

# PRZEGLĄD TECHNICZNY

TYGODNIK POŚWIĘCONY SPRAWOM TECHNIKI I PRZEMYSŁU.

## TREŚĆ:

Ramy eliptyczne, nap. Dr. St. Bryła, Profesor Politechniki Lwowskiej.  
 III Kongres Międzynarodowy Mechaniki Technicznej w Sztokholmie, 24. VIII do 29. VIII 1930 (dok.), nap. Dr. M. T. Huber, Profesor Politechniki Warszawskiej.  
 Salon Samochodowy w Paryżu w r. 1930, (dok.), nap. Inż. M. Thugutt.  
 Przegląd pism technicznych.  
 Bibliografia.  
 Sprawozdania i Prace Polskiego Komitetu Energetycznego.

## SOMMAIRE:

Le calcul des cadres élliptiques (à suivre), par. M. St. Bryła, Dr., Professeur à l'École Polytechnique de Lwów.  
 Le III-me Congrès International de la Mécanique Appliquée, à Stockholm, le 24—29 août 1930 (suite et fin), par M. M. T. Huber, Dr., Ing., Professeur à l'École Polytechnique de Varsovie.  
 Le Salon d'Automobile à Paris, 1930 (suite et fin), par M. M. Thugutt, Ingénieur.  
 Revue documentaire.  
 Bibliographie.  
 Bulletin du Comité Polonais de l'Energie.

## Ramy eliptyczne.

Napisał Dr. St. Bryła, Prof. Polit. Lwowskiej.

### 1. Wstęp. Równania ogólne.

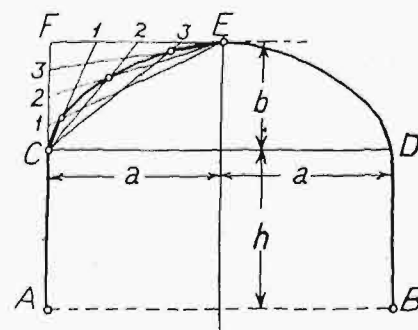
W budownictwie używane są często ramy i łuki eliptyczne, głównie ze względu na ich estetyczny wygląd. Styczna ich na podporze jest normalnie pionowa, co powoduje piękne wyrastanie łuku ze ściany, względnie ze słupa ramy. Pod względem statycznym kształt ten jest raczej niekorzystny; posiada bowiem ku podporom bardzo silną krzywiznę, a nadto wyżej wspomnianą pionową styczną, która powoduje, że linja ciśnienia wychodzi tam z rdzenia przekroju bardzo wybitnie. Wreszcie, ze względu na kształt łuku eliptycznego, obliczenie tegoż, nawet przybliżone, jest bardzo żmudne, a tembardziej dotyczy to eliptycznej ramy. To też problem ten dotychczas badany nie był; wszelkie tablice, dotyczące ram, nie wspominają nawet o ramach eliptycznych; zaś obliczenie ich przeprowadzało się z reguły z osobna dla każdego konkretnego wypadku.

Niniejsza praca ma na celu wyprowadzenie wzorów i podanie tablic, które pozwoliłyby na obliczenie ram (i łuków) eliptycznych. Zgóry muszę serdecznie podziękować memu konstruktorowi p. inż. Dr. Alfonsowi Chmielowcowi, który w opracowanie tego zagadnienia włożył bardzo wiele żmudnej pracy.

Rama eliptyczna składa się w ogólności ze słupów pionowych i rozpory eliptycznej. Cięciwa elipsy, t. j. prosta, łącząca górne końce słupów, może być pozioma lub ukośna. Nieomal zawsze cięciwa wpada w oś główną elipsy; wtedy słup przechodzi w rozporę bez załomu w sposób ciągły, łagodny. Tym też przypadkiem zajmiemy się wyłącznie. Przyjmijmy przytem równą wysokość słupów i stały przekrój ramy, a więc ten sam moment bezwładności słupów, co i rozpory, co jest usprawiedliwione ciągłością linji, czyli brakiem załomów. Podstawowymi wymiarami są (rys. 1): roz-

piętość  $2a$ , wysokość słupów  $h$  i pionowa półos rozpory  $b$ . Wysokość całkowita ramy wynosi więc  $h + b$ .

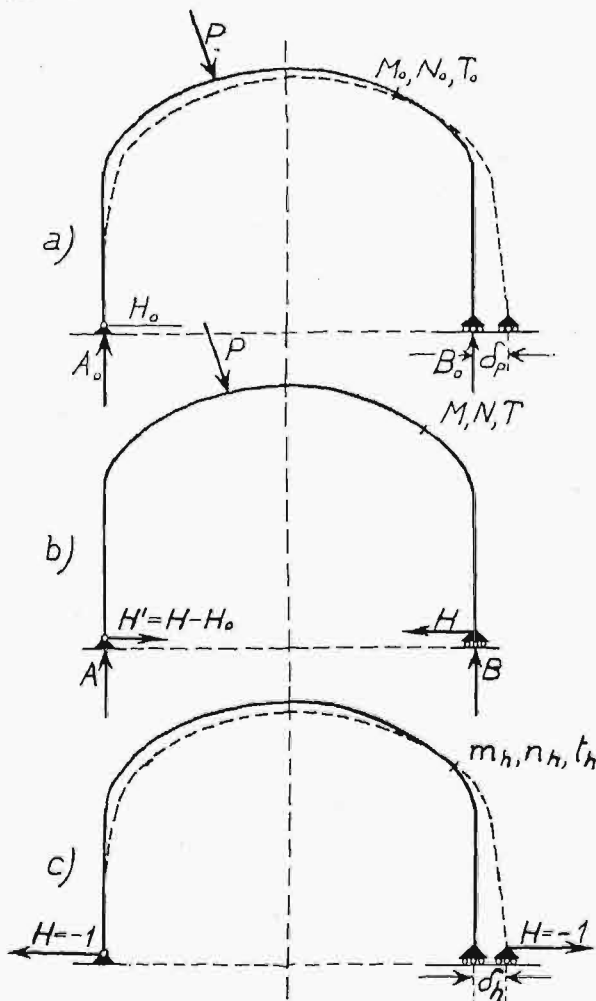
Konstrukcję ćwiartki elipsy najłatwiej przeprowadzić przy pomocy dwu pęków promieni, wychodzących z punktów  $C$  i  $E$  (rys. 1). Styczne  $EF$  i  $CF$  dzielimy wtedy na dowolną ilość równych części; na przecięciu się równomiernych promieni otrzymamy wtedy punkty elipsy.



Rys. 1.

Dolne końce słupów mogą być utwierdzone lub przegubowe. Zajmiemy się tylko ramą przegubową. Rama taka jest jednokrotnie hyperstatyczna. Możemy ją uczynić izostatyczną (statycznie wyznaczalną), zamieniając jeden z dwu przegubów na łożysko ruchome. Będziemy nazywać ustrojem zastępczym (rys. 2) ramę izostatyczną, w której łożysko ruchome poruszać się może poziomo. Przez dowolne obciążenie ustroju zastępczego, łożysko ruchome dozna przesunięcia  $\delta_p$  ( $\delta_p > 0$ , jeżeli rozpiętość wzrośnie). Stan naprężeń w dowolnym przekroju ramy określony jest wówczas wielkościami  $M_0, N_0, T_0$  (rys. 2a). Jeżeli ponadto zaczepimy na łożyskach parę sił równych, lecz przeciwnie skierowanych, działających w sensie zbliżenia łoż-

żysk, a tak wielkich, iż przesunięcie  $\delta_p$  zmniejszy się do zera (rys. 2b), to stan naprężeń w dowolnym przekroju ramy, określony wielkościami  $M, N, T$ , będzie identyczny z tym, jaki panuje przy danym obciążeniu w naszej ramie dwuprzegubowej. Natężenie tej pary sił niech będzie  $H$ . Jeżeli na ustrój zastępczy działać będą dwie siły  $H = -1$  (rys. 2c),



Rys. 2.

to łożyska oddalą się o wymiar  $\delta_h$ , odpowiedni stan naprężeń określą wartości  $m_h, n_h, t_h$ . Stąd wynikają następujące związki:

$$\left. \begin{aligned} \text{moment zginający } M &= M_0 - Hm_h \\ \text{siła osiowa} \quad \quad N &= N_0 - Hn_h \\ \text{siła poprzeczna} \quad T &= T_0 - Ht_h \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\text{parcie poziome} \quad H = \frac{\delta_p}{\delta_h} \quad (2)$$

Jeżeli obciążenie ramy jest ukośne lub poziome, to składowe poziome oddziaływań nie są sobie równe. Wówczas powyższa wartość  $H$  odnosi się do prawego przegubu. Na lewy zaś (por. rys. a i b) działa pozioma siła

$$H' = H - H_0.$$

Wreszcie pionowe składowe oddziaływań

$$A = A_0, \quad B = B_0. \quad (3)$$

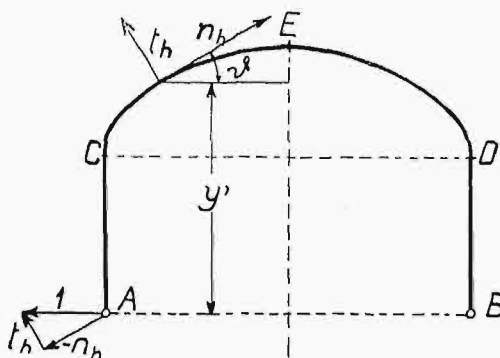
Wielkości  $\delta_h, m_h, n_h$  i  $t_h$  zależą tylko od kształtu ramy,  $\delta_h$  także od jej wymiarów poprzecznych, natomiast  $\delta_p, M_0, N_0$  i  $T_0$ , tudzież  $H_0, A_0, B_0$  zależą ponadto od rodzaju obciążenia. Przyjmijemy,

że: moment zginający jest dodatni, jeżeli powoduje rozciąganie w wewnętrznych, zaś ściskanie w zewnętrznych warstwach, siła osiowa jest dodatnia, jeżeli ścisająca (ujemna zaś, jeżeli rozciągająca), wreszcie siła poprzeczna jest dodatnia, jeżeli lewą część, odciętą pomyślanym przekrojem, stara się przesunąć na zewnątrz.

Będzie tedy (rys. 3):

$$\begin{aligned} m_h &= y', \\ n_h &= -\cos \vartheta, \\ t_h &= \sin \vartheta, \end{aligned}$$

jeżeli  $\vartheta$  jest odchyleniem stycznej danego punktu od poziomu. W kluczu  $E$  zmienia  $\vartheta$  znak, zatem  $t_h$  staje się ujemne dla prawej połowy ramy. Dla słupów jest  $n_h = 0, t_h = \pm 1$  (+ dla lewego, - dla prawego).



Rys. 3.

Równania 1 przybiorą tedy następujący kształt:

$$\left. \begin{aligned} M &= M_0 - Hy' \\ N &= N_0 + H \cos \vartheta \\ T &= T_0 - H \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Z równania elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5)$$

wynika

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (6)$$

$$\operatorname{sec} \vartheta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} = \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{1}{\cos \vartheta} \quad (7)$$

Zatem

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta &= \frac{a^2 y}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \\ \text{zaś} \quad \sin \vartheta &= \frac{-b^2 x}{\sqrt{a^4 y^2 + b^4 x^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wpływ sił osiowych i poprzecznych na odkształcenie ramy jest tak mały w porównaniu z wpływem momentów, że z wystarczającą dokładnością możemy go pominąć. Będzie tedy

$$\begin{aligned} \delta_p &= \frac{1}{EJ} \int_A^B M_0 m_h ds \\ \delta_h &= \frac{1}{EJ} \int_A^B m_h^2 ds. \end{aligned}$$

Obie całki rozciągają się na całą długość obwodu ramy. Każdą z nich możemy rozłożyć na dwie części — część odnoszącą się do słupów AC i BD (tu  $ds = dy$ ), tudzież część odnoszącą się do rozpory. Zatem

$$EJ \delta_p = S + R$$

$$EJ \delta_h = \frac{2}{3} h^3 + 2K, \dots (9)$$

przyczem

$$S = \int_A^C M_0 y' dy' + \int_B^D M_0 y' dy' \dots (10)$$

$$R = \int_C^D M_0 (h + y) ds \dots (11)$$

$$\int_A^C y'^2 dy' + \int_B^D y'^2 dy' = 2 \int_0^h y^2 dy = \frac{2}{3} h^3,$$

zaś

$$2K = \int_C^D (h + y)^2 ds \dots (12)$$

Równanie (2) przejdzie więc w następujące

$$H = \frac{1}{2} \frac{S + R}{\frac{1}{3} h^3 + K} \dots (13)$$

W powyższym równaniu tylko licznik zależy od obciążenia. Jeżeliby słupy miały inny przekrój niż rozpory, to we wzorze powyższym należy części, odnoszące się do słupów, pomnożyć przez stosunek momentu bezwładności rozpory do m. bezwł. słupa.

Jeżeli  $J =$  moment bezwładności rozpory,  $J' =$  moment bezwładności słupów, zaś

$$\alpha = J : J', \text{ to}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\alpha S + R}{\frac{\alpha}{3} h^3 + K}$$

Pozostaje nam tedy do obliczenia wartość  $K$  w zależności od wymiarów ramy  $a, b, h$ , całki  $S$  i  $R$ , tudzież wielkości  $A_0, B_0, H_0, M_0, N_0, T_0$  w zależności jeszcze od rodzaju obciążenia.

**2. Metoda obliczenia.**

Równanie elipsy (5) możemy też napisać

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \dots (14)$$

Element łuku

$$ds = dx \sec \vartheta,$$

czyli z uwagi na (7) i (14):

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}}$$

Dalej mamy

$$(h + y)^2 = h^2 + 2hy + y^2.$$

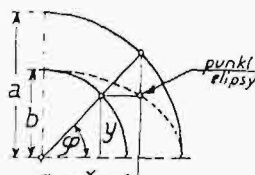
Równanie (12) przybierze więc postać

$$K = h^2 \int_C^D dx \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}} +$$

$$+ 2hb \int_0^a dx \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}\right)} +$$

$$+ b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx.$$

Wprowadzając zmienną  $\varphi$  zamiast  $x$ , otrzymamy (rys. 4):



$$y = b \sin \varphi,$$

$$x = a \cos \varphi,$$

$$dy = b \cos \varphi d\varphi,$$

$$dx = -a \sin \varphi d\varphi,$$

Rys. 4.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Zatem

$$K = h^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} +$$

$$+ 2hb \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi +$$

$$+ b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \sqrt{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \dots (15)$$

Zależnie od wartości  $M_0$ , równanie (11) dla wyrażenia  $R$  prowadzi często do całek jeszcze zawalszych. Wobec tego zrezygnujemy z ich rozwiązania, a wprowadzimy pewne uproszczenia. Najłatwiej byłoby przyjąć  $ds = dx$ , jak to się często przyjmuje w łukach płaskich, parabolicznych lub odcinkowych. Na przykładzie ramy o rozporze półkolistej, dla której całki powyższe dadzą się łatwo rozwiązać, sprawdzimy dopuszczalność takiego założenia.

Dla koła jest mianowicie

$$a = b = r, \quad d\varphi = d\vartheta,$$

więc równanie (15) przybierze kształt

$$K_0 = h^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\vartheta + 2hr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta r d\vartheta + r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta r d\vartheta.$$

Ale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \frac{\pi}{2} = 1,571,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \vartheta d\vartheta = 1,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{4} = 0,7854 \dots (16)$$

Zatem

$$K_0 = r(1,571 h^2 + 2hr + 0,7854 r^2) \dots (17)$$

Zakładając  $ds = dx$ , otrzymamy zamiast  $K_0$

$$K_0' = \int_0^r (h^2 + 2hy + y^2) dx.$$

Ponieważ

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

więc

$$\int_0^r y^2 dx = \int_0^r (r^2 - x^2) dx = r^2 x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r^3 = 0,667 r^3,$$

$$\begin{aligned} \int_0^r y dx &= \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = r^2 \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

czyli

$$K_0' = r(h^2 + 1,571 hr + 0,667 r^2) \quad (18)$$

Porównajmy wzory (17) i (18) dla kilku różnych stosunków  $h = r$ .

Dla  $h = 0$

$$\begin{aligned} K &= 0,7854 r^3 \\ K' &= 0,667 r^3. \end{aligned}$$

Błąd

$$\delta = \frac{K - K'}{K'} = 0,1775 \quad (17,75\%)$$

Dla  $h = r$

$$\begin{aligned} K &= 4,356 r^3 \\ K' &= 3,237 r^3 \\ \delta &= 0,346 \quad (34,6\%) \end{aligned}$$

Dla  $h = 2r$

$$\begin{aligned} K &= 11,075 r^3 \\ K' &= 7,807 r^3 \\ \delta &= 0,42 \quad (42\%) \end{aligned}$$

Widzimy, że błąd z powodu przyjęcia  $ds = dx$  jest bardzo poważny i mocno zależny od  $h$ , zatem trudny do wyeliminowania. Pochodzi on głównie od elementów całki, odpowiadających stromej części rozpory, gdzie różnica pomiędzy  $ds$  a  $dx$ , t. j. pomiędzy elementem łuku, a jego rzutem jest znaczna i dochodzi dla  $\vartheta = 90^\circ$  do  $ds : dx = \infty$ . Dla całek  $R$ , o ile  $M_0$  maleje do zera ku punktom  $C$  i  $D$ , przyjęcie  $ds = dx$  jest dopuszczalne, gdyż błąd największy tego założenia mnożymy przez  $y/M_0 = 0$ . Ogólny błąd całkowania, dochodzący w niektórych wypadkach do 20%, jest jednak mało zmienny z wysokością  $h$  i zależny tylko od  $\alpha$ , a więc da się łatwo, jak zobaczymy, wyeliminować. Tam zaś, gdzie wyrażenie pod całką nie maleje do zera w miarę zbliżania się do słupów, np.  $(y+h)^2$  w równaniu dla  $K$ , rozłożymy całkowanie na dwie części: część stromą, dla której  $\vartheta < 45^\circ$ , i część płaską i przyjmujemy tylko dla części płaskiej  $ds = dx$ , zaś dla części stromej przyjmujemy  $ds = dy$ .

Jeżeli  $F$  jest punktem osi rozpory, w którym nachylenie łuku do poziomu wynosi  $45^\circ$ , to spójrzne tego punktu mierzone względem układu osi głównych elipsy będą  $x_1$  i  $y_1$ . Dla tego punktu jest

$$\frac{dy}{dx} = -1.$$

Czyli z powodu równ. (6):

$$b^2 x_1 = a^2 y_1.$$

Wstawimy  $x_1$  i  $y_1$  w równanie elipsy (5), to będziemy mieli układ równań, z którego wynika:

$$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (19)$$

Otrzymamy tedy zamiast (12)

$$K' = \int_0^{y_1} (h+y)^2 dy + \int_0^{x_1} (h+y)^2 dx \quad (20)$$

Ale

$$\begin{aligned} \int_0^{y_1} (h+y)^2 dy &= \int_0^{y_1} (h^2 + 2hy + y^2) dy = \\ &= h^2 y_1 + h y_1^2 + \frac{1}{3} y_1^3, \quad (21) \end{aligned}$$

zaś

$$\int_0^{x_1} (h+y)^2 dx = h^2 x_1 + 2h \int_0^{x_1} y dx + \int_0^{x_1} y^2 dx \quad (22)$$

Z uwagi na (14) jest:

$$\int_0^{x_1} y dx = b \int_0^{x_1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = ab \int_0^{\frac{x_1}{a}} \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Ponieważ

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} [\arcsin x + x \sqrt{1 - x^2}],$$

zaś

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{a}\right)^2} = \frac{y_1}{b},$$

przeto

$$\int_0^{x_1} y dx = \frac{ab}{2} \left( X_1 + \frac{x_1 y_1}{a b} \right), \quad (23)$$

przyczem

$$\sin X_1 = \frac{x_1}{a} = 1 : \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \quad (24)$$

Znacznie prościej otrzymamy:

$$\int_0^{x_1} y^2 dx = b^2 x_1 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{x_1^2}{a^2} \right) \quad (25)$$

Wstawivszy (23) i (25) w (22), zaś (22) i (21) w (20) i uwzględniając (19), otrzymamy po uporządkowaniu względem  $h$ :

$$K' = (\beta h^2 + \gamma h b + \delta a^2) a, \quad (26)$$

przyczem

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \\ \gamma &= X_1 + \alpha \\ \delta &= \frac{1}{3} \frac{2 + \alpha^2}{\beta} a^2 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

TABELA 1.

$\alpha = \frac{b}{a}$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varphi$
0	1	1,571	0	1
0,1	1,005	1,571	0,0067	1,0113
2	1,019	1,576	0,0267	1,0226
3	1,042	1,583	0,0601	1,0339
4	1,077	1,593	0,1071	1,0452
5	1,119	1,608	0,1679	1,0565
6	1,166	1,630	0,2433	1,0678
7	1,220	1,661	0,3333	1,0791
8	1,280	1,699	0,440	1,0904
9	1,345	1,739	0,564	1,1017
1,0	1,414	1,785	0,707	1,113
1	1,487	1,839	0,872	1,115
2	1,56	1,897	1,060	1,117
3	1,64	1,955	1,270	1,119
4	1,72	2,020	1,503	1,121
5	1,801	2,089	1,767	1,123
6	1,837	2,159	2,060	1,125
7	1,972	2,233	2,384	1,127
8	2,058	2,308	2,744	1,129
9	2,116	2,385	3,141	1,131
2,0	2,2375	2,463	3,578	1,133

Tabela 1 podaje wartości  $\beta, \gamma$  i  $\delta$  dla różnych

$$\alpha = \frac{b}{a} \dots \dots \dots (28)$$

Dla rozpory półkolistej,  $a = b = r$ , czyli  $\alpha = 1$ . Według tabeli 1, jest  $\beta = 1,414, \gamma = 1,785, \delta = 0,707$ , więc według (26) jest

$$K_0' = r(1,414h' + 1,785hr + 0,707r^2)$$

Dla  $h = 0$

$$K_0' = 0,707r^3$$

Błąd

$$\delta = \frac{K - K'}{K'} = \frac{0,785 - 0,707}{0,707} = 0,111 \quad (11,1\%)$$

Dla  $h = r$

$$K_0' = r^3(1,414 + 1,785 + 0,707) = 3,906r^3$$

$$\delta = \frac{4,356 - 3,906}{3,906} = 0,1156 \quad (11,56\%)$$

Dla  $h = 2r$

$$K_0' = r^3(1,414 \cdot 2^2 + 1,785 \cdot 2 + 0,707) = 9,929r^3$$

$$\delta = \frac{11,075 - 9,929}{9,929} = 0,1151 \quad (11,51\%)$$

Błąd procentowy jest, jak widzimy, prawie niezależny od wartości  $h$  i wynosi około 11–11,5%, średnio 11,3%. Dla rozpory prostej, czyli dla  $\alpha = 0$  jest  $\gamma = \delta = 0, \beta = 1$  (por. tab. 1), więc

$$K_{II}' = ah^2$$

Tę samą wartość otrzymamy z równania (12), podstawiając w niem  $y = 0, ds = dx$  i całkując od 0 do  $2a$ , więc  $2K_{II} = 2ah^2$  czyli  $K_{II} = K_{II}' = ah^2$ . Zatem błąd wyrażenia  $K'$  wynosi tu 0. Mamy tedy dla  $\alpha = 1 \delta = 0,113$ , zaś dla  $\alpha = 0 \delta = 0$ . Skoro przyjmiemy wogóle

$$\delta = 0,113\alpha \dots \dots \dots (29)$$

to sprawdzą się oba skrajne przypadki zupełnie dokładnie. Dla pośrednich wartości  $\alpha$  równanie (29) sprawdzi się tylko w przybliżeniu, co jednak wystarczy. Jeżeli bowiem poprawka jest mniejsza niż 10%, a błąd poprawki wynosi nawet 30%, to błąd wzoru jest mniejszy niż 3%. Błąd poprawki mało wpływa zatem na błąd rezultatu.

Jeżeli nazwiemy

$$\varphi = 1 + \delta = 1 + 0,113\alpha \dots \dots \dots (30)$$

to

$$K = \varphi K' \dots \dots \dots (31)$$

Tab. 1 podaje również wartości  $\varphi$ .

Największa odchyłka od równania (29) znajduje się w pobliżu wartości  $\alpha = 0,5$ , która jest najbardziej oddalona od wartości skrajnych  $\alpha = 0$  i  $\alpha = 1$ .

Dla  $\alpha = 0,5$  jest według tab. 1:

$$\beta = 1,119, B = 0,803, \delta = 0,1679, \varphi = 1,0565$$

Dla  $a = 16 \text{ m} = 2b$  i  $h = 0$ :

$$K' = 0,1679 \cdot 16^3 = 688 \text{ m}^3, \varphi K' = 726,3 \text{ m}^3$$

Dla  $a = 2b = 2h = 16 \text{ m}$ :

$$K' = 1,119 \cdot 16 \cdot 8^2 + 0,803 \cdot 16^2 \cdot 8 + 0,1679 \cdot 16^3 = 3477 \text{ m}^3, \varphi K' = 3673 \text{ m}^3$$

Dla  $a = h = 2b = 16 \text{ m}$ :

$$K' = 1,119 \cdot 16^3 + 0,803 \cdot 16^3 + 0,1679 \cdot 16^3 = 8555, \varphi K' = 9039 \text{ m}^3$$

Dla  $a = 2b = 16 \text{ m}, h = 32 \text{ m}$

$$K' = 1,119 \cdot 16 \cdot 32^2 + 0,803 \cdot 32 \cdot 16^2 + 0,1679 \cdot 16^3 = 25616, \varphi K' = 27065 \text{ m}^3$$

Aby się przekonać o słuszności metody przyjętej, sprawdzono powyższe wartości sposobem dokładnym. Dzieliąc pole ćwiartki elipsy o wymiarach  $a = 16 \text{ m}, b = 8 \text{ m}$  na 16 pasków o szerokości 1 m, możemy na podstawie odczytanych z rysunku wartości  $ds$ , y obliczyć sumy  $\sum \Delta s, \sum y \Delta s$  i  $\sum y^2 \Delta s$ , które bardzo mało się różnią od odpowiednich całek. Ostatni pasek podzielono na dwa, aby zmniejszyć

TABELA 2.

L. p.	1	2	3	4	5	6	7
	$\Delta s$	$y$	$y ds$	$y^2 ds$	$2x$	$2x \Delta s$	$(2x)^2 \Delta s$
1	1	8	8	64	1	1	1
2	1	7,95	7,95	63,3	3	3	9
3	1	7,86	7,86	63	5	5	25
4	1,03	7,79	8,10	62,3	7	7,3	51
5	1,03	7,62	8,00	60,8	9	9,45	85
6	1,04	7,47	7,85	58,8	11	11,5	127
7	1,04	7,26	7,65	55,7	13	13,7	178
8	1,04	7,01	7,45	52,2	15	15,9	238,5
9	1,05	6,75	7,24	48,8	17	18,2	256
10	1,06	6,41	6,94	44,5	19	20,5	390
11	1,06	6,05	6,60	40	21	22,9	481
12	1,07	5,56	6,12	34,2	23	25,3	582,5
13	1,17	5,00	6,0	30	25	30,0	748
14	1,27	4,29	5,61	24,1	27	35,4	955
15	1,47	3,38	5,07	17,1	29	43,5	1262
16	1,07	2,30	2,53	5,84	30,6	33,7	1035
17	1,97	1,35	2,7	3,64	31,6	63,8	2000
$\Sigma =$	19,37		111,67	728,3		359,8	8424

elementy  $\Delta s$ , które zbyt odbiegały od prostej. Z tabeli 2 czytamy:

$$\Sigma \Delta s = 19,37 \text{ m}$$

$$\Sigma y \Delta s = 111,67 \text{ m}$$

$$\Sigma y^2 \Delta s = 728,3 \text{ m.}$$

Zatem

$$\Sigma (h+y)^2 \Delta s = h^2 \Sigma \Delta s + 2h \Sigma y \Delta s + \Sigma y^2 \Delta s,$$

czyli

$$K = 19,37 h^2 + 2 \cdot 111,67 h + 728,3.$$

Dla  $h=0$ ,  $K=728,3$ , co w porównaniu z obliczonym powyżej  $\varphi K' = 726,3$  daje błąd 0,275%.

$$\text{Dla } h=8 \text{ m, } K=3753, \quad \varphi K' = 3673,$$

błąd wyrażenia  $\varphi K'$  wynosi 2,16%.

$$\text{Dla } h=16 \text{ m } K=9264, \quad \varphi K' = 9029,$$

błąd  $< 2,5\%$ .

$$\text{Dla } h=32 \text{ m } K=27693, \quad \varphi K' = 27065,$$

błąd 2,3%.

Błędy są tedy tak małe ( $< 2,5\%$ ), że wzory powyżej wyprowadzone możemy uważać za wystarczająco dokładne, a metodę za usprawiedliwioną.

Wzór (30) można zatem w przybliżeniu przyjmować dla wartości  $0 < \alpha < 1$ . Jego ekstrapolacja prowadzi do błędów poważniejszych. Celem ustalenia wzoru na  $\delta$  i  $\varphi$  dla  $\alpha > 1$ , znaleziono sposobem powyżej opisanym wartości  $\Sigma \Delta s$ ,  $\Sigma y \Delta s$  i  $\Sigma y^2 \Delta s$  dla  $b=16$ ,  $a=8$ , czyli dla  $\alpha=2$ . Posługując się tym samym rysunkiem co poprzednio (dla  $\alpha=\frac{1}{2}$ ,  $a=16$ ,  $b=8$ ), zamieniono  $b$  na  $a$ ,  $x$  na  $y$ . Aby uniknąć liczb dziesiętnych, wypisano w tab. 2 wartości  $2x$  zamiast  $x$ . Z tabeli tej rubryki 1, (6 i 7) wynika:

$$\Sigma \Delta s = 19,37 \text{ m,}$$

$$\Sigma y \Delta s = 359,8 : 2 = 180 \text{ m}^2,$$

$$\Sigma y^2 \Delta s = 8424 : 4 = 2106 \text{ m}^3.$$

Zatem

$$K = 19,37 h^2 + 2 \cdot 180 h + 2106.$$

W tabeli 1 dla  $x=2$  znaleziono

$$\beta = 2,2375, \quad \gamma = 2,463, \quad \delta = 3,578,$$

więc

$$K' = 8(2,2375 h^2 + 16 \cdot 2,463 h + 8^2 \cdot 3,578) = \\ = 17,9 h^2 + 315,9 h + 1830.$$

$$\text{Dla } h=0 \quad K=2106, \quad K'=1830 \text{ m}^3$$

$$K - K' = 276 = 0,15 K' \text{ (błąd } 15\%).$$

$$\text{Dla } h=8 \text{ m } K=1240+2880+2106=6226 \text{ m}^3$$

$$K'=1143+2520+1830=5493 \text{ m}^3$$

$$K - K' = 733 = 0,134 K' \text{ (błąd } 13,4\%).$$

$$\text{Dla } h=16 \text{ m } K=4955+5760+2106=12821 \text{ m}^3$$

$$K'=4572+5040+1830=11442 \text{ m}^3$$

$$K - K' = 1379 = 0,12 K' \text{ (błąd } 12\%).$$

Możemy przyjąć średnio dla  $\alpha=2$

$$\delta_2 = \frac{K - K'}{K'} = 0,133.$$

Dla  $\alpha=1$  mieliśmy  $\delta_1 = 0,113$ .

Interpolując linjowo otrzymany dla  $1 < \alpha < 2$

$$\delta = \delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)(\alpha - 1) =$$

$$= 0,113 + 0,02(\alpha - 1),$$

zaś

$$\varphi = 1 + \delta = 1,113 + 0,02(\alpha - 1) \dots (32)$$

Tabela 1 podaje wartości  $\varphi$  obliczone według wzoru (30) dla  $0 < \alpha < 1$ , zaś wedle wzoru (32) dla  $1 < \alpha < 2$ .

### Przykład 1.

Rozpiętość

$$2a = 18 \text{ m, } a = 9 \text{ m.}$$

Wysokość

$$h + b = 20 \text{ m, } b = 6 \text{ m.}$$

$$h = 14 \text{ m, } \alpha = 6 : 9 = 0,667$$

$$h^2 = 196,$$

$$ha = 126,$$

$$a^2 = 81,$$

Według tabeli 1.

	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\varphi$
$\alpha = 0,6$	1,166	1,630	0,2433	1,0678
0,7	1,220	1,661	0,3333	1,0791
$\Delta \alpha =$	0,054	0,031	0,09	0,0113
$0,667 \Delta \alpha$	0,036	21	0,06	0,0075
$\alpha = 0,6667$	1,202	1,651	0,3033	1,0753

Wedł. (26)

$$K' = (196 \cdot 1,202 + 126 \cdot 1,651 + 81 \cdot 0,3033) \alpha = \\ = (236 + 208 + 24,4) \alpha = 468,4 \cdot 9 = 4215 \text{ m}^3.$$

$$K = 1,0753 \cdot 4215 = 4530 \text{ m}^3$$

$$\frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} 14^3 = 915 \text{ „}$$

$$\frac{1}{3} h^3 + K = 5445 \text{ m}^3$$

$$\text{Wedł. (13)} \quad H = \frac{1}{2} \frac{S + R}{5445} = \frac{S + R}{10890 \text{ m}^3}.$$

(d. c. n.)