Największe momenty i siły poprzeczne mostów drogowych.*)

Napisał Prof. Dr. Stefan Bryła.

Obciążenie pośrednie.

Jeżeli ciężary przenoszą się na belkę za pośrednictwem poprzecznic, to potrzebna jest znajomość najw. siły poprzecznej w dowolnem polu między sąsiedniemi poprzecznicami. Jeżeli:

λ = długość badanego pola, czyli rozstęp poprzecznic,

x = odstęp prawej poprzecznicy od lewej podpory,

to łatwo znaleźć, że odległość punktu obojętnego (gdzie rzędna linji wpływowej = 0) od prawej poprzecznicy:

$$\xi = \lambda \frac{l-x}{l-\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22)$$

Jeżeli pola są równe i $l = n\lambda$, $x = m\lambda$, to:

$$\xi = \lambda \frac{n-m}{n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 22a)$$

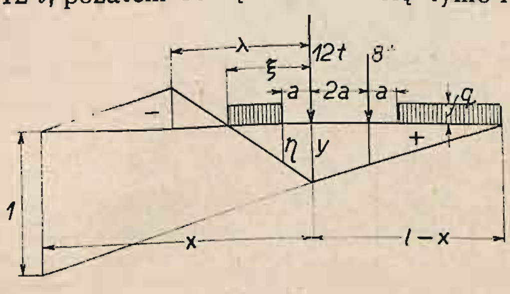
Jeżeli T_x jest najw. siłą poprzeczną dla przekroju x (t. j. w miejscu, gdzie jest prawa poprzecznica), gdzie rzędna linji wpływowej jest y, to największa siła poprzeczna w danem polu

$$T = T_x + \Delta T, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23)$$

gdzie ΔT oznacza wpływ obciążenia w obrębie ξ, czyli wpływ trójkąta $\frac{1}{2}\xi . y$ dodatniej gałęzi linji wpływowej sił poprzecznych danego pola. T_x znajdziemy z tablicy sił poprzecznych jak wyżej, zaś poprawkę ΔT trzeba obliczyć w zależności od tego, czy wartość T znajduje się nad, względnie na prawo (przypadek 1), czy też na lewo od linji schodkowej tejże tablicy (przypadek 2).

Przypadek 1 (rys. 7).

Niech $l - x + \xi < 30\ m$, to dla największości T w danem polu, na prawej poprzecznicy ma stać tylna oś wałka 12 t, pozatem obciążenie tem się tylko różni od



Rys. 7.

obciążenia dla przekroju x, że pomiędzy wałek, a punkt obojętny przybywa tłum ludzi, o ile się zmieści. Jeżeli więc

$$\xi \leqslant a = 1{,}5\ m, \text{ to } \Delta T = 0,\ T = T_x\ .$$

Jeżeli zaś $\xi > a = 1{,}5\ m$, to (rys. 7) $\Delta T = q . \frac{1}{2}\eta(\xi - a)$,

$$\eta = y\frac{\xi - a}{\xi} = \frac{l-x}{l} . \frac{\xi - a}{\xi}, \text{ a że } \frac{l-x}{\xi} = \frac{l-\lambda}{\lambda},$$

więc $$\Delta T = \frac{1}{2} q \frac{l-\lambda}{l\lambda}(\xi - a)^2 . \quad . \quad 24)$$

albo, gdy $\frac{l}{\lambda} = n$, $$\Delta T = \frac{1}{2} q \frac{n-1}{l}(\xi -)^2 \quad . \quad . \quad 24a)$$

*) Dokończenie do str. 679 w № 50 z r. b.

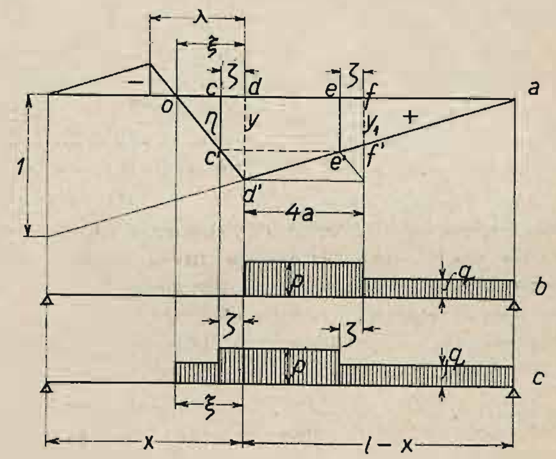
Jeżeli $l - x < 30\ m$, zaś $l - x + \xi \geqslant 30\ m$, to można liczyć w sposób powyższy, będzie to jednak nieco zbyt niekorzystnie. Oszczędniej będzie obliczyć T_x według równ. 2, 5 i 6, zaś ΔT_x wedle równ. 25.

Przypadek 2-gi.

Jeżeli $l - x + \xi \geqslant 30\ m$, t. j. gdy odpowiednia wartość T_x jest na lewo od linji schodkowej na tablicy sił poprzecznych, to wałek, jako ciężar jednostajnie rozłożony

$$p = \frac{20 \text{ tonn}}{4a} = \frac{20}{6}\ t/m = 3{,}333\ t/m,$$

należy ustawić wedle konstrukcji, podanej dla momentów dla przypadku 2-go (por. rys. 4 i 8).



Rys. 8.

Dla przekroju d (gdzie jest prawa poprzecznica), najniekorzystniejsze położenie wałka ze względu na siłę poprzeczną jest df, dla najw. zaś T w badanym przedziale ce (rys. 8). Zatem:

$\Delta T = q \times$ pole $occ' + p \times$ pole $cc'dd'$ —

— $(p - q) \times$ pole $eff'e'$, czyli:

$$\Delta T = q\frac{1}{2}\eta(\xi - \zeta) + \frac{1}{2}p\zeta(y + \eta) - (p - q)\frac{1}{2}\zeta(\eta + y_1) =$$

$$= \frac{1}{2}q(\eta\xi + y_1\zeta) + \frac{1}{2}p\zeta(y - y_1) = \frac{1}{2}qA_q + \frac{1}{2}pA_p.$$

Ponieważ $y = \frac{l-x}{l}$, $y_1 = \frac{l-x-4a}{l}$, ... a)

przeto $y - y_1 = \frac{4a}{l}$.

Z proporcji $(\xi - \zeta) : \eta = \xi : y$ wynika $\zeta = \xi\left(1 - \frac{\eta}{y}\right)$.

Zaś z proporcji $(y - \eta) : 4a = y : (l - x + \xi)$

wynika $$\frac{\eta}{\xi y} = 1 - \frac{4a}{l - x + \xi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad b)$$

Zatem $\zeta = 4a \dfrac{\xi}{l - x + \xi} = 4a : \left(\dfrac{l-x}{\xi} + 1\right)$.

A że (równ. 22) $\dfrac{l-x}{\xi} = \dfrac{l-\lambda}{\lambda}$,

więc $\zeta = 4a \dfrac{\lambda}{l}$ . . . . $c)$

Zatem $A_p = 4a \dfrac{\lambda}{l} \cdot \dfrac{4a}{l} = \dfrac{\lambda}{l} \dfrac{(4a)^2}{l}$,

Z uwagi na równ. $b)$ jest:

$$\eta \xi = C - D,$$

jeżeli $C = y\,\xi = \dfrac{l-x}{l} \dfrac{\lambda}{l-\lambda} (1 - x) = \dfrac{\lambda}{l} \dfrac{(l-x)^2}{l-\lambda}$,

$$D = 4a \frac{y\,\xi}{l - x + \xi} = 4a\,y : \left(\frac{l-x}{\xi} + 1\right) = \frac{\lambda}{l} . 4a \frac{l-x}{l}.$$

czyli $\eta \xi = \dfrac{\lambda}{l}\left[\dfrac{(l-x)^2}{l-\lambda} - \dfrac{4a}{l}(l-x)\right]$.

Z uwagi na równ. $a)$ i $c)$ jest

$$y_1 \zeta = \frac{l - x - 4a}{l} . 4a \frac{\lambda}{l} = \frac{\lambda}{l}\left[\frac{4a}{l}(l - x) - \frac{(4a)^2}{l}\right].$$

Zatem $A_q = \eta \xi + y_1 \zeta = \dfrac{\lambda}{l}\left[\dfrac{(l-x)^2}{l-\lambda} - \dfrac{(4a)^2}{l}\right]$.

Wreszcie $\Delta T = \dfrac{1}{2} q A_q + \dfrac{1}{2} p A_p =$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{l}\left[q \frac{(l-x)^2}{l-\lambda} - q \frac{(4a)^2}{l} + p \frac{(4a)^2}{l}\right],$$

czyli $\Delta T = \dfrac{1}{2} \dfrac{\lambda}{l}\left[q \dfrac{(l-x)^2}{l-\lambda} + (p - q) \dfrac{(4a)^2}{l}\right]$ . . 25)

Albo jeżeli $l = n\lambda$, $x = m\lambda$, to

$\Delta T = \dfrac{1}{2n}\left[q \dfrac{n-m}{n-1}(l - x) + (p - q) \dfrac{(4a)^2}{l}\right]$ . . 25a)

Przykłady.

1. Most żelbetowy drogowy III klasy. Rozpiętość teoretyczna $l = 9\ m$. Odstęp belek głównych od osi do osi $b = 1{,}4\ m$. Spółczynnik szerokości $\alpha = \dfrac{1{,}4}{2{,}5} = 0{,}56$. Spółczynnik klasy $\varphi = 0{,}4$. Bezwzględnie największy momentabs $M_{max} = 0{,}56 \cdot 0{,}4 . 36{,}1 = 8{,}1\ tm$.

Moment ten wystąpi wtedy, gdy tylna oś wałka stanie w odległości $3{,}9 . \dfrac{l}{100} = 3{,}9 \times 9 = 35{,}1\ cm$ od środka belki. W przekroju belki w odległości $x = 0{,}3\,l$ od lewej podpory największy moment $M_{0.3} = 0{,}56 \times \times 0{,}4 \times 31{,}84 = 7{,}14\ tm$. Największe oddziaływanie (reakcja): $A = 0{,}56 \times 0{,}4 \times 19{,}49 = 4{,}36\ t$.

2. Most kratowy drogowy II klasy. $l = 28\ m$, szerokość jezdni $b_j = 4{,}80\ m$, szerokość dwu chodników $b_c = 2 \times 1{,}0 = 2\ m$. Spółczynnik klasy $\varphi = 0{,}8$, spółczynnik szerokości $\alpha = 0{,}4 \times 4{,}8 = 1{,}92$.

Najw. moment w środku belki z powodu ciężaru ruchomego $M_{0.5} = M_c + M_j$. Moment z powodu obciążenia chodników tłumem ludzi

$$M_c = \frac{1}{8} q\,l^2 = \frac{1}{8}\ 2 \times 0{,}5 \times 28^2 = 98{,}0\ tm.$$

Moment z powodu obciążenia jezdni

$M_j = \alpha . \varphi . M_z = 1{,}92 \times 0{,}8 \times 205{,}2 = 314{,}6\ tm.$

$M_{0.5} = 412{,}6\ tm.$

Na jedną belkę przypada $\dfrac{1}{2} M_{0.5} = 206{,}3\ tm$.

Odstęp węzłów $\lambda = l : 8$.

Moment w węźle odległym o $x = \dfrac{3}{8}\ l = 0{,}25\,l$ od lewej podpory $M_{0.25} = M_j + M_c$.

M_j znajdziemy przez interpolację na podstawie wartości tabelarycznych M_z (dla obciążenia zasadniczego)

Dla $x = 0{,}2\ l$ $M_z = 133{,}3\ tm$

" " $0{,}3\ l$ $M_z = 173{,}9$ "

Różnica $= 40{,}6 \times 0{,}5 = 20{,}3$.

Dla $x = 0{,}25\ l$, $M_z = 133{,}3 + 20{,}3 = 153{,}6\ tm$.

$M_j = \alpha \varphi M_z = 1{,}92 \times 0{,}8 \times 153{,}6\ tm = 236{,}0\ tm$

$M_c = \dfrac{1}{2} qx(l - x) = \dfrac{1}{2}(0{,}5 \times 2{,}0) \times 0{,}25 (1 - 0{,}25) 28^2 = 73{,}6$ "

$M_{0.25} = 309{,}6$ "

Na jedną belkę przypada $\dfrac{1}{2} M_{0.25} = 154{,}8\ tm$.

3. Most kratowy żelazny I kl. ($\varphi = 1$) $l = 64{,}8\ m$. Szerokość jezdni między krawężnikami $b = 5{,}4\ m$.

$$\alpha = 1 + \frac{b}{5} = 1 + \frac{5{,}4}{5} = 2{,}08.$$

Krawężniki po $0{,}4\ m$. Odstęp belek w świetle $b_0 = 5{,}4 + 2 \times 0{,}4 = 6{,}2\ m$. Grubość konstrukcji belki $0{,}45\ m$. Odstęp belek głównych od osi do osi $b_1 = 6{,}2 + 0{,}45 = 6{,}65\ m$. Chodniki zewnętrzne o szerokości $1{,}5\ m$ każdy. Odstęp węzłów $\lambda = \dfrac{l}{12}$.

Moment w odległości $x = \dfrac{5}{12}\ l = 0{,}417\ l$ od lewej podpory $M_{0.417} = M_j + M_c$. Moment obciążenia jezdni $M_j = \alpha \varphi M_z$. Wartość M_z dla obciążenia zasadniczego znajdziemy przez podwójną interpolację.

$x : l$	l = 64	l = 65
0,4	769,2	801,2
0,5	801,2	815,2
różn. 0,1	32,0	14,0
0,017	5,5	2,4
0,417	774,7	803,6

l	M_z
64	774,7
65	803,6
różn. 1	29,1
0,8	23,3
64,8	798,0 $tm = M_l$

Jeżeli zamiast tablicy użyjemy wzoru 13 i 14, to będzie

$$\psi = 0{,}417\ (1 - 0{,}417) = 0{,}243$$

$$2l - 4a = 2 . 64{,}8 - 6 = 123{,}6\ m$$

$$l - 4a = 64{,}8 - 6 = 58{,}8\ \text{"}$$

$$q = 1{,}5 - 0{,}005\ l = 1{,}176\ t/m$$

$$(2l - 4a)\ 10\,t = 1236\ tm$$

$$\frac{1}{2} q\ (1 - 4a)^2 = \frac{1}{2}\ 1{,}176 . 58{,}8^2 = 2039\ \text{"}$$

$$F\ (l) = 3275\ tm.$$

$M_z = \psi\ F\ (l) = 0{,}243 \times 3275 = 796\ tm.$

Widzimy więc, że błąd z powodu interpolacji jest bardzo mały i to na korzyść pewności.

Moment od ciężaru ruchomego jezdni, przypadający na obie belki główne:

$$2\,M_j = 2{,}08\,.\,1\,.\,798{,}0 = 1640\ tm.$$

Na jedną belkę przypada połowa tegoż więc:

$$M_j = \frac{1}{2}\,1640 = 820\ tm.$$

Moment z powodu obciążenia chodnika:

$$M_c = \mu\,\frac{1}{2}\,p'\,x\,(l-x) = \mu\,\frac{1}{2}\,p\,l^2\psi.$$

Spółczynnik zwiększający μ wyraża tę okoliczność, że poprzecznica jest belką wystającą. Wypadkowa ciężaru ruchomego chodnika znajduje się w odległości $\frac{1}{2}\,(0{,}45+1{,}50) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975\ m$ od teoretycznego punktu podparcia poprzecznicy. Jeśli tylko jeden chodnik obciążymy ciężarem Q, np. lewy, to ze względu na prawą podporę poprzecznicy B, równanie momentów jest $A\,.\,b_1 = Q\,(b_1 + 0{,}975\ m)$, stąd $A = Q\mu$,

$$\text{gdzie } \mu = 1 + \frac{0{,}975}{b_1}\,m = 1 + \frac{0{,}975\,m}{6{,}65} = 1{,}147.$$

Ciężar jednostkowy $p' = 1{,}5\ q$.

Dla $l = 50\ m \quad q = 0{,}5\ t/m^2$

$l = 100$ „ $\quad q = 0{,}5\ t/m^2$

różn. $\quad 0{,}1\ t/m^2$

$$\frac{14{,}8\,.\,0{,}1}{50} = 0{,}0296.$$

$$l = 64{,}8,\ q = 0{,}4704\ t/m^2,\ p' = 0{,}7056\ t/m,\ \psi = 0{,}243.$$

$$M_c = 1{,}147\,.\,\frac{1}{2}\,.\,0{,}7056\,.\,0{,}243\,.\,64{,}8^2 = 413\ t/m$$

$M_j = 820$ „

$M_{c.417} = 1233\ t/m$.

4. Odstęp podłużnic stężonych np. płytą żelbetową mostu z poprzedniego przykładu; $c = 1{,}8\ m$, rozpiętość = odstęp węzłów belki głównej $l = 5{,}4\ m$. Bezwzględnie najw. moment

abs $M_{max} = \alpha\,\varphi\,M_z$.

$\alpha = 0{,}4 \times 1{,}8 = 0{,}72,\ \varphi = 1.$

M_z znajdziemy przez interpolację:

Dla $l = 5\ m$	$M_z = 15{,}33$
6	19,55
różn. 1	4,22
$\times$ 0,4	1,688
dla $l = 5{,}4\ m$	$M_z = 17{,}02\ tm$

Według równ. 18:

$$\alpha' = [12 + 1{,}25\,(5{,}4 - 1{,}5)] : 5{,}4 = 3{,}125$$

$$\beta' = 12 + \frac{1}{2}\,\frac{1{,}25}{5{,}4}\,(5{,}4 - 1{,}5)^2 = 13{,}76$$

$$\frac{3}{2}\,\frac{q}{l} = \frac{3}{2}\,\frac{1{,}25}{5{,}4} = 0{,}3473.$$ Według równ. 20:

$$\alpha = 3{,}125 : 0{,}3473 = 9{,}0,\quad \beta = 13{,}76 : 0{,}3473 = 39{,}7$$

$$x = 9{,}0 - \sqrt{9{,}0^2 - 39{,}7} = 2{,}576 \text{ (równ. 21)},$$

$$A = 0{,}3473\,.\,2{,}576^2 - 2 \times 3{,}125 \times 2{,}576 + 13{,}76 =$$
$$= 0{,}769 - 8{,}05 + 13{,}76 = 6{,}48\ t \text{ (równ. 17)}.$$

Wreszcie z równ. 16:

$$M_z = 6{,}48 \times 2{,}576 = 16{,}7\ tm.$$

Zatem i tu interpolacja daje wartość nieco zbyt wielką; błąd, który dla małych rozpiętości jest większy, niż dla wielkich, jest wogóle na korzyść pewności.

abs $M_{max} = 0{,}72 \times 1 \times 17{,}02 = 12{,}25\ tm.$

Największe oddziaływanie podłużnicy na poprzecznicę

$$A_a = T_0 = 0{,}72\,.\,A_z,\quad A_z = 15{,}23 + 0{,}4\,(16{,}23 - 15{,}23) =$$
$$= 15{,}63\ t,\quad A = 0{,}72\,.\,15{,}63 = 11{,}25 \text{ tonn.}$$

5. Most ten sam, co w przykładzie 2. Najw. siła poprzeczna w drugim przedziale dla obciążenia zasadniczego $T_{II} = T_x + \Delta T$.

Dla $x = \frac{2}{8}\,l = 0{,}25\,l$, jest według tablicy sił poprzecznych $T_x = 18{,}24 + 0{,}5\,(22{,}29 - 18{,}24) = 20{,}27\ t.$

$$\text{Według równ. } 22a\ \ \xi = \frac{l}{8}\,\frac{8-2}{8-1} = \frac{6}{8\times 7}\,28 = 3\ m,$$

$$\xi - a = 3{,}0 - 1{,}5 = 1{,}5.$$

$$\text{Według równ. 24: } \Delta T = \frac{1}{2}\,1{,}25\,\frac{7}{28}\,1{,}5^2 = 3{,}52\ t.$$

$$T_{II} = 20{,}27 + 3{,}52 = 23{,}79\ t.$$

Wpływ jezdni $T_j = \alpha\varphi\,T_{II} = 1{,}92 \times 0{,}8 \times 23{,}79 = 36{,}4\ t$

$$\text{„ chodników } T_c = \frac{1}{2}\,q\,\frac{(l-x)^2}{l-\lambda} = \frac{1}{2}\,q\,\frac{(n-m)}{n-1}\,(l-x) =$$
$$= \frac{1{,}0}{2}\,\frac{6}{7}\,(28 - 7) = 9{,}0\ t.$$

Całkowita najw. T w przedziale 2-gim z powodu ciężaru ruchomego $T_j + T_c = 45{,}4\ t$ z czego na jedną belkę przypada $45{,}4 : 2 = 22{,}7\ t.$

6. Most jak w przykładzie 3; chodzi o najw. T w przedziale czwartym, T_{IV}.

$x = \frac{4}{12}\,l = 0{,}33\,l.$ Z tablicy znajdziemy:

$$T_{0.3} = 26{,}96 + 0{,}8\,(27{,}18 - 26{,}96) = 27{,}14\ t$$
$$T_{0.4} = 20{,}75 + 0{,}8\,(20{,}93 - 20{,}75) = 20{,}89 \text{ „}$$
$$T_{0.3} - T_{0.4} = 6{,}25\ t$$
$$T_{0.33} = 27{,}14 - 0{,}3\,.\,6{,}25 = 25{,}26 \text{ tonn.}$$

$$l - x = \frac{n-m}{n}\,l = \frac{12-4}{12}\,64{,}8 = 43{,}2\ m,\ 4a = 6\ m$$

$$q = 1{,}5 - 0{,}005\,.\,64{,}8 = 1{,}176\ t/m$$
$$p = 3{,}333 \text{ „}$$
$$p - q = 2{,}157\ t/m.$$

$$\text{Według 25 } a)\ \Delta T = \frac{1}{24}\left[1{,}176\,\frac{8}{11}\,.\,43{,}2 + 2{,}157\,\frac{6^2}{64{,}8}\right] =$$
$$= \frac{1}{24}\,(37{,}00 + 1{,}195) = \frac{38{,}2}{24} = 1{,}59\ t.$$

Siła poprzeczna z powodu obciążenia zasadniczego

$$T_z = T_{0.33} + \Delta T = 25{,}26 + 1{,}59 = 26{,}85\ t.$$

Na jedną belkę przypada z jezdni

$$T_j = \frac{1}{2}\,\alpha\,\varphi\,T_z = \frac{1}{2}\,2{,}08\,.\,1{,}0\,.\,26{,}85 = 27{,}95\ t.$$

$$\text{Wpływ chodnika } T_c = \mu\,\frac{1}{2}\,p'\,\frac{(l-x)^2}{l-\lambda} =$$
$$= 1{,}147\,.\,\frac{1}{2}\,.\,0{,}7056\left(\frac{8}{11}\,.\,43{,}2\right) = 12{,}71$$

Wreszcie $T_{IV} = T_j + T_c = 40{,}66$ tonn.

Za pomoc we wszystkich obliczeniach powyższych, dziękuję memu asystentowi, p. Inż. Stefanowi Chmielowcowi.