Ramy eliptyczne*).

Napisał Stefan Bryła.

3. Siła pionowa w dowolnem miejscu rozpory.

Z rys. 5 czytamy

$$A_0 = A = P\frac{v}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

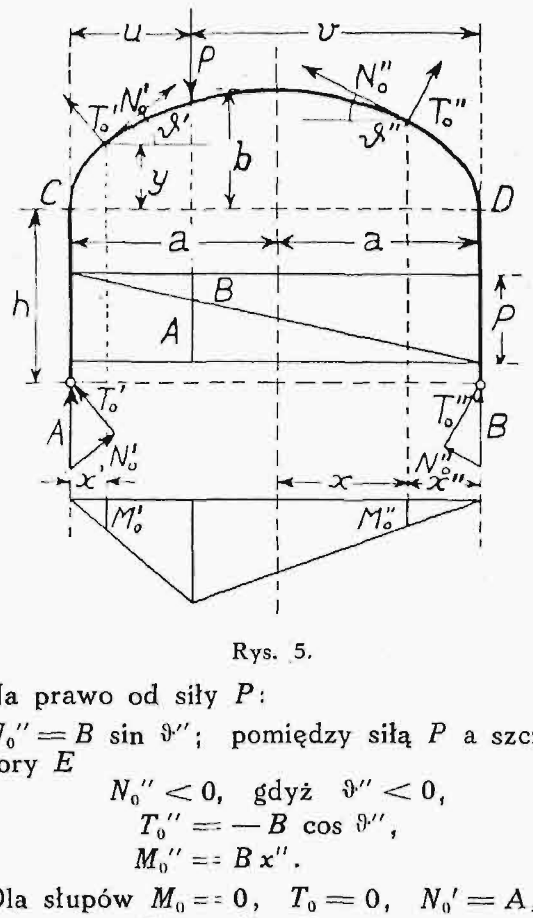
$$B_0 = B = P\frac{u}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Na lewo od siły P:

$$N_0' = A \sin \vartheta' = P\frac{v}{2a} \sin \vartheta'$$

$$T_0' = A \cos \vartheta' = P\frac{u}{2a} \cos \vartheta'$$

$$M_0' = A x' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$



Rys. 5.

Na prawo od siły P:

$N_0'' = B \sin \vartheta''$; pomiędzy siłą P a szczytem rozpory E

$$N_0'' < 0, \quad \text{gdyż} \quad \vartheta'' < 0,$$
$$T_0'' = -B \cos \vartheta'',$$
$$M_0'' = B x''.$$

Dla słupów $M_0 = 0$, $T_0 = 0$, $N_0' = A$,
$N_0'' = B$, $S = 0$.

Ponieważ M_0 maleje w częściach stromych rozpory i jest równe 0 tam, gdzie ds najbardziej różni się od dx, przeto w równaniu (11) na R przyjmiemy $ds = dx$, a wartość przybliżoną R', w ten sposób otrzymaną, pomnożymy przez spółczynnik zwiększający φ_1, który otrzymamy z porównania wyników przybliżonych i dokładnych dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ (równ. 28). Będzie więc

$$R' = \int_0^u M_0'(y+h)\,dx' + \int_0^v M_0''(y+h)\,dx''.$$

*) Ciąg dalszy do str. 98 w zesz. 5 z r. b.

Z uwagi na (35) jest:

$$\int_0^u M_0'(h+y)\,dx' = \left[h\int_0^u x'\,dx' + \int_0^u y\,x'\,dx'\right]A. \quad (36)$$

Ale

$$\int_0^u x'\,dx' = \frac{1}{2}u^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

zaś

$$\int_0^u y\,x'\,dx' = b\int_0^u \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,x'\,dx'.$$

Uważając kierunek w prawo od osi ramy jako dodatni kierunek osi x, otrzymamy

$$x = x' - a, \quad \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}-1\right)^2},$$

zatem

$$\int_0^u y\,x'\,dx' = b\int_0^u \sqrt{1-\left(\frac{x'}{a}-1\right)^2}\,x'\,dx' =$$

$$= a^2 b\int_0^{u:a} \sqrt{1-(x-1)^2}\,x\,dx.$$

Podstawmy $x - 1 = z$, $x = z + 1$, $dx = dz$, to

$$\int \sqrt{1-(x-1)^2}\,x\,dx = \int \sqrt{1-z^2}\,(z+1)\,dz =$$

$$= \int z\sqrt{1-z^2}\,dz + \int \sqrt{1-z^2}\,dz.$$

Ale

$$\int z\sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}} dz^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left(1-z^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1-z^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\sqrt{1-z^2}\right)^3 = \frac{-1}{3}\left(\sqrt{2x-x^2}\right)^3,$$

zaś

$$\int \sqrt{1-z^2}\,dz = \frac{z}{2}\sqrt{1-z^2} + \frac{1}{2}\arcsin z =$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x-1).$$

Więc

$$\int \sqrt{1-(x-1)^2}\,x\,dx = \frac{1}{6}\sqrt{x(2-x)}\,(2x^2-x-3) +$$

$$+ \frac{1}{2}\arcsin(x-1) = F(x) \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Zamieniając w wyrażeniu powyższem x na $\frac{u}{a}$, otrzymamy $F\left(\frac{u}{a}\right)$.

Będzie więc

$$\int_0^{u:a} \sqrt{1-(x-1)^2}\, x\, dx = F\left(\frac{u}{a}\right)+\frac{\pi}{4},$$

zaś

$$\int_0^u y\, x'\, dx' = a^2 b\left[F\left(\frac{u}{a}\right)+\frac{\pi}{4}\right].$$

Podstawmy to, jak również i (37), w (36), to otrzymamy

$$\int_0^u M_0'(h+y)\, dx' = A\left\{h\frac{1}{2}u^2+a^2b\left[F\left(\frac{u}{a}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \quad (37)$$

Zamieniając w powyższem u na v, A na B, otrzymamy

$$\int_0^v M^{0''}(h+y)\, dx'' = B\left\{\frac{1}{2}h v^2+a^2b\left[F\left(\frac{v}{a}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\right\}. \quad (38)$$

Ponieważ $A u^2 + B v^2 = P uv$

$$A+B=P,$$

zaś

$$A\cdot F\left(\frac{u}{a}\right)+B\cdot F\left(\frac{v}{a}\right)=\frac{P}{2a}\left[vF\left(\frac{u}{a}\right)+uF\left(\frac{v}{a}\right)\right],$$

przeto przez dodanie (37) i (38) otrzymamy

$$R'=\left\{\frac{1}{2}\,h\,uv+\frac{1}{2}\,ab\left[vF\left(\frac{u}{a}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+uF\left(\frac{v}{a}\right)\right]+\frac{\pi}{4}\,a^2b\right\}P.$$

Pierwiastek występujący w wyrażeniu $F(x)$ posiada zarówno dla $x=\frac{u}{a}$, jak i dla $x=\frac{v}{a}$ tę samą wartość:

$$\sqrt{x(2-x)}=\sqrt{\frac{u}{a}\left(2-\frac{u}{a}\right)}=\sqrt{\frac{u}{a}\,\frac{v}{a}}=\sqrt{\frac{uv}{a^2}}.$$

Argument funkcji cyklicznej $x-1$, zarówno dla $x=\frac{u}{a}$, jak i dla $x=\frac{v}{a}$, posiada tę samą wartość absolutną, ale odwrotny znak, gdyż

$$\frac{u}{a}-1=-\left(\frac{v}{a}-1\right).$$

Jeżeli tedy

$$\sin\psi_1=\frac{v}{a}-1, \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

to

$$R'=(\varkappa h+\lambda b)\,a^2 P, \quad \ldots \quad (40)$$

przyczem

$$\varkappa=\frac{1}{2}\,\frac{u}{a}\,\frac{v}{a}, \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

zaś

$$\lambda=\frac{1}{4}\left[\pi-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{u}{a}\,\frac{v}{a}}\left(3-\frac{u}{a}\,\frac{v}{a}\right)-\frac{v-u}{a}\,\psi_1\right].$$

Spółczynniki $\varkappa$ i λ, obliczone na podstawie wzorów (39), (41) i (42), podaje tabela 3 dla różnych wartości $\frac{u}{a}$.

TABELA 3.

$\frac{u}{a}$	$\frac{v}{a}$	$\varkappa$	λ
0	2,0	0	0
0,2	1,8	0,18	0,1515
0,4	1,6	0,32	0,277
0,5	1,5	0,375	0,3295
0,6	1,4	0,42	0,373
0,8	1,2	0,48	0,433
1,0	1,0	0,50	0,452

Dla $u=a=v$ czyli dla $\frac{u}{a}=1$ i dla $a=b=r$ jest

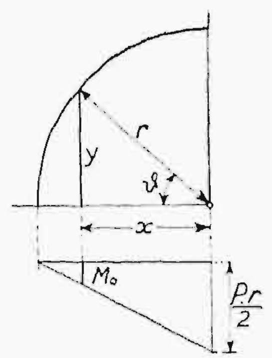
$$R_0'=(0{,}5\,h+0{,}452\,r)\,r^2 P. \quad \ldots \quad (43)$$

Dla tegoż przypadku znajdziemy dokładną wartość R_0. Wedł. rys. 6 jest

$$y=r\sin\vartheta,$$

$$x=r\cos\vartheta,$$

$$ds=r\,d\vartheta,$$



Rys. 6.

$$M_0=\frac{P}{2}(r-x)=\frac{r}{2}(1-\cos\vartheta).$$

Zatem

$$R_0=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r}{2}(1-\cos\vartheta)(h+r\sin\vartheta)\,r\,d\vartheta=$$

$$=r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(h-h\cos\vartheta+r\sin\vartheta-r\sin\vartheta\cos\vartheta)\,d\vartheta.$$

Ale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\vartheta=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\vartheta=1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta=\frac{1}{2}.$$

Zatem

$$R_0=r^2\left[h\left(\frac{\pi}{2}-1\right)+r\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]P$$

$$R_0=(0{,}571\,h+0{,}5\,r)\,r^2 P. \quad \ldots \quad (44)$$

Tabela 4 podaje R_0 i R_0' obliczone według wzorów 43 i 44, różnice $R - R'$ i wartość $\varepsilon = \frac{R-R'}{R'}$ dla kilku wartości $h:r$.

TABELA 4.

$\frac{h}{a}=\frac{h}{r}$	$R_0':r^3$	$R_0:r^3$	$\frac{R_0-R_0'}{r^3}$	ε
0	0,452	0,500	0,048	0,106
1	0,952	1,071	0,119	0,125
2	1,452	1,642	0,190	0,130
4	2,452	2,784	0,332	0,135
∞	$0,5\frac{h}{r}$	$0,571\frac{h}{r}$	$0,071\frac{h}{r}$	0,142

Dla ramy o rozporze prostej, czyli dla $b = 0$ i dla $u = a$, jest

$$R'_{II} = R_{II} = \frac{1}{2} h a^2 P,$$

więc błąd równania na R' jest $\delta = 0$.

Przyjmiemy tedy, że dla dowolnego $\alpha = \frac{b}{a}$

$$\delta = \alpha\varepsilon$$

zaś

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= 1 + \alpha\varepsilon \\ R &= \varphi_1 R' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (45)$$

a

Wartość ε przyjmować będziemy z tabeli 4 zależnie od stosunku $h:a$. Dla wartości pośrednich $\frac{h}{a}$ interpolować można linjowo.

Przykłady.

Przykład 1.

$$P = 1,$$

$$u = v = a, \quad R' = (0{,}5h + 0{,}452b)\,a^2,$$

1) $a = 16$, $b = 8$, $h = 0$, $R' = 0{,}452.8.\,16^2 = 925\,\mathrm{m}^3$,

$$\alpha = \frac{b}{a} = 0{,}5, \quad \varepsilon = 0{,}106, \quad \delta = 0{,}054,$$

$$R = 1{,}054.925 = 974\ \mathrm{m}^3,$$

2) a, b j. w., $h = a$,

$$R' = (0{,}5.16 + 0{,}452.8)\,16^2 = 2973,$$

$$\varepsilon = 0{,}125, \quad \delta = 0{,}0625,$$

$$R = 1{,}0625.2973 = 2048 + 925 = 3157\,\mathrm{m}^3,$$

3) $h = 2a$, $R' = (0{,}5.32 + 0{,}452.8)\,16^2 = 5021\ \mathrm{m}^3$,

$$\varepsilon = 0{,}130, \quad \delta = 0{,}065,$$

$$R = 1{,}065.5021 = 5345\ \mathrm{m}^3,$$

4) $h = 4a$, $R' = 4.2048 + 925 = 9117$, $\varepsilon = 0{,}135$,

$$\delta = 0{,}0675, \quad R = 1{,}0675.9117 = 9747\ \mathrm{m}^3,$$

5) $u = \frac{a}{2} = \frac{v}{4}$, $a = 16$, $b = 8\,\mathrm{m}$, $h = 0$,

$$\varkappa = 0{,}375, \quad \lambda = 0{,}3292,$$

$$R = 1{,}054.0{,}3295.16^2.8 = 711\ \mathrm{m}^3.$$

Tabela 5 podaje wartości $y M_0 ds$ i $M_0 ds$ dla $a = 16\,\mathrm{m}$, $b = 8\,\mathrm{m}$, $u = a$ obliczone dla 16 przekrojów oddalonych o $ds = 1\,\mathrm{m}$ na podstawie wykresu. Według tej tablicy dokładna wartość

$$R = \Sigma(h + y) M_0 ds = h\Sigma M_0 ds + \Sigma y M_0 ds = 2.(67{,}18h + 477{,}1).$$

Stąd dla

$h = 0$ $R = 954{,}2$ (974, 2,08%),
$h = a$ $R = 3102{,}2$ (3157, 1,74%),
$h = 2a$ $R = 5250$ (5345, 1,81%),
$h = 4a$ $R = 9546$ (9747, 2,06%).

Rubryka 7 tab. 5 podaje moment belki wolno podpartej w przekrojach lewej połowy pod obciążeniem $P = 1$ w odległości $u = \frac{a}{2}$ od lewej podpory, zaś rubr. 8—wartości $y M_0 ds$, tudzież $\Sigma M_0 ds = 463{,}8$. Dla prawej połowy belki $M_0^p = \frac{1}{2} M_0$, jeżeli M_0 jest tenże moment dla $u = a$. Zatem dla $u = \frac{a}{2}$

$$\Sigma M_0 y\, ds = 463{,}8 + \frac{1}{2}\, 477{,}1 = 702{,}4\ (711,\ 1{,}20\%).$$

TABELA 5.

1	2	3	4	5	6	7	8
L	y	ds	M_0	$yM_0\,ds$	$M_0\,ds$	M_0^l	$y\,M_0^l\,ds$
1	8	1	7,75	62	7,75	4,125	33
2	7,95	1	7,25	57,5	7,25	4,375	34,8
3	7,86	1	6,75	53	6,75	4,625	36,4
4	7,79	1,03	6.25	50	6,44	4,875	39,2
5	7,62	1,03	5,75	45,1	5,93	5,125	40,2
6	7,47	1,04	5,25	40,8	5,46	5,375	41,8
7	7,26	1,04	4,75	35,9	4,94	5,625	42,5
8	7,01	1,04	4,25	31	4,42	5,875	42,9
9	6,75	1,05	3,75	26,6	3,94	5,625	40
10	6,41	1,06	3,25	22	3,45	4,875	33
11	6,05	1,06	2,75	17,6	2,92	4,125	26,5
12	5,56	1,07	2,25	13,4	2,41	3,375	20
13	5,00	1,17	1,75	10,2	2,05	2,625	15,4
14	4,29	1,27	1,25	6,8	1,59	1,875	10,2
15	3,38	1,47	0.75	3,7	1,10	1,125	5.6
16	2,05	3,04	0,25	1,5	0,78	0,375	2,3
				477,1	67,18		463,8

W nawiasach są wartości obliczone powyżej wzorem (45) i (40) i różnice w procentach. Błąd, jak widzimy, jest przeważnie mniejszy od 2%, a że $\alpha = 0{,}5$ jest w połowie pomiędzy $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$, dla których to wartości błąd wzoru (45) znika, przeto błąd największy tego wzoru jest wogóle tylko niewiele większy od 2%. Wzór (45) więc jest wystarczająco dokładny.

Przykład 2. Dla ramy według przykładu 1 należy znaleźć moment, siłę osiową i siłę poprzeczną w przekrojach oddalonych od osi ramy o $x = 0$,

$x = \pm \frac{a}{2}$ i $x = \pm a$ dla różnych rodzajów obciążenia. W tym celu znajdziemy dla $x = \frac{a}{2} = 4{,}5$ m

$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = b\sqrt{1 - \frac{1}{4}} =$$
$$= 6\sqrt{\frac{3}{6}} = 4\sqrt{3} = 5{,}2\text{ m},$$
$$a^4y^2 + b^4x^2 = 9^4.5{,}2^2 + 6^4.4{,}5^2 =$$
$$= 177\,300 + 26\,200 = 203\,500,$$
$$\sqrt{203\,500} = 451,$$
$$\cos\vartheta = \frac{9^2.5{,}2}{451} = 0{,}936,$$
$$\sin\vartheta = \frac{-6^2.4{,}5}{451} = -0{,}360,$$
$$m_4 = 14 + 5{,}2 = 19{,}2;$$

dla

$$x = \pm\frac{a}{2} \qquad x = +\frac{a}{2},$$
$$n_4 = -0{,}936,$$
$$t_4 = \pm 0{,}26.$$

1) Ciężar skupiony $P = 500$ kg w dowolnem miejscu.

$$S = 0,$$

A) $u = a$.

$$R' = (0{,}5.14 + 0{,}452.9).6^2.500 =$$
$$= (7 + 2{,}712).81.500 = 394\,t\text{ m}^3 \text{ (równ. 40)},$$
$$h:a = 14:9 = 1{,}555.$$

Wedł. tab. 4,

$$\varepsilon = 0{,}125 + 0{,}555.(0{,}130 - 0{,}125) =$$
$$= 0{,}125 + 0{,}0028 = 0{,}1278,$$
$$\varphi_1 = 1 + 0{,}667.0{,}1278 = 1{,}085 \text{ (równ. 45)},$$
$$R = 1{,}085.394 = 427{,}5\,t\text{ m}^3,$$
$$H = \frac{427{,}5}{10890} = 0{,}0393\,t\text{ m}^3 \text{ (por. przykł. 1)}.$$

Moment w wierzchołku, $x = 0$,

$$M_0 = \frac{1}{4}P.2a = \frac{1}{4}.9 = 2{,}24\,tm,$$
$$M = M_0 - H(h + b) = 2{,}24 - 0{,}0393.20 =$$
$$= 2{,}25 - 0{,}786 = 1{,}464\,tm.$$

Siła osiowa

$$N = H = 0{,}0393\,t.$$

Siła poprzeczna

$$T = \pm\frac{1}{2}P = \pm 0.25\,t.$$

W odległości $x = \frac{a}{2}$ na lewo od wierzchołka:

$$M_0 = \frac{1}{2}P.\frac{a}{2} = \frac{1}{4}0{,}5.9 = 1{,}122\,tm,$$
$$M = 1{,}122 - 0{,}0396.19{,}2 = 1{,}122 - 0{,}760 = 0{,}362\,tm,$$
$$N_0 = \frac{1}{2}P.0{,}360 = 0{,}09\,t,$$
$$N = N_0 + 0{,}0393.0{,}936 = 0{,}09 + 0{,}0368 = 0{,}1268\,t,$$
$$T_0 = \frac{1}{2}P.0{,}936 = 0{,}234\,t,$$
$$T = T_0 - 0{,}0393.0{,}36 = 0{,}234 - 0{,}0141 = 0{,}2199\,t.$$

W odległości $x = \frac{a}{2}$ na prawo od wierzchołka:

$$M = 0{,}362\,tm, \quad N = 0{,}126\,t, \quad T = -0{,}2199\,t.$$

Dla $x = -a$ (punkt C),

$$N = \frac{P}{2} = 0{,}25\,t, \quad T = -0{,}0393\,t.$$

Dla $x = +a$ (punkt D),

$$N = 0{,}25\,t \qquad T = +0{,}0393\,t.$$
$$M_D = M_C = -Hh = 0{,}0393.14 = -0{,}55\,tm.$$

B) $u = \frac{a}{2}, \quad v = \frac{3}{2}a.$

Wedł. (33)

$$A = P\frac{3}{4} = 0{,}375\,t.$$

Wedł. (34)

$$B = P\frac{1}{4} = 0{,}125\,t.$$

Wedł. (40)

$$R' = (0{,}375.14 + 0{,}3295.6)\,a^2P =$$
$$= (5{,}255 + 1{,}977)\,a^2P = 7{,}232.9^2.0{,}5 = 293,$$
$$R = 1{,}085\,R' = 318\,t\text{ m}^3 \text{ (równ. 45)}$$
$$H = \frac{318}{10890} = 0{,}0292\,t \text{ (równ. 13 i przykł. 1)}.$$

Dla

$$x = \frac{a}{2}, \quad M_0 = B.\frac{a}{2} = 0{,}125.4{,}5 = 0{,}563\,tm,$$
$$M = M_0 - 0{,}0292.19{,}2 = 0{,}563 -$$
$$- 0{,}5605 = 0{,}0025\,tm.$$

Dla

$$x = 0, \quad M_0 = B.a = 0{,}125.9 = 1{,}125\,tm,$$
$$M = M_0 - 0{,}0292.20 = 1{,}125 - 0{,}584 = 0{,}541\,tm.$$

Dla

$$x = -\frac{a}{2}, \quad M_0 = A\frac{a}{2} = 0{,}375.4{,}5 = 1{,}689,$$
$$M = 1{,}689 - 0{,}5605 = 1{,}1285\,tm.$$

Dla

$$x = 0, \quad N = 0{,}0292\,t, \quad T = -B = 0{,}125\,t.$$

Dla

$$x = +\frac{a}{2}, \quad N_0 = 0{,}125.0{,}36 = 0{,}045\,t,$$
$$N = N_0 + 0{,}936\,H = 0{,}045 + 0{,}02735 = 0{,}07235,$$
$$T_0 = -B.0{,}936 = -0{,}117,$$
$$T = T_0 + 0{,}36\,H = -0{,}117 + 0{,}0105 = -0{,}2065\,t.$$

Dla

$$x = -\frac{a}{2}.$$

Na lewo od siły P $N'_0 = A.0{,}36$, $T'_0 = A.0{,}936$

„ prawo „ „ P $N_0'' = -B.0{,}36$, $T_0'' =$
$= -B.0{,}936$.

$$N' = N_0' + H.0{,}936 = 0{,}135 + 0{,}02735 = 0{,}16235\,t$$
$$N'' = -0{,}045 + 0{,}02735 = -0{,}01765\,t,$$
$$T' = T_0' - 0{,}36\,H = 0{,}352 - 0{,}0105 = 0{,}3415,$$
$$T'' = -0{,}117 - 0{,}0105 = -0{,}1275.$$

Punkt C $N = 0{,}375\,t$, $T = 0{,}0292\,t$,

„ D $N = 0{,}125\,t$, $T = -0{,}0292\,t$,

$$M_C = M_D = -0{,}0292.14 = -0{,}41\,tm.$$

(*d. c. n.*)