Dla przekroju V.:

$$M_5^w = \frac{1}{2}\,0{,}75\,(1{,}11 + 1{,}91)\,15\,.\,115\left(9 + \frac{15}{3}\,\frac{2{,}111 + 1{,}91}{1{,}11 + 1{,}91}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,0{,}75\,\frac{9^2}{3}\,(2\,.\,1{,}91 + 2\,.\,80)\,100 = 38380.$$

Dla podnóża mamy:

$$M_{II} = \frac{1}{2}\,0{,}75\,(1{,}11 + 1{,}91)\,15\,.\,115\left(15 + \frac{15}{3}\,\frac{2\,.\,1{,}11 + 1{,}91}{1{,}11 + 1{,}91}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,0{,}75\,.\,9\,(6 + 3)\,(2\,.\,1{,}91 + 2{,}80)\,.\,100 + 4{,}31\,.\,6\,.\,100\,\frac{6}{3} = 42670 + 20110 + 5172 = 67952.$$

$$W = 0{,}101\,D^3 - 0{,}091\,\frac{d^4}{D} = 2{,}06\,m^3.$$

Obliczenie fundamentu:

Ciężar słupa i podnóża . . . . $= 105370\,kg$

Ciężar murów fundamentowych z cegły

$\left(0{,}828\,(3{,}00^2\,.\,0{,}70 + 3{,}80^2\,.\,0{,}60) - 1{,}50^2\,\frac{\pi}{4}\,1{,}08\right)1600$ . . . . $= 16768\,kg$

Ciężar ścianki $(1{,}3^2 - 1{,}0^2)\,\frac{\pi}{4}\,8{,}0\,.\,1600$ . . . . $= 6936\,kg$

Ciężar ławy betonowej: $0{,}828\,.\,4{,}7^2\,.\,0{,}6\,.\,2200$ . . . . $= 24144\,kg$

Razem $153218\,kg$

Powierzchnia podstawy: $0{,}828\,.\,4{,}7^2 = 18{,}29\,m^2$.

Naprężenie od ciężaru własnego: $\frac{153218}{182900} = 0{,}85\,kg/cm^2$.

Moment wiatru względem podstawy fundamentu:

$$M_p^w = \frac{1}{2}\,0{,}75\,(1{,}11 + 1{,}91)\,15\,.\,115\left(16{,}9 + \frac{15}{3}\,\frac{2{,}111 + 1{,}91}{1{,}11 + 1{,}91}\right) + \frac{1}{2}\,0{,}75\,.\,9\,(7{,}9 + 3)\,.$$

$$\cdot\,(2\,.\,2{,}91 + 2{,}80)\,.\,100 + 4{,}31\,.\,6\,.\,100\left(1{,}9 + \frac{6}{3}\right) = 46390 + 24350 + 10090 = 80830\,kgm.$$

Moment wytrzymałości podstawy: $W = 0{,}0982\,.\,4{,}7^3 = 10{,}19$.

Naprężenie wskutek wiatru: $\frac{80830}{101900} = 0{,}8\,kg/cm^2$.

Największe ciśnienie na grunt: $6 = 0{,}85 + 0{,}8 = 1{,}65\,kg/cm^2$.

Najmniejsze ciśnienie: $0{,}85 - 0{,}8 = 0{,}05\,kg/cm^2$.

F. Belki ciągłe o ściance pełnej.

Są to belki proste, podparte na więcej, niż dwu łożyskach, z których tylko jedno jest stałe (por. str. 1132 i 1185). Jako utwory hiperstatyczne można je obliczać na zasadzie ogólnych równań sprężystości (por. str. 1258). Sposobu tego używa się czasem do wykreślenia linij wpływowych oddziaływań belki dwuprzęsłowej (por. str. 1263). Zwykle jednak wychodzimy z twierdzenia Mohra (por. str. 1124) i obliczamy belki ciągłe przy pomocy równań trzech momentów (sposób analityczny) lub też przy pomocy punktów stałych (sposób wykreślny). W tym ostatnim wypadku stosuje się najczęściej linje krzyżowe.

W przypadkach prostych, często w praktyce się zdarzających (ciężar jednostajnie rozłożony stały lub ruchomy, ciężary skupione w równych odstępach), można z korzyścią użyć tablic liczbowych. Punktem wyjścia do teoretycznych rozważań, a zarazem specjalnym i najprostszym przypadkiem belki ciągłej jest belka utwierdzona.

Obliczenie analityczne.

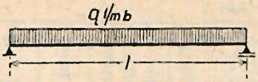
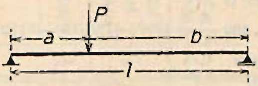
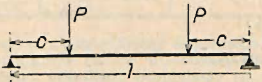
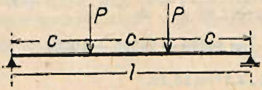
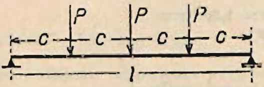
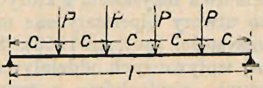
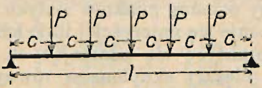
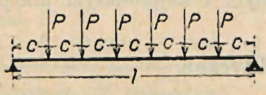
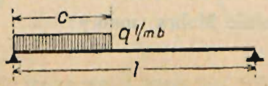
Napisał

dr. inż. Stefan Bryła, profesor politechniki, Lwów.

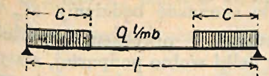
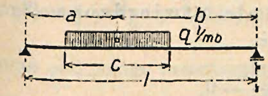
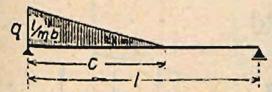
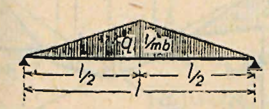
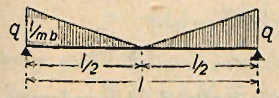
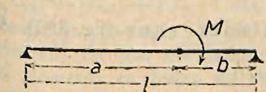
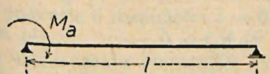
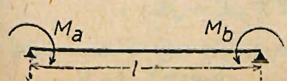
Wedle równania 79 (str. 1124, twierdzenie Mohra) mamy:

$$\tau = \frac{R_m}{EJ} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Tablica I.

1		$[A_0] = [B_0] = \frac{q l^3}{24}$
2		$[A_0] = P \cdot \frac{a b (l + b)}{6 l}$ $[B_0] = P \cdot \frac{a b (l + a)}{6 l}$
3	dla a=b	$[A_0] = [B_0] = \frac{P l^2}{16}$
4		$[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} P c (l - c)$
5		Dla $c = l/3$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{9} P l^2$
6		Dla $c = l/4$ $[A_0] = [B_0] = \frac{5}{32} P l^2$
7		Dla $c = l/5$ $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{5} P l^2$
8		Dla $c = l/6$ $[A_0] = [B_0] = \frac{35}{144} P l^2$
9		Dla $c = l/7$ $[A_0] = [B_0] = \frac{2}{7} P l^2$
10		$[A_0] = \frac{q c^2 (2 l - c)^2}{24 l}$ $[B_0] = \frac{q c^2 (2 l^2 - c^2)}{24 l}$

Tablica I.

11		$[A_0] = [B_0] = \frac{q c^2}{12}(3l - 2c)$
12		$[A_0] = \frac{q c b}{6l}\left[a(l+b) - \left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]$ $[B_0] = \frac{q c a}{6l}\left[b(l+a) - \left(\frac{1}{2}c\right)^2\right]$
13	dla a=b=l/2	$[A_0] = [B_0] = \frac{q c}{48}(3l^2 - c^2)$
14		$[A_0] = \frac{q l c^2}{36}\left[2{,}0 - 1{,}5 \cdot \frac{c}{l} + 0{,}3\left(\frac{c}{l}\right)^2\right]$ $[B_0] = \frac{q l c^2}{36}\left[1{,}0 - 0{,}3\left(\frac{c}{l}\right)^2\right]$
15	dla c=l	$[A_0] = \frac{q l^3}{45{,}0}$ $[B_0] = \frac{q l^3}{51{,}4}$
16		$[A_0] = [B_0] = \frac{q l^3}{38{,}4}$
17		$[A_0] = [B_0] = \frac{q l^3}{64}$
18		$[A_0] = -\frac{M l}{6}\left[1 - 3\left(\frac{b}{l}\right)^2\right]$ $[B_0] = +\frac{M l}{6}\left[1 - 3\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]$
19		$[A_0] = M_a \cdot \frac{l}{3}$ $[B_0] = M_a \cdot \frac{l}{6}$
20		$[A_0] = \frac{1}{6} l(2M_a + M_b)$ $[B_0] = \frac{1}{6} l(2M_b + M_a)$

Czyli: kąt nachylenia stycznej do linji ugięcia na podporze belki jest proporcjonalny do reakcji, jaką otrzymamy na tejże podporze, uważając powierzchnię momentów jako obciążenie belki. Reakcje te oznaczać będziemy $R_m = [A]$ lub $[B]$, zależnie od podpory — lewej czy prawej — przyczem wartości $[A_0]$ i $[B_0]$ odnosić się będą do figury momentów belki wolno podpartej, statycznie wyznaczalnej. Dla zasadniczych wypadków obciążenia belki podajemy wartości $[A_0]$ i $[B_0]$ w tablicy I.

1. Belka jednym końcem sztywnie utwierdzona (fig. 394). Na podstawie twierdzenia (1) otrzymujemy:

$$\tau_a = \frac{R_m^a}{EJ} = \frac{[A]}{EJ} = 0,$$

czyli

$$[A] = 0;$$

a ponieważ w tym wypadku na podstawie tablicy I. pod 19:

$$[A] = [A_0] + M_a \frac{l}{3} = 0,$$

stąd moment podporowy:

$$M_a = -\frac{3[A_0]}{l}.$$

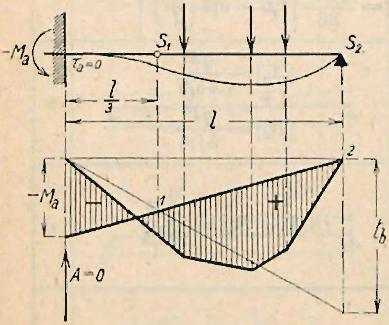


Fig. 394.

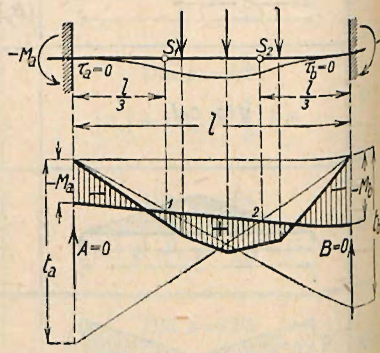


Fig. 395.

Moment ten da się obliczyć na podstawie wartości $[A_0]$, podanych w tablicy I. (por. str. 1130).

2. Belka obustronnie sztywnie utwierdzona (fig. 395). Analogicznie do poprzedniego:

$$[A] = 0, \quad [B] = 0,$$

a ponieważ według tablicy I. pod 20:

$$[A] = [A_0] + \frac{1}{6} l (2 M_a + M_b) = 0$$

i

$$[B] = [B_0] + \frac{1}{6} l (2 M_b + M_a) = 0,$$

więc szukane momenty podporowe:

$$M_a = -\frac{2(2[A_0] - [B_0])}{l}, \quad M_b = -\frac{2(2[B_0] - [A_0])}{l}.$$

W szczególnym wypadku, dla obciążenia symetrycznego, gdy $[A_0] = [B_0] = \frac{1}{2} F_0$, gdzie F_0 oznacza powierzchnię momentów statycznie wyznaczalnych (jak dla belki wolno podpartej):

$$M_a = M_b = -\frac{F_0}{l}.$$

3. Belki ciągłe. *a*) Przekrój na całej długości belki stały. Dla środkowej podpory każdej pary sąsiednich przęseł (fig. 396) $\tau_1 = -\tau_2$, czyli

$$\tau_1 + \tau_2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Biorąc pod uwagę twierdzenie (1) i podstawiając w równaniu powyższem:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

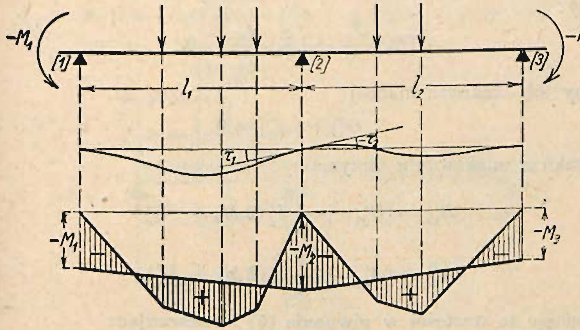


Fig. 396.

gdzie na podstawie tablicy I. pod 20:

$$[B_1] = [B_{01}] + \frac{1}{6} l_1 (2 M_2 + M_1)$$

i

$$[A_2] = [A_{02}] + \frac{1}{6} l_2 (2 M_2 + M_3),$$

otrzymamy znane ogólnie równanie trzech momentów w formie:

$$M_1 l_1 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6 [C_{02}] = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

gdzie $[C_{02}] = [B_{01}] + [A_{02}]$ i dla obciążeń według tablicy I. da się obliczyć.

Ustawiając równanie (4) dla każdej pary sąsiednich przęseł otrzymamy tyle równań, ile jest niewiadomych momentów podporowych; z tych więc równań momenty te dadzą się obliczyć.

W razie, jeżeli koniec belki nie jest wolno podparty, ale sztywnie utwierdzony, należy po stronie utwierdzenia dodać przęsło nieobciążone, na końcu wolno podparte o rozpiętości $l = 0$, i wprowadzić je do rachunku przy pomocy równań (4).

Po wyznaczeniu momentów podporowych moment w dowolnym przekroju przęsła w odległości x od lewej podpory:

$$M_x = M_0 + M_a \frac{l - x}{l} + M_b \frac{x}{l},$$

a siła poprzeczna w tym przekroju:

$$T_x = T_0 + \frac{M_b - M_a}{l},$$

gdzie M_0 i T_0 odnoszą się do belki statycznie wyznaczalnej, a M_a i M_b oznaczają momenty podporowe na lewej i prawej podporze przęsła.

b) Przekrój wzdłuż każdej rozpiętości stały w każdem jednak przęśle inny. Niechaj dla danej pary sąsiednich przęseł (fig. 396) o rozpiętościach l_1 i l_2 moment bezwładności przekroju belki wynosi w pierwszem przęśle J_1, w drugim J_2.

Zamiast równań (3) otrzymamy:

$$\tau_1 = \frac{[B_1]}{EJ_1}, \quad \tau_2 = \frac{[A_2]}{EJ_2}.$$

Mnożąc z uwzględnieniem równania (2) dla uproszczenia rachunku powyższe wartości przez dowolnie obraną stałą wartość J_0 (zwykle równą J_{min} danego układu lub najczęściej się powtarzającej w tym układzie wartości J), otrzymamy:

$$[B_1]\frac{J_0}{J_1} + [A_2]\frac{J_0}{J_2} = 0,$$

co możemy też oznaczyć inaczej:

$$[B'_1] + [A'_2] = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Przy takiem znakowaniu otrzymamy:

$$[B'_1] = [B'_{01}] + \frac{1}{6} l'_1 (2M_2 + M_1)$$

$$[A'_2] = [A'_{02}] + \frac{1}{6} l'_2 (2M_2 + M_3),$$

a podstawiając te wartości w równanie (5) i oznaczając:

$$[B'_{01}] + [A'_{02}] = [C'_{02}],$$

dojdziemy do równania trzech momentów w formie:

$$M_1 l'_1 + 2M_2(l'_1 + l'_2) + M_3 l'_2 + 6[C'_{02}] = 0,$$

gdzie każda z kreskowanych wartości uwzględnia czynnik $\frac{J_0}{J_1}$ lub $\frac{J_0}{J_2}$, zależnie od rozpiętości, do której się odnosi, a więc:

$$\left.\begin{aligned} l'_1 &= l_1 \frac{J_0}{J_1}; & l'_2 &= l_2 \cdot \frac{J_0}{J_2}; \\ [B'_{01}] &= [B_{01}] \cdot \frac{J_0}{J_1}; & [A'_{02}] &= [A_{02}] \cdot \frac{J_0}{J_2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (6)$$

Dalsze zastosowanie równania (6) jest analogiczne do tego, co powiedziano o równaniu (4).

Przykład. Belka ciągła dwuprzęsłowa (fig. 397).

Stosunek momentów bezwładności $J_1 : J_2 = 4 : 5$. Oba przęsła obciążone na całej swej długości ciężarem jednostajnym $g = 200\,kg/m$, ponadto lewe przęsło obciążone całkowicie ciężarem ciągłym jednostkowym $p = 500\,kg/m$ i ciężarem skupionym $P = 3000\,kg$ w odległości $a = 3{,}2\,m$ od lewej podpory. Znaleźć momenty podporowe, moment w miejscu działania siły P i oddziaływania A, B i C.

Przyjmijmy $J_0 = J_1$, to $l_1' = l_1 = 8\,m$, $l_2' = l_2 \frac{J_1}{J_2} = 12 \cdot \frac{4}{5} = 9{,}6\,m$.

Moment podporowy M_C z uwagi na $M_A = 0$ i $M_B = 0$ znajdziemy z równania:

$$2M_C(l_1' + l_2') = -6[B_{01}] - 6[A_{02}],$$

przyczem wedle tabl. 1., pozycji 1 i 2, jest:

$$[B_{01}] = \frac{1}{24}(g+p)\,l_1{}^3 + P\,\frac{a\,(l_1-a)\,(l_1+a)}{6\,l} = \frac{1}{24}\,.\,(200+500)\,.\,8^3 + 3000\,\frac{3{,}2\,.\,4{,}8\,.\,11{,}2}{6\,.\,8} =$$

$$= \frac{700}{3}\,.\,64 + 10\,752 = 25\,652\;kgm^2.$$

$$[A_{02}] = \frac{1}{24}\,g\,l_2{}^3\,\frac{J_0}{J_2} = \frac{1}{24}\,.\,200\,.\,12^3\,.\,\frac{4}{5} = 100\,.\,144\,.\,\frac{4}{5} = 11\,500\;kgm^2.$$

$$[B_{01}] + [A_{02}] = 37\,152\;kg\;m^2, \qquad l_1{}' + l_2{}' = 8 + 9{,}6 = 17{,}6\;m.$$

$$M_C = -\,\frac{6\,.\,37\,152}{2\,.\,17{,}6} = -\,6320\;kg/m = -\,6{,}32\;tm.$$

Oddziaływanie lewej podpory:

$$A = A_0 + \frac{M_C}{l_1},$$

$$A_0 = \frac{1}{2}(g+p)\,l_1 + \frac{l_1-a}{l_1}\,P = \frac{1}{2}\,0{,}7\,.\,8 + \frac{4{,}8}{8}\,3{,}0 = 2{,}8 + 1{,}8 = 4{,}6\;t.$$

$$M_C : l_1 = -\,6{,}32 : 8 = -\,0{,}79, \qquad A = 4{,}60 - 0{,}79 = 3{,}81\;t.$$

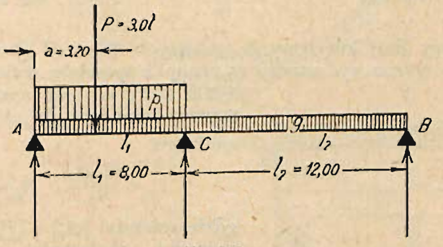


Fig. 397.

Podobnie: $B = \frac{1}{2}\,g\,l_2 + \frac{M_C}{l_2} = \frac{0{,}2}{2}\,8 - \frac{6{,}32}{12} = 0{,}8 - 0{,}527 = 0{,}273\;t.$

Oddziaływanie środkowej podpory:

$$C = (g+p)\,l_1 + g\,l_2 + P - A - B = 0{,}7\,.\,8 + 0{,}2\,.\,12 + 3{,}0 - 3{,}81 - 0{,}273 =$$

$$= 5{,}6 + 2{,}4 + 3{,}0 - 4{,}083 = 6{,}917\;t.$$

Moment w miejscu działania siły P w odległości a od podpory A.

$$M_a = A\,.\,a - \frac{a^2}{2}(g+p) = a\left[A - \frac{a}{2}(g+p)\right] = a\,(3{,}81 - \frac{1}{2}\,3{,}2\,.\,0{,}7) =$$

$$= 3{,}2\,(3{,}81 - 1{,}12) = 3{,}2\,.\,2{,}69 = 8{,}6\;tm.$$

Metoda wykreślna.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Obliczanie wykreślne belek ciągłych polega na wyznaczeniu punktów stałych i linij krzyżowych. W każdem przęśle belki mamy dwa punkty stałe i dwie linje krzyżowe; rzutując punkty stałe na górną część linij krzyżowych, otrzymujemy na tych ostatnich dwa punkty, przez które przechodzi prosta momentów podporowych, wywołanych obciążeniem danego przęsła.

Punkt stały danego przęsła jest to punkt, w którym moment = 0, gdy na jeden z końców przęsła działa moment dowolny, a zresztą przęsło jest nieobciążone.

Dla dwóch podpór otrzymujemy przeto dwa punkty stałe: S_1 i S_2 (fig. 398 i 399). Położenie tych punktów od wielkości momentów M_b i M_a nie zależy (stąd nazwa: „punkty stałe"), — zależy natomiast od sposobu podparcia i utwierdzenia belki na przyległej, bliższej punktu stałego podporze. I tak: dla belki w punkcie A wolno podpartej $s_1 = 0$, dla belki w tym punkcie sztywnie utwierdzonej $s_1 = {}^1/_3\,l$, dla częściowego natomiast