

B. Ustroje statycznie niewyznaczalne

Metoda ogólnych równań sprężystości

napisał

śp. dr inż. Stefan Bryła

prof. Politechniki Warszawskiej

1. Równania sprężystości.

Jeżeli belka, np. na rys. 1 jest n_w -krotnie wewnątrznie lub n_z -krotnie zewnętrznie statycznie niewyznaczalna (hiperstatyczna por. str. 529), to przez opuszczenie n_w prętów istotnych, względnie n_z prętów łożyskowych (pręty nadliczbowe) można kratownicę uczynić statycznie wyznaczalną (izostatyczną), czyli sprowadzić ją do układu zasadniczego (rys. b). Aby stan napięć w układzie zasadniczym był identyczny ze stanem w belce rzeczywistej, należy każdy opuszczony pręt łożyskowy zastąpić siłą, działającą w kierunku tego pręta jako nacisk na belkę, zaś pręt istotny — dwiema siłami zaczepiającymi w węzłach, w których był osadzony i działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli pręt był rozciągany, zaś oddalenia, jeżeli był ściskany, a równymi co do wielkości napięciu tegoż pręta (tensory). Nazwijmy X_a, X_b, X_c , niewiadome oddziaływań opuszczonych podpór (prętów podporowych) względnie napięcia opuszczonych prętów istotnych (rys. b), R_o, S_o reakcje podpór i siły wewnętrzne w układzie zasadniczym (rys. c) wskutek sił zewnętrznych ΣP , zaś R_a, S_a wskutek siły, względnie napięcia $X_a = -1$ (rys. d) i odpowiednio $R_b, S_b; R_c, S_c \dots$ (rys. e i f) to w ustroju rzeczywistym (rys. a) na podstawie prawa superpozycji reakcja pewnej podpory:

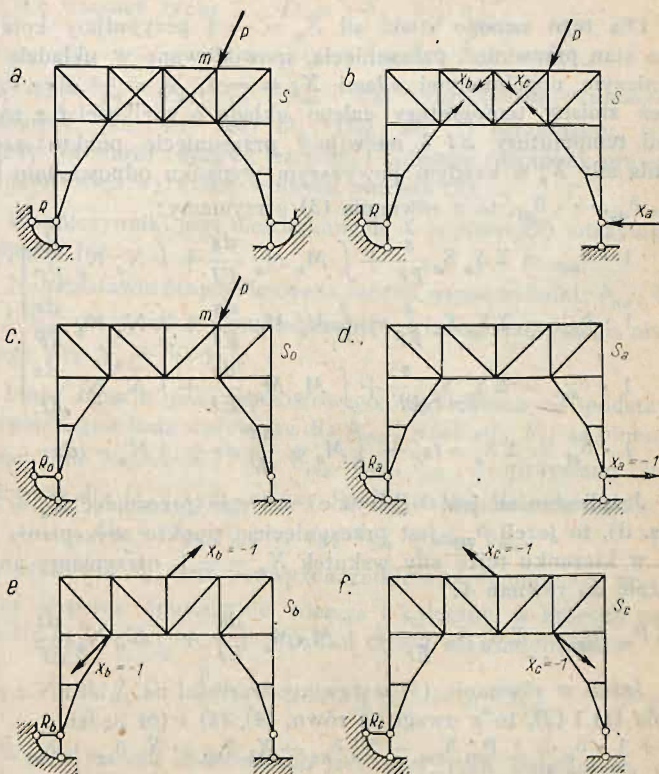
$$\left. \begin{aligned} R &= R_o - R_a X_a - R_b X_b - R_c X_c \\ S &= S_o - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

zaś napięcie dowolnego pręta:

Gdyby w kratownicy prócz prętów były jeszcze elementy o ściance pełnej, pracujące pod działaniem nie tylko siły osiowej

(zmiennej) N , ale i momentu M , to w dowolnym przekroju byłoby odpowiednio do równań (1):

$$\left. \begin{aligned} M &= M_o - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c \dots \\ N &= N_o - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$



Rys. 1

Zastosujemy równanie pracy przygotowanej do rzeczywistego układu przesunięć (rys. b) i przygotowanego stanu napięć $X_a = -1$ (rys. d), nazywając δ_a przesunięcie w układzie rzeczywistym punktu zaczepienia siły X_a w kierunku siły $X_a = -1$, δ_b przyrost rzeczywisty oddalenia węzłów, w których zaczepiają siły X_b , zaś $L_a = \sum R_a r$ pracę oddziaływań R_a na rzeczywistych przesunięciach podpór r , to według równania (108) (str. 585):

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \sum S_a S \frac{s}{E'} + \sum S_a \omega t s + \int M_a M \frac{ds}{EJ} + \\ + \int N_a N \frac{ds}{EF} + \int N_a \omega t ds + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds \quad (3)$$

Dla tego samego stanu sił $X_a = -1$ przyjmijmy kolejno, jako stan przesunięć, przesunięcia, spowodowane w układzie zasadniczym uogólnionymi siłami $X_a = -1$, $X_b = -1 \dots$, tudzież zmiany temperatury całego układu o wielkości t z różnicami temperatury Δt i nazwijmy przesunięcie punktu zaczepienia siły X_a w każdym powyższym wypadku odpowiednio δ_{aa} , δ_{ab} , δ_{ac} , \dots , δ_{at} , to z równania (3) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{aa} &= \sum S_a S_a \frac{s}{EF} + \int M_a M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_a \frac{ds}{EF} \\ 1 \cdot \delta_{ab} &= \sum S_a S_b \frac{s}{EF} + \int M_a M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_b \frac{ds}{EF} \\ 1 \cdot \delta_{ac} &= \sum S_a S_c \frac{s}{EF} + \int M_a M_c \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_c \frac{ds}{EF} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$1 \cdot \delta_{at} = \sum S_a \omega t s + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_a \omega t ds \quad (5)$$

Jeżeli stan sił jest ΣP (rys. c), zaś stan przesunięć $X_a = -1$ (rys. d), to jeżeli δ_{ma} jest przesunięciem punktu zaczepienia siły P_m w kierunku tejże siły wskutek $X_a = -1$, otrzymamy analogicznie do równań 4:

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \sum S_o S_a \frac{s}{EF} + \int M_o M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_o N_a \frac{ds}{EF} \quad (6)$$

Jeżeli w równaniu (3) wstawimy wartości na S , M i N z równania (1) i (2), to z uwagi na równ. (4), (5) i (6) będzie:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_o \delta_{ac} + \delta_{at} \quad (7)$$

albo:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \delta_{ac} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{ma} - L_a + \delta_{at} - \delta_a \\ \text{Podobnie:} \\ \delta_{aa} X_a + \delta_{bb} X_b + \delta_{bc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mb} - L_b + \delta_{bt} - \delta_b \\ \delta_{ca} X_a + \delta_{cb} X_b + \delta_{cc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mc} - L_c + \delta_{ct} - \delta_c \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Tych tzw. równań sprężystości (por. str. 435), jest tyle ile niewiadomych statycznie niewyznaczalnych X ; można je więc rozwiązać. Przy pomocy wyznaczników otrzymamy:

$$X_a = \frac{D_a}{D}, \quad X_b = \frac{D_b}{D}, \quad X_c = \frac{D_c}{D} \quad (9)$$

We wzorach tych:
$$D = \begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \delta_{bc} \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} \quad (10)$$

przy czym $\delta_{ba} = \delta_{ab}$, $\delta_{ca} = \delta_{ac}$ i $\delta_{cb} = \delta_{bc}$ (zasada wzajemności przesunięć, por. str. 586) D_a , (D_b , D_c ...) otrzymamy, jeżeli wyrazy pierwszej (drugiej, trzeciej...) kolumny zastąpimy prawymi stronami, więc wyrazami wolnymi równań (8).

Współczynniki przy niewiadomych X w równ. (8) otrzymamy z równań (4).

Na podstawie prawa Maxwella można współczynniki: δ_{aa} , δ_{ab} , δ_{ac} i δ_{am} otrzymać z planu przesunięć układu zasadniczego, obciążonego siłą $X_a = -1$.

Linia ugięcia pasa pomostowego, wykreślona na podstawie tego planu, jest linią wpływową dla δ_{ma} , jeżeli siły P_m są pionowe. Mając linie wpływowe dla δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} ... otrzymamy linię wpływową dla D_a i tym samym dla X_a na zasadzie równania:

$$D_a = d_{aa} \delta_{mb} - d_{ba} \delta_{mb} + d_{ca} \delta_{mc}, \quad (11)$$

przy czym np. d_{ba} jest podwyznacznikiem otrzymanym z wyznacznika D przez opuszczenie wiersza i kolumny, w których znajduje się δ_{ba} , więc np. w przypadku trzech niewiadomych:

$$d_{ba} = \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = \delta_{ab} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb} \quad (12)$$

Wybór ustroju zasadniczego jest przy tych działaniach dowolny. Jednakże nie każdy ustrój prowadzi równie szybko do celu. Należy więc wybierać takie ustroje, które stanowią proste układy statyczne, co wpływa na uproszczenie rachunku. Z drugiej strony trzeba dążyć do przyjęcia ustroju zasadniczego, który by jak najmniej różnił się w pracy od właściwego, wpływa to bowiem silnie na dokładność obliczeń. Jeżeli są duże rozbieżności w pracy obu ustrojów, wtedy często nie wystarcza obliczenie przy pomocy suwaka, albowiem o wynikach decydują wtedy niejednokrotnie niewielkie różnice w czynnikach równań.

Zasada najmniejszości pracy odkształcenia. Jeżeli opuścimy wpływ temperatury i poddania się podpór, to równania sprężystości (8) można przedstawić w formie przejrzystej:

$$\frac{\delta L}{\delta X_a} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_b} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_c} = 0, \quad (13)$$

przy czym praca odkształcenia układu wynosi:

$$L = \frac{1}{2} \Sigma \frac{S^2 s}{E F} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{E J} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{E F} \quad (14)$$

Jest ona funkcją zmiennych X_a, X_b, X_c, \dots , za pośrednictwem równań (1) i (2).

Zatem niewiadome hiperstatyczne X przyjmują takie wartości, aby praca odkształcenia układu L , jako ich funkcja była najmniejszą (por. str. 430).

Pierwsze z równań (13) możemy napisać:

$$\Sigma \frac{S s}{E F} \frac{\delta S}{\delta X_a} + \int \frac{M ds}{E J} \frac{\delta M}{\delta X_a} + \int \frac{N ds}{E F} \frac{\delta N}{\delta X_a} = 0 \quad (15)$$

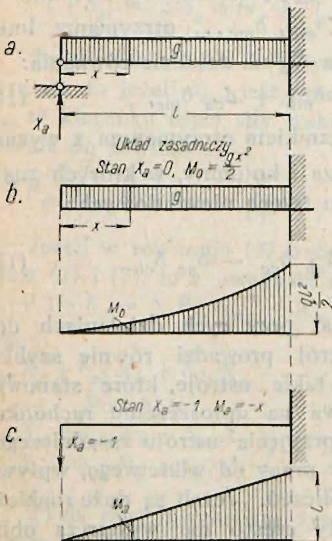
Przykłady.

1. Belka jednym końcem poziomo utwierdzona, a drugim wolno podparta (rys. 2) tworzy urząd statycznie niewyznaczalny pierwszego stopnia, gdyż dla przejścia do ustroju zasadniczego wystarczy usunięcie jednego pręta podporowego (rys. b). Mamy też $M = M_0 - M_a X_a$, por. równ. (2).

Celem obliczenia wielkości stat. niewyznaczalnej X_a zastosujemy równania (8), (4) i (6).

W przypadku sztywnych podpór i stałego J będzie:

$$\left. \begin{aligned} X_a \cdot \delta_{aa} &= \Sigma P_m \delta_{ma}, \\ X_a &= \frac{\int_0^l M_0 M_a dx}{\int_0^l M_a^2 dx} \end{aligned} \right\} (16)$$



Rys. 2

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym g otrzymamy;

$$\int_0^l M_o M_a dx = \int_0^l \frac{1}{2} gx^3 \cdot dx = \frac{1}{8} gl^4$$

$$\int_0^l M_a^2 dx = \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} l^3 \quad \text{stad } X_a = \frac{3}{8} gl.$$

Moment w dowolnym punkcie: $M = X_a x - \frac{1}{2} g x^2$

Największą wartość dodatnią osiąga mo-

ment dla $x = \frac{3}{8} l$: $M_{+max} = \frac{9}{128} gl^2$;

zaś największą ujemną na podporze prawej $M_{-max} = -\frac{1}{8} gl^2$

β) Dla obciążenia ciężarem skupionym P (rys. 3) otrzymamy, stosując równania (8) i (16):

$$X_a = \frac{(l-u)^2 (2l+u)}{2l^3}$$

Moment w dowolnym punkcie $x > u$: $M = X_a x - P(x-u)$

2. Belka obu końcami poziomo utwierdzona (rys. 4) jest dwukrotnie hiperstatyczna; jako wielkości statycznie niewyznaczalne przyjęto momenty podporowe X_a i X_b . Według równ. (2)

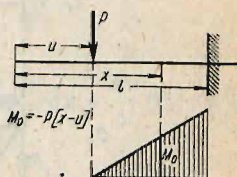
$$M = M_o - M_a X_a - M_b X_b.$$

Według równań (8) i (4), przyjmując zupełne utwierdzenie belki i stały moment bezwładności J , otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} &= 0 \\ \sum P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

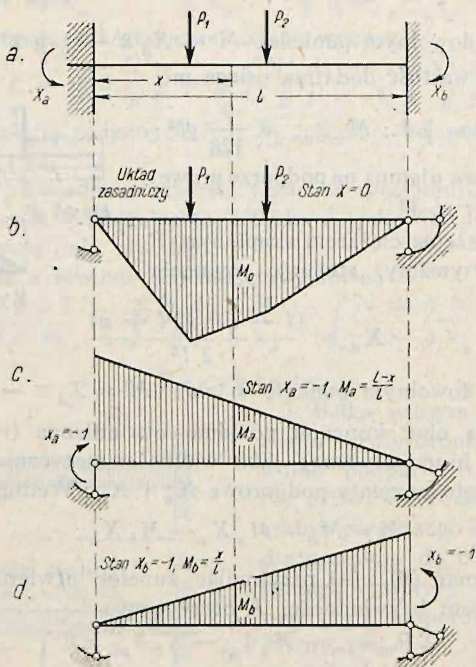
$$\text{przy czym: } \left. \begin{aligned} EJ \cdot \delta_{aa} &= \int_0^l M_a^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{bb} &= \int_0^l M_b^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{ab} &= \int_0^l M_a M_b dx = \frac{l}{6} \end{aligned} \right\} \quad (\text{por. rys. c i d}). \quad (18)$$

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym g na całej długości belki: $M_o = \frac{1}{2} gx(l-x)$.



Rys. 3

Z powodu symetrii: $\Sigma P_m \delta_{am} = \Sigma P_m \delta_{bm} = \int M_o M_a dx = \frac{gl^3}{24}$,
 zatem z równań (16) i (18): $X_a = X_b = \frac{gl^2}{12}$.



Rys. 4

Moment w dowolnym przekroju x :

$$M = \frac{1}{2} gx(l-x) - X_a \frac{l-x}{l} - X_b \frac{x}{l}$$

$$M_{+max} = \frac{gl^2}{24} \text{ (w } \text{środku belki)}$$

$$M_{-max} = \frac{gl^2}{12} \text{ (na podporach)}$$

Oddziaływania: $R_a = R_b = \frac{1}{2} gl$.

β) Dla obciążenia ciężarem skupionym P (rys. 5)

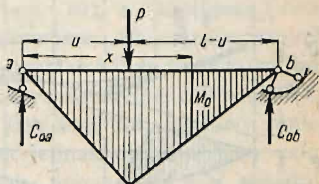
$$\begin{aligned} \sum P_m \delta_{am} &= \int_0^l M_o M_a dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{l-x}{l} dx + \\ &+ \int_u^l \frac{Pu}{l} (l-x) \frac{l-x}{l} dx = \frac{Pu}{6l} [2l^2 - 3ul + u^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum P_m \delta_{bm} &= \int_0^l M_o M_b dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{x}{l} dx + \\ &+ \int_u^l \frac{Pu}{l} (l-x) \frac{x}{l} dx = \frac{Pu}{6l} [l^2 - u^2]. \end{aligned}$$

Z równań (16) i (18) i ostatnich dwóch:

$$X_a = \frac{Pu}{l^2} (l-u)^2,$$

$$X_b = \frac{Pu^2}{l^2} (l-u).$$



Rys. 5

Oddziaływania (por. równ. 1): $R_a = \frac{P}{l^2} (l^3 + 2u^3 - 3u^2 l).$

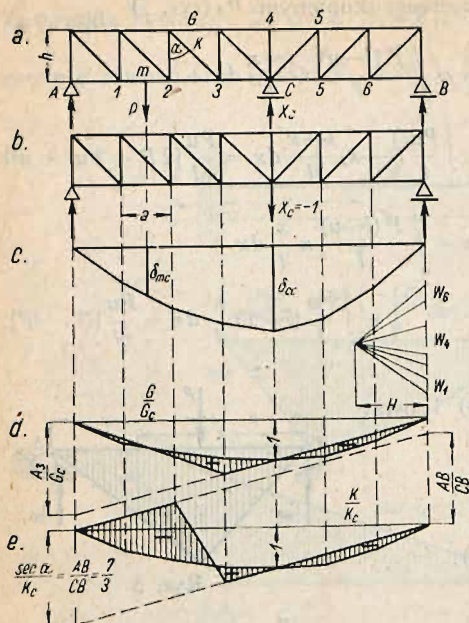
$$R_b = \frac{Pu^2}{l^3} (3l - 2u).$$

2. Kratownice płaskie statycznie niewyznaczalne (hiperstatyczne).

W kratownicach narażone są wszystkie pręty wyłącznie na siły osiowe, więc równania (4), (5) i (6) upraszczają się o tyle, że znikają całki prawej strony.

Belka kratowa dwuprzęsłowa (rys. 6). Opuszczając podporę C, otrzymujemy ustrój zasadniczy (rys. b). Niewiadomą hiperstatyczną jest więc reakcja X_c podpory C. Przyjmując podpory sztywne, tj. $L_c = 0$ oraz $\delta_c = 0$ i uwzględniając tylko wpływ ciężaru ruchomego $P_m = 1$, otrzymamy z równania (8):

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}}. \quad (19)$$



Rys. (6)

Linia ugięcia pasa mostowego AB wskutek siły $X_c = -1$ czytana w skali $1:\delta_{cc}$, jest linią wpływową oddziaływania X_c . Można ją wykreślić przy pomocy ciężarów sprężystych W (por. str. 587), naniesionych w dowolnej skali przy pomocy dowolnego bieguna (rys. c), gdyż X_c zależy od stosunku $\delta_{mc}:\delta_{cc}$. Obierając ugięcie δ_{cc} punktu C za jednostkę, możemy wprost odczytywać $X_c = \delta_{mc}$. Gdy nie chodzi o linie wpływowe, tylko o wartość dla danego obciążenia stałego, to z równań (8) (4) i (6) otrzymamy:

$$X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{\sum S_o S_c \frac{S}{EF}}{\sum S_c^2 \frac{S}{EF}}, \quad (20)$$

przy czym wartości S_o i S_c znaleźć można z dwu planów Cremony, jednego dla obciążenia ustroju zasadniczego siłami $\sum P_m$, drugiego dla obciążenia siłą $X_c = -1$. Siła wewnętrzna w dowolnym przecię wynosi $S = S_o - S_c X_c = S_c \left(\frac{S_o}{S_c} - X_c \right)$.

Rys. d przedstawia linię wpływową pręta G , rys. e zaś pręta K podzielone odpowiednio przez G_c i K_c , przy czym G_c i K_c są to siły w prętach G i K wskutek $X_c = -1$, więc

$$G_c = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{A3}{h}, \quad K_c = \frac{CB}{AB} \sec \alpha, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sec \alpha}{K_c} = \frac{AB}{CB} = \frac{7}{3}$$

3. Łuk kratowy bezprzegubowy (rys. 7).

Opuszczając pręty a , b i c , które możemy uważać za pręty łożyskowe, otrzymamy wspornik (ustrój zasadniczy, rys. b).

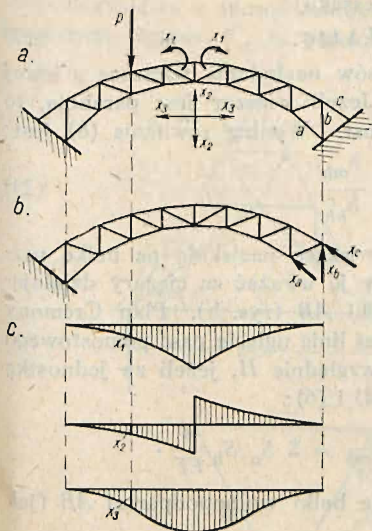
Działając nań kolejno siłą $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ otrzymamy trzy plany sił, następnie trzy plany przesunięć, a stąd trzy linie ugięcia pasa górnego (pomostowego), które są liniami wpływowymi przesunięć, δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} . Można z nich skonstruować linie wpływowe niewiadomych X_a , X_b , X_c (równ. 10), a następnie linie wpływowe sił wewnętrznych w prętach i linie wpływowe oddziaływań według równania (1).

Ten sam łuk kratowy lepiej jest jednak obliczyć przy założeniu innego ustroju zasadniczego. Stosunkowo najprostsza i najdokładniejsza droga do obliczenia prowadzi bowiem przez przecięcie łuku w kluczu

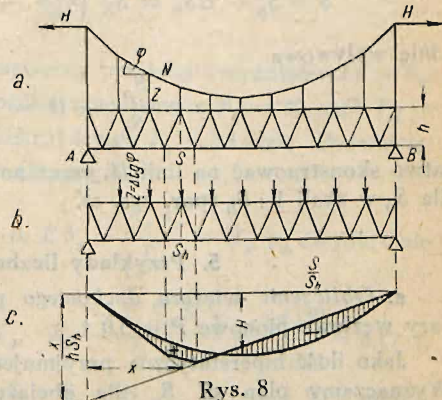
i założeniu jako niewiadomych siły pionowej X_2 , poziomej X_3 , i momentu X_1 w tym przekroju (rys. 7b). Metoda postępowania jest taka sama jak w poprzednim przypadku. Na rysunku pokazano linie wpływowe dla szukanych wartości statycznie niewyznaczalnych (rys. 7 c, d, e).

4. Wieszar usztywniony belką kratową (rys. 123).

Jest on ustrojem stat. niewyznaczalnym pierwszego stopnia. Jako wielkość stat. niewyznaczal-



Rys. 7



Rys. 8

ną obieramy składową poziomą H naciągu w wieszarze N . Otrzymamy wtedy:

$$N = H \sec \varphi. \quad (21)$$

Siła w pręcie wiszącym (wieszaku):

$$Z = H \Delta \operatorname{tg} \varphi. \quad (22)$$

gdzie $\Delta \operatorname{tg} \varphi$ jest różnicą tangensów nachylenia wieszara z lewej i z prawej strony wieszaka. Jeżeli wieszar jest parabolą, to $\Delta \operatorname{tg} \varphi = \text{const.}$, więc i $Z = \text{const.}$ Według równania (8) jest:

$$H = \frac{\delta_{mh}}{\delta_{hh}} \quad (23)$$

Jeżeli $H = -1$, to pręty wiszące naciskają na belkę usztywniającą siłami $\Delta \operatorname{tg} \varphi$. Należy je uważać za ciężary działające w węzłach pasa górnego belki AB (rys. b). Plan Cremony przedstawia wówczas siłę S_h , zaś linia ugięcia pasa pomostowego (dolnego) linię wpływową δ_{mh} , względnie H , jeżeli za jednostkę obierzemy δ_{hh} . Według równ. (4) i (6):

$$\delta_{hh} = \sum S_h^2 \frac{s}{EF}, \quad \delta_{mh} = \sum S_o S_h \frac{s}{EF}.$$

S_o jest siłą wewnętrzną w pręcie belki wolnopodpartej AB (jak gdyby wieszara nie było).

Siła wewnętrzna w dowolnym pręcie belki usztywniającej (równ. 1):

$$S = S_o - HS_h = S_h \left(\frac{S_o}{S_h} - H \right) = S_h \cdot s \quad (24)$$

Linie wpływową

$$s = \frac{S_o}{S_h} - H = \frac{S}{S_h} \quad (25)$$

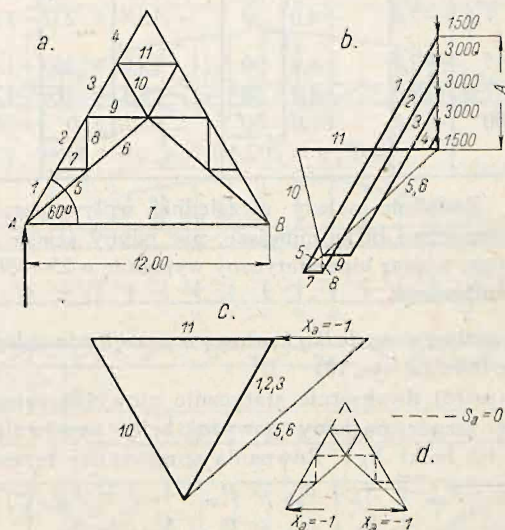
łatwo skonstruować na linii H , przez naniesienie linii wpływowej dla S_o w skali $1 : S_h$ (por. rys. c).

5. Przykłady liczbowe.

a. Obliczenie więzara dachowego podanego na rys. 9. Ciężary węzłowe pionowe $P = 3,0$ t.

Jako ilość hiperstatyczną przyjmujemy siłę w ściągu $T = X_a$. Wyznaczamy plan sił S_o dla obciążenia pionowego (rys. b)

i plan sił S_a dla $X_a = -1$ (rys. c). Siły S_a w prętach 4, 7, 8 i 9 są równe zero (rys. d). Dla obliczenia X_a musimy przyjąć przekroje prętów. W mniejszych konstrukcjach dachowych możemy uczynić to w sposób następujący. Jeżeli średni przekrój pasa górnego wynosi F_g , to przekrój pasa dolnego w przybliżeniu



Rys. 9

$F_d = 0,6 \div 0,8 F_g$, zaś przeciętny przekrój krzyżulców $F_k = 0,2 \div 0,5 F_g$. W danym wypadku szacujemy: $F_g = 40 \text{ cm}^2$, $F_d = 32 \text{ cm}^2$, $F_k = 20 \text{ cm}^2$, przekrój ściągu $F_s = 15 \text{ cm}^2$. Podstawiając w pierwszym z równań (8), str. 600.

$L_a \approx 0$, $\delta_{at} = 0$, $X_b = X_c = 0$, $E \delta_a = \frac{X_a s_a}{F_a} = X_a \varrho_a$ (wydłużenie ściągu) otrzymamy,

rozwiązując ze względu na X_a , $X_a = \frac{\sum S_o S_a \varrho}{\sum S_a^2 \varrho} = \frac{+4350}{+7024} = 6,17 \text{ t}$.

por. tabelę. Siły w prętach $S = S_o - S_a X_a$ są około 50% mniej

| Pręt | s cm | f cm ² | q = $\frac{s}{F}$ 1/cm | S _a | S _a ² | S _a ² q | S _o | S _o S _a q | S _a X _a | S |
|------|---------|----------------------|---------------------------|----------------|---|-------------------------------|---|---------------------------------|-------------------------------|--------|
| 1 | 300 | 40 | 7,5 | -2,0 | +4,0 | 30 | -24,4 | + 333 | -12,34 | -12,06 |
| 2 | 300 | 40 | 7,5 | -2,0 | +4,0 | 30 | -21,8 | + 328 | -12,34 | - 9,46 |
| 3 | 300 | 40 | 7,5 | -2,0 | +4,0 | 30 | -15,8 | + 237 | -12,34 | - 3,47 |
| 10 | 300 | 20 | 15 | +2,0 | +4,0 | 60 | +12,0 | + 360 | +12,34 | - 0,34 |
| 11 | 300 | 40 | 7,5 | -2,0 | +4,0 | 30 | -18,4 | + 276 | -12,34 | - 6,06 |
| T | 1200 | 15 | 80 | -1,0 | +1,0 | 80 | 0 | 0 | - 6,17 | + 6,17 |
| | | | | | Σ S _a ² q = 702,4 | | Σ S _o S _a q = +4350 | | | |

sze niż S_o. Podobnie należy uwzględnić wpływ parcia wiatru. Przekroje potrzebne będą mniejsze, niż gdyby ściągu nie było, a wskutek tego więzar hiperstatyczny wypadnie o 25 — 30% tańszy od wolno podpartego.

b. Łuk usztywniony belką kratową o pasach równoległych (we dług Müller-Breslau, rys. 10)

Jest to ustrój dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. W łuku powstaje rozpór poziomy powyżej belki usztywniającej X_a poniżej zaś tej belki X_b. Równania sprężystości brzmią więc:

$$\left. \begin{aligned} X_a \cdot \delta_{aa} + X_b \cdot \delta_{ab} &= P_m \cdot \delta_{ma} + \delta_{at} \\ X_a \cdot \delta_{ba} + X_b \cdot \delta_{bb} &= P_m \cdot \delta_{mb} + \delta_{bt} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Dla obciążenia X_a = -1 pręty oznaczone na rys. a linią kreskowaną nie mają żadnych naprężeń.

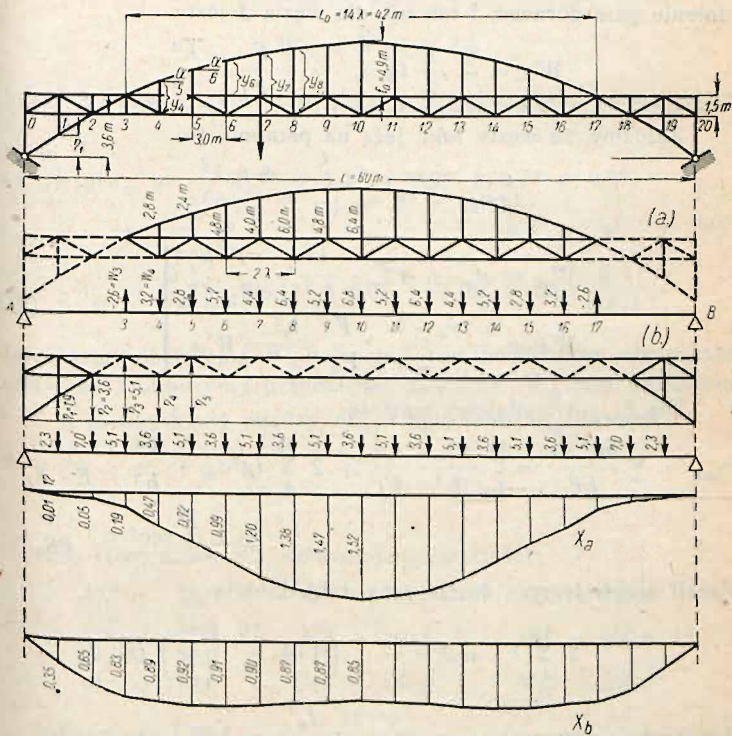
Wpływ zmiany długości krzyżuleców belki usztywniającej na wielkości X_a X_b daje się łatwo uwzględnić. Należy w tym celu znaleźć ciężary sprężyste W (por. str. 587). Oznaczając wysokość belki h, długość krzyżulca k, dla pręta pasa (górnego) o długości 2 λ otrzymujemy:

$$S_a = \mp \frac{y_m}{h}, \quad \Delta s_a = \mp \frac{y_m}{h} \cdot \frac{2 \lambda}{EF}$$

dla krzyżulca (lewozrotnego)
(prawozrotnego)

$$S_a = \pm \operatorname{tg} \alpha_m \frac{k}{h}, \quad \Delta s_a = \pm \operatorname{tg} \alpha_m \cdot \frac{k}{h} \cdot \frac{k}{EF_k}$$

gdzie F i F_k oznaczają przekroje pasów i krzyżulców przyjęte jako stałe. W prętach łuku leżących ponad belką występują siły $S_a] = \frac{1}{\lambda} \sec \alpha_m$. Niechaj łuk ma w kluczu przekrój F_b , dla pręta łuku nachylonego pod kątem α_m niech będzie $F = F_b \sec \alpha$, tak że z uwagi na $s = \lambda \sec \alpha$



Rys. 10

$$\frac{S_a^2 \cdot s}{EF} = \frac{\sec^2 \alpha \cdot \lambda}{E \cdot F_b}$$

to dla węzła pasa dolnego otrzymamy ciężar sprężysty

$$W_m = \frac{1}{h} \left[\frac{y_m}{h} \cdot \frac{2\lambda}{EF} + (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_m + 1) \frac{k^2}{h \cdot E \cdot F_k} \cdot \frac{k}{\lambda} \right]$$

a po opuszczeniu czynnika stałego $\frac{2 \lambda}{h^2 \cdot EF}$

$$W_m = y_m + \frac{1}{2} (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) \lambda \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3}$$

Do tego samego wyniku prowadzi obliczenie przy uwzględnieniu pasa górnego, i tak np. dla węzła 3 jest

$$W_3 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_4 \cdot \lambda \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3}$$

Zalóżmy, że węzły łuku leżą na paraboli, to

$$\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1} = \frac{8 f_o \lambda}{l_o^2}$$

$$\left. \begin{aligned} W_m &= y_m + 4 \bar{f}_o \cdot \frac{\lambda^2}{l_o^2} \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} \\ W_3 &= -\frac{y_4 - h}{2} \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} = W_{17} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Dla δ_{aa} otrzymujemy wartość

$$\delta_{aa} = \sum \frac{S a^2 \cdot s}{EF} = \sum \frac{16}{4} \frac{y_m^2}{h^2} \frac{2 \lambda}{EF} + 2 \sum \frac{10}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha_m \cdot \frac{k^2}{h^2} \cdot \frac{k}{E \cdot F_k} +$$

$$+ 2 \sum \frac{10}{4} \sec^2 \alpha \cdot \frac{1}{EF_b}$$

Jeżeli przyjmiemy z dostateczną dokładnością

$$2 \sum \frac{10}{4} \lambda \cdot \sec^2 \alpha = l_o \left(1 + \frac{16}{3} \frac{f_o^2}{l_o^2} \right) \cong l_o$$

(w naszym przypadku jest $1 + \frac{16}{3} \frac{f_o^2}{l_o^2} = 1,07$), to wtedy:

$$\delta_{aa} = \frac{2 \lambda^2}{EF h^2} \left[\frac{\sum_{16} v_m^2}{\lambda} + \lambda \cdot \sum \frac{10}{4} \operatorname{tg}^2 \alpha_m \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} l_o \cdot \frac{h^2}{\lambda^2} \cdot \frac{F}{F_b} \right] \quad (28)$$

Zakładając $F_k = 0,35 F$ i $F_b = 2,5 F$, otrzymamy przy uwzględnieniu wymiarów z rysunku:

$$4 f_o \cdot \frac{\lambda^2}{l_o^2} = 4 \cdot 4,4 \cdot \frac{1}{14^2} = \frac{1}{10}, \quad \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} = \frac{1}{0,35} \cdot 1,40 = 4,0$$

$$W'_m = y_m + 0,4$$

$$W'_3 = W'_{17} = 2,6$$

$$\sum_4^{16} y_m^2 = 2(2,8^2 + 4,8^2 + 6,0^2) + 6,4^2 + 2(2,4^2 + 4,0^2 + 4,8^2) = 264,32$$

$$4 \lambda \sum_4^{10} t g^2 \alpha_m = \frac{4}{3,0} (1,3^2 + 1,1^2 + 0,9^2 + 0,7^2 + 0,5^2 + 0,3^2 + 0,1^2) = 6,07$$

$$\delta_{aa} = \frac{2 \lambda^2}{EF h^2} [88,11 + 6,07 + 2,10] = 86,3 \frac{2 \lambda^2}{EF h^2}$$

Jeżeli teraz obciążenia W będziemy traktowali jako obciążenia belki AB i obliczymy przynależne momenty M'_m przy założeniu $\lambda = 1$, to uzyskamy między M'_m i ugięciami δ_{ma} związek:

$$\delta_{ma} = \frac{2 \lambda^2}{EF h^2} \cdot M'_m$$

Dla momentów M'_m otrzymujemy wartości:

| | | |
|----------------|----------------|-------------------|
| $M'_1 = 28,0$ | $M'_5 = 142,0$ | $M'_8 = 201,0$ |
| $M'_2 = 56,0$ | $M'_6 = 166,6$ | $M'_9 = 209,6$ |
| $M'_3 = 84,0$ | $M'_7 = 186,0$ | $M'_{10} = 213,0$ |
| $M'_4 = 114,6$ | | |

Na rysunku 10(b) pokazano linią kreskowaną pręty nie podlegające żadnym naprężeniom pod wpływem obciążenia $X_b = -1$. Górna część łuku jako nie biorąca udziału w pracy przy tym obciążeniu została opuszczona. Dla pręta pasa (górnego) o długości 2λ otrzymujemy:

$$S_b = \mp \frac{\eta m}{h}, \quad \Delta s_b = \mp \frac{\eta m}{h} \cdot \frac{2 \lambda}{EF}$$

Dla krzyżulców pierwszych dwóch pól:

$$S_b = - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{k}{h}, \quad \Delta s_b = - \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \frac{k^2}{h \cdot E \cdot F_k}$$

$$S_b = + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{k}{h}, \quad \Delta s_b = + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{k^2}{h \cdot E \cdot F_k}$$

dla dolnej części łuku:

$$S_b = - \sec \alpha_m; \quad \Delta s_b = - \sec \alpha_m \cdot \frac{\lambda}{E \cdot F_b}$$

Stąd otrzymujemy (po podzieleniu ciężarów W przez $\frac{2 \lambda}{E \cdot F h^2}$) następujące wzory:

$$\left. \begin{aligned} W_1 &= \eta_1 + \frac{\lambda}{2} \left(\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2 \right) \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} = \eta_1 + \\ &\quad + 4 f_2 \cdot \frac{\lambda^2}{l_o^2} \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} = W_{19} \\ W_2 &= \eta_2 + \frac{\lambda}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} = W_{18} \\ W_m &= \eta_m \text{ (ważne dla } m = 3 \text{ do } m = 17) \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\delta_{bb} = \frac{2 \lambda^2}{EF h^2} \left[\frac{\sum_1^{19} \eta_m^2}{\lambda} + \lambda \left(\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2 \right) \frac{F}{F_k} \cdot \frac{k^3}{\lambda^3} + \right. \\ \left. + 2 \lambda^2 \cdot \frac{k^2}{h^2} \cdot \frac{F}{F_b} \right] \quad (30)$$

$$\delta_{ab} = \sum S_a \cdot S_b \cdot \frac{s}{EF} = \frac{16}{4} y_m \cdot \eta_n \cdot \frac{2 \lambda}{EF \cdot h^2} \quad (31)$$

Wstawienie wartości liczbowych daje:

$$W_1 = W_{19} = \eta_1 + 0,4 = 2,3$$

$$W_2 = W_{18} = 3,6 + \frac{3,6 - 1,9}{2} \cdot 4 = 7,0$$

$$W_m = \eta_m$$

$$\sum_1^{19} \eta_m^2 = 2 \cdot 1,9^2 + 9 \cdot 3,6^2 + 8 \cdot 5,1^2 = 331,94$$

*) W miejsce $\frac{1}{2} l_o$ wstawiamy 2λ ; obliczamy więc przy założeniu $\sec \alpha = 1$. Ponieważ $F : F_b$ musi być oznaczone, założenie takie jest dopuszczalne.

$$\lambda (tg^2 \alpha_1 + tg^2 \alpha_2) = \frac{1,9^2 + 1,7^2}{3,0} = \frac{6,5}{3}$$

$$\sum_4^{16} y_m \cdot \eta_n = 3,6 (2,8 + 4,8 + 6,0) \cdot 2 + 3,6 \cdot 6,4 + \\ + 5,1 (2,4 + 4,0 + 4,8) \cdot 2 = 235,20$$

$$\delta_{bb} = \frac{2 \lambda^2}{EFh^2} [110,65 + 8,67 + 0,60] = 120 \frac{2 \lambda^2}{EFh^2}$$

$$\delta_{ab} = \frac{2 \lambda^2}{EFh^2} \cdot 78,4$$

Momenty M'' na skutek obciążeń W wynoszą dla $\lambda = 1$:

| | | |
|-----------------|-----------------|--------------------|
| $M_1'' = 42,3$ | $M_5'' = 167,5$ | $M_9'' = 212,8$ |
| $M_2'' = 82,3$ | $M_6'' = 186,7$ | $M_{10}'' = 219,7$ |
| $M_3'' = 115,5$ | $M_7'' = 202,3$ | $M_{11}'' = 221,5$ |
| $M_4'' = 143,2$ | | |

Między momentami M'' i ugięciem δ_{mb} występuje związek:

$$\delta_{mb} = \frac{2 \lambda^2}{E \cdot F \cdot h^2} \cdot M''_m$$

Równania (26) zyskują obecnie wygląd:

$$96,3 X_a + 78,4 X_b = M''_m + \frac{EFh^2}{2 \lambda^2} \cdot \delta_{at}$$

$$78,4 X_a + 120 X_b = M''_m + \frac{EFh^2}{2 \lambda^2} \delta_{bt}$$

co daje dla siły $P_m = 1$ wartości:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= 0,0222 M''_m - 0,0145 M'_m \\ X_b &= 0,0188 M''_m - 0,0145 M'_m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32)$$

i dla zmian temperatury

$$X_{at} = \frac{EFh^2}{2 \lambda^2} (0,0222 \delta_{at} - 0,0145 \delta_{bt})$$

$$X_{bt} = \frac{EFh^2}{2 \lambda^2} (0,0178 \delta_{bt} - 0,0145 \delta_{at})$$

Rzędne linii wpływowych obliczone na podstawie równań (146) dla X_a i X_b naniesiono na rys. 10.

Jeżeli obciążymy każdy węzeł siłą $q \cdot \lambda$ to otrzymamy

$$X_a = 14,5 q \cdot \lambda, \quad X_b = 15,2 q \cdot \lambda$$

Widać więc, że $\max X_a$ nie wiele się różni od $\max X_b$

Na skutek równomiernego ogrzania znajdujemy:

$$\delta_{at} = \sum \varepsilon \cdot t \cdot S_a \cdot s = 0, \quad \delta_{bt} = \sum \varepsilon \cdot t \cdot S_b \cdot s = \varepsilon \cdot t \cdot l^*$$

$$\text{stąd } X_{at} = - 0,0145 \cdot \varepsilon \cdot E \cdot t \cdot F \frac{l \cdot h^2}{2 \lambda^2}$$

$$X_{bt} = + 0,0178 \cdot \varepsilon \cdot E \cdot t \cdot F \frac{l \cdot h^2}{2 \lambda^2}$$

i przy $\varepsilon \cdot E = 250$ (stal zlewna) $t = 35^\circ$, $l = 60 \text{ m}$, $l : \lambda = \frac{1}{2}$:

$$X_{at} = - 950 F \quad X_{bt} = - 1160 F.$$

Dla górnego węzła 3 belki usztywniającej otrzymujemy moment

$$M_{\varepsilon t} = - 1160 F \cdot 5,1$$

zaś dla pręta pasa na przeciw leżącego (dolnego)

$$D = - \frac{1160 \cdot 5,1}{1,5} \cdot F = - 3940 F.$$

Gdyby przekrój tego pręta był równy wartości F , otrzymalibyśmy w nim na skutek tych zmian temperatury naprężenie

$$\sigma = - 394 \text{ kg/cm}^2.$$

*) Siły w wieszakach są w tym wypadku uwzględnione