

## A. Ustroje statycznie wyznaczalne

napisał

śp. dr inż. Stefan Bryła  
prof. Politechniki Warszawskiej

### I. Wstęp.

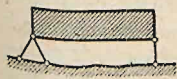
#### 1. Statyczna wyznaczalność ustrojów płaskich.

Belką lub dźwigarem płaskim nazywamy ustrój materialny, złożony z (nieważkich) prętów lub ogniwi (tarcz) sztywnych, leżących w jednej płaszczyźnie, który służy do przeniesienia na ziemię sił działających w tejże płaszczyźnie, czyli obciążeń.

Pręty przenosić mogą tylko siły osiowe, zatem obciążone mogą być tylko w węzłach. Ogniwa (tarcze) mogą przenosić prócz sił osiowych także momenty zginające, muszą zatem posiadać pewien moment bezwładności. Mogą nimi być więc a) utwory o ściance pełnej (np. belki walcowane, blachownice itp.), albo b) kratownice, składające się z prętów połączonych w sztywną kratę, albo wreszcie c) utwory mieszane, w skład których wchodzi częściowo elementy o ściance pełnej, częściowo elementy kratowe.



Rys. 1

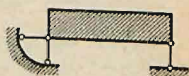


Rys. 2

Belką kratową (kratownicą płaską) nazywamy belkę, składającą się w całości z prętów nieważkich, połączonych ze sobą przegubowo w węzłach. Siły zewnętrzne działają na nią (teoretycznie) tylko w węzłach.

Ogniwo (lub pręt) jest połączone stale i statycznie wyznaczalnie z drugim ogniwiem (prętem) w ogóle przy pomocy trzech prętów. Do ustalenia punktu (na płaszczyźnie) względem tarczy potrzeba dwu prętów. Układ płaski, złożony z  $t$  tarcz i  $w$  węzłów (punktów), połączony będzie stale (sztywnie) i statycznie wyznaczalnie z innym układem stałym, jeżeli posiada:

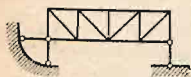
$$p = (3t + 2w) \text{ prętów} \quad (1)$$



Rys. 3

połączonych ze sobą odpowiednio, tj. tak, aby nie zachodził wypadek wyjątkowy, zresztą zdarzający się w praktyce niezmiernie rzadko.

Ziemię uważać można też za tarczę sztywną; zatem dla stałego i statycznie wyznaczalnego ustalenia układu względem ziemi potrzeba  $p = (3t + 2w)$  prętów, z czego część może przypaść na



Rys. 4

pręty istotne (ustrojowe), część na pręty podporowe (łożyskowe), część na przegubowe.

Do ustalenia belek (dźwigarów) względem ziemi używamy zwykle łożysk, które w działaniu swym są równowarte z pewną ilością prętów, i które przy obliczaniu zastępuje się często tymi tzw. prętami łożyskowymi.

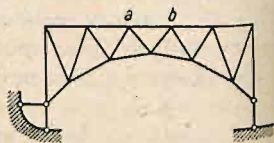
Nazywając  $p_i$  = ilość prętów istotnych czyli ustrojowych,  $p_l$  = ilość prętów łożyskowych,  $p_p$  = ilość prętów przegubowych, otrzymamy dla belki stałej i statycznie wyznaczalnej czyli izostatycznej potrzebną ilość prętów:

$$p = p_i + p_l + p_p = 3t + 2w \quad (2)$$

Podparcie stałe i statycznie wyznaczalne wymaga przynajmniej 3 prętów łożyskowych. Wtedy:

$$p_i = p - p_p - 3 = 3t + 2w - p_p - 3 \quad (3)$$

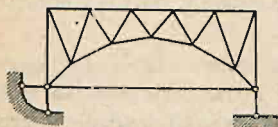
Belka kratowa posiada wyłącznie pręty, więc  $t = 0$ , a wtedy  $p = 2w$ , względnie  $p_i = 2w - 3$  (4)



Rys. 5

Warunki te są konieczne, jednak w wyjątkowych wypadkach mogą być niewystarczające. Te wyjątkowe wypadki zdarzają się niezmiernie rzadko (por. str. 290 i 550) przeto je tu pomijamy.

Rys. 1 przedstawia belkę podpartą na jednej stałej i jednej ruchomej ukośnej podporze; rys. 2 i rys. 3, belkę najczęściej przy-



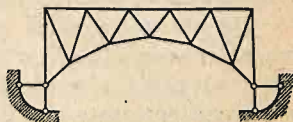
Rys. 6

chodzącą w praktyce tzw. prostą, czyli wolno podpartą, tj. wspierającą się na jednej stałej i ruchomej pionowej podporze. Dla obciążenia pionowego, oba jej oddziaływania są też pionowe. Obliczając oddziaływania na łożysku stałym dla dowolnego obciążenia, wyznaczamy

zwykle składowe tegoż, pionową i poziomą, czemu odpowiadają pręty łożyskowe pionowy i poziomy (por. rys. 3; oznaczenie rys. 2 jest mniej przejrzyste).

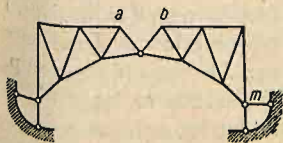
Jeżeli tarcze (rys. 3) zastąpimy belką kratową, posiadającą w węzłów (rys. 4), to według (4) ilość prętów istotnych  $p_i = 2w - 3$ .

Belka podana na rys. 1 nie jest prostą, ale rozporową (bez względu na swój wygląd), gdyż oddziaływania jej dla obciążenia pionowego są ukośne. Belki rozporowe o kształcie łukowym nazywamy łukowymi; natomiast belka o kształcie łukowym (rys. 5), ale podparta jak na rys. 3, jest belką prostą, a nie łukiem. Belkę według rys. 6 nazywamy belką łukową ze zniesionym parciem poziomym; różni się zresztą ona od belki łukowej podanej na rys. 7 tylko tym, że poziomy pręt łożyskowy na prawej podporze zamieniony tu został poziomym ściągciem.



Rys. 7

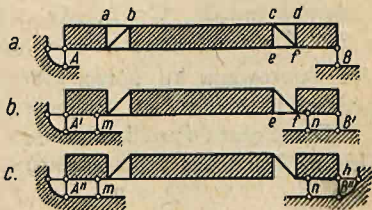
Pręty ustrojowe i pręty łożyskowe belek kratowych można pomiędzy sobą wymieniać, byle zostało zachowane równanie (1) i byle przy zamianie stałość i statyczna wyznaczalność nie były naruszone. Opuszczając np. w belce wolno podpartej (rys. 5) pręt  $ab$  i zastępując go prętem łożyskowym  $m$  (rys. 8) otrzymujemy znowu belkę statycznie wyznaczalną (łuk trójprzegubowy).



Rys. 8

Belka  $AB$  (rys. 9a) składa się z trzech ogniw, połączonych ze sobą: pierwsze z drugim przy pomocy trzech, drugie z trzecim też przy pomocy trzech prętów; uwzględniając trzy pręty podporowe, otrzymamy  $3 \times 3 = 9 = 3t$  prętów łączących. Zamieniając pręty  $ab$

i  $cd$  prętami podporowymi  $m$  i  $n$  (rys. 9b), otrzymujemy belkę ciągłą przegubową o 1 łożysku stałym, 3 ruchomych i 2 przegubach stałych (układ w praktyce niekorzystny). Usuwając nadto pręt  $ef$  i zastępując go prętem podporowym  $h$ , otrzymujemy również belkę ciągłą przegubową o 2 łożyskach stałych, 2 ruchomych, 1 przegubie stałym i 1 ruchomym (rys. 9c), co daje układ korzystniejszy i w nieco zmienionej postaci często używany. Belki kratowe, którym brakuje



Rys. 9

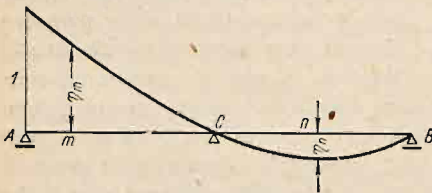
$n$  prętów do ilości wymaganej przez wzory 1—4, które zatem posiadają  $p = (3t + 2w) - n$  prętów, nie są stałe dla ogólnego układu sił zewnętrznych; nazywamy je belkami chwiejnymi  $n$ -tego stopnia. Ze zmianą obciążenia zmieniają one swój kształt i stosowane są bardzo rzadko.

Do obliczenia belek posiadających  $n$  prętów więcej niż wymagają równania (1—4), więc  $p = 3t + 2w + n$  prętów nie wystarczają równania równowagi, ale trzeba dołączyć do nich jeszcze  $n$  równań sprężystości. Belki takie nazywamy statycznie niewyznaczalnymi (hiperstatycznymi)  $n$ -tego stopnia. Statyczna niewyznaczalność może być zewnętrzna, jeżeli prętami nadliczbowymi są pręty podporowe, lub wewnętrzna, jeżeli są nimi pręty ustrojowe.

## 2. Linie wpływowe (linie wpływu).

Linie wpływowe (wpływu) pewnej ilości statycznej są to linie, których rzędne podają wielkość tej ilości statycznej pod wpływem poruszającego się ciężaru  $P = 1$ . W praktyce ciężar ten jest najczęściej pionowy. Powierzchnię zawartą między linią wpływową a osią, nazywamy powierzchnią wpływu (powierzchnią wpływową).

Rys. 10 przedstawia linię wpływu oddziaływania skrajnego  $A$  belki ciągłej dwuprzęsłowej, rys. 11 linię wpływu oddziaływania



Rys. 10

środkowego  $B$  belki ciągłej tróiprzęsłowej. Jeżeli ciężar  $P=1$  znajduje się np. w punkcie  $m$  (rys. 10), to oddziaływanie  $A$  wynosi  $1 \cdot \eta_m$ . Ta linia wpływowa ma swój punkt obrotowy o rzędnej  $\eta = 0$  w  $C$  (gdzie ciężar  $P=1$  stanie w  $C$ ,

oddziaływanie  $A = 0$ ) oraz części: dodatnią (między punktami  $A$  i  $C$ ) i ujemną (między  $C$  i  $B$ , gdy ciężar  $P=1$  stanie w  $n$ , oddziaływanie  $A = 1 \cdot (-\eta_n) = -\eta$ , na podporze  $A$  występuje wtedy siła skierowana ku górze, która stara się belkę na tej podporze podnieść).

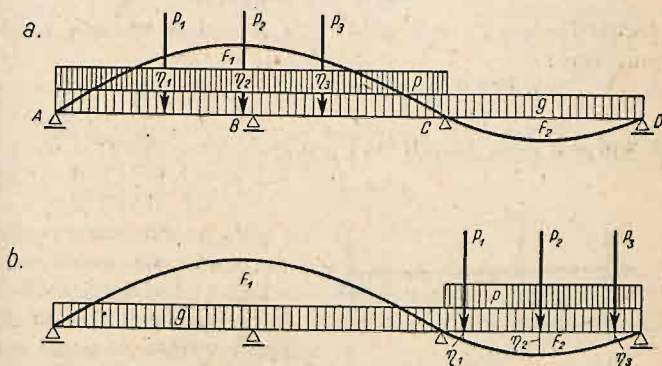
Dla ciężaru  $P$  oddziaływanie  $A = P \eta_m$ , względnie  $A = -P \eta_n$ . Gdy na belce jest kilka ciężarów, to:

$$A = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 = \sum P \cdot \eta \quad (5)$$

Dla ciężaru jednostajnie rozłożonego między  $m$  a  $n$ :

$$A = \int_m^n p \eta \, dx = p \int_m^n \eta \, dx = p \cdot F_{mn}, \quad (6)$$

gdzie  $F_{mn} = \int_m^n \eta \, dx$  przedstawia algebraiczną powierzchnię wpływową, zamkniętą między rzędnymi  $\eta_m$  a  $\eta$ .



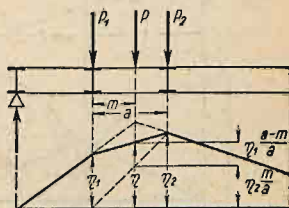
Rys. 11

Zazwyczaj mamy do czynienia z ciężarem własnym  $g$ , rozłożonym na całej długości belki oraz z obciążeniem ruchomym (ciężary skupione  $P$ , lub obciążenie rozłożone zazwyczaj jednostajnie  $p$ ), które należy rozmieścić tak, aby uzyskać położenie najniekorzystniejsze celem bezpiecznego obliczenia belki. Wtedy:

$$\left. \begin{aligned} \text{najw. } + B &= g (F_1 - F_2) + p F_1 + \\ &+ \sum P \eta \quad (\text{rys. 11a}) \\ \text{najw. } - B &= g (F_1 - F_2) - p F_2 - \\ &- \sum P \eta \quad (\text{rys. 11b}) \end{aligned} \right\} (7)$$

Ciężary  $P$  rozmieszczamy tak, aby  $\sum P \eta$  było największe. Jeżeli największa rzędna wyróżnia się wybitnie (rys. 13d) umieszczamy w niej największy ciężar.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę pośrednio przez poprzecznicę zachodzi obciążenie pośrednie wtedy ciężar  $P$  rozdziela się na  $P_1 = P \frac{a-m}{a}$  i  $P_2 = P \frac{m}{a}$ , których wpływ jest równy wpływowi siły  $P$ . Zatem:



Rys. 12

$$P \eta = P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 \text{ a stąd } \eta = \frac{a-m}{a} \eta_1 + \frac{m}{a} \eta_2$$

Linia wpływuwa pomiędzy poprzecznicami jest zatem zawsze prostą. (Rys. 12).

## II. Belki o ścianie pełnej.

### 3. Belka wolno podparta.

Oddziaływanie: (rys 13b). Dla  $P = 1$  w odstępnie  $a$  od  $A$  otrzymujemy:

$$A = P \frac{l-a}{l} = 1 \frac{l-a}{l}, \quad B = P \frac{a}{l} = 1 \cdot \frac{a}{l} \quad (8)$$

Linie wpływu mają kształt linii prostych, przy czym:

$$\left. \begin{array}{l} \text{dla } a = 0 \quad A = 1 \quad B = 0 \\ \text{„ } a = l \quad A = 0 \quad B = 1 \end{array} \right\} (9)$$

Sila poprzeczna w punkcie  $m$  równa się sumie wszystkich sił działających po lewej stronie punktu  $m$ . Siły poprzeczne  $T$  wynoszą więc: dla  $P$  między  $m$  a  $B$   $T = +A$  dla  $P$  między

$$A \text{ a } m \quad T = A - P = -B$$

Na lewej podporze odcinamy rzędną  $+1$ , na prawej  $-1$  i łączymy prostymi według rys. 13c. Ważne są części zakreskowane, grubo wyciągnięte.

Momenty zginające (rys. 13d). Dla  $P = 1$  między  $A$  a  $m$ :

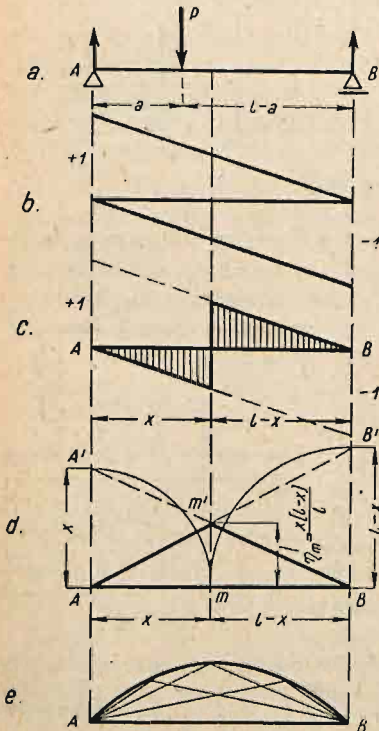
$$M = B(l-x) = P \frac{a}{l} (l-x)$$

$$= 1 \frac{a}{l} (l-x).$$

Dla  $P = 1$  między  $m$  a  $B$ :

$$M' = A x = P \frac{l-a}{l} \cdot x$$

$$= 1 \frac{l-a}{l} \cdot x$$



Rys. 13

Otrzymujemy zatem dwie linie proste:

$$\begin{aligned} \text{dla } a = 0 & \quad M = 0 & \quad M' = 1 \cdot x \\ a = l & \quad M = 1 \cdot (l - x) & \quad M' = 0 \\ a = x & \quad M = 1 \cdot \frac{x(l-x)}{l} & \quad M' = 1 \cdot \frac{x(l-x)}{l} \end{aligned}$$

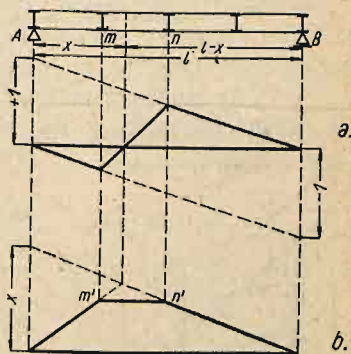
Linie wpływowe momentów można wykreślić, odcinając na pionowej przez  $A$  długość  $x$  i łącząc  $B$  z  $A$  oraz analogicznie w  $B$  długość  $(l-x)$  i łącząc  $B'$  z  $A$ . Wygodniej jest obliczyć w  $m$  rzędną  $\eta_m = \frac{x(l-x)}{l}$ , odciać  $mm' = \eta$  i połączyć  $m$  z  $A$  i  $B$ , zwłaszcza, że wtedy możemy przyjąć najwygodniejszą podziałkę. Wierzchołki  $m'$  dla poszczególnych punktów leżą na paraboli (rys. 13e) o równaniu:

$$\eta = \frac{x(l-x)}{l}$$

**Obciążenie pośrednie:** Linia wpływowa sił poprzecznych otrzymuje kształt, jak na rys. 14a, i jest ważna dla całego przedziału  $m$   $n$ . Zatem i siła poprzeczna dla każdego punktu danego przedziału jest ta sama.

Linia wpływowa momentów przyjmuje kształt rys. 14b (por. rys. 12). Rysuje się najpierw linię wpływu bez uwzględnienia poprzecznic, a następnie wstawia prostą  $m$   $n$  na długości danego przedziału.

**Obciążenie jednostajnie rozłożone.** Przyjmujemy, że ciężar  $g$  jest rozłożony jednostajnie na całej belce, zaś ciężar ruchomy  $p$  umieszczony jest najniekorzystniej:



Rys. 14

**Oddziaływanie** (najniekorzystniejsze jest całkowite obciążenie):

$$A_g = \frac{1}{2} gl = B_g \quad (11)$$

$$\text{najw. } A_p = \frac{1}{2} pl = \text{najw. } B_p \quad (12)$$

**Siły poprzeczne** (w odległości  $x$  od lewej podpory):

$$T_g = \frac{1}{2} g(l - 2x). \quad (13)$$

Sily poprzeczne dla ciężaru stałego zmieniają się według linii prostej.

Dla otrzymania najw.  $T$  obciążamy belkę na długości  $(l - x)$ , dla otrzymania najmn.  $T$ , na długości  $x$  (por. rys. 13c). Wtedy:

$$\text{najw. } T_p = \frac{p(l-x)^2}{2l}; \text{ najmn. } T_p = -\frac{p x^2}{2l} \quad (14)$$

Największe sily poprzeczne dla ciężaru ruchomego zmieniają się według paraboli, której największa rzędna wynosi:  $\frac{1}{2} pl$ , rzędna

w środku belki  $\frac{1}{8} pl$ . Konstrukcja jej jest podana na rys. 15.

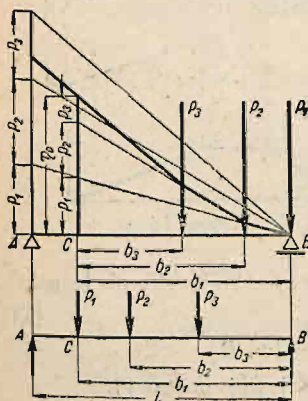
Momenty zginające (nainiekorzystniejsze obciążenie całkowite):

$$\left. \begin{aligned} M_g &= \frac{1}{2} g x (l-x) \\ \text{najw. } M_p &= \frac{1}{2} p x (l-x) \end{aligned} \right\} (15)$$

Największy moment występuje w środku belki i wynosi:

$$\left. \begin{aligned} M_g &= \frac{1}{8} gl^2 = 0,125 gl^2 \\ \text{najw. } M_p &= \frac{1}{8} pl^2 = 0,125 pl^2 \end{aligned} \right\} (16)$$

**Wielobok oddziaływań.** Obciążenie bezpośrednie. Ustawmy na belce  $AB$  szereg ciężarów  $P_1, P_2, P_3$  (np. pociąg) tak, aby pierwszy ciężar  $P$  stanął na podporze  $B$  (rys. 16 a), odetnijmy ciężary  $P_1, P_2, P_3$  na ponowej przez  $A$ , wykreślmy promienie sznurowe dla bieguna, przyjętego w  $B$ , a wreszcie narysujmy wielobok sznurowy, poczynając od  $B$ . Wtedy rzędna  $\eta_c$  w punkcie  $C$  określi wielkość oddziaływaną  $A$ , dla położenia pociągu według rys. 16 b tj., gdy  $P_1$  stoi w  $C$ . Jeżeli bowiem przedłużymy promienie wieloboku sznurowego, znajdujące się na prawo od rzędnej  $\eta_c$ , aż do przecięcia się z tą rzędną, to odmierzą one na niej odcinki  $p_1, p_2, p_3$ , przy czym według (rys. 16 a) jest



Rys. 16

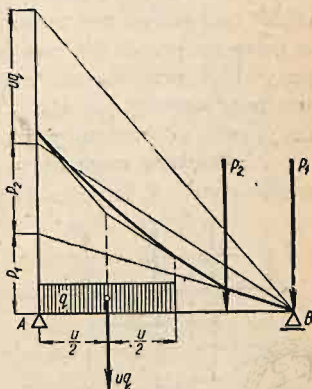
$$\begin{aligned} p_1 : b_1 &= P_1 : l, \quad p_2 : b_2 = P_2 : l \text{ itd.,} \\ \text{zatem: } \eta_c &= p_1 + p_2 + p_3 \dots = \\ &= P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} + P_3 \frac{b_3}{l} \dots = A. \end{aligned}$$



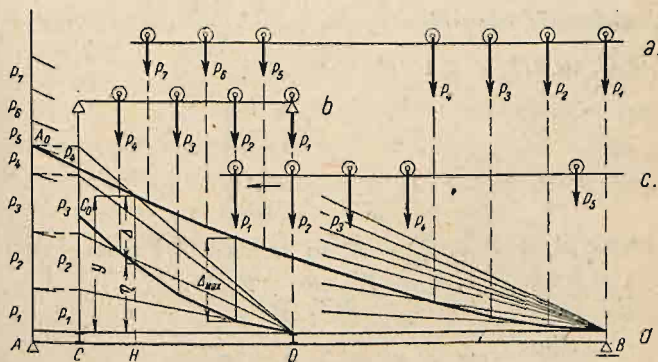
Siła poprzeczna w przekroju  $C$  jest z reguły największa wtedy, gdy na nim stoi pierwszy ciężar (rys. 16b), zatem wykres oddziaływań jest zarazem wykresem największych sił poprzecznych.

Jeżeli pierwszy ciężar jest stosunkowo mały a od drugiego znacznie oddalony, to największa siła poprzeczna w danym przekroju może wystąpić przy ustawieniu na nim drugiego ciężaru. Jeżeli między ciężarami skupionymi są też obciążenia ciągłe, jednostajnie rozłożone na pewnych długościach, to należy je zamienić na ciężary skupione, zaczepiające w środkach tych długości i w tak otrzymanym wieloboku wkreślić parabolę na długości obciążenia jednostajnego, (por. rys. 17).

**Obciążenie pośrednie** Dla danego szeregu ciężarów (rys. 18 a) wykreślamy wielobok oddziaływań  $BA_0$  dla belki  $AB$  i także wielobok  $DC_0$  dla belki (podłużnicy)  $CD$  przy pomocy bieguna  $D$  i sił  $P_1, P_2, P_3$ , odciętych na pionowej punktu  $C$ , a ustawionych według rys. 18 b. jeżeli pierwszy ciężar pociągu, jadącego w lewo, stoi w dowolnym punkcie  $H$  przedziału  $CD$ , to rzędna  $y$  w tymże punkcie wielokoku  $BA_0$  przedstawia oddziaływanie  $A$ , rzędna  $\eta$  wielokoku  $DC_0$  nacisk poprzeczniczy  $C$ , zatem



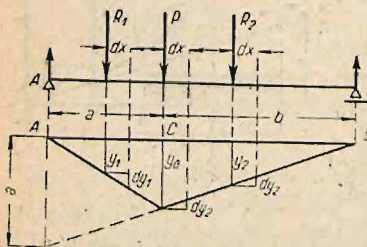
Rys. 17



Rys. 18

różnica  $y - \eta = \Delta$  przedstawia siłę poprzeczną  $T$  w przedziale  $C D$ . Będzie ona największa, gdy  $P_1$  stanie w miejscu, gdzie  $\Delta$  jest największe (rys. 18 c i d). Wtedy  $T_{max} = \Delta_{max}$ . W pobliżu podpory prawej dla otrzymania  $T_{max}$   $P_1$  ma stać na prawej poprzeczni (położenie zasadnicze). Dla przedziałów bliskich podpory  $A$  zwłaszcza, gdy przedziały są dość duże, a odstępy ciężarów znacznie mniejsze, może dla  $T_{max}$  stać drugi albo trzeci ciężar nad prawą poprzecznicą. Jeżeli przedziały są równe i gdy w pewnym przedziale nad prawą poprzecznicą ma stać  $P_2$ , to we wszystkich przedziałach znajdujących się bliżej podpory  $B$  na prawej poprzeczni ma stać  $P_1$  albo  $P_2$ , we wszystkich zaś bliżej  $A$ , na prawej poprzeczni ma stać  $P_2$  albo  $P_3$ .

**Największy moment w pewnym przekroju belki.** a) *Sposób analityczny.* Z kształtu linii wpływowej dla przekroju  $C$  (rys. 19)



Rys. 19

widać, że należy na nim ustawić pewien ciężar  $P$ . Nazwijmy  $R_1$  wypadkową ciężarów na długości  $AC$ , zaś  $R_2$  na długości  $CB$ , to moment  $M = R_1 y_1 + P y_0 + R_2 y_2$ . Przez przesunięcie układu ciężarów w prawo (względnie w lewo) o  $dx$  zwiększy się moment o  $dM_p$  (wzgl.  $dM_l$ ):

$$dM_p = R_1 dy_1 - (P + R_2) dy_2 = y_0 dx \left[ \frac{R_1}{a} - \frac{P + R_2}{b} \right]$$

Analogicznie będzie  $dM_l = y_0 dx \left[ -\frac{R_1 + P}{a} + \frac{R_2}{b} \right]$ . Jeżeli  $P$  ma stać w  $C$ , to  $dM_p < 0$  i  $dM_l < 0$ , czyli

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_1}{a} &< \frac{R_2 + P}{b} \\ \frac{R_1 + P}{a} &> \frac{R_2}{b} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

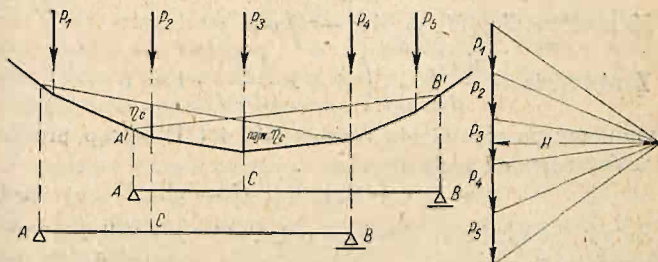
Nazwijmy  $R_1 + P + R_2 = R$ , to zamiast (17) można napisać:

$$\frac{R_1 + P}{a} > \frac{R}{l} > \frac{R_2}{a} \quad (18)$$

albo:  $(R_1 + P) > \frac{a}{l} R > R_2$  (19)

Jeżeli spełnia się tylko pierwsza nierówność, to należy układ ciężarów przesunąć w prawo tak, aby sąsiedni ciężar stanął w  $C$  i zastosować powyższe kryterium dla nowego położenia ciężarów.

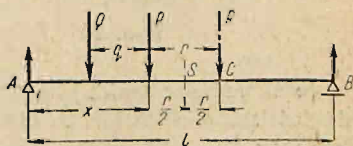
b) *Sposób wykreślny.* Wykreślamy wielobok sił i wielobok sznurowy dla danego szeregu ciężarów. Ustawiamy belkę  $AB$  tak,



Rys. 20

aby przekrój badany  $C$  znalazł się na kierunku pewnej siły, np.  $P_3$  (rys 20). Pionowe przez  $A$  i  $B$  wyznaczają na wieloboku sznurowym punkty zamykającej  $A'B'$ . Odcinek  $\eta_c$  (w skali długości), pomnożony przez biegunową  $H$  (w skali sił), przedstawia  $M_c$ , gdy  $P_3$  stoi w  $C$ . Jeżeli przekrój  $C$  wpadnie w kierunek siły innej, to w powyższy sposób otrzymamy inną wartość  $\eta_c$ . Przesuwając więc belkę, znajdziemy łatwo największe  $\eta_c$ ; wtedy  $\text{najw. } M_c = \text{najw. } \eta_c H$ . Podobnie znajdziemy  $\text{najw. } \eta_d$  dla przekroju  $D$  belki. Jeżeli jeden ciężar jest wybitnie większy od innych, to zwykle on właśnie stanie winien na badanym przekroju. Sposobu tego używa się, gdy mamy znaleźć  $\text{najw. } M$  w pewnej liczbie przekrojów, np. pod poszczególnymi poprzecznkami. Przy obciążeniu bezpośrednim, zwłaszcza dla mniejszych belek, trzeba jednak dla wyznaczenia przekroju znaleźć bezwzględnie największy moment.

*Bezwzględnie największy moment  $\text{max } M_{\text{max}}$*  jest to największy moment, jaki na danej belce może w ogóle wystąpić dla danego obciążenia, obojętne w którym punkcie. Występuje on w jakimś przekroju belki (przekrój niebezpieczny), gdy na nim stanie jeden z ciężarów układu np.  $P$  (rys. 21). Jeżeli nazwiemy:  $R$  wypadkową wszystkich ciężarów



Rys. 21

znajdujących się na belce,  $Q$  wypadkową ciężarów znajdujących się na belce na lewo od  $P$ , to z równowagi względem  $B$  wynika:

$$Al = R(l - x - r) \quad (20)$$

$$\text{stąd } \frac{dA}{dx} \cdot l = -R \quad (21)$$

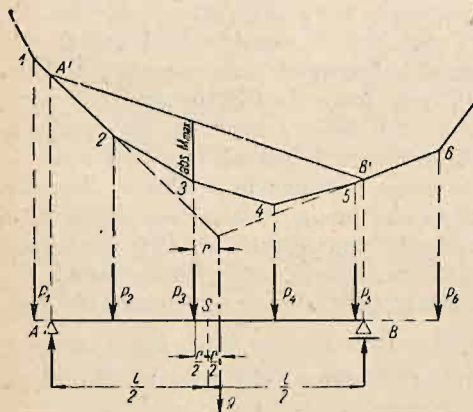
Moment w  $C$ :  $M_x = Ax - Qq$

$$\text{Z równania } l \frac{dM_x}{dx} = \left( A + x \frac{dA}{dx} \right) \cdot l = 0$$

otrzymujemy po wstawieniu równań (20) i (21) odstęp przekroju niebezpiecznego od podpory  $A$

$$x = \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} (l - r). \quad (22)$$

Zatem środek belki  $S$  połowi odległość  $r$  wypadkowej  $R$  od niebezpiecznego przekroju. W powyższym wyprowadzeniu przyjęto, że  $R, Q, r$  i  $q$  są niezależne od  $x$  czyli, że przy podporach nie ma obciążeń ciągłych. W przeciwnym wypadku wzory stają się bardziej zawile (por. wzory dla zasadniczego obciążenia mostów drogowych). Zwykle na przekroju niebezpiecznym ma



Rys. 22

stać ciężar najbliższy wypadkowej, Jeżeli np. na belce zmieszczą się ciężary  $P_2, P_3, P_4$  i  $P_5$  (rys. 22), to przedłużając boki 1-2 i 5-6 aż do przecięcia się, znajdziemy wypadkową  $R$  tych ciężarów. Najbliższą siłą jest  $P_3$ . Jeżeli w połowie między  $P_3$  i  $R$  umieścimy środek  $S$  belki  $AB$ , to zamykająca  $A'B'$  odcina na kierunku  $P_3$  w skali momentów wartość  $\max M_{max}$ .

Jeżeli na belce znajduje się kilka równych ciężarów w równych odległościach  $a$  od siebie, to dla parzystej ilości ciężarów odległość  $\max M_{max}$  od rodka belki  $e = \frac{1}{2} r = 0,25 a$ ; dla nieparzystej ilości ciężarów  $\max M_{max}$  występuje w środku belki.

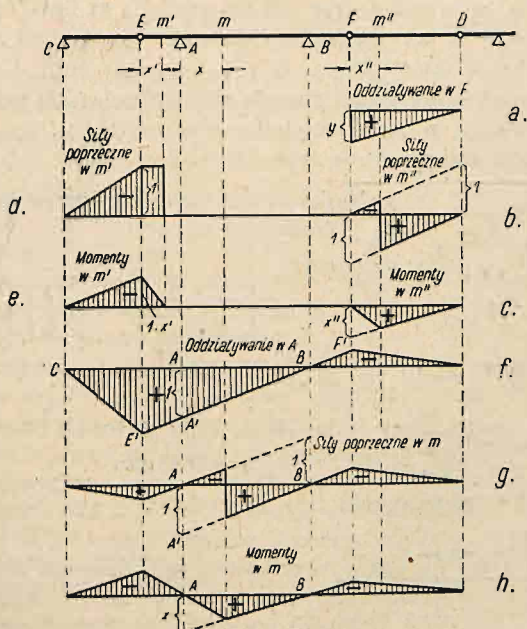
Użycie tablic. Dla mostów drogowych ułożono tablice (część jedenasta), które dla danych norm i schematów obciążenia ułatwiają znajdowanie oddziaływań, tudzież największych sił poprzecznych i momentów w dowolnym przekroju belki wolno podpartej.

#### 4. Belka ciągła przegubowa.

a. Statycznie wyznaczalna belka o  $n$  przęsłach czyli  $(n + 1)$  podporach posiada  $n$  tarcz i  $(n - 1)$  przegubów, w tym  $s$  stałych,  $r$  ruchomych. Według równania (2), zważywszy, że  $p_p = 2s + r$ , ilość prętów łozyskowych powinna wynosić:

$$p_l = 3n - 2s - r. \quad (23)$$

W jednym przęśle mogą być najwyżej dwa przeguby. Zwykle wykonywamy belki ciągłe przegubowe, dając:  $\alpha$ ) w przęsłach skrajnych po jednym przegubie, w następnych zaś co drugie przęśło po dwa przeguby,  $\beta$ ) w przęsłach skrajnych nie dajemy przegubów w następnych zaś co drugie przęśło po 2 przeguby. Wtedy  $s = r$



Rys. 23

więc  $p_1 = 3n - 3s = 3(n - s)$ , np. dla  $n = 5$   $s = r = 2$ ,  
 $p_1 = 3(5 - 2) = 9$ . W ten sposób rozkładamy belkę ciągłą prze-  
 gubową na belki wspornikowe i na wolno podpartę, zawieszoną  
 na wspornikach.

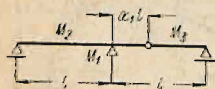
Najpierw obliczamy belki zawieszone, względnie ich oddzia-  
 liwania, które są siłami zewnętrznymi dla belki wspornikowej,  
 a następnie belkę wspornikową.

b. *Linie wpływo*we Dla belki zawieszonej linie wpływo

jak dla belki wolno podpartej, por. rys. 23a oddziaływanie w  $F$ , rys 23b  
 siły poprzeczne i rys 23c momenty zgięcia. Dla punktu  $m'$  wspor-  
 nika  $A$   $E$  linia wpływowa sił poprzecznych por rys. 23d, momen-  
 tów rys 23e. Dla oddziaływania  $A$  (rys. 23f) rzędna linii wpływowej  
 w punkcie  $A$   $AA' = 1$ , rzędna w punkcie  $B$  równa się 0. Prosta  
 $A'B$  przedłużamy na zewnątrz aż do przecięcia się z pionowymi  
 przez przeguby  $E$  i  $F$ . Punkty  $E'$  i  $F'$  łączy się ze skrajną pod-  
 porą  $C$ , względnie z przegubem  $D$ . Dla siły poprzecznej (rys. 23g)  
 i momentu zginającego (rys 23h) w punkcie  $m$  linie wpływo  
 na długości  $AB$ , jak dla belki wolno podpartej; na zewnątrz  
 przedłużamy je jak wyżej.

c. *Szczególne przypadki*. Przęsła równe. Obciążenie jednostajne  
 ( $g$  ciężar własny,  $p$  ciężar użytkowy,  $q = g + p$ ).

1) Belka dwuprzęsłowa (rys. 24).



Rys. 24

Najkorzystniejszy odstęp przegubu od pod-  
 pory środkowej  $x = \alpha_1 l$ ,  
 przy czym

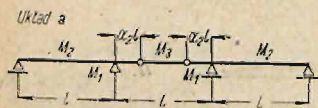
$$\alpha_1 = \left[ \frac{q}{g} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{g}{q}} \right) \right]^2 \quad (24)$$

$$\text{Wtedy: } M_1 = M_2 = \frac{\alpha_1}{2} ql^2, \quad M_3 = \frac{ql^2}{8} (1 - \alpha_1)^2. \quad (25)$$

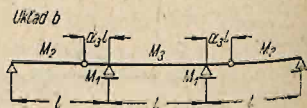
Jeżeli uwzględnimy tylko ciężar stały  $g$ , to dla  $\alpha_1 = 0,172$ :

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0,0858 gl^2. \quad (26)$$

2) Belka trójprzęsłowa (rys. 25a i 25b).



Rys. 25a



Rys. 25b

$$\text{Układ a. Dla: } a_2 = 0,5 (1 - \sqrt{1 - 4a_1}) = \frac{x}{l} \quad (27)$$

$$\text{jest: } M_1 = M_2 = \frac{a_1}{2} ql^2, \quad M_3 = \frac{ql^2}{8} (1 - 2a_2)^2. \quad (28)$$

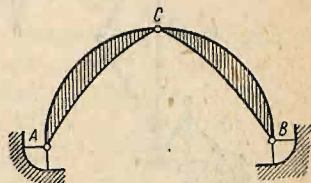
Gdy tylko ciężar stały  $g$ :

$$a_2 = 0,22, \quad M_1 = M_2 = 0,0858 gl^2, \quad M_3 = 0,0392 gl^2. \quad (29)$$

Układ b.

$$\text{Dla: } a_3 = \frac{q}{4(q+g)} \quad (30)$$

$$\text{jest: } \left. \begin{aligned} M_1 = M_3 &= \frac{ql^2}{2} a_3, \\ M_2 &= \frac{ql^2}{8} (1 - a_3)^2. \end{aligned} \right\} (31)$$



Rys. 26

Dla samego ciężaru stałego  $g$ :

$$a_3 = 0,125, \quad M_1 = M_3 = 0,0625 gl^2, \quad M_2 = 0,0957 gl^2. \quad (32)$$

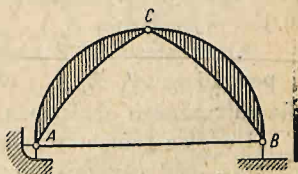
A przyjmując

$$a_3 = 0,172, \quad M_1 = M_2 = M_3 = 0,0858 gl^2. \quad (33)$$

### 5. Łuk trójprzegubowy.

a. *Statyczna wyznaczalność.* Łuk trójprzegubowy składa się z dwu tarcz, zatem przy łącznej ilości prętów przegubowych i łożyskowych  $3f = 6$  jest statycznie wyznaczalny.

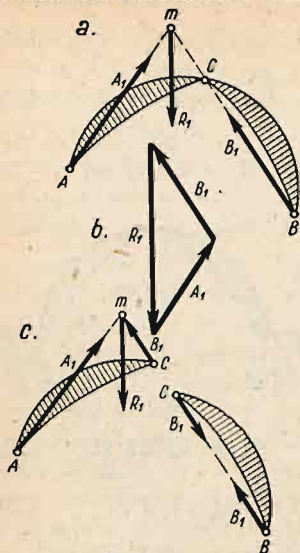
Może to być zwykły łuk trójprzegubowy (rys. 26 dwa przeguby podporowe, jeden środkowy), łuk trójprzegubowy wystający, wreszcie łuk trójprzegubowy ze ściągiem o jednym łożysku stałym, a drugim ruchomym (rys. 27). Ten ostatni ze względu na



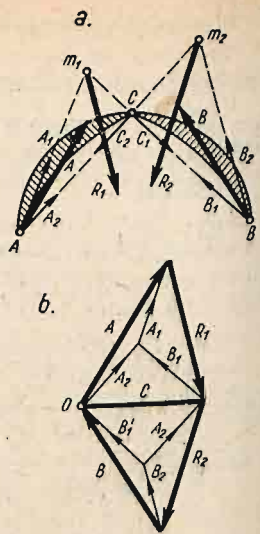
Rys. 27

swoje podparcie nie należy właściwie do łuków, można jednak uważać, że ściąga zastępuje poziomy pręt podporowy łożyska B, co daje znów schemat statyczny łuku.

Dla wykreślenia oddziaływań wyznaczamy wypadkowe  $R_1$  i  $R_2$  sił działających na lewą, względnie na prawą część łuku. Jeżeli na łuk działa tylko  $R_1$  (rys. 28a), to oddziaływanie  $B_1$  przechodzi przez B i C, gdyż prawa część jest nieobciążona. Kierunek od oddziaływania  $A_1$  znajdziemy przedłużając BC do przecięcia z  $R_1$  w punkcie  $m$  i łącząc punkt A z  $m$ . Ciśnienie w przegubie C jest równe i wprost przeciwne oddziaływaniu  $B_1$  (rys. 28c). Wielkość oddziaływań znajdziemy z trójkąta sił (rys. 28b).



Rys. 28

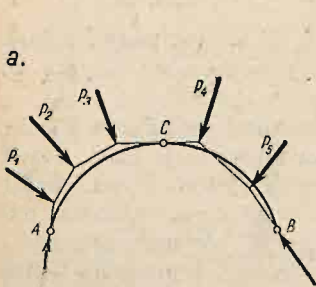


Rys. 29

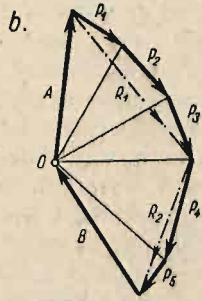
Analogicznie dla prawej części obciążonej znajdziemy  $A_2$  i  $B_2$ . Przy równoczesnym obciążeniu obu części (rys. 29) oddziaływanie  $A$  jest wypadkową  $A_1$  i  $A_2$ ,  $B$  zaś wypadkową  $B_1$  i  $B_2$ .

Aby znaleźć  $A$  i  $B$  kreśli się trójkąty sił  $A_1, B_1, R_1$  i  $A_2, B_2, R_2$ , a prowadząc  $A'_2 \parallel A_2$  i  $B'_1 \parallel B_1$ , znajduje ostateczne  $A, B$  i  $C$  dla całkowitego obciążenia.

Dodając geometrycznie do oddziaływania  $A$  kolejno siły  $P_1, P_2, P_3$  (rys. 30b) otrzymamy wielobok sił. Odpowiadający mu wielobok sznurowy



Rys. 30a



Rys. 30b

wielobok sznurowy (rys. 30 a) jest tzw. linią ciśnienia (linią naporową). Przechodzi ona przez wszystkie przeguby i w dowolnym przekroju przedstawia położenie i kierunek wypadkowej



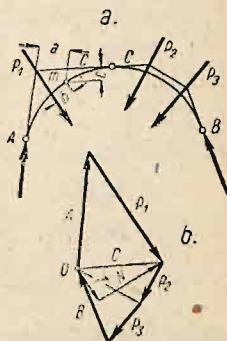
wszystkich sił zewnętrznych na lewo od przekroju, a tym samym wypadkowej ciśnień. Wielkość tej wypadkowej określa odpowiedni promień w wieloboku sił (rys. 30b).

b. *Obliczenie przekroju.* Moment osiowy w dowolnym punkcie  $m$  łuku wynosi (rys. 31a):

$$M = A \cdot a - P_1 \cdot b = C \cdot c \quad (34)$$

gdzie  $A$  jest oddziaływaniem,  $a$  i  $b$  odległościami prostokątnymi odpowiednich sił; równy jest więc iloczynowi wypadkowej ciśnień przez odstęp linii ciśnień od środka ciężkości przekroju.

Siłą podłużną (normalną)  $N$  w danym punkcie nazywamy sumę składowych prostokątnych do osi w danym punkcie wszystkich sił działających po lewej stronie przekroju. Siłą poprzeczną  $T$  nazywamy sumę składowych prostokątnych do osi (równoległych do przekroju) tych sił; wywołuje ona naprężenie ścinające (rys. 31b).



Rys. 31 a i b

Ponieważ na przekrój działa równocześnie  $M$  i  $N$ , przeto naprężenie w skrajnej warstwie górnej:

$$\sigma_g = \frac{N}{F} + \frac{M}{J} a_g \quad (35)$$

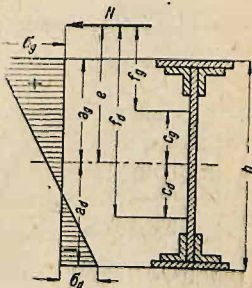
Jeżeli mimośród jest  $e$  (rys. 32), to  $M = Ne$ . Moment bezwładności przekroju  $I = F i^2 = F a_g \cdot c_d$ , jeżeli  $c_d$  jest dolnym promieniem rdzennym.

$$\text{Zatem: } \sigma_g = \frac{N}{F} \left( 1 + \frac{e}{c_d} \right) \quad (36)$$

$$\text{Podobnie: } \sigma_d = \frac{N}{F} \left( 1 - \frac{e}{c_d} \right)$$

Stąd widać, że aby  $\sigma_d$  było ściskaniem, musi być  $e < c_g$ , tzn. linia ciśnienia musi pozostać w obrębie rdzenia przekroju. Moment siły  $N$  względem punktu rdzenia dolnego:

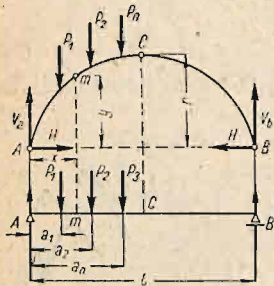
$$M_d = N (c_d + e) = N \cdot f_d$$



Rys. 32

Moment statyczny powierzchni  $F$  względem tego punktu  $W_d = F \cdot c_d$ .

Zatem:  $\sigma_g = \frac{M_d}{W_d}$ ;    podobnie  $\sigma_d = \frac{M_g}{W_g}$     (37)



Rys. 33

wych  $V_a$ ,  $P_1$ ,  $P_2$ , ...  $P_n$  po lewej stronie przekroju wynosi:

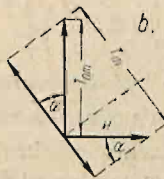
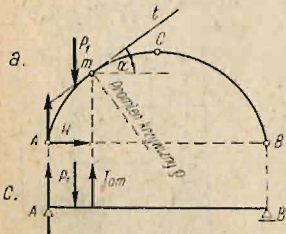
$V_a \frac{l}{2} - \sum_1^n P c$  gdzie  $c_1$   $c_2$  .....  $c_n$  są odległościami sił  $P$  od przegubu  $C$  i jest równy momentowi  $M_{oc}$  belki prostej o długości  $l$  ze względu na punkt  $C$ , leżący w środku belki. Dla równowagi musi być  $M_{oc} - H \cdot f = 0$  stąd

$$H = \frac{M_{oc}}{f} \quad (38)$$

Moment w dowolnym punkcie  $m$  wynosi:

$$M_m = A x - \sum_0^x P (x - a) - H y = M_{om} - H \cdot y \quad (39)$$

gdzie  $M_{om}$  jest momentem belki prostej ze względu na punkt  $m$ .



Rys. 34

c. *Obciążenie pionowe* — łuk symetryczny (rys. 33). Rozłóżmy oba oddziaływania na składowe poziome  $H$  i składowe pionowe  $V_a$ ,  $V_b$ , to z równania momentów względem  $B$  wynika, że  $V_a$  równa się lewemu oddziaływananiu wolno podpartej  $AB$  przy tym samym obciążeniu; zatem  $V_a = A$  podobnie  $V_b = B$

Celem znalezienia  $H$  wyznaczamy moment zgięcia względem przegubu  $C$ , gdzie  $M = 0$  Moment sił pionowych

d. *Sila poprzeczna i podłużna*. Celem obliczenia siły poprzecznej  $T_m$  i podłużnej  $N_m$  rzutujemy siły po lewej stronie przekroju na kierunek promienia krzywizny i stycznej (rys. 34). Dla belki prostej odpowiedzienia siła

poprzeczna wynosi:  $T_{om} = A - P_1$ . Rzutując  $T_{om}$  i  $H$  na promień, otrzymamy:

$$T_m = T_{om} \cos \alpha - H \sin \alpha \quad (40)$$

Rzutując zaś na styczną  $t$ , otrzymamy:

$$N_m = T_{om} \sin \alpha + H \cos \alpha \quad (41)$$

c. *Wypadki szczególne*: 1). Dla łuku symetrycznego otrzymamy dla obciążenia całkowitego jednostajnie rozłożonego:

$$A = B = \frac{1}{2} pl; \quad H = \frac{M_{oc}}{f} = \frac{pl^2}{8f} \quad (42)$$

dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na lewej połowie łuku:

$$A = \frac{3}{8} pl; \quad B = \frac{1}{8} pl; \quad H = \frac{pl^2}{16f} \quad (43)$$

dla siły skupionej  $P$  w środku:

$$A = B = \frac{1}{2} P; \quad H = \frac{Pl}{4f} \quad (44)$$

dla  $P$  w  $1/4$  rozpiętości:

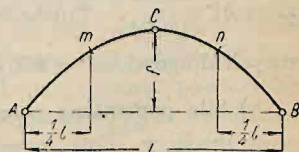
$$A = \frac{3}{4} P; \quad B = \frac{P}{4}; \quad H = \frac{Pl}{8f} \quad (45)$$

2) Dla łuku parabolicznego (rys. 35) o równaniu osi:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (46)$$

otrzymujemy dla obciążenia całkowitego  $g$  jednostajnie rozłożonego

$$N_m = \frac{g}{2} \left( \frac{l^2}{4f} + \frac{f}{2} \right); \quad M_m = 0 \quad (47)$$



Rys. 35

dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na lewej połowie łuku:

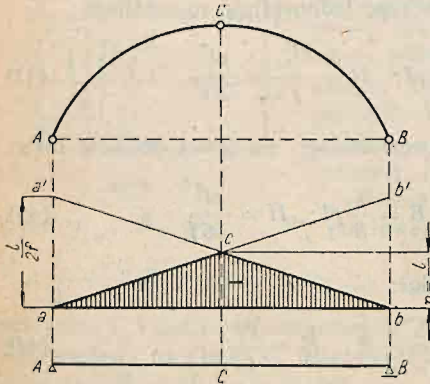
$$N_c = \frac{p}{4} \left( \frac{l^2}{4f} + \frac{f}{2} \right); \quad M_m = + \frac{pl^2}{64}; \quad M_n = - \frac{pl^2}{64} \quad (48)$$

dla siły skupionej  $P$  w środku:

$$N_c = P \left( \frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right); \quad M_m = M_n = - \frac{Pl}{16} \quad (49)$$

dla siły skupionej  $P$  w punkcie  $m$ :

$$\left. \begin{aligned} N_m &= \frac{P}{2} \left( \frac{l}{4f} + \frac{3f}{l} \right); & M_m &= + \frac{3}{32} Pl \\ N_n &= \frac{P}{2} \left( \frac{l}{4f} + \frac{f}{l} \right); & M_n &= + \frac{1}{32} Pl \end{aligned} \right\} \quad (50)$$



Rys. 36

Płaski łuk paraboliczny (dla  $f:l < 1:6$ ) jest bardzo zbliżony do kołowego; w prostszych wypadkach możemy przeto wzory 47–50 stosować i dla płaskich łuków kołowych.

f. Linie wpływowe. α) Linie wpływowe składowych oddziaływań  $V_a$  i  $V_b$ , jak dla belki wolno podpartej (por. rys. 13 b).

β) Linia wpływowa partia poziomego  $H$  ma kształt linii wpływowej momen-

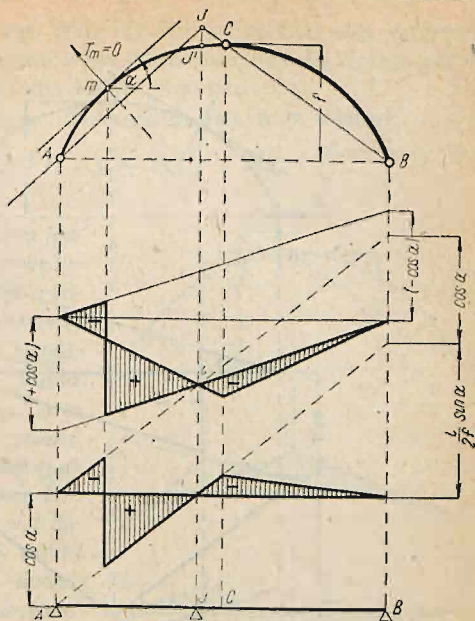
tu dla belki prostej ze względu na punkt  $C$  z współczynnikiem  $\frac{1}{f}$  (rys 36f). Dla łuku symetrycznego linia wpływowa ma kształt trójkąta równoramiennego o największej rzędnej w środku, wynoszącej  $\eta = \frac{l}{4}$ . Proste  $ac$  i  $bc$  odcinają na pionowych podporowych długości  $aa' = bb' = \frac{l}{2f}$

γ) Siła poprzeczna wynosi:

$$T_m = T_{om} \cos \alpha - H \sin \alpha = T_{om} \cos \alpha - \frac{M_{oc}}{f} \sin \alpha$$

gdzie  $T_{om}$  oznacza siłę poprzeczną w punkcie  $m$  dla belki prostej. Linia wpływowa jest więc różnicą rzędnych linii wpływowej  $T_{om}$  ze współczynnikiem  $\cos \alpha$  i linii wpływowej  $H$  ze współczynnikiem  $\sin \alpha$ , wzgl. linii wpływowej  $M_{oc}$  ze współczynnikiem  $\frac{\sin \alpha}{f}$  (rys 37).

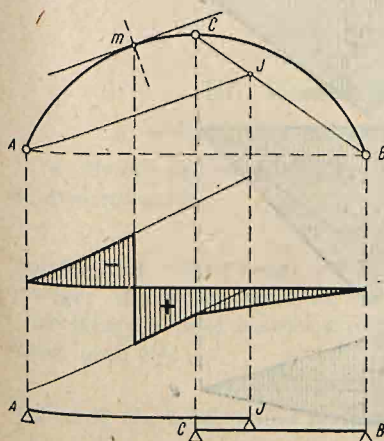
Punkt obojętny i znajdziemy, prowadząc z podpory  $A$  równoległą do stycznej [do łuku w punkcie  $m$  aż do przecięcia z linią  $BC$  w punkcie  $J$ ; ciężar stojący bowiem w punkcie  $J$  daje siłę poprzeczną  $l_m = 0$  (gdyż rzut powstającego wtedy oddziaływania  $A$  na kierunku  $T_m$  jest równy 0). Znalazłszy punkt  $J$ , możemy wyznaczyć linię wpływową siły  $T_m$  (ze współczynnikiem  $\cos \alpha$ ), jak dla belki prostej tzw. zastępczej wystającej  $AJC$  (r. 37) zawieszoną w punkcie



Rys. 37

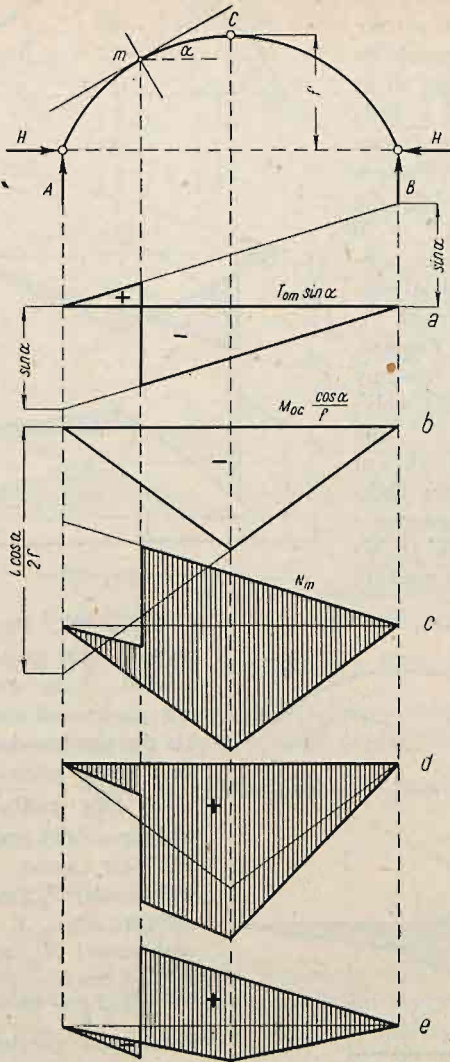
$C$  belką  $BC$ . Punkt  $J$  może wypaść też między  $C$  i  $B$ , a wtedy linia wpływowa nie ma punktu obojętnego, zwykle dla przekrojów bliżej środka i łuków płaskich (rys. 38).

δ) Siła podłużna. Linia wpływowa siły podłużnej (rys. 39) jest sumą powierzchni wpływowej  $T_{om}$  ze współczynnikiem  $\sin \alpha$  i powierzchni wpływowej  $M_{oc}$  ze współczynnikiem  $\frac{\cos \alpha}{f}$ . Zależnie od wielkości obu powierzchni linia wpływowa siły podłużnej może się składać z powierzchni



Rys. 38

Zależnie od wielkości obu powierzchni linia wpływowa siły podłużnej może się składać z powierzchni



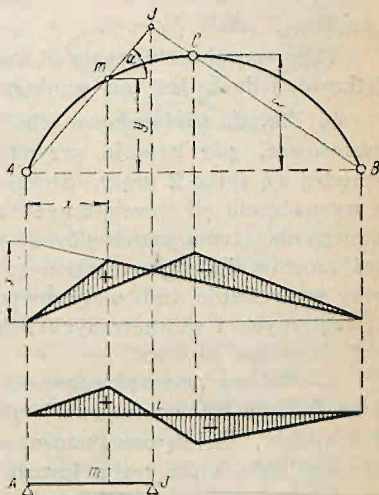
Rys. 39

dodatniej i ujemnej (rys. 39e) lub też może być cała dodatnia (rys. 39 c i d). Ten ostatni wypadek otrzymamy dla dużego  $\text{ctg } \alpha$ , więc w pobliżu środka i dla łuków płaskich.

e) Moment zginający. Moment osiowy w  $m$  wynosi:

$$M_m = M_{om} - H \cdot y = M_{om} - M_{oc} \cdot \frac{y}{f}$$

Linia wpływowa momentu jest różnicą rzędnych linii wpływowej momentów belki prostej  $M_{om}$  i linii wpływowej parcia poziomego  $H$  ze współczynnikiem  $y$  (rys. 40). Punkt obojętny i znajdziemy, prowadząc z podpory  $A$  prostą, przechodzącą przez punkt  $m$  aż do przecięcia się z linią  $BC$ . Ciężar stojący bowiem w  $J$  daje  $M_m = 0$ . Znalazłszy punkt  $i$ , możemy wyznaczyć dodatnią część linii wpływowej momentu  $M$  jak dla belki prostej zastępczej o długości  $AJ$ .



Rys. 40

### III. Kratownice płaskie.

#### 6. Wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach.

a. *Metoda ogólna.* Dla każdego (wyciętego) węzła dadzą ustawić się dwa równania:

$$\sum V = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum H = 0$$

(por. str. 286). Otrzymamy zatem dla  $w$  węzłów  $2w$  równań równowagi; dla wyznaczenia niewiadomych sił w prętach istotnych i łożyskowych ilość niewiadomych musi być równa ilości równań, zatem musi być:

$$2w = p_i + p_l = p$$

względnie dla belki wolno podpartej ( $p_l = 3$ ):

$$2w - 3 = p_i.$$

Równania te można rozwiązać np. przy pomocy wyznaczników, przy czym niewiadome dadzą się ostatecznie wyrazić w postaci ilorazu dwu wyznaczników; wyznacznik  $\Delta$  mianownika zależny jest tylko od kształtu kratownicy, zaś wyznacznik licznika  $\Delta_1$  także od obciążenia. Jeżeli kształt belki jest taki, że  $\Delta = 0$ , to siły wewnętrzne będą nieskończenie wielkie, jeżeli  $\Delta_1 \leq 0$ , zaś nieokreślone, jeżeli  $\Delta_1 = 0$ .

Tego sposobu obliczenia sił wewnętrznych używa się tylko wyjątkowo, jednak jest on punktem wyjścia dla innych sposobów.

b. *Metoda wielobokowa* albo węzłów (plan sił Cremony) da się zastosować, gdy istnieje przynajmniej jeden węzeł, w którym schodzą się tylko 2 pręty. Stosuje się ją w przypadku, gdy chodzi o wyznaczenie sił wewnętrznych we wszystkich prętach od tego samego obciążenia, zatem głównie w budownictwie, przy obliczaniu zaś mostów dla ciężaru własnego lub ciężaru równego jedności przy wykreślaniu linii wpływowych (por. str. 302). Wielobok sił zewnętrznych i wewnętrznych działających na dany węzeł, musi się oczywiście zamykać.

c. *Metoda przecięć* prowadzi prędzej do celu, jeżeli chodzi o znalezienie siły wewnętrznej tylko w pewnym przecięciu, (a nie we wszystkich). Da się ona zastosować wtedy, gdy badany pręt można przeciąć linią, która trafia jeszcze tylko dwa inne pręty.

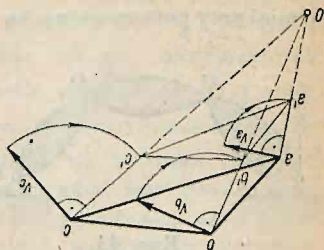
Siły zewnętrzne, działające na lewą (lub prawą) odciętą część belki (wraz z oddziaływaniem), których wypadkową jest siła poprzeczna  $T$  (rys. 57) równoważą się z siłami wewnętrznymi  $DKG$  w prętach przeciętych. Zadanie to można rozwiązać analitycznie (Ritter) lub wykreślnie (Culmann). Stosujemy przy tym to równanie równowagi, które da się rozwiązać najłatwiej.

d. *Metoda wymiany prętów* pozwala na wyznaczenie sił wewnętrznych, gdy nie można zastosować metod poprzednich, więc gdy kratownica nie posiada żadnego węzła, w którym schodzą się dwa pręty, gdy przez nią nie można przeprowadzić żadnego przekroju, który by przeciął tylko trzy pręty. Stosując ją, opuszcza się jeden pręt, tzw. wymienny (względnie  $m$  prętów wymiennych) wstawia natomiast inny pręt tzw. zastępczy (względnie  $m$  prętów zastępczych), taki aby siły wewnętrzne w kracie można było wyznaczyć. Pręt zastępczy należy umieścić w miejscu tak wybranym, aby następne obliczenie było łatwe i aby nie dostać układu który byłby częściowo chwiejny, a częściowo hiperstatyczny.



## 7. Teoria kinematyczna kratownic.

Niezmiernie małe przesunięcie ogniwa tarczy I w położenie I' (rys. 41) można uważać za obrót jej około bieguna O. Przesunięcia (nieskończenie małe) poszczególnych punktów oraz ich prędkości (skończone) są prostopadłe do odpowiednich promieni ( $aO$ ) i proporcjonalnie do nich. Obracając wszystkie te prędkości o  $90^\circ$  (tzw. prędkości prostopadłe) otrzymamy figurę  $a'b'c'$ , podobną do  $abc$ ; figura  $a'b'c'$  jest tzw. planem prędkości prostopadłych. Wszystkie cechy obrotu tarczy sztywnej będą więc ustalone, jeżeli znany jest a) biegun obrotu O i prędkości wzgl. przesunięcia prostopadłe któregośkolwiek punktu, lub b) prędkości (przesunięcia) prostopadłe dwu punktów.

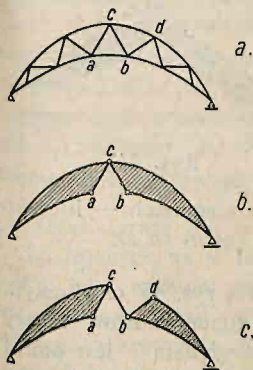


Rys. 41

Jeżeli przesunięcie dowolnego punktu  $a$  tarczy równa się promieniowi  $Oa$ , to punkt  $a'$  (a tym samym i każdy inny punkt planu prędkości prostopadłych) nakrywa się z biegunem O. Przy pomocy planu prędkości prostopadłych można wyznaczyć siły wewnętrzne w kratownicy, a także określić, czy nie zachodzi jej wewnętrzna ruchomość (por. str. 528 i 550).

Łańcuchem wodzonym  $n$ -tego stopnia nazywamy ustrój płaski, składający się z tarcz sztywnych (str. 527), połączonych ze sobą przegubowo, posiadający o  $n$  prętów mniej niż wymaga tego warunek  $p = 3t + 2w$ . Np. opuszczając w belec (rys. 42a) pręt  $ab$  otrzymujemy łańcuch wdzony pierwszego stopnia (rys. 42b), opuszczając pręty  $eb$  i  $cd$  łańcuch wdzony 2 stopnia (rys. 42c). Pręty sztywne są tu równoważne z tarczami sztywnymi.

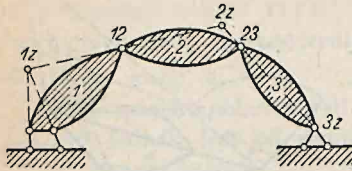
Łańcuch wdzony 1 stopnia ma pojedynczą wolność ruchu, jeżeli bowiem jednemu jego elementowi nadamy jedno określone (jakiekolwiek) przesunięcie, to wszystkie punkty łańcucha są zmuszone do ruchu na określonych drogach. Podczas takiego ruchu każda tarcza sztywna odbędzie obrót około pewnego bieguna tak wzglę-



Rys. 42

dem stałej ziemi, jako też około biegunów względnych względem innych tarcz łańcucha wodzonego.

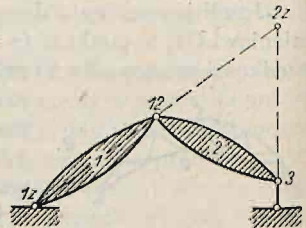
Tarcze sztywne, połączone ze sobą (lub z zawsze sztywną i stałą ziemią) przy pomocy przegubu istotnego lub urojonego (dwa pręty)



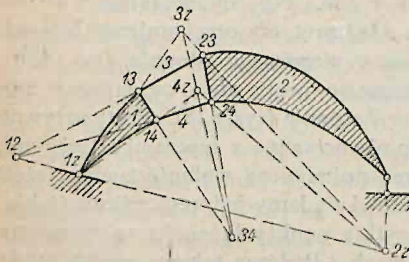
Rys. 43

obracają się względem siebie około tego bieguna, por. rys. 43, gdzie (1z), (3z) oznaczają bieguny obrotu tarcz 1 i 3 względem stałej ziemi, zaś (12), względnie (23), bieguny obrotu tarcz względem siebie. Przy przegubach urojonych biegun w każdej chwili znajduje się

w punkcie przecięcia odpowiednich prętów, podczas obrotu przesuwa się i biegun; dlatego w danej chwili nazywamy go chwilowym biegunem obrotu (por. 1z na rys. 43). Tak samo chwilowym biegunem obrotu tarczy 2 względem ziemi na rys. 43 jest punkt (2z) przecięcia prostej (1z) (12), oraz (3z) (23) zaś na rys. 44 punkt (2z) przecięcia prostej (1z) (12) z prętem podporowym 3. W ogóle na jednej prostej leżą wszystkie trzy bieguny trzech którychkolwiek tarcz względem siebie, np. dla tarcz  $m, n, z$ , bieguny ( $m n$ ) ( $m z$ ) i ( $n z$ ). Jeżeli zatem znane są np. bieguny ( $m n$ ) i ( $n z$ ), to biegun ( $m z$ ) (oznaczony dwiema literami, nie powtarzającymi się w obu tych biegunach — litera  $n$  powtarza się w obu) leżeć musi na prostej ( $m n$ ) ( $n z$ ).



Rys. 44



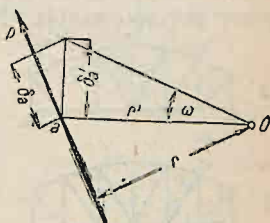
Rys. 45

Na rys. 45 chwilowym biegunem obrotu tarczy 1 względem 2 jest punkt (12) na przedłużeniu prętów 3 i 4. Biegun obrotu (2z) znajdziemy w punkcie przecięcia prostej (1z) (12) z przedłużeniem prawego pręta podporowego. Biegun (3z) leżeć

musi w punkcie przecięcia prostych (13) (14) i (23) (24). Kontrola: bieguny (34), (4z) i (3z) muszą leżeć na jednej prostej.

Jeżeli przegub  $G$  jest w równowadze, to gdybyśmy pomysłili sobie dowolne nieskończenie małe przesunięcie ( $\delta_g$ ) przegubu (przesunięcie przygotowane), to praca sił  $G_i$  zaczepiających w przegubie byłaby równa iloczynowi przesunięcia ( $\delta_g$ ) przez rzut wypadkowej sił na ( $\delta$ ), albo co na jedno wychodzi sumie iloczynów sił  $G$  przez rzuty przesunięcia na kierunki tych sił. Ale wypadkowa sił będących w równowadze jest równa zeru, więc i praca tych sił na przesunięciu przygotowanym czyli praca przygotowana  $\sum G_i \delta_i = 0$ , przy czym  $\delta_i$  jest rzutem przesunięcia  $\delta_g$  na kierunek siły  $G_i$ .

Jeżeli tarcza łańcucha wodzonego, niezależnie od badanych sił działających na nią, wykona obrót o niezmiernie mały kąt  $\omega$  około swojego bieguna  $O$ , to dowolny punkt tarczy  $a$  (rys. 46), którego odległość od bieguna wynosi  $r'$ , wykona przesunięcie  $\delta'_a = \omega r'$ . Przesunięcie to nazywamy przesunięciem wirtualnym (tj. możliwym) albo przygotowanym. Jeżeli rzut tego przesunięcia na kierunek siły  $P$ , działającej w  $a$ , jest  $\delta_a$ , zaś ramię tej siły względem bieguna  $O$  jest  $r$ , to  $\delta_a = \omega r$ . Iloczyn  $P \delta_a$  nazywamy pracą przygotowaną siły  $P$ .



Rys. 46

Jeżeli tarcza jest w równowadze, to praca przygotowana sił  $P$ , działających na tę tarczę  $L = \sum \omega Pr = \omega \sum (Pr) = 0$ , gdyż  $\sum (Pr)$  jako moment statyczny sił  $P$ , będących w równowadze, jest równa 0. Jeżeli dowolny punkt łańcucha wodzonego dozna pewnego niezmiernie małego przesunięcia możliwego, to wszystkie tarcze łańcucha wykonają obrót niezmiernie mały, każda około swojego bieguna, a siły działające na łańcuch wykonają pracę przygotowaną  $\sum Q\delta$ . Jeżeli łańcuch (a więc i każda jego tarcza) jest w równowadze, to praca sił zaczepiających na każdej tarczy jest równa zeru.

Jeżeli tarcza jest w równowadze, to praca przygotowana sił  $P$ , działających na tę tarczę  $L = \sum \omega Pr = \omega \sum (Pr) = 0$ , gdyż  $\sum (Pr)$  jako moment statyczny sił  $P$ , będących w równowadze, jest równa 0. Jeżeli dowolny punkt łańcucha wodzonego dozna pewnego niezmiernie małego przesunięcia możliwego, to wszystkie tarcze łańcucha wykonają obrót niezmiernie mały, każda około swojego bieguna, a siły działające na łańcuch wykonają pracę przygotowaną  $\sum Q\delta$ . Jeżeli łańcuch (a więc i każda jego tarcza) jest w równowadze, to praca sił zaczepiających na każdej tarczy jest równa zeru.

Na tarczę działają oprócz sił zewnętrznych  $P$  jeszcze oddziaływania przegubów  $G$  i ewentualnie podpór  $C$ . Jeżeli pracę przy-

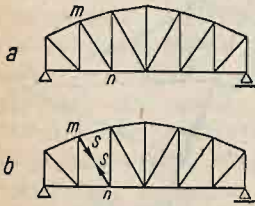
gotowaną oddziaływań podpór nazwiemy  $L_c$ , oddziaływań przegubowych  $L_G$ , sił zewnętrznych  $L_p$ , to dla każdej tarczy jest  $L_p + L_c + L_G = 0$ , więc dla wszystkich tarcz łańcucha jest  $\Sigma L_p + \Sigma L_c = \Sigma L = 0$ . Przesunięcia łożysk stałych są równe zeru, zaś przesunięcia łożysk ruchomych są prostopadłe do kierunku oddziaływań, zatem  $\Sigma L_c = 0$ . Ponieważ każdy przegub jest w równowadze więc  $\Sigma L_G = 0$ .

Wobec tego:

$$\Sigma L_p = \Sigma P_m \delta_m = 0 \quad (51)$$

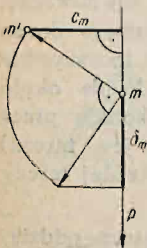
Praca przygotowana sił zewnętrznych (wylączając oddziaływania), działających na łańcuch wodzony, jest równa zeru. (Zasada pracy przygotowanej).

Na tej zasadzie można obliczyć siłę wewnętrzną w dowolnym przecie kratownicy statycznie wyznaczalnej. Należy tylko kratownicę zamienić na łańcuch wodzony przez opuszczenie badanego pręta ( $m n$  na rys. 47) i zastąpienia go dwiema siłami  $S$ , zaczepiającymi w węzłach, w których był osadzony, a działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli był rozciągany (rys 47) i przez udzielenie temu łańcuchowi możliwego niezmiernie małego odkształcenia. Jeżeli przyrost odległości węzłów opuszczonego pręta, mierzony w kierunku tego pręta, jest  $\Delta s$ , to praca sił  $S$  jest  $- S \Delta s$ . Równanie (51) będzie wtedy brzmieć:  $\Sigma P_m \delta_m = S \Delta s$



Rys. 47

$$\text{a stąd: } S = \frac{\Sigma P_m \delta_m}{\Delta s} \quad (52)$$



Rys. 48

Można też siłę  $S$  wyznaczyć przy pomocy planu przesunięć (prędkości) prostopadłych. Jeżeli  $m'$  (rys. 48) jest przesunięciem prostopadłym punktu  $m$ , zaś odległość  $m'$  od kierunku siły  $P$ , zaczepiającej w  $m$ , jest  $c_m$ , to  $\delta_m = c_m$ , zatem prawo pracy przygotowanej (równ. 51) można wyrazić też w formie:

$$\Sigma P_m c_m = 0 \quad (53)$$

Rys. 49 jest przykładem zastosowania ostatniego równania. Wyznamy mianowicie napięcie  $S$  w przecie  $ab$  pod obciążeniem  $P_m, P_n$ .

Plan przesunięć prostopadłych tarczy I obieramy w jej biegunie  $A$ , zatem punkty  $S', a', n'$  leżą w  $A$ .

Punkt  $B'$  leży na pionowej podpory  $B$  i na prostej  $S'B' \parallel SB$ .

Punkt  $b'$  leży na prostych  $S'b' \parallel Sb$  oraz  $B'b' \parallel Bb$ .

Punkt  $m'$  leży na prostej  $S'm' \parallel Sm$  oraz  $b'm' \parallel bm$  gdyż czworobok  $S'B'm'b' \sim SBmb$  (por. rys. 41).

Uważając kierunek wskazówek zegara za dodatni dla iloczynów  $P_m c_m$ , mamy równanie  $P_m c_m + P_n c_n + S c_a - S c_b = 0$

czyli:

$$S (c_b - c_a) = P_m c_m + P_n c_n.$$

Jeżeli odległość węzłów  $a'$  i  $b'$ , mierzona na prostopadłej do  $ab$ , nazwiemy  $c_b - c_a = e$ .

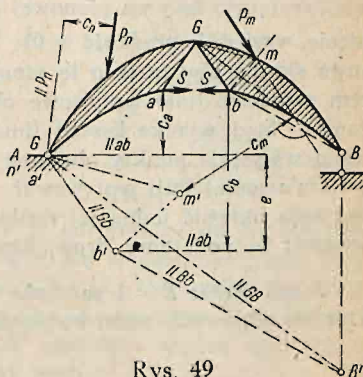
$$\text{to: } S = \frac{P_m c_m + P_n c_n}{e} = \frac{\sum Pc}{e} \quad (54)$$

### 8. Linie wpływowe.

Dla siły  $P = 1$  pionowej i poruszającej się po belce otrzymujemy według równań (52 lub 54):

$$S = \frac{1 \cdot \delta_m}{\Delta s} \quad (55)$$

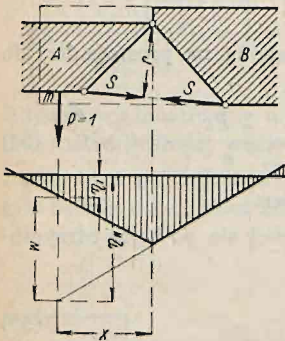
względnie  $S = \frac{1 \cdot c_m}{e}$ . Siła wewnętrzna w przecie  $ab$  jest zatem wprost proporcjonalna do przesunięcia pionowego, względnie pionowej składowej prędkości danego punktu łańcucha wodzonego, zaś linia przesunięć (linia prędkości) tegoż ze współczynnikiem  $\frac{1}{\Delta s}$  jest linią wpływową siły  $S$ .



Rys. 49

Pionowe przesunięcia poszczególnych punktów każdej tarczy wchodzącej w skład łańcucha wodzonego wynoszą  $x_m \cdot \omega$ , gdzie  $\omega$  jest prędkością kątową (względnie kątem obrotu), zaś  $x_m$  odstępem poziomym punktów tarczy od bieguna obrotu. W linii przesunięć odpowiada każdej tarczy linia prosta, tym samym zaś linia wpływowa dla każdej tarczy jest prostą, której punkt zero (obojętny) leży na pionowej bieguna ( $x_m = 0$ , więc i przesunięcie, względnie prędkość = 0). Biegun względny dwu tarcz przesuwa się dla obu tarcz o tę samą wielkość. Muszą się w nim zatem przecinać linie wpływowe obu tarcz (względnie ich przedłużenia). Stąd wynika kształt linii wpływowej: określone są bowiem wszystkie punkty obojętne oraz wszystkie punkty przecięcia (załamania) linii wpływowej. Dla jej całkowitego określenia potrzeba określić jedną jej rzędną. Uczynić to można paru sposobami; tu podajemy drogę kinematyczną oznaczenia rzędnych.

Jeżeli ciężar  $P = 1$  zaczepia w punkcie  $m$  tarczy  $A$  (rys. 50), któremu odpowiada pionowe przesunięcie  $\delta_I$ , to wedł. równania (55)



Rys. 50

$$S_I = \frac{1 \cdot \delta_I}{\Delta s} = \eta_I. \text{ Gdyby punkt } m \text{ był}$$

sztywnie złączony z tarczą  $B$ , to jego przesunięcie pionowe byłoby  $\delta_{II}$ , a siła wewnętrzna w badanym przecię  $s$  by-

$$\text{laby } S_{II} = \frac{1 \cdot \delta_{II}}{\Delta s} = \eta_{II}. \text{ Różnica tych}$$

$$\text{sił } S_{II} - S_I = \frac{\delta_{II} - \delta_I}{\Delta s} = \frac{\Delta \delta}{\Delta s} \text{ równa}$$

się różnicy rzędnych prostych wpływowych, odpowiadających tarczom  $A$  i  $B$ , zatem

$$\frac{\Delta \delta}{\Delta s} = \eta_{II} - \eta_I = w, \text{ czyli pionowemu odstępowi obu prostych w } m.$$

Jeżeli obie tarcze łączy pręt badany, to względny obrót obu tarcz  $\Delta \alpha = \Delta s : r$ , gdzie  $r$  jest odstępem wzajemnego bieguna ( $AB$ ) od pręta  $s$ .

Przyrost pionowego przesunięcia jest oczywiście :

$$\Delta\delta = x\Delta\alpha = \frac{x\Delta s}{r}, \quad (56)$$

stąd:

$$w = \frac{\Delta\delta}{\Delta s} = \frac{x}{r} \quad (57)$$

Jeżeli  $x = r$ , to  $w = 1$ .

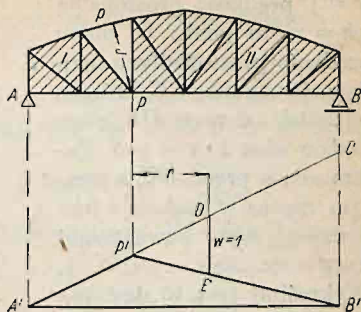
Mając np. znaleźć linię wpływową siły wewnętrznej w przęcie  $p$  kratownicy  $AB$  (rys. 51), postępujemy w sposób następujący: przez opuszczenie pręta  $p$  powstaje łańcuch wodzony, złożony z dwu tarcz I i II, których wspól-

ny biegun znajduje się w węźle  $P$  w odległości  $r$  od  $p$ . Na pionowej punktu  $P$ , tj. w  $P'$  przecinają się zatem obie proste linii wpływowej, odpowiadające tarczom I i II. Wykreślmy dowolną prostą  $A'P'C$ . W odległości poziomej  $r$  od punktu  $P'$  tej prostej odetnijmy  $DE = 1$ ; prosta  $P'E B'$  ogranicza rzędne linii wpływowej na długości  $PB$ . Ponieważ biegun tarczy I jest w  $A$ , zaś biegun tarczy II leży na pionowej podpory  $B$ , więc rzędne linii wpływowej w  $A$  i  $B$  są równe zero. Zatem przez punkty  $A'$  i  $B'$ , leżące na pionowych podporowych przechodzi zamykająca.

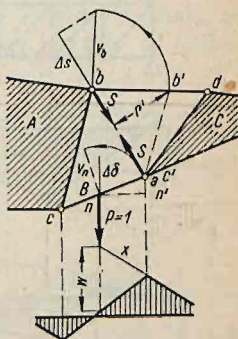
W przypadku, jak na rys. 52, znajdziemy względne pionowe przesunięcie punktu  $n$  tarczy  $B$  względem punktu  $a$  tarczy  $C$ , jeżeli, uważając tarczę  $C$  za nieruchomą, udzielimy punktowi  $n$  przesunięcia prostopadłego  $na$ ; wtedy i punkt  $C$  wpadnie w  $a$ , punkt  $b'$  leży na  $c'b' \parallel cb$ , zaś ramię  $r' \perp ab$  jest równe  $\Delta s$  (por. rys. 48), a składową pionową przesunięcia jest  $nn' = x = \Delta s$ , czyli według równania: (54) i (57).

$$S = \frac{1 \cdot x}{r'} = w \quad (58)$$

Linię wpływową siły wewnętrznej w przęcie  $ED$  belki  $AB$  (rys. 53) znajdujemy w sposób następujący: Opuszczając pręt  $ED$  otrzymamy łańcuch wodzony I stopnia, złożony z tarcz I i III i prętów II i IV. Uważając tarczę I za nieruchomą, udziel-

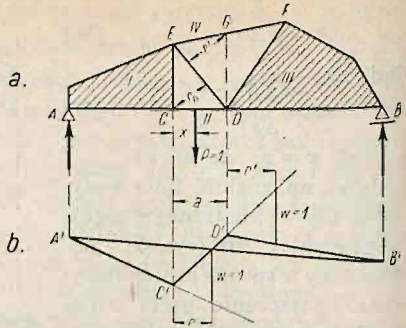


Rys. 51



Rys. 52

my punktowi  $n$  zaczepienia  $P = 1$  prędkość prostopadłą  $cn = x$ , to punkt  $D'$  planu prędkości prostopadłych znajdzie się w punkcie  $C$ , którego odległość od pręta  $DE$  jest  $r$ . Będzie więc  $1 \cdot x = r \cdot S$ . Zatem siła w pręcie  $DE$ , a zarazem rzędna w punkcie  $n$  linii wpływu siły wewnętrznej  $S = w \cdot x : r$ . Dla  $x = r$  jest  $w = 1$ . Wykreślmy (rys. b) dowolną prostą  $AC$ . Z punktu  $C$  (na pionowej p-ktu  $C$ ) wykreślmy  $C'D'$  tak, aby rzędna między  $A'C'$  a  $C'D'$  w odległości  $r$  od  $C'$  wynosiła  $w = 1$ , to linia łamana  $A'C'D'$  odpowiada długościom  $AC$  i  $CD$ . Odpowiednio do rys. 52 wykreślmy  $DG \parallel CE$ , z punktu  $G$  zaś prostą  $r' \perp ED$  (rys. 53).



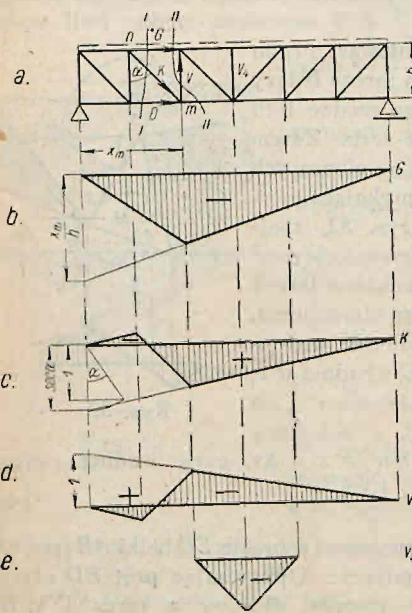
Rys. 53

Z punktu  $D'$  wykreślmy prostą  $D'B'$  tak, aby rzędna pomiędzy  $C'D'$  i  $D'B'$  w odległości  $r'$  od  $D'$  wynosiła  $w = 1$ , to  $D'B'$  odpowiada długości  $DB$ . Zamykającą jest prosta  $A'B'$ .

4) Belka wolno podparta.

a. Belki o pasach równoległych. Prowadząc przekrój  $I-I$  na rys. 54a otrzymujemy  $Gh + M_m = 0$ , oraz  $Dh - M_n = 0$ ; a stąd:

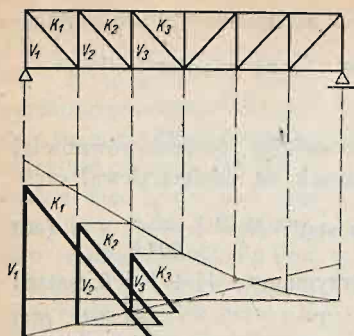
$$\left. \begin{array}{l} \text{siłę w pasie górnym:} \\ G = - \frac{M_m}{h} \\ \text{siłę w pasie dolnym:} \\ D = + \frac{M_n}{h} \end{array} \right\} (59)$$



Rys. 54



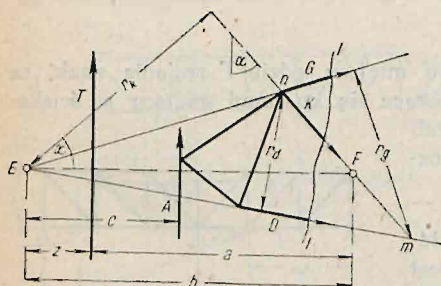




Rys. 56

ko ścięga (krata  $N$ ; rys. 55 i 56), aby uniknąć długich prętów ścisanych. Belkom drewnianym natomiast dajemy często kratę prostokątną z zastrzałami (mosty Rychtera). Krata równoramienna (krata  $V$ ) jest niewygodna ze względów konstrukcyjnych (trudność przytwierdzenia poprzecznic i znaczny ich odstęp) używana najczęściej w połączeniu ze słupami (rys 59), albo z drugorzędnym podparciem (por. niżej).

b. *Belki o pasach nierównoległych.* Z równania momentów ze względu na punkt  $m$  (rys. 57):  $M_m = G r_g = 0$



Rys. 57

otrzymamy dla pasa górnego:

$$G = - \frac{M_m}{r_g}$$

Analogicznie dla pasa dolnego:

$$D = + \frac{M_n}{r_d}$$

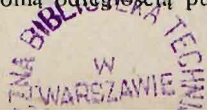
(62)

Linie wpływowe sił wewnętrznych w pasach są liniami wpływowymi momentów dla punktów  $m$  i  $n$  ze współczynnikiem  $-\frac{1}{r_g}$ , względnie  $+\frac{1}{r_d}$ .

Z równania momentów ze względu na punkt przecięcia się pasów  $E$ :  $\mp T_z + K r_k = 0$  otrzymamy:

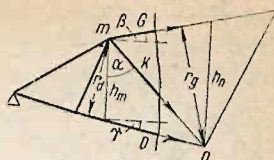
$$K = \pm T \frac{2}{r_k} = \pm T \frac{2}{b} \frac{1}{\cos a} = \pm Y \frac{1}{\cos a}, \quad (63)$$

gdzie  $b = EF$  jest poziomą odległością punktu  $E$  od krzyżula  $K$ ,  $c$



zaś  $\alpha$  kątem odchylenia krzyżulca od pionu  $Y$  nazywamy sprowadzoną siłą poprzeczną. Jeżeli po lewej stronie przekroju nie ma żadnej siły zewnętrznej prócz oddziaływania  $A$ , to:

$$K = \pm A \frac{c}{b \cos \alpha} \quad (64)$$



Rys. 58

Jeżeli wypadkowa sił zewnętrznych na lewo od danego przekroju (rys. 58) jest pionowa, to suma rzutów sił  $G$ ,  $K$  i  $D$  na poziom jest  $= 0$ , więc:  $G \cos \beta + D \cos \gamma + K \sin \alpha = 0$

$$\text{stad: } K \sin \alpha = - \left( - \frac{M_n}{r_g} \cos \beta + \frac{M_m}{r_d} \cos \gamma \right)$$

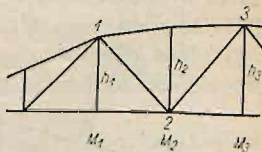
$$\text{czyli: } K = \left( \frac{M_n}{h_n} - \frac{M_m}{h_m} \right) \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\text{więc: } K > 0, \text{ jeżeli } \frac{M_n}{h_n} > \frac{M_m}{h_m}. \quad (65)$$

Przekątna jest zatem rozciągana, gdy spada w stronę, dla której  $\frac{M}{h}$  jest większe. Jeżeli np.  $\frac{M_1}{h_1} < \frac{M_2}{h_2} < \frac{M_3}{h_3}$  (rys. 59), to rozciągana jest przekątna 1 — 2, zaś ściskana 2 — 3 (tj wznosząca się ku większemu  $\frac{M}{h}$ )

Jeżeli zaś wysokości belki (mierzone w węzłach) są wszędzie proporcjonalne do momentów, tj. jeżeli  $\frac{M_n}{h_n} = \frac{M_{n+1}}{h_{n+1}} = \dots$

to siła wewnętrzna w przekątnych  $= 0$ . Ponieważ wielobok momentów (linia sznurowa) dla obciążenia całkowitego jednostajnego jest parabolą, przeto dla tegoż całk. jednost. obciążenia siły wewnętrzne w przekątnych belki parabolicznej zbieżnejszą równo zeru, siła wewnętrzna w pasie prostym jest stała, w pasie zakrzywionym mało zmienna, wygodnie jest nieraz wykorzystać to przy obciążeniu stałym w ogóle, zwłaszcza symetr, wykonując jeden pas

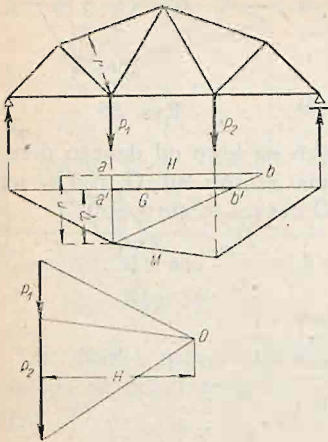


Rys. 59

kratownicy o kształcie linii momentów a drugi prosty. Dla dwu ciężarów symetrycznych odpowiedni jest trapezowy kształt kratownicy.

Jeżeli wielobok momentów znaleźliśmy wykreślnie (rys. 60), to  $M = H\eta$ , gdzie  $\eta$  jest rzędną wieloboku momentów, zaś  $H$  odlegością biegunową. Wtedy siła w pasie np górnym:

$$G = -\frac{M}{r} = -\eta \frac{H}{r}$$



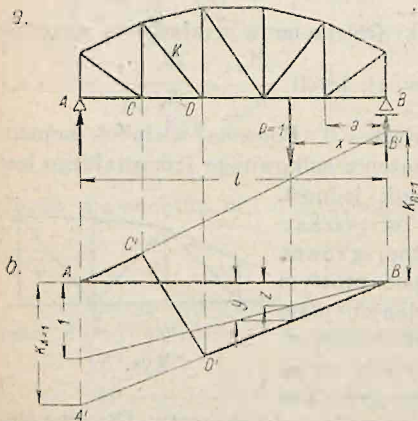
Rys. 60

Odnieśmy na odpowiedniej rzędnej  $\eta$  długość  $r$ , zaś z  $a$  długość  $ab = H$ , to prosta  $a'b'$  przedstawia szukaną wielkość siły  $G$ .

Linie wpływowe belek o pasach nierównoległych najlepiej wyznaczyć metodą „oddziaływań = 1” (rys. 61, 62 i 63). Jeżeli  $P = 1$  stoi na prawo od prawej poprzecznicy  $D$ , w odległości  $x$  od  $B$  (rys. 61), to  $A = \frac{x}{l} = z$  (rys. b), zaś siła wewnętrzna  $K = y$ . Oznaczmy

$K_{A=1}$  siłę w przęcie  $K$  wskutek  $P = \frac{l}{x}$ , czyli  $A = 1$ . Jeżeli  $AA_1 = K_{A=1}$ , to odcinek  $BD$  prostej  $BA_1$  jest linią wpływową dla

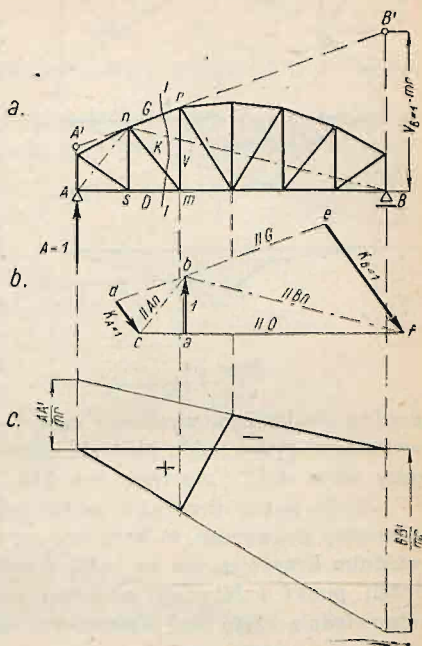
g.



Rys. 61

$K$  na długości  $DB$ , ponieważ siła  $K$  jest proporcjonalna do  $A$  (o ile  $P$  jest na prawo od  $D$ ). Podobnie, odcinając  $BB_1 = K_{B=1}$ , otrzymamy linię wpływową na długości  $AC$ . Na długości  $CD$  linią wpływową jest  $C'D'$ . Jeśli chcemy mieć linie wpływowe wszystkich przętek, najlepiej wyznaczyć wielkości  $K_{A=1}$  i  $K_{B=1}$ , przy pomocy planu sił (Cremony) dla  $A = 1$  i siły  $P = \frac{l}{x}$  w przedostatnim węźle oraz dla  $B = 1$

(o ile belka jest niesymetryczna). Jeżeli chodzi tylko o jeden pręt, to najlepiej znaleźć  $K_{A=1}$  i  $K_{B=1}$  metodą Culmana (rys. 62). Siły  $D, K, G$  i  $A=1$ , działając na lewą część odciętej przekrojem  $l-l$ , są w równowadze. Wypadkowa sił  $D$  i  $A=1$  przechodzi przez punkt  $A$  i nakrywa się z wypadkową sił  $G$  i  $K$ , przechodzącą przez  $n$ . Jeżeli (rys. b)  $ab=1=A$ ,  $ac \parallel D$ , to  $bc \parallel An$  jest wypadkową sił  $G$  i  $K$ . Jeżeli  $bd \parallel G$  i  $cd \parallel K$ , to  $cd = K_{A=1}$  i jest dodatnie, gdyż działa od węzła  $n$ . Podobnie  $ef = K_{B=1}$  i jest ujemne, gdyż działa do węzła  $n$  (odciętej prawej części belki). Jeżeli pręt  $nr$  przedłużymy na obie strony aż do przecięcia się z pionowymi podporowymi, to z uwagi na podobieństwo czworoboków  $mr A'A$  i  $mr B'B$  z odpowiednimi czworobokami Culmana jest  $AA' = -V_{A=1} \cdot m r$

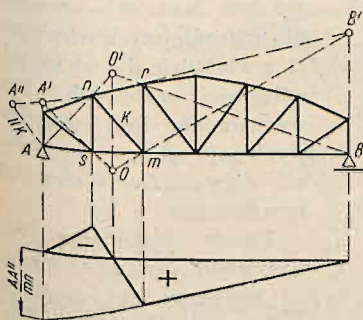


Rys. 62

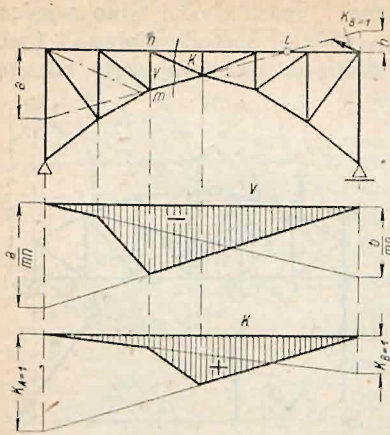
i  $BB' = V_{B=1} \cdot m r$  (por. rys. 62c, linia wpływowa dla słupa  $mr$ ).

Linie wpływowe pasów belek wolno podpartych mają na całej swej długości ten sam znak, więc pasy są zawsze ściskane lub rozciągane.

Linie wpływowe krzyżulców (przekątnych i słupów) mają punkt obojętny i składają się z dwu gałęzi o różnych znakach, gdy punkt przecięcia odpowied-



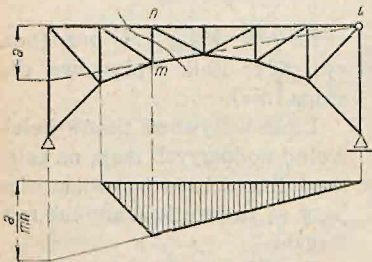
Rys. 63



Rys. 64

punkt obojętnego, wystarczy nawet dla belek niesymetrycznych wyznaczyć tylko jeden plan sił, albo tylko  $K_{A=1} = A A'' : mn$ , przy czym  $AA'' \parallel mn$  (por. rys. 63).

Jeżeli punkt przecięcia odpowiednich pasów  $i$  znajduje się pomiędzy podporami, to linia wpływa siły wewnętrznej w odpowiednim krzyżulec ma na całej długości ten sam znak (rys. 64). Jeżeli punkt  $i$  leży na pionowej podpory  $A$ , względnie  $B$ , to odpowiednia część linii wpływowej spada do zera (rys. 65).



Rys. 65

Jeżeli punkt przecięcia odpowiednich pasów  $i$  znajduje się pomiędzy podporami, to linia wpływa siły wewnętrznej w odpowiednim krzyżulec ma na całej długości ten sam znak (rys. 64). Jeżeli punkt  $i$  leży na pionowej podpory  $A$ , względnie  $B$ , to odpowiednia część linii wpływowej spada do zera (rys. 65).

*c* Belka kratowa równoległa z drugorzędym podporciem (rys. 66). używana dla znaczniejszych rozpiętości, a właściwie dla większych odległości węzłowych. Dla wyznaczenia linii wpływowych najwygodniej wyodrębnić drugorzędny system od zasadniczego.

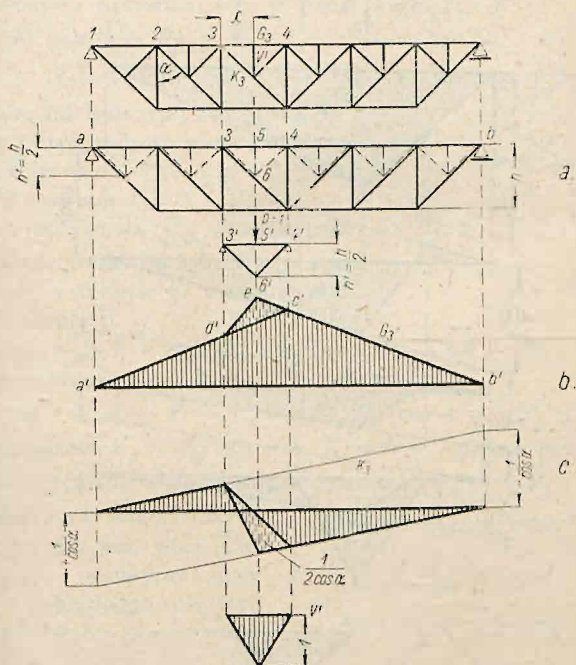
Celem znalezienia linii wpływowej pasa np.  $G$ , z podporciem drugorzędym (tu górnego) wyznacza się najpierw linię wpływową  $a' b' c'$  dla układu zasadniczego. Dla układu drugorzędowego 3 - 6 - 4 - 5 (rys. 66 a) jako dźwigara samodzielnego, obciąż

żonego siłą  $P = 1$  w 5' otrzymujemy siłę dodatkową w pasie górnym  $G_3'$  o wielkości

$$G_3' = -\frac{M'}{h'} = -\frac{1/2\lambda \cdot 1}{1/2h} = -\frac{\lambda}{h}.$$

Wielkość  $\frac{\lambda}{h}$  przedstawia jednak wysokość trójkąta  $c'd'e$ , a stąd wynika kształt linii wpływowej, podany na rys. 66.

Dla górnej części przekątnej głównej otrzymujemy siłę dodatkową  $K_3'$  o wielkości  $+\frac{1}{2\cos\alpha}$  (przez rozłożenie oddziaływania

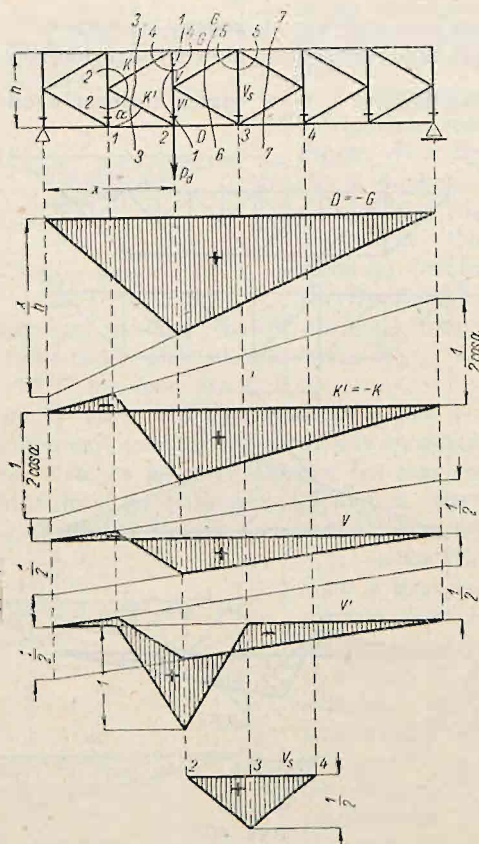


Rys. 66

$\frac{1}{2}$  na  $G_3'$  i  $K_3'$ , por. rys. 66 c). Linia wpływowa pręta  $V'$  jest trójkątem (rys. 66 d). W pasie dolnym, w słupach głównych i w dolnych częściach przekątnych siły (i linie wpływowe) są takie same jak dla belki bez podparcia drugorzędowego.

d. Belka równoległa o kracie półprzeką'niowej (kracie K, rys. 67). Ustawiając dla przekroju 1-1 równanie momentów względem punktu 2.:  $Gh + M = 0$ , otrzymamy:

$$G = -\frac{M}{h}, \quad \text{podobnie: } D = +\frac{M}{h} \quad (66)$$



Rys. 67

Dla przekątnych otrzymujemy, prowadząc przekrój 2-2 i ustawiając równanie  $\Sigma H = 0$ :

$$K \sin \alpha + K' \sin \alpha = 0, \quad \text{a więc: } K = -K' \quad (67)$$



Dla przekroju 3-3 i równania  $\Sigma V = 0$ :

$$K \cos \alpha - K' \cos \alpha + T = 0$$

$$\text{a stąd: } K = -\frac{T}{2 \cos \alpha}, \quad K' = +\frac{T}{2 \cos \alpha}. \quad (68)$$

Dla przekroju 4-4 i  $\Sigma V = 0$ :

$$V + K \cos \alpha = 0 \quad V = -K \cos \alpha = +\frac{1}{2}T. \quad (69)$$

Linie wpływowe wszystkich tych sił są zatem liniami wpływowymi momentu zginającego, względnie siły poprzecznej, z odpowiednimi współczynnikami.

Siłę wewnętrzną w części słupa  $V'$  (pomost na pasie dolnym) znajdziemy z równania  $\Sigma V = 0$  dla węzła 2:

$$V' + K' \cos \alpha + P_d = 0,$$

$$V' = -\frac{1}{2}T + P_d \quad (70)$$

Zatem od linii wpływowej dla  $T \cdot \frac{1}{2}$  należy odjąć linię wpływową siły węzłowej  $P_d$  (rzędna = 1 w węźle 2, rzędna = 0 w węzłach 1 i 3).

Linie wpływową  $V_s$  otrzymujemy, prowadząc przekroje 5, 6 i 7; z warunku  $\Sigma V = 0$  (rys. 67 i 68) wynika:

dla przekroju 6

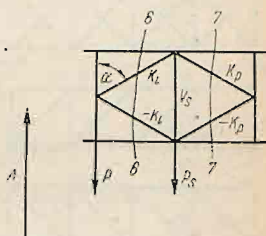
$$2K_l \cos \alpha + P - A = 0, \quad K_l \cos \alpha = \frac{1}{2}(A - P)$$

dla przekroju 7

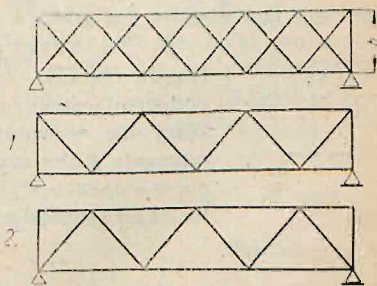
$$2K_p \cos \alpha + A - P - P_s = 0, \quad K_p \cos \alpha = \frac{1}{2}(P + P_s - A)$$

a ponieważ:  $V_s = K_l \cos \alpha + K_p \cos \alpha$  przeto podstawiając wyżej otrzymane wartości otrzymujemy:  $V_s = \frac{1}{2}P_s$  (71)

c. *Belka o kratce wielokrotnej* (rys 69) jest właściwie statycznie niewyznaczalna i dla dokładnego obliczenia jej trzeba wprowadzić równania sprężystości. Dla celów praktycznych jednak używamy metody przybliżonej. Kratownicę  $n$ -krotną rozkładamy na  $n$  kratownic pojedynczych, z których każda dźwiga  $n$ -tą część obciążenia.



Rys. 68



Rys. 69

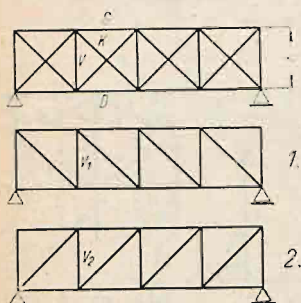
Siła w pasie dla każdej kraty pojedynczej:  $S_i = \frac{M}{n h}$ , czyli razem:

$$S = \sum_1^n \frac{M}{n h} = \frac{M}{h} \quad (72)$$

Siła wewnętrzna w krzyżulcu:

$$K = \frac{1}{n} \cdot \frac{T}{\cos \alpha} \quad (73)$$

Wykres linii wpływowych odbywa się również na podstawie rozdziału kraty  $n$ -krotnej na  $n$  krat pojedynczych.



Rys. 70

f. *Belka o kracie złożonej.*

a) Bez sztucznego naprężenia. Jest to krata, posiadająca słupy przekątne, spadające w dwóch kierunkach. Jest ona statycznie niewyznaczalna, ale liczymy ją w przybliżeniu, jak kratę z przekątnymi, spadającymi w lewo oraz na kratę z przekątnymi, spadającymi w prawo (rys. 70).

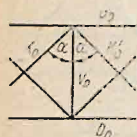
Wtedy siła w krzyżulcach:

$$K = \frac{T}{2 \cos \alpha} \quad (74)$$

w pasach:

$$S = \frac{M}{h} \quad (75)$$

Słup  $V$  w kracie pierwszej jest ściskany, w kracie drugiej rozciągany i w rezultacie niesie tylko różnicę ciężarów węzłowych  $V = P_d - P_g$ , jest więc rozciągany, gdy pomost jest dołem, zaś ściskany gdy pomost jest górą.



Rys. 71

$\beta$ ) Ze sztucznym naprężeniem (belka Howe'a rys. 71). Jeżeli w belce kratowej złożonej, podpartej jeszcze rusztowaniem tak, że ciężar własny kraty nie wywołuje sił w prętach, naciągniemy sztucznie śruby, czyli spowodujemy sztuczne napięcia w słupkach  $V_o$ , to powstaną we wszystkich prętach kraty sztuczne siły wewnętrzne, a mianowicie:

w krzyżulcach:

$$K'_o = K''_o = - \frac{V_o}{2 \cos \alpha} \quad (76)$$

zaś w pasach:

$$G_o = D_o = -K_o \sin \alpha = \frac{1}{2} V_o \operatorname{tg} \alpha \quad (77)$$

Możemy wywołać tak wielkie rozciąganie  $V_o$ , aby  $K$  i  $K'$  były zawsze ściskane, tj. takie, aby dla najniekorzystniejszego obciążenia ruchomego była siła w odstrzale  $K' = 0$ . Odstrzałem nazywamy ten zastrzał, który zasadniczo jest rozciągany. Musi więc być  $V_o = T_{max}$ . Wówczas największa siła w zastrzale  $K$  osiąga taką wartość, jak gdyby odstrzałów nie było, czyli

$$K_{max} = T_{max} \sec \alpha, \quad (78)$$

więc dwa razy większą aniżeli w kracie złożonej bez sztucznego naprężenia.

Największa siła w pasie dolnym:

$$D_{max} = \frac{M}{h} + \frac{1}{2} V_o \operatorname{tg} \alpha = \frac{M_{max}}{h} + \frac{1}{2} T_{max} \operatorname{tg} \alpha \quad (79)$$

Największa siła w pasie górnym:  $G_{max} = -\frac{M_{max}}{h}$ , jeżeli

opuścimy dla większej pewności wpływ naciągnięcia śrub.

### 10 Belki ciągle przegubowe.

Linie wpływowe prętów belki wiszącej  $CD$  są takie same, jak belki wolno podpartej na podporach  $C$  i  $D$  (rys. 72b).

Jeżeli ciężar  $P = 1$  znajduje się pomiędzy  $A$  i  $B$ , to we wszystkich prętach pomiędzy  $A$  i  $B$  siły wewnętrzne są takie same, jak dla belki wolno podpartej  $AB$ , natomiast we wszystkich prętach na prawo od  $B$  siły wewnętrzne  $= 0$ . Dla prętów, znajdujących się na prawo od  $B$ , linia wpływowa nie posiada przeto gałęzi na długości  $AB$ . Dla prętów pomiędzy  $A$  i  $B$  linia wpływowa na długości  $AB$  jest taka, jak dla belki wolnopodpartej  $AB$ , zaś na długości  $BD$  rzędne jej są proporcjonalne do rzędnych linii wpływowej oddziaływania  $A$  (trójkąt o podstawie  $BD$  o wierzchołku w  $C$ , por. linię wpływową  $G_1$  i  $K$  rys. 72c i d).

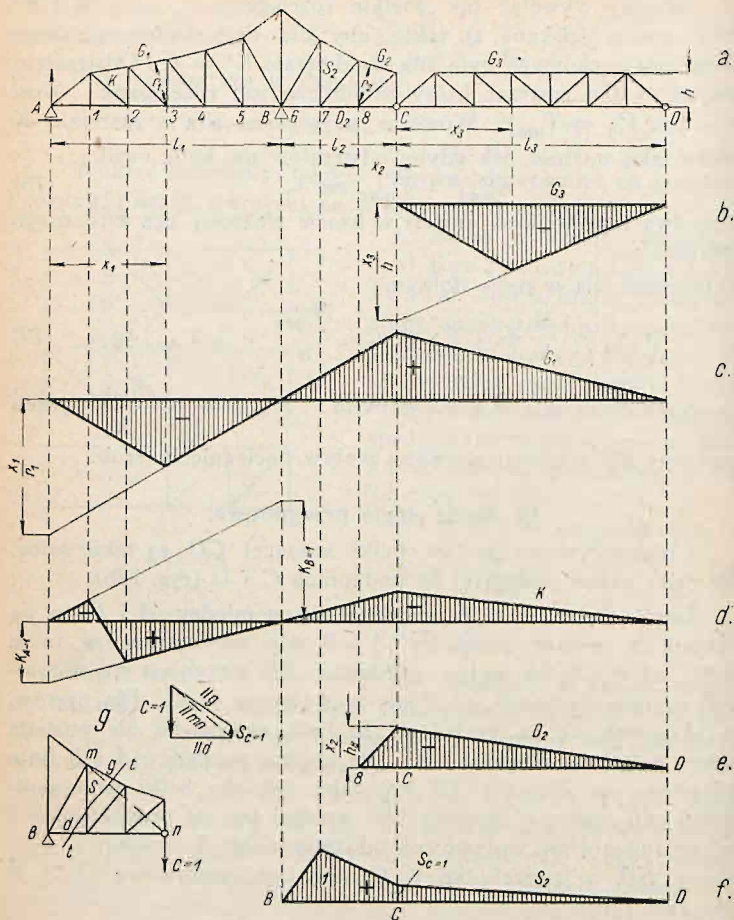
Ze względu na węzeł 8 mamy:

$$M_8 - G_2 r_2 = 0, \text{ a stąd } G_2 = \frac{M_8}{r_2} \quad (80)$$

Podobnie:

$$D_2 = -\frac{M_8}{h_s} \quad (81)$$

Gdy ciężar  $P = 1$  stanie w  $C$ , siła wewnętrzna dla słupa  $S_2$  w wsporniku  $BC$  wynosi  $S_{C=1}$ . Można ją znaleźć według me-



Rys. 72

tody Cullmanna dla przekroju  $t-t$  (rys. 72g). Gdy ciężar  $P = 1$  stanie w węzle 7, to  $S_2 = 1$  (por rys. 72f). Wpływ ciężaru znajdującego się na prawo od  $C$  na wielkość oddziaływania  $C$  maleje

z odległością od  $C$  do zera w punkcie  $D$ , zatem i rzędne linii wpływowych wszystkich prętów belki wspornikowej maleją na długości  $CD$  do zera według prostej.

### 11. Łuki.

a. *Łuk trójprzegubowy* (rys. 73). Dla wyznaczenia linii wpływowych najwygodniej zastosować zasadę belki zastępczej (por. str. 547). Biorąc moment ze względu na punkt  $i$  (rys. 73a), otrzymujemy dla pasa górnego:  $G h_i + M_{oi} = 0$ , a stąd:

$$G = - \frac{M_{oi}}{h}. \quad (82)$$

Moment  $M_{oi} = 0$ , gdy ciężar  $P = 1$  znajduje się w punkcie  $m$ , zatem belka zastępcza ma długość  $AM$ . Linia wpływowa siły  $G$  jest linią wpływową momentu  $M_{oi}$ , pomnożoną przez  $\frac{1}{h}$  (rys b).

Analogicznie znajdujemy linie wpływowe dla pasa dolnego (rys. 73c).

**K r z y ż u l c e.** Z równania momentów ze względu na punkt  $p$  mamy:

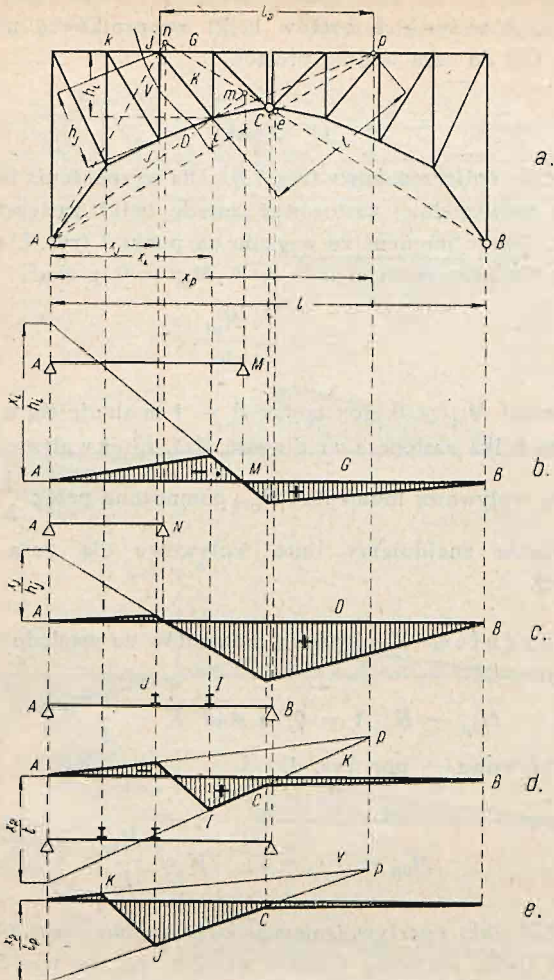
$$M_{0p} - K \cdot t = 0, \text{ a stąd } K = \frac{1}{t} M_{0p} \quad (83)$$

Linia wpływowa — por. rys. d.

Słupy:

$$M_{0p} - V l_p = 0, \quad V = \frac{M_{0p}}{l_p} \quad (84)$$

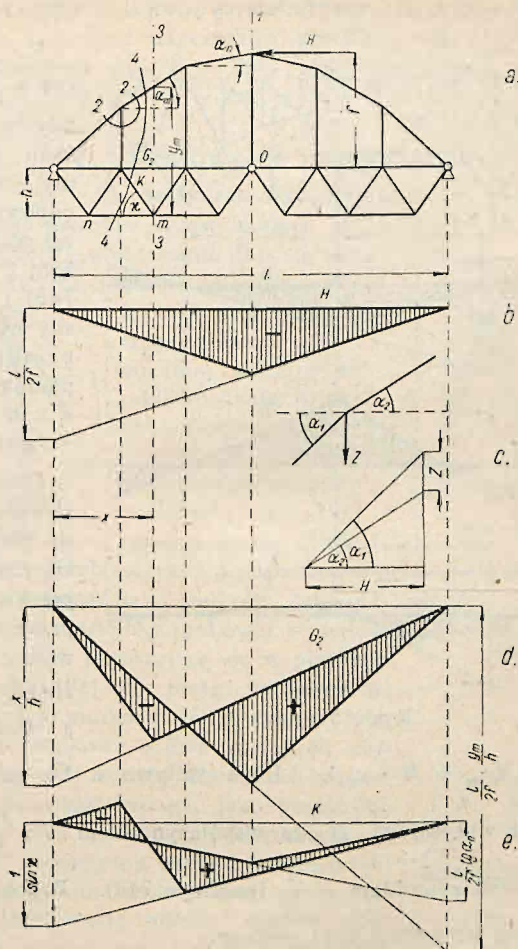
b. *Łuk gibki z usztywnieniem belką przegubową* (rys. 74) posiada 2 tarcze (belki kratowe) oraz  $w$  węzłów (na rys.  $w = 5$ ), zatem do uzyskania belki statycznie wyznaczalnej potrzeba według równania (1)  $(6 + 2 w)$  prętów. Mamy  $2 w + 1$  prętów istotnych, tj  $w + 1$  prętów łuku i  $w$  wieszaków, nadto 2 pręty przegubu; zatem potrzeba  $(6 + 2 w) - (2 w + 1 + 2) = 3$  prętów łożyskowych, tj. podparcie, jak dla belki wolno podpartej (prostej).



Rys. 73

Dla obciążenia pionowego oddziaływania są pionowe. Składowa pozioma  $H$  sił w prętach łuku jest stała. Prowadząc przekrój 1 - 1 (rys. 74a), otrzymujemy ze względu na punkt O:

$$M_{0o} + H f = 0, \text{ a stąd } H = - \frac{M_{0o}}{f} \quad (85)$$



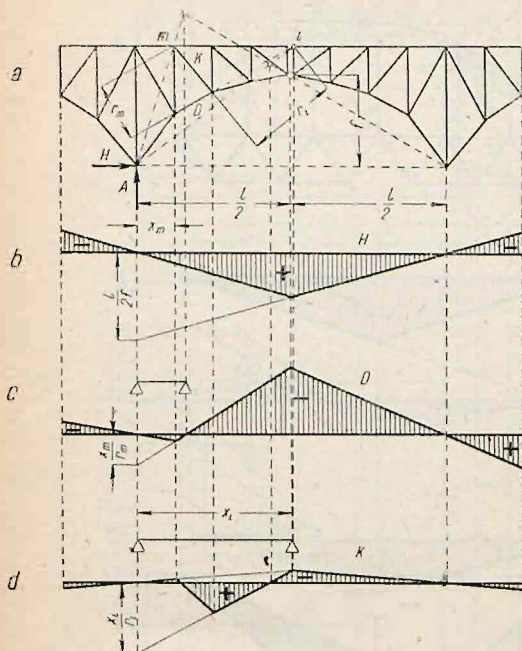
Rys. 74

gdzie  $M_{0o}$  jest momentem sił zewnętrznych dla belki wolno podpartej w punkcie  $O$ . Linia wpływowa, por. rys. 74b.

$$\text{Siły wewnętrzne w prętach łuku } L = \frac{H}{\cos \alpha_n} = - \frac{M_{0o}}{f \cos \alpha_n}$$

Linie wpływowe  $L$  dają więc linia wpływowa  $H$  ze współczynnikiem

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$



Rys. 75

Sily w wieszakach znajdziemy, wycinając odpowiedni węzeł górny (przekrój 2-2 i rys. 74c) i rzutując siły w wyciętych prętach na oś pionową. Wtedy  $Z = H (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha)$ .

Celem znalezienia siły w pasie górnym, np.  $G_2$  prowadzimy przekrój 3-3 przez węzeł  $m$ , wtedy  $M_{0m} + H \cdot y_m + G_2 h = 0$  a stąd  $G_2 =$

$= - \frac{1}{h} (M_{0m} + H \cdot y_m)$ . Linia wpływowa  $G_2$  jest zatem sumą linii wpływowej  $H$  ze współczynnikiem  $-\frac{y_m}{h}$  oraz  $M_{0m}$  ze współczynnikiem  $-\frac{1}{h}$  (por. rys. 74d). Podobnie znajdziemy linię wpływową pasa dolnego.

Prowadząc wreszcie przekrój 4-4 i ustawiając dlań równanie  $\sum V = 0$ , otrzymujemy:

$$T_{0n} + L_m \sin \alpha_m - K \sin \alpha = 0$$

a stąd po podstawieniu wartości za  $L$ :



$$K = \frac{T_{\theta n} + H \operatorname{tg} \alpha_m}{\sin z} \quad (86) \quad \text{Linia wpływowa, por. rys. 74c.}$$

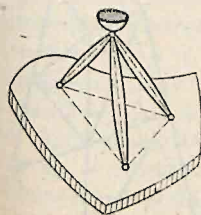
c. Łuk trójprzegubowy ze wspornikami (rys. 75). Linie wpływowe dla łuku bez wsporników przedłuża się aż do końców wsporników, por. rys. b — linia wpływowa parcia poziomego, c — pasa dolnego  $D$ , d — krzyżulca  $K$ .

## IV. Kratownice przestrzenne

### 12. Statyczna wyznaczalność.

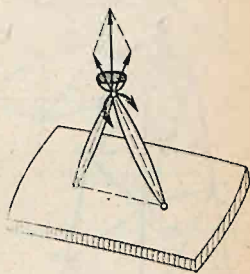
Łożyska ustrojów przestrzennych mogą być:

a) stałe (rys. 76); w obliczaniu dają się one zastąpić trzema prętami podporowymi,



Rys. 76

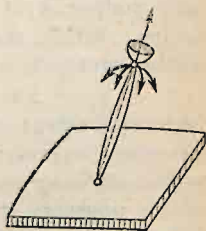
których siły wewnętrzne są równe odpowiednim składowym oddziaływania; b) ruchomelinowe (jedno-kierunkowe, wahadłowe) = dwu prętom podporowym; (rys. 77), poruszające się w linii



Rys. 77

prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez pręty podporowe; można je wykonać jako wałkowe lub przesuwowe; c) ruchome płaszczyznowe (wielokierunkowe) = jednemu prętowi podporowemu (rys. 78), poruszające się w płaszczyźnie prostopadłej do pręta podporowego w dowolnym kierunku; można je wykonać jako kulowe lub wałkowe o dwu szeregach wałków, ruchomych w dwu kierunkach prostopadłych do siebie, wreszcie jako przesuwne również w dwu  $\perp$  do siebie kierunkach.

Stalność zewnętrzna ustroju w przestrzeni uwarunkowana jest spełnieniem sześciu warunków równowagi; przeto 6 prętów podporowych ustala ciało w przestrzeni. (o ile nie zachodzi wypadek wyjątkowy, w którym da się poprowadzić prosta przecinająca wszystkie pręty podporowe, w którym więc podparcie jest chwiejne). Nie mogą zatem więcej niż trzy pręty podporowe leżeć w jednej płaszczyźnie, ani przechodzić przez



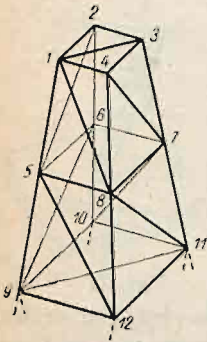
Rys. 78

jeden punkt (względnie być równoległe); wreszcie ciało musi być podparte co najmniej w trzech punktach.

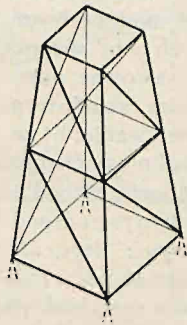
Ponieważ każdy węzeł przestrzenny daje trzy warunki równowagi, przeto statycznie wyznaczalna kratownica przestrzenna musi posiadać

$$p = 3w \quad (87)$$

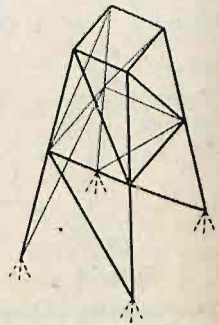
prętów istotnych i podporowych, z czego prętów podporowych co najmniej  $p_p \geq 6$ . Najczęściej stosowane ustroje przestrzenne (kopuły dachy wieżowe, namiotowe, filary, itd.) posiadają znacznie więcej prętów podporowych. Mianowicie zwykle dla  $n$  naroży  $p_p = 2n$  (w każdym węźle podporowym łożysko ruchome), jeżeli dołem istnieje pierścień podporowy; zaś  $p_p = 3n$  (w każdym



Rys. 79



Rys. 80



Rys. 81

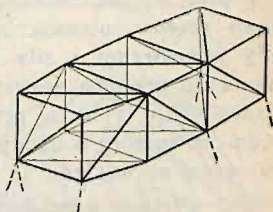
węźle podporowym łożysko stałe), jeżeli pierścienia podporowego nie ma. Wtedy dla zachowania statycznej wyznaczalności ilość prętów istotnych wynosić musi

$$p_i = 3w - 2n, \text{ względnie } p_i = 3w - 3n \quad (88)$$

Zazwyczaj osiąga się to w ten sposób, że w kopułach pierścienia najwyższy wykonywa się jako otwarty (bez prętów wewnętrznych), zwykle używany pod latarnię, w dachach posiadających zaś ostry szczyt, opuszcza się w obliczeniu pręty szczytowe, uważając je z wystarczającą dokładnością za ustrój drugorzędny (por. str. 581)

Np. filar o postaci, jak na rys. 79, jest statycznie wyznaczalny, posiada bowiem  $w = 12$  węzłów, zaś  $p = 36 = 3w$  prętów, w czym  $p_i = 30$ ,  $p_p = 6$ . Zazwyczaj jednak opuszcza się pręty istotne 1—3 i 9—11, zwiększając odpowiednio ilość prętów podporowych, por. rys 80, gdzie  $p_i = 28$ ,  $p_p = 8$ ,  $p = 28 + 8 = 36$ , oraz rys. 81, gdzie  $p_i = 24$ ,  $p_p = 12$ ,  $p = 24 + 12 = 36$ .

Statycznie wyznaczalną kratownicę przestrzenną otrzymać można: a) przez dołączenie do stałej podstawy, względnie stałej kratownicy nowych węzłów, każdego przy pomocy trzech prętów istotnych lub podporowych; b) przez połączenie ze stałą statycznie wyznaczalną kratownicą drugiej kratownicy statycznie wyznaczalnej przy pomocy sześciu prętów; c) przez wymianę prętów w istniejącej statycznie wyznaczalnej kratownicy (por. rys. 79—81. a także str. 578); wymieniać można pręty istotne między sobą lub z podporowymi, przemieszczając je w ogóle dowolnie, tak jednak, aby utrzymać wewnętrzną i zewnętrzną stałość kratownicy.



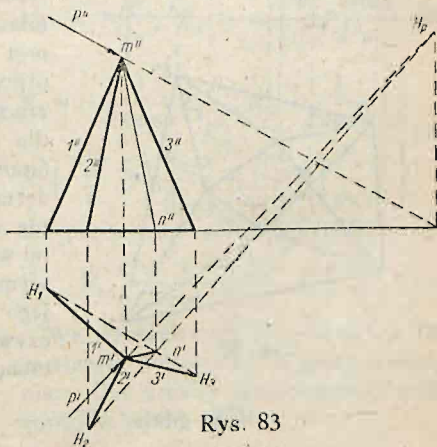
Rys. 82

Kształtem statycznie wyznaczalnej kratownicy przestrzennej, jaki daje ująć się najłatwiej, a z którego dadzą się wyprowadzić prawie wszystkie używane postacie jest kratownica siatkowa (rys 82). Wszystkie jej pręty powiązane są w trójkąty, a leżą na powierzchni, zamykającej swoimi płaszczyznami pewną przestrzeń.

### 13. Wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach.

a. *Węzły trójprętowe.* Przez kierunek siły  $P$  i jeden z prętów, np 2 (rys. 83), przeprowadza się płaszczyznę ( $P-2$ ) która przecina się z pł. przechodzącą przez pozostałe pręty (1-3) wg prostej ( $mn$ ). Siłę  $P$  rozkłada się następnie w obu rzutach na siły 2 i ( $m n$ ), a wreszcie składową ( $m n$ ) na siły 1 i 3 (rys 84). Wielkości sił 1, 2 i 3 znajduje się z kładu rzutów tychże sił.

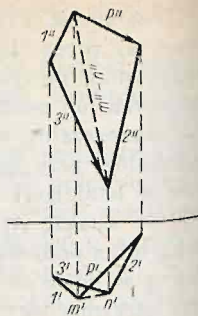
Zazwyczaj można jedną z płaszczyzn przeprowadzić równoległe, względnie prostopadłe do płaszczyzny rzutowej, a wtedy wyznaczenie sił wewnętrznych znacznie się upraszcza.



Rys. 83

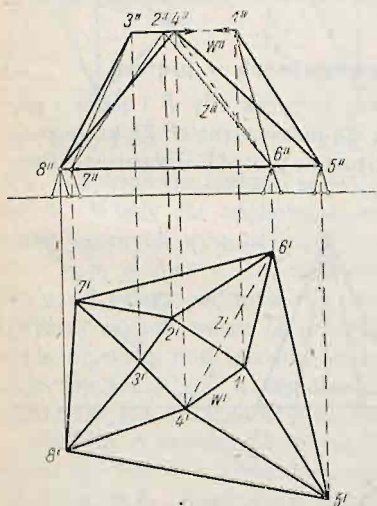
Metody tej używamy również, gdy w węzle o większej ilości prętów trzy siły wewnętrzne są nieznane, a pozostałe wiadome.

b. *Metoda momentów* używana jest gdy kratownica nie ma węzłów trójprętowych. Pro wadzi się płaszczyznę przekroju tak, aby przecięła pręt, którego siłę wewnętrzną chcemy wyznaczyć, wybierając jako oś momentów prostą przecinającą możliwie wiele przekrojonych prętów, ustawia równanie momentów siły zewnętrznej i siły szukanej. Jeżeli oś momentu przecina wszystkie pręty prócz badanego (np. 5 na 6 przeciętych) wystarczy jedno równanie; o ile np. 4 na 6 przeciętych należy ustawić dwa równania ze względu na dwie osie.



Rys. 84

c. *Metoda wymiany prętów* jest używana, gdy nie ma węzła trójprętowego, lub gdy inne metody nie dadzą się zastosować (znacznie częściej niż w kratownicach płaskich) Dowolny pręt  $W'$



Rys. 85

(rys. 85), zwykle w pierścieniu górnym, odrzuca się (pręt wymienny) tak, aby uzyskać przynajmniej jeden węzeł o trzech prętach nie leżących w jednej płaszczyźnie; dla utrzymania stałości umieszcza się natomiast w dogodnym miejscu pręt tzw. zastępczy  $Z$ . W tak otrzymanej kratownicy wyznacza się siły wewnętrzne  $S_0$  i  $Z_0$  dla obciążenia zewnętrznego (stan  $X = 0$ ) oraz siły wewnętrzne  $S_1$  i  $Z_1$  dla obciążenia siłami  $= 1$ , zaczepiającymi w końcach usuniętego pręta wymiennego w kierunkach osi jego (stan  $X = 1$ ). Siły rzeczywiste, występujące w prętach, wynoszą:

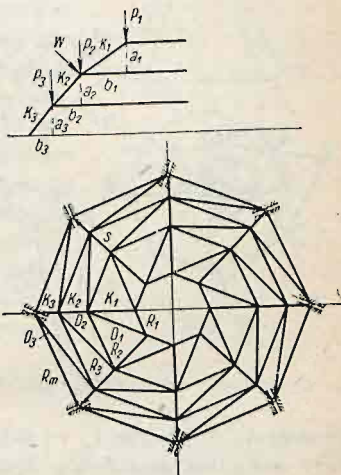
$$S = S_0 + W'S_1, \text{ gdzie: } W' = -\frac{Z_0}{Z_1}$$

Podobnie można zastosować dwu i wielokrotną wymianę prętów. Kratownice przestrzenne hiperstatyczne oblicza się tak samo jak hiperstatyczne płaskie; w ogóle jednak staramy się unikać takiego skomplikowanego obliczenia, decydując się raczej na pewne uproszczenia i przybliżenia.

14. Najczęściej używane systemy kratownic przestrzennych.

Składają się one z narożników (krokwi) prostych lub łamanych, pierścieni wielobocznych oraz przekątnych (pojedynczych lub podwójnych gibkich); wszystkie pręty leżą na powierzchni kratownicy.

a. *Kopuły*. Węzły narożników leżą na krzywej; w najczęściej używanych kopułach Schwedlerowskich — na paraboli. Łożyska, zwykle ruchome o kierunku ruchu prostopadłym do jednego z przyległych pierścieni (rys. 86). Dla kopuł o rzucie poziomym regularnym i obciążenia rozłożonego jednostajnie na całym pierścieniu (np.



Rys. 86

obciążenie stałe) obliczenie przeprowadza się następująco (rys. 87):

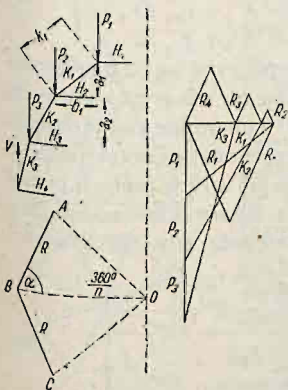
$$K_1 = -P_1 \frac{k_1}{a_1}, \quad K_n = -\left(\sum_1^n P\right) \frac{k_n}{a_n} \quad (89)$$

$$R_1 = -\frac{1}{2 \cos \alpha} P_1 \frac{b_1}{a_1}, \quad R_n = \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot \left[ \left(\sum_1^{n-1} P\right) \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \left(\sum_1^n P\right) \frac{b_n}{a_n} \right] \quad (90)$$

dla pierścienia murowego (najniższego)

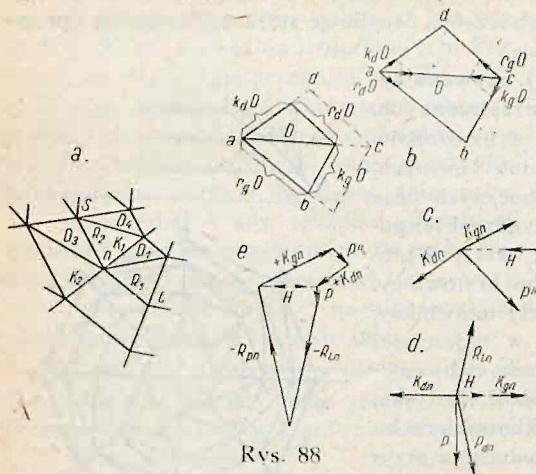
$$R_m = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\sum_1^{m-1} P\right) \frac{b_m}{a_m} \quad (91)$$

We wzorach tych  $2\alpha$  jest to kąt, jaki zawierają dwa sąsiednie pręty pierścienia. Dla kopuły ośmiobocznej umiarowej  $\alpha = 67^\circ 30'$ .



Rys. 87

Dla sił inaczej rozłożonych (np. wiatru) najlepiej używać metody Müller-Breslau'a (rys 88). Obciążenie węzła (w węzłach niższych złożone z siłą wewnętrzną krokwi górnej i składowymi prze-

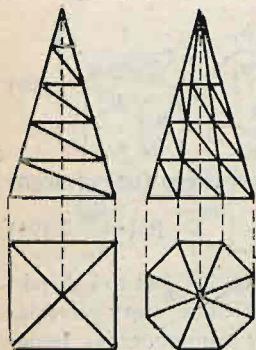


Rys. 88

kątnych w kierunku tej krokwi) rozkłada się na siłę w kierunku krokwi dolnej oraz siłę poziomą z której to siłę znajdujemy siły rzeczywiste w krokwi i przekątnych dolnych. Niech oznacza:  $k_g$  — względnie  $r_d$  — składowe siły  $D = 1$  w kierunku krokwi, względnie pierścienia

górnego,  $k_d$  względnie  $r_d$  — składowe siły  $D = 1$  w kierunku krokwi, względnie pierścienia dolnego (wartości dla każdego pręta inne; najlepiej wyznaczyć je wykreślnie), to suma sił wynosi:

w kierunku krokwi powyżej węzła $n$	$K_{g,n} = K_1 + k_{d1} D'_1$	} (92)
w kierunku krokwi poniżej węzła $n$	$K_{d,n} = K_2 + k_{g2} D'_2$	
w kierunku pierścienia prawego:	$R_{pn} = R'_2 + r_{d1} D'_1$	
w kierunku pierścienia lewego:	$R_{ln} = R'_2 + r_{g2} D'_2$	



Rys. 89

Obliczenie rozpoczyna się od pierścienia najwyższego, gdzie nie ma prętów górnych, więc  $k_g = r_g = 0$  i obejmuje kolejno węzły tegoż. Potem przechodzi się do pierścienia następnego. Znając siły w prętach ponad  $m$  otrzymamy z figury niewiadome  $K_d$ ,  $R_p$  i  $R_l$ , a następnie siły rzeczywiste:

$R'_2 = R_p - r_{d1} D'_1$	} (93)
$D''_2 = \frac{R_{ln} - R''_1}{r_{g2}}$	
$R''_2 = R_{ps} - r_{d1} D''_1$	
$K_2 = K_{dn} - k_{g2} D''_2$	

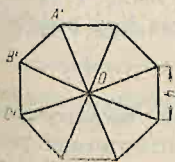
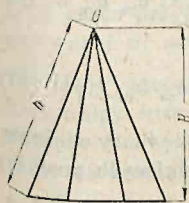
U w a g a : „p“ oznacza „prawy“, „l“ „lewy“, „d“ „dolny“, „g“ „górnny“, „n“ dotyczy prętów, wychodzących z węzła n, „s“ prętów wychodzących z węzła s.

b. *Dachy wieżowe* (rys. 89 i 90; przy nachyleniu krokwi do poziomu mniejszym od  $45^\circ$  nazywamy je *namiotowymi*) posiadają narożniki proste. U góry kończą się zazwyczaj ostrym szczytem, w którym zbiegają się wszystkie naroża; wtedy dla  $n$  naroży przy normalnie stosowanym podparciu dach jest  $(n - 3)$  krotnie hiperstatyczny. Siły w najwyższej części dachu, uważanej za układ drugorzędny (por. str. 576), wyznaczamy wtedy zwykle w przybliżeniu, ustawiając równanie momentów względem najwyższego pierścienia (rys. 90):

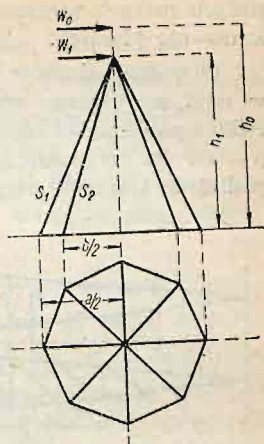
$M = W_o h_o + W_1 h_1 = S_1 a \sin \alpha + 2 S_2 b \sin \alpha$ ; ponieważ zaś  $S_1 : S_2 = a : b$ , przeto:

$$S_1 = \frac{Ma}{(a^2 + 2b^2) \sin \alpha} = \frac{Mak}{(a^2 + 2b^2) h_1} \quad (94)$$

We wzorach tych  $\alpha$  jest kątem nachylenia krokwi do poziomu,  $k$  długością krokwi.



Rys. 91



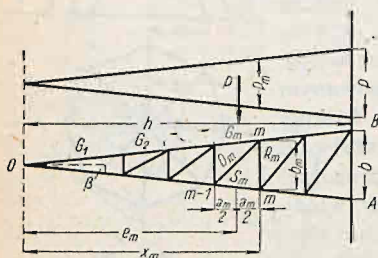
Rys. 90

Poza tym dachy te oblicza się jak kopuły; wzory i wykresy upraszczają się jednak wskutek stałego pochylenia krokwi. (Stosunek  $k : a$ , por. wzór 89, jest stały).

Na parcie wiatru można je też obliczać jako dźwigary kratowe płaskie, zawarte między narożnikami. Obciążenie węzłowe  $P$  rozkłada się na trzy składowe, jedną  $P_n$  w kierunku narożnika i dwie poziome  $P'_h$  i  $P''_h$  w płaszczyznach przylegających ścian. Następnie oblicza się kratownicę płaską, jako utwierdzoną dołem, na siły poziome  $P'_h$  i  $P''_h$ , leżące w jej płaszczyźnie. Siły w narożnikach są równe sumie odpowiednich składowych  $P_n$  oraz sił w pasach tych kratownic płaskich. Siły w pozo-

stałych prętach wyznacza się wprost z obliczenia odpowiednich kratownic płaskich.

Obliczenie dachów wieżowych ośmiobocznych (rys. 91) da się w myśl powyższego sprowadzić do obliczenia więzara płaskiego  $ABO$  o powierzchni obciążenia według trójkąta (rys. 92), przy czym  $p = 0.7 bw$  ( $w =$  parcie wiatru na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru). Siły wewnętrzne w krokwi:

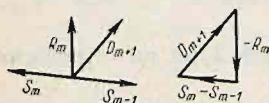


$$G_m = + \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta.$$

$$S_m = - \frac{M_m}{b_m} \sec \beta$$

Odpowiednio dla ściany CDO:

$$\left. \begin{aligned} G'_m &= + \frac{M_m}{b_m} \sec \beta, \\ S'_m &= - \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta \end{aligned} \right\} (95)$$



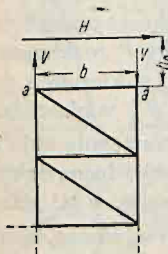
Rys. 92

przy czym:  $M_m = \frac{p x_m^3}{6 h}$ ,  $M_{m-1} = \frac{p x_{m-1}^3}{6 h}$

Sila w przekątnej o długości  $d_m$ :  $D_m = 0,233 e_m d_m w$  (96)

Sila w pierścieniu:

$$R_m = - \frac{w}{3} (1,04 e_{m+1} b_{m+1} + 0,35 e_m b_{m-1}) \quad (97)$$



Rys. 93

Zupełnie podobnie oblicza się filary wieżowe, gdzie dla sił poziomych zaczepiających powyżej

aa jest  $V = \frac{Hh_0}{b}$  (rys. 93), oraz inne podobne

konstrukcje przestrzenne.

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznkami, wiatrownicami pionowymi i poziomymi są też ustrojami przestrzennymi.



## V. Przesunięcia kratownic

### 15. Metody analityczne.

a. *Prawo pracy przygotowanej.* Jeżeli węzeł  $m$  kratownicy dozna przesunięcia  $mm' = \bar{\delta}$ , to praca sił  $P_i$ , zaczepiających w  $m$ , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty  $\delta_i$  przesunięcia  $\bar{\delta}$  na kierunki tychże sił, więc  $L_m = \sum P_i \delta_i$ . Jeżeli siły  $P_i$  są w równowadze, to wypadkowa ich równa się zeru; zatem:

$$\sum P_i \delta_i = 0 \quad (98)$$

$\delta_i$  oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły  $P_i$  na jej kierunek

Dla każdego węzła kratownic, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne  $\bar{\delta}$  i ustawić równanie (98). Skoro te równania dodamy, to znak  $\sum$  rozciągając się będzie na wszystkie zewnętrzne siły  $Q_m$  działające na kratownicę i na napięcia wszystkich prętów  $S$  kratownicy. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem  $S$ , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślnych przesunięć obu węzłów nastąpi ich oddalenie, czyli wydłużenie pręta o  $\Delta s$ , to praca przygotowana napięcia  $S$  jest  $-S \cdot \Delta s$ . Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi  $-\sum S \Delta s$ , wobec czego prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \quad (99)$$

czyli *praca przygotowana sił zewnętrznych równa się pracy przygotowanej sił wewnętrznych.*

Dany rzeczywisty układ sił  $Q_m$ , działających w węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcie  $S$  i wydłużenia  $\Delta s$ , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił  $Q_m$  są  $\delta_m$ . Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił  $Q_m$ , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia  $S$ . Zastosujmy równanie (99) do pomyślanego układu sił  $\bar{Q}_m$  i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem  $Q_m$ , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \delta_m = \sum S \Delta s \quad (100)$$

Siły zewnętrzne  $\bar{Q}$  składają się z sił  $\bar{P}_m$  i oddziaływań  $\bar{C}$ , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia pod-

pór  $c$ , mierzone w kierunku sił  $C$  (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (100) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \delta_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{C} c \quad (101)$$

Jeżeli nazwiemy  $s$  długość,  $F$  przekrój jednego pręta,  $E$  moduł sprężystości,  $\omega$  współczynnik rozszerzalności,  $t$  przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{EF}$$

to:  $\Delta s = S\rho + \omega ts$ ,

zaś:  $\sum \bar{P}_m \delta_m = \sum \bar{S} S\rho + \sum \bar{S} \omega ts - \sum \bar{C} c \quad (102)$

Jeżeli przygotowanym stanem sił jest  $\bar{P}_m = 1$ , to

$$\sum P_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m$$

Równanie (102) będzie wtedy brzmiało:

$$1 \cdot \delta_m = \sum \bar{S} S\rho + \sum \bar{S} \omega ts - \sum \bar{C} c \quad (103)$$

W przypadku belki o ściance pełnej, skoro  $\sigma \cdot dF$  jest napięciem przygotowanym włókna o przekroju  $dF$ , długości  $ds$  i wydłużeniu rzeczywistym  $\Delta ds$ , praca przygotowana sił wewnętrznych wynosi:

$$L_\omega = \int \bar{\sigma} dF \cdot \Delta ds \quad (104)$$

(Znak  $\int$  rozciąga się na całkowitą objętość belki).

Ale:  $\Delta ds = \left( \frac{\sigma}{E} + \omega t + \omega \frac{\Delta t}{h} v \right) ds$ ,  $(105)$

przy czym  $\Delta t$  jest różnicą temperatur włókien skrajnych, górnych i dolnych,  $v$  odstępem włókna od osi obojętnej,  $h$  wysokością belki w danym miejscu.

Dalej:  $\sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}$ ; podobnie zaś  $\bar{\sigma} = \frac{N}{F} + \frac{\bar{M}v}{J} \quad (105)$

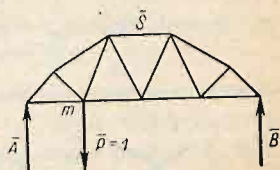
Podstawmy wzory (105) i (106) w (104), to z uwagi na to, że  $\int dF = F =$  powierzchni przekroju,  $\int v dt = 0$ , zaś  $\int v^2 dF = J =$  momentowi bezwładności przekroju, otrzymamy [analogicznie do wz. (101), pomijając (zwykle bardzo mały) wpływ sił poprzecznych]:

$$\begin{aligned} \sum P_m \delta_m + \sum Cc &= L_w = \\ &= \int \overline{MM} \frac{ds}{EJ} + \int \overline{NN} \frac{ds}{EF} + \int \omega t \overline{N} ds + \int \omega \frac{\Delta t}{h} \overline{M} ds \quad (107) \end{aligned}$$

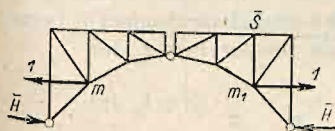
Jeżeli wreszcie układ składa się z prętów i elementów o ściance niepełnej (tarcz sztywnych), to według równań (102), (103) i (107) prawo pracy przygotowanej wyrazi się:

$$\begin{aligned} \sum P_m \delta_m + \sum Cc &= \sum \overline{SS} \rho + \sum \overline{S} \omega t s + \\ &+ \int \overline{MM} \frac{ds}{EJ} + \int \overline{NN} \frac{ds}{EF} + \int \overline{N} \omega t ds + \int \overline{M} \omega \frac{dt}{h} ds \quad (108) \end{aligned}$$

Równanie (103) posłuży do wyznaczenia uogólnionego przesunięcia  $\delta_m$  w stanie rzeczywistych obciążeń ( $S, t, C$ ), jeżeli jako obciążenie przygotowane, (które powoduje napięcia  $S$  i oddziaływania  $C$ ) obierzemy odpowiednio uogólnioną jednostkę siły. Rys. 94 przedstawia przygotowany stan



Rys. 94



Rys. 95

sił ( $P_m = 1, A, B, S$ ) dla wyznaczenia pionowego ugięcia węzła  $m$  (Podobnie można znaleźć przesunięcie poziome; rzeczywiste przesunięcie jest wypadkową obu przesunięć) Rys. 95 przedstawia uogólnioną jednostkę

siły dla wyznaczenia przyrostu poziomej odległości węzłów  $m$  i  $m_1$ ; rys 96 dla wyznaczenia obrotu pręta  $mm_1$ , w kierunku wskazówek zegara; rys. 97 dla

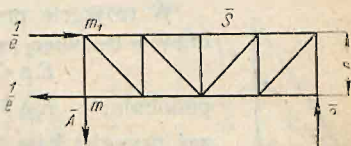
wyznaczenia przyrostu kąta  $\varphi_m$  między kierunkami prętów  $k$  i  $l$ .

Rys. 98a przedstawia przygotowany stan sił (dwie pary sił na ramionach  $b$  i  $c$ , których momenty

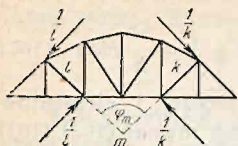
są równe 1, gdyż  $\frac{1}{c} \cdot c = 1$ ) dla

wyznaczenia przyrostu kąta  $\alpha$  w trójkącie  $a, b, c$  wskutek przyrostu boków  $\Delta a, \Delta b$  i  $\Delta c$ .

Jeżeli siłę zaczepiającą w wierzchołku kąta  $\gamma$  rozłożymy na składowe w kierunku  $a$  i  $b$  (rys. 98), to napięcie przygotowane



Rys. 96



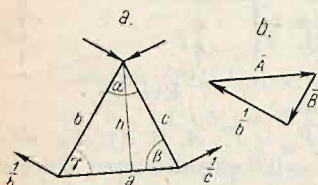
Rys. 97

pręta  $a$  wynosi  $\bar{A} = l : b \sin \gamma = l : h$ ,  
zaś  $B = -A \cos \gamma = -\cos \gamma : h$  i analogicznie  $C = -\cos \beta : h$ .

Pomyślmy sobie w wierzchołku  $a$  łożysko stałe, w wierzchołku  $\gamma$  łożysko ruchome wzdłuż pręta  $b$ , to tylko siła  $l : c$  w wierzchołku  $\beta$  może wykonać pracę na przesunięciu  $\delta = c \Delta \alpha$ , zatem pracę  $(l : c) \delta =$

$= \Delta \alpha$ . Równanie (103) przybierze kształt:

$$\begin{aligned} 1. \quad \Delta \alpha &= \bar{A} \Delta a + \bar{B} \Delta b + \bar{C} \Delta c = \frac{\Delta a}{h} - \frac{l}{h} (\Delta b \cos \gamma + \Delta c \cos \beta) = \\ &= \frac{\Delta a}{a} \cdot \frac{a}{h} - \frac{\Delta b}{b} \cdot \frac{b \cos \gamma}{h} - \frac{\Delta c}{c} \cdot \frac{c \cos \beta}{h} = \\ &= \left( \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} \right) \operatorname{ctg} \beta + \\ &+ \left( \frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) \operatorname{ctg} \gamma. \quad (109) \end{aligned}$$



Rys. 98

Jeżeli wydłużenie  $\Delta a$  spowodowane zostało naprężeniem  $\sigma_a$  i przyrostem temperatury  $t_a$  to:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t_a \text{ itd.};$$

więc:

$$E \Delta \alpha = [(\sigma_a - \sigma_c) + \omega E(t_a - t_c)] \operatorname{ctg} \beta + [(\sigma_a - \sigma_b) + \omega E(t_a - t_b)] \operatorname{ctg} \gamma.$$

Dla  $t_a = t_b = t_c$  jest:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \operatorname{ctg} \beta + (\sigma_a - \sigma_b) \operatorname{ctg} \gamma \quad (110)$$

W trójkącie prostokątnym (rys. 99)  $\gamma = 90^\circ$ ,  
 $\operatorname{ctg} \gamma = 0$ ; więc przyrost kąta ostrego:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \operatorname{ctg} \beta$$

podobnie:  $E \Delta \beta = (\sigma_b - \sigma_c) \operatorname{ctg} \alpha$

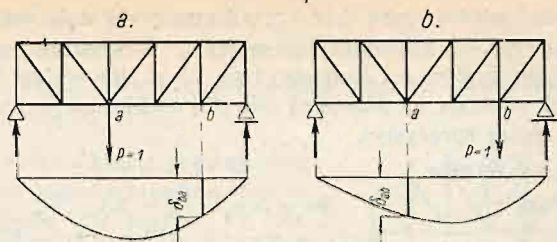
zaś przyrost kąta  $90^\circ$ :

$$E \Delta \gamma = (\sigma_c - \sigma_a) \operatorname{ctg} \beta + (\sigma_c - \sigma_b) \operatorname{ctg} \alpha$$



Rys. 99

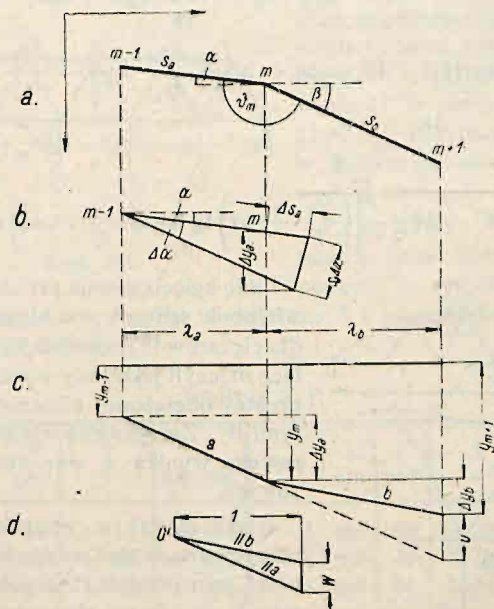
Linia ugięcia (ugięta) pasa pomostowego pod ciężarem  $P = l$  w punkcie  $a$  (rys. 100 a) jest zarazem linią wpływową pionowego przesunięcia tego punktu. Według bowiem prawa wzajemności przesunięć (por. str. 433), pionowe przesunięcie  $\delta_{ba}$  punktu  $b$  wskutek ciężaru  $P = l$  w  $a$  jest takie



Rys. 100

samo, jak pionowe przesunięcie  $\delta_{ab}$  punktu  $a$  pod działaniem ciężaru  $P = 1$  w punkcie  $b$  (rys. 100 b), czyli  $\delta_{ab} = \delta_{ba}$ .

b. *Linia ugięcia ciągu prętów jako wielobok sznurowy ciężarów sprężystych  $W$ .* Niech  $m-1, m, m+1$  (rys. 101) będą trzema sąsiednimi węzłami sztywnymi łamanego ciągu prętów  $s_a, s_b, \dots$



Rys. 101

tworzących między sobą kąt  $\vartheta_m$ , mierzony od dołu, zaś  $y_{m-1}$ ,  $y_m$ ,  $y_{m+1}$  (rys. c) rzędnymi linii ugięcia. Równoległe przeprowadzone do boków  $a$  i  $b$  ugiętej (rys. c) z dowolnego bieguna  $O$  (rys. c), odcinają na pionowej odległej od bieguna o 1 odcinek  $W$  (tzw. ciężar sprężysty).

Z rys. c i d wynika

$$W : 1 = u : \lambda_b.$$

Z rys. c zaś

$$(u + \Delta y_b) : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a,$$

czyli

$$u : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a = \Delta y_b : \lambda_b = W \quad (111)$$

Przesunięcie  $m$  względem  $m-1$  (rys. b) składa się geometrycznie z przyrostu  $\Delta s_a$  i obrotu o kąt  $\Delta\alpha$ , któremu odpowiada łuk  $s_a \Delta\alpha$ .

Więc:

$$\Delta y_a = \Delta s_a \sin \alpha + s_a \Delta\alpha \cdot \cos \alpha;$$

a stąd:

$$\Delta y_a : \lambda_a = \Delta y_a : (s_a \cos \alpha) = \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha + \Delta\alpha.$$

Podobnie:

$$\Delta y_b : \lambda_b = \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta + \Delta\beta;$$

Więc według (111):

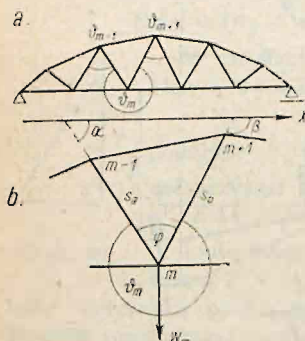
$$W = \Delta\alpha - \Delta\beta + \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta.$$

Ale:

$$\frac{\Delta s_a}{s_a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t, \quad \Delta\alpha - \Delta\beta = \Delta\vartheta_m;$$

zatem:

$$W = \Delta\vartheta_m - \left[ \left( \frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \beta - \left( \frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \quad (112)$$



Rys. 102

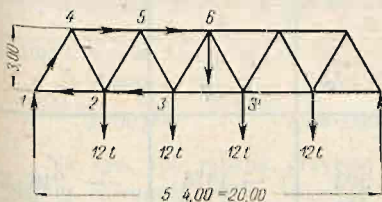
Linie ugięcia można przedstawić jako wielobok sznurowy o biegunowej = 1 dla ciężarów  $W$ , zaczepiających w węzłach  $m$ , czyli jako linię momentów belki prostej obciążonej ciężarami sprężystymi  $W$ . Zamykająca wieloboku sznurowego wynika z warunków podporowych.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie pionowych przesunięć wszystkich węzłów belki, to równanie (112) można zastosować do ciągu złożonego z krzyżuleców belki (rys. 102). Dla węzła  $m$

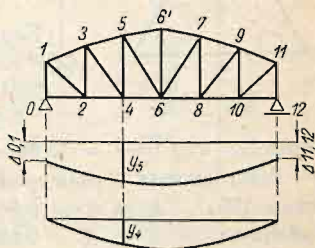
(rys. b)  $\Delta^0_m = -\Delta\varphi_m$ . Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są to kąty między dodatnim kierunkiem osi  $X$ , a przedłużeniem prętów  $s_a$  i  $s_b$ , mierzone w kierunku wskazówek zegara (rys. b).  $\Delta\varphi_m$  można znaleźć z równania (110).

Dla belki o kracie prostokątnej (rys. 103) należy oddzielnie znaleźć linie ugięcia obu pasów. Tu dla węzła 4 ciągu 3, 4, 5 kąt  $\beta$ , zaś dla węzła 5 i ciągu 4, 5, 6 kąt  $\alpha$  jest prosty, zatem  $\text{tg } \beta$ , względnie  $\text{tg } \alpha = \infty$ . Dla ciągu 3, 5, 6' jest  $\theta_3 = \angle 354 + \angle 456 + \angle 656'$ ; zatem  $\Delta^0_3 = \Delta^{\alpha}_{354} + \Delta^{\alpha}_{456} + \Delta^{\alpha}_{656'}$ . Dla pasa dolnego,

prostego, jest  $\theta_4 = -(\Delta^{\alpha}_{243} + \Delta^{\alpha}_{345} + \Delta^{\alpha}_{546}) = W_4$ . Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są tu  $= 0$ . Zamykająca linia ugięcia pasa górnego wynika stąd, że przesunięcie pionowe węzła 1 równe jest skróceniu pręta 0-1, zaś przesunięcie węzła 11 = skróceniu pręta 11-12. Przyrost  $g$  kątów w trójkącie znaleźć można według równania (110).



Rys. 104



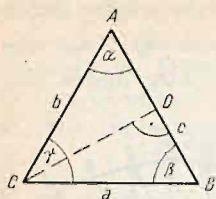
Rys. 103

Przykład. Obliczyć ugięcie pasa dolnego belki podanej na rys. 104. Długość

prętów  $s$  przekroje  $F$ , siły wewnętrzne  $S$  i naprężenia  $\sigma = S : F$  zestawiono w tabelcy I.

TABLICA I.

Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ t	$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>	Pręt	$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ t	$\sigma$ kg/cm <sup>2</sup>
1-2	400	44	+ 16	+ 364	1-4	360	60	- 28,8	- 480
2-3	400	60	+ 40	+ 667	4-2	360	40	+ 28,8	+ 720
3-3'	400	60	+ 48	+ 800	2-5	360	44	- 14,4	- 328
4-5	400	5	- 32	- 492	5-3	360	44	+ 14,4	+ 328
5-6	400	65	- 48	- 739	3-6	360	44	0	0



Rys. 105

Kratownica składa się z trójkątów równoramiennych (rys. 05) o podstawie  $a = 4$  m i wysokości  $h = 3$  m.

Bok:  $b = c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,6$  m.

$\text{ctg } \beta = \text{ctg } \gamma = 2 : 3 = 0,667$ .

Poprowadźmy  $CD \perp AB$ , to z równań  $AD^2 + CD^2 = 13$ , tudzież  $(3,6 - AD)^2 + CD^2 = 16$ , otrzymamy  $AD = 1,39$  m,  $CD = 3,32$  m,  $\text{ctg } \alpha = 1,39 : 3,32 = 0,42$ .

Kontrola:  $\text{ctg } \beta = (3,60 - 1,39) : 3,32 = 0,667$ .

Przyrost kąta  $\alpha$  obliczono tabelarycznie (Tablica IIa) według wzoru 110:  $E \Delta \alpha = 0,667 (\sigma_a - \sigma_b - \sigma_c)$   
 Podobnie:  $E \Delta \beta = 0,667 (\sigma_b - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_b - \sigma_c)$  por. Tabl. IIb i  $E \Delta \gamma = 0,667 (\sigma_c - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_c - \sigma_b)$  por. Tabl. IIc.  
 Kontrolę stanowi warunek:  $E (\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma) = 0$ .

Tablice zmiany kątów.

TABLICA IIa.

1	2	3	4	5
$a$	$2 \sigma_a$	$\sigma_b + \sigma_c$	$\frac{E \Delta \alpha}{0,667}$	$E \Delta \alpha$
—	—	—	—	—
425	— 984	+ 392	— 1376	— 918
536	— 1478	+ 328	— 1806	— 1203
142	+ 728	+ 240	+ 488	+ 326
253	+ 1334	0	+ 1343	+ 890
363	+ 1600	0	+ 1600	+ 1069

TABLICA IIb.

$\beta$	$\sigma_b - \sigma_a$	$(\sigma_b - \sigma_a) \cdot 0,667$	$\sigma_b - \sigma_c$	$(\sigma_b - \sigma_c) \cdot 0,42$	$E \Delta \beta$
—	—	—	—	—	—
542	+ 164	+ 109	— 1048	— 440	— 331
653	+ 739	+ 493	— 328	— 138	+ 355
421	— 844	— 554	— 1200	— 505	— 1069
523	— 995	— 665	— 656	— 276	— 941
633	— 800	— 535	0	0	— 535



TABLICA IIc.

$\gamma$	$\sigma_c - \sigma_a$	$(\gamma_c - \gamma_a) \cdot 0,667$	$\sigma_c - \sigma_b$	$(\sigma_c - \sigma_b) \cdot 0,42$	$E \Delta \gamma$
—					
452	+ 1212	+ 810	+ 1048	+ 440	+ 1250
563	+ 1067	+ 712	+ 328	+ 138	+ 850
412	+ 356	+ 238	+ 1200	+ 505	+ 743
523	— 339	— 226	+ 656	+ 276	+ 50
633	— 800	— 535	0	0	+ 535

Ciężar sprężysty w węzle 2:  $W_2 = \Delta \theta_2 = -(\Delta \sigma_{425} + \Delta \beta_{421} + \Delta \gamma_{523})$

Czyli:  $EW_2 = -(-918 - 1069 + 50) = +1937 \text{ kg/cm}^2$

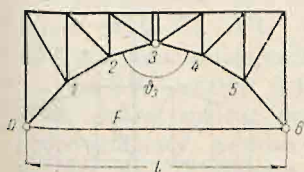
Podobnie:  $EW_3 = -(-1203 - 941 - 535) = +2679 \text{ kg/cm}^2$

Oddziaływanie sprężyste:  $E[A] = E(W_2 + W_3) = 4616 \text{ kg/cm}^2$

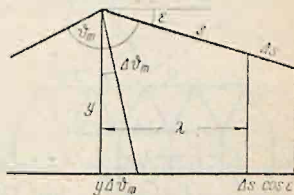
Ugięcie węzła 2:  $y_2 = s_{1-2}[A] = 400 \frac{4616}{2100.000} = 0,88 \text{ cm.}$

Ugięcie węzła 3:  $y_3 = [A](s_{1-2} + s_{2-3}) - W_2 \cdot s_{2-3} =$   
 $= 800 \frac{4616}{2.100.000} - 400 \frac{1937}{2.100.000} = 1,760 - 0,368 = 1,392 \text{ cm.}$

Na rys. 106 można przyrost kąta  $\theta_3$  w przegubie znaleźć według równania (103), stosując jako  $S$  napięcia wskutek dwu par sił na ramionach 23 i 34, których moment = 1, działających



Rys. 106



Rys. 107

w sensie zwiększenia kąta  $\theta_3$ . Lepiej jednak znaleźć  $\Delta \theta_3$  ze związku między przyrostami kątów węzłowych  $\Delta \theta$ , wydłużeniami prętów  $\Delta s$  i wydłużeniem cięgiwy  $l$  o  $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$ , przy

czym  $H$  = napięcie,  $F$  = przekrój ściąg 05. Jeżeli pro topadła odległość węzła  $m$  od cięciwy (rys 107) jest równa  $v$ , to wskutek przyrostu  $\Delta \theta_m$  wzrośnie cięciwa o  $v \Delta \theta_m$ .

Wskutek przyrostu  $\Delta s$  wzrośnie cięciwa o  $\Delta s \cos \varepsilon = \frac{\Delta s}{s} \lambda$ . Zatem:

$$\Delta l = \sum y \Delta \theta + \sum \frac{\Delta s}{s} \lambda \quad (113)$$

W równaniu tym dla rys. 106 jest tylko jedna niewiadoma  $\Delta \theta_3$ .

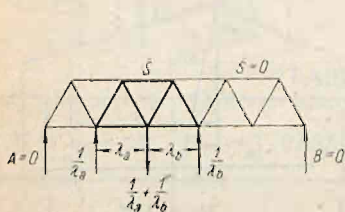
Równanie 111 można napisać (por. rys. 101):

$$W = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_a} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_b} = -y_{m-1} \cdot \frac{1}{\lambda_a} + y_m \left( \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} \right) - y_{m+1} \cdot \frac{1}{\lambda_b}$$

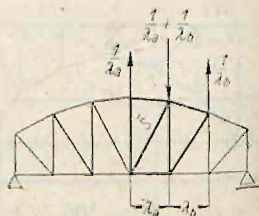
Jeżeli:  $\frac{1}{\lambda_a} = \bar{Q}_{m-1}$ ,  $\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_m$ ,  $\frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_{m+1}$ ,

to według równ. (100):  $W_m = \sum Q \delta = \sum \bar{S} \Delta s$ , (114)

przy czym  $\bar{S}$  są to napięcia w prętach wskutek sił  $Q$ , zaś  $\Delta s$  rzeczywiste wydłużenia. Suma  $\sum S \Delta s$  rozciąga się zwykle tylko na kilka prętów, na rys. 108. na trzy pręty, na rys. 109 i 110

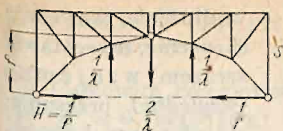


Rys. 109



Rys. 110

na siedem prętów, w innych prętach bowiem  $\bar{S} = 0$ . Na rys. 111 w żadnym pręcie  $\bar{S}$  nie jest = 0, więc tu nie warto stosować tej metody.



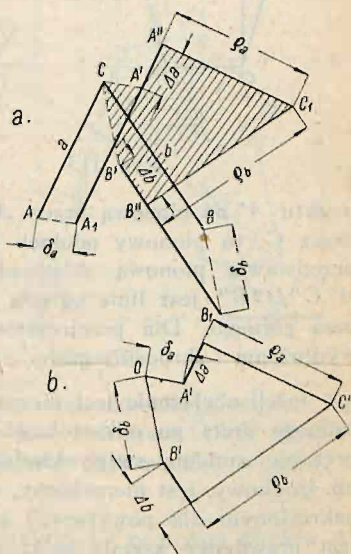
Rys. 111

## 16 Metoda wykreślna.

Jeżeli pręty  $a$  i  $b$  pewnej kratownicy płaskiej, schodzące się w węzle  $C$ , przejdą wskutek jej odkształcenia z położenia  $ACB$  w położenie  $A_1 C_1 B_1$  (rys. 112), to każdy z prętów doznaje

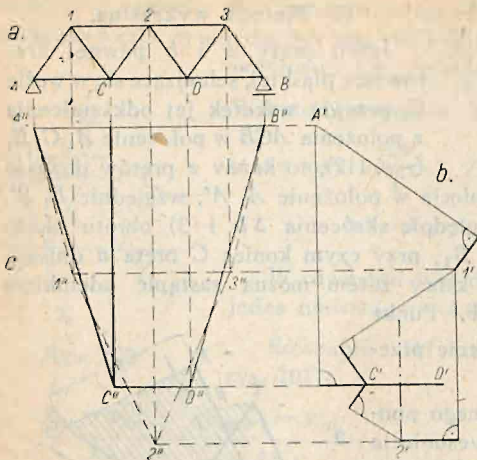
- 1) równoległego przesunięcia w położenie  $A_1 A'$ , względnie  $B_1 B'$ ,
- 2) wydłużenia  $\Delta a$ , względnie skrócenia  $\Delta b$  i 3) obrotu około punktu  $A_1$ , względnie  $B_1$ , przy czym koniec  $C$  pręta  $a$  opisuje łuk niezmiernie mały, który zatem można zastąpić odcinkiem  $\rho_a \perp a$ , podobnie  $\rho_b \perp b$ . Punkt  $C_1$  znajduje się w punkcie przecięcia  $\rho_a$  i  $\rho_b$ .

Wykreślimy z dowolnego punktu  $O$  (rys. 112b) przesunięcia węzłów  $A$  i  $B$ , mianowicie  $OA' \# \delta_a$  i  $OB \# \delta_b$ , to  $A'B'$  przedstawia wzajemne przesunięcie węzłów  $A$  i  $B$ . Z punktu  $A'$  wykreślimy wydłużenie  $\Delta a \parallel a$  w kierunku  $AC$ , zaś z  $B'$   $\Delta b \parallel b$  w kierunku  $CB$ ; z końców odcinków  $\Delta a$  i  $\Delta b$  poprowadzone  $\rho_a \perp a$  oraz  $\rho_b \perp b$  niech się przecinają w  $C'$ , to rys. b jest identyczny z rys. zakreskowanym, więc  $OC' \# CC_1 = \delta_c$  jest przesunięciem węzła  $C$ ,  $A'C'$  jest względnym przesunięciem węzłów  $A$  i  $C$ , zaś  $B'C'$  węzłów  $B$  i  $C$ . Podobnie można znaleźć punkt  $D'$ , odpowiadający węzłowi  $D$  kratownicy, nawiązującemu się do węzłów  $A$  i  $C$  prętami  $AD$  i  $CD$ , itd. Rys. b jest tzw. *planem przesunięć Williota*.



Rys. 112

Jeżeli kratownica (rys. 113) jest symetryczna i symetrycznie obciążona, to jeden pręt nie doznaje zmiany kierunku (mianowicie pręt, który leży w osi symetrii, względnie, którego ta oś jest symetralna; na rys. 113 pręt  $CD$ ). Odcinek równoległy do tego pręta  $C''D''$  na rys. b, przedstawiający w pewnej skali jego



Rys. 113

wydłużenie, względnie skrócenie, przedstawia zarazem wzajemne (względne) przesunięcie obu jego końców. Można więc, podobnie jak do punktów  $A'$  i  $B'$  na rys. 112b do końców odcinka  $C'D'$  nawiązywać dalsze punkty planu Williota. Węzeł  $A$  (rys. 113a; łożysko stałe) jest nieruchomy, zatem przesunięcie rzeczywiste dowolnego węzła  $C$  jest  $A'C'$ . Niech  $A''$  (rys. 113c) będzie rzutem

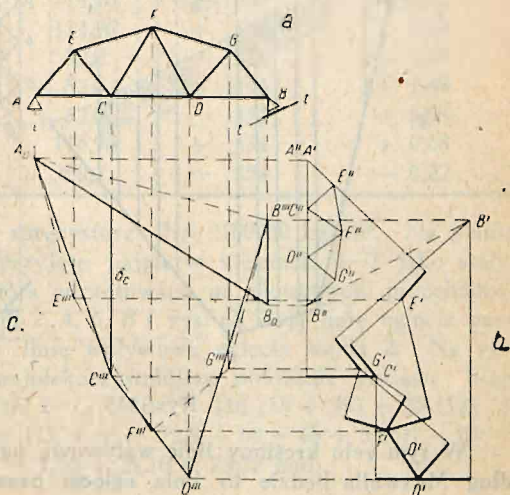
punktu  $A'$  na pionową przez  $A$ , zaś  $C''$  rzutem  $C'$  na pionową przez  $C$ . To pionowy odcinek między  $C''$  a zamykającą  $A''A'$  przedstawia pionową składową przesunięcia węzła  $C$ . Linia  $A''C''D''B''$  jest linią ugięcia pasa dolnego,  $A''1''2''3''B''$  zaś pasa górnego. Dla przejrzystości znaczymy na planie Williota wydłużenia i skrócenia grubo, zaś odcinki  $\rho$  cienko.

Jeżeli obciążenie jest niesymetryczne, to nie znamy kierunku żadnego pręta po odkształceniu. Jeśli przyjmiemy, że dowolny pręt nie zmienia swego kierunku, a jeden z jego przekrojów, np. środkowy, jest nieruchomy, to planem względnych przesunięć, nakreślonym dla powyższych przyjęć (fałszywych) wyznaczony jest prawdziwy kształt belki ugiętej, lecz w fałszywym położeniu. Odkształconą belkę, niby tarczę sztywną, należy jeszcze przesunąć tak, aby odpowiadała warunkom podporowym.

Niezmiernie małe przesunięcie tarczy można uważać za obrót około pewnego bieguna (por. str. 551), a końce wektorów wychodzących z dowolnego punktu  $O'$  (albo początki wektorów, których końce zbiegają się w  $O'$ ), przedstawiających przesunięcia lub prędkości punktów tarczy, tworzą figurę  $F''$ , podobną do danej tarczy, lecz obróconą o  $90^\circ$ . Rzeczywiste przesunięcie węzła  $C$  belki jest sumą geometryczną przesunięcia  $O'C'$  wzglę-

dem punktu  $O$  oraz przesunięcia  $C'' O'$  z powodu obrotu więc:  
 $C' C'' = C' O' + O' C''$ .

Całkowite rzeczywiste przesunięcie punktu  $A$  (łożysko stałe)  $A'' A' = 0$  (rys. 114 a), więc przesunięcie jego wskutek obrotu belki odkształconej jest  $A' O'$ . Punkt  $A''$  figury  $F''$ , od której wychodzą wektory przesunięć wskutek obrotu, zbiegające się w  $O'$ , nakrywa się więc z punktem  $A'$  planu przesunięć względnych. Punkt  $B''$  leży na prostej  $A'' B'' \perp AB$ . Rzeczywiste przesunięcie  $B'' B'$  punktu  $B$  możliwe jest tylko po torze  $tt$  łożyska ruchomego, więc  $B' B'' \parallel tt$ . Znajając dwa punkty  $A''$  i  $B''$  fig.  $F''$ , możemy ją wykreślić, a tym samym



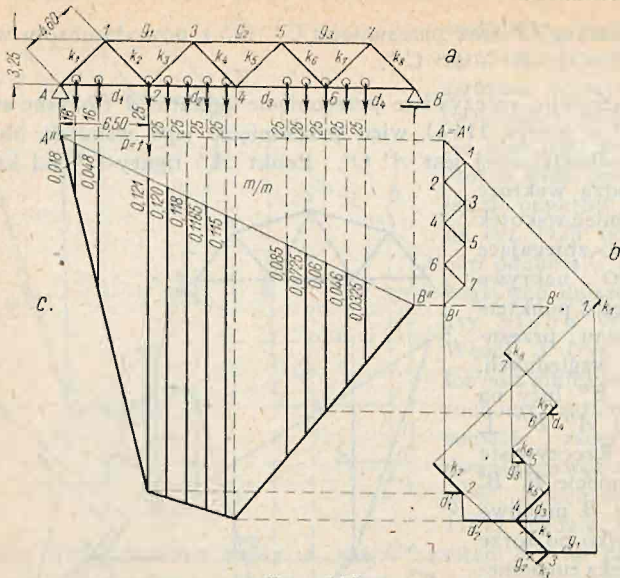
Rys. 114

możemy wyznaczyć rzeczywiste przesunięcie dowolnego węzła. Np. rzeczywiste przesunięcie węzła  $C$  jest wektorem  $C'' C'$  (rys. b). Jeżeli chodzi tylko o pionowe składowe przesunięcie węzłów, to kreślenie  $F''$  jest zbyteczne.

Jeżeli  $A_0$  leży na pionowej punktu  $A$  i poziomej punktu  $A''$ , podobnie  $B_0$ , zaś  $C''$  na pionowej  $C$  i poziomej punktu  $C'$ , to pionowy odcinek pomiędzy  $C'''$  i zamykającą  $A_0 B_0$  jest pionowym przesunięciem  $\delta_c$  węzła  $C$ .

Zatem  $A_0 C''' D''' B'''$  (rys. 114 c) jest linią ugięcia pasa dolnego,  $A_0 E''' F''' G''' B'''$  linią ugięcia pasa górnego belki  $AB$ .  $B_0 B'''$  pionową składową przesunięcia punktu  $B$ .

Przykład (rys. 115). Znaleźć największe ugięcie węzła 2 belki kratowej (rys. a), obciążonej pociągami ciężkim normalnym (norma  $A$  wg rozporządzenia b. Min. Kolei z 10. III. 1923 r.)



Rys. 115

W tym celu kreślimy linię wpływową ugięcia węzła 2. Według Maxwella będzie to linia ugięcia pasa pomostowego pod ciężarem  $P = 1$ , zaczepiającym w węźle 2. Na tabeli zestawiono długości  $s$ , przekroje  $F$  i napięcia  $S$  prętów. Ostatnia rubryka podaje tysiąckrotne wartości wydłużeń prętów:

Pręt		$s$ cm	$F$ cm <sup>2</sup>	$S$ kg	$10^3 ds = \frac{Ss}{EF} 10^3$ cm	
P a s	górnny	$g_1$	650	308,8	— 1500	— 1,5
		$g_2$	650	359,2	— 1000	— 0,86
		$g_3$	650	308,8	— 500	— 0,50
	dolny	$d_1$	650	208,4	+ 750	+ 1,11
		$d_2$	650	208,4	+ 1253	+ 1,86
		$d_3$	650	208,4	+ 752	+ 1,12
		$d_4$	650	208,4	+ 251	+ 0,37

(Dalszy ciąg tabelki na stronie następnej)

	Pręt	s cm	F cm <sup>2</sup>	S kg	$10^3 ds = \frac{Ss}{EF} 10^3$ cm
Krzyżulce	$k_1$	460	359,2	— 1060	— 0,65
	$k_2$	460	114,96	+ 1060	+ 2,02
	$k_3$	460	114,96	+ 354	+ 0,68
	$k_4$	460	52,0	— 354	— 1,49
	$k_5$	460	52,0	+ 354	+ 1,49
	$k_6$	460	52,0	— 354	— 0,68
	$k_7$	460	114,96	+ 354	+ 0,68
	$k_8$	460	359,2	— 354	— 0,22

Przyjęto moduł sprężystości  $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$ . Na planie Williota (rys. b) przyjęto najpierw kierunek 4—3 jako stały. Punkty planu Williota odrzutowane na pionowych, przechodzących przez węzły A, 2, 4, 6, B (rys. c), dają linię ugięcia pasa dolnego, a zarazem linię wpływową ugięcia węzła 2. Na rys. a i c nakreślono najniekorzystniejsze położenie pociągu. Największe ugięcie węzła 2  $\delta_2 = 10^{-3}$ .  $[16(18 + 48) + 25(121 + 120 + 118 + 116,5 + 115 + 85 + 72,5 + 60 + 46 + 32,5)] = 10^{-3}$ .  $[16 \cdot 66 + 25 \cdot 886,5] = 1,06 + 23,16 = 23,22 \text{ mm}$ .