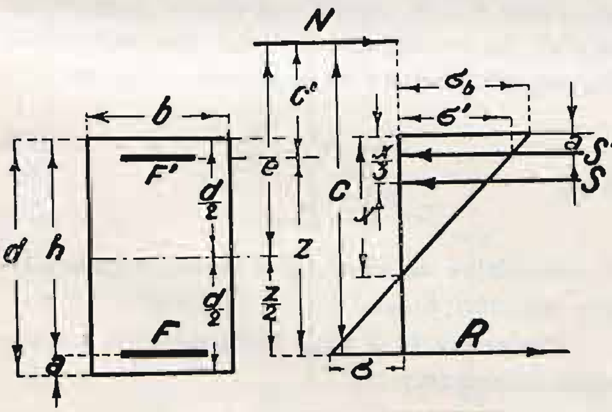
WYZNACZENIE UZBROJENIA W SŁUPACH ŚCISKANYCH MIMOŚRODKOWO O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

Prof. dr. Stefan Bryła
Warszawa

Jeżeli mimośród elementów ściskanych żelbetowych jest niewielki, t. j. jeżeli punkt zaczepienia siły ściskającej znajduje się w obrębie jądra przekroju, cały przekrój pracuje na ściskanie i mamy do czynienia z fazą I, która nie nastręcza konstruktorowi projektującemu żadnych trudności.



Rys. 1.

Inaczej sprawa się przedstawia w przypadku większych mimośrodków, kiedy w przekroju występują ciągnienia betonu. Według polskich przepisów ciągnień tych w obliczeniu i projektowaniu nie wolno uwzględniać, a więc trzeba liczyć wedle fazy II. Należy w części rozciąganej przekroju pomieścić wkładki stalowe. Ale ilość ich byłaby niepomiernie duża, gdybyśmy nie dali równocześnie wkładek w pobliżu krawędzi ściskanej przekroju.

Aby ilość stali była możliwie mała, musi naprężenie w betonie na ściskanie σ_b być możliwie wielkie a więc równe dopuszczalnemu. Natomiast zwiększenie naprężenia rozciągającego σ_z w drutach stalowych nie zawsze prowadzi do oszczędności stali. Zależnie od obranego stosunku $\sigma_b : \sigma_z$ ilość stali może być większa lub mniejsza. Chodzi o znalezienie minimum uzbrojenia przy danych naprężeniach dopuszczalnych σ_b i σ_z, przy danych wymiarach poprzecznych słupa i danych wartościach siły ściskającej podłużnej N i momentu zginającego M względnie przy danym mimośrodzie

$$e = \frac{M}{N} \tag{1}$$

Saliger[1]) podaje sposób przybliżony wyznaczeniu potrzebnych wkładek z uwagi na rozciąganie. Sposób ten jednak polega na przyjęciu $\sigma_z = \sigma_{z\,dop.}$ co prowadzi często do marnotrawstwa drogiej stali. Saliger podaje też sposób dokładniejszy z uwagi na minimum sumy wkładek, ale nie dość ogólny.

Poniżej podano sposób zupełnie ogólny i prosty wyznaczenia minimum uzbrojenia.

Nazwijmy (por. rys. 1)

b szerokość słupa

d wysokość „

h odległość środka ciężkości wkładek rozciąganych F od ściskanej krawędzi przekroju,

[1]) Saliger: Der Eisenbetonbau, seine Berechnung und Gestaltung. Stuttgart 1920, str. 263.

a odległość wkładek ściskanych od tejże krawędzi,

z odległość środków ciężkości wkładek ściskanych i rozciąganych,

x odległość osi obojętnej od krawędzi ściskanej,

Odległość punktu wczepienia siły N od wkładek rozciąganych jest w/g rys. 1.

$$c = e = \frac{z}{2} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Odległość siły N od wkładek ściskanych

$$c' = e - \frac{z}{2} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Jeżeli

$$\sigma = \frac{\sigma_{\dot{z}}}{15}, \quad \sigma' = \frac{\sigma'_{\dot{z}}}{15} \quad \ldots \quad (4)$$

$$k = \frac{\sigma}{\sigma_b} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{a}{h} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$\mu = 1 - \alpha \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

to płaskość przekrojów odkształconych w połączeniu z prawem Hooke'a prowadzi do równań

$$x = h \frac{\sigma_b}{\sigma + \sigma_b} = \frac{h}{1 + k} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma_b} = \frac{x - a}{x} = 1 - \alpha(1 + k) = \mu - \alpha k$$

Siła rozciągająca we wkładkach dolnych

$$R = n F \sigma$$

Siła ściskająca we wkładkach górnych

$$S' = n F' \sigma'$$

Siła ściskająca w betonie

$$S = \frac{1}{2} b x \sigma_b$$

przyczem

$$n = E_{\dot{z}} : E_b = 15$$

Równanie momentów ze względu na wkładki dolne i górne

$$c N = S' z + S\left(h - \frac{x}{3}\right)$$

$$c' N = R z - S\left(\frac{x}{3} - a\right)$$

podzielmy przez $bh^2 \sigma_b$ i nazwijmy

$$\frac{N}{bh\,\sigma_b} = V \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{z}{h} \frac{nF}{bh} = \varphi \qquad \frac{z}{h} \frac{nF'}{bh} = \varphi' \quad . \quad (10)$$

$$1 + k = \lambda \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

to otrzymamy:

$$V \frac{c}{h} = \varphi'(\mu - \alpha k) + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{1}{3\lambda}\right)$$

$$V \frac{c'}{h} = \varphi k \qquad - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{3\lambda} - \alpha\right)$$

Nazwijmy jeszcze

$$\frac{1}{3\lambda} - \alpha = \beta \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$1 - \frac{1}{3\lambda} = \beta' \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$V \frac{c'}{h} + \frac{\beta}{2\lambda} = \gamma \quad \ldots \quad (14)$$

$$V \frac{c}{h} - \frac{\beta'}{2\lambda} = \gamma' \quad \ldots \quad (15)$$

to

$$\varphi = \frac{\gamma}{k} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\varphi' = \frac{\gamma}{\mu - \alpha k} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Przyjąwszy kilka dowolnych, okrągłych wartości k obliczymy tabelarycznie najlepiej przy pomocy suwaka logarytmicznego odpowiednie φ, φ' i $\varphi + \varphi'$ i nakreślimy na papierze kratkowanym lub milimetrowym w dowolnej skali krzywe (rys. 2) φ i $\varphi + \varphi'$.

Z tej ostatniej odczytamy $(\varphi + \varphi')$ *min.* i odpowiednie $k = k'$. Jeżeli naprężenie dopuszczalne stali na rozciąganie jest $\sigma_{\dot{z}d}$, zaś naprężenie dopuszczalne betonu na ściskanie — σ_{bd}, to

$$K_{\max} = \frac{\sigma_{\dot{z}d}}{15\,\sigma_{bd}} \quad \ldots \quad (18)$$

O ile

$$k' > K_{\max} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

to miarodajne są wartości wykresu odpowiadające wartości $K_{\max}$.

Znalazłszy $(\varphi + \varphi')_{min}$ i odpowiednie φ z wykresu otrzymamy

$$F = \frac{1}{n} \varphi\, bh \,.\, \frac{h}{z} \quad \ldots \quad (20)$$

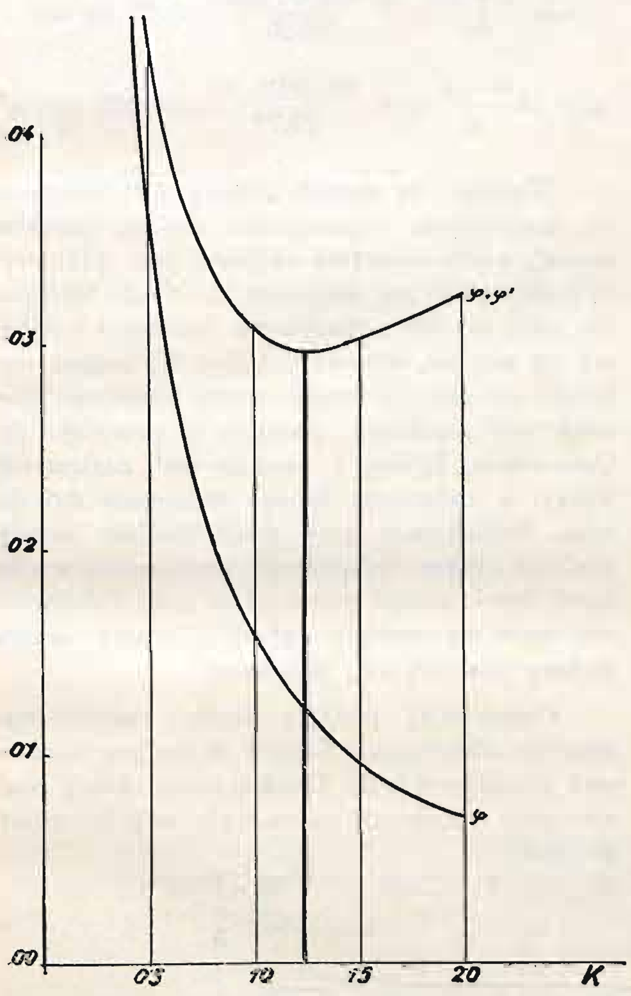
zaś

$$(F + F')_{min} = \frac{1}{n} (\varphi + \varphi')_{min}\, bh \frac{h}{z} \quad . \quad (21)$$

W pobliżu swojego minimum krzywa $\varphi + \varphi'$ zmienia się powoli, natomiast odpowiednia wartość φ zmienia się dość prędko ze zmianą k jak to widać z rys. 2.

Zmieniając zatem nieco wartość φ, nie zmieniamy przez to prawie wcale wartości sumy $\varphi + \varphi'$.

Dla prostoty konstrukcji staramy się nie dawać zbyt wiele drutów. Stąd dostosowanie się powierzchni wkładek do wartości teoretycznych F i F' jest z reguły niemożliwe, a zaokrąglenie w górę dla F i F' prowadzą do pokaźnego nadmiaru żelaza (nieraz 10% i więcej). W danym wypadku jednak zaokrąglenie konstrukcyjne wartości F w górę czy w dół jest nieszkodliwe, gdyż przez to, jak widzieliśmy, suma $F + F'$ nie ulega zmianie. Wobec tego tracimy tylko na zaokragleniu konstrukcyjnem wartości F', a więc tylko raz.



Rys. 2.

Przekonamy się o tem na przykładzie konkretnym

Przykład. Dane:

$b = 1{,}0$ m $\qquad \sigma_b = 55$ kg/cm² $= 550$ t/m²

$d = 0{,}6$ „ $\qquad \sigma_z = 1200$ kg/cm²

$a = 0{,}05$ „ $\qquad M = 39$ tm, $N = 65$ t

Wg. 1) $\qquad e = \dfrac{39}{65} = 0{,}6$ m

$h = 0{,}60 - 0{,}05 = 0{,}55$ m

$z = 0{,}55 - 0{,}05 = 0{,}50$ „

$\dfrac{z}{2} = 0{,}25$ „

Wg. 2) $\qquad c = 0{,}60 + 0{,}25 = 0{,}85$ m

3) $\qquad c' = 0{,}60 - 0{,}25 = 0{,}35$ „

6) $\qquad \alpha = 0{,}05 : 0{,}55 = 0{,}091$

7) $\qquad \mu = 1 - 0{,}091 = 0{,}909$

$$\frac{c}{h} = \frac{85}{55} = 1{,}545$$

$$\frac{c'}{h} = \frac{35}{55} = 0{,}6365$$

Wg. 9) $\qquad V = \dfrac{65}{1{,}0 \,.\, 0{,}55 \,.\, 550} = 0{,}215$

$$V\frac{c'}{h} = 0{,}215 \,.\, 0{,}6365 = 0{,}1369$$

$$V\frac{c}{h} = 0{,}215 \,.\, 1{,}545 = 0{,}3321$$

Tabelarycznie obliczamy

K	0,5	1	1,5	2	równ.
λ	1,5	2	2,5	3	11)
$1 : 3\lambda$	0,222	0,1668	0,1332	0,1111	
β	0,131	0,076	0,042	0,0201	12)
$\beta : 2\lambda$	0,0437	0,019	0,0084	0,0034	
γ	0,1806	0,1559	0,1453	0,1403	14)
φ	0,3612	0,1559	0,0970	0,0702	16)
β'	0,778	0,833	0,867	0,889	13)
$\beta' : 2\lambda$	0,2595	0,2082	0,1734	0,1480	
γ'	0,0726	0,1239	0,1587	0,1841	15)
αk	0,0455	0,091	0,1365	0,182	
$\mu - \alpha k$	0,8635	0,818	0,7725	0,727	
φ'	0,0840	0,1510	0,2053	0,254	17)
$\varphi + \varphi'$	0,4452	0,3069	0,3023	0,3242	

Z rys. 2 czytamy

$$K' = 1{,}25$$

$(\varphi + \varphi')_{min} = 0{,}296 \qquad \varphi = 0{,}118$

$$\sigma_z = 15\,K'\,\sigma_b = 15 \,.\, 1{,}25 \,.\, 55 = 1030 \text{ kg/cm}^2$$

Wg. (20) $\qquad F = \dfrac{0{,}118}{14}\,\dfrac{0{,}55^2}{0{,}50}\,\text{m}^2 = 47{,}6\ \text{cm}^2$

$$(F + F')_{min} = 47{,}6\,\frac{0{,}296}{0{,}118} = 119{,}2\ \text{cm}^2$$

Przyjąwszy $\quad$ 7 ⌀ 30 m/m $F = 49{,}49$ „

otrzymamy $\quad F' = 69{,}71$ cm²

Temu odpowiada 10 ⌀ 30 m/m $= 70{,}70$ „

t. j. nadmiar $\qquad 0{,}99\ \mathrm{cm}^2$

który w porównaniu z teoretycznem minimum 119,2 cm² wynosi zaledwie 0,83%.

Sprawdzenie naprężeń

$$A = c - h = 0{,}85 - 0{,}55 = 0{,}30\ \mathrm{m} = 30\ \mathrm{cm}$$

$$B = \frac{n}{b}(F c + F' c') = \frac{15}{1{,}0}(49{,}49 \,.\, 0{,}85 +$$

$$+ 70{,}70 \,.\, 0{,}35) = 15\,(42 + 24{,}78) =$$

$$= 15 \,.\, 66{,}78 = 1002\ \mathrm{cm}^2$$

$$C = \frac{n}{b}(F c h + F' c' a) = \frac{15}{1{,}0}(42 \,.\, 55 +$$

$$+ 24{,}78 \,.\, 5) = 15\,(2310 + 123{,}9) =$$

$$= 15 \,.\, 2433{,}9 = 36550$$

$$x^3 + 3\,A x^2 + 6\,B x - 6\,C = 0 = f(x)$$

Wartość przybliżona wg. (8)

$$x_0 = \frac{55}{1 + 1{,}25} = \sim 25\ \mathrm{cm}$$

$$f(x_0) = 25^3 + 3{,}30 \,.\, 25^2 + 6 \,.\, 1002 \,.\, 25 -$$

$$- 6 \,.\, 36550 = 15615 + 56260 + 150200 -$$

$$- 219500 = 2600\ \mathrm{cm}^3$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{dx} = f'(x_0) = 3\,x_0^2 +$$

$$+ 6\,A x_0 + 6\,B = -\frac{f(x_0)}{dx}$$

$$f'(x_0) = 3 \,.\, 25^2 + 6 \,.\, 30 \,.\, 25 + 6 \,.\, 1002 =$$

$$= 1875 + 4500 + 6012 = 12387\ \mathrm{cm}^2$$

$$dx = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -\frac{2600}{12387} = -0{,}21$$

Wartość poprawiona

$$x = x_0 + dx = 25 - 0{,}21 = 24{,}79\ \mathrm{cm}$$

$$h = 55{,}00\ \text{,,}$$

$$h - x \qquad 30{,}21\ \text{,,}$$

$$a = 5{,}00\ \text{,,}$$

$$x - a = 19{,}79\ \text{,,}$$

$$F(h - x) = 49{,}49 \,.\, 30{,}21 = 1490\ \mathrm{cm}^3$$

$$F'(x - a) = 70{,}70 \,.\, 19{,}79 = 1400\ \text{,,}$$

$$90$$

$$b x^2 = 100 \,.\, 24{,}79^2 = \qquad 61250$$

$$- 30 \,.\, 90 = \qquad - 2700$$

$$m = b x^2 - 30\,[F(h - x) - F'(x - a)] = 58550$$

$$\sigma_b = \frac{2\,N x}{m} = \frac{2 \,.\, 65000 \,.\, 24{,}97}{58550} = 55\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$\sigma_{\dot z} = 15\,\frac{h - x}{x}\,\sigma_b = \frac{15 \,.\, 30{,}2 \,.\, 15}{24{,}79} = 1002\ \mathrm{kg/cm^2}$$

Widzimy, że sposób podany jest bezpieczny, (naprężenia dopuszczalne nie są przekroczone), a równocześnie ekonomiczny, gdyż wyzyskuje beton na ściskanie ($\sigma_b = \sigma_{bd}$). Obliczenie tabliczki nie przedstawia trudności i odbywa się prędko, krzywe φ i $(\varphi + \varphi')$ można wykreślić od ręki. Wreszcie zaletą opisanego sposobu jest ogólność, prostota i przejrzystość. Oczywiście, łatwiej i prościej jest zastosować wzory, a zwłaszcza tablice stosowane dotychczas. Jednakowoż przy projektowaniu słupów wielkich i silnie obciążonych, tembardziej w większej ilości, pewne zwiększenie pary obliczeniowej może się sowicie opłacić i wtedy sposób podany powyżej jest wskazany.

Oczywiście, podanie tablic uprości niezmiernie obliczenie. Tablice te pragnę opracować wspólnie z p. dr. Chmielowcem, który również przy niniejszem rozważaniu współpracował ze mną.