

Uważając linię ugięcia za parabolę o równaniu $y = \frac{4y_0}{l^2} x(l-x)$, gdzie y_0 = ugięcie w środku rozpiętości, otrzymujemy:

$$\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4y_0}{l^2} (l-2x) \dots \dots \dots (19)$$

W przybliżeniu można przyjąć:

$$\psi = \frac{\Delta g + \Delta d}{h} = \nu \text{ śr. } \frac{l-2x}{Eh},$$

gdzie ν śr. jest to średnie naprężenie w pasach (bez względu na znak). Lepiej jednak znaleźć ψ z planu Williot'a. Wzór 18. w połączeniu z 19. można zastosować do narożnika, dla innych słupów należałoby zastosować linie wpływowe naprężeń II-rzędnych.

Z porównania równań (1) i (12) wynika: $\nu_{II} = 2 \frac{e}{s} E \eta$. Dla prętów o przekroju symetrycznym jest $2e$ równe szerokości pręta. Należy się więc starać o możliwie lekki wygląd belki w widoku. Wartość $\eta = 2\tau_{mn} + \tau_{nm}$ zależy w wysokim stopniu od rodzaju kraty. W pasach (pomijając pola skrajne przy narożnikach) naprężenia drugorzędne w przypadku kraty prostokątnej N i półprzekątniowej K są bardzo małe (około 5%). Jeżeli linia ugięcia pasa pomostowego wykazuje załomy odwrotne, naprężenia II-rzędne są procentowo do naprężeń I-rzędnych znaczne: przy kracie (fig. 357) dochodzą do 28%, kracie N i V z drugorzędnym podparciem odpowiednio do 33 i 44%, przy kracie dwukrotnej do 86% (por. Bażant). Należałoby w tym przypadku zastosować przekrój pasa pomostowego symetryczny, aby zmniejszyć e . Bardzo znaczne są naprężenia drugorzędne w łukach kratowych ze ścięgnem, belkach kratowych wzmocnionych łukiem, belkach trójpasowych, oraz w wieszarach z belkami usztywniającymi.

VI. Ustroje hiperstatyczne.

A. Równania sprężystości.

Jeżeli belka, np. fig. 358 a, jest n_w -krotnie wewnętrznie, względnie n_z -krotnie zewnętrznie hiperstatyczna (statycznie niewyznaczalna; por. str. 1189), to przez opuszczenie n_w prętów istotnych, względnie n_z prętów łożyskowych (pręty nadliczbowe) można kratownicę uczynić izostatyczną (statycznie wyznaczalną), tj. sprowadzić ją do układu zasadniczego (fig. b). Aby stan napięć w układzie zasadniczym był identyczny ze stanem w belce rzeczywistej, należy każdy opuszczony pręt łożyskowy zastąpić siłą, działającą w kierunku tego pręta, jako nacisk na belkę, zaś pręt istotny dwiema siłami zaczepiającymi we węzłach, w których był osadzony i działającymi w sensie ich zbliżenia, jeżeli pręt był rozciągany, zaś oddalania, jeżeli był ściskany, a równemi co do wielkości napięciu tegoż pręta (tensory). Niech będą X_a, X_b, X_c niewiadome oddziaływania opuszczonych podpór, względnie napięcia opuszczonych prętów istotnych (fig. b). Jeżeli nazwiemy R_0, S_0 reakcje podpór i siły wewnętrzne w układzie zasadniczym (fig. c) wskutek sił zewnętrznych ΣP , zaś R_a, S_a wskutek siły, względnie napięcia $X_a = -1$ (fig. d) i wreszcie odpowiednio $R_b, S_b; R_c, S_c \dots$ (fig. e i f'), to w ustroju rzeczywistym (fig. a) na podstawie prawa super-

$$\left. \begin{aligned} R &= R_0 - R_a X_a - R_b X_b - R_c X_c \dots \\ S &= S_0 - S_a X_a - S_b X_b - S_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

zaś napięcie dowolnego pręta:

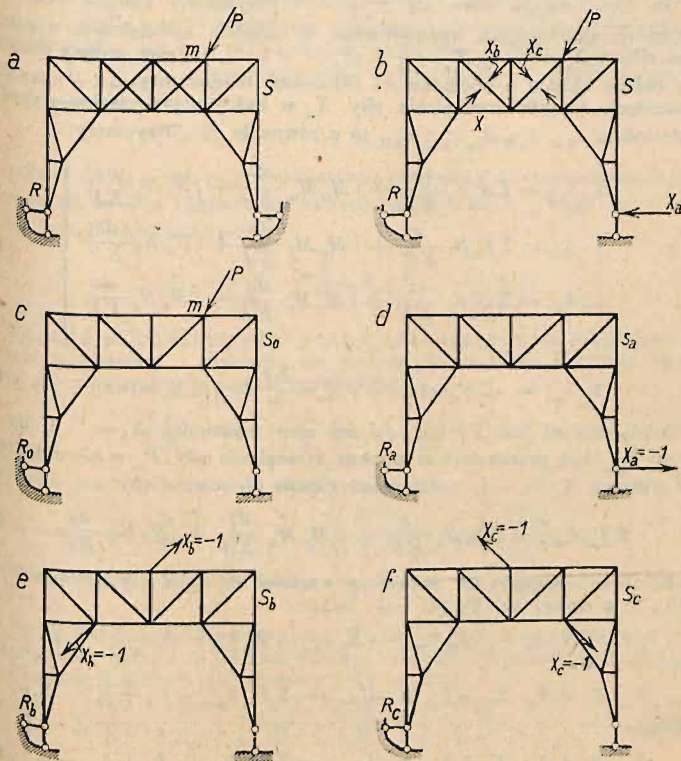


Fig. 368.

Jeżeliby w kratownicy prócz prętów były jeszcze elementy o ścianie pełnej, pracujące nie tylko siłą osiową (zmienną) N , ale i momentem M , to w dowolnym przekroju odpowiednio do równania (1) byłoby:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - M_a X_a - M_b X_b - M_c X_c \dots \\ N &= N_0 - N_a X_a - N_b X_b - N_c X_c \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots (1a)$$

Zastosujmy równanie pracy przygotowanej do rzeczywistego układu przesunięć (fig. b) i przygotowanego stanu napięć $X_a = -1$ (fig. d), nazywając δ_a przesunięcie w układzie rzeczywistym punktu zaczepienia siły X_a w kierunku siły $X_a = -1$, δ_b przyrost rzeczywisty oddalenia węzłów, w których zaczepiają siły X_b , zaś $L_a = \sum R_a r$ pracę oddziaływań R_a na rzeczywistych przesunięciach podpór r , to wedle równania (7), str. 1239:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma S_a S \frac{s}{EF} + \Sigma S_a \omega t s + \int M_a M \frac{ds}{EJ} + \\ + \int N_a N \frac{ds}{EF} + \int N_a \omega t ds + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds \dots (2)$$

Dla tego samego stanu sił $X_a = -1$ przyjmijmy kolejno, jako stan przesunięć, przesunięcia, spowodowane w układzie zasadniczym uogólnionymi siłami $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1 \dots$, tudzież zmiany temperatury całego układu o wielkości t i różnicami temperatury Δt , i nazwijmy przesunięcie punktu zaczepienia siły X_a w każdym powyższym wypadku odpowiednio δ_{aa} , δ_{ab} , $\delta_{ac} \dots$, δ_{ab} to z równania (2) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \delta_{aa} &= \Sigma S_a S_a \frac{s}{EF} + \int M_a M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_a \frac{ds}{EF} \\ 1 \cdot \delta_{ab} &= \Sigma S_a S_b \frac{s}{EF} + \int M_a M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_b \frac{ds}{EF} \\ 1 \cdot \delta_{ac} &= \Sigma S_a S_c \frac{s}{EF} + \int M_a M_c \frac{ds}{EJ} + \int N_a N_c \frac{ds}{EF} \\ &\dots \dots \dots \\ 1 \cdot \delta_{at} &= \Sigma S_a \omega t s + \int M_a \omega \frac{\Delta t}{h} ds + \int N_a \omega t ds \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Jeżeli stan sił jest ΣP (fig. c), zaś stan przesunięć $X_a = -1$ (fig. d), to, gdy δ_{ma} jest przesunięciem punktu zaczepienia siły P_m w kierunku tejże siły wskutek $X_a = -1$, będzie analogicznie do równań (3):

$$\Sigma P_m \delta_{ma} = \Sigma S_0 S_a \frac{s}{EF} + \int M_0 M_a \frac{ds}{EJ} + \int N_0 N_a \frac{ds}{EF} \dots (5)$$

Jeżeli w równaniu (2) wstawimy wartości na S , M i N z równania (1) i (1a), to z uwagi na (3), (4) i (5) będzie:

$$L_a + 1 \cdot \delta_a = \Sigma P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} - X_c \delta_{ac} + \delta_{at}$$

albo:

$$\delta_{aa} X_a + \delta_{ab} X_b + \delta_{ac} X_c + \dots = \Sigma P_m \delta_{ma} - L_a + \delta_{at} - \delta_a$$

Podobnie:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ba} X_a + \delta_{bb} X_b + \delta_{bc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mb} - L_b + \delta_{bt} - \delta_b \\ \delta_{ca} X_a + \delta_{cb} X_b + \delta_{cc} X_c + \dots &= \Sigma P_m \delta_{mc} - L_c + \delta_{ct} - \delta_c \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Tych, t. zw. równań sprężystości (por. str. 1149), jest tyle, co niewiadomych hiperstatycznych X , można je więc wyznaczyć. Przy pomocy wyznaczników otrzymamy:

$$X_a = \frac{D_a}{D}, \quad X_b = \frac{D_b}{D}, \quad X_c = \frac{D_c}{D} \dots \dots \dots (7)$$

We wzorach tych:

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{aa} & \delta_{ab} & \delta_{ac} & \dots \\ \delta_{ba} & \delta_{bb} & \delta_{bc} & \dots \\ \delta_{ca} & \delta_{cb} & \delta_{cc} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

D_a (D_b , D_c ...) otrzymamy, jeżeli wyrazy pierwszej (drugiej, trzeciej...) kolumny zastąpimy prawami stronami, więc wyrazami wolnymi równań (6). Spółczynniki przy niewiadomych X w równ. (6) otrzymamy z równ. (3).

Na podstawie prawa Maxwella można spółczynniki: δ_{aa} , δ_{ab} , δ_{ac} i δ_{am} otrzymać z planu przesunięć układu zasadniczego, obciążonego siłą $X_a = -1$.

Linia ugięcia pasa pomostowego, wykreślona na podstawie tego planu, jest linią wpływową dla δ_{ma} jeżeli siły P_m są pionowe. Mając linje wpływowe dla δ_{ma} , δ_{mb} , δ_{mc} ..., otrzymamy linję wpływową dla D_a i tem samem dla X_a na zasadzie równania:

$$D_a = d_{aa} \delta_{ma} - d_{ba} \delta_{mb} + d_{ca} \delta_{mc} - \dots \dots \dots (9)$$

przyczem np. d_{ba} jest to podwyznacznik otrzymany z wyznacznika D przez opuszczenie wiersza i kolumny w których znajduje się δ_{ba} , więc np. w przypadku trzech niewiadomych:

$$d_{ba} = \begin{vmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ac} \\ \delta_{cb} & \delta_{cc} \end{vmatrix} = \delta_{ab} \delta_{cc} - \delta_{ac} \delta_{cb}.$$

Zasada najmniejszości pracy odkształcenia. Jeżeli opuścimy wpływ temperatury i poddania się podpór, to możemy równania sprężystości (6) przedstawić w formie przejrzystej:

$$\frac{\delta L}{\delta X_a} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_b} = 0, \quad \frac{\delta L}{\delta X_c} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

przyczem praca odkształcenia układu wynosi:

$$L = \frac{1}{2} \sum \frac{S^2 s}{EF} + \frac{1}{2} \int \frac{M^2 ds}{EJ} + \frac{1}{2} \int \frac{N^2 ds}{EF} \dots \dots \dots (11)$$

Jest ona funkcją zmiennych X_a , X_b , X_c ... za pośrednictwem równań (1) i (1a).

Zatem niewiadome hiperstatyczne X przyjmują takie wartości, aby praca odkształcenia układu L , jako ich funkcja była najmniejszą (por. str. 1145).

Pierwsze z równań (10) możemy tedy napisać:

$$\sum \frac{Ss}{EF} \frac{\delta S}{\delta X_a} + \int \frac{M ds}{EJ} \frac{\delta M}{\delta X_a} + \int \frac{N ds}{EF} \frac{\delta N}{\delta X_a} = 0 \dots (10 a)$$

Przykłady.

1. Belka jednym końcem poziomo utwierdzona, a drugim wolno podparta (fig. 359) tworzy ustwór hiperstatyczny pierwszego stopnia, gdyż dla przejścia do ustworu zasadniczego wystarcza usunięcie jednego pręta podporowego (fig. b). Mamy: $M = M_0 - M_a X_a$ [por. równanie (1a)].

Celem obliczenia wielkości statycznie niewyznaczalnej X_a zastosujemy równania (6), (3) i (5). W przypadku sztywnych podpór i stałego J będzie:

$$X_a \cdot \delta_{aa} = \sum P_m \delta_{ma}, \quad X_a = \frac{\int_0^l M_0 M_a dx}{\int_0^l M_a^2 dx} \dots \dots \dots (12)$$

^{a)} Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym g (fig. a, b, c):

$$\int_0^l M_0 M_a dx = \int_0^l \frac{g x^3}{2} dx = \frac{g l^4}{8}, \quad \int_0^l M_a^2 dx = \int_0^l x^2 dx = \frac{l^3}{3}.$$

$$X_a = 3/8 g l.$$

Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - \frac{g x^2}{2}$$

Największą wartość dodatnią osiąga moment dla $x = 3/8 l$:

$$M_+ \text{ max} = \frac{9}{128} g l^2;$$

zaś największą ujemną na podporze b :

$$M_- \text{ max} = -\frac{g l^2}{8}$$

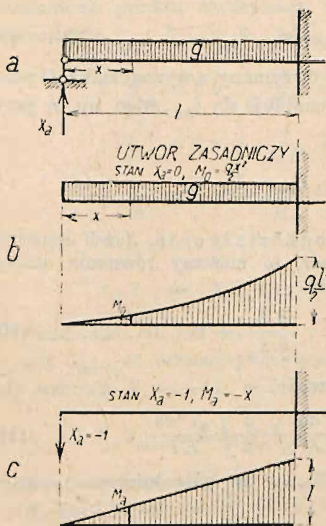


Fig. 359.

b) Dla obciążenia ciężarem skupionym P (fig. 360) otrzymamy, stosując równania (6) i (12):

$$X_a = \frac{P(l-u)^2(2l+u)}{2l^3}$$

Moment w dowolnym punkcie:

$$M = X_a x - P(x-u)$$

2. Belka obu końcami poziomą utwierdzona (fig. 361) jest dwukrotnie hiperstatyczna; wielkości hiperstatyczne tworzą momenty podporowe X_a i X_b . Wedle równania (1 a):

$$M = M_0 - M_a X_a - M_b X_b$$

Wedle równań (6) i (3) przyjmując zupełnie utwierdzenie belki i stały moment bezwładności J otrzymamy:

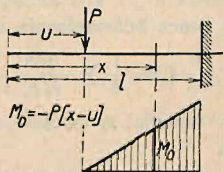


Fig. 360.

$$\left. \begin{aligned} \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} &= 0 \\ \sum P_m \delta_{bm} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

przyczem:

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \delta_{aa} &= \int_0^l M_a^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{bb} &= \int_0^l M_b^2 dx = \frac{l}{3} \\ EJ \cdot \delta_{ab} &= \int_0^l M_a M_b dx = \frac{l}{6} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

(por. fig. c i d).

a) Dla obciążenia ciężarem jednostajnie rozłożonym g na całej długości belki:

$$M_0 = \frac{1}{2} g x (l-x)$$

Z powodu symetrii:

$$\sum P_m \delta_{am} = \sum P_m \delta_{bm} = \int M_0 M_a dx = \frac{g l^3}{24}$$

zatem z równań (13) i (14):

$$X_a = X_b = \frac{g l^2}{12}$$

Moment w dowolnym przekroju X (fig. a):

$$M = \frac{1}{2} g x (l-x) - X_a \frac{l-x}{l} - X_b \frac{x}{l}$$

$$M_{+max} = \frac{g l^2}{24} \text{ (w srodku belki)}$$

$$M_{-max} = -\frac{g l^2}{12} \text{ (na podporze).}$$

Oddziaływania: $C_a = C_b = \frac{1}{2} g l$.

b) Dla obciążenia ciężarem skupionym P (fig. 362):

$$\sum P_m \delta_{am} = \int_0^l M_0 M_a dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{l-x}{l} dx + \int_u^l \frac{P u}{l} (l-x) \frac{l-x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [2 l^2 - 3 u l + u^2]$$

$$\sum P_m \delta_{bm} = \int_0^l M_0 M_b dx = \int_0^u \frac{P(l-u)}{l} x \frac{x}{l} dx + \int_u^l \frac{P u}{l} (l-x) \frac{x}{l} dx = \frac{P u}{6 l} [l^2 - u^2].$$

Z równań (13) i (14) i ostatnich dwu:

$$X_a = \frac{P u}{l^2} (l-u)^2,$$

$$X_b = \frac{P u^2}{l^2} (l-u).$$

Oddziaływania [por. równ. (1)]:

$$C_a = \frac{P}{l^2} (l^3 + 2 u^3 - 3 u l^2),$$

$$C_b = \frac{P u^2}{l^3} (3 l - 2 u).$$

Metoda całkowania linii ugięcia: Baszyński wychodzi z równania linii ugięcia (por. str. 1123):

$$y = \frac{1}{EJ} f(x) \dots (a)$$

Wtedy nachylenie do poziomu w dowolnym punkcie:

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg } \alpha_x = \frac{1}{EJ} f'(x) \dots (b)$$

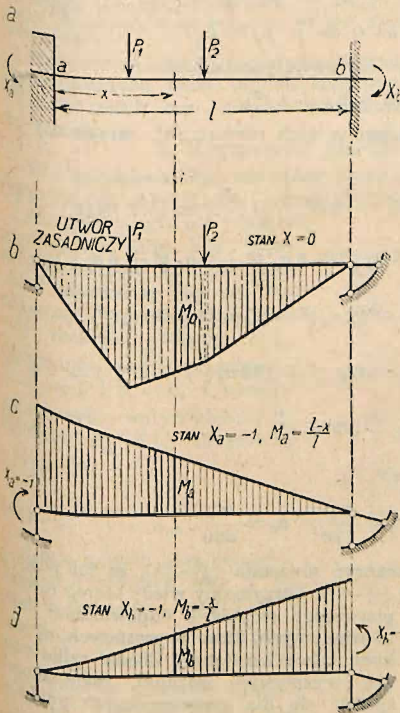


Fig. 361.

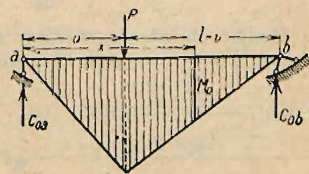


Fig. 362.

Moment: $M_x = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = -f''(x) \dots (c)$

Siła poprzeczna: $T_x = \frac{d M_x}{dx} = -f'''(x) \dots (d)$

Obciążenie jednostkowe: $p_x = -\frac{d T_x}{dx} = f^{IV}(x) \dots (e)$

Dla różnych rodzajów belek możemy z góry określić pewne warunki, jakie powyższe równania spełnić muszą. Np. dla belki wolno podpartej mamy na podporze: $y = 0$, $M = 0$, dla belki utwierdzonej na podporze: $y = 0$, $\text{tg } \alpha = 0$, dla wspornika na końcu tegoż: $M = 0$, $V = 0$.

Wstawiając odpowiednie wartości w równania (a) — (e) otrzymujemy warunki, jakie muszą spełnić się dla pewnej belki, a stąd możemy też określić w każdym punkcie momenty, siły poprzeczne i kształt linii ugięcia dla pewnego danego obciążenia p_x . Dla poszczególnych rodzajów obciążenia mamy:

a) dla obciążenia jednostajnego: $p_x = p \dots \dots \dots (f)$

b) dla obciążenia wzrastającego wedle linii prostej: $p_x = p(\alpha + \beta \xi) \dots (g)$

gdzie

$$\xi = \frac{x}{l},$$

np. dla obciążenia wzrastającego od p_1 do p_2 : $p_x = p_1 \left(1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1} \xi\right)$,

zaś dla obciążenia wzrastającego od 0 do p : $p_x = p \xi$.

c) dla obciążenia zmieniającego się wedle paraboli:

$$p_x = p(\alpha + \beta \xi + \gamma \xi^2) \dots \dots \dots (h)$$

Biorąc za podstawę najogólniejsze z tych równań (h), otrzymamy równania (a) — (e) w postaci:

$$y = \frac{p l^4}{n EI} (\alpha + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 + a_6 \xi^6) \dots (i)$$

$$a = \frac{p l^3}{n EI} (\alpha_1 + 2 a_2 \xi + 3 a_3 \xi^2 + 4 a_4 \xi^3 + 5 a_5 \xi^4 + 6 a_6 \xi^5) \dots (j)$$

$$M_x = -\frac{p l^2}{n} (2 a_2 + 6 a_3 \xi + 12 a_4 \xi^2 + 20 a_5 \xi^3 + 30 a_6 \xi^4) \dots (k)$$

$$V_x = -\frac{p l}{n} (6 a_3 + 24 a_4 \xi + 60 a_5 \xi^2 + 120 a_6 \xi^3) \dots (l)$$

$$p_x = -\frac{p}{n} (24 a_4 + 120 a_5 \xi + 360 a_6 \xi^2) \dots (l)$$

W równaniach tych oczywiście:

$$a_4 = \frac{n \alpha}{24}, \quad a_5 = \frac{n \beta}{120}, \quad a_6 = \frac{n \gamma}{360} \dots \dots \dots (m)$$

Znając obciążenie, możemy oznaczyć równania (f) — (h), za ich pomocą równanie (m), a wreszcie równania (i) — (l). Otrzymamy wtedy szereg równań pierwszego stopnia o odpowiedniej ilości niewiadomych, które w prostszych wypadkach łatwo rozwiązać. Chodzi tylko o to, aby wyznaczyć warunki, jakie muszą spełnić się dla poszczególnych punktów belki.

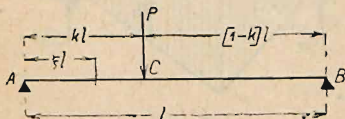


Fig. 363.

ciężar P znajduje się w odległości kl od podpory A belki o długości l ; w tym punkcie $\xi = k$. Wtedy jest $p_x = 0$, zatem współczynniki dla części AC : $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, podobnie dla CB : $b_4 = b_5 = b_6 = 0$. Pozostałe 8 współczynników $a, a_1 \dots a_3$ i $b, b_1 \dots b_3$ znajdujemy na podstawie danych, odnoszących się do końców belki i do punktu C . Dla punktu C mamy: $y' = y''$, $\text{tg } \alpha' = \text{tg } \alpha''$, $M' = M''$, $T' - T'' = P$.

Czyli: $a - b = k^3, \quad a_2 - b_2 = 3k,$
 $a_1 - b_1 = -3k^2, \quad a_3 - b_3 = -1.$

Przykład. Dla belki obustronnie wmurowanej, obciążonej ciężarem jednostajnie rozłożonym, otrzymamy: $p_x = p$, więc $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$. Przyjmując $n = 24$, otrzymamy z równań (m): $a_3 = 1, a_4 = 0, a_6 = 0$. Dla lewego utwierdzonego końca belki: $y = 0, a = 0$, a więc z równań (i) i (j): $a = 0, a_1 = 0$. Na prawym końcu ($\xi = 1$), też $y = 0, a = 0$, a stąd:

$$0 = a + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + 1 = 0,$$

$$0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 2a_2 + 3a_3 + 4 = 0.$$

Z tych dwu równań znajdujemy $a_2 = 1, a_3 = -2$, a stąd: $y = \frac{p l^3}{24 E J} (\xi^2 - 2\xi^3 + \xi^4)$,

$$a_x = \frac{p l^3}{12 E J} (\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3), \quad M_x = -\frac{p l^2}{12} (1 - 6\xi + 6\xi^2), \quad V_x = \frac{p l}{2} (1 - 2\xi),$$

na podporze: $y = 0, a = 0, M = -\frac{p l^2}{12}, V = \frac{p l}{2},$

w środku: $y = f = \frac{1}{884} \frac{p l^3}{E J}, \alpha = 0, M = +\frac{p l^2}{24}, V = 0.$

Metoda ta może być z korzyścią użyta np. przy belkach krzyżujących się wzajemnie (stropy żelbetowe). Niedogodnością jej jest konieczność rozwiązywania bardzo znacznej ilości równań.

Prócz metod opisanych powyżej używa się do obliczenia niektórych ustrojów hiperstatycznych także innych sposobów jak np. metody punktów stałych i metody trzech wzgl. czterech momentów (por. *F.* Belki ciągłe i *G.* Ramy).

B. Kratownice płaskie hiperstatyczne.

W kratownicach wszystkie pręty narażone są wyłącznie na siły osiowe, więc równania (3), (4) i (5) upraszczają się o tyle, że znikają całki prawej strony.

Belka kratowa dwuprzęsłowa. (Fig. 364). Opuścić podporę *C*, otrzymujemy układ zasadniczy (fig. *b*). Nieświadomą hiperstatyczną jest tedy reakcja podpory CX_c .

Przyjmując podpory sztywne, tj. $L_c = 0$ i $\delta_c = 0$, i uwzględniając tylko wpływ ciężaru ruchomego $P_m = 1$, otrzymamy z równ. (6):

$$X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Linia ugięcia pasa pomostowego *AB* wskutek siły $X_c = -1$, czytana w skali $1 : \delta_{cc}$, jest linią wpływową oddziaływania X_c . Można ją wykreślić przy pomocy ciężarów sprężystych "w" (por. str. 1241), naniesionych w dowolnej skali przy pomocy dowolnego bieguny (fig. *c*), gdyż X_c zależy od stosunku $\delta_{mc} : \delta_{cc}$. Obierając ugięcie punktu *C* δ_{cc} za jednostkę, możemy wprost odczytywać $X_c = \delta_{mc}$. Gdy nie chodzi nam o linie wpływowe, tylko o wartość dla danego obciążenia stałego, to z równania (6), (3) i (5), otrzymamy:

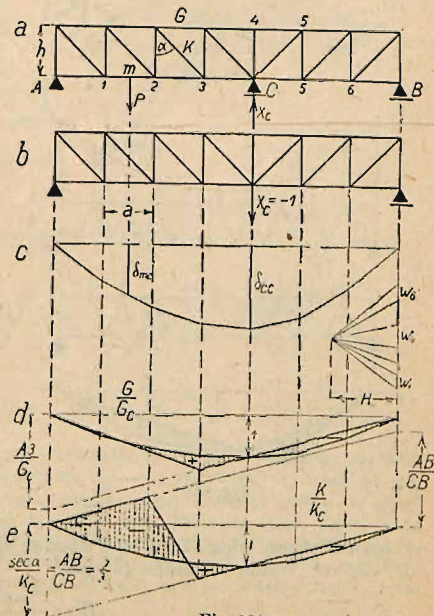


Fig. 364.

$$X_c = \frac{\sum P_m \delta_{mc}}{\delta_{cc}} = \frac{\sum S_0 S_c \frac{s}{EF}}{\sum S_c^2 \frac{s}{EF}}$$

przez wartości S_0 i S_c znaleźć można z dwu planów Cremony jednego dla obciążenia układu zasadniczego siłami $\sum P_m$, drugiego dla obciążenia siłą $X_c = -1$. Siła wewnętrzna w dowolnym przecięciu $S = S_0 - S_c X_c = S_c \left(\frac{S_0}{S_c} - X_c \right)$. Fig. d przedstawia linię wpływową pręta G , fig. e zaś pręta K , podzielone odpowiednio przez G_c i K_c . G_c i K_c są to siły w prętach G i K wskutek

$$X_c = -1, \text{ więc } G_c = \frac{CB}{AB} \cdot \frac{A3}{h}, \quad K_c = \frac{CB}{AB} \sec \alpha, \text{ czyli } \frac{\sec \alpha}{K_c} = \frac{AB}{CB}.$$

Łuk kratowy bezprzegubowy (fig. 365). Opuszczając pręty a , b i c , które możemy uważać za pręty łożyskowe, otrzymamy wspornik (układ zasadniczy, fig. b). Działając nań kolejno siłą $X_a = -1$, $X_b = -1$, $X_c = -1$ (fig. b), otrzymamy trzy plany sił, następnie trzy plany przesunięć, a stąd trzy linie ugięcia pasa górnego (pomostowego), które są liniami wpływowymi przesunąć δ_{ma} , δ_{mb} i δ_{mc} . Można z nich skonstruować linie wpływowe niewiadomych X_a , X_b , X_c (równanie 9 i 8), a następnie linie wpływowe sił wewnętrznych w prętach i linie wpływowe oddziaływań według równania (1).

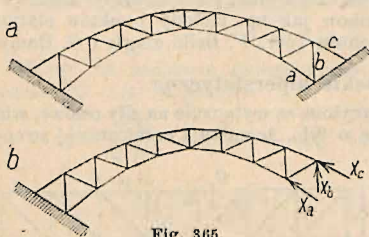


Fig. 365.

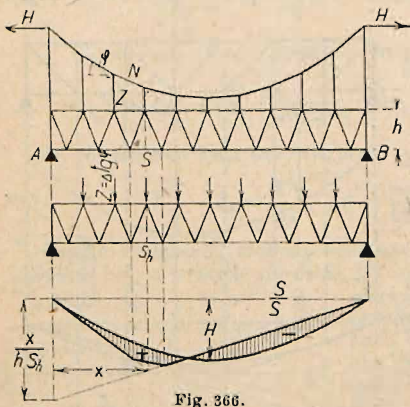


Fig. 366.

i prawej strony wieszaka. Jeżeli wieszak jest parabola, to $\Delta \text{tg } \varphi = \text{const.}$, więc $Z = \text{const.}$ Wedle równania (6) jest:

$$H = \frac{\delta_{mh}}{\delta_{hh}}.$$

Jeżeli $H = -1$, to pręty wiszące naciskają na belkę usztywniającą siłami $\Delta \text{tg } \varphi$. Należy je uważać za ciężary działające w węzłach pasa

górnego belki AB (fig. *b*). Plan Cremony przedstawia wówczas siłę S_h , zaś linja ugięcia pasa pomostowego (dolnego) linię wpływową dla δ_{mh} , względnie H , jeżeli za jednostkę obierzemy δ_{hh} . Wedle równania 3 i 5:

$$\delta_{hh} = \Sigma S_h^2 \frac{s}{EF}, \quad \delta_{mh} = \Sigma S_0 S_h \frac{s}{EF}.$$

S_0 jest siłą wewnętrzną w przecie belki wolno podpartej AB (jak gdyby wieżara nie było).

Siła wewnętrzna w dowolnym przecie belki usztywniającej (równanie 1):

$$S = S_0 - HS_h = S_h \left(\frac{S_0}{S_h} - H \right) = S_h \cdot s.$$

Linję wpływową dla

$$s = \frac{S_0}{S_h} - H = \frac{S}{S_h}$$

łatwo skonstruować na linii H , przez naniesienie linii wpływowej dla S_0 w skali $1 = S_h$ (por. fig. *c*).

Poniżej podajemy liczbowy przykład obliczenia hiperstatycznego więzara dachowego (fig. 367). Ciężary węzłowe pionowe $P = 3000 \text{ kg}$.

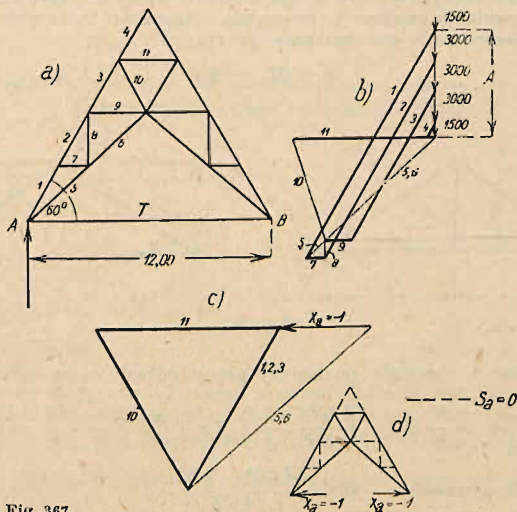


Fig. 367.

Jako ilość hiperstatyczną przyjmujemy siłę w ścięgnię $T = X_a$. Wyznamy plan sił S_0 dla obciążenia pionowego (fig. *b*) i plan sił S_a dla $X_a = -1$ (fig. *c*). Siły S_a w prętach 4, 7, 8 i 9 są równe zeru (fig. *d*). Dla obliczenia X_a musimy przyjąć przekroje prętów. W mniejszych konstrukcjach dachowych możemy uczynić to w sposób następujący. Jeżeli średni przekrój pasa górnego wynosi F_g , to przekrój pasa dolnego w przybliżeniu $F_d = 0,6 - 0,8 F_g$, zaś przeciętny przekrój krzywulców $F_k = 0,2 - 0,5 F_g$. W danym wypadku szacujemy: $F_g = 40 \text{ cm}^2$, $F_d = 32 \text{ cm}^2$, $F_k = 20 \text{ cm}^2$, przekrój ścięgna $F_s = 15 \text{ cm}^2$. Podstawiając w pierwszym z równań (6), str. 1258: $I_a = 0$, $\delta_{at} = 0$, $X_b = X_c = 0$, $E\delta_a = \frac{X_a s_a}{F_a} = X_a \rho_a$ otrzymamy, rozwiązując ze względu na X_a , $X_a = \frac{\Sigma S_0 S_a \rho}{\Sigma S_a^2 \rho} = \frac{+4350}{+702,4} = 6,17 \text{ t}$, por.

tabele. Siły w prętach $S = S_0 - S_a X_a$ są około 50% mniejsze niż S_0 . Podobnie należy uwzględnić wpływ parcia wiatru. Przekroje potrzebne będą mniejsze, niż gdyby ściegna nie było, a wskutek tego więzar hiperstatyczny wypadnie o 25—30% tańszy.

Tabela 80.

Pręt	s cm	F cm ²	$\varrho = \frac{s}{F}$ 1/cm	S_a	S_a^2	$S_a^2 \varrho$	S_0	$S_0 S_a \varrho$	$S_a X_a$	S
1	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-24,4	+366	-12,34	-12,06
2	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-21,8	+328	-12,34	-9,46
3	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-15,8	+237	-12,34	-3,47
10	300	20	15	+2,0	+4,0	60	+12,0	+360	+12,34	-0,34
11	300	40	7,5	-2,0	+4,0	30	-18,4	+276	-12,34	-6,06
T	1200	15	80	-1,0	+1,0	80	0	0	-6,17	+6,17
$\Sigma S_a^2 \varrho = 702,4$						$\Sigma = +4350$				

C. Belki rozporowe i wieszarowe.

Rozpornica trójkątna (wzgl. więzanie wiszące trójkątne) (fig. 368). Moment w dowolnym punkcie C równa się momentowi belki wolno podpartej AB , pomniejszonemu o moment pary sił H_y :

$$M = M_0 - Hy \quad \dots \dots \dots (15)$$

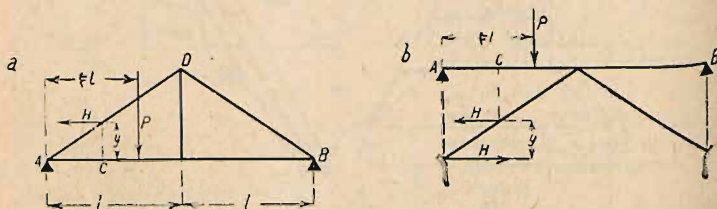


Fig. 368.

Wychodząc z równania pochodnej pracy odkształcenia (równanie 10a)

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{dM}{dH} dx + \int \frac{N}{EF} \frac{dN}{dH} dx + \sum \frac{Ss}{EF} \frac{dS}{dH} = 0,$$

otrzymuje się równanie:
$$H = \frac{P\xi(3 - \xi^2)l}{4\mu h},$$

względnie dla obciążenia jednostajnie rozłożonego na całej długości belki:

$$H = \frac{5gl^2}{8\mu h},$$

przezco współczynnik μ zależy od wymiarów i materiału i wynosi:

$$\mu = 1 + \frac{3J}{Fh^2} \left(1 + \frac{E}{E_1} \cdot \frac{F}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + 2 \frac{EF}{E_2 F_2} \operatorname{tg}^3 \alpha \right). \quad (16)$$

w którym to równaniu E , J i F oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki poziomej AB , E_1 i F_1 moduł sprężystości i przekrój zastrzałów AD i BD , a E_2 i F_2 odpowiednie wartości dla słupa.

Przy pomocy góra (fig. 368b):

$$\mu = 1 + \frac{3J}{F_1 h^2} \frac{E}{E_1} \cdot \frac{s}{l \cos^2 \alpha} \dots \dots \dots (16 a)$$

przyczem s jest rzeczywistą długością zastrzałów.

Spółczynnik μ różni się niewiele od jedności; dla $\mu = 1$ wartości zarówno momentów zginających, jak i oddziaływań są identyczne z wartościami dla belki ciągłej dwuprzęsłowej, bo opuszcza się wtedy wpływ skrócenia zastrzałów, przez co podpora środkowa D staje się stałą.

Oddziaływanie środkowe: $D = \frac{Hh}{l} = \frac{P\xi(3 - \xi^2)}{4\mu}$;

dla ciężaru jednostajnie rozłożonego: $D = \frac{5gl}{8\mu}$.

Linie wpływowe momentów otrzymuje się w myśl równania (15) przez odjęcie rzędnych linii wpływowej parcia poziomego H , pomnożonych przez y od rzędnych linii wpływowej momentu belki wolno podpartej o rozpiętości $2l$ (fig. 369).

Wartość μ uwzględnia się praktycznie w ten sposób, że obliczywszy przekroje dla $\mu = 1$, wyznacza się μ z wzoru (16), poczem poprawia się linie wpływowe, dodając różnicę powstałą przez zmianę wartości μ :

$$\Delta_\mu = Hy - \frac{Hy}{\mu} = Hy \frac{\mu - 1}{\mu}$$

Jeżeli przekroje obliczono na moment ujemny na podporze D , to powyższą poprawkę można opuścić, gdyż zmniejszenie parcia H wywołuje

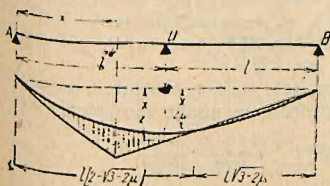


Fig. 369.

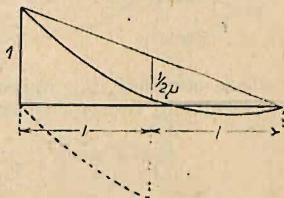


Fig. 370.

zmniejszenie się momentu ujemnego, a zatem popełnia się błąd na korzyść pewności. Poprawka dla przekroju zastrzałów nie ma praktycznej wartości.

Linie wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań otrzymuje się, odejmując rzędne linii wpływowej parcia H , pomnożonej przez $\frac{h}{l}$ od trójkąta oddziaływań belki wolno podpartej o rozpiętości $2l$ (fig. 370).

Rozpornica podwójna (trapezowa) (fig. 371). Wychodząc j. w. z zasadniczego równania (15), otrzymuje się z równania pracy odkształcenia:

$$H = \frac{\int_0^L My dx}{\mu \int_0^L y^2 dx}$$

co czyni dla $\xi < 1$ (por. fig.): $H = P\xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)}$,

zaś dla $1 < \xi < \frac{2 + \varphi}{2}$:

$$H = Pl \frac{2 + 3\xi\varphi - 3(\xi - 1)^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)}$$

dla całk., jednostajnego obciążenia g : $H = \frac{g(5 + 10\varphi + 6\varphi^2 + \varphi^3)l^2}{4\mu h(2 + 3\varphi)}$.

Dla belek o pomoście zawieszonym na rozpornicy wartość μ wynosi:

$$\mu_1 = 1 + 3 \frac{J}{Fh^2} \frac{2 + \varphi}{2 + 3\varphi} + \frac{3}{h^2(2 + 3\varphi)} \left(2 \frac{E}{E_1} \cdot \frac{J}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{E}{E_2} \cdot \frac{J}{F_2} \cdot \varphi + \frac{E}{E_3} \cdot \frac{J}{F_3} \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha \right)$$

przyczem E, J, F oznaczają moduł sprężystości, moment bezwładności i przekrój belki głównej AB , E_1 i F_1 moduł sprężystości i przekrój zastrowców, E_2 i F_2 moduł sprężystości i przekrój rozpory, a E_3 i F_3 moduł sprężystości i przekrój słupów wiszących.

Jeżeli belka główna spoczywa na rozpornicy (pomost górą), to μ oblicza się z wzoru:

$$\mu_2 = 1 + \frac{3EJ}{E_1 h^2 (2 + 3\varphi) l} \\ \left(\frac{2s}{F_1} \cdot \frac{1}{\cos^3 \alpha} + \frac{\varphi l}{F_2} \right).$$

Przy rozpornicy trapezowej (można tak samo, jak poprzednio, opuścić μ (zwłaszcza dla $\alpha \geq 30^\circ$, gdy μ_1 dochodzi do 5%, zaś μ_2 do 1,5%). Linje wpływowe momentów otrzykuje się j. w. przez odejmowanie linii H_y od linii M_0 (fig. 371), por. dział: „Mosty drewniane“, str. 787.

Chcąc otrzymać linje wpływową momentu, mającą absolutnie największą rzędną dodatnią, tworzy się moment ze względu na punkt zaczepienia siły P :

$$M = P \frac{2 + \varphi - \xi}{2 + \varphi} \xi l - P \xi l \frac{3(1 + \varphi) - \xi^2}{2\mu h(2 + 3\varphi)} \cdot y,$$

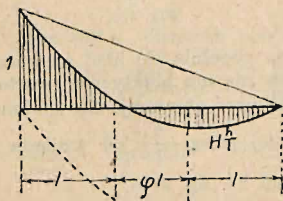


Fig. 371.

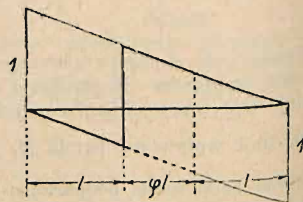


Fig. 372.

Fig. 373.

podstawiając $y = \xi h$, $P = 1$ oraz $\mu = 1$, co w tym wypadku można przyjąć z wystarczającą dokładnością, otrzymuje się równanie:

$$M = \frac{\{\xi^4(2 + \varphi) - \xi^2(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + \xi(8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)}$$

Różniczkując podług ξ i porównując pochodną do zera:

$$\frac{\partial M}{\partial \xi} = \frac{\{4\xi^3(2 + \varphi) - 2\xi(10 + 15\varphi + 3\varphi^2) + (8 + 16\varphi + 6\varphi^2)\} l}{2(2 + \varphi)(2 + 3\varphi)} = 0,$$

dochodzi się do równania 3. stopnia, określającego ξ w zależności od φ . (Wyniki zestawiono tabelarycznie, por. „Mosty drewniane“, str. 787).

Linie wpływowe sił poprzecznych i oddziaływań¹⁾ znajduje się, jak dla rozpornicy trójkątnej; ponieważ oba oddziaływania środkowe są przy dowolnym obciążeniu zawsze sobie równe, przeto wystarczy odjąć od oddziaływania belki wolno podpartej o rozpiętości $L = l(2 + \varphi)$, jedno z oddziaływań

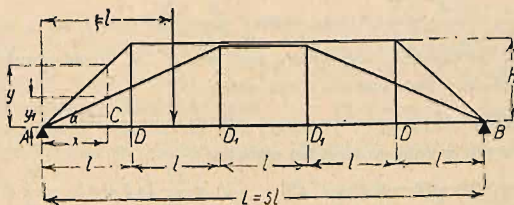


Fig. 374.

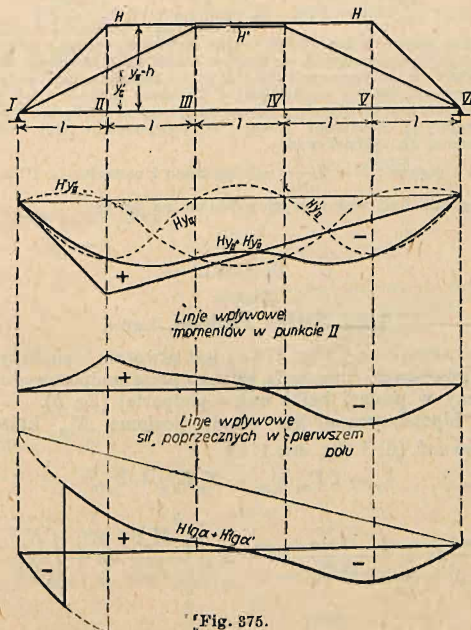


Fig. 375.

środkowych $D = H \frac{h}{l}$, by uzyskać wartość oddziaływania rozpornicy, przypadającego na belkę poziomą (fig. 372).

Ponieważ suma sił po lewej stronie przekroju jest dla punktów położonych w polu środkowym większa o D niż dla punktów położonych w polu skrajnym, przeto linia wpływowa sił poprzecznych dla środkowego pola nie różni się niczym od tejże linii wpływowej dla belki wolno podpartej o rozpiętości $l(2 + \varphi)$, por. fig. 373.

¹⁾ Tablicę rzędnych linii wpływowych oddziaływań D podano na końcu działu: „Statyka budowlana“.

Przykład. Rozpornica trapezowa poczwórna (fig. 374). Jeżeli siły poziome rozpornie, działające na przyczółek, nazwiemy H , oraz H' , to równanie momentu zginającego (por. równanie 1a), przedstawi się następująco:

$$M = M_0 - Hy - H'y' \dots \dots \dots (17)$$

przyczem y i y' oznaczają wysokości przekroju jak poprzednio.

Wychodząc, jak poprzednio, z równania (10a): $\frac{\partial L}{\partial H} = 0$, oraz $\frac{\partial L}{\partial H'} = 0$,

czyli:
$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} dx = 0, \quad \text{oraz} \quad \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H'} dx = 0,$$

otrzymuje się po scałkowaniu i rozwiązaniu względem H i H' , układ równań:

a) gdy ciężar stoi w polu pierwszym lub piątym:

$$H_1 = \frac{\xi(30 - 11\xi^2)}{38} \cdot \frac{l}{h}, \quad H_1' = \frac{12\xi(\xi^2 - 1)}{38} \cdot \frac{l}{h};$$

b) gdy ciężar stoi w polu drugim lub czwartym:

$$H_2 = \frac{l}{38h} (19 - 3\xi - 33\xi^2 + 17\xi^3), \quad H_2' = \frac{3l}{19h} \left(4\xi + 6\xi^2 - \frac{11}{3}\xi^3 \right);$$

c) gdy ciężar stoi w polu środkowym:

$$H_3 = \frac{3l}{19h} (3\xi^2 - 3\xi), \quad H_3' = \frac{3l}{19h} \left(\frac{19}{3} + 5\xi - 5\xi^2 \right).$$

Linje wpływowe rozporów poziomych można wykreślić wprost z powyższych wzorów, zaś do wykreślenia linii wpływowych momentów trzeba użyć równania zasadniczego (17), odejmując wykreślenie rzędne krzywych Hy i $H'y'$ od rzędnych linii wpływowej dla momentów belki wolno podpartej o rozpiętości $5l$. To samo dotyczy linii wpływowych sił poprzecznych i oddziaływań skrajnych, gdzie odejmuje się od trójkąta o wysokości równej l na podporze skrajnej i podstawie równej $5l$, powierzchnie wpływowe oddziaływań środkowych, przyczem dla oddziaływań

drugiego i piątego: $D = H \frac{h}{l}$, zaś trzeciego i czwartego: $D' = H' \frac{h}{2l}$.

Sposób wykreślenia linii wpływowych pokazano na fig. 375.

D, Łuki.

Napisał

† inż. Stefan Pazirski, Lwów.

Łuk dwuprzegubowy (fig. 376 a) jest utworem hiperstatycznym pierwszego stopnia, gdyż przez usunięcie jednego pręta podporowego otrzymujemy utwór zasadniczy w postaci belki wolno podpartej (fig. b).

Wielkością hiperstatyczną jest parcie poziome X_a , którego wielkość obliczymy z równań (6) i (3), str. 1258:

$$\delta_a = \sum P_m \delta_{am} - X_a \delta_{aa} + \delta_{aV}$$

$$\delta_a = \int_0^S \frac{M_0 M_a}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_0 N_a}{EF} ds - X_a \left[\int_0^S \frac{M_a^2}{EJ} ds + \int_0^S \frac{N_a^2}{EF} ds \right] + \int_0^S \omega t N_a ds.$$

Dla sztywnych podpór, z uwagi na $dx = ds \cos \varphi$, i z pominięciem wpływu N_0 :

$$X_a = \frac{\int_0^S \frac{M_0 y}{J} ds + E \omega t l}{\int_0^S \frac{y^2}{J} ds + \frac{l}{F_s}} \dots \dots \dots (1)$$