

STEFAN BRYŁA i ALFONS CHMIELOWIEC

# NAPRĘŻENIA POPRZECZNE W BELKACH ZGINANYCH

Do naprężeń miejscowych belki należą naprężenia poprzeczne w pobliżu sił skupionych. Gdy naprężenia te przekroczą granicę ciastowatości (plastyczności), powodują one zgniot. Dla belki dwuteowej obciążonej siłą skupioną, zaczepiającą na górnej stopce, miarodajne są naprężenia poprzeczne na granicy stopki górnej i ścianki. Gdy ścianka jest stosunkowo cienka i wysoka a rozpiętość belki stosunkowo niewielka, naprężenia poprzeczne mogą być większe od naprężeń zginających i mogą spowodować zniszczenie belki liczonej na zginanie. Naprężenia poprzeczne badał prof. Huber w swojej rozprawie p. t. *Studia nad belkami o przekroju I (dwuteowymi)*<sup>1)</sup>. Prof. Huber przyjmuje, że stopka oddziałuje na ściankę, jak belka na sprężyste podłoże. Naprężenia poprzeczne, tj. naprężenia normalne w przekrojach poziomych maleją z oddalaniem od stopki górnej od największej wartości  $\sigma_z$  przy stopce górnej aż do zera przy dolnej krawędzi belki. Niech będzie  $h_2$  wysokość ścianki. Gdyby naprężenie poprzeczne w ściance malowało do wartości  $\sigma_z$  aż do zera na granicy ścianki i stopki dolnej, a zarazem ugięcie stopki górnej byłoby

$$y = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z}{E} h_1.$$

Ponieważ przy dolnym brzegu ścianki, naprężenie poprzeczne jest większe od zera, więc powyższą wartość należy pomnożyć przez  $C > 1$ . Jeżeli grubość ścianki jest  $\delta$ , to nacisk stopki górnej na ściankę  $p = \sigma_z \delta$ . Naicisk ten jest proporcjonalny do odkształcenia ścianki, czyli ugięcia stopki, więc  $p = ky$  . . . . . 1.

zatem charakterystyka (cecha) podłoża

$$k = \frac{p}{y} = \frac{2 E \delta}{C h_1} . . . . . 2.$$

Jeżeli  $J_s$  jest momentem bezwładności przekroju stopki górnej, to równanie różniczkowe linii ugięcia stopki jest

$$M = - EI_s y''$$

albo  $T = \frac{dM}{dx} = - EI_s y''' . . . . . 3.$

albo wreszcie  $p = \frac{dT}{dx} = - EI_s y^{IV}.$

Z uwagi na równanie (1) będzie więc

$$EI_s y^{IV} = - ky$$

Nazwijmy  $\alpha^4 = \frac{k}{4 EI_s} . . . . . 4.$

to nasze równanie przyjmie postać  $y^{IV} = - 4 \alpha^4 y . . . . . 5$

Rozwiązaniem jego jest

$$y = f e^{-\alpha x} \cos(\alpha x + \sin \alpha x) . . . . . 6.$$

Różniczkując je kolejno, otrzymamy:

$$y' = - 2 f \alpha e^{-\alpha x} \sin \alpha x$$

$$y'' = - 2 \alpha^2 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$y''' = 4 f \alpha^3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x . . . . . 7.$$

$$y^{IV} = - 4 f \alpha^4 e^{-\alpha x} (\sin \alpha x + \cos \alpha x)$$

Ostatnie równanie z uwagi na (6) jest identyczne z (5).

Dla  $x = 0$  równanie 6 daje  $y = f$ , więc w  $f$  jest ugięciem pod siłą skupioną  $P$ , czyli strzałką ugięcia. Wartość jej znajdziemy z (7) i (3).

Dla  $x = 0$  jest  $T = -\frac{P}{2}$ , więc według (3)  $\frac{P}{2} = EI_s y'''$ , zaś według (7)  $y''' = 4 f \alpha^3$ . Eliminując  $y'''$  z ostatnich dwu równań otrzymamy

$$f = \frac{P}{8 \alpha^3 EI_s} . . . . . 8.$$

albo z uwagi na (4)  $f = \frac{P \alpha}{2 k}$

Największy nacisk stopki na ściankę jest według 1

$$\max P = kf.$$

Zaś największe naprężenie poprzeczne

$$\sigma_z = \frac{kf}{\delta} = \frac{P \alpha}{2 \delta}$$

W powyższym wywodzie nie uwzględniono naprężeń stycznych pomiędzy stopką i ścianką tak, jakgdyby stopka mogła ślizgać się po ściance. Uwzględnienie wpływu naprężeń stycznych na wielkość naprężeń poprzecznych w przypadku obciążenia siłą skupioną jest trudne. Łatwo je uwzględnić w przypadku obciążenia stopki górnej równomiernego zupełnego o natężeniu  $q$ . Dla dwuteowników walcowanych Nr 17 do 55 otrzymuje prof. Huber  $\sigma_z = 0,92 \frac{q}{\delta}$ . Gdyby nie było naprężeń stycznych w przekro-

ju poziomym, byłoby  $\sigma_z = \frac{q}{\delta}$ . W braku czegoś lepszego przyjmiemy i w naszym wypadku redukcję 8% czyli

$$\sigma_z = 0,92 \frac{P \alpha}{2 \delta} = \frac{P}{A} . . . . . 9.$$

przyczem . . .  $A = \frac{2 \delta}{0,92 \alpha} . . . . . 10.$

Podstawmy (2) w (4),

to otrzymamy  $\alpha^4 = \frac{\delta}{2 \psi I_s h_1} = \frac{0,45}{I_s h_1}$

przyjmując za prof. Huberem  $C = \frac{5}{4}$ .

Zatem . . .  $A = \frac{2 \delta}{0,92} \sqrt[4]{\frac{I_s h_1}{0,45}} . . . . . 11.$

Dla dźwigarów walcowanych normalnych wartość  $A$  jest prawie dokładnie proporcjonalna do przekroju  $F$  i wynosi około:

$$A = \frac{F}{7,53}$$

przyczem jednak nie uwzględniono mianownika 0,92 w równaniu 11.

Teorię powyższą potwierdzają doświadczenia wykonane przez Instytut Badań Inżynierii w Warszawie a częściowo przez Mechaniczną Stację Doświadczalną przy Politechni-

<sup>1)</sup> Sprawozdania i prace Warszawskiego Tow. Politechnicznego 1923 zeszyt 1 i 2.

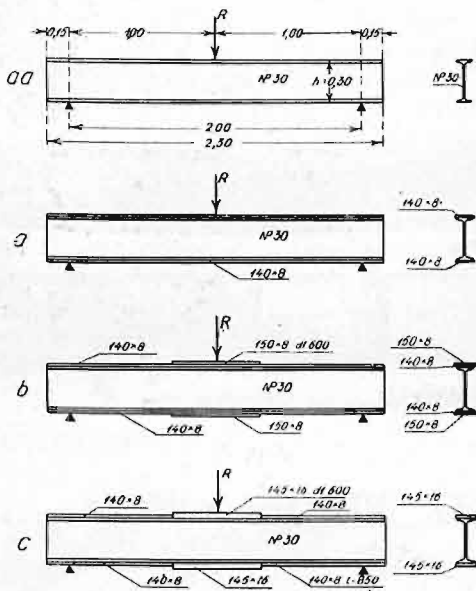


Fig. 1.

ce Lwowskiej. Podzielić je można na dwie serie. Pierwsza, to dźwigary walcowane Nr 16 — 34, opisane w „Przeglądzie Technicznym“ 1935<sup>2)</sup>, drugie zaś to dźwigary walcowane Nr 30, względnie blachownice nitowane o wysokości ścianki  $h = 30$  cm z dospojonymi nakładkami, zreferowane na II Zjeździe Inżynierów Budowlanych w Katowicach<sup>3)</sup>.

W obu seriach łamano, względnie miażdżono belki o rozpiętości 2m ciężarem skupionym w środku rozpiętości. W obu seriach były po dwie grupy doświadczeń: bez przepon i z przeponami.

Tablica 1.

I NP	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>
16	36,8	28,7
20	36	35,6
24	32,4	38,2
30	30,6	44
32	29,4	45
34	27,7	44,8

Tablica 1 podaje wyniki doświadczeń serii 1 bez przepon, mianowicie dla różnych numerów dźwigara walcowanego naprężenia zginające (podłużne) według wzoru

$$\sigma = \frac{M}{W} \dots \dots \dots 12.$$

i naprężenia poprzeczne według równania (9) obliczone na podstawie największych obciążeń, które sprawiły zniszczenie. Widzimy, że ze wzrostem wysokości dźwigara maleje naprężenie zginające, a rośnie naprężenie poprzeczne. Dźwigary I N 16 i 20 zostały złamane, dźwigary zaś wyższe zostały zmiażdżone. Przy wysokich dźwigarach więc moduł przekroju (wskaźnik wytrzymałości)  $W$  nie został wyzyskany. Dla wysokich belek zatem miarodajna dla wy-

<sup>2)</sup> Bryła: Wpływ dospojonych przepon na wytrzymałość dźwigarów walcowanych. Przegląd Techniczny 1935.

<sup>3)</sup> Bryła-Chmielowiec: Doświadczenia z dźwigarami wzmocnionymi przy pomocy spawania. Referat na Zjazd Inżynierów Budowlanych w Katowicach 1936.

trzymałości jest nie teoria zginania tylko teoria zgniotu.

W serii 2. badano dźwigary I Nr 30 wzmocnione (lub nie) nakładkami na 3 różne sposoby. Mamy więc tu 4 typy: (fig. 1).

Typ aa, bez nakładek.

Typ a, nakładki 140 . 8 na całej długości, belki dospojone do obu stopek przy pomocy spoin ciągłych lub przerywanych.

Typ b, jak typ a z dodaniem na środku do obu stopek nakładek 150 . 8 dł. 600.

Typ c, jak typ b, tylko że na środkowej części belki na każdej stopce zamiast dwu nakładek 8 mm jest jedna nakładka o grubości 16 mm, i szerokości 145 mm (fig. 2).

Typy a, b, c, różnią się więc od siebie tylko na środkowej części 600 mm długiej, ale ta część jest dla nas miarodajna, gdyż w jej obrębie działa siła skupiona.

Dla I N 30 jest grubość ścianki  $\delta = 1,08$  cm,  $h = 26$  cm. Jeżeli to wstawimy w (11) to otrzymamy  $A = 6,55$  cm<sup>4</sup>  $\sqrt{I_s}$ . Dla różnych typów obliczone  $I_s A$  podaje tabl. 2. Podaje ona również naprężenie zginające  $\sigma$  według (12) i naprężenia poprzeczne  $\sigma_z$  według równania (9). Zbyt mała wartość  $\sigma$ , zaś wielka  $\sigma_z$  dowodzą, że nie nastąpiło tu złamanie, tylko zgniot. Dowodzą tego również duże

Tablica 2.

Typ	J <sub>s</sub> cm	A cm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>		L cm
			$\sigma$	$\sigma_z$	
a	5,05	9,85	26,4	40,50	14,3
a	16,57	13,26	24,8	41,29	19,3
b	39,24	16,40	21,0	37,10	23,8
c	38,75	16,40	23,0	41,80	23,8
		średnio	23,8	40,42	

wahania  $\sigma$ : różnica między największym i najmniejszym  $\sigma$  wynosi 22,7%  $\sigma_{sr}$ : natomiast wahania  $\sigma_z$  są mniejsze 9,15%.

Równanie 6 przedstawia linię falistą o zanikających fałach w miarę oddalania się od miejsca zaczepienia siły  $P$  ( $x = 0$ ). Gdy  $xx$  wzrośnie o  $2\pi$ , to dwumian w nawiasie nie zmienia się. Zatem długość jednej fali wynosi

$$2L = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi A}{\delta}.$$

Ostatnia kolumna tabl. 2 podaje długość jednej półfali  $L$ . W typie b i c moment bezwładności stopki zmienia się, a razem z nim i długość półfali od wartości 23,8 cm, w środku belki do 19,3 cm, na długościach zewnętrznych, skrajnych. Ponieważ jednak długość części środkowej 600 mm jest prawie 3-krotnie większa, niż długość jednej półfali więc wpływ tej zmienności na wielkość naprężenia poprzecznego jest bardzo mały i można go pominąć. Tym bardziej nie gra tu roli skończona długość belek 2,30 m, chociaż ściśle biorąc równanie 6 ważne jest dla stopki nieskończonie długiej.

Aby lepiej wyzyskać wytrzymałość wysokich dźwigarów I na zginanie pod siłą skupioną i nie dopuścić do zgniotu, wzmacniamy ściankę żebrami (przeponami) w miejscu działania siły skupionej. W blachownicach nitowanych przynitowujemy je, w dźwigarach walcowanych można je dospoić. Jeżeli przyjmiemy w przybliżeniu, że żebro rozdziela nacisk skupiony równo na obie stopki, górną i dolną, to otrzymamy stąd naprężenie poprzeczne 1,59 razy

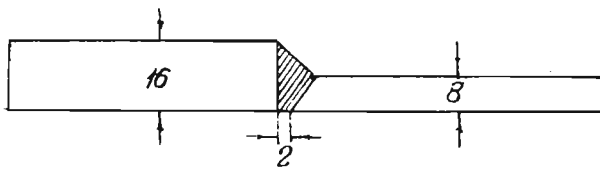


Fig. 2.

mniejsze, niż w belkach bez żeber<sup>\*)</sup>). Wspomniane doświadczenia zdają się to potwierdzać. W pierwszej serii doświadczeń (tabl. 3) w grupie II stosowano przepony w miejscu działania obciążenia skupionego i nad podporami, razem 3 przepony, a w niektórych doświadczeniach także jeszcze 2 przepony w połowie między podporą a naciskiem  $P$  (razem 5 przepon). Z tablicy 3 czytamy, że te dodatkowe dwa żebra dospojone w miejscach, gdzie nie działa żadna siła skupiona, nie mają prawie żadnego wpływu na wytrzymałość. Dalej czytamy, że naprężenia poprzeczne są z reguły mniejsze od naprężeń zginających, ale rosną z wysokością dźwigara i dopiero przy bardzo wielkich wysokościach dorównują, a nawet przekraczają je nieznacznie. Dopiero więc przy bardzo wielkich wysokościach pojawia się możliwość zgniotu, przyczem jednak typowe złamanie wciąż jeszcze gra rolę główną. Zniżenie naprężenia zginającego  $\sigma$  ze zmniejszeniem się wysokości dźwigara wskazuje na wpływ zwiczerzenia na zniszczenie próbnych dźwigarów niskich. Tabl. 4 podaje wyniki doświadczeń serii 2 z przeponami.

Tablica 3.

h	Przępon	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>
16	3	31,7	15,5
	5	32,5	15,8
20	3	32,2	20
	5	36,9	23
24	3	33,8	25
	5	37,2	27,6
30	3	37	33,7
	5	37	33,6
32	3	37,4	36,2
	5	38	36,7
34	3	37,7	38,8
	5	39,3	39,8

Tablica 4.

Typ	kg/mm <sup>2</sup>	kg/mm <sup>2</sup>
aa	32	32,5
a	32,4	33,8
b	25,8	29,6
c	28,4	32,8

W porównaniu z tablicą 2, widzimy tu ogromne zwiększenie naprężenia zginającego, a zmniejszenie naprężenia poprzecznego.

Wprawdzie wciąż jeszcze  $\sigma_z > \sigma$  ale różnice nie są tak wielkie żeby wykluczały możliwość złamania. O ile zatem w dźwigarach wysokich bez przepon, widzimy na fotografiach (fig. 3) wyraźne zmiażdżenie, tj. poddanie się stopki górnej pod naciskiem i sfaldowanie się ścianki, o tyle w belkach z przeponami poza zgniotem miejscowym, obserwujemy już początek złamania, tj. ugięcie całej belki z wyraźnym załomem w środku, widocznym także w pasie dolnym (fig. 4 i 5), co się tłumaczy tym, że tu i naprężenie  $\sigma$  decydowało o zniszczeniu belki. Sfaldowanie nakładki na górnej stopce po obu stronach wałka ciskającego (fig. 4) i stopniowe odrywanie się spoin od środka

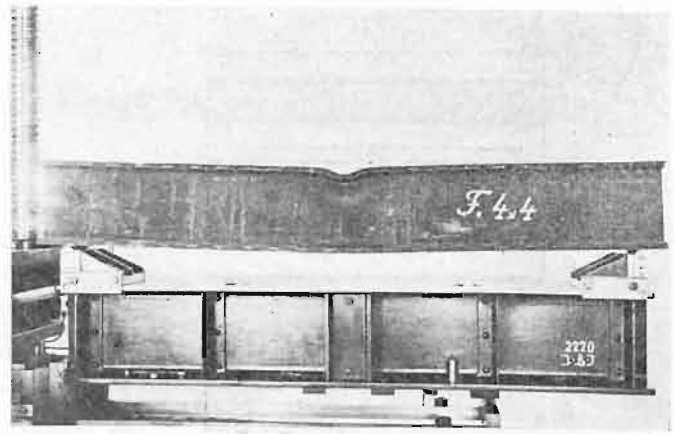


Fig. 3.

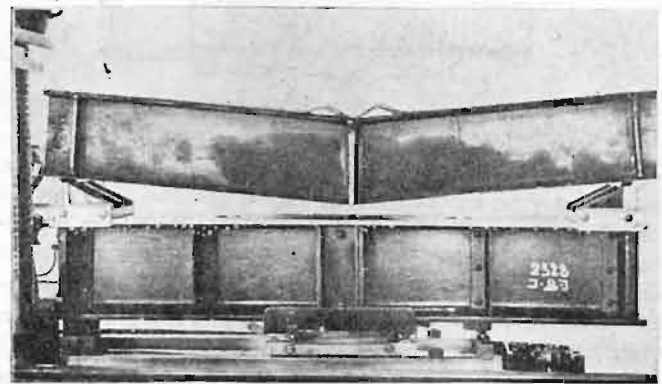


Fig. 4.

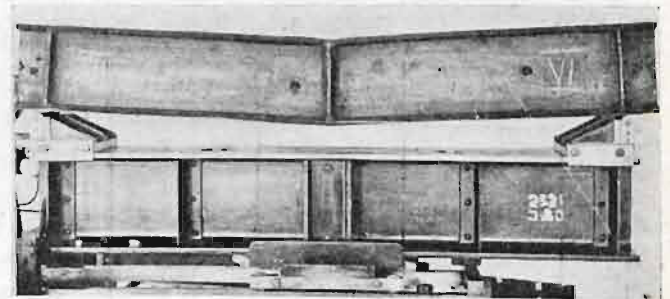


Fig. 5.

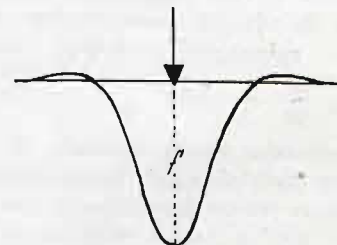


Fig. 6.

belki w kierunku podpór (fig. 4) tłumaczy się wyboeczeniem nakładki jako elementu ściskanego podłużnie, o małej sztywności  $EJ$ . (W belce o szwach ciągłych tego faldowania oczywiście nie było, fig. 5). Tym się tłumaczy większa wytrzymałość typu c od b. Zatem w pasie ściskanym blachownicy spawanej należy grubość nakładek zmieniać według fig. 3. W dźwigarach bez przepon siły były mniej-

<sup>\*)</sup> Por. Bryła, Wpływ dospojonych przepon j. w.

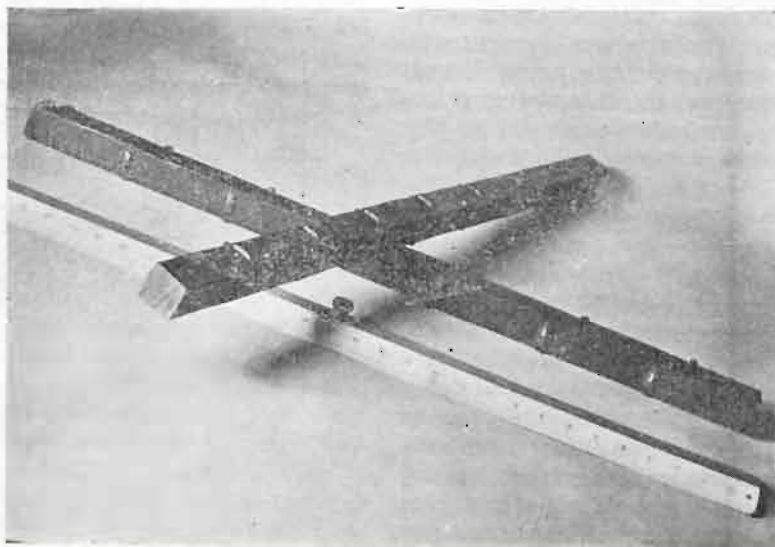
sze, więc do oderwania się nakładek nie doszło (fig. 3). Odrywanie się nakładek po obu stronach nacisku spowodowane jest silami stycznymi między stopką i nakładką i ciągnięciem poprzecznym  $\sigma$  w obrębie półfał sąsiadujących z półfał nacisku (rys. 6). Nakładka jest tu sama dla siebie belką na sprężystym podłożu. Nacisk ujemny koncentruje się na spoinach łączących nakładkę ze stopką, a sumując się geometrycznie z silami stycznymi powoduje ich zerwanie. Zmarszczenie ścianki tuż przy stopce pod siłą skupioną (fig. 3) z powodu naprężeń poprzecznych dowodzi, że przy danej grubości ścianki stateczna jest nieplaska, pofalowana postać równowagi ścianki, że naprężenia poprzeczne maleją szybko z oddaleniem od

stopki górnej, co by może uprawniało do przyjęcia mniejszej wartości aniżeli 4/5.

Należy jeszcze wytłumaczyć zbyt wielkie wartości w tabl. 1 i 2. Aby je porównywać, trzeba przedtem zmniejszyć wartość z tablicy 1 o 8%, wtedy zrównają się one z wartościami tablicy 2 i nie będą już przekraczać 42 kg/mm<sup>2</sup>. Ale i ta wartość przekracza znacznie granicę plastyczności. Pochodzi to stąd, żeśmy przyjęli siłę skupioną  $P$ . Tymczasem z powodu plastyczności i zmiażdżenia stopki pod walcem obciążającym matematycznie linia styku walca i stopki zamieniła się na pasek o skończonej i to dość wielkiej szerokości, co łagodzi efekt zmiażdżenia, a więc rzeczywiste naprężenia będą mniejsze.

WACŁAW PASZKOWSKI.

## NOWY PROFIL STALI DO ZBROJENIA ŻELBETU: STAL GRZEBIENIOWA



Rys. 1.

Wypuszczony na rynek przez jedną z naszych hut Śląskich nowy gatunek stali do zbrojenia betonu, pod nazwą **stali grzebieniowej**, otwiera dla konstrukcji żelbetowej pewne bardzo interesujące nowe możliwości konstrukcyjne i ekonomiczne (rys. 1).

Względy gospodarcze od dawna domagały się podwyższenia naprężeń dopuszczalnych w materiałach, wchodzących w skład żelazobetonu.

Postępy w wyrobieniu cementu portlandzkiego, jak również rozwój nauki o betonie i technologii tego materiału doprowadziły w chwili obecnej do znacznych sukcesów, polegających na tym, że potrafimy bez nadmiernych trudności i dodatkowych kosztów produkować beton o wytrzymałości przewyższającej co najmniej o 50% betony z przed lat kilkunastu.

Wykorzystanie ekonomiczne tych wysokowartościowych betonów wymaga uzbrojenia również o wyższej wartości wytrzymałościowej niż zwykle powszechnie stosowane żelazo handlowe. Pod tym względem stal grzebieniowa jest właśnie oczekiwanym posunięciem. Dzięki udoskonalonym procesom metalurgicznym posiada ona wysoką granicę plastyczności, od której, zgodnie z normą, uzależniamy dopuszczalne naprężenie w armaturze żelbetu; przekroczenie bowiem tej granicy jest właściwym momentem zniszczenia belki żelbetowej.

Granica plastyczności stali grzebieniowej wynosi 4500 kg/cm<sup>2</sup>, podczas gdy zwykle żelazo handlowe ma zaledwie 2000 kg/cm<sup>2</sup>, a nawet trafiają się próbki o niższej wartości tej granicy.

Trzymając się tych samych granic bezpieczeństwa co dotychczas, możemy dopuścić na rozciąganie stali grzebieniowej zamiast 1200 kg/cm<sup>2</sup> naprężenie proporcjonalnie większe, t. j.

$$k_2 = 1200 \frac{4500}{2000} = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

Ograniczając się więc zgodnie z zaleceniem katalogu stali grzebieniowej do  $k_2 = 2000 \text{ kg/cm}^2$  podwyższamy znacznie bezpieczeństwo, oszczędzając jednocześnie 40% na przekroju uzbrojenia rozciąganego.

Prócz potania konstrukcji żelbetowej oszczędność ta posiada szczególne znaczenie przy obecnej koniunkturze na żelazo, charakteryzującej się jego dużym zapotrzebowaniem do innych celów niż budowlane.

Przy stosowaniu wyższych naprężeń dopuszczalnych w armaturze względy wytrzymałościowe wysuwają jeszcze jeden konieczny warunek konstrukcyjny, wymagają mianowicie zapewnienia należytej przyczepności między stalą a betonem. Im większe są naprężenia w armaturze tym też jest większe ścinanie na jej powierzchni.