

c) Mosty itp. konstrukcje, rozpatrywane wspólnie z poprzecznicami, oraz tężnikami pionowymi i poziomymi są też utworami przestrzennymi.

IV. Przesunięcia kratownic.

a) Metody analityczne.

Prawo pracy przygotowanej. Jeżeli węzeł m kratownicy dozna przesunięcia $m m' = [\bar{\delta}_m]$, to praca sił P_i , zaczepiających w m , równa się sumie iloczynów tych sił przez rzuty $\bar{\delta}_i$ przesunięcia $[\bar{\delta}_m]$ na kierunki tychże sił, więc $L_m = \sum P_i \bar{\delta}_i$. Praca L_m równa się jednak też przesunięciu $[\bar{\delta}_m]$, pomnożonemu przez rzut wypadkowej tychże sił na kierunek $[\bar{\delta}_m]$. Jeżeli siły P_i są w równowadze, to wypadkowa ich $= 0$; zatem:

$$\sum P_i \bar{\delta}_i = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$\bar{\delta}_i$ oznacza rzut dowolnie pomyślanego (przygotowanego) niezmiernie małego przesunięcia punktu zaczepienia siły P_i na kierunek jej.

Dla każdego węzła kratownicy, będącej w równowadze, można pomyśleć pewne $[\bar{\delta}]$ i ustawić równanie (1). Skoro te równania dodamy, to znak \sum rozciągać się będzie na wszystkie zewnętrzne siły Q_m i na napięcia prętów S , działające na węzły. Niech dowolny pręt działa na dwa węzły napięciem S , starając się je zbliżyć (napięcie dodatnie = siła rozciągająca). Jeżeli wskutek pomyślnych przesunięć obu węzłów nastąpi ich oddalenie czyli wydłużenie pręta o Δs , to praca przygotowana napięcia S jest $-S \cdot \Delta s$. Suma prac wszystkich prętów (czyli praca przygotowana sił wewnętrznych) wynosi $-\sum S \Delta s$, zaś prawo pracy przygotowanej brzmi:

$$\sum Q_m \bar{\delta}_m = \sum S \Delta s \dots \dots \dots (2)$$

czyli praca przygotowana sił zewnętrznych = pracy przygotowanej sił wewnętrznych.

Dany rzeczywisty układ sił Q_m , działających we węzłach kratownicy która jest w równowadze, powoduje w jej prętach napięcia S i wydłużenia Δs , tudzież przesunięcia węzłów, których rzuty na kierunek sił Q_m są $\bar{\delta}_m$. Pomyślany (urojony, przygotowany) układ sił \bar{Q}_m , wskutek którego badana kratownica byłaby także w równowadze, wywołałby w prętach napięcia \bar{S} . Zastosujmy równanie (2) do pomyślanego układu sił \bar{Q}_m i przesunięć, wywołanych rzeczywistym układem Q_m , to będzie:

$$\sum \bar{Q}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s \dots \dots \dots (2a)$$

Siły zewnętrzne \bar{Q} składają się z sił \bar{P}_m i oddziaływań \bar{C} , którym w stanie rzeczywistym odpowiadają przesunięcia podpór c , mierzone w kierunku sił \bar{C} (o ile podpory nie są absolutnie stałe). Równanie (2a) będzie więc brzmiało:

$$\sum \bar{P}_m \bar{\delta}_m = \sum \bar{S} \Delta s - \sum \bar{C} c \dots \dots \dots (3)$$

Jeżeli nazwiemy s długość, F przekrój jednego pręta, E moduł sprężystości, ω współczynnik rozszerzalności, t przyrost temperatury pręta i podstawimy:

$$\rho = \frac{s}{EF},$$

to:

$$\Delta s = S \rho + \omega t s,$$

$$\text{zaś: } \Sigma \bar{P}_m \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \dots \dots \dots (4)$$

Jeżeli przygotowanym stanem sił jest: $\bar{P}_m = 1$, to

$$\Sigma \bar{P}_m \delta_m = 1 \cdot \delta_m.$$

Równanie (4) będzie wtedy brzmiało:

$$1 \cdot \delta_m = \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma \bar{S} \omega t s - \Sigma \bar{C} c \dots \dots \dots (5)$$

W przypadku belki o ściance pełnej, skoro $\bar{\sigma} \cdot dF =$ napięcie przygotowane włókna o przekroju dF , długości ds i wydłużeniu rzeczywistym Δds , praca przygotowana sił wewnętrznymi wynosi:

$$L_w = \int \bar{\sigma} dF \cdot \Delta ds \dots \dots \dots (a)$$

(Znak \int rozciąga się na całkowitą objętość belki.)

$$\text{Ale: } \Delta ds = \left(\frac{\sigma}{E} + \omega t + \omega \frac{\Delta t}{h} v \right) ds \dots \dots \dots (b)$$

przyczem Δt jest różnicą temperatur włókien skrajnych, górnych i dolnych. v odstępem włókna od osi obojętnej, h wysokością belki w danym miejscu.

$$\text{Dalej: } \sigma = \frac{N}{F} + \frac{Mv}{J}; \text{ podobnie zaś } \bar{\sigma} = \frac{\bar{N}}{F} + \frac{\bar{M}v}{J} \dots \dots \dots (c)$$

Podstawmy b) i c) w a), to z uwagi na $\int dF = F =$ powierzchni przekroju, $\int v dF = 0$, zaś $\int v^2 dF = J =$ momentowi bezwładności przekroju, otrzymamy [analogicznie do (3)] pomijając (zwykle bardzo mały) wpływ sił poprzecznych:

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{P}_m \delta_m + \Sigma \bar{C} c &= L_w = \\ &= \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \omega t \bar{N} ds + \int \omega \frac{\Delta t}{h} \bar{M} ds \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Jeżeli wreszcie układ składa się z prętów i elementów o ściance pełnej (tarcz sztywnych), to wedle równań (4), (6) i (7) prawo pracy przygotowanej wyrazi się:

$$\begin{aligned} \Sigma P_m \delta_m + \Sigma C c &= \Sigma \bar{S} S \rho + \Sigma S \omega t s + \\ &+ \int \bar{M} M \frac{ds}{EJ} + \int \bar{N} N \frac{ds}{EF} + \int \bar{N} \omega t ds + \int \bar{M} \omega \frac{dt}{h} ds \dots \dots (7) \end{aligned}$$

Równanie (5) posłuży do wyznaczenia uogólnionego przesunięcia δ_m w stanie rzeczywistych obciążeń (S, t, c), jeżeli jako obciążenie przygotowane

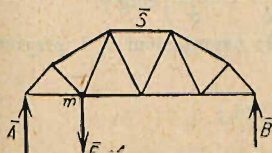


Fig. 331.

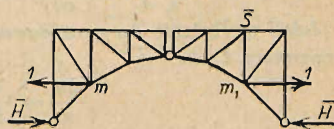


Fig. 332.

(które powoduje napięcia \bar{S} i oddziaływania \bar{c}) obierzemy odpowiednio uogólnioną jednostkę siły. Fig. 331 przedstawia przygotowany stan sił ($\bar{P}_m = 1, \bar{A}, \bar{B}, \bar{S}$) dla wyznaczenia pionowego ugięcia węzła m . (Podobnie można znaleźć przesunięcie poziome; rzeczywiste przesunięcie jest wypadkową obu przesunięć). Fig. 332 przedstawia uogólnioną jednostkę siły dla wyznaczenia przyrostu

poziomej odległości węzłów m i m_1 ; fig. 333 dla wyznaczenia obrotu pręta $m m_1$ w kierunku wskazówek zegara, fig. 334 dla wyznaczenia przyrostu kąta φ_m między kierunkami prętów $l k$.

Fig. 335 *a* przedstawia przygotowany stan sił (dwie pary sił na ramionach b i c , których momenty są równe 1, gdyż $\frac{1}{c} \cdot c = 1$) dla wyznaczenia przyrostu kąta α w trójkącie a, b, c wskutek przyrostu boków $\Delta a, \Delta b$ i Δc . Jeżeli siłę zaczepiającą w wierzchołku kąta γ rozłożymy na składowe w kierunku a i b (fig. 335 *b*), to napięcie przygotowane pręta a wynosi: $\bar{A} = 1 : b \sin \gamma = 1 : h$, zaś $\bar{B} = -\bar{A} \cos \gamma = -\cos \gamma : h$ i analogicznie $\bar{C} = -\cos \beta : h$. Pomyślny sobie w wierzchołku a łożysko stałe, w wierzchołku γ łożysko ruchome wzdłuż pręta b , to tylko siła $1 : c$ w wierzchołku β może wykonać pracę na przesunięciu $\delta = c \Delta \alpha$, zatem pracę $(1 : c) \cdot \delta = \Delta \alpha$.

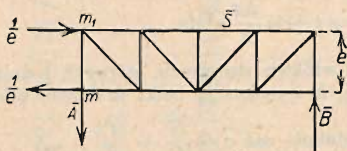


Fig. 333.

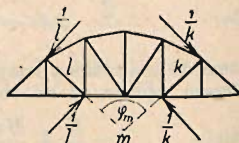


Fig. 334.

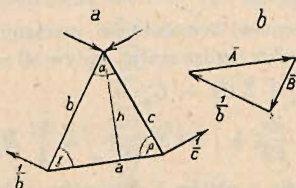


Fig. 335.

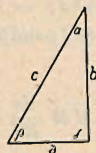


Fig. 336.

Równanie (5) przybierze kształt:

$$\begin{aligned} 1. \Delta \alpha &= \bar{A} \Delta a + \bar{B} \Delta b + \bar{C} \Delta c = \frac{\Delta a}{h} - \frac{1}{h} (\Delta b \cos \gamma + \Delta c \cos \beta) = \\ &= \frac{\Delta a}{a} \frac{a}{h} - \frac{\Delta b}{b} \frac{b \cos \gamma}{h} - \frac{\Delta c}{c} \frac{c \cos \beta}{h} = \\ &= \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta c}{c} \right) \cotg \beta + \left(\frac{\Delta a}{a} - \frac{\Delta b}{b} \right) \cotg \gamma. \end{aligned}$$

Jeżeli wydłużenie Δa spowodowane zostało naprężeniem σ_a i przyrostem temperatury t_w to:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t_w \text{ itd.};$$

więc:

$$E \Delta \alpha = [(\sigma_a - \sigma_c) + \omega E(t_a - t_c)] \cotg \beta + [(\sigma_a - \sigma_b) + \omega E(t_a - t_b)] \cotg \gamma.$$

Dla $t_a = t_b = t_c$ jest:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta + (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma \dots \dots \dots (8)$$

W trójkącie prostokątnym (fig. 336) $\gamma = 90^\circ$, $\cotg \gamma = 0$; więc przyrost kąta ostrego:

$$E \Delta \alpha = (\sigma_a - \sigma_c) \cotg \beta,$$

podobnie:

$$E \Delta \beta = (\sigma_a - \sigma_b) \cotg \gamma,$$

zaś przyrost kąta 90° :

$$E \Delta \gamma = (\sigma_c - \sigma_a) \cotg \beta + (\sigma_c - \sigma_b) \cotg \alpha.$$

Linia ugięcia (ugięta) pasa pomostowego pod ciężarem $P=1$ w punkcie a (fig. 337 *a*) jest zarazem linią wpływową pionowego przesunięcia tegoż punktu. Wedle bowiem prawa wzajemności przesunięć (por. str. 1147)

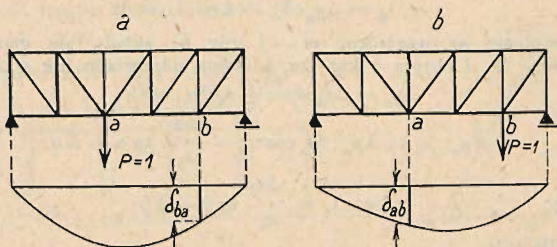


Fig. 337.

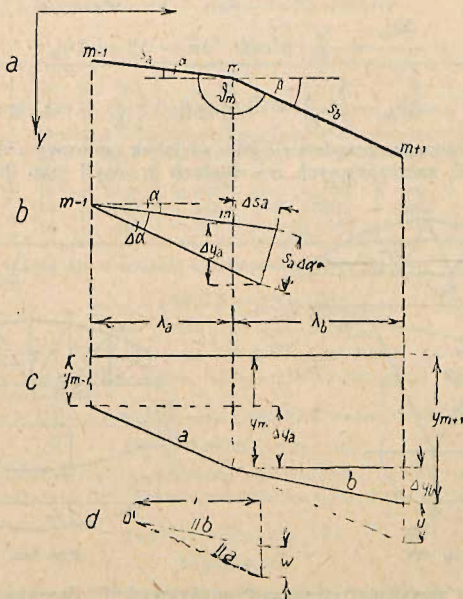


Fig. 338.

pionowe przesunięcie δ_{ba} wskutek ciężaru $P=1$ w a jest takie samo, jak pionowe przesunięcie δ_{ab} punktu a pod działaniem ciężaru $P=1$ w punkcie b (fig. 337 *b*), czyli: $\delta_{ab} = \delta_{ba}$.

Linia ugięcia ciągu prętów jako wielobok sznurowy ciężarów sprężystych (W). Niech będą (fig. 338 *a*) $m-1, m, m+1$ trzema sąsiednimi węzłami sztywnymi łamanego ciągu prętów s_a, s_b, \dots , tworzących

między sobą kąt ϑ_m , mierzony od dołu, zaś y_{m-1}, y_m, y_{m+1} (fig. 338c) rzędnymi linii ugięcia). Równoległe, poprowadzone do boków a i b ugiętej (fig. c) z dowolnego bieguna O (fig. d), odcinają na pionowej odległej od bieguna o 1 odcinek W (t. zw. ciężar sprężysty).

Z fig. c i d wynika: $W : 1 = u : \lambda_b$.

Z fig. c i d: $(u + \Delta y_b) : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a$,

czyli: $u : \lambda_b = \Delta y_a : \lambda_a - \Delta y_b : \lambda_b = W \dots \dots \dots (9)$

Przesunięcie m względem $m-1$ (fig. b) składa się geometrycznie z przyrostu Δs_a i obrotu o kąt $\Delta \alpha$, któremu odpowiada łuk $s_a \cdot \Delta \alpha$.

Więc: $\Delta y_a = \Delta s_a \sin \alpha + s_a \Delta \alpha \cdot \cos \alpha$;

a stąd: $\Delta y_a : \lambda_a = \Delta y_a : (s_a \cos \alpha) = \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha + \Delta \alpha$.

Podobnie: $\Delta y_b : \lambda_b = \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta + \Delta \beta$;

więc wedle (9):

$$W = \Delta \alpha - \Delta \beta + \frac{\Delta s_a}{s_a} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\Delta s_b}{s_b} \operatorname{tg} \beta.$$

Ale: $\frac{\Delta s_a}{s_a} = \frac{\sigma_a}{E} + \omega t$, $\Delta \alpha - \Delta \beta = \Delta \vartheta_m$;

zatem: $W = \Delta \vartheta_m - \left[\left(\frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \beta - \left(\frac{\sigma_a}{E} + \omega t \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \dots (10)$

Linję ugięcia można przedstawić jako wielobok sznurowy o biegunowej = 1 dla ciężarów W , zaciągającychcych we węzłach m , czyli jako linję momentów

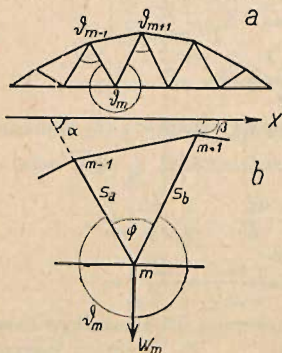


Fig. 339.

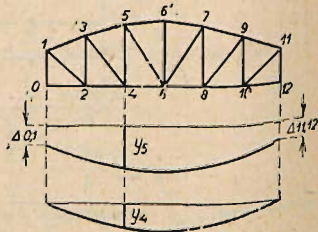


Fig. 340.

dla belki prostej obciążonej ciężarami sprężystymi W . Zamykająca wieloboku sznurowego wynika z warunków podporowych.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie pionowych przesunięć wszystkich węzłów belki, to można równanie (10) zastosować do ciągu złożonego z krzyżulców belki (fig. 339 a). Dla węzła m (fig. b) $\Delta \vartheta_m = - \Delta \varphi_m$. Kąty α i β są to kąty między dodatnim kierunkiem osi X , a przedłużeniem prętów s_a i s_b , mierzone w kierunku wskazówek zegara (fig. b). $\Delta \varphi_m$ można znaleźć z równania (8).

Dla belki o kracie prostokątnej (fig. 340) należy oddzielnie znaleźć linję ugięcia obu pasów. Tu dla węzła 4 dla ciągu 3, 4, 5 kąt β , zaś dla węzła 5 i ciągu

4, 5, 6 kąt α jest prosty, zatem $\operatorname{tg} \beta$, względnie $\operatorname{tg} \alpha = \infty$. Dla ciągu 3, 5, 6' jest $\vartheta_5 = \varphi_{354} + \varphi_{456} + \varphi_{656'}$, zatem, $\Delta \vartheta_5 = \Delta \alpha_{354} + \Delta \alpha_{456} + \Delta \alpha_{656'}$. Dla pasu dolnego, prostego, jest $\Delta \vartheta_4 = -(\Delta \alpha_{243} + \Delta \alpha_{345} + \Delta \alpha_{546}) = W_4$. Kąty α i β są tu $= 0$. Zamykająca linija ugięcia pasa górnego wynika stąd, że przesunięcie pionowe węzła 1 = skróceniu pręta 0—1, zaś przesunięcie węzła 11 = skróceniu pręta 11—12. Przyrosty kątów w trójkącie znaleźć można wedle równania (8).

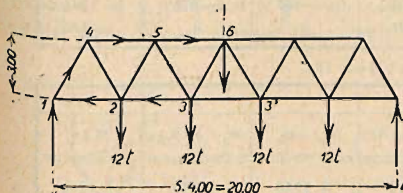


Fig. 341.

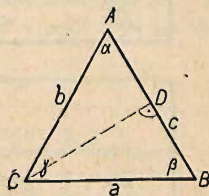


Fig. 342.

Przykład. Obliczyć ugięcie pasa dolnego belki (fig. 341). Długości prętów s , przekroje F siły wewnętrzne S i naprężenia $\sigma = S:F$ zestawiono na tablicy I.

Tablica I.

Pręt	s cm	F cm ²	S t	σ kg/cm ²	Pręt	s cm	F cm ²	S t	σ kg/cm ²
1—2	400	44	+ 16	+ 364	1—4	360	60	— 28,8	— 480
2—3	400	60	+ 40	+ 667	4—2	360	40	+ 28,8	+ 720
3—3'	400	60	+ 48	+ 800	2—5	360	44	— 14,4	— 328
4—5	400	65	— 32	— 492	5—8	360	44	+ 14,4	+ 328
5—6	400	65	— 48	— 739	3—6	360	44	0	0

Kratownica składa się z trójkątów równoramiennych (fig. 342) o podstawie $a = 4$ m i wysokości $h = 3$ m.

Bok:

$$b = c = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} = 3,6 \text{ m.}$$

$$\cot \beta = \cot \alpha = 2:3 = 0,667.$$

Poprowadźmy $\overline{CD} \perp \overline{AB}$, to z równań $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 13$, tudzież $(3,6 - \overline{AD})^2 + \overline{CD}^2 = 16$, otrzymamy $\overline{AD} = 1,39$ m, $\overline{CD} = 3,32$ m, $\cot \alpha = 1,39 : 3,32 = 0,42$. Kontrola: $\cot \beta = (3,60 - 1,39) : 3,32 = 0,667$.

Przyrost kąta α obliczono tabelarycznie (Tabl. IIa) według wzoru (8):

$$E \Delta \alpha = 0,667 (2\sigma_a - \sigma_b - \sigma_c).$$

Podobnie: $E \Delta \beta = 0,667 (\sigma_b - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_b - \sigma_c)$ (por. Tabl. II b) i $E \Delta \gamma = 0,667 (\sigma_c - \sigma_a) + 0,42 (\sigma_c - \sigma_b)$ (por. Tabl. II c). Kontrolę stanowi warunek: $E (\Delta \alpha + \Delta \beta + \Delta \gamma) = 0$.

Tablice zmiany kątów.

Tablica II a.

1	2	3	4	5
α	$2\sigma_a$	$\sigma_b + \sigma_c$	$\frac{E \Delta \alpha}{0,667}$	$E \Delta \alpha$
$\overline{425}$	— 984	+ 392	— 1576	— 918
$\overline{586}$	— 1478	+ 328	— 1806	— 1203
$\overline{142}$	+ 728	+ 240	+ 488	+ 326
$\overline{253}$	+ 1834	0	+ 1343	+ 890
$\overline{363'}$	+ 1600	0	+ 1600	+ 1069

Tablica IIb.

1	2	3	4	5	6
β	$\sigma_b - \sigma_a$	$(\sigma_b - \sigma_a)0,667$	$\sigma_b - \sigma_c$	$(\sigma_b - \sigma_c)0,42$	$E A \beta$
542	+ 164	+ 109	- 1048	- 440	- 331
653	+ 739	+ 493	- 328	- 138	+ 355
421	- 844	- 564	- 1200	- 505	- 1069
532	- 995	- 665	- 656	- 276	- 941
633'	- 800	- 535	0	0	- 535

Tablica IIIc.

1	2	3	4	5	6
γ	$\sigma_c - \sigma_a$	$(\sigma_c - \sigma_a)0,667$	$\sigma_c - \sigma_b$	$(\sigma_c - \sigma_b)0,42$	$E A \gamma$
452	+ 1212	+ 810	+ 1048	+ 440	+ 1250
663	+ 1067	+ 712	+ 328	+ 138	+ 850
412	+ 356	+ 238	+ 1200	+ 505	+ 743
523	- 339	- 226	+ 656	+ 276	+ 50
633'	- 800	- 535	0	0	+ 535

Ciążar sprężysty we węźle 2: $W_2 = \Delta \vartheta_2 = -(\Delta \alpha_{123} + \Delta \beta_{321} + \Delta \gamma_{523})$.

Czyli: $E W_2 = -(-918 - 1069 + 50) = +1937 \text{ kg/cm}^2$

Podobnie: $E W_3 = -(-1203 - 941 - 535) = +2679$

Oddziaływanie sprężyste $E[A] = E(W_2 + W_3) = +4616 \text{ kg/cm}^2$.

Ugięcie węzła 2: $y_2 = s_{1-2} [A] = 460 \frac{4616}{2,100.000} = 0,88 \text{ cm}$.

Ugięcie węzła 3: $y_3 = [A] (s_{1-2} + s_{2-3}) - W_2 \cdot s_{2-3} =$
 $= 800 \frac{4616}{2,100.000} - 400 \frac{1937}{2,100.000} = 1,760 - 0,368 = 1,392 \text{ cm}$

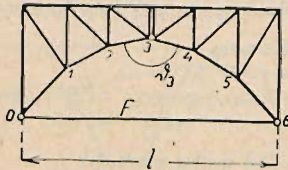


Fig. 343.

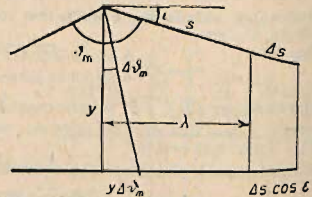


Fig. 344.

Na fig. 343 przyrost kąta ϑ_3 w przegubie znaleźć można wedle równania (5), stosując jako \bar{S} napięcia wskutek dwu par sił na ramionach 23 i 34, których moment = 1, działających w sensie zwiększenia kąta ϑ_3 . Lepiej jednak znaleźć $\Delta \vartheta_3$ ze związku między przyrostami kątów węzłowych $\Delta \vartheta$, wydłużeniami prętów Δs i wydłużeniem cięciwy l o $\Delta l = \frac{Hl}{EF}$, przyczem H = napięcie, F = przekrój pręta 06. Jeżeli prostopadła odległość węzła m od cięciwy (fig. 344) jest równa y , to wskutek przyrostu $\Delta \vartheta_m$ wzrosnie cięciwa o $y \Delta \vartheta_m$.

Wskutek przyrostu Δs wzrosnie cięciwa o $\Delta s \cos \epsilon = \frac{\Delta s}{s} \lambda$. Zatem:

$$\Delta l = \sum y \Delta \vartheta + \sum \frac{\Delta s}{s} \lambda \dots \dots \dots (11)$$

W równaniu tem dla fig. 343 jest tylko jedna niewiadoma $\Delta \vartheta_3$.

Równanie (9) można napisać (por. fig. 338):

$$W = \frac{y_m - y_{m-1}}{\lambda_a} - \frac{y_{m+1} - y_m}{\lambda_b} = -y_{m-1} \frac{1}{\lambda_a} + y_m \left(\frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} \right) - y_{m+1} \frac{1}{\lambda_b}$$

Jeżeli: $\frac{1}{\lambda_a} = \bar{Q}_{m-1}, \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_m, \frac{1}{\lambda_b} = \bar{Q}_{m+1},$

to wedle (2 a):

$$W_m = \sum \bar{Q} \delta = \sum \bar{S} \Delta s,$$

przyczem \bar{S} są to napięcia w prętach wskutek sił \bar{Q} , zaś Δs rzeczywiste wydłużenia. Suma $\sum \bar{S} \Delta s$ rozciąga się zwykle tylko na kilka prętów, na fig. 345

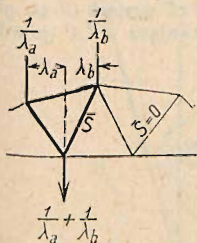


Fig. 345.

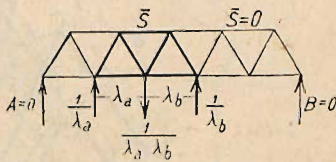


Fig. 346.

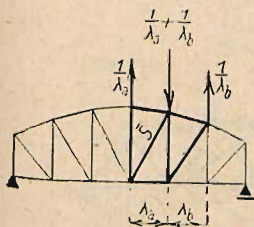


Fig. 347.

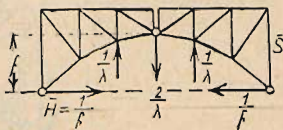


Fig. 348.

trzy pręty, fig. 346 i 347 siedem prętów, w innych prętach bowiem $\bar{S} = 0$. Na fig. 348 w żadnym przecięciu \bar{S} nie jest $= 0$, więc tu nie warto stosować tej metody.

b) Metoda wykreslna.

Jeżeli pręty a i b pewnej kratownicy płaskiej, schodzące się we węzle C , przejdą wskutek jej odkształcenia z położenia ACB w położenie $A_1C_1B_1$ (fig. 349 a), to każdy z prętów doznaje: 1. równoległego przesunięcia w położeniu A_1A' względnie B_1B' , 2. wydłużenia Δa , względnie skrócenia Δb i 3. obrotu około punktu A_1 , względnie B_1 , przyczem koniec C pręta a opisuje łuk niezmiernie mały, który zatem można zastąpić odcinkiem $\rho_a \perp a$, podobnie $\rho_b \perp b$. C_1 znajduje się w punkcie przecięcia ρ_a i ρ_b .

Wykreślmy z dowolnego punktu O (fig. 349 b) przesunięcia węzłów A i B , mianowicie $OA' \parallel \delta_a$ i $OB' \parallel \delta_b$, to $A'B'$ przedstawia wzajemne przesunięcie węzłów A i B . Z punktu A' wykreślmy wydłużenie $\Delta a \parallel a$ w kierunku AC , zaś z B' $\Delta b \parallel b$ w kierunku CB ; z końców odcinków Δa i Δb poprowadzone $\rho_a \perp a$, oraz $\rho_b \perp b$ niech się przecinają w C' , to fig. b jest identyczna z figurą zakreślowaną, więc $OC' \parallel CC_1 = \delta_c$ jest przesunięciem węzła C , $A'C'$ jest względem przesunięciem węzłów A i C , zaś $B'C'$ węzłów B i C . Podobnie można znaleźć punkt D' , odpowiadający

węzłowi D kratownicy, nawiązującemu się do węzłów A i C prętami AD i CD itd. Fig. b jest t. zw. planem przesunięć Williot'a.

Jeżeli kratownica (fig. 350 a) jest symetryczna i symetrycznie obciążona, to jeden pręt nie doznaje zmiany kierunku (mianowicie pręt, który leży w osi symetrii, względnie, którego ta oś jest symetralną; na fig. 350 CD). Odcinek równoległy do tego pręta $C'D'$ na fig. b , a przedstawiający w pewnej skali jego wydłużenie, względnie skrócenie, przedstawia zarazem wzajemne (względne) przesunięcie obu jego końców. Można więc, podobnie jak do punktów A' i B' we fig. 349 b do końców odcinka $C'D'$ nawiązywać dalsze punkty planu Williot'a. Węzeł A (fig. 350 a ; łożysko stałe) jest nieruchomy, zatem przesunięcie rzeczywiste dowolnego węzła C jest $A'C'$. Niech A'' (fig. 350 c) będzie rzutem punktu A' na pionową przez A , zaś C'' rzutem C' na pionową przez C , to pionowy odcinek między C'' , a zamykająca $A''A'$ przedstawia

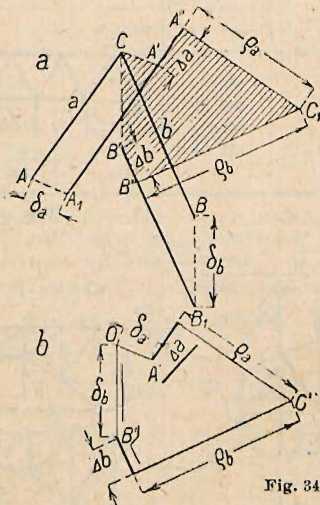


Fig. 349.

pionową składową przesunięcia węzła C . Linja $A''C''D''B''$ jest linją ugięcia pasa dolnego, $A''1''2''3''B''$ zaś pasa górnego. Dla przejrzystości znaczymy na planie Williot'a wydłużenia i skrócenia grubo, zaś odcinki ρ cienko.

Jeżeli obciążenie jest niesymetryczne, to nie znamy kierunku żadnego pręta po odkształceniu. Jeśli przyjmiemy, że dowolny pręt nie zmienia swego kierunku, a jeden z jego przekrojów, np. środkowy, jest nieruchomy, to planem względnych przesunięć, nakreślonym dla powyższych przyjęć (fałszywych) wyznaczony jest prawdziwy kształt belki ugiętej, lecz we fałszywym położeniu. Odkształconą belkę, niby tarczę sztywną, należy jeszcze przesunąć tak, aby odpowiadała warunkom podporowym.

Niezmiernie małe przesunięcie tarczy można uważać za obrót około pewnego bieguna (por. str. 1213), a końce wektorów wychodzących z dowolnego punktu O' (albo początku wektorów, których końce zbiegają się w O'), a przedstawiających przesunięcia lub prędkości punktów tarczy, tworzą figurę F'' , podobną do danej tarczy, lecz obróconą o 90° . Rzeczywiste przesunięcie węzła C belki jest sumą geometryczną przesunięcia $O'C'$ względem punktu O , oraz przesunięcia $C''O'$ z powodu obrotu, więc:

$$\overline{C''C'} = \overline{C''O'} + \overline{O'C'}$$

Całkowite rzeczywiste przesunięcie punktu A (łożysko stałe) $A''A' = 0$ (fig. 351 a), więc przesunięcie jego wskutek obrotu belki odkształconej jest

$A'O'$. Punkt A' figury I''' , od której wychodzą wektory przesunięć wskutek obrotu, zbiegające się w O' , nakrywa się więc z punktem A' planu przesunięć względnych. Punkt B'' leży na prostej $A''B'' \perp AB$. Rzeczywiste przesunięcie $B''B'$ punktu B możliwe jest tylko po torze tt łożyska ruchomego, więc $B'B'' \parallel tt$. Znając dwa punkty A'' i B'' figury I''' , możemy

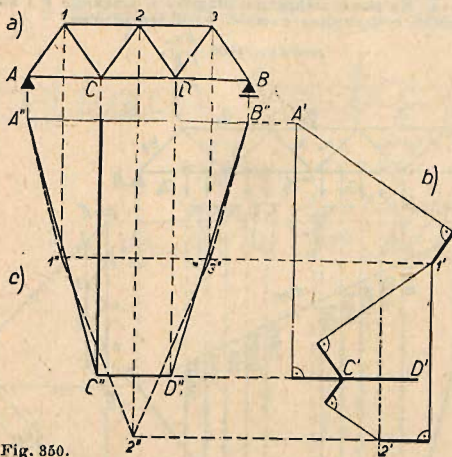


Fig. 350.

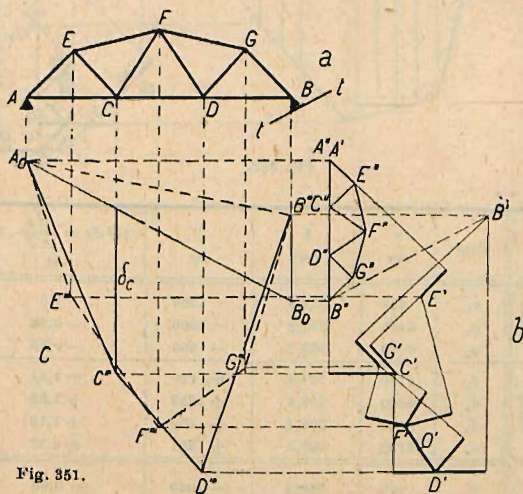


Fig. 351.

ja wykreślić, a tem samym wyznaczyć rzeczywiste przesunięcie dowolnego węzła. Np. rzeczywiste przesunięcie węzła C jest wektorem $C''C'$ (fig. b). Jeżeli chodzi tylko o pionowe składowe przesunięć węzłów, to kreślenie F''' jest zbyteczne.

Jeżeli A_0 leży na pionowej punktu A i poziomej punktu A'' , podobnie B_0 , zaś C''' na pionowej C i poziomej punktu C' , to pionowy odcinek pomiędzy C''' i zamykającą $A_0 B_0$ jest pionowym przesunięciem δ_c węzła C .

Zatem $A_0 C''' D''' B'''$ (fig. 352 c) jest linią ugięcia pasa dolnego, $A_0 E''' F''' G''' B'''$ jest linią ugięcia pasa górnego belki AB (fig. a). $B_0 B'''$ jest pionową składową przesunięcia punktu B .

Przykład (fig. 352). Znaleźć największe ugięcie węzła 2 belki kratowej (fig. a) obciążonej pociągami normy A . W tym celu wykreślmy linię wpływową ugięcia węzła 2. Według Maxwell'a będzie to linia ugięcia pasa pomostowego pod ciężarem $P=1$, zaczepiającym we węzle 2. Na tabeli zestawiono długości s , przekroje F i napięcia prętów S . Ostatnia rubryka podaje tysiąckrotne wartości wydłużen prętów:

$$1000 ds = 1000 \frac{Ss}{EF}$$

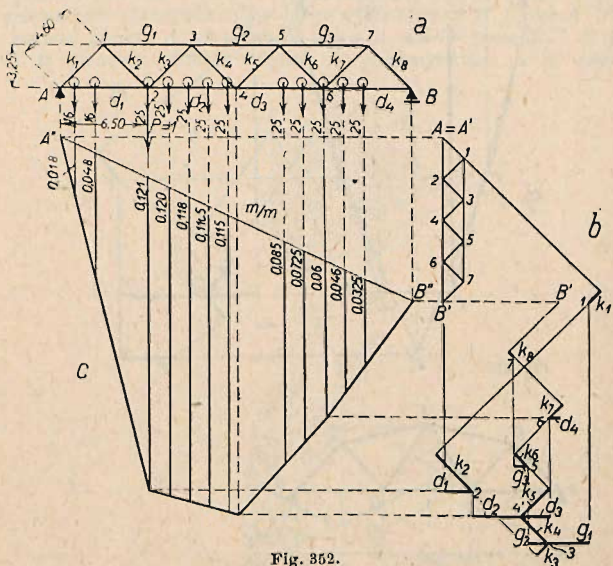


Fig. 352.

		Pręt	s cm	F cm ²	S kg	$10^3 ds = \frac{Ss}{EF} \cdot 10^3$ cm
Pasa	górny	g_1	650	308,8	- 1500	- 1,5
		g_2	6180	359,2	- 1000	- 0,86
		g_3	6180	308,8	- 500	- 0,50
	dolny	d_1	6180	208,4	+ 750	+ 1,11
		d_2	6180	208,4	+ 1253	+ 1,86
		d_3	6180	208,4	+ 752	+ 1,12
d_4		6180	208,4	+ 251	+ 0,37	
Krzyżulce	k_1	460	359,2	- 1060	- 0,65	
	k_2	460	114,96	+ 1060	+ 2,02	
	k_3	460	114,96	+ 354	+ 0,68	
	k_4	460	52,0	- 354	- 1,49	
	k_5	460	52,0	+ 354	+ 1,49	
	k_6	460	52,0	- 354	- 0,68	
	k_7	460	114,96	+ 354	+ 0,68	
	k_8	460	359,2	- 354	- 0,22	

Moduł sprężystości $E = 2100000 \text{ kg/cm}^2$. Na planie Willio't'a (fig. b) przyjęto najpierw kierunek 4—3 jako stały.

Punkty planu Willio't'a odrzuwane na pionowych, przechodzących przez węzły A, 2, 4, 6, B (fig. c), dają linię ugięcia pasa dolnego, a zarazem linię wpływową ugięcia węzła 2. Na fig. a i c wkreślono najniekorzystniejsze położenie pociągu. Największe ugięcie węzła 2 $\delta_2 = 10^{-3} \cdot [16(18 + 48) + 25(121 + 120 + 118 + 116,5 + 115 + 86 + 72,5 + 60 + 46 + 32,5)] = 10^{-3} \cdot [16 \cdot 66 + 25 \cdot 886,5] = 1,06 + 22,16 = 23,22 \text{ mm}$.

V. Napężenia drugorzędne w belkach kratowych.

Przy obliczaniu belek kratowych przyjmuje się, że pręty są połączone w węzłach przegibnie, że występują w nich zatem tylko siły osiowe. Naj-

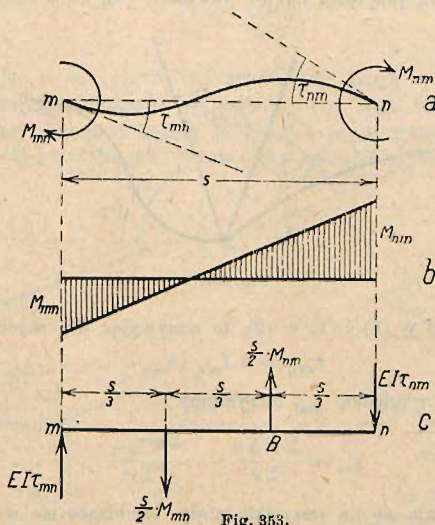


Fig. 353.

częściej jednak węzły są sztywne, więc kąty między prętami we węzłach nie mogą się zmienić, zaś pręty po odkształceniu belki wyginają się i wskutek tego powstają w nich napężenia zginające, zwane drugorzędne.

Styczne do pręta mn (fig. 353 a) odchyla się od jego cięciwy o kąty τ_{mn} i τ_{nm} , dodatnie, jeżeli w kierunku wskazówek zegara. Na koniec m pręta mn działa moment M_{mn} (moment węzłowy), na koniec n moment M_{nm} . Wzdłuż pręta linia momentów jest prostą (fig. 353 b). Pomijając wpływ siły osiowej, znajdziemy M_{mn} wedle zasady Mohra z równania momentów ciężarów sprężystych (fig. 353 c) ze względu na punkt B:

$$M_{mn} = 2 \frac{EJ}{s} (2\tau_{mn} + \tau_{nm}) \dots \dots \dots (1)$$

Z powodu równowagi suma momentów węzłowych we wszystkich prętach, zbiegających się centrycznie w danym węźle m :

$$\sum M_{mn} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

Jeżeli połączenie prętów we węźle jest ekscentryczne, to $\sum M_{mn} = \sum S \cdot c$ (S siła osiowa, c mimośród). Przy w węzłach mamy w równań (2). Jeżeli