E. Belki bezprzekątniowe

napisał

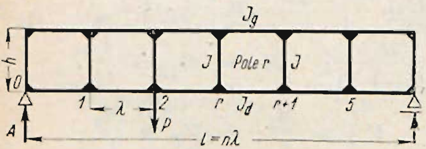
śp. dr inż. Stefan Bryła
prof. Politechniki Warszawskiej.

Omówimy tu wyłącznie belki bezprzekątniowe równoległe zwane czasami belkami Vierendeela.

1. Obciążenie pionowe stałe.

Przyjmujemy, iż ciężary węzłowe na skutek obciążenia stałego działają w węzłach pasa dolnego (rys. 1).

Dla wyznaczenia sił wewnętrznych sprowadzamy belkę do układu zasadniczego, tj. belki w dwu punktach wolnopodpartej, przyjmując każdy pręt pasa górnego przy pomoście dołem (lub pasa dolnego przy pomoście górą) przecięty w połowie swej rozpiętości, przy czym z punktów przecięcia prowadzimy dwa ramiona sztywne ($J = \infty$) do środka ciężkości pola (rys. 2).

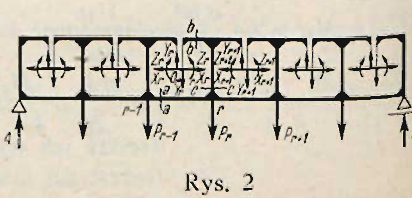


Rys. 1

W układzie pracuje pas dolny (górny) jako belka wolnopodparta w dwu punktach, zaś pas drugi i słupy nie doznają żadnych naprężeń.

Ugięcie wywołuje w układzie zasadniczym przesunięcia Δx i Δy oraz obrót ramion sztywnych o kąt $\Delta \varphi$ w stosunku do pierwszego położenia (rys. 3).

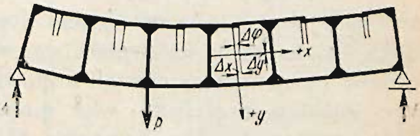
Ażeby układ zasadniczy działał jako belka bezprzekątniowa musi doznawać tych samych odkształceń, zatem ramiona sztywne układu zasadniczego, które pod wpły-



Rys. 2

wem ciężarów węzłowych P doznały przesunięć $\Delta\varphi$, Δx i Δy, muszą pod wpływem wielkości statycznie niewyznaczalnych X, Y, Z wrócić do pierwotnego położenia.

Belki bezprzekątniowe są zatem układem $3n$-krotnie hiperstatycznym, przy czym n jest ilością pól belki. Dla równowagi, oprócz trzech zasadniczych warunków, suma odkształceń w każdym polu musi być równa zeru, zatem $\Delta\varphi = 0$, $\Delta x_r = 0$ i $\Delta y_r = 0$.



Rys. 3

Odkształcenia belki i związane z nimi przesunięcia Δx, Δy oraz obrót $\Delta\varphi$ następują pod działaniem sił poprzecznych i normalnych oraz momentów zgięcia. Odkształcenia skutkiem sił poprzecznych są bardzo małe i można je opuścić.

Dla wyznaczenia odkształceń na skutek momentów zgięcia z uwzględnieniem wpływu sąsiednich pól otrzymujemy równania (według Kriso „Statik der Vierendeelträger", 1922, str. 28):

$$\Delta\varphi_r = \frac{\lambda h}{2E}\left(\frac{1}{J_g} - \frac{1}{J_d}\right) X_r - \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Y_{r+1} - \frac{h}{EJ} Z_{r-1} +$$

$$+ \frac{1}{E}\left[\frac{2h}{J} + \lambda\left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d}\right)\right] Z_r - \frac{h}{EJ} Z_{r+1} + \frac{f_r}{EJ_d} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta x_r = \frac{h^3}{12EJ} X_{r-1} - \frac{h^2}{2E}\left[\frac{h}{3J} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d}\right)\right] X_r + \frac{h^3}{12EJ} X_{r+1} +$$

$$+ \frac{\lambda h}{2E}\left(\frac{1}{J_g} - \frac{1}{J_d}\right) Z_r + \frac{hf_r}{2EJ_d} = 0 \tag{2}$$

$$\Delta y_r = -\frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r-1} + \frac{\lambda^2}{2E}\left[\frac{h}{J} + \frac{\lambda}{6}\left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d}\right)\right] Y_r - \frac{\lambda^2 h}{4EJ} Y_{r+1} -$$

$$- \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r-1} + \frac{\lambda h}{2EJ} Z_{r+1} - \frac{\lambda^3}{12EJ_d} T_{0_r} = 0 \tag{3}$$

W równaniach tych:

λ = odstęp węzłów,

h = wysokość belki,

E = współczynnik sprężystości,

J_g (J_d) = moment bezwładności pasa górnego (dolnego),

J = moment bezwładności słupa,

f_r = powierzchnia momentów w polu r, przeniesionych przez pas dolny,

T_{0_r} = siła poprzeczna w polu r dla belki w dwu punktach wolnopodpartej,

X_r, Y_r, Z_r = wielkości hiperstatyczne,

Dla $J_g = J_d$ momenty zgięcia w pasach tego samego pola są równe co do wielkości a przeciwne co do znaku. Stąd wynika równość momentów w stopie i w głowicy tego samego słupa, przy czym znaki są przeciwne; więc moment w połowie jego wysokości równy jest zeru. Równania (1) i (3) mają zatem kształt:

$$Z_r = -\frac{f_r}{2\lambda} = -0{,}5\, M_{0_r}\,; \qquad Y_r = -T_{0_r} \qquad (4)\ (5)$$

gdzie M_{0_r} = moment zgięcia belki wolnopodpartej w połowie pola r o długości λ. Równania (4) i (5) zachowują swą ważność bez względu na parzystą lub nieparzystą ilość pól belki bezprzekątniowej przy dowolnej wartości stosunku $J : J_d$.

Dla wyznaczenia wielkości hiperstatycznych X_r musimy, wychodząc z zasadniczego równania (2), ułożyć tyle analogicznych równań ile pól posiada belka. Równania te w przypadku $J_g = J_d$ przy dowolnej ilości pól i dowolnym stosunku $J : J_d$ po przekształceniu przybiorą postać:

$$\left.\begin{aligned}
X_1 &= (1-k^2)\,\frac{1-k}{2}\,\frac{\lambda}{h}\sum_{\xi=1}^{\xi=n-1}\left(k^{\xi-1}\sum_1^{\xi}T\right)\\
X_r &= \frac{1-k}{2}\,\frac{\lambda}{h}\left\{\sum_{\xi=1}^{\xi=r-1}\left[k^{r-1-\xi}\sum_1^{\xi}T\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{\xi=r}^{\xi=n-1}\left[k^{\xi-r}\sum_1^{\xi}T\right]\right\}\\
&\text{Równanie to ważne jest dla } r=2 \text{ do } r=n-1:\\
X_n &= (1-k^2)\,\frac{1-k}{2}\,\frac{\lambda}{h}\sum_{\xi=1}^{\xi=n-1}\left(k^{n-1}\sum_1^{\xi}T\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

przy czym

$$k = 0{,}5\left(a - \sqrt{a^2 - 4}\right), \quad a = 2 + \frac{6\,\lambda}{h}\,\frac{J}{J_d}$$

W przypadku $J_g \lesseqgtr J_d$ należy rozdzielić momenty zgięcia na pasy w stosunku do momentów bezwładności pasów i z równań (1), (2) i (3) obliczyć wielkości hiperstatyczne, przy czym dla pomostu górą (dołem) będzie f_r = powierzchni momentów, przeniesionych przez pas górny (dolny) w polu r.

Uwzględniając wpływ sił normalnych na odkształcenia, otrzymamy zasadnicze równania na wyznaczenie wielkości hiperstatycznych

$$\Delta'\,\varphi_r = 0\,; \quad \Delta'\,x_r = -\frac{\lambda}{E}\left[\frac{1}{F_d} + \frac{1}{F_g}\right] X_r\,; \quad \Delta' y_r = 0\,; \qquad (7)$$

przy czym F_d (F_g) = powierzchnia przekroju pasa dolnego (górnego).

Dla wyznaczenia wielkości hiperstatycznych przy uwzględnieniu wpływu momentów zginających i sił normalnych musimy do równań (1), (2) i (3) dodać równanie (7). Otrzymamy zatem:

$$\Sigma\,\Delta\,\varphi_r = \Delta\,\varphi_r + \Delta'\varphi_r = 0\,;$$

$$\Sigma\,\Delta\,x_r = \Delta\,x_r + \Delta' x_r = 0\,; \quad \Sigma\,\Delta\,y_r = \Delta\,y_r + \Delta' y_r = 0\,;$$

Mając obliczone wielkości hiperstatyczne X_r, Y_r i Z_r, możemy obliczyć siły wewnętrzne i momenty w pasach oraz słupach belki bezprzekątniowej z wzorów:

Pas górny: siła normalna $N'_r = -X_r$

siła poprzeczna $T'_r = -Y_r$

moment zgięcia $M'_r = -(\beta h X_r + Y_r\,x + Z_r)$.

Pas dolny:

siła normalna $N_r = +X_r$

siła poprzeczna $T_r = +T_{0_r} + Y_r$

moment zgięcia $M_r = +M_{0_r}\,x - \gamma h\,X_r + Y_r\,x + Z_r$

przy czym

γh = odległość punktu zaczepienia siły X_r od osi pasa dolnego

βh = „ „ „ „ X_r „ „ „ górnego

Dla $J_g = J_d$ będzie $\gamma h = \beta h = 0{,}5\,h$.

Słupy:

siła normalna $n_r = -Y_r + Y_{r+1}$ gdy obciążony jest pas dolny

$n_r = +Y_r - Y_{r+1}$ „ „ „ „ górny

siła poprzeczna $T_r = X_r - X_{r-1}$

moment zgięcia $m_{ry} = (X_r - X_{r+1})\, y - \left[(Y_r + Y_{r+1}) \frac{1}{2} \lambda + \right.$

$$\left. + (Z_r - Z_{r+1})\right],$$

przy czym x = odległość badanego przekroju pasa w polu r od lewego słupa,

y = odległość badanego przekroju słupa od połowy wysokości jego.

2. Wpływ temperatury

Jednakowe ogrzanie (oziębienie) całej belki nie wywołuje naprężeń wewnętrznych, jeżeli belka jest odpowiednio podparta. Inaczej dzieje się przy niejednakowym wpływie temperatury na pasy. Przyjmując stan temperatury jako jednostajny w całym przekroju pasa górnego o wielkości t_g, zaś pasa dolnego w wielkości t_d, otrzymamy zasadnicze równanie na wyznaczenie wielkości hiperstatycznych:

$$\Delta \varphi_{rt} = 0; \quad \Delta x_{rt} = \alpha t \lambda; \quad \Delta y_{rt} = 0; \tag{8}$$

przy czym α jest współczynnikiem wydłużenia. Równania te są identyczne z równaniami (1), (2) i (3), przy czym jednak zamiast wielkości X_r, Y_r, Z_r, należy wprowadzić wielkości X_{rt}, Y_{rt} i Z_{rt}. Ponieważ wpływ temperatury nie wywołuje momentów zgięcia i sił poprzecznych w belce w dwu punktach wolnopodpartej, muszą odpaść wyrażenia zawierające wartości f_r i T_{0_r}, równanie zaś (2) musi otrzymać dodatek $+ \alpha t \lambda$. Tak przekształcone równania sprawdzają się dla wartości $Y_{rt} = Z_{rt} = 0$, pozostanie zaś równanie

$$\Delta x_{rt} = \frac{h^3}{12\,EJ} X_{(r-1)\,t} - \frac{h^2}{2E}\left[\frac{h}{3J} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{J_g} + \frac{1}{J_d}\right)\right] X_{rt} +$$

$$+ \frac{h^3}{12\,EJ} X_{(r+1)\,t} + \alpha t \lambda = 0 \tag{9}$$

Z równania tego obliczamy wielkości X_r, układając tyle analogicznych równań ile pól posiada belka, a następnie obliczamy siły wewnętrzne i momenty w prętach belki bezprzekątniowej jak dla obciążenia węzłowego.

3. Obciążenie ruchome.

Obciążenie ruchome przenosi się zazwyczaj na belki główne za pomocą poprzecznic umieszczonych w węzłach. Wpływ jego uwzględniamy tak jak obciążenia stałego, kreśląc linię największych momentów i sił poprzecznych jak dla belki wolnopodpartej, obliczamy wielkości hiperstatyczne z równań (1), (2) i (3), a następnie przy pomocy poprzednio podanych wzorów siły wewnętrzne i momenty zgięcia w poszczególnych prętach belki bezprzekątniowej.

4. Sposób przybliżony

dogodny dla pierwszego przeliczenia przekrojów (rys. 4).

Oznaczamy przez J_g, J_d, J_1, J_2,... momenty bezwładności pasa górnego, dolnego i słupów 1, 2,...

N_g, N_d, N_1, N_2,... siły osiowe w prętach pasów i słupów

T_g, T_d, T_1, T_2,... siły poprzeczne „ „ „ „

M_g, M_d, M_1, M_2,... momenty zgięcia „ „ „ „ .

Jeżeli rozpatrywać będziemy ramę zamkniętą między słupami 2 i 3 o długości rozpory a_2, to punkty zerowe momentów będą w słupach w odległości v_g od pasa górnego oraz w pasach w odległości w_2 od lewego słupa 2. Położenie tych punktów można wyznaczyć w przybliżeniu jak w ramie zamkniętej. Przeciętnie:

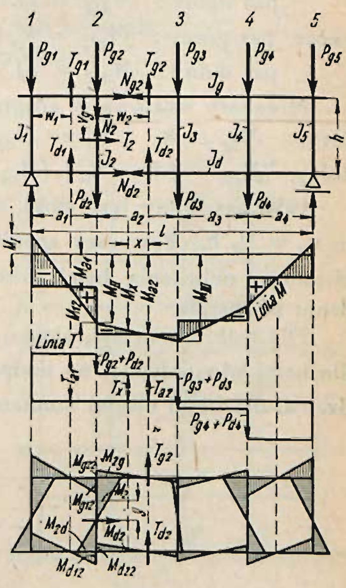
$$v_g = \frac{m_o h}{1 + m_o} = k_o h,$$

$$w_2 = \frac{m_2 a_2}{1 + m_2} = k_2 a_2,$$

przy czym

$$m_o = \sqrt{\frac{J_g}{J_d}},$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_3}};$$



Rys. 4

siły osiowe w pasach:

$$-N_{g2} = N_{d2} = \frac{M_{a2}}{h};$$

siła poprzeczna w pasach: $T_{g2} = k_o T_{a2}$; $T_{d2} = (1-k_o) T_{a2}$;

moment zgięcia w pasach w odległości x od punktu zerowego:

$$M_{g2} = T_{g2} x = k_o T_{a2} x = k_o (M_x - M_{a2});$$

$$M_{d2} = T_{g2} x = (1 - k_o) T_{a2} x = (1 - k_o) (M_x - M_{a2});$$

siła poziomo ścinająca w słupie 2:

$$T_2 = \int \frac{T_x d_x}{h} = \frac{M_{a2} - M_{a1}}{h} = N_{d2} - N_{d1};$$

moment zgięcia w odległości y od punktu zerowego w słupie 2: $M_2 = T_2 y$.

Siła osiowa w słupie 2 : $N_2 = (1 - k_o) (P_{d2} - P_{g2})$.

Siła osiowa w słupie 1 : $N_1 = - k_o (T_{a1} - P_{g1})$.

Momenty pasowe w węzłach słupa 2:

lewe: pas górny: $M_{g12} = k_o (M_{II} - M_{a1}) = k_o \cdot M_{12}$;

pas dolny: $M_{d12} = (1-k_o) (M_{II} - M_{a1}) = (1-k_o) M_{12}$;

prawe: pas górny: $M_{g22} = k_o (M_{II} - M_{a2})$;

pas dolny: $M_{d22} = (1 - k_o) (M_{II} - M_{a2})$.

Momenty węzłowe w słupie 2:

górny: $M_{2g} = k_o (M_{a1} - M_{a2})$,

dolny: $M_{2d} = (1 - k_o) (M_{a2} - M_{a1})$.

Gdy pas dolny jest gibki, wówczas $v_g = h$, gdy zaś $J_g = J_d$ to $v_g = {}^1/_2\, h$. Powyższy sposób może być zastosowany do przybliżonego obliczenia belek bezprzekątniowych o dowolnym rodzaju podparcia.

Dla belki bezprzekątniowej wolnopodpartej będzie $M_I = 0$, dla belki utwierdzonej na podporach M_I jest momentem utwierdzenia, dla belki ciągłej momentem podporowym.