 = \pi_1 \quad S_1' = -\pi_1 \quad . \quad . \quad 1_1)$$

$$Q_1 = -q_1 \quad Q_1' = q_1 + P_1 \quad . \quad . \quad 2_1)$$

$$-\mu_1 - \nu_1 + \frac{1}{2} Q_1 l_1 + \frac{1}{2} \pi_1 h = 0 \quad . \quad . \quad 3_1)$$

$$-\mu_1' + \nu_1 + \frac{1}{2} Q_1' l_1 + \frac{1}{2} \pi_1 h = 0 \quad . \quad . \quad 3_1)$$

Przez połączenie równań 1) i 1<sub>1</sub>) dostaniemy

$$\left. \begin{aligned} S_k &= \sum_1^k \pi \\ S_k' &= \sum_1^k \pi \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 4^2)$$

<sup>1)</sup> W liczbie sił  $P$  mieszczą się i oddziaływania.

<sup>2)</sup> Z równań 4) wynika:  $S_k + S_k' = 0$ ; rezultat ten otrzymamy także, kładąc belkę płaszczyzną pionową przez śro-

Z równań 2) i 2<sub>1</sub>) wynika:

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= -\sum_1^k q \\ Q_k' &= +\sum_1^k q + \sum_1^k P \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

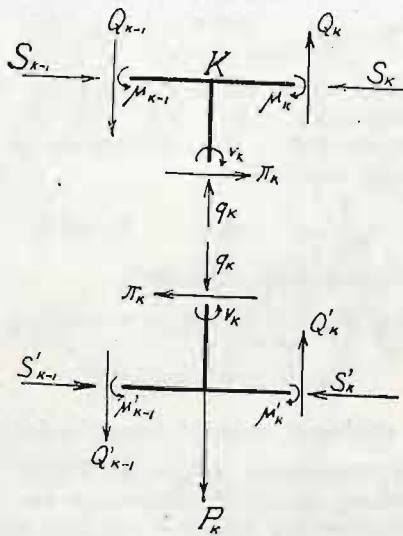


Fig. 1.

Podstawiając wartości te w równaniach 3) i 3<sub>1</sub>), mamy:

$$\left. \begin{aligned} \mu_k &= -\sum_1^k v + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (\frac{1}{2} l_k + \sum_1^{k-1} l) + \frac{h}{2} \sum_1^k \pi \\ \mu_k' &= +\sum_1^k v + \sum_{i=1}^{k-1} q_i (\frac{1}{2} l_k + \sum_1^{k-1} l) + M_k + \frac{h}{2} \sum_1^k \pi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 6)$$

jeśli przez  $M_k$  nazwiemy moment sił  $P$  ze względu na środek pola  $k$  i uwzględnimy, że

$$M_k = \sum_{i=1}^{k-1} P_i (\frac{1}{2} l + \sum_1^{k-1} l_i) = \sum_{i=1}^{k-1} l_i \sum_1^i P + \frac{1}{2} l_k \sum_1^k P.$$

Podstawiając teraz w równania: 1-6 wartości od  $k=0$  do  $k=p$ , otrzymujemy  $6p$  równań. — Dla węzła  $p+1$  równania te mają wartości:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum_1^{p+1} \pi & 0 &= -\sum_1^{p+1} \pi & \dots & 4_{p+1}) \\ 0 &= \sum_1^{p+1} q & 0 &= \sum_1^{p+1} P & \dots & 5_{p+1}) \\ 0 &= M_{p+1} & & & & \\ 0 &= \sum_{i=1}^{p+1} v + \sum_{i=1}^p q_i \sum_1^i l & & & \dots & 6_{p+1}) \end{aligned} \right\}$$

Równania  $\sum_1^{p+1} P = 0$  i  $M_{p+1} = 0$  są równaniami

równowagi sił zewnętrznych. — Otrzymaliśmy zatem wogóle  $6p+3$  równań, które nam pozwolą wyrazić wartości  $Q, Q', S, S', \mu, \mu'$  oraz  $\pi_{p+1}, q_{p+1}, v_{p+1}$  jako funkcyje  $\pi_i, q_i, v_i$  (od  $i=1$  do  $i=p$ ); pozostaje zatem do wyznaczenia  $3p$  niewiadomych. Znajdziemy je, wciągając w rachunek odkształcenie belki.

Joyant postępuje tu podwójną drogą: raz, przyjmując węzły sztywne, a pręty sprężyste drugi raz, zakładając pręty sztywne, a węzły sprężyste (tj. ugięcie belki zależy wyłącznie od zmiany kątów, pierwotnie w kratownicy równoległej — prostych). — Oczywiście, w belce zachodzą równocześnie oba wypadki, tj. sprężyste pręty i sprężyste węzły. — Na ugięcie belki i na siły wewnętrzne wpływa jednak w daleko wyższym stopniu sprężystość pasów i słupów, Co do węzłów, to, — jak wykazują próby mostu w Tervueren<sup>1)</sup>. — blacha

dek przedziału  $k$  i rzucając działające w przekroju siły na oś poziomą.

<sup>1)</sup> Annales des travaux publics de Belgique. 1898.

węzłowa, dochodząc do pewnego natężenia, wybacza się.

Jakiż stosunek zachodzi między siłami, działającymi w środku pręta  $Q, S, \mu$ , a odkształceniem tegoż?

Skrócenie pręta wskutek siły  $S$ , wynosi:

$$\alpha = \frac{lS}{\epsilon A} \dots \dots \dots 7)$$

Równocześnie wystąpi jednak i zniżenie p.  $B$  o  $\eta$  i obrót o kąt  $\theta$  tak, że pręt  $AB$  uważać można za pręt, obu końcami utwierdzony z przesunięciem i obrotem jednego końca. Dla takiej belki mamy



Fig. 2.

$$Q = -\frac{12 \epsilon J (\eta + \frac{l}{2} \text{tg } \theta)}{l^3} \dots \dots \dots 8)$$

$$\mu = -\frac{2 \epsilon J \text{tg } \theta}{l} \dots \dots \dots 9)$$

We wzorach tych przyjąć można  $\text{tg } \theta = \theta$ . Podobne wzory otrzymamy dla pasu dolnego i słupów.

Niech przesunięcia (liniowe i katowe) węzła  $B$  względem  $A$  wynoszą:  $\alpha_{k-1}, \eta_{k-1}, \theta_{k-1}$ , a analogiczne przesunięcia p.  $B$ :  $\beta_k, \gamma_k, \varphi_k$ , wtedy przesunięcia p.  $D$  względem p.  $A$  mają wartości:

$$\alpha_{k-1} - h \theta_{k-1} + \gamma_k; \quad \eta_{k-1} - \beta_k; \quad \theta_{k-1} + \varphi_k.$$

Idąc podobnie drogą  $ACD$  i zakładając, że dla p.  $D$  przesunięcia  $ABD$  są równe przesunięciom  $ACD$ , otrzymamy:

$$\theta_{k-1} + \varphi_k = \varphi_{k-1} + \theta_{k-1}' \dots \dots \dots 10a)$$

$$\eta_{k-1} - \beta_k = -\beta_{k-1} + \eta_{k-1}' - l \varphi_{k-1} \dots \dots \dots 10b)$$

$$\gamma_k + \alpha_{k-1} + h \theta_{k-1} = \gamma_{k-1} + \alpha_{k-1}' \dots \dots \dots 10c)$$

Podstawiając w tych równ. wartości z równ. 7), 8), 9), otrzymamy  $3p$  brakujących równań. — Ponieważ — po podstawieniu — równ. 10a zawiera z niewiadomych tylko

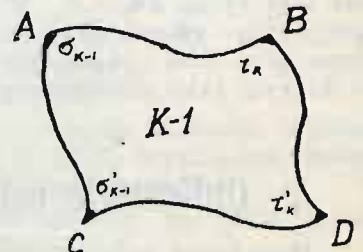


Fig. 3.

$v_k, \pi_{k-1}, q_{k-1}, v_{k-1}$ ; — równanie 10b:  $-v_k, q_k$ ; — równ. 10c:  $v_k, \pi_k$ , możemy wyrazić wszystkie  $\pi, q, v$  jako funkcyje  $\pi_1, q_1, v_1$ , a z równań (4, 5, 6)<sub>p+1</sub> wyznaczyć  $\pi_1, q_1, v_1$ .

Dla uproszczenia dalszego rachunku zrobmy nast. przypuszczenia:

1. Przekroje obu pasów są takie same ( $A=A', I=I'$ ).
2. Odkształcenia obu pasów są równe ( $\theta=\theta', \eta=\eta'$ ).
3. Skrócenia (ew. wydłużenia) słupów są równe ( $\beta_k - \beta_{k-1} = 0$ ).

Z założeń tych wynikają następujące równości:

$$\mu_k = \mu_k', \quad Q_k = Q_k', \quad \alpha + \alpha' = 0, \quad \varphi_k = 0, \quad v_k = 0$$

Otrzymamy zatem:

$$\left. \begin{aligned} \text{(z równ. 2)} \quad q_k &= -\frac{P_k}{2} \\ \text{(z równ. 5)} \quad Q_k &= \frac{1}{2} \sum_1^k P \\ \text{(z równ. 6)} \quad \mu_k &= \frac{1}{2} M_k + \frac{h}{2} \sum_1^k \pi \\ \text{(z równ. 10c)} \quad \gamma_k + 2\alpha_{k-1} + h\theta_{k-1} &= \gamma_{k-1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 11)$$

Podstawiając w równaniach tych wartości, otrzymane z równ. 7), 8), 9) otrzymamy równanie:

$$\frac{\pi_k}{I_k} - \frac{\pi_{k-1}}{I_{k-1}} = k_k \sum_1^{k-1} \pi + k_k' \quad . \quad . \quad 12)$$

które połączone z podobnym o bezpośrednio wyższym wskaźniku daje równanie o kształcie:

$$a_k \pi_{k+1} + b_k \pi_k + c_k \pi_{k-1} + \gamma_k = 0 \quad . \quad . \quad 13)$$

Z  $p$  takich równań można kolejno wyznaczyć  $\pi_i = f'(\pi_1)$ , [dla  $i=2, \dots, (p+1)$ ], a z równania  $\sum_1^{p+1} \pi = 0$  ostatecznie  $\pi_1$ .

Przyjmijmy jeszcze (za Viorendeemem):

$$\varphi_k = 0 \quad \Theta = 0 \quad ^1)$$

a otrzymamy równania bardzo proste:

$$\left. \begin{aligned} Q_k &= Q_k' = \frac{1}{2} \sum_1^k P \\ \pi_k &= - \frac{M_k - M_{k-1}}{h} \\ q_k &= - \frac{P_k}{2} \\ S_k &= - S_k' = - \frac{M_k}{h} \\ \mu_k &= \mu_k' = 0 \\ \nu_k &= \nu_k' = 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 14)$$

Przyjęcie węzłów sztywnych i nieodkształcających się, na którym metoda powyższa polega, nie ma w rzeczywistości miejsca; węzły bowiem przenosząc część sił, odkształcają się i — o ile są za słabo skonstruowane, — spowodować mogą zniszczenie mostu. (Doświadczenie w Tervueren). Należałoby zatem zbadać, jakie siły wewnętrzne działają przy równoczesnej pracy węzłów.

Czyni to Joyant: przyjmując pręty o momencie bezwładności  $I = \infty$  (pręty sztywne), bada odkształcenia węzłów przy założeniu, że suma zmian

<sup>1)</sup> Przyjęcie to jest mniej usprawiedliwione od poprzednich.

kątów jednego pola musi być równu zeru. — Ostatecznie, wprowadzając dla uproszczenia:

$$Q = Q' \quad \mu = \mu' = 0 \quad \beta_k - \beta_{k-1} = 0$$

otrzymuje na zmianę kątów wzory:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sigma_k &= \frac{1}{2 \varepsilon C} (M_k'' - M_{k-1}') \\ \Delta \tau_k &= - \frac{1}{2 \varepsilon C} (M_{k+1}' - M_k'') \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad 15)$$

przyczem  $M_k'$  jest momentem sił  $P$  ze względu na węzeł  $k$ , zaś

$$M_k'' = \frac{M_k' + M_{k+1}'}{2}$$

Joyant udowadnia na przykładzie mostu w Tervueren, że obliczone wedle tych wzorów natężenia zgodne są z natężeniami, zmierzonymi tamże przez inżynierów Lambin'a i Christophe'a.

Widzimy z powyższego, że pierwsze założenie Joyant'a, daje — po przyjęciu pewnych uproszczeń — wyniki nieznacznie tylko różne od wyników przybliżonych Viorendeela; oryginalnym natomiast jest sposób jego postępowania.

Zasługą jego jest również to, że pierwszy zwrócił uwagę na odkształcenia, jakim podlegają węzły, choć nie zdołał ująć ich w prawa, oparte na zupełnie racjonalnych hipotezach.

Istnieje jeszcze kilka sposobów obliczania tych belek; — wspomina o nich Dr. Balicki w „Literaturze“<sup>1)</sup>. Znajdują się one jednak w czasopiśmie bardziej dostępnym polskiemu inżynierowi.

Ograniczam się tymczasem do tej notatki, mając zamiar jeszcze powrócić w *Czasopiśmie Technicznym* do tego przedmiotu.

Dr. Stefan W. Bryła.

<sup>1)</sup> Między innymi prof. Abramow podał również linie wyprowadzając je jednak na podstawie innej teorii, niż Dr. Balicki.

## Austriackie koleje państwowe w r. 1908.

Austriackie ministerstwo kolejowe wydało sprawozdanie z wyników gospodarki na kolejach państwowych w r. 1908 (*Bericht über die Ergebnisse der k. k. Staatseisenbahnverwaltung für das Jahr 1908*), nie obejmujące jeszcze w r. 1908 upaństwowionych kolei jak: czesko-północną, austriacko-węgierskiego stow. kolei państw., austriackiej kolei północno zachodniej, dla których wyjdą osobne zestawienia.

Z końcem r. 1907 15 033.10 km wynosząca sieć kolei, stojących pod zarządem państwowym, wzrosła w r. 1908 o 214.01 km, czyli 1.42%. Cała sieć kolei skarbowych z końcem roku sprawozdawczego wynosiła okragło 15 247 km, w czym niema uwzględnionych powyżej wymienionych kolei świeżo upaństwowionych.

Z całości przypada 10 018 km na linie, będące własnością i pod zarządem państwa 615 km na koleje prywatne, zarządzane na rachunek państwa, a 4 614 km na koleje prywatne, zarządzane przez państwo na rachunek stron.

Kapitał zakładowy austriackich dróg żelaznych, będących własnością państwa i zarządzanych na rachunek państwa, wynosił z końcem roku sprawozdawczego 3 918 605 445 K i wzrósł w stosunku do roku 1907 o 86 546 871 K = 2.26%.

Na całej sieci dróg żelaznych pod zarządem państwa, obejmował tabor: 4188 lokomotyw (+5.52% w stosunku do r. 1907), 8470 wozów osobowych (+3.5%), 86 953 wozów towarowych (+3.57%), 2833

wozów pocztowych i służbowych (+3.02%), 3263 jaszczyków, 1644 pługów śniegowych, 30 wozów na wodę i 28 wozów motorowych. Koszta całego taboru z końcem r. 1908 wyniosły 716 008 131 K (+6.08%).

Na liniach państwowych w r. 1908 2 424 461 pociągów zrobiło 110 180 586 pociąg/km, co w stosunku do roku poprzedniego wykazuje przyrost ruchu o 104 440 pociągów = 4.50% i 7 240 490 pociąg/km = 7.03%. Sumaryczna praca pociągów obejmuje 29 396 milionów ton/km brutto, t. j. o 2001 milionów, czyli 7.30% więcej, niż roku poprzedniego. Na 1 km przeciętny przypada 7 308 (+6.51%) pociąg/km i 1 949 778 (+6.79%) t/km brutto.

Liczba przewiezionych osób wynosiła 83 361 963 (+3 318 181 = 3.88%), zrobiono 3 802 milionów osób/km (+3.19%). Sumaryczna waga przewiezionych tobołów podróźnych wynosiła 128 945 ton (+8.54%). Jako przesyłki pospieszne nadano 653 025 ton (+0.18%), a zwykle 58 285 968 t (-0.26%). Na liniach zarządzanych na rachunek stron przewieziono nadto 48 945 172 osób (+0.01%) z czego na wiedeńskiej kolei miastowej 32 490 582, tobołów podróźnych 25 380 t (+11.3%), pošylek pospiesznych 121 986 t (+10.4%) i zwykłych 10 426 227 t (+4.14%).

Zwyczajne przychody wynosiły 504 195 681 K t. j. o 5.29% były wyższe od roku poprzedniego; z tego przypada 450 426 056 K za przewóz osób i towarów na liniach będących własnością państwa lub zarządzanych na rachunek państwa (+17 781 893 K =