CZASOPISMO TECHNICZNE

ORGAN POLSKIEGO TOWARZYSTWA POLITECHNICZNEGO WE LWOWIE.

Rocznik XXXVII. Lwów, dnia 10 listopada 1919. Nr. 21.

Przybliżone obliczenie mostów belkowych połączonych sztywnie z podporami.

Podał

Dr. inż. Stefan Bryła.

Obliczenie momentów zginających mostów żelazno-betonowych połączonych stale z podporami powoduje pewne trudności. Pochodzą one stąd, że stopień utwierdzenia takich belek na podporze nie jest dostatecznie jasny i pewny i zależy od różnych warunków konstrukcyjnej natury. Jeżeli całkowite utwierdzenie oznaczymy spółczynnikiem $\beta = 1$, to współczynnik rzeczywistego utwierdzenia wynosi zwykle od $\frac{1}{2}$ do 1, zbliżając się najczęściej do $\beta = \frac{3}{4}$ *).

Postępując ściśle należy określić wartość β, a temsamem i wielkość momentów podporowych, lub co na jedno wyjdzie uważać przyczółek za słupy belki ramowej o odpowiednim momencie bezwładności.

Poszczególne rozporządzenia pozwalają przecież na znaczne skrócenie i ułatwienie tej drogi, normując inny tok postępowania, a mianowicie:

1. Momenty środkowej części belki oblicza się jak dla belki wolno podpartej, mnożąc je jednak spółczynnikiem $\alpha < 1$ (zwykle $\alpha = 0{,}6 - 0{,}8$).

2. Momenty w skrajnych częściach oblicza się natomiast, jak dla belki utwierdzonej, zmniejszając je tylko nieznacznie ($\beta = 0{,}8$ lub częściej $\beta = 1$).

Przy tym sposobie obliczania otrzymujemy w każdym punkcie momenty większe od rzeczywistych, co daje większą pewność obliczenia.

Otrzymujemy wtedy dwie obwiednie największych momentów (fig. 1). Jedną z nich, ważną w środkowej części belki, będą tworzyć momenty dodatnie o najw. wielkości $y = \alpha M_g$ dla ciężaru stałego (linia kreskowana 3) i $y_1 = \alpha M_p$ dla ciężaru ruchowego (linia „kreska — kropka" 4). Druga odnosi się do momentów ujemnych o największości na podporze równej $y' = M_{og}$ (linia „kreska — kropka" 1) dla ciężaru stałego, wzgl. $y_1' = M_{op}$ (linia kropkowana 2) dla ciężaru ruchomego.

Uwzględniając te przyjęcia, dochodzimy do wniosku, że momenty ujemne y_1' dla ciężaru ruchomego należy obliczać aż do punktu, w którym dodatni moment dla ciężaru stałego y' otrzymuje bezwzględną wartość równą momentowi ujemnemu y_1'; od tego punktu bowiem ku środkowi belki moment ujemny wystąpić nie może.

Obliczenie momentów M_g, M_{og}, M_p jest bardzo proste; natomiast żmudniejszy jest rachunek dotyczący momentów ujemnych w skrajnych częściach z powodu ciężaru ruchomego; dla poszczególnych punktów otrzymujemy tu bowiem różne położenie ciężaru, a linie wpływowe są, jak wiadomo, krzywemi bez punktów wybitnie określających położenie jednego z ciężarów.

Mosty omawianego typu mają jednak rozpiętości stosunkowo nieznaczne; większa ilość ciężarów przeto zmieścić się na nich nie może. Fakt ten pozwala

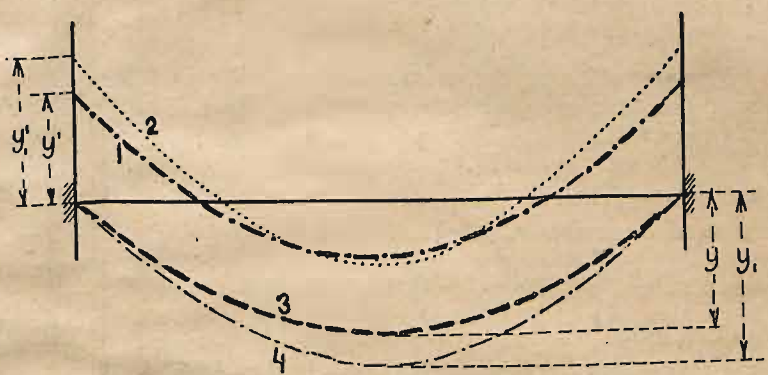

Fig. 1.

na wprowadzenie metody rachunku, która ustala najniekorzystniejsze położenie ciężarów łatwo i szybko, bez pomocy linii wpływowych. Metoda ta najlepiej daje się zastosować do obliczenia mostów kolejowych, gdzie dla niewielkich długości najniekorzystniejsze obciążenie składa się z szeregu równych ciężarów, rozmieszczonych w równych odstępach od siebie (parowóz).

1. Obliczenie momentu podporowego.

Niech oznacza (fig. 2):

a = odległość pierwszego ciężaru P od lewej podpory,
b = odległość tegoż ciężaru od podpory prawej,
m = odstęp ciężarów od siebie,
n = ilość ciężarów P;

to moment podporowy dla jednego (pierwszego) ciężaru P wynosi:

*) Por. *D. Bauztg.* 1909.

$$M_o = -P\frac{ab^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1.$$

dla $(k+1)$-ego ciężaru:

$$M_o = -\frac{P(a+km)(l-a-km)^2}{l^2} \quad . \quad . \quad 2.$$

dla wszystkich n ciężarów:

$$M_o = -\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{P(a+km)(l-a-km)^2}{l^2} \quad . \quad . \quad 3.$$

$$M_o = -\frac{P}{l^2}\sum_{k=0}^{k=n-1}(a+km)(l^2+a^2+(km)^2-2al-2klm-$$

$$-kam) = -\frac{Pn}{l^2}\Big\{a^3+a^2\left[\frac{3}{2}(n-1)m-2l\right]+$$

$$+a\left[l^2+\frac{1}{2}(n-1)(2n-1)m^2-2(n-1)lm\right]+$$

$$+\left[\frac{(n-1)}{2}ml^2+\tfrac{1}{4}n(n-1)^2m^3-\tfrac{1}{3}(n-1)(2n-1)m^2l\right]\Big\} =$$

$$= -\frac{Pn}{l^2}\,Y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4.$$

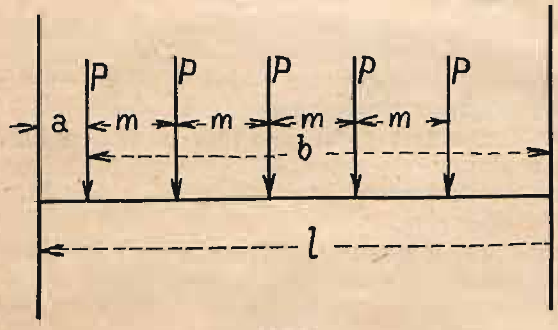

Fig. 2.

Moment M_o przybierze wartość największą dla tego a, dla którego pierwsza pochodna równać się będzie zeru:

$$\frac{dM_o}{da} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5.$$

co nastąpi oczywiście, gdy:

$$\frac{dY}{da} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6.$$

czyli gdy:

$$3a^2+[\tfrac{3}{2}(n-1)m-2l]2a+[l^2+\tfrac{1}{2}(n-1)(2n-1)m^2-$$
$$-2(n-1)lm] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.$$

Jestto, jak widzimy, równanie drugiego stopnia o jednej niewiadomej, bardzo łatwe do rozwiązania. Wprowadzając bowiem oznaczenia:

$$\left.\begin{aligned} A &= 3(n-1)m-4l \\ B &= l^2+\tfrac{1}{2}(n-1)(2n-1)m^2-2(n-1)lm \end{aligned}\right\} \quad . \quad 8.$$

otrzymujemy równanie:

$$3a^2+Aa+B=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8a.$$

z którego:

$$a=\tfrac{1}{6}[-A\pm\sqrt{A^2-12B}]. \quad . \quad . \quad . \quad 9.$$

Zamiast wprowadzać jednakowoż równanie 9. lepiej jest już w równ. 7. podstawić za l, m i n wartości szczególne i rachunek z niemi poprowadzić.

2. W przekrojach leżących blisko podpory momenty ujemne dla ciężaru stałego jednostajnie rozłożonego wyznacza się wedle wzoru:

$$M = \frac{gc(l-c)}{2} - \frac{gl^2}{12} = \tfrac{1}{2}g\left[c(l-c)-\frac{l^2}{6}\right], \quad 10.$$

gdzie c jest odległością badanego przekroju od lewej podpory.

Dla ciężaru skupionego otrzymujemy:

$$M = \frac{Pb^2}{l^3}[c(3a+b)-al], \quad . \quad . \quad . \quad 11.$$

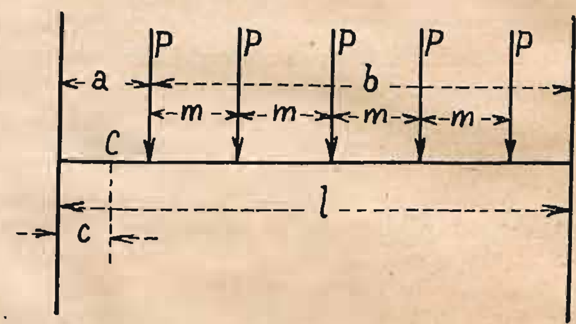

Fig. 3.

zaś dla szeregu ciężarów wedle fig. 3.:

$$M = \frac{P}{l^3}\sum_{k=0}^{k=n-1}(l-a-km)^2[c\{2(a+km)+l\}-(a+km)l] \quad 12.$$

$$M = \frac{P}{l^3}\sum_{k=0}^{k=n-1}(l^2+a^2+(km)^2-2al-2klm+$$

$$+2akm)(2ac+2kcm+cl-al-klm) = \frac{P}{l^3}\,Y, \quad 13.$$

gdzie (po wymnożeniu):

$$Y = \sum_{k=0}^{k=n-1}(cl^3-al^3+2a^3c+$$
$$+6ka^2mc-3a^2cl-a^3l+6k^2am^2c+$$
$$+2k^3m^3c-3k^2m^2cl-3k^2m^2al-6kalmc+4kal^2m+$$
$$+2a^2l^2-3ka^2lm-kml^3-k^3m^3l+2k^2l^2m^2).$$

Max M otrzymamy dla $\frac{dY}{da}=0$, t. j. dla:

$$\frac{dY}{da} = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-l^3+2.3a^2c+6.2kamc-3.2acl-$$
$$-3a^2l+6k^2m^2c-3k^2m^2l-6klmc+4kl^2m+$$
$$+2.2al^2-3.2kalm) = n\{-l^3+6a^2c+6(n-1)amc-$$
$$-6alc-3a^2l+(n-1)(2n-1)cm^2-$$
$$-\tfrac{1}{2}(n-1)(2n-1)m^2l-3(n-1)lmc+2(n-1)l^2m+$$
$$+4al^2-3(n-1)alm\} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14.$$

Łącząc wyrazy wedle potęg niewiadomej a, otrzymamy:

$$3a^2[2c-l]+a[3(n-1)(2c-l)-2l(3c-2l)]+$$
$$+[2(n-1)(2n-1)m^2(2c-l)-$$
$$-(n-1)lm(3c-2l)-l^3] = 0. \quad . \quad . \quad . \quad 15.$$

Podstawiając zaś:

$$\left.\begin{aligned} C &= 3[2c-l] \\ D &= [3(n-1)(2c-l)-2l(3c-2l)] \\ E &= [2(n-1)(2n-1)m^2(2c-l)-(n-1)lm(3c-2l)-l^3] \end{aligned}\right\} 16.$$

czyli:

$$Ca^2+Da+E=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16a.$$

otrzymamy:

$$a=\tfrac{1}{2}c[-D\pm\sqrt{D^2-4CE}]. \quad . \quad . \quad 17.$$

Rachunek można oczywiście prowadzić liczbami szczegółowemi już począwszy od równ. 15.