

III. Kratownice przestrzenne.

Łożyska utworów przestrzennych mogą być:

a) stałe (fig. 313); w obliczeniu dają się zastąpić trzema prętami podporowymi, których siły wewnętrzne są równe odpowiednim składowym oddziaływaniom;

b) ruchome linjowe (jednokierunkowe, wahadłowe = dwu prętom podporowym; fig. 314), poruszające się w linii prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez pręty podporowe; można je wykonać jako wałkowe lub przesuwowe;

c) ruchome płaszczyznowe (wielokierunkowe) = jednemu prętowi podporowemu (fig. 315), poruszające się w płaszczyźnie prostopadłej do pręta podporowego w dowolnym kierunku; można je wykonać jako kulowe lub wałkowe o dwu szeregach wałków, ruchomych w osiach prostopadłych do siebie.

Stalość zewnętrzna utworu w przestrzeni uwarunkowana jest spełnieniem sześciu warunków równowagi. Przeto 6 prętów podporowych ustala ciało w przestrzeni, o ile nie zachodzi wypadek wyjątkowy, w którym da się poprowadzić prosta przecinająca wszystkie pręty podporowe. Nie mogą zatem więcej niż trzy pręty podporowe leżeć w jednej płaszczyźnie, ani przechodzić

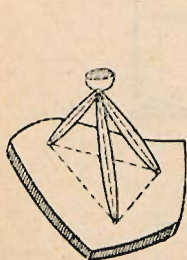


Fig. 313.

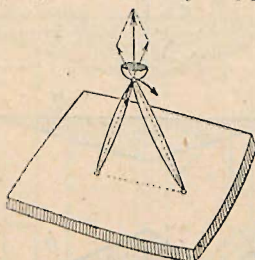


Fig. 314.

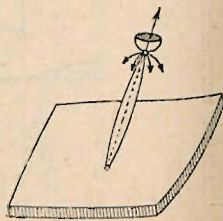


Fig. 315.

przez jeden punkt (względnie być \parallel); wreszcie ciało musi być podparte conajmniej w trzech punktach. W przeciwnych bowiem razach podparcie jest chwiejne.

Ponieważ każdy węzeł przestrzenny daje trzy warunki równowagi, przeto statycznie wyznaczalna kratownica przestrzenna musi posiadać $p = 3w$ prętów istotnych i podporowych, z czego prętów podporowych conajmniej $p_p = 6$, zatem istotnych $p_i = 3w - 6$. Najczęściej stosowane utwory przestrzenne, składające się z narożników, pierścieni i przekątni, leżących na powierzchni kratownicy (kopuły, dachy wieżowe, namiotowe, filary itd.), posiadają łożysko i prętów podporowych znacznie więcej. Mianowicie zwykle dla n naroży, $p_p = 2n$ (w każdym węźle podporowym łożysko ruchome), jeżeli dołem istnieje pierścień podporowy; zaś $p_p = 3n$ (w każdym węźle podporowym łożysko stałe), jeżeli pierścienia podporowego niema. Wtedy dla zachowania statycznej wyznaczalności ilość prętów istotnych wynosić musi $p_i = 3w - 2n$, względnie $p_i = 3w - 3n$. Zazwyczaj osiąga się to w ten sposób, że w kopułach pierścień najwyższy wykonywa się jako pierścień otwarty, zwykle używany pod latarnię, w dachach, posiadających zaś ostro szczyt, opuszcza się w obliczeniu pręty szczytowe, uważając je z wystarczającą dokładnością za ustrój drugorzędny.

Np. filar o postaci, jak fig. 316, jest statycznie wyznaczalny; posiada bowiem $w = 12$ węzłów, zaś $p = 36 = 3w$ prętów, w czym $p_i = 30$, $p_p = 6$. Zazwyczaj jednak opuszcza się pręty istotne 1-3 i 9-11, zwiększając odpowiednio ilość prętów podpartych. Por. fig. 317, gdzie $p_i = 28$, $p_p = 8$,

$p = 28 + 8 = 36$, oraz fig. 318, gdzie $p_i = 24$, $p_p = 12$, $p = 24 + 12 = 36$.
 Ustrój wedle fig. 318 jest częściej używany.

Statycznie wyznaczalną kratownicę przestrzenną otrzymać można:

- przez dołączenie do stałej podstawy, względnie stałej kratownicy, nowych węzłów, każdego przy pomocy trzech prętów (istotnych lub podporowych);
- przez połączenie ze stałą statycznie wyznaczalną kratownicą drugiej kratownicy statycznie wyznaczalnej przy pomocy sześciu prętów;
- przez wymianę prętów w istniejącej statycznie wyznaczalnej kratownicy (por. fig. 316—318, a także str. 1234); wymieniać można pręty istotne

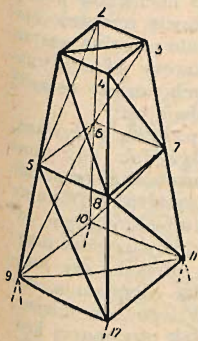


Fig. 316.

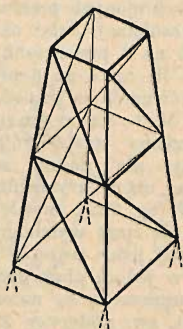


Fig. 317.

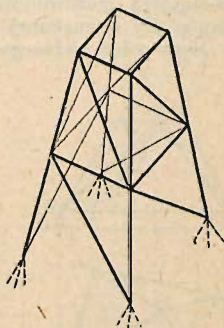


Fig. 318.

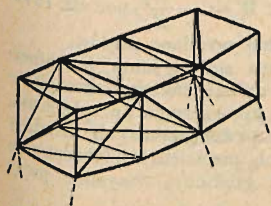


Fig. 319.

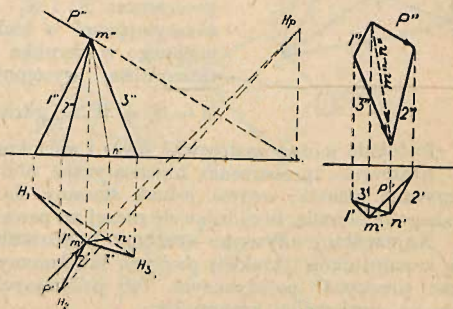


Fig. 320.

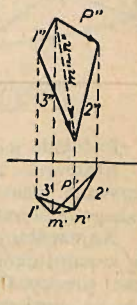


Fig. 321.

między sobą lub z podporowymi, przemieszczając je wogóle dowolnie, tak jednak, aby utrzymać wewnętrzną i zewnętrzną stałość kratownicy.

Kształtem statycznie wyznaczalnej kratownicy przestrzennej, jaki daje ująć się najłatwiej, a z którego dadzą się wyprowadzić prawie wszystkie używane postacie, jest kratownica siatkowa (fig. 319), której wszystkie pręty powiązane są w trójkąty, a leżą na powierzchni, zamykającej swojemi płaszczyznami pewną przestrzeń.

Wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach kratownicy przestrzennej. a) Wyznaczanie sił wewnętrznych w węzle trójprętowym. Przez kierunek siły P i jeden z prętów, np. 2 (fig. 320), przeprowadza się płaszczyznę ($P-2$), która przecina się z płaszczyzną, przechodzącą przez pozostałe pręty (1-3) wedle prostej (mn). Siłę P rozkłada się następnie

w obu rzutach na siły 2 i (mn), a wreszcie składową (mn) na siły 1 i 3 (fig. 321). Wielkości sił 1, 2 i 3 znajduje się z składu rzutów tychże sił.

Zazwyczaj można jedną z płaszczyzn przeprowadzić równoległe, względnie prostopadle do płaszczyzny rzutowej, a wtedy wyznaczenie sił wewnętrznych znacznie się upraszcza.

Metody tej używamy również, gdy w węzle o większej ilości prętów trzy siły wewnętrzne są nieznanne, a pozostałe wiadome.

b) Metoda momentów używana, gdy kratownica nie ma węzłów trójprętowych.

Prowadzi się płaszczyznę przekroju tak, aby przecięła pręt, którego siłę wewnętrzną chcemy wyznaczyć, wybierając jako oś momentów prostą, przecinającą możliwie wiele przekrojonych prętów, i ustawia równanie momentów siły zewnętrznej i siły szukanej. Jeżeli oś momentu przecina wszystkie pręty prócz badanego (np. 5 na 6 przeciętych), wystarczy jedno równanie; o ile np. 4 na 6 przeciętych, należy ustawić dwa równania ze względu na dwie osi.

c) Metoda wymiany prętów używana, gdy niema węzła trójprętowego lub gdy inne metody nie dadzą się zastosować (znacznie częściej niż w kratownicach płaskich). Dowolny pręt W (fig. 322), zwykle w pierścieniu górnym, odrzuca się (pręt wymienny), tak, aby uzyskać przynajmniej jeden węzeł o trzech prętach, nie leżących w jednej płaszczyźnie; dla utrzymania stałości umieszcza się natomiast w dogodnym miejscu pręt, t. zw. zastępczy Z . W tak otrzymanej kratownicy wyznacza się siły wewnętrzne S_0 i Z_0 dla obciążenia zewnętrznego (stan $X=0$), oraz siły wewnętrzne S_1 i Z_1 dla obciążenia siłami $=1$, zaczepiającymi w końcach usuniętego pręta wymiennego w kierunku osi tegoż (stan $X=1$). Siły rzeczywiste, występujące w prętach, wynoszą:

$$S = S_0 + WS_1, \text{ gdzie: } W = -\frac{Z_0}{Z_1}, \text{ por. str. 1212.}$$

Podobnie można zastosować dwu- i wielokrotną wymianę prętów.

Kratownice przestrzenne hiperstatyczne oblicza się tak samo, jak hiperstatyczne płaskie; wogóle jednak staramy się unikać takiego skomplikowanego obliczenia, decydując się raczej na pewne uproszczenia i przybliżenia.

Najczęściej używane systemy kratownic przestrzennych składają się z narożników (krokwi) prostych lub łamanych, pierścieni wielobocznych, oraz przekątni (pojedynczych lub podwójnych gibkich); wszystkie pręty leżą na powierzchni kratownicy.

a) Kopyły przestrzenne. Węzły narożników leżą na krzywej; w najczęściej używanych kopolach Schwedlerowskich na paraboli (por. fig. 323). Łożyska zwykle ruchome o kierunku ruchu prostopadłym do jednego z przyległych pierścieni (fig. 323). Dla kopol o rzucie poziomym regularnym i obciążenia rozłożonego jednostajnie na całym pierścieniu (np. obciążenie stałe) obliczenie przeprowadza się następująco (fig. 324):

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -P_1 \frac{k_1}{a_1}, & K_n &= -\left(\sum_1^n P\right) \frac{k_n}{a_n} \\ R_1 &= -\frac{1}{2 \cos \alpha} P_1 \frac{b_1}{a_1}, & R_n &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \left[\left(\sum_1^{n-1} P\right) \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \left(\sum_1^n P\right) \frac{b_n}{a_n} \right] \end{aligned} \right\} (1)$$

dla pierścienia murewego (najniższego) $R_m = \frac{1}{2 \cos \alpha} \left(\sum_1^{m-1} P\right) \frac{b_m}{a_m}$

We wzorach tych 2α jest to kąt, jaki zawierają dwa sąsiednie przęty pierścienia. Dla kopuły ośmiobocznej umiarowej $\alpha = 67^{\circ} 30'$.

Dla sił inaczej rozłożonych (np. wiatru) najlepiej użyć metody Müller-Breslau'a (fig. 325). Obciążenie węzła (w węzłach niższych złożone z siłą wewnętrzną krokwi górnej i składowymi przekątni w kierunku tej krokwi)

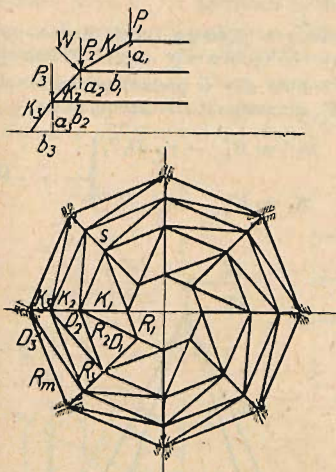


Fig. 323.

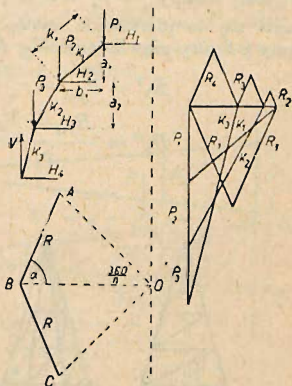


Fig. 324.

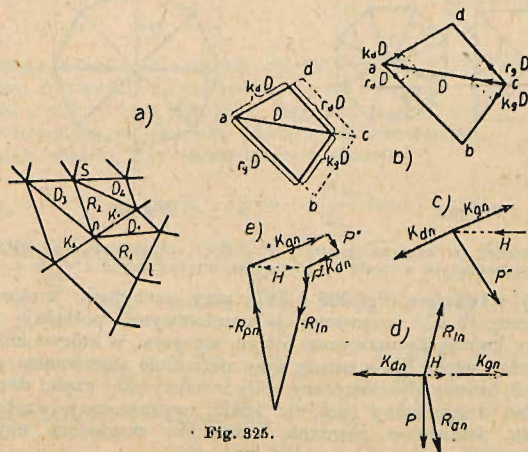


Fig. 325.

rozkłada się na siłę w kierunku krokwi dolnej, oraz siłę poziomą, z których do sił znajdujemy siły rzeczywiste w krokwi i przekątniach dolnych. Niech D oznacza (fig. 325): k_g , względnie r_g — składowe siły $D=1$ w kierunku krokwi, względnie pierścienia górnego, k_d , względnie r_d — składowe siły $D=1$ w kierunku krokwi, względnie pierścienia dolnego (wartości dla każdego przęta inne; najlepiej wyznaczyć je wykreślnie; por. fig. 325), to suma sił w kierunku krokwi powyżej węzła n :

$$\left. \begin{array}{l} \text{poniżej } n: \\ \text{w kierunku pierścienia prawego:} \\ \text{w kierunku pierścienia lewego:} \end{array} \right\} \begin{array}{l} K_{gn} = K_1 + k_{d1} D_1' \\ K_{dn} = K_2 + k_{g2} D_2'' \\ R_{pn} = R_2' + r_{d1} D_1' \\ R_{ln} = R_2'' + r_{g2} D_2'' \end{array} \dots \dots \dots (2)$$

Obliczenie rozpoczyna się od pierścienia górnego, gdzie niema prętów górnych, więc $k_g = r_g = 0$, i obejmuje kolejno węzły tegoż. Potem przechodzi się do pierścienia następnego. Znając siły w prętach ponad m , otrzymamy z figury niewiadome K_d , R_p i R_l , a następnie siły rzeczywiste:

$$\left. \begin{array}{l} R_2' = R_{pn} - r_{d1} D_1', \quad R_2'' = R_{ps} - r_{d1} D_1'', \\ D_2'' = \frac{R_{ln} - R_2''}{r_{g2}}, \quad K_2 = K_{dn} - k_{g2} D_2'' \end{array} \right\} \dots \dots (2a)$$

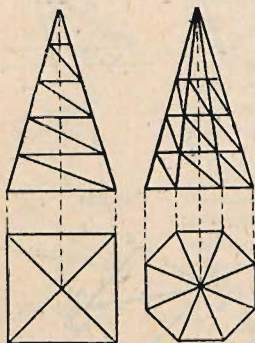


Fig. 326.

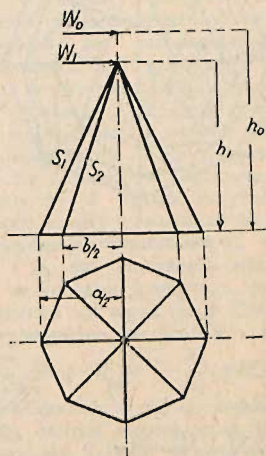


Fig. 327.

Uwaga. Znaczek „p” oznacza „prawy”, „l” — lewy, „d” — dolny, „g” — górny, „n” dotyczy prętów, wychodzących z węzła n , „s” prętów, wychodzących z węzła s .

b) Dache wieżowe (fig. 326 i 327; przy nachyleniu krokwi do poziomu mniejszem od 45° nazywamy je namiotowymi) posiadają narożniki proste. U góry kończą się zazwyczaj ostrym szczytem, w którym zbiegają się wszystkie naroża; wtedy dla n naroży przy normalnie stosowanym podparciu dach jest $(n-3)$ -krotnie hiperstatyczny. Siły w najwyższej części dachu, uważanej za układ drugorzędny (por. str. 1232), wyznaczamy wtedy zwykle w przybliżeniu, ustawiając równanie momentów względem najwyższego pierścienia (fig. 327):

$M = W_0 h_0 + W_1 h_1 = S_1 a \sin \alpha + 2 S_2 b \sin \alpha$; ponieważ zaś $S_1 : S_2 = a : b$, przeto:

$$S_1 = \frac{Ma}{(a^2 + 2b^2) \sin \alpha} = \frac{Mas}{(a^2 + 2b^2) h_1} \dots \dots \dots (3)$$

We wzorach tych α jest kątem nachylenia krokwi do poziomu, s długością krokwi.

Pozatem dachy te oblicza się jak kopuły; wzory i wykresy upraszczają się jednak wskutek stałego pochylenia krokwi. (Stosunek $\frac{k}{\alpha}$ (por. wzór 1) jest stały.)

Na parcie wiatru można je też obliczać jako dźwigiary kratowe płaskie, zawarte między narożnikami. Obciążenie węzłowe P rozkłada się na trzy składowe, jedną P_n w kierunku narożnika i dwie poziome P'_h i P''_h w płaszczyznach, przylegających ścian. Następnie oblicza się kratownicę płaską, jako utwierdzoną dołem, na siły poziome P'_h i P''_h , leżące w jej płaszczyźnie. Siły w narożnikach są równe sumie odpowiednich składowych P_n , oraz sił w pasach tych kratownic płaskich. Siły w pozostałych prętach wyznacza się wprost z obliczenia odpowiednich kratownic płaskich.

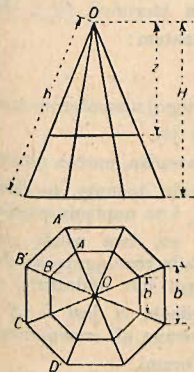


Fig. 328.

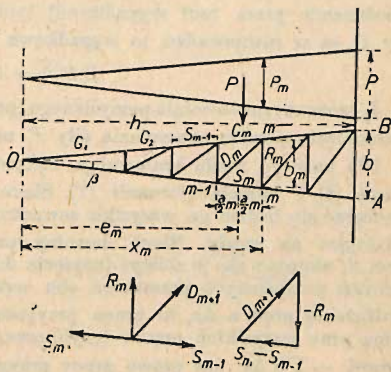


Fig. 329.

Obliczenie dachów wieżowych ośmiobocznych (fig. 328) da się w myśl powyższego sprowadzić do obliczenia więzara płaskiego ABO o powierzchni obciążenia wedle trójkąta (fig. 329), przyczem $p = 0,7 bw$ (w = parcie wiatru na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku wiatru). Siły wewnętrzne w krokwi:

$$G_m = + \frac{M_{m-1}}{b_{m-1}} \sec \beta, \quad S_m = - \frac{M_m}{b_m} \sec \beta.$$

Odpowiednio dla ściany CDO :

$$G'_m = + \frac{M'_m}{b'_m} \sec \beta, \quad S'_m = - \frac{M'_{m-1}}{b'_{m-1}} \sec \beta \dots (4)$$

przyczem:
$$M_m = \frac{p x_m^3}{6 h}, \quad M'_{m-1} = \frac{p x_{m-1}^3}{6 h}.$$

Siła w przekątnej o długości d_m :

$$D_m = 0,233 e_m d_m w \dots (4a)$$

Siła w pierścieniu:

$$R_m = - \frac{w}{3} (1,04 e_{m+1} b_{m+1} + 0,35 e_m b_{m-1}) \dots (4b)$$

Zupełnie podobnie oblicza się filary wieżowe, gdzie dla sił poziomych zaczepiających powyżej aa $V = \frac{H h_0}{b}$ (fig. 330), i inne podobne konstrukcje przestrzenne.

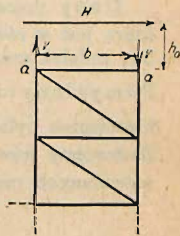


Fig. 330.

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznicami, oraz łożnikami pionowymi i poziomymi są też utworami przestrzennymi.

IV. Przesunięcia kratownic.

a) Metody analityczne.

Prawo pracy przygotowanej. Jeżeli węzeł m kratownicy dozna przesunięcia $m m' = [\delta_m]$, to praca sił P_i , zaczepiających w m , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty $\bar{\delta}_i$ przesunięcia $[\delta_m]$ na kierunki tychże sił, więc $L_m = \sum P_i \bar{\delta}_i$. Praca L_m równa się jednak też przesunięciu $[\delta_m]$, pomnożonemu przez rzut wypadkowej tychże sił na kierunek $[\delta_m]$. Jeżeli siły P_i są w równowadze, to wypadkowa ich $= 0$; zatem:

$$\sum P_i \bar{\delta}_i = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\delta}_i$ oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły P_i na kierunek jej.

Dla każdego węzła kratownicy, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne $[\delta]$ i ustawić równanie (1). Skoro te równania dodamy, to znak \sum rozciągać się będzie na wszystkie zewnętrzne siły Q_m i na napięcia prętów S , działające na węzły. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem S , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślnych przesunięć obu węzłów nastąpi ich oddalenie czyli wydłużenie pręta o Δs , to praca przygotowana napięcia S jest $-S \cdot \Delta s$. Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi $-\sum S \Delta s$, zaś prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \dots \dots \dots (2)$$

czyli praca przygotowana sił zewnętrznych = pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Dany rzeczywisty układ sił Q_m , działających we węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcia S i wydłużenia Δs , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił Q_m są $\bar{\delta}_m$. Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił \bar{Q}_m , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia \bar{S} . Zastosujmy równanie (2) do pomyślanego układu sił \bar{Q}_m i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem Q_m , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s \dots \dots \dots (2a)$$

Siły zewnętrzne \bar{Q} składają się z sił \bar{P}_m i oddziaływań \bar{U} , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia podpór c , mierzone w kierunku sił \bar{U} (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (2a) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{U} c \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli nazwiemy s długość, F przekrój jednego pręta, E moduł sprężystości, ω współczynnik rozszerzalności, t przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{E F},$$

to:

$$\Delta s = S \rho + \omega t s,$$