

1105/76
LEON CHWISTEK

GRANICE NAUKI

ZARYS LOGIKI
I METODOLOGJI NAUK ŚCISŁYCH

K S I A Ǻ Ż N I C A - A T L A S

INSTYTUT WYDAWNICZY KSIĄŻNICA-ATLAS

Lwów, ul. Czarnieckiego 12 — Warszawa, ul. Nowy Świat 59

poleca dzieła:

W. NATANSON

WIDNOKRĄG NAUKI

Str. 272 — Zł 5.—

- Treść: I. W Aleksandrji.
II. De rerum natura.
III. Michał Faraday.
IV. James Clerk Maxwell.
V. Henry Cavendish.
VI. Szkice z przeszłości Cambridge.
VII. Fragmenty.

Dzieło prof. W. Natansona jest zbiorem myśli o granicach i istocie nauki, o ludzkiej możności poznawania, pojmowania i opanowywania natury, o wartości i celu badań umiędzynarodowionych, o znaczeniu i właściwej treści wiedzy i t. p. Myśli te rzuca autor na tło rozważań historycznych, odnoszących się do różnych epok rozwoju nauki, wiążąc je w ten sposób ze sobą.

F. ZNANIECKI

LUDZIE TERAŹNIEJSI A CYWILIZACJA PRZYSZŁOŚCI

Str. 380 — Zł 6'80

Treść: Przedmowa.

Część pierwsza. Możliwość nowej cywilizacji.

- I. Cywilizacja narodowa a cywilizacja wszechludzka.
- II. Uduchowienie cywilizacji.
- III. Społeczne zharmonizowanie cywilizacji.
- IV. Upłynnienie cywilizacji.
- V. Sprawa urzeczywistnienia powyższych możliwości.

Część druga. Ludzie terażniejsi.

- I. Osobowość społeczna.
 - II. Ludzie dobrze wychowani.
 - III. Ludzie pracy.
 - IV. Ludzie zabawy.
 - V. Ludzie-zboczeńcy.
- Zakończenie: Możliwość nowych ludzi.

LEON CHWISTEK

GRANICE NAUKI

ZARYS LOGIKI I METODOLOGJI NAUK ŚCISŁYCH

*MÓWIA, ŻE CUDA MINĘŁY; ALE MAMY
OD TEGO NASZYCH FILOZOFÓW, ŻEBY
RZECZY NAJPOSPOLITSZE I NAJZWYKLEJ-
SZE UCZYNIĆ NADNATURALNEMI I BEZ-
PRZYCZYNOWEMI.*

(ODWRÓCONE POWIEDZENIE SZEKSPIRA)



K S I A ˆ Ż N I C A - A T L A S

S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

F5b

F5c

M1b

305153

II

K76/1105
29.1. 60,-



5,00

X-92180
305153 II

2460

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

A V

Wstęp.

1. Przeżywamy okres bezprzykładnego rozrostu irracjonalizmu. Ścisłe myślenie oparte na zasadzie konsekwencji jest koźłem ofiarnym, na którym skrupiły się wszystkie klęski naszych czasów. Na karb racjonalizmu, opartego na postulatcie ścisłego myślenia, zaliczono wojnę światową i wszystkie orgje rozpanoszonego kapitalizmu. Ścisłe myślenie miało być przyczyną wyschnięcia świętego zapалу i zblazowania uczuciowego naszej epoki. Ono rzekomo stało się źródłem przerostu kultury materialnej połączonego z nieprawdopodobnem skurczeniem się i wyjąłowieniem kultury duchowej. Wołanie o nową logikę, o nowe prawa myślenia, bardziej odpowiadające potrzebom życia duchowego, stało się konikiem, na którym wyjechała w świat cała plejada opskurnych i skłamanych doktryn, począwszy od wznowionej dialektyki Hegla, a skończywszy na pragmatyzmie, uniwersalizmie i husserlizmie.

Doktryny te powstały w wielu wypadkach z pospolitego nieuctwa, a niekiedy podyktowane były zgoła nieuczciwemi tendencjami. Właściwem ich źródłem były od wieków tragiczne załamania się nauki i rozpacz zrodzona z poczucia własnej bezsilności.

Historja kultury duchowej ludzkości da się sprowadzić do walki między wiarą w twórczą potęgę ścisłego myślenia a zwątpieniem i bezwładnem ukorzeniem się przed nieodpowiedzialnym obłędem fantastów, którzy nigdy nie próbowali rozwiązać jakiegokolwiek zagadnienia konkretnego i zrezygnowali z rozkoszy przezwyciężenia rzeczywistych trudności. Walka ta prowadzona była od wieków z zmiennem szczęściem, a obecnie weszliśmy w okres nieprawdopodobnego poniżenia nauki i wyraźnej przewagi hałaśliwej zgrai nadętych chwalców irracjonalnego nonsensu, prowadzących ludzkość naogół bezwiednie, nieraz jednak całkiem świadomie, do jawnej zbrodni i gwałtu.

2. Zastanawiając się nad temi smutnemi sprawami, pisze prof. Władysław Natanson, co następuje:

Czy nie powinniśmy za złe poczytać wszechludzkiej nauce, że nieobliczalnej potęgi narzędzia podała narodom, które nie dorosły do nich moralnie? Opanowaliśmy siły natury, ale samych siebie nie opanowaliśmy. To też wynosi się krótkowidzący egoizm i rodzi, jak zwykle, klęski: cofa nas, wstecz zawraca. Milczeniem, pozorną zgodą nauka szkodzi swej wysokiej godności. Narodom nauka ma wiele do powiedzenia; kiedy przemówi? Kiedy znajdzie dość natchnienia i mocy, ażeby przestrzec, powstrzymać, przekonać?

Myślę, że niepokojących tych pytań nie można żadną miarą zostawić bez odpowiedzi. Musimy za wszelką cenę dotrzeć do źródła zła, odsłonić je w całej nagości i wykorzeń je radykalnie.

Zobaczymy, że sprawa jest o wiele prostsza, niżby się wydawać mogło napozór. Na dnie czai się nic innego, jak tylko trwoga i popolity bezwład.

3. Pomimo wysiłków odwiecznych przesąd o metafizycznych podstawach nauki nie został do dzisiaj przewyciężony.

Radykalny krytycyzm, który laicy przypisują wielkim uczonym, nie sięga dostatecznie głęboko. Kiedy komedjopisarz Bruno Winawer szydził z filozofów, przeciwstawiając im przedstawicieli nauk ścisłych, jako twórców nowych form życia na ziemi, to nie liczył się z tym faktem, że właśnie ci wielcy uczeni kórzą się przed filozofami i pragną za wszelką cenę pozować na mędrców odkrywających kamień filozoficzny.

Tak było, dopóki nie przeczytał popularnych wykładów twórcy teorii falowej Schrödingera. Przeczytał je i uląkł się morza nieodpowiedzialnych frazesów i tępych alegoryj, zestawiających współczesną fizykę z t. zw. nową rzeczowością w sztuce, a elektryony z poszczególnymi jednostkami ludzkiemi. Uląkł się jeszcze bardziej, kiedy zapewniłem go, że fakt ten jest powszechny, a podobnych wypadków można cytować na funty.

4. Jest faktem, że przyrodnicy o typie skrajnie krytycznym ograniczają się zbyt często do badań szczegółowych w swoim zakresie, pozostawiając na boku walkę o racjonalistyczny pogląd na świat. Właściwy wpływ wywierają przyrodnicy folgujący metafizycznym przesądom i poszukujący popularności w imię doktryn wychodzących daleko poza zakres zdrowego rozsądku i ścisłego myślenia.

Doszło do tego, że mówić dzisiaj o przeciwstawieniu przedstawiciela czystej nauki metafizykowi jest naprawdę trudno, bo w pismach słynnych matematyków, fizyków, astronomów i biologów znajdujemy korne poddanie się autorytetowi opłakanych metafizycznych elukubracji. Zacytuję następujące przykłady:

Słynny matematyk niemiecki Hermann Weyl poprzedził swoje dzieło p. t. *Raum, Zeit, Materie*, w którym starał się ująć w system teorię Einsteina, filozoficznym wstępem, godnym zawodowego metafizyka pośledniego gatunku. Staje on na stanowisku, że filozofja oscylująca od systemu do systemu jest smutną koniecznością, z której nie możemy zrezygnować, o ile: *poznanie nie ma zamienić się w chaos pozbawiony sensu*. Innymi słowami, musimy budować na trzęsawisku w myśl tragicznego hasła: *Alle Anfänge sind dunkel*.

W całej koncepcji podstaw nauki podanej przez Weyla nie znajdujemy śladu skromności i bezpretensjonalności teoretycznej, godnej przedstawiciela nauk ścisłych. Niema śladu tej wielkiej prawdy, że punktem wyjścia budowy naszego poglądu na świat nie powinny być męty metafizyczne, ale prawdy proste i jasne, oparte na doświadczeniu i ścisłym rozumowaniu. Weyl pomija zupełnie ten fakt, że teorie fizykalne są czystymi abstrakcjami, których nie możemy nawet uważać za obraz rzeczywistości, i że rola ich sprowadza się do tego, że umożliwiają nam systematyczną klasyfikację zjawisk i celowe badania nad wykrywaniem zjawisk nieznanych. Przechodzi do porządku nad tą okolicznością, że filozofja, o ile wogóle ma być brana poważnie, musi ograniczyć się do krytycznej analizy stosunku teoryj naukowych do doświadczenia, nie może natomiast żadną miarą stanowić podstawy tych teoryj. Zamiast szukać podstaw nauki w ograniczeniu niewczesnych ambicij, woli zanurzyć ją w chaosie paradoksów, byle tylko nie zrezygnować z pięknie brzmiącego, efektownego frazesu.

Metafizyczny zamęt pojęć zaznacza się nawet u takich przedstawicieli fizyki teoretycznej, którzy budują swoje teorie całkiem świadomie z elementów fikcyjnych, nic wspólnego z rzeczywistością nie mających. Wszyscy oni zdają się tęsknić mniej lub więcej świadomie za rzeczywistością absolutną i podstawiają swoje fikcje na jej miejsce. Pomimo wyraźnych zastrzeżeń sformułowanych na wstępie, mówią ostatecznie o indeterminizmie świata mikrofizycznego tak, jakgdyby to była jakaś rzeczywi-

stość wyjęta z pod praw fizyki. Operują przytem bardzo samowolnie pojęciem sensu. Powołując się na ten fakt, że im mniejszy jest błąd w pomiarze położenia elektronu, tem większy jest błąd w pomiarze jego prędkości i naodwrot, stwierdzają, że w tych warunkach pojęcie położenia i prędkości elektronu nie posiada jasno określonego sensu. Często jednak zapominają dodać, że z tego punktu widzenia także pojęcie samego elektronu i wogóle świata mikrofizycznego nie posiada określonego sensu, jeśli więc nie mówimy o prawach ruchu poszczególnych elektronów, to tylko dlatego, że nie chcemy zapuszczać się zbyt daleko w elektronową fikcję.

Podobne nieporozumienia występują u astronomów. Kiedy piszą o rozszerzaniu się wszechświata, twierdząc zarazem, że wszechświat jest skończony, to odnoszą się do tych spraw zupełnie w ten sposób, jakgdyby chodziło o rozdymanie gumowego balonu. Kiedy słynny Eddington stwierdza, że teoria ta zawiera elementy tak paradoksalne, że gdyby on sam w nią nie wierzył, wiara taka budziłaby w nim oburzenie, to w tem wszystkiem tkwi na dnie zupełnie prymitywny realizm, w którym trudno dopatrzeć się cienia tych zastrzeżeń poznawczych, na jakich opiera się dzisiejsza nauka. Jeśli chodzi naprawdę o pomocnicze konstrukcje, to przecież niema podstawy do oburzenia, bo jest zupełnie wszystko jedno, czy są takie, czy inne, jeśli zaś jest naprawdę podstawa do oburzenia, to może przecież rodzi się ona z niewczesnej pretensji do poznania istoty wszechświata na obraz i podobieństwo otaczających nas przedmiotów.

Nie dość na tem. Nie bacząc na to, że wiadomości ich o t. zw. wszechświecie są niesłychanie fragmentaryczne, radziłyby astronomowie rozstrzygać takie sprawy, jak np. czy życie znajduje się gdzieś poza naszym globem, i to w sensie negatywnym. Radziłyby jednym słowem za wszelką cenę powrócić do średnio-wiecznego geocentryzmu.

Kiedy myśli się o tych rzeczach, trudno nie zapytać, w imię jakiej zasady mamy lekceważyć filozofów i w imię jakiej zasady mamy oczekiwać od nauki tego ożywczego słowa, o którym pisze profesor Natanson.

Jeśli chodzi o biologów, to trzeba wyznać, że ciąży na nich przynębiający ogrom antropomorfizmów i nieodpowiedzialnych antropologicznych dywagacyj, stanowiących obfity żer dla filozoficznego dyletantyzmu.

Słynny Driesch jest zdania, że biologja nie może obejść się bez pojęcia entelechji, której wewnętrznym korelatem jest dusza. Założenie to prowadzi go do przyjęcia jakiegoś ostatecznego dynamiczno-duchowego elementu, który może znajdować się zarówno w stanie bytu jednostkowego, jak i wielorakiego. Nie potrzeba dodawać, że mamy tu do czynienia z irracjonalizmem, który jest jawnem zaprzeczeniem tego, co na szczęście nazywa się dziś jeszcze naukowem myśleniem.

Równocześnie behaviouryści doprowadzają do absurdu tę wielką prawdę stwierdzoną przez Macha, że cudze stany psychiczne nie mogą być przedmiotem bezpośredniego poznania. Behaviouryści postępują tak, jakgdyby pomiędzy zjawiskami życia a zjawiskami nieorganicznymi nie było żadnej różnicy. Nie liczą się z tym faktem, że tak zwane współczucie lub jego brak są w zasadzie reakcjami na otaczające nas zjawiska równie godnymi uwagi jak widzenie lub niewidzenie. Nieliczenie się z temi reakcjami doprowadza do kolosalnych nieporozumień, które nie mogą przyczynić się do podniesienia autorytetu ścisłej nauki.

Zwróćmy teraz uwagę na polemikę Maxa Schelera, metafizyka z pod znaku Husserla, z pomysłami holenderskiego anatoma Bolka. Według Bolka człowiek jest zdegenerowaną małpą, niezdolną do normalnego rozwoju, jest zatem wyraźną negacją życia i impasem przyrody. Max Scheler polemizuje z tą teorią w imię siły ducha, w imię kultury i sztuki, i czuje się oczywiście najzupełniej w swoim żywiole, zdając sobie sprawę, że cała fachowa wiedza jego przeciwnika nie uczyniła go bynajmniej groźnym. Na terenie takich ogólników można przecież przelewać z pustego w próżne do nieskończoności.

5. Pragnę wkońcu zwrócić uwagę na niefortunne rozważania znakomitego neurologa profesora Freuda na temat miłości bliźniego. Nie należę bynajmniej do przeciwników Freuda i przyznaję chętnie, że jest on jednym z największych filozofów współczesnych. Niemniej muszę stwierdzić, że polemika z zasadą miłości bliźniego, zamieszczona w książce Freuda: *Das Unbehagen in der Kultur*, prowadzona jest przy pomocy argumentów prymitywnych, opartych na ciasnym, ultraburżuazyjnym poglądzie na świat. Mamy tutaj klasyczny przykład zgubnych skutków braku logicznego treningu. Zdrowy rozsądek przyjmuje się razem z wszystkimi przesądami tkwiącymi w odnośnej klasie społecz-

nej, nie bacząc na to, że jego granice są o wiele ciaśniejsze, niżby się wydawało napozór.

Zasada, że jest bardziej pożądane mieć samemu więcej, niż dać drugiemu, nie jest bynajmniej tak oczywista, jakby się wydawało. Może być, że skrajny altruizm, polegający na rezygnacji z samego siebie na rzecz innych, jest zamaskowaną formą egoizmu, ale jest to egoizm tak zasadniczo różny od egoizmu trywialnego, że sprowadzenie obydwu do tego samego instynktu musi być uważane za jawne zabrnienie w metafizykę godną Hegla lub Bergsona.

Kiedy porównamy te dywagacje z dziełem jakiegokolwiek filozofa, opartego na tradycji pozytywizmu, np. z *Traité de la Morale* prof. Dupréela, to musimy stwierdzić, że jasna myśl i radykalny krytycyzm jest w tym wypadku właśnie po stronie filozofii zawodowej. Musimy stwierdzić, że wielka tradycja nauk ścisłych zachwiała się za naszych czasów i że granica pomiędzy temi naukami a irracjonalnym obłędem stała się trudna do ustalenia.

Jest pewne, że istnieją różne stopnie nonsensu i że wyfiltrowanie z otaczającego nas chaosu tego, co naprawdę zasługiwaćby mogło na nazwę czystej nauki, jest naprawdę trudne. Ale z tego nie wynika bynajmniej, żebyśmy mieli iść na lep gołosłownych frazesów dlatego tylko, że gwarantują nam rzekomo jednolity pogląd na świat. Trzeba powiedzieć wyraźnie, że metafizyka nie jest i być nie może poglądem na rzeczywistość, opiera się bowiem na zasadniczej pomyłce tkwiącej u jej korzenia, a mianowicie na założeniu, że istnieje jakieś poznanie inne prócz doświadczenia i ścisłego rozumowania.

Tęsknota za takim poznanem występowała w ciągu historii zawsze wtedy, kiedy wielkie ambicje racjonalistycznej nauki rozbiły się o rafę paradoksów. W rzeczywistości paradoksy te świadczyły tylko o tem, że jesteśmy na drodze do nowych odkryć i do nowego głębszego formułowania pytań naukowych. Ale ociężałość i bezwład tkwiący na dnie naszego umysłu nie dopuszczały entuzjazmu i powtórnego twórczego wysiłku, podsuwając nam łatwą furtkę irracjonalnego wykrętu.

Z drugiej strony ci przedstawiciele nauki, którzy nigdy nie stracili w nią wiary, troszczyli się zaiste zbyt mało o niepokojące zjawiska otaczającego ich życia. Zasklepiali się w ciasnem kole badań szczegółowych, pełni trwogi i niepokoju. Ile razy

nauka podniosła dumnie głowę i zabrała się do dyktowania praw swoich ludzkości, tyle razy natrafiła na sprzeczność wewnętrzną i musiała wycofywać się z terenu walki, złamana i zawstydzona.

Przełomów takich było bardzo wiele. Wymienię tylko: odkrycie niewspółmierności boku kwadratu i jego przekątnej, paradoksy Zenona z Elei, system kopernikański, teorię grawitacji, krytykę czystego rozumu, geometrię nieeuklidesową, teorię Darwina, paradoksy teorii mnogości, doświadczenie Michelsona i opartą na niem teorię Einsteina, odkrycie radu i odkrycie kwantowych właściwości promieniowania. — Za każdym razem nauka cofała się przerażona swoim własnym dziełem i zamykała się w sobie, zostawiając losy kultury ludzkiej na łasce indywiduów niezdolnych do odczucia tajemniczej grozy dokonywujących się zdarzeń i właśnie dlatego dostatecznie uzbrojonych do walki o władzę nad umysłami. W takim właśnie momencie wypłynął na powierzchnię Platon, takiemu momentowi zawdzięczał swój niebywały sukces Hegel, a potem Nietzsche i Bergson i ich pomniejsi następcy. Przynosili oni zawiedzionej ludzkości narkotyk wizji i marzenia, podstawiając go na miejsce ścisłej myśli, a zarazem przysposobiali społeczeństwo do poddania się autorytetowi duchów wybranych i rezygnacji z radykalnej krytyki panujących stosunków. Nie przeczę, że pomysły ich były nieraz naprawdę godne podziwu, niemniej nie mogą cofnąć się przed bezwzględ-
nem potępieniem ich działalności.

6. Racjonalny krytycyzm zrodził się w Grecji, przyjmując zrazu formę zbyt radykalną, prowadzącą do bezradnego sceptycyzmu. Grecy nie posiadali sztuki rezygnowania z zbyt wielkich ambicji poznawczych i dlatego poddawali się zbyt łatwo nastrojowi depresji w chwilach niepowodzenia. Wiadomo, że paradoksy Zenona z Elei powstrzymały rozwój matematyki greckiej, wiadomo również, że słuszne w zasadzie odkrycia Heraklita i Protagorasa doprowadziły do zupełnego zahamowania wiary w naukę opartą na doświadczeniu.

Trudno nam dzisiaj ocenić właściwą rolę społeczną sofistów, bo działalność ich znamy tylko z pism ich zdecydowanych wrogów. Niemniej jest pewne, że przyczynili się oni w najwyższym stopniu do zdemaskowania fałszywych metod rozumowania, występujących w środowiskach opartych na tradycji i nieodłącznym od niej autorytecie. Jest wiadome, że w środowiskach takich

uważa się za oczywiste najrozmaitsze absurdy dlatego tylko, że przyzwyczajono się do nich od szeregu pokoleń. Zdrowy rozsądek identyfikuje się właśnie z kultywowaniem tych absurdów. Wszelką opozycję tępi się bezwzględnie jako synonim złośliwego obłądu.

W tych warunkach dyskusja rzeczowa jest zgoła niemożliwa, a fakt ten uogólniony zbyt pośpiesznie prowadzi prostą drogą do zupełnego sceptycyzmu.

Jest pewne, że sofisci poszli w swoim krytycyzmie zbyt daleko, niemniej trzeba zaznaczyć, że nauka grecka nie umiała przeciwstawić się ich doktrynie, nie posiadała bowiem kryteriów ścisłego myślenia i nie знаła jego granic.

Walka z sofistami, przedsięwzięta przez Sokratesa, oparta była na wierze, że istnieje jakaś dziedzina myślenia, naprawdę niezależna od naszej fantazji, ale terenem jej był świat pojęć ogólnych, mętnych i płynnych, tych właśnie, które do dzisiaj pozostały obfitym żerem dla indywidualnej interpretacji, i dlatego skazana była zgóry na przegraną.

Lew Szestow wydobyl nawierzch tę wielką prawdę, znaną zresztą niejednemu starszemu autorowi, że argumenty, którymi w dyskusji posługuje się platoński Sokrates, są równie wykrętne i równie osobiste, przyczem, w przeciwieństwie do argumentów sofistycznych, mają pretensję do zupełnej obiektywności i do bezwzględnej prawdy.

Platon był niewątpliwie indywidualnością twórczą najwyższej miary, ale to właśnie, co się zawsze uważało za główną jego zasługę, a mianowicie, że w pojęciach ogólnych znalazł ucieczkę przed dowolnością i subiektywizmem, było największą jego pomyłką i źródłem długotrwałego zastoju.

Zanim ludzkość odnalazła właściwą dziedzinę ścisłego rozumowania, upłynęły wieki. Przez ten czas była dialektyka platońska właściwym źródłem mitologii upozowanej na wiedzę obiektywną, poczynawszy od słynnego Plotina, a skończywszy na Heglu i pragmatystach.

Niemniej nie da się zaprzeczyć, że pierwszy krok na drodze do zbudowania systemu zasad ścisłego myślenia został dokonany przez ucznia Platona, Arystotelesa. System Arystotelesa był fragmentem i nie był wolny od zasadniczych błędów. Był to zaledwie pierwszy krok na drodze żmudnej i dalekiej. Niestety chciało, że ludzkość uznała dzieło Arystotelesa za doskonałe i nie

chciała wyjść poza nie przez długie wieki historii, a i dziś jeszcze broni go i trzyma się go namiętnie, choć już wie, że jest to tylko bezużyteczny rekwizyt. Przez długie wieki uczeni teologowie narzucali ludzkości doktryny nie mające nic wspólnego z ścisłym rozumowaniem, jako prawdy udowodnione ściśle przy pomocy niezawodnego systemu Arystotelesa. W rzeczywistości wyzyskiwali tylko mniej lub więcej świadomie niejasności i luki tkwiące w tym systemie.

Niemniej postulat konsekwencji, sformułowany przez Arystotelesa pod postacią słynnej zasady sprzeczności (*principium contradictionis*), był olbrzymim triumfem racjonalnego myślenia.

Można było starać się go ominąć, można było wykręcać się sianem z sprzeczności, do których doprowadzały założenia fałszywe, podyktowane względami utylitarnymi, ale nikt nie miał odwagi powiedzieć, że istnieje jakieś inne, lepsze rozumowanie, wolne od obowiązku liczenia się z zasadą konsekwencji. Co więcej, zasady ta pozwalała wykrywać błędy rozumowania przynajmniej w tych wypadkach, gdzie bezprawie posuwało się zbyt daleko i folgowało nadmiernie swoim brutalnym zachciankom.

Filozofowie bolszewicy ze szkoły Bucharina potępiają logikę Arystotelesa zato, że przyjąwszy fikcję sztywnych pojęć pierwotnych, utrzymywała istniejący ustrój społeczny razem z ohydą niewolnictwa. Heglowi przypisują zasługę zdemaskowania przesądu o niezmienności pojęć pierwotnych i otwarcia w ten sposób szerokiej drogi dla społecznego postępu.

Cała ta doktryna zrodziła się z nieporozumień.

Postulat konsekwencji stworzył dostateczną podstawę do obalenia opartego na niewolnictwie społecznego systemu. Organizacja niewolnictwa rola się od bijących w oczy sprzeczności, które starano się pokryć mniej lub więcej zręcznymi frazesami. Z jednej strony uważano niewolników za istoty zasadniczo niższe, za coś rdzennie odmiennego od ludzi wolnych, a z drugiej strony dopuszczano prawo sprzedania wolnego człowieka w niewolę. Paulus Aemilius wydał Epir na pastwę żołdactwa, a 150.000 ludzi wolnych sprzedał w niewolę. Wśród sprzedanych byli oczywiście ludzie bardzo wysoko rozwinięci umysłowo i etycznie, wysubtelnieni i wrażliwi niezmiernie. Z chwilą sprzedania w niewolę stawali się przedmiotami oddanymi do nieograniczonej dyspozycji właściciela, który z tego swojego prawa korzystał w wielu wypadkach w sposób bezecny i okrutny. Pieniądze uzy-

skane ze sprzedaży rozdano między żołnierzy. Na każdego wypadło po kilka drachm. Plutarch pisze, że nie było nikogo, kto by nie zadrżał na myśl o tej straszliwej klęsce, która przyniosła tak małe korzyści.

Te słowa Plutarcha są znamienne. Widzimy z nich, że tam, gdzie kultura uczuć nie wznosi się dość wysoko, działa jednak hamulec zrodzony z zasady konsekwencji.

Przesąd o sztywności pojęć pierwotnych został obalony, jeśli nie w teorii, to przynajmniej w praktyce, znacznie przed Heglem, przez racjonalistów wieku XVIII, którzy przygotowali Wielką Rewolucję. Jest faktem niewątpliwym, że Wielka Rewolucja zrodziła się z kultury racjonalistycznej, opartej na ścisłym myśleniu, przepojonej kultem dla matematyki i lekceważącej wszystko to, co wychodzi poza sferę ścisłego i jasnego myślenia.

Kultura ta była dalszą fazą rozwoju dogmatycznego racjonalizmu wieku XVI i XVII, opartego na wierze, że metody matematyczne i przyrodnicze pozwolą nam dotrzeć do istoty wszechrzeczy. Wiara ta doprowadziła do szeregu sprzecznych z sobą systemów filozoficznych, a w dalszym rezultacie obudziła potrzebę radykalnej krytyki.

Siła filozofów przedrewolucyjnych polegała nie na pozytywnych konstrukcjach, ale na krytycyzmie opartym na metodach nauk ścisłych, a posuniętym do granic nie osiągniętych w żadnym poprzednim okresie. Materjaliści obalili mit o substancjonalności duszy. Hume demaskował fałszywe ambicje dogmatycznego racjonalizmu. Voltaire ośmieszał fałszywy patos średniowiecza, kult djabła i wyuzdany obłęd feudalnych panów. Montesquieu obalił wiarę w aprioryczny charakter prawa i moralności przez proste zestawienie faktów, zaczerpniętych z różnych czasów i różnych środowisk. Jean Jacques Rousseau obalił przesąd o wyższości duchowej sfer uprzywilejowanych. Encyklopedyści odebrali nauce tajemniczy urok księgi o siedmiu pieczęciach.

Wiadomo, że właściwym twórcą socjalizmu jest Saint-Simon, typowy racjonalista, oparty na krytycznym poglądzie na świat epoki przedrewolucyjnej. Twórcą socjologii jest pozytywista August Comte, na którego Saint-Simon wywarł wpływ ogromny. Do tego, żeby dostrzec niekonsekwencję ustroju społecznego, polegającego na gnębieniu klas biednych przez klasy posiadające, nie była wcale potrzebna dialektyka Hegla. Wystarczyła

najzupełniej arystotelesowska zasada konsekwencji i kultura uczuć, oparta na nauce Chrystusa. Jeśli tak się zdarzyło, że wielki obrońca pokrzywdzonych Karol Marx był uczniem Hegla, i powoływał się na jego dialektykę, to był to przypadkowy zbieg okoliczności. Wpływ dialektyki Hegla odgrywa w dziełach Marxa rolę drugorzędną i raczej szkodzi, niż pomaga, wytwarza bowiem złudzenie, jakoby Marxowi szło o myśl przeczącą samej sobie. W rzeczywistości szło Marxowi tylko o niedolę klas pracujących i o konstrukcję takiego poglądu na świat, któryby doprowadził do jej przewyciężenia. Dialektyka Marxa nie różni się w swojej istocie od metody konstrukcyjnej nauk ścisłych. Jeśli Marx nie pisał o miłości bliźniego, to tylko dlatego, że zasada miłości bliźniego była już wtedy zużyтым rekwizytem, który nie był zdolny odegrać jakiegokolwiek roli hamującej w stosunku do rozbestwionych geszefciarzy.

Pozytywistyczna doktryna Augusta Comte'a wywarła kolosalny wpływ na umysły uczonych XIX w., wytwarzając typ krytycznego badacza, który wzorem Newtona nie pragnie wcale odpowiedzieć na pytania: co to jest? i dlaczego jest tak a nie inaczej? wiedząc, że prowadzą one do bezpłodnych dociekań, stara się natomiast rozszerzyć jak najbardziej granice doświadczenia i sformułować prawa rządzące zjawiskami. Doktryna ta utrzymała się do dnia dzisiejszego, uległszy z biegiem lat radykalnym modyfikacjom. Dzięki pracom Macha, Poincarégo, Einsteina i wielu innych badaczy, wytworzył się współczesny przyrodniczy pogląd na świat, oparty na sformułowanej przez Macha zasadzie ekonomii myślenia i względności zasad nauk teoretycznych. Można było sądzić, że doktryna ta doprowadzi do zwycięstwa idei tolerancji i sprawiedliwości społecznej. W rzeczywistości stało się inaczej. Okazało się, że w całym tym poglądzie na świat pozostały pewne słabe punkty, przez które wdarła się w jego wnętrze irracjonalna reakcja, doprowadzając do obecnego smutnego stanu rzeczy. Jest pora, żeby zajrzeć do źródła tej reakcji i rozprawić się z nią ostatecznie.

7. Właściwym twórcą irracjonalizmu współczesnego jest niewątpliwie Hegel. Doktryna Hegla zrodziła się z nieporozumień, wywołanych powierzchowną znajomością filozofii Kanta i zupełnie błędną koncepcją analizy matematycznej. Kant przeciwstawił metafizyce matematykę, jako tę dziedzinę, w której mamy

do czynienia z pojęciami ściśle określonymi, podczas gdy pojęcia pierwotne metafizyki prowadzą nas z konieczności do paradoksów. Doktryna Kanta stała się trwałą zdobyczą ludzkości, jakkolwiek trzeba było jeszcze wiekowej pracy, żeby zrozumieć, że pojęcia pierwotne matematyki są równie płynne jak wszystkie pojęcia pierwotne, a siła ich polega jedynie na tem, że mamy sposoby ustalenia ich zakresu przy pomocy ścisłej symboliki. Otóż z tego właśnie słabego punktu doktryny Kanta skorzystał Hegel, żeby znaleźć podstawę dla swojej dialektyki. Hegel uczepił się tego faktu, że ówczesna analiza matematyczna opierała się na bardzo mętnej pojęciu przyrostów nieskończenie małych. Nieskończenie małe — rozumował Hegel — są i niema ich, są to zatem niewątpliwie przedmioty sprzeczne.

Z drugiej strony jest faktem, że analiza matematyczna pozwala nam sięgnąć niezmiernie głęboko w prawa rządzące przyrodą, podczas gdy wolna od sprzeczności algebra jest w gruncie rzeczy zupełnie bezpłodna. Z tego wynika jak na dłoni, że analiza matematyczna zawdzięcza swoją płodność tkwiącej na jej dnie sprzeczności. Jeśli zaś tak jest, to ten fakt, że metafizyka prowadzi do sprzeczności, nie tylko nie jest jej ułomnością, ale jest właśnie gwarancją jej twórczej potęgi. Przestańmy tedy lękać się sprzeczności. Przeciwnie, zdobądźmy się na odwagę pracowania przy ich pomocy, a wtedy odkryjemy tę właśnie istotę rzeczy, którą Kant uznał za niepoznawalną, a mianowicie tę właśnie myśl twórczą przeczącą sobie na każdym kroku.

Jeśli chodzi o stopień beczelności, to oczywiście przewyższył on wszystko, na co dotychczas ludzie potrafili się zdobyć.

Paradoks, który od początku historii kultury umysłowej był uważany za nieszczęście, stał się nagle źródłem największego optymizmu i narzędziem poznania prawdy bezwzględnej. Pokusa była zbyt wielka. Trudno się dziwić, że doktryna ta zyskała wielu zwolenników i że żyje do dziś dnia pod płaszczykiem różnorodnych etykiet. Myślę, że walka radykalna z tą doktryną jest zasadniczym obowiązkiem przedstawicieli prawdziwej nauki.

Styl, w jakim Hegel przemówił do swoich uczniów, był wyraźnym echem mistyki popularnej. Można było sądzić, że jakiś złośliwy figlarz powycinał z dzieł naukowych kawałki zdań i zestawiał je w sposób dowolny, ażeby ludzkość ogłupić i przerazić. Pomiedzy zwały nonsensów i bzdur pretensjonalnych po-

trafił jednak wsunąć całe ustępy, podyktowane wielką znajomością natury ludzkiej i wielką zdolnością propagandy.

Zaczyna się od tego, że być i nie być jest to samo, poczem dodaje się następujące objaśnienie:

Jeśli to bliżej ustalimy, to mamy tu ustawione zdanie, które przy bliższej obserwacji posiada ruch, prowadzący je do tego, że znika samo przez się. W ten sposób staje się z niem samym to, co ma tworzyć jego właściwą treść, mianowicie stawanie się.¹

Kiedy czytelnik zrozumiał wreszcie, że nigdy nie potrafi zgłębić myśli mistrza i może tylko zbierać okruchy z jego stołu porzucone mu łaskawie, aplikuje mu się następującą doktrynę:

Boga pojmuje się jako ducha, który zdawając się dla siebie samego zarazem znosi tę różnicę, by pozostawać w niej dla siebie i w sobie. Zadaniem świata wogóle jest pojednanie się z duchem, poznanie siebie w nim.²

W tym momencie czytelnik zaczyna rozumieć, że mistrz odłonił przed nim właściwy cel, do którego powinien dążyć za wszelką cenę. Nie wie jednak, w jaki sposób ma to uczynić, czuje się onieśmielonym i nie wierzy własnym siłom. Wtedy mistrz przemawia do niego zupełnie nowym językiem, językiem najzupełniej codziennym, takim właśnie, jakim posługuje się każda kucharka i każdy sklepikarz prowincjonalny. Powiada poprostu: *Podjęcie tego zadania przypadło w udziale narodowi germańskiemu.*

Razem z Heglem i całym t. zw. romantyzmem niemieckim zaczęła się nowa epoka filozofji. Zaczęło się wyzyskiwanie płynności pojęć pierwotnych do celów takich, jakie danemu autorowi były na rękę. Zaczęło się przystosowywanie koncepcji wszechświata do potrzeb arystokratycznej reakcji i świadome posługiwanie się tanim retorycznym efektem. Daremnie Schopenhauer starał się zdemaskować metodę Hegla. Głos jego został przygłuszony przez oklaski rozentuzjasmowanych wielbicieli. Wkrótce znalazła się falanga naśladowców. Hegliści pojawili się w wszystkich niemal krajach Europy, a wiemy dobrze, że cała filozofja polska pierwszej połowy XIX w. rozwinęła się pod wpływem Hegla.

Zaraza irracjonalizmu rzucona w świat przez Hegla rozrosła

¹ Wissenschaft der Logik I, p. 86.

² Wstęp do historii filozofji (tłum. Skińskiego).

się do granic fantastycznych. Słumiona zrazu przez kolosalny rozrost nauk matematycznych i przyrodniczych, skorzystała z kryzysu, jaki rozpoczął się w tych naukach na przełomie wieku XIX i XX, żeby podnieść głowę pod nowymi postaciami.

Zacząło się od artystycznego ujęcia rzeczywistości przez Fryderyka Nietzschego. Wkrótce potem wypłynął Bergson z swoją rehabilitacją paradoksów Zenona z Elei i kultem nowej władzy poznawczej, nazwanej intuicją. Bergsona uczepliła się potworna doktryna pragmatystów, a równocześnie zaczęła się szerzyć w Niemczech „ naukowa ” filozofja Husserla dążąca do stworzenia nowej scholastyki w imię wiary w bezwzględne poznanie.

Po wojnie Europa zalana została mnóstwem nieodpowiedzialnych irracjonalistycznych systemów, które w gruncie rzeczy nie przyniosły nic nowego, operując znanym już dawniej tanim frazesem, przyczyniły się jednak niezmiernie do wytworzenia atmosfery depresji i trwogi wśród przedstawicieli nauk ścisłych, wywierając zarazem mniej lub więcej uświadomiony wpływ na ich sposób myślenia.

Czytając wywody Bergsona, trudno nie przyjść do przekonania, że na ich dnie jest kompleks niezadowolonych zagadnień matematycznych. Bergson potępia metodę matematyczną i chce podstawić na jej miejsce metodę inną, lepszą, którą jednak charakteryzuje właśnie przy pomocy pojęć matematycznych, tylko zniekształconych i odbarwionych docna.

Bergson opiera się na pojęciach *płynnych i giętkich* , będących symbolami aktów umysłowych osobliwego rodzaju, których wykonać wprawdzie nie możemy, ale których możliwość Bergson odczuwa intuicyjnie. Ma to być *prawdziwe zetknięcie się umysłu z swym przedmiotem, doświadczenie odczłonkowane, a zatem bezwątpienia odkształcone* , doświadczenie wyższe od tego, które nazywamy ludzkim. Żeby dojść do tego doświadczenia, trzeba zrezygnować z pewnych przyzwyczajęń myślenia, a nawet spostrzegania, trzeba umieścić się w tym punkcie, gdzie zaczyna się doświadczenie ludzkie. Wtedy dopiero będziemy mogli dotrzeć do tego, co Bergson nazywa *nieskończenie małymi elementami krzywej rzeczywistości. Zadanie metafizyka —* powiada Bergson *— sprowadza się wówczas do kwadratury tej krzywej, będzie więc zupełnie analogiczne do zadania matematyka.* ³

³ Matière et Memoire, p. 203—263, cyt. z „Wielości rzeczywistości“.

A więc zostawmy matematykę na boku, bo nie zadowala jakiegś tam naszej zachcianki, której nawet sformułować nie jesteśmy w stanie. Na miejscu matematyki zrobimy sobie nową naukę, o wiele łatwiejszą i przyjemniejszą. Zamiast biedzić się nad zawilemi zagadnieniami teorii funkcji matematycznych, będziemy wykonywali działania bezporównania ponętniejsze, nie natrafiając na żaden opór, bo przecież nikt nie znajdzie podstawy do opozycji. Jeśli będzie innego zdania, to powiemy mu, że nie posiada intuicji, i każemy mu wczuwać się w głębiny naszego ducha. Po pewnym czasie zrozumie nas, lub będzie udawał, że rozumie. W ten sposób wznowimy tradycję dawnych magów, którzy umieli prowadzić społeczeństwa na pasku wiedzy tajemnej i ezoterycznej. Zorganizujemy niewolę duchową na wielką skalę i zanurzymy w niej ludzkość na zawsze.

Takie lub tym podobne myśli musiały się zrodzić na dnie umysłów skrajnie indywidualistycznych i skłonnych do oportunistyzmu pod wpływem teorii Bergsona. Wystąpiły one jawnie i cynicznie w krajach anglosaskich pod nazwą pragmatyzmu (William James) i humanizmu (F. C. Schiller).

Obie te doktryny wyzyskały zřęcznie pozytywistyczną koncepcję ekonomji myślenia (Ernest Mach), z której zrobiły groteskową karykaturę według recepty Bergsona.

Zasada ekonomji myślenia nie da się ściśle sformułować; w praktyce sprowadza się do tego, że celem nauki jest zbudowanie teoretycznego systemu pojęć, któryby w sposób możliwie najprostszy pozwolił nam poznać prawdę, t. zn. orjentować się w świecie rzeczywistym. Jako przykład przytoczyć można teorię Kopernika, która właściwie nie rozstrzygnęła, bo z równą słusnością możemy twierdzić, że ziemia obraca się dokoła słońca, jak też i to, że słońce obraca się dokoła ziemi, a to z uwagi na względność wszelkiego ruchu. Niemniej teoria Kopernika pozwoliła nam ująć ruchy planet w sposób niezmiernie prosty, a w dalszej konsekwencji doprowadziła do einsteinowskiej zasady względności.

Zasada ta z kolei nie może być uważana za prawdę bezwzględną, niemniej pozwala nam zbudować system kosmologiczny bezporównania bardziej jednolity od systemu newtonowskiego, odsłaniając przed nami zjawiska, o których przedtem wcale nam się nie śniło. System Einsteina, wzięty w całości, jest bezporównania bardziej skomplikowany od systemu Newtona,

niemniej w stosunku do zadań, jakie sobie stawia, jest o wiele ekonomiczniejszy. Widzimy tedy, że nie idzie tu o prostą, naiwną ekonomję, ale o stosunek środków do celu poznawczego, jaki mamy przed sobą.

Pragmatyści nie zadawali sobie trudu, żeby przemysleć te sprawy do głębi. Powiedzieli poprostu: jeśli mówi się o ekonomji, to idzie o wartość, a więc o użyteczność, a nie o prawdę. Prawdy niezależnej od pojęcia użyteczności niema wcale. Prawdziwe jest to, co jest użyteczne. Niema czystego myślenia i niema czystego poznania. Zawsze i wszędzie decydujący jest element wiary i indywidualnej potrzeby. Zajmowanie się sprawami niezwiązanymi z naszym życiem jest mrzonką.

Rzeczywistość codzienna nie jest prawdziwą rzeczywistością — pisze F. C. Schiller. Prawdziwą rzeczywistość tworzymy zgodnie z naszą potrzebą. Pewne wahanie w przyjęciu tej teorii pochodzi stąd, że założenie rzeczywistości otaczających nas rzeczy i osób uważamy za rzecz użyteczną. Skoro jednak zrozumiemy, że wiara w naszą zdolność tworzenia nowej rzeczywistości jest o wiele bardziej użyteczna, to nie zawahamy się poddać się jej bez zastrzeżeń.

Właściwym twórcą humanizmu według F. C. Schillera jest Protagoras. Doktrynę Protagorasa interpretuje F. C. Schiller nie jako krytycyzm zbyt daleko posunięty, ale jako nowy gatunek metafizyki.

Trudności połączone z faktem istnienia matematyki załatwia F. C. Schiller krótką uwagą, że oczywistość i obiektywność matematyki jest iluzją, wywołaną przez oswojenie się z matematycznymi postulatami, przez ogólnie przyjętą wiarę w ich praktyczne znaczenie i przez to, że system matematyki jest zwarty w przeciwieństwie do prawd rozważanych oddzielnie.

O tem, że takie prawdy jak ta, że dwa razy dwa jest cztery, nie mogą być zanegowane niezależnie od wszelkiego systemu, jakkolwiek w wielu wypadkach mogłoby nam to wyjść na korzyść, F. C. Schiller nie wspomina wcale. Niema napewno człowieka, który nie przyznałby, że jest dla niego korzystniej przyjąć taką arytmetykę, że jeśli ma komuś płacić, to $2 + 2$ jest 5, a jeśli jemu ktoś ma płacić, to $2 + 2$ jest 3.

Wprawdzie wynika z tego sprzeczność, ale sprzeczność okazała się w wielu wypadkach bardzo użyteczną i jest chyba nierozłączną z rozumowaniem, opartem na uczuciu i namietności.

Jeśli więc matematyka uchodzi ogólnie za naukę obiektywną i jeśli źródłem tej opinii ma być użyteczność, to iść tu może li tylko o jakąś użyteczność, nie wspólnego nie mającą z kryteriami indywidualnymi, jakąś użyteczność metafizyczną i niedostępną zwykłej intuicji. Ale taka użyteczność jest czystym frazesem, o ile nie jest prosto synonimem tego, co nazywamy prawdą.

F. C. Schiller nie cofa się przed tajemnymi trickami demagogicznymi. Sprawy racjonalnego krytycyzmu pozostawia na boku, walcząc jedynie z naiwnym idealizmem niektórych metafizyków angielskich. Na tem mławem tle wywody jego wydają się ultrainteligentne i efektowne. Trudno się dziwić, że powierzchowny czytelnik ulec im może łatwo, zwłaszcza jeśli przyjdzie mu w pomoc tendencja do szybkiego i łatwego załatwienia sprawy poznania.

Wpływ doktryny F. C. Schillera i Jamesa był o wiele większy, niżby wydawało się na pozór. Cytuje się ich stosunkowo mało, ale żyją oni na dnie wielu powojennych metafizyk niemieckich i deprawują psychikę ścisłych badaczy na całym świecie.

Polemika z nimi wydaje mi się sprawą bezpłodną. Myślę, że wystarczy podkreślić tkwiący na dnie ich doktryny nonsens. O wiele ważniejsze jest przeciwstawienie im konsekwentnego poglądu na świat, opartego na krytycznym racjonalizmie i na prawdę wolnego od założeń metafizycznych. Pierwszym krokiem do tego celu musi być rozpatrzenie podstaw logiki i pytania, czy naprawdę możliwe jest zbudowanie systemu logiki wolnego od metafizycznych założeń.

8. Osobliwy gatunek irracjonalizmu stanowi szkoła fenomenologów, założona przez Husserla.

Husserl nie przeciwstawia się nauce, pragnie ją jednak uzupełnić naukową filozofją, opartą na przekonaniu o możliwości bezwzględnego poznania.

Pozwolę sobie przytoczyć tu uwagi, które poświęciłem tej szkole na wstępie mojej rozprawy p. t. *Tragedja werbalnej metafizyki*.⁴

Wiara w możliwość bezwzględnego poznania, do absurdu doprowadzana na każdym kroku przez samych fenomenologów, zmusza ich jednak do bezprzykładowych wysiłków, które działają na umysły podniecająco i skłaniają opozycję do pogłębiania swych własnych poglądów.

⁴ Kwartalnik Filozoficzny, r. 1932.

dów i do wyjścia poza sferę wygodnego konwencjonalizmu. Niemniej grzech werbalizmu, uświęconego przez oplakaną „czystą gramatykę“ Husserla, rozgryza tę szkołę do dna i ściąga ją z wymarzonych wyżyn na mętny padół rzeczywistości...

Czysta gramatyka ma być środkiem zaradczym na krytykę granic potocznego języka, przeprowadzaną przez przyrodników i przyrodniczo zorientowanych teoretyków poznania. Badacze ci zwrócili baczną uwagę na sprawę sensu pytań filozoficznych, napozór niewinnych i naturalnych, wyprzedzając w ten sposób ściśle badania, przeprowadzone później przez logików, a przede wszystkim przez słynnego Bertranda Russella.

Między innymi szło o takie odwieczne pytania, jak np. co to jest prawda? co to jest materja? co to jest człowiek? co to jest dobro? co to jest dzieło sztuki? i t. p.

Nauka, rezygnując z tych pytań, miała rzekomo zatracić kontakt z rzeczywistością, wkraczając w sferę fikcji; odbudowa tego kontaktu miała być głównym zadaniem fenomenologów.

Środkiem do tego celu miało być poszukiwanie istotnej treści pojęć, nie różniącej się zasadniczo od tej, o której marzył Platon. Metody zastosowano odmienne, ale równie samowolne i mętne. Husserl zaczął od wykrętnej krytyki nominalizmu Hume'a, zarzucając mu, że nie wykazał, jak się to dzieje, że wyrazy wywołują w nas pewne skojarzenia myślowe. Otóż pretensja ta jest oczywiście dziecinna, bo idzie tu o zjawiska bezporównania bardziej złożone od zjawiska grawitacji, o którego istocie nic do dzisiaj nie wiemy, ani też nie spodziewamy się wiedzieć. Przyjmować samodzielne pojęcia dla uzasadnienia rozumienia, to jest mniej więcej to samo, co przyjąć wolę materji do znalezienia się w środku świata dla uzasadnienia prawa grawitacji.

Pozytywna praca Husserla nie wyjaśniła nic, bo musiała się oprzeć z konieczności na założeniach dowolnych i mętnych. Dzieła jego roją się od takich założeń.

Tak np. dla Husserla jest jasne, że wyraz *coś* posiada znaczenie proste. Przeżycie, łączące się ze zrozumieniem tego wyrazu, jest niewątpliwie złożone, ale znaczenie nie posiada cienia złożoności.⁵

Otóż to właśnie odróżnienie znaczenia wyrazu od zrozumienia jest produktem werbalizmu i samowoli; nie można bowiem dostrzec niczego, co byłoby różnem od wyobrażeń nasuwających się w momencie zastanawiania się nad sposobem użycia w mo-

⁵ Logische Untersuchungen, II. 1.

wie wyrazu *coś*, a co możnaby nazwać znaczeniem tego wyrazu. Odwołanie się do takiej hipotezy uważają husserliści za jedyny ratunek przed relatywizmem, który ma rzekomo uniemożliwić naukę. W rzeczywistości właśnie metoda fenomenologiczna czyni naukę niemożliwą, uzależnia ją bowiem od jakiejś osobiwej władzy poznawczej, która nie ma nic wspólnego ani z rozumowaniem, ani z doświadczeniem i nie da się żadną miarą skontrolować. Gdybyśmy rzeczywiście poszli drogą wskazaną przez husserlistów, to powrócilibyśmy — czy prędzej, czy później — do wiedzy ezoterycznej starożytnego Wschodu i do połączonej z nią niewoli duchowej i materialnej. Rozprawa husserlisty Reinacha: *Über die apriorischen Grundlagen des bürgerlichen Rechtes*, ogłoszona przed wojną, była jawnym wyrazem tego rodzaju tendencji.

Rewolucja bolszewicka i jej nieoczekiwany sukces obaliła w proch iluzje społeczne husserlistów, transponując je na jawny irracjonalizm hitlerowskiego obłędu.

9. Ujemną stroną zarówno pozytywizmu, jak i materializmu jest niemożność wyznaczenia właściwych granic nauk ścisłych przynajmniej w przybliżeniu. Przedewszystkiem trudno jest określić wyjątkową rolę matematyki. Stary argument kantowski, polegający na tem, że prawdy matematyczne są pewne, a prawdy przyrodnicze są przybliżone, był doniedawna obowiązujący i jeszcze Poincaré brał go zupełnie poważnie. Głosy przyrodników zwracających na to uwagę, że arytmetyka byłaby nie do pomyślenia w świecie płynnym (Le Dantec), nie wywierały silniejszego oddźwięku. Główną uwagę zwracano na fakt, że świat geometrii jest idealny i zasadniczo różny od świata zmysłowego. Próby przedsięwzięte przez Johna Stuarta Milla uznania punktów, linii i płaszczyzn za przedmioty hipotetyczne okazały się niefortunne, podobnie jak pomysły Macha, zmierzające do odnalezienia tych utworów w świecie zmysłowym. Było jasne, że geometria jest najzupełniej niezależna od tego rodzaju dociekań, i na tem właśnie opierali swój autorytet aprioryści.

Decydującym momentem w tej dyskusji było sprowadzenie arytmetyki i geometrii do zasad logiki formalnej, dokonane na początku tego stulecia przez Whiteheada i Russella.

Fakt powstania wielkiego systemu logiki, obejmującego wszystkie nauki aprioryczne, otwarł przed nauką zupełnie nowe

perspektywy, stwarzając właściwe podstawy dla krytycznego racjonalizmu. System logiki, pozwalający na przeprowadzenie twierdzeń matematycznych bez udziału intuicji twórczej jednostki, przy pomocy pracy mechanicznej, dostępnej dla każdego człowieka, zdolnego do zrozumienia zwykłej arytmetyki, byłby triumfem nauki tak wielkim, że wobec niego wszystkie zakusy irracjonalizmu musiałyby wydać się dziecinną zabawką. Mogło się być wydawać, że przedstawiciele radykalnego krytycyzmu przyjmą dzieło Whiteheada i Russella z entuzjazmem. Stało się wprost przeciwnie.

Już pierwsza próba Peano'a sformułowania aparatu pojęć i aksjomatów matematyki wywołała gwałtowną reakcję Poincarégo. Poincaré szydził z Peano'a, powołując się na nieobliczalne możliwości twórczego geniuszu. Na dnie była obawa przed wyłamaniem się z pozytywistycznej tradycji, a zarazem nieufność umysłu skrajnie krytycznego w stosunku do dzieła wykazującego wiele punktów naprawdę słabych. Aparat pojęć Peano'a był jeszcze daleki od doskonałości i można było powątpiewać, czy nie straci swojej siły z chwilą, kiedy zechcemy zmechanizować go w sposób radykalny.

Drugim momentem decydującym były znane paradoksy cantorowskiej teorii mnogości, która tkwiła u podstawy nowej logiki. Wprawdzie Russellowi udało się usunąć te paradoksy dzięki słynnej teorii typów logicznych, ale dzieło to dokonane zostało kosztem pewnych metafizycznych założeń, z którymi umysł radykalnie krytyczny żadną miarą pogodzić się nie może.

Naprzód trzeba było założyć istnienie jakichś indywiduów, o których nic bliższego powiedzieć nie można. Istnienie tych indywiduów wynikało z systemu, jakkolwiek nie mogło być poparte żadnym przykładem. Tem samym właściwym terenem logiki był jakiś świat abstrakcyjny, bardzo podobny do świata platońskiego. Pierwotne pojęcia logiki przybrały również charakter idei platońskich, należało bowiem odróżniać je wyraźnie od znaków, przy których pomocy zostały wprowadzone. Wkońcu potrzebne było przyjęcie dodatkowej hipotezy zapewniającej istnienie nieskończenie wielu indywiduów, gdyż bez niej byłibyśmy skazani na nieuchronny finityzm. Z drugiej strony przyjęcie tej hipotezy pociągało konieczność przyjęcia istnienia przedmiotów niewyrażalnych przy pomocy pojęć systemu.

Krótko powiedziawszy, system Whiteheada i Russella jest taki, że albo niema w nim klasy liczb naturalnych, albo jest

w nim klasa liczb rzeczywistych, obejmująca liczby, niewyrażalne przy pomocy pojęć systemu. Ta ostatnia konsekwencja, prowadząca zarazem do stwierdzenia istnienia aktualnej nieskończoności, wywołała osobliwie gwałtowną reakcję ze strony Poincarégo. Poincaré był zdecydowanym nominalistą i nie mógł pogodzić się z istnieniem przedmiotów niewyrażalnych, a tem mniej z istnieniem nieskończonych klas takich przedmiotów. To swoje przekonanie sformułował Poincaré w następującym postulatcie, z którego miała się zrodzić nominalistyczna logika: *Nie dopuszczajcie przedmiotów, których nie potraficie skonstruować.*

Wysuwając ten postulat, sądził Poincaré, że unicestwia całą konstrukcję Whiteheada i Russella. Tego samego zdania byli wszyscy niemal zwolennicy nowej logiki. Fakt ten świadczy dobitnie o tem, do jakiego stopnia nauka zależna jest od poglądów filozoficznych.

Matematycy podzielili się na dwie grupy. Jedni nazwali się empirystami i poszli za Poincarém. Myślę, że należałoby nazywać ich nominalistami. Nominaliści odrzucili systematyczną logikę i poprzestali na intuicji matematycznej, ograniczając się do słownej charakterystyki metody intuicyjnej, nie mającej nic wspólnego z ściśle określonym systemem (Brouwer). Drugą grupę stanowią idealiści, których nazwałbym raczej *realistami* ze względu na średniowieczną tradycję. Grupa ta opiera się na teorii Cantora, pomija jednak system Whiteheada i Russella, ograniczając się do intuicyjnych prób wykazania niesprzeczności aksjomatów matematyki (Hilbert).

W tych warunkach oczekiwane odrodzenie nauk ścisłych przez oparcie się na wielkim systemie logiki, wyznaczającym ich granice, zawiodło narazie w zupełności.

Niemniej gra nie została skończona.

Dalsze badania wykazały, że metafizyczne założenia systemu Whiteheada i Russella mogą być usunięte przez oparcie się na czystej teorii typów logicznych, uwolnionych od założeń dodatkowych, przyjętych przez tych autorów, oraz na ujętej w symbole nauce o wyrażeniach, którą nazwałem semantyką.

W ten sposób powstał nowy system logiki, spełniający nominalistyczny postulat Poincarégo i zgodny najzupełniej z duchem krytycznego racjonalizmu. Pomimo tak daleko idących ograniczeń, system ten nie jest wcale uboższym od systemu matematyki, opartego na aksjomatach Zermeli, posiada więc wszystkie dane, żeby zostać przyjętym przez ogół matematyków.

Z chwilą, kiedy system ten zostanie wykończony, będzie nam wolno twierdzić, że rozporządzamy niezawodnym aparatem, oddzielającym myślenie ścisłe od innych form myślenia.

Dawne marzenia logików o zrealizowaniu maszyny logicznej przestaną być w tych warunkach mrzonką. Zczasem będziemy mieli aparaty, służące do wyprowadzania ogólnych twierdzeń semantyki tak, jak dziś posiadamy arytmometry.

Myślę jednak, że niema powodu czekać na realizację tego ideału.

Samo stwierdzenie takiej możliwości daje nam wystarczającą broń w rękę przeciw atakom irracjonalizmu i stawia nas na prawdę poza sferą jego działania.

Oparta na niezawodnym systemie logiki, wolnym od irracjonalnych założeń, będzie mogła nauka spełnić wobec społeczeństwa tę misję, jakiej od niej domaga się profesor Natanson.

Taka nauka nie będzie oszukiwała sama siebie i nie będzie rozbijała się co pewien czas o rafę swoich własnych iluzji.

Taka nauka będzie mogła powiedzieć narodom:

Budujcie nowe pojęcia, bo i my nie czynimy nic innego, ale strzeżcie się samowolnego operowania tem, co zbudujecie. Pamiętajcie, że na tej drodze grozi wam chaos i obłęd, którego można uniknąć jedynie przez oparcie się na pełnym, na zasadzie konsekwencji zbudowanym systemie.

Miejcie odwagę zajrzeć do najgłębiej ukrytych zakamarków waszego systemu tak właśnie, jak my to czynimy, i nie wstydźcie się przyznać, że byliście na błędnej drodze, jeśli z waszych założeń wyprowadzicie wnioski sprzeczne z temi założeniami. Nie wiercie w to, że ścisła analiza musi koniecznie prowadzić do bezwładu i do zaniku wyobraźni i życia uczuciowego.

Ten fakt, że za naszych czasów naród o wielkiej tradycji kulturalnej został opanowany przez jednostki brutalne i ciemne, świadczy tylko o tem, że naród ten był przeżarty do głębi przez irracjonalną metafizykę.

Historja uczy, że ostateczne zwycięstwo było zawsze udziałem narodów opartych na zasadach ścisłego rozumowania. Ścisła analiza deprawuje tylko jednostki mdłe i nieudolne, poprostu dlatego, że jest dla nich za trudna. Społeczeństwa młode i zdrowe nie powinny się jej lękać. Znajdą one zawsze dość siły, żeby myśli zdobyte przez długoletnią ścisłą analizę wprowadzić w czyn i oprzeć na nich życie bujne i twórcze.

Rozdział I.

Granice zdrowego rozsądku.

1. Zdrowy rozsądek należy odróżnić od *popularnego poglądu na świat*. Popularny pogląd na świat, czyli t. zw. common sense, obejmuje według prof. Heatha to wszystko, co w danym środowisku uchodzi za oczywiste i nieuniknione.¹ Popularny pogląd na świat jest pewnego rodzaju systematem metafizycznym, którego zasady nie są może ściśle sformułowane, ale niemniej działają wcale sprawnie za pośrednictwem automatycznych reakcyj. Jest rzeczą powszechnie znaną, że popularny pogląd na świat łączy się zawsze z zacofaniem i jest synonimem banału i przeciętności. Zbrodnie i okrucieństwa, ubrane w piórka nieuniknionych konieczności, są jego nierozłącznymi towarzyszami. Walka z tym gatunkiem metafizyki jest trudna i niebezpieczna. Sugestia popularnego poglądu na świat jest tak silna, że jedynym środkiem wyzwolenia zdaje się być zerwanie z racjonalnem myśleniem i rzucenie się w objęcia wielkiego napięcia uczuć i potężnego wysiłku woli zdecydowanej na wszystko.

Niemniej historia uczy, że nawet wtedy, kiedy ludzkość zrywa się do zapamiętałej walki z panującymi stosunkami w imię hasła irracjonalnych, nawet wtedy nie rezygnuje bynajmniej z zdrowego rozsądku. Można być opanowanym przez wielką namiętność i przejętym do głębi oczekiwaniem cudu, który ma się dokonać, ale z tego nie wynika bynajmniej, że nie należy liczyć się z ruchem taksówek, jeśli przechodzi się przez jezdnię, i z tem, że jeśli braknie benzyny, to motory benzynowe przestaną funkcjonować. Wszystko to są sprawy niezmiernie banalne i wydawałoby się mogło, że szkoda czasu na zajmowanie się nimi, a jednak można się przekonać, że stanowią one podstawę, na której opiera się cała nasza twórczość intelektualna.

Jest jasne, że zdrowy rozsądek funkcjonuje prawidłowo tak

¹ Por.: The Philosopher, Styczeń 1934.

długo, dopóki obracamy się w sferze dobrze nam znanej i opieramy się na pojęciach na tyle ustalonych, że wystarczają do orjentowania się w zajmujących nas zagadnieniach. W takich warunkach nie tylko my, ale i zwierzęta, postępujemy według pewnych schematów myślowych, narzucających nam się niezależnie od naszej woli. Z chwilą jednak, kiedy znajdziemy się na terenie nowym, do którego nasz aparat pojęciowy nie jest przystosowany, wówczas występują zasadnicze nieporozumienia. Jest z tem poprostu tak, jakgdyby ktoś stanął do zawodów hipicznych na dorożkarskiej szkapie. Otóż zasadnicze zagadnienie logiki polega na tem, żeby oddzielić wyraźnie tę dziedzinę, w której kryteria zdrowego rozsądku funkcjonują prawidłowo, oraz wskazać metody systematycznej walki z mieszaniami tych kryterjów z szablonami myślowymi, podyktowanymi przez przyzwyczajenie. Jest to sprawa o wiele trudniejsza, niżby to wydawać się mogło na pierwszy rzut oka. Nie posiadamy żadnych kryterjów absolutnych, nie mamy żadnej podstawy do twierdzenia, że to, co dzisiaj uważamy za oczywiste, nie będzie kiedyś podane w wątpliwość.

Rozwój myśli ludzkiej nie odbywa się w sposób ciągły i nie może poprzestać na uzupełnianiu prawd zdobytych prawdami nowymi. Proces taki trwa przez czas pewien, dopóki nie wybuchnie rewolucja pojęć i połączone z nią odwrócenie wartości. Otóż, przez *zdrowy rozsądek* radziłyśmy rozumieć taką zdolność, która dostarcza nam prawd niezależnych od wszelkiej rewolucji pojęciowej. Jest pewne, że prawdy takie posiadamy, ale są one prymitywne i banalne. Trudno przypuścić, żeby mogły stać się podstawą do zbudowania aparatu pojęciowego, przy którego pomocy możnaby ująć w ścisłe formuły prawa rozwoju nauki. Zobaczymy, że pomimo wszystko jest to możliwe. Ale do tego, żeby zadanie to mogło być rozwiązane, trzeba przeprowadzić cały szereg badań bardzo żmudnych i rozwiązać wiele trudnych zagadnień związanych z poszczególnymi naukami. Wtedy dopiero zdobędziemy trening potrzebny koniecznie do przewyciężenia nałogów *common sense'u*. Praca nasza musi zacząć się od krytyki. Ostrze krytyki musi być skierowane na-przód przeciw językowi potocznemu, który jest niemal synonimem panującego w danej epoce *common sense'u*. Potem dopiero przyjdzie kolej na krytykę języka naukowego. Przyjdzie nam wówczas zajrzeć do dna najprymitywniejszej, a zarazem najbar-

dziej tajemniczej z nauk, jaką jest matematyka. Będziemy musieli śledzić od początku do końca walkę zdrowego rozsądku z metafizycznym mitem, jaka dokonywa się na jej terenie od początku jej istnienia. Będziemy musieli zadać sobie trudu przebudowania jej podstaw i usunięcia z niej metafizycznych założeń, żeby przekonać się, że cały jej gmach gigantyczny jest produktem systematycznego składania cegiełki do cegiełki przy pomocy środków równie prostych i ordynarnych jak te, które przeprowadziły ludzkość od budowania drewnianych szałasów do drapaczy nieba i balonów stratosferycznych. Zobaczymy, że wszystko inne jest tylko dekoracją, która byłaby może nawet zabawna, gdyby nie podstawiała się na miejsce prawdziwej twórczości i nie zakrywała przed nami jej mechanizmu. Przekonamy się, że wszędzie na dnie jest naprzód walka z tą dekoracją i przełamanie jej hamującego wpływu, a potem dopiero systematyczna konstrukcja.

Metoda prawdziwej nauki da się określić dwoma wyrazami: *krytyka* i *konstrukcja*. Dawniej mówiło się *analiza* i *synteza*, ale wyrazy te wiązały się od wieków z metafizycznym mitem i ciągną za sobą cały szereg nieporozumień. Wyraz *synteza* stał się osobliwie niebezpieczny, bo został nadużyty wielokrotnie przez irracjonalistów. W ich języku nie oznacza on nic podobnego do dobrze wykończonej budowli. Raczej jakieś naprędce sklecone rusztowanie, którego ściany osłonięto efektownie pomalowanym papierem. Ale także wyraz *analiza* nie ma w języku filozofów właściwego znaczenia. Nie oznacza on wcale krytyki brutalnej i bezwzględnej, sięgającej do dna zagadnienia. Taka krytyka jest niemożliwa bez równoczesnej konstrukcji. Bo przecież musimy się na czymś opierać, jeśli zaś nie zechcemy zrozumieć, że niema innej trwałej podstawy prócz tego myślenia, jakie potrzebne jest do zbudowania szałasów lub jaskółczego gniazda, to wtedy z konieczności uczepimy się jakiegoś przesądu i cała nasza robota będzie stracona.

Zacniemy od rozpatrzenia niebezpieczeństwa związanego z powierzchowną krytyką.

2. Krytyka sofistów była radykalna i bezwzględna, ale skutkiem braku równoczesnej konstrukcji była bezpłodna i szkodliwa. Zobaczymy później, w jaki sposób zdobycze jej zostały wyzyskane za naszych czasów. — Reakcja, jaką działalność sofistów

wywołała w Grecji, weszła na drogę krytyki umiarkowanej, delikatnej, nie sięgającej zbyt głęboko, a tem samem przydatnej do utrwalenia istniejącego stanu rzeczy. Mam na myśli dialektykę platońską. Platon pisał pod wpływem Sokratesa. Na podstawie jego dzieł trudno wyrobić sobie jasne zdanie o Sokratesie. W każdym razie jest pewne, że Sokrates jest pierwszym filozofem, który odwołał się do zdrowego rozsądku, i na tem polega jego wielkość. Sokrates wiedział, że niema innego myślenia, jak to, którem posługujemy się w życiu codziennem, i on właśnie a nie kto inny stwierdził w sposób dobitny, że prawda dostępna jest w równym stopniu ludziom prostym, jak ludziom wykształconym. Było to genialne odkrycie, które jednak w praktyce zostało wypaczone przez pomieszanie zdrowego rozsądku z *common sense*'m. — Prócz wielkiej koncepcji zdrowego rozsądku powstała w umyśle Sokratesa jeszcze inna koncepcja, a mianowicie idea doskonałego dobra. Koncepcja ta jest irracjonalna i żadną miarą z zdrowym rozsądkiem pogodzić się nie da. Wyczuwamy mniej więcej, co jest dobre i złe, bo uczą nas tego od dziecka, ale ta wiedza nasza jest bardzo powierzchowna. Co to jest doskonałe dobro, tego żadną miarą wyobrazić sobie nie umiemy, a wszelkie próby określenia tego pojęcia przedsiębrane w ciągu długich wieków historii spaliły na panewce.

Nieszczęściem Sokratesa było, że pragnął irracjonalną ideę dobra ugruntować przy pomocy kryteriów zdrowego rozsądku. Lew Szestow, pisząc o Sokratesie, posuwa się do twierdzeń następujących:

Zadanie Sokratesa polegało na tworzeniu z nicości, na wydobyciu czegoś z niczego.²

Sokrates, jeśli można wyrazić się w ten sposób, pije swoje dobro, jak ludzie zwykli piją wodę. Widzi je oczyma ducha, dotyka go dłońmi duchowymi. Ono posiada dla niego byt realny tak, jak dla nas rzeczy świata zewnętrznego.³

Trudno sobie wyobrazić dobitniejsze wydobywanie nawierzchni irracjonalnych pierwiastków tkwiących w koncepcji Sokratesa. Im silniej przeświadczymy się o ich istnieniu, tem dziwniejszem i niebezpieczniejszem wyda nam się dążenie Sokratesa do oparcia jej na zdrowym rozsądku. Idąc tą drogą, zrozumiemy bez trudności, że dążenie to musiało zniekształcić i ostatecznie uni-

² Chestow, *Potestas clavium*, tłum. Schloesera, Paris, p. 8.

³ L. c. p. 9.

ceściwie koncepcję zdrowego rozsądku, prowadząc do identyfikowania kryteriów zdrowego rozsądku z *common sense*'m.

W jaki sposób to pomieszczenie pojęć zostało przeprowadzone, możemy dowiedzieć się, analizując dialogi Platona.

Zdrowy rozsądek obraca się w sferze określeń grubych i prymitywnych. Określenia te wystarczają tak długo, dopóki poruszamy się na zjawiskach codziennych, do których zdążyliśmy przywyknąć. Przeoczenie tego stanu rzeczy wytwarza w nas złudzenie, że język potoczny jest aparatem doskonałym, który funkcjonuje najzupełniej prawidłowo, jeśli tylko umiemy go używać. W rzeczywistości jest wprost przeciwnie. Jeśli tylko zechcemy wysunąć się na chwilę poza sferę szablonowej codzienności, natrafiamy na beznadziejne bagniska, wobec których kryteria języka potocznego okazują się bezsilne. Proces ten został przedstawiony z wielką dokładnością w dialogach Platona. Zaczyna się od tego, że pojęcie dobra, piękna czy miłości jest przecież czemś prostym i pocziwem, i wystarczy tylko trochę się zastanowić, żeby usunąć wszystkie nasuwające się wątpliwości. Niebawem jednak ten stan prostodusznego zadowolenia zamienia się w nastroj niepokoju i trwogi pod wpływem dialektycznych wykrętów, jakich pocziwy Sokrates musi się chwytąć, żeby dojść do upragnionego wyniku. Okazuje się, że dusza nie może być harmonją, bo w takim razie dobro duszy byłoby harmonją harmonji, a to rzekomo jest wykluczone. Natomiast nasuwa się uwaga, że może harmonja raz jest lepsza, a drugi raz gorsza, i wtedy, kiedy jest lepsza, mówimy o tem, że dusza jest lepsza. Czy jest tak, czy inaczej, jedno jest pewne, że teren, na którym poruszamy się, jest niepewny i grząski, że mówimy o duszy tak, jakby to był jakiś określony przedmiot, a w rzeczywistości nie wiemy sami, o co nam idzie.

Dziecko wyobraża sobie, że dusza ludzka jest czemś podobnem do duszy żelazka, lub do pęcherza ryby, który kucharka nazywa duszą, potem zapomina o tych naiwnych wyobrażeniach, ale zato pamięta doskonale, że musi być coś takiego, co nazywa się duszą. Sokrates platoński mówi o duszy jak o przedmiocie codziennego użytku, a nikomu z obecnych nie przychodzi na myśl zastanowić się nad tem, że może wyraz *dusza* nie oznacza zgoła żadnego przedmiotu. Wszyscy obecni godzą się z łatwością, że dusza nie może być złożona, bo wiedzą, że nie potrafią wymienić jej części składowych. Nie przypuszczają ani na chwilę,

jak bliscy są dowodu nieśmiertelności duszy. Bo przecież, jeśli coś nie jest złożone, to nie mogło powstać, ani też nie może przestać istnieć. Rzeczywiście, jest dosyć trudno wyobrazić sobie, w jaki sposób powstaje coś niezłożonego, tem bardziej, że także nie umiemy sobie wyobrazić, jak powstaje coś złożonego. W szczególności nie możemy sobie ani rusz wyobrazić, w jaki sposób kura powstaje z jaja, ale sprawy te pozostawia Platon na boku, jako zbyt trywjalne.

Argumenty platońskie wywarły kolosalny wpływ na rozwój myśli ludzkiej. Trudno dociec, dlaczego. Wprawdzie wiara w nieśmiertelność duszy była bardzo pożądana z punktu widzenia religijnego, ale z drugiej strony teza, że dusza nie mogła powstać, pozostawała w jaskrawej sprzeczności z religią.

Niesłuchanie zajmujące jest to, że wszystkie te sprawy związane były z językiem potocznym. Produkt pospolitej walki o byt, utwór ułomny i gruby, został podniesiony do wyżyn wiedzy absolutnej, przekraczającej granice ludzkiej wyobraźni. Z chaosu druzgoczących paradoksów sofistycznych, z beznadziejnej rozpacz i niewiary w zdolność naszą do uciepienia się jakiegokolwiek trwałej podstawy, zrodziła się fikcja wiedzy patetycznej i doskonałej, odsłaniającej przed nami najwyższe tajemnice naszego istnienia, a wraz z nią rozwinęło się pyszałkowane lekceważenie radykalnego krytycyzmu, jako pomysłu szatańskiego, prowadzącego do niebezpiecznych przewrotów.

Nie brak do dziś dnia naiwnych naśladowców platońskiego Sokratesa, którym się zdaje, że wystarczy stawiać pytania bardzo proste i wygłaszać je tonem pewnym siebie i swojskim, żeby narzucić przeciwnikowi swój pospolity pogląd na świat. Jestem pewny, że Sokrates nie był równie trywjalny, myślę jednak, że Szestow nie myli się, twierdząc, że hasło Sokratesa: *Tyle wiem, że nic nie wiem* było maską kryjącą niemалą zarozumiałość.

Zasadnicza pomyłka Sokratesa wywarła niszczący wpływ na długie wieki historii za pośrednictwem ucznia Platona, Arystotelesa. Irracjonalny charakter dialektyki platońskiej był zbyt uderzający, żeby można się łudzić, iż obraca się w sferze zdrowego rozsądku. Dopiero dzieło Arystotelesa stworzyło racjonalną podstawę do pomieszania kryterjów zdrowego rozsądku z kryterjami common sense'u. Niemniej dzieło to było wielkie. Wielkość jego polega na sformułowaniu podstawowej zasady zdro-

wego rozsądku, a mianowicie t. zw. *zasady sprzeczności*. Arystoteles zdawał sobie sprawę z wielkości swojego odkrycia, nazywając tę zasadę *najtrwalszą z wszystkich zasad*. Można ją formułować na różne sposoby. Ograniczmy się do formuły następującej:

Dwa sądy, z których jeden jest zaprzeczeniem drugiego, nie mogą być równocześnie prawdziwe.

Jest dobrze powiedzieć, że pomimo swej niezmiernej prostoty i banalności zasada ta jest prawdziwa tylko pod pewnymi warunkami.

Idzie o to, że zasada ta jest prawdziwa tak długo, dopóki obracamy się w sferze zagadnień, do której pojęcia nasze są przystosowane.

Na każde ściśle określone zapytanie o posiadaniu przez dany przedmiot danej cechy — pisze Plechanow — należy odpowiadać albo: tak, albo: nie. To nie ulega wątpliwości. Ale jak odpowiadać w tym wypadku, kiedy przedmiot zmienia się, kiedy już zatracą daną właściwość, lub gdy dopiero jej nabiera? Samo przez się rozumie się, że i w tym wypadku obowiązuje nas odpowiedź określona. Ale o to właśnie idzie, że ściśle określoną będzie tu odpowiedź podług formuły: tak nie i nie tak...⁴ Słowa te charakteryzują dokładnie stan faktyczny. Jest faktem, że o przedmiocie zmieniającym się mówimy, iż jest taki właśnie i nie jest, np. że jest dobry i nie jest dobry, że jest czerwony i nie jest czerwony, że jest wielki i nie jest wielki. Odpowiedź ta jest najzupełniej określona. Każdy wie, że w tym wypadku mamy do czynienia z zmianą. Inna sprawa, że ta odpowiedź jest zbyt ogólnikowa, abyśmy mogli na niej poprzestać, i nie może być uważana za podstawę ścisłych badań naukowych, jak tego chcieliby zwolennicy dialektyki marksowskiej. Nauki ściśle radzą sobie w ten sposób, że pojęcie przedmiotu uzupełniają pojęciem fazy i mówią: w fazie jednej przedmiot jest dobry, w fazie innej przedmiot jest zły i t. p. W ten sposób powracają do zasady sprzeczności. Ale jest jasne, że do tego potrzebna jest praca konstrukcyjna bardzo żmudna i długotrwała. W tych warunkach musimy zgodzić się na to, że zasada sprzeczności zastosowana do zagadnień dowolnych i oparta na języku potocznym musi być uznana za fałszywą.

Ten stan rzeczy nie umniejsza zasługi Arystotelesa. Z chwilą,

⁴ Podstawowe zagadnienia marksizmu, Warszawa 1923, p. 103.

kiedy musimy przyznać, że niema nauki ścisłej bez zasady sprzeczności, a wszystkie próby wyjścia poza nią są albo pozornym tylko jej zaprzeczeniem (dialektyka marksowska), albo bezpłodnym irracjonalizmem (Hegel, Bergson i t. d.), z tą chwilą musimy uznać wielkość odkrycia Arystotelesa. Właśnie dlatego, że zasada sprzeczności nie funkcjonuje prawidłowo na gruncie common sense'u, stanowi ona potężny środek do oddzielenia common sense'u od zdrowego rozsądku. Nie należy jednak sądzić, jakoby rozumowanie zgodne z zasadą sprzeczności nie przekraczało w żadnym wypadku kryterjów zdrowego rozsądku. Historia nauki wykazała, że zasada sprzeczności może prowadzić do czczego formalizmu, który, jakkolwiek nie zawiera twierdzeń fałszywych, może stać się podstawą fałszywego poglądu na istotę twórczości naukowej. Sprawą tą będziemy zajmowali się szczegółowo w ciągu dalszym.

Błędna koncepcja roli zasady sprzeczności, narzucona przez zbyt ogólnikowe sformułowanie jej przez Arystotelesa, spowodowała, że właściwa jej rola została odkryta dopiero po długim okresie walk namiętnych i wysiłków niezmiernych.

Cała działalność naukowa Arystotelesa przyczyniła się w wysokim stopniu do zaciemnienia sprawy. Przyczyną tego było naiwne zaufanie do common sense'u i przywiązanie do istniejącego stanu rzeczy, które m. i. uwidoczniło się w pochwale niewolnictwa.

Cytowany przez Korzybskiego⁵ R. D. Carmichael powiedział, że Arystotelesowi nie chodziło wcale o odkrycie prawdy. Pragnął on jedynie utrwalić to, co było gotowe.

Do tego potrzebny był jedynie potężny aparat dialektyczno-retoryczny, któryby najzręczniejszego nawet przeciwnika doprowadził do milczenia. Arystoteles zbudował taki aparat pod postacią sylogistyki. Ta błędna i z gruntu bezpłodna doktryna była pomimo wszystko wielkim wynalazkiem, była pierwszą próbą zmechanizowania rozumowania i stała się pierwowzorem systemu logiki formalnej. Zanim jednak to nastąpiło, zadecydowała o rozroście niebywałym metafizyki werbalnej, która do dziś dnia wegetuje i wywiera wpływ hamujący na rozwój nauki.

Dialektyczno-retoryczny charakter logicznych dzieł Arystotelesa podkreślił dobitnie prof. Tadeusz Sinko w swoim znakomitem dziele o literaturze greckiej.⁶

⁵ Science and Sanity, Lancaster, Pennsylvania 1933.

⁶ T. Sinko: Literatura grecka, Tom I, część 2. Kraków 1932.

O słynnych kategoriach pisze Sinko:

Ale kto wie, czy nie najtrafniej rozumiał je Trendelenburg (De Arist. categoriis, Berlin 1833), który starał się wykazać, że Arystoteles szukał niewyróżnionych jeszcze podówczas (poza imieniem, słowem i łącznikiem) części mowy i oznaczał je przez swoje kategorie.

O *Topikach* czytamy:

Topika w 8 księgach — podają punkty widzenia, a właściwie oklepanki, ułatwiające dysputowanie na zadany temat i bronienie twierdzeń z prawdopodobieństwem.

Wreszcie powiada Sinko, co następuje:

Sofizmaty, zawierające na końcu streszczenie całej topiki, dowodzą, jak w *Organon* logika służy przeważnie potrzebom retoryki.

Nawet w słynnych *Analitikach* werbalizm zaznacza się bardzo wyraźnie, prowadząc do zasadniczych błędów. Arystoteles pomija stale fakt, że język potoczny przyjęty bezkrytycznie musi prowadzić do sprzeczności.

Wiara w równouprawnienie wszystkich utartych sposobów wyrażania się czyni Arystotelesa bezsilnym w stosunku do paradoksów wykrytych przez sofistów i skazuje go na wykręty. Trudno przecież mówić o ścisłej dyskusji, jeśli jest się zmuszonym uwzględniać takie sądy, jak: *dobro jest, niedobro nie jest*⁷ i t. p., których znaczenie wydaje nam się już na pierwszy rzut oka najzupełniej mętne. W tych warunkach mógł Arystoteles liczyć co najwyżej na zwycięstwa w dyskusjach,⁸ ale to przecież nie jest jednoznaczne z rozwiązaniem problemu konsekwentnego myślenia.

Sylogistyka była fragmentem, który nie nadawał się do roztrząsania zagadnień żywych, kręcąc się w błędnym kole kilku frazesów. Prócz tego zawierała pewną zasadę rdzennie fałszywą, a mianowicie zasadę odwracania sądów powszechnych twierdzących.⁹

Według tej zasady z założenia:

Wszystkie djabły są szkodnikami

wynika, że

Niektóre szkodniki są djabłami.

Założenie nasze jest niewątpliwie prawdziwe, bo djabeł jest z definicji szkodnikiem. Wniosek prowadzi do stwierdzenia ist-

⁷ Anal. priora I, 46.

⁸ L. c. II, 19.

⁹ L. c. I, 2.

nienia djabłów. Należy więc liczyć się z tym faktem, że istnienie djabłów można udowodnić. Ale w ten sam sposób możemy udowodnić istnienie kwadratowych kół, szklanej góry, czapki niewidki i czego tylko dusza zapragnie.

Ten oczywisty błąd starają się niektórzy logicy usprawiedliwić tą okolicznością, że Arystoteles nie liczył się z istnieniem pojęć pustych.¹⁰ Ale w tem właśnie tkwi istotna trudność filozofii werbalnej. Właśnie o to idzie, że nie możemy przejść do porządku nad istnieniem pojęć pustych, bo nigdy nie wiemy zgóry, czy jakiś wyraz nie przedstawia pojęcia pustego. W tych warunkach musielibyśmy w każdym poszczególnym wypadku dowodzić, że nasze pojęcie nie jest puste, a do tego potrzebna byłaby gotowa logika, albo też musielibyśmy założyć wyraźnie, że mamy do czynienia z pojęciem niepustem. Ale przyjęcie takiego założenia pociągnęłoby zasadnicze przekształcenie sylogistyki. Z chwilą, kiedy raz kwestja istnienia występuje *explicité* w rozumowaniu, wychodzimy poza werbalizm i cała iluzja płodności logiki werbalnej rozwiewa się raz na zawsze.

Okazuje się, że mamy do czynienia z typowem przelewaniem z pustego w próżne, które nie daje nawet tego, czego możnaby żądać od czysto formalnych konstrukcyj, a mianowicie pola do rozwiązywania zajmujących łamigłówek.

3. Cała historia sylogistyki uczy, że nie wyszła ona poza banał nawet w sensie czysto formalnym, szerząc jedynie przekonanie o bezpłodności i bezcelowości logiki.

Niemniej duch Arystotelesa nie przestał żyć w umysłach metafizyków werbalnych. Niezdolni do krytycznego spojrzenia na aparat pojęciowy nauk ścisłych, a pełni pożądanja jakiejś trwałej podstawy, na której mogliby umocnić swój autorytet, postulują uparcie istnienie trwałej treści pojęć, ukrytej poza wyrażeniami języka potocznego. Język potoczny jest dla nich systemem doskonałym, noszącym w swoim łonie ziarna absolutnej prawdy.

W rzeczywistości jest wprost przeciwnie. Język potoczny nie jest systemem konsekwentnie opracowanym i nigdy nim nie będzie. Prof. Delacroix nazwał go słusznie mieszaniną konwenansu i logiki, dowolności i rozumowania.¹¹

¹⁰ Por. np. Sleszyński: *Teoria dowodu*. Kraków 1925.

¹¹ Delacroix: *Le langage et la pensée*. Paris 1930, p. 10.

Jest to napewno jeden z najbardziej tajemniczych i najbardziej zajmujących wytworów ludzkich. Odzwierciedla on nie tylko naszą siłę, ale całą naszą ułomność wraz z jej trudnemi do przejrzęcia bezdrożami.

Wielki lingwista prof. Rozwadowski pisze:

Powiedziałem, że język i języki są arcydziełami ludzkiej kultury: niewątpliwie, ale są w nich także arcydzieła groteskowej prawie potworności. Stoi to narówni z takimi objawami ludzkiej kultury, jak obowiązkowe kaleczenie nóg u Chinek, obowiązkowe kaleczenie sobie skóry dla ozdoby, obowiązkowe fantastyczne fryzury, nadawanie pewnej postaci czaszkom u rozmaitych szczepów ludzkich i t. d., i t. d.¹²

Wszystkie te zagadnienia ignorowane są w zupełności przez metafizyków werbalnych. Wierzą oni uparcie, że jeśli posługiwać się będą językiem potocznym z dostateczną ścisłością, — a trzeba wiedzieć, że ścisłość identyfikują z pedanterją, — to wtedy potrafią uzyskać określenia zupełnie jednoznaczne. Rodzi się z tego nieprawdopodobnie niesmaczny styl, bombastyczny i ociężały, i powstaje złudzenie precyzji. Obiektywny rezultat jest równoznaczny z zupełną pustką.

Jako przykład takiej niefortunnej metody można wymienić uniwersytecki podręcznik logiki prof. Kotarbińskiego.¹³ Zacytuję następujące ustępy:

W ustach Piotra np. „ja“ ma taki sens, iż oznacza Piotra, w ustach Jana — taki, że oznacza Jana. W ustach kogoś, wypowiadającego w Warszawie zdanie „Stanisław mieszka tu“, słowo „tu“ ma często takie znaczenie, iż przy tem znaczeniu (sic!) kto mieszka „tu“, ten mieszka w Warszawie i odwrotnie i t. d.¹⁴

I tak „rozumiem daną nazwę jasno“, to znaczy, że w ten sposób wyczuwam, które cechy składają się na jej konotację, że jeśli ich obecność w napotkanym przedmiocie zauważę, trafnie za każdym razem rozpoznaję w nim desygnat tej nazwy i odwrotnie, trafnie za każdym razem stwierdzam, że dany napotkany przedmiot nie jest desygnatem tej nazwy, skoro tylko zauważę w nim brak którejkolwiek z tych cech.¹⁵

Widzimy, że autor silił się na ścisłość, a w rzeczywistości podstawiał na miejsce zdań prostych i banalnych wyrażenia osobiście zawiłe i ciężkie, stwarzając iluzję, że wprowadził nas w dziedzinę wyrazów naprawdę jednoznacznych.

Wyrazy posiadają wiele znaczeń — powiada prof. Delacroix. —

¹² Rozwadowski: O zjawiskach rozwoju języka, l. c. p. 9.

¹³ Tadeusz Kotarbiński: Elementy teorii poznania etc. Lwów 1929.

¹⁴ L. c. p. 24.

¹⁵ L. c. p. 27.

Mamy zawsze więcej idei niż wyrazów i więcej wyrazów niż idei. Już w języku dziecięcym wyraz oznacza sytuację złożoną, a z wzrostem doświadczenia wzrasta stopień komplikacji.¹⁶

Idzie poprostu o to, że nawet tak proste nazwy, jak te, które wymienia Kotarbiński, a mianowicie *koń*, *wróbel*, *pięciogroszówka*, *papieros*, nie posiadają zakresu ściśle określonego i nikt nie rozumie ich w ten sposób, żeby naprawdę za każdym razem mógł rozstrzygnąć, czy rzeczywiście ma do czynienia z desygnatem danej nazwy, czy też z czymś innym.

Nazwy takie jak *pięciogroszówka* i *papieros* zawodzą z chwilą, kiedy mamy do czynienia np. z częściowo zatartym napisem na pięciogroszówce, lub z tytoniem do pewnego stopnia zanieczyszczonym. Nazwy gatunków zwierząt zawodzą z chwilą, kiedy zechcemy je stosować do mniej lub więcej rozwiniętego płodu, lub też do egzemplarzy pochodzących z epok bardzo odległych. Jeśli zrobimy założenie, że każdy człowiek musi mieć matkę i że matka każdego człowieka musi być człowiekiem, to udowodnimy natychmiast zupełnie ściśle, że ludzkość trwała wiecznie, co jest sprzeczne z materiałem doświadczalnym, dostarczonym nam przez geologów. Gdybyśmy więc chcieli przypisać określony sens wyrazowi *człowiek*, musielibyśmy zgodzić się na to, że pierwsza kobieta powstała z żebra mężczyzny, albo na to, że matką człowieka może być np. małpa.

Znajdujemy się tu na terenie wyświechtanych paradoksów Eubulidesa o łysym i o kupie piasku i paradoksu Zenona z Elei o szeleście.

Jedno ziarnko piasku nie sprawia szelestu. Jeśli nie czyni szelestu pewna liczba ziarenek, to nie może powstać szelest przez powiększenie tej liczby o 1. Zatem na podstawie zasady indukcji zupełnej korzec prosa nie może wydać szelestu.¹⁷

Jest dobrze zauważyć, że nawet najprostszy wyraz, figurujący na samym początku słownika, nie posiada sensu ściśle określonego. Wyraz ten jest to, jak wiadomo, litera *a*. Wiemy doskonale, co to jest litera *a*, ale pod warunkiem, że ograniczymy się do pewnej, bliżej nie dającej się określić grupy wypadków stosownie dobranych. Łatwo jest natomiast podać egzemplarze litery *a*, o których nie będziemy mogli z całą stanowczością rozstrzygnąć, czy są takimi rzeczywiście, czy też raczej

¹⁶ L. c., p. 219.

¹⁷ Por. X. Stefan Pawlicki: *Historja filozofji greckiej*. Kraków 1890, p. 267.

przedstawiają literę *d* lub *o*. Decydujące jest to, że ta nieokreśloność nie pociąga w praktyce poważnych konsekwencji, wolno nam bowiem przejść do porządku nad pismem niewyraźnym, ale to nie zmienia faktu, że o ścisłych granicach wyrazu nie może tu być mowy.

Jak się to stało, że Arystoteles, któremu argumenty sofistów były przecież doskonale znane, przeszedł nad nimi do porządku, trudno dociec. Ale że dziś jeszcze znajdują się zawodowi filozofowie, którzy biorą serjo arystotelesowską metodę definiowania *per genus et differentiam specificam*, to już jest objaw naprawdę niepokojący. Przecież każdy, nawet średnio inteligentny człowiek zdaje sobie sprawę z tego, że nie posiadamy hierarchji wyrazów i że te wyrazy, przy których pomocy definjujemy inne, są tyle warte, co tamte. I jedno i drugie zostały nam narzucone w dzieciństwie, jako etykiety doczepione do spostrzeganych przedmiotów, lub też jako puste dźwięki, do których przyzwyczailiśmy się po pewnym czasie. Są to przecież prawdy banalne, które znane już były doskonale kanonikowi z Besançon Roscelinowi w okresie zamierzchłego średniowiecza, kiedy to zamiast aeroplanów używano łopaty czarownic, a sale pałacu królewskiego oświetlano łuczywem. Ale kult szkolarskiego szablonu jest silniejszy od wynalazków, od rozwoju nauk przyrodniczych i matematycznych i od przewrotów socjalnych. W szkolarskich mózgach króluje Arystoteles, jakgdyby nic nie zmieniło się od jego czasów.

Werbalne definicje wbija się w mózgi Bogu ducha winnych studentów, którzy na szczęście mają już dziś na tyle rozumu, że nie biorą tego wszystkiego serjo. Niestety jednak uczą się w ten sposób lekceważenia dla logiki i stają się zbyt podatnym materiałem dla nieodpowiedzialnych irracjonalistycznych doktryn.

Ciągle mówi się, że definicja podaje t. zw. *genus* i *differentiam specificam*, a nikt nie myśli o tem, że stać nas co najwyżej na *genus*, a *differentia specifica* pozostaje na zawsze *pium desiderium*.

Dziecko, widząc wróbla, pyta, co to jest, i otrzymuje odpowiedź: *to jest wróbel*. Rozsądne dziecko zadowala się tą odpowiedzią, jakkolwiek wyraz *wróbel* słyszy po raz pierwszy, bo czuje instynktownie, że o nic innego chodzić nie może. Wyraz wróbel jest etykietą, którą przypisujemy pewnym przedmiotom, i na tem koniec. Jeśli teraz dziecko zobaczy kanarka, powiada:

to jest wróbel. Kiedy powie mu się, że to nie jest wróbel, tylko kanarek, zapytuje: *dłaczego?* a wtedy odpowiadamy: bo kanarek ma żółty brzusek, a wróbel popielaty, lub coś podobnego. Podajemy różnicę specyficzną, odróżniającą kanarka od wróbla, ale nie podajemy *różnicy specyficznej kanarka*. Różnicy specyficznej kanarka nie jest w stanie podać nawet najdokładniejszy opis przyrodniczy, który też obowiązkowo uzupełniany jest zdjęciami fotograficznymi, lub płytami barwnymi. Ale i to niezawsze wystarcza. Ostatecznie kończy się na wskazaniu palcem żywego okazu.

To samo zjawisko występuje we wszystkich naukach opisowych, a przede wszystkim w gramatyce. Reguła nie poparta przykładami jest martwa. Im więcej przykładów, tem lepiej rozumiemy regułę. Jeśli przykładów jest bardzo wiele, obchodzimy się doskonale bez reguły.

4. Z upartej wiary w absolutny charakter wewnętrznej struktury potocznego języka zrodziła się filozofja prof. Edmunda Husserla. Filozofja ta wywarła bardzo silny wpływ na kulturę niemiecką, budząc namietność do poszukiwania absolutnych kryteriów we wszystkich dziedzinach myśli ludzkiej, nie wyłączając prawa cywilnego. Wpływy husserlizmu są u nas do dzisiaj dosyć silne. Miałem niejednokrotnie sposobność walczyć z nimi. Obawiam się, że przyczyniają się do wzmocnienia ducha nietolerancji i przytępiają zdolność do radykalnego krytycyzmu.

Husserl wierzy w istnienie praw apriorycznych, oddzielających sens od nonsensu.

Te prawa — pisze — które obracają się w sferze kompleksów znaczeniowych i spełniają funkcję oddzielania ich sensu od nonsensu, nie są jeszcze prawami logicznymi w ścisłym tego słowa znaczeniu; dostarczają czystej logice możliwych form znaczeniowych, t. j. apriorycznych form zbiorowych, jednoznacznie określonych znaczeń, których „formalną” prawdę, względnie „przedmiotowość”, regulują potem „logiczne prawa” w ścisłym sensie. Podczas gdy pierwsze przeciwstawiają się nonsensowi, zwalczają drugie formalny czyli analityczny przeciwsens, t. j. formalny absurd.¹⁸

W zdaniu tem zawarta jest ta wielka prawda, znana matematykom oddawna, że logika nie może ograniczać się do zagadnienia prawdy i fałszu, ale musi zacząć od zagadnienia sensu. Niemniej z prawdą tą łączy się tutaj zasadniczo fałszywe

¹⁸ E. Husserl: *Logische Untersuchungen*. T. II, cz. 1, Halle 1922.

przypuszczenie, jakoby istniały jakieś aprioryczne prawa sensu i nonsensu.

W języku potocznym przejście pomiędzy sensem a nonsensem nie jest ostre.

Istnieją różne stopnie sensów, poczynwszy od twierdzeń elementarnej arytmetyki, a skończywszy na metafizyce w stylu Heideggera i na dadaistycznej poezji. Badania tych zjawisk są godne uwagi, pod warunkiem, że nie opiera się ich na założeniu istnienia apriorycznych praw sensu.¹⁹ Jeśli sprawę ujmie się w ten sposób, jak to właśnie uczynił Husserl, to wtedy zmuszeni jesteśmy dopatrywać się form sztywnych i określonych tam, gdzie ich w rzeczywistości nie ma, i to psuje całą zabawę.

Husserl jest zdania, że uzależnianie badania zjawisk językowych od psychologii uniemożliwia dotarcie do istoty rzeczy.

Współczesna gramatyka uczy — pisze Husserl — że musi opierać się wyłącznie na psychologii i pozostałych naukach empirycznych. W przeciwieństwie do tego nasuwa nam się tutaj pogląd, że stara idea *ogólnej* lub, bardziej specjalnie, *apriorycznej gramatyki* uzyskuje niezawodną podstawę przez wykazanie z naszej strony praw apriorycznych, określających możliwe formy znaczenia, i w każdym razie uzyskuje odgraniczony zakres ważności.²⁰

Umyślnie tłumacząc pewne ustępy oryginału, jakkolwiek jest to osobiście żmudne, i trudno rozstrzygnąć, czy zostało poprawnie wykonane. Pragnę jednak, żeby czytelnik miał sposobność zorientować się, w jakim stopniu ogólnikowa i mętna jest koncepcja Husserla.

Przedewszystkiem, żeby przeprowadzać dociekania aprioryczne, trzeba odwołać się do jakiegoś systemu myślowego, który mamy prawo uważać za poprawny. Jeśli język potoczny ma być poddany krytyce, to tem samem jest stwierdzone, że mamy do dyspozycji jakiś inny, lepszy język, na którym możemy oprzeć się z całym zaufaniem. Otóż ten język, którym posługuje się Husserl, nie budzi wcale zaufania. Nietylko nie jest lepszy od języka potocznego, ale znacznie gorszy. Język Husserla

¹⁹ Por.: Carnap: *Überwindung der Metaphysik durch logische Analyse der Sprache*. Erkenntnis T. 2, 1931.

Zob. także artykuł prof. Ajdukiewicza, p. t. *Sprache u. Sinn*. Erkenntnis T. 4, 1934, p. 100.

Zajmującą klasyfikację różnych stopni sensu w matematyce znajdujemy w książce A. F. Bentley'a: *Linguistic Analysis of Mathematics*. Bloomington, Indiana 1932.

²⁰ L. c. p. 295.

jest osobiście trudny do zrozumienia, pełen nowotworów językowych, cudzysłówów, zdań pobocznych kilometrowej długości, nawiasów, odsyłaczy i t. d. W imię jakiej zasady ta niezgrabna mieszanina codzienności i wyrafinowanych odróżnień ma uchodzić za język naukowy, trudno dociec. Jest pewne, że są ludzie, którzy w te rzeczy mogą wczuć się po pewnym czasie, obawiam się jednak, że w ten sposób można wczuć się w najgłębsze nonsensy, jak o tem świadczy historia mitologii.

Aprioryzm doktryny Husserla sprowadza się do przypisania wyrażeniom *intencjonalnych korelatów*, t. j. pewnych fikcyjnych przedmiotów, które mają być od nas niezależne.

Jest to jawny powrót do średniowiecznego realizmu. Doktryna intencjonalnych korelatów została na wielką skalę rozwinięta, nie doprowadziła jednak do konkretnych wyników. Wszystko sprowadza się do wiary w intencjonalne korelaty, a wyznawca tej wiary narażony jest na tragiczne zwątpienia i beznadziejne zmagania się z samym sobą.

Z ciekawym przykładem takiej walki wewnętrznej spotykamy się w książce jednego z najwybitniejszych uczniów Husserla, prof. Ingardena, poświęconej dziełu literackiemu. W książce tej stara się prof. Ingarden wykazać, że dzieło literackie jest t. zw. *heteronomicznym* przedmiotem, niezależnym od poszczególnych konkretyzacji.

Prof. Ingarden pisze co następuje:

I czyż wtedy nie byłby to czysty spór o „słowa“, gdyby chciało się mówić tylko o intencjonalnych korelatach, a nie poprostu o wyobrażeniach, jak to czyni psychologistyczna metoda? Choćby rozwinięta tutaj koncepcja dzieła literackiego była delikatniejsza i subtelniejsza i choćby pojęcie wyobrażeń było jeszcze bardzo grube i prymitywne, to czyż ostatecznie nie wyjdzie to na jedno...? Ale czyż rzeczywiście można dzieło literackie sprowadzić do mnogości konkretyzacji? Czyż liczne różnice, dzielące dzieło od jego konkretyzacji, które wykazaliśmy, nie świadczą przeciw temu? Można by nam odpowiedzieć: te różnice występują tylko wtedy, jeśli chwycimy się zgóry idei identycznego dzieła literackiego, które wyraża się w swych konkretyzacjach, jak to rzeczywiście dzieło się w dotychczasowych rozważaniach. Ale któż nam zagwarantuje identyczność dzieła w stosunku do wszystkich jego konkretyzacji, zwłaszcza jeśli się przyzna, że poszczególne konkretyzacje różnią się bardzo od siebie i że czytelnik nieraz uabsolutnia konkretyzację, którą ma w danej chwili, i myśli, że ujmuje w niej samo dzieło? I cóż gwarantuje nam w szczególności identyczność dzieła, jeśli czytane jest przez wielu czytelników,

czyli jego identyczność intersubiektywną? I co to jest identyczność w tym wypadku? Czy nie byłoby może najlepiej powiedzieć, że lektura prowadzi w poszczególnych wypadkach do konkretyzacji podobnych i że to jest osobiwe złudzenie względnie pomyłka, kiedy myślimy, że wszyscy czytamy to samo dzieło? I wkońcu: jeśli dzieło literackie jest tylko wytworem subiektywnych operacji, które nie posiada istnienia samodzielnego, to powstaje pytanie, w jaki sposób istnieje dzieło w chwili, gdy go nikt nie czyta.²¹

Jedyny argument, jaki autor przeciwstawia tym wątpliwościom, jest ten, że nie może zrezygnować z intersubiektywnego znaczenia zdań, bo wtedy nie będzie idealnej, wspólnej dla wszystkich ludzi nauki. Łudzi się jeszcze, że potrafiłyby ten wspólny wszystkim ludziom sens zdań wydobyć na światło dzienne przy pomocy fenomenologicznych dociekań, ale ręce mu opadają. Do tego potrzebaby nowych badań, bardzo obszernych i trudnych, trzeba by pisać nową książkę, a o tem narazie niema mowy. Chwyta się więc prof. Ingarden innego sposobu. Zakłada istnienie autonomiczne pojęć idealnych i o nie opiera swoje heteronomiczne przedmioty. Mówię wyraźnie *zakłada*, bo słowa te w ustach fenomenologa brzmią jak niesamowity paradoks. Jest w nich druzgocąca klęska pilnego Husserlowego ucznia, ale zarazem krzyk radosny rodzącego się twórczego filozofa.²²

Lingwista niemiecki Karol Bühler idzie śladem Husserla, rezygnując wprawdzie ze spraw wiecznych i niezmiennych, ale zapuszczając się z pełną wiarą w świat intersubiektywny. Karol Bühler żali się, że lingwiści współcześni, a osobiwie słynny de Saussure, nie podzielają jego stanowiska.

Idjosynkrazja de Saussure'a w stosunku do przedmiotów abstrakcyjnych i ogólnych — pisze Bühler — i podobny upór (*horror abstracti*) w stosunku do mojej tezy o idealności utworów językowych u współczesnych językoznawców, których szanuję, nie był dla mnie nigdy dobrze zrozumiały.²³ Dalej powołuje się na to, że przecież, jeśli ekonomista pisze o dolarze, albo przyrodnik o gatunkach zwierząt, to także ma do czynienia z abstraktami. Ale właśnie o to idzie, że jeśli ekonomista pisze o dolarze abstrakcyjnym, to popada w iluzję, że jest to rodzaj rzeczywistego bytu, i na żaden sposób zrozumieć nie może, że dolar jest plagą, którą za wszelką cenę trzeba przezwyciężyć.

²¹ R. Ingarden: Das literarische Kunstwerk, p. 371.

²² Por. Tragedja werbalnej metafizyki, p. 65.

²³ Axiomatik der Sprachwissenschaften, Kantstudien 1933, p. 56.

Podobnie przyrodnik, który serjo weźmie swoje species, będzie stawiał zacięty opór teorii Darwina, a nawet jeśli się przed nią ugnie, to i tak będzie posuwał się naprzód z wielką trudnością.

5. Dyskusja w sprawie języka potocznego sprowadza się do zagadnienia, czy trudności, jakie się nasuwają, dadzą się usunąć przy pomocy metody analitycznej, t. j. przy pomocy samego tylko objaśniania i klasyfikowania materiału gotowego, czy też konieczna jest przebudowa od fundamentów. Otóż konieczność taka wynika niewątpliwie z istnienia paradoksów, spowodowanych tem, że język nasz pozwala nam bez żadnych ograniczeń oznaczać wyrazy przy pomocy wyrazów, mówić o tem, że mówimy, myśleć o tem, że myślimy i t. d. Do najciekawszych paradoksów tego rodzaju należy stary paradoks, który zawdzięczamy sofście Eubulidesowi. Można sformułować go w sposób następujący: Wyobraźmy sobie, że Epimenides Kreteńczyk, mówi, że kłamie, bo wszyscy Kreteńczycy kłamią. Zapytajmy, czy mówiąc te słowa skłamał, czy powiedział prawdę. Jeśli powiedział prawdę, to skłamał, bo przecież twierdził, że kłamie, a w rzeczywistości powiedział prawdę. Jeśli skłamał, to powiedział prawdę, mówiąc, że kłamie.

Wyjaśnienie tego paradoksu zawdzięczamy Bertrandowi Russellowi. Pochodzi on z wyzyskania tego złożonego zjawiska, jakim jest treść sądu i fakt wypowiedzenia sądu w danej chwili. Spróbujmy sformułować sąd Epimenidesa ściśle. Powiada on, że sąd, który wypowiada, jest fałszywy, ale nie mówi, jaki sąd wypowiada. Tego musimy się domyślić, powołując się na fakt, że on właśnie teraz taki sąd wypowiada. Ale mówiąc o sądzie, który wypowiadam, mam na myśli jeden z wszystkich możliwych sądów, jakie mogę wypowiedzieć, mówię więc pośrednio o wszystkich takich sądach. Otóż, jest rzeczą jasną, że mówiąc o wszystkich sądach, jakie mogę wypowiedzieć, nie mogę mieć na myśli tych sądów, które o tych wszystkich sądach wypowiadam, bo żeby mówić z sensem o wszystkich sądach, muszę przyjąć, że stanowią one jakiś zbiór określony, którego zawartość nie może się zmieniać w chwili rozmowy. Jeśli zapominamy o tym postulatcie, to zmieniamy warunki gry w czasie rozgrywki, nie możemy więc dziwić się, że wynika z tego sprzeczność. Paradoks ten jest niezmiernie pouczający, świadczy bowiem niewątpliwie o tem, że określenie: *wszystkie sądy*, podobnie jak określenia:

wszystkie cechy, wszystkie wyrażenia, wszystkie zbiory i t. p., nie jest jasne i z konieczności musi prowadzić do paradoksów. Paradoksy tego rodzaju odegrały wielką rolę w historii logiki, stały się bowiem przyczyną powstania słynnej teorii typów logicznych Bertranda Russella. Będziemy mieli sposobność zapoznać się z różnymi ich gatunkami w dalszym ciągu. Tutaj zajmę się jeszcze tylko paradoksem Grellinga, który jest dlatego zajmujący, że podobnie jak paradoks Eubulidesa nie wychodzi poza język potoczny, a posiada bezporównania większą siłę sugestywną, jest bowiem niezależny od faktów i posiada charakter czysto formalny.

Niech wyraz określający cechę, którą sam posiada, nazywa się *autologicznym*. Tak np. wyraz *krótki* jest autologiczny, bo jest krótki, a więc określa cechę, którą sam posiada. Wyrazy, które nie posiadają cechy, jaką określają, nazwiemy *heterologicznymi*. Tak np. wyraz *długi* jest heterologiczny, bo określa cechę, której nie posiada, nie jest bowiem długi. Zapytajmy teraz, czy wyraz *heterologiczny* jest autologiczny, czy heterologiczny. Jeśli jest autologiczny, to posiada cechę, której nie określa, jest więc heterologiczny. Jeśli jednak jest heterologiczny, to nie posiada cechy, jaką określa, a zatem nie jest heterologiczny, tylko autologiczny.²⁴

Paradoksy te zadecydowały o losie metafizyki racjonalnej, okazało się bowiem, że jeśli będziemy unikali rozumowań, które prowadzą do takich paradoksów, to wtedy nie potrafimy w metafizyce posunąć się o krok naprzód. Istota metafizyki polega na tem, że mówi się o wszystkim naraz, o wszystkich swoich myślach, o wszystkich myślach możliwych, o wszystkich właściwościach, o wszystkich przedmiotach i t. d.

Otóż, jeśli mamy trzymać się zasady sprzeczności, to tego rodzaju rozważania musimy odrzucić jako pozbawione sensu. W szczególności nie możemy mówić o tem, co mówimy w chwili, kiedy to właśnie mówimy. Wynika stąd, że podmiot jest niedostępny racjonalnemu badaniu, o czem zresztą wiedziała oddawna filozofja indyjska. O podmiocie możemy mówić dopiero *ex post*, t. zn. w chwili, kiedy stanie się on dla nas przedmiotem, ale nie w chwili, kiedy nim sami jesteśmy. Jednem słowem to, co nazywamy teraźniejszością, nie może być przedmiotem naszego

²⁴ Por. Weyl, *Das Kontinuum*, p. 2, cytowane w książce M. Blacka, *The Nature of Mathematics*, London 1933, p. 98.

badania w całości. Dopiero w chwili następnej możemy odróżnić przedmiot badania i środki, przy których pomocy badanie było przeprowadzone. Ale w tej chwili występuje nowy badający podmiot, który znowu uchyla się od obiektywnego badania.

Z rozważań tych wynika, że zasada sprzeczności wyklucza wiedzę pełną, dającą odpowiedź na wszystkie pytania. Dążenie do takiej wiedzy musi — czy prędzej, czy później — doprowadzić do kolizji ze zdrowym rozsądkiem.

6. Takie wyjście z sytuacji wskazuje doktryna pozytywistyczna z jednej, a dialektyka materialistyczna z drugiej strony. Obiedwie te doktryny mają to wspólne, że odrzucają istnienie przedmiotów zasadniczo różnych od tych, które spotykamy w doświadczeniu. Różnice metodologiczne sprowadzają się do tego, że pozytywizm ustala znacznie ciaśniejsze granice poznania opartego na zdrowym rozsądku, interpretując założenia nauk przyrodniczych jako hipotezy, podczas gdy materializm przyjmuje te założenia bez zastrzeżeń.

Obiedwie te doktryny wyrosły ze wspólnego pnia i sięgają bodaj aż do wiecznie zmiennego prądu istnienia Heraklita. Walka, prowadzona z idealizmem greckim przez sofistów z jednej, a atomistów z drugiej strony, była ich kolebką. W średniowieczu skupiły się w jedną całość pod hasłem *nominalizmu*.

Doktryna nominalistyczna jest radykalnem przewyciężeniem idealizmu. Polega ona na zupełnem przekreśleniu takich przedmiotów, jak pojęcia i sądy, stwierdzając, że mamy do czynienia jedynie z pewnemi dźwiękami (*flatus vocis*), do których można doliczyć pewne wyrażenia pisane, t. zn. pewne zestawienia liter. Przedstawicielami nominalizmu średniowiecznego są, prócz wymienionego wyżej Roscellina, jego następcy z w. XIV.: dominikanin Durand de St. Pourçain i franciszkanin Petrus Aureolus i Wilhelm Occam. Hasło Wilhelma Occama: *bytów nie należy mnożyć bez koniecznej potrzeby* (*entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*) jest do dzisiaj aktualne i użyteczne w walce z uroszczeniami idealizmu.

Jest jasne, że stanowisko nominalistyczne jest zgodne zarówno z tezą pozytywizmu, jak i materializmu, sprowadza bowiem to, co wydaje się na pierwszy rzut oka najbardziej nieuchwytnie, do danych zmysłowych.

Z dyskusji przeprowadzonej poprzednio na temat języka po-

tocznego wynika, jak sądzę, niezbiecie, prawdziwość nominalizmu. Zapewne, nikt nie potrafi wybić idealistom z głowy wiary w istnienie idealnych przedmiotów, ale wiemy napewno, że to, z czem mamy do czynienia w praktyce, to są poprostu wyrazy i automatyczne reakcje wywołane przez nie i że to wszystko dalekie jest od postulowanej przez idealistów doskonałości. Są to fakty doświadczalnie stwierdzone, które wykluczają wszelką wątpliwość. Fakty te stanowią dostateczną podstawę do zbudowania teorii poznania opartej na zdrowym rozsądku.

Pierwszym myślicielem, który przeciwstawił kryterjom metafizycznym zdrowy rozsądek jako wyłączne źródło poznania, był Dawid Hume.

W przeciwieństwie do Greków, którzy nie widzieli drogi pośredniej pomiędzy prawdą absolutną a zupełnym agnostycyzmem, wszedł Hume na drogę kompromisu, w przekonaniu, że lepiej jest zrezygnować z wielkich pretensyj, niż zapuścić się w dziedzinę urojenia. Przed skrajnym sceptycyzmem chroniło go usposobienie łagodne i uступliwe, niezdolne do przeciwstawienia się dążeniom swojej epoki. Ono to sprawiło, że Hume uzyskał kolosalne powodzenie za życia, nie wywarł natomiast decydującego wpływu na wielki ruch społeczny, który miał się rozwinąć w okresie porewolucyjnym.

Hume był typem sybaryty, zamiłowanego w wykwintnem towarzystwie i umiejącego pozyskać jego względy. Żył chwilą, w myśl hasła Arystypa, że *naszą jest tylko chwila obecna*.²⁵

Dzięki swojemu usposobieniu Hume nie miał niebezpiecznych wrogów za życia:

I chociaż narażałem się — pisze — zuchwale na oburzenie stronnictw zarówno politycznych jak religijnych, zwykła ich wściekłość była, jak się zdaje, wobec mnie bezsilna.²⁶

Natomiast powodzenie towarzyskie Hume'a było bardzo wielkie. Natanson pisze o niem, co następuje:

Hume'a, gdy przybył do Francji, wita z czcią rodzina królewska, wielkiego filozofa wielbią magnaci, damy go błagają, ażeby zasiadał w ich towarzystwie w łóżach teatrów; jako sułtan *le gros David* musi figurować w *tableaux* w otoczeniu czarujących niewolnic.²⁷

²⁵ Por. Pawlicki: Historia filozofii greckiej, I. c. p. 425.

²⁶ Por. Hume: Badania dotyczące rozumu ludzkiego, tłum. Łukasiewicza i Twardowskiego, Lwów 1919: Mój żywot.

²⁷ Natanson: Porządek natury, I. c. p. 201.

Łatwo zrozumieć, że tego rodzaju atmosfera musiała wywrzeć wpływ na dzieło Hume'a. Hume pominął zupełnie siłę twórczą wyobrażeń, sprowadzając je do słabych refleksów wrażeń zmysłowych. O tem, że prowadzą one do zmiany poglądu na świat i ostatecznie przekształcają życie na ziemi, o tem nie śmiał marzyć. W ten sposób filozofja jego stała się fragmentem zbyt ograniczonym, zostawiając obszerne pole dla romantycznego irracjonalizmu.

Osobliwie niefortunny był stosunek Hume'a do matematyki. Wprawdzie krytyka ówczesnego rachunku nieskończonościowego była uzasadniona, była jednak zbyt radykalna, gdyż zamykała dalszą drogę jego rozwoju i była zupełnie bezradna wobec twórczej jego potęgi.²⁸ W ten sposób przygotowywała grunt dla aprioryzmu Kanta i irracjonalizmu Hegla.

Doktryna Hume'a była skrajnie indywidualistyczna. Na grunt społeczny przeniósł ją August Comte, twórca *pozytywistycznego* poglądu na świat. Pozytywizm jest apoteozą zdrowego rozsądku. Jest radykalnem przekreśleniem metafizyki i dialektyki irracjonalnej. Jest zarazem pierwszą próbą sformułowania celów nauki i celów życia społecznego zgodnie z zasadami zdrowego rozsądku.

Koncepcja Comte'a, sprowadzająca naukę do zdolności przewidywania faktów, a postęp do powolnego doskonalenia się intelektualnego, czyli t. zw. ewolucji, była ogromnym krokiem naprzód w stosunku do panujących za jego czasów metafizycznych i irracjonalnych fikcyj. Niemniej była w gruncie rzeczy zbyt kompromisowa. Comte nie dostrzegł tego niezmiernie ważnego prawa, że nauka, a wraz z nią całe życie na ziemi nie rozwija się prawidłowo dzięki samemu tylko uzupełnianiu i doskonaleniu tego, co już było. Sama zdolność do przewidywania tego, co stanie się bez mojej ingerencji, nie wystarczy. Trzeba jeszcze umieć przewidzieć, że jeśli zbuduję taki właśnie aparat, to przy jego pomocy potrafię przeciwstawić się temu, co mi grozi. Innemi słowami, trzeba umieć konstruować, trzeba umieć tworzyć. Istotą postępu w nauce, w sztuce i w życiu jest konstruowanie nowych systemów myślowych, nowych aparatów, nowych kryteriów piękna i nowych form życia. Twórczość nie może być wynikiem powolnej ewolucji. Pomiędzy skrzydłami Dedala a aeroplanem niema ciągłego przejścia, radjum, promienie Roent-

²⁸ Hume, l. c. p. 170.

gena i radio wydobyły się na świat w sposób nieoczekiwany i nagły, w drodze rewolucji. Rozwój sztuki jest produktem kolejnych rewolucyj, poczynszyszy od bizantynizmu i gotyku, a skończywszy na sztuce wyobrażeniowej doby obecnej. To samo odnosi się do spraw życia na ziemi. Wiemy, że droga postępu znaczone jest słupami krwawych i bezwzględnych rewolucyj.

To wszystko, co dokonywa się w drodze ewolucji, jest wyraźnym skutkiem rewolucji, która dokonać się mogła gdzie indziej i znacznie wcześniej, ale dokonać się musiała. Odkrycie tej wielkiej prawdy zawdzięczamy twórcy teorii materializmu dziejowego Karolowi Marxowi. Prawda ta została pominięta przez następców Comte'a, skutkiem czego pozytywizm, pomimo to, że wydał myślicieli bardzo wysokiej klasy, nie zdołał wywrzeć decydującego wpływu na historję kultury ostatnich czasów.

Największym z następców Comte'a jest niewątpliwie Ernest Mach, jeden z najbezwzględniejszych krytyków metafizycznych załamania nauki współczesnej.

Jedną z największych zasług Macha jest to, że nie wahał się zepchnąć matematykę do poziomu trywialnej codzienności, na równi ze sprawami komunikacji i handlu. Koncepcja Macha nie odegrała zrazu żadnej roli w rozwoju matematyki współczesnej, która zabrnęła pod wpływem Jerzego Cantora w skrajny idealizm. Ale prace lat ostatnich, z którymi zapoznamy się w dalszym ciągu, potwierdzają ją w zupełności.

— Często nazywa się liczby — pisze Mach — „wolnemi tworam i umysłu ludzkiego“. Podziw dla ludzkiego ducha, który się tu ujawnia, jest zupełnie naturalny w obliczu gotowego, imponującego gmachu matematyki. Jednakże zrozumienie tych tworów znajduje znacznie lepszą podniętę w śledzeniu ich instyktowych początków i okoliczności, które uczyniły je potrzebnymi.²⁹

Mach nie widzi różnicy istotnej pomiędzy najwznioślejszemi konstrukcjami matematyki naszych czasów a rachunkami dzieci i ludów pierwotnych. Mach ma rację. Trzeba jednak pamiętać, że brak mu argumentów wystarczających na poparcie tego twierdzenia. Argumentów takich dostarczyć może jedynie przesłedzenie szczegółowe wszystkich członów pośrednich, od rachunków gospodarczych do systemu racjonalnej metamatematyki, i przekonanie się naoczne, że niema tam niczego innego prócz konsekwentnego wykonywania operacyj elementarnych takich wła-

²⁹ E. Mach: Erkenntnis u. Irrtum, p. 327.

śnie, jakie są potrzebne w rachunkach gospodarskich, oraz założań, które są ściśle sformułowaniem wyników takich operacji. Sprawą tą zajmiemy się w dalszym ciągu. Tutaj pragnę tylko zaznaczyć, że powołując się na ten gospodarski punkt wyjścia, zdaję sobie sprawę z odpowiedzialności tego kroku i liczę się z tem, że czytelnik oczekiwać będzie tego momentu, w którym przyjdzie mi wykreślić się sianem z moich obietnic i odwołać się do jakichś teoretycznych pryncypjów. Mam jednak pełną świadomość, że potrafię dotrzymać moich zobowiązań.

Z pośród filozofów współczesnych, którzy wiedzą o tem, że pomiędzy poznaniem naukowem, a tem poznaniem, z którym mamy do czynienia w życiu codziennem, niema istotnej różnicy, należy wyróżnić profesora Moritza Schlicka. Uczony ten zauważył, że stosowanie pojęcia prawdopodobieństwa do pomiarów wykonywanych w dostatecznie szerokich granicach jest niewłaściwe. Jeśli np. twierdzę, że odległość mojego mieszkania od uniwersytetu jest większa niż 10 *cm*, to wypowiadam sąd prawdziwy.³⁰ Rzeczywiście, gdybym takie sądy uważał za niepewne, to nie mógłbym zdefiniować pojęcia prawdopodobieństwa, bo poprostu nie miałbym się na czem oprzeć. Myślę, że ta uwaga posiada wielkie znaczenie dla zrozumienia roli elementarnych kryterjów zdrowego rozsądku. Kryterja te dają nam maximum osiągalnej pewności i dlatego właśnie wiemy, że te sądy, do których prowadzą, są prawdziwe.

Niemniej Schlick ulega złudzeniu, że istnieją sądy określające pewien stan rzeczy w sposób ścisły, i takie sądy nazywa *ex definitione* prawdziwemi.³¹

7. Walka o pogląd na świat, oparty na kryterjach zdrowego rozsądku, prowadzona była przez materialistów XVIII w. na terenie kartezjanizmu z jednej, a berkeleyanizmu i sensualizmu Locke'a i Condillaca z drugiej strony.

Przesąd substancjonalności duszy doprowadził Descartesa do paradoksalnego twierdzenia, że zwierzęta w przeciwieństwie do ludzi są maszynami. Otóż, jest jasne, że niema istotnej różnicy między człowiekiem a zwierzęciem. Jeśli zwierzę jest maszyną, to jest nią i człowiek. Na to niema rady. Myślicielem, który miał odwagę po raz pierwszy wygłosić publicznie tę prostą prawdę,

³⁰ Schlick: *Allgemeine Erkenntnislehre* p. 133.

³¹ *Ibid.*, p. 55.

jest Julien de la Mettrie (ur. 1709), autor słynnego dzieła: *L'homme machine*.

Jeden z twórców encyklopedji, Diderot, szydził otwarcie z Berkeley'a: „Była chwila szaleństwa — pisał — gdy czujący fortepian wyobraził sobie, że jest jedynym fortepianem na świecie i że cała harmonja wszechświata w nim się rozgrywa”.³²

Działalność tych myślicieli posunęła koncepcję zdrowego rozsądku bardzo daleko. Zdrowy rozsądek Sokratesa jest w porównaniu z nią mitologią.

Drugi okres rozrostu radykalnej krytyki, opartej na materialistycznym poglądzie na świat, rozpoczął się z chwilą opublikowania *Kapitału* Karola Marxa.

Historyczny związek dialektyki materialistycznej z irracjonalną dialektyką Hegla i sama nazwa, związana ściśle z irracjonalnymi asocjacjami, sprawiają, że odnosimy się do dialektyki materialistycznej z pewnem uprzedzeniem. W rzeczywistości, jak to już podkreśliłem poprzednio, jest ona nie tylko negacją irracjonalizmu, ale doktryną opartą w zupełności na zasadach zdrowego rozsądku. Siła dialektyki materialistycznej polega na radykalnem przeciwstawieniu się metafizyce idealistycznej i na wprowadzeniu metody konstrukcyjnej do socjologii. Redukcja pojęcia wartości ekonomicznej do pojęcia pracy ludzkiej, dokonana przez Marxa, nie ma nic wspólnego z mętami irracjonalizmu. Przeciwnie, jest wzorem ścisłości naukowej i niezwykłej prostoty.

O dialektyce Marxa pisze Bucharin co następuje:

U Marxa dialektyka, rozwój przeciwieństw, jest to prawo „bytu“, prawo ruchu materji, prawo ruchu w przyrodzie i w społeczeństwie. Przebieg myśli jest zewnętrznym wyrazem tego prawa. Metoda dialektyczna, dialektyczny sposób myślenia niezbędne są po to, by pojąć dialektykę przyrody.³³

Określenie to wydaje mi się niefortunne. Do tego, by pojąć zmiany zachodzące w przyrodzie, a w szczególności ten fakt, że każde wywołane w niej zaburzenie dąży do stanu równowagi, nie potrzeba wcale jakiejś osobliwej metody. Heglowi wydawało się, że zrozumieć ruch można tylko przy pomocy ruszającej się myśli. Był to oczywisty absurd. Przesąd zrodzony z tego niefortunnego konceptu jest źródłem nieporozumienia. Do tego, by

³² Por. Bucharin: *Teoria materializmu historycznego*, Warszawa 1927, p. 49.

³³ Por. Bucharin, l. c. p. 66.

pojąć zmiany zachodzące w przyrodzie, wystarczy zdrowy rozsądek i metoda konstrukcyjna, która prowadzi m. i. do ułożenia równania ruchu.

W każdym razie środki te wystarczą do takiego zrozumienia zmian przyrody, o jakie szło Marxowi i jego następcom. Jedynie wtedy, gdybyśmy chcieli wczuwać się w istotę ruchu w takim sensie, jak tego chce Bergson, moglibyśmy wraz z nim narzekać na nieudolność metody konstrukcyjnej. Ale tak wyrażonych ambicji przedstawiciele marksizmu wcale nie posiadają, skutkiem czego zupełnie niepotrzebnie wprowadzają zamieszanie pojęć, prawiąc o jakiejś osobliwej dialektycznej metodzie. Marx zdawał sobie jasno sprawę z niebezpieczeństw tkwiących w dialektyce Hegla.

W tej sfałszowanej postaci — pisze o niej — dialektyka była metodą niemiecką, gdyż jakgdyby usprawiedliwiała porządek istnienia. W swej racjonalnej postaci jest ona niedogodna dla burżuazji i jej teoretyków, gdyż objaśniając istniejący porządek, objaśnia również jego zaprzeczenie, oraz nieuniknione zniesienie, gdyż rozpatruje ona każdą formę w procesie ruchu, czyli z punktu widzenia zmienności, gdyż nie cofa się przed niczem, będąc praktyczną i z istoty swej rewolucyjną.³⁴

Główną tezę marksizmu jest zmienność. Polega ona, według słów Engelsa, na pojmowaniu świata jako procesu, t. j. jako czegoś, co znajduje się w nieustannym rozwoju.³⁵ Teza ta musi być dzisiaj przyjęta przez każdego filozofa, gdyż jest oparta na nie ulegających wątpliwości faktach przyrodniczych i historycznych. Gdybyśmy chcieli odrzucić tę tezę, zawikłalibyśmy się w przykre sprzeczności, lub — w najlepszym razie — bylibyśmy zmuszeni do bardzo sztucznych wybiegów. To samo odnosi się do drugiej zasadniczej tezy marksizmu, a mianowicie do ścisłej zależności życia duchowego od procesów fizjologicznych. Od czasu, kiedy zostało stwierdzone, że skutkiem uszkodzenia niektórych części mózgu możemy zapomnieć nasz język macierzysty, a pamiętać w dalszym ciągu język obcy, który znamy niedokładnie, trudno wątpić, że zależność ta jest zupełna.

Otóż, jak widzimy, uzasadnienie tych tez opiera się wyłącznie na wynikach badań nauk ścisłych, i niema żadnej potrzeby do odwoływania się do jakichś osobliwych metod rozumowania

³⁴ Plechanow, Podstawowe zagadnienia marksizmu, Warszawa 1923, p. 32.

³⁵ Por. A. Deborin: Wprowadzenie w filozofję dialektyczeskiego materializmu. Moskwa-Leningrad 1931, p. 205.

celem ich uzasadnienia. Wystarczy tylko pamiętać, że zakres stosowności pojęć jest zawsze ograniczony, tak właśnie, jak to czyni Bucharin, pisząc:

Rozróżnienia te, powtarzamy, są trafne, jeśli je rozumieć *dyalektycznie*, t. j. w określonych granicach, warunkowo, „zależnie od okoliczności”.³⁶

Jest jasne, że gdyby niczego więcej nie przypisywało się dialektyce materialistycznej, to wszelka dyskusja byłaby zbyteczna.

Jest faktem, że rozumowania marksistów utrzymane są w tych właśnie granicach. Dzieła czołowych marksistów współczesnych, w szczególności Bucharina, nie wykraczają w żadnym punkcie poza granice zdrowego rozsądku. Można nawet powiedzieć, że pisane są niezwykle jasno i mogłyby być postawione pod tym względem na wzór filozofom zachodnim. Jedynym słabym punktem tych autorów jest trudna do wytłumaczenia słabość w stosunku do tradycji heglowskiej. Z chwilą, kiedy zaczyna się mówić o Heglu, wypływa natychmiast na powierzchnię zamieszanie pojęć. O Heglu mówi się równie serjo i tym samym stylem, jak o innych sprawach, i jednym tchem cytuje się nieprawdopodobne heglowskie bzdury obok najpoważniejszych naukowych teoryj. Ma się wtedy wrażenie, że autor popadł w chwilowy obłąd, lub kpi sobie z czytelnika. Na obronę marksistów można przytoczyć jedynie tę okoliczność, że tę samą słabość można spotkać u zawodowych logików.

Można jeszcze zauważyć, że mamy tu do czynienia z wtórnymi objawami prześladowań, jakim marksizm ulegał w ciągu lat przedwojennych. Jeśli ludzie kierujący się naogół zdrowym rozsądkiem nie umieją czy nie chcą zgodzić się na pewne prawdy, które są dla nas oczywiste, to wtedy łatwo może obudzić się w nas tendencja do irracjonalnego odruchu. W okresie, kiedy całe niemal otoczenie starało się odwieść mnie od zajmowania się logiką, dowodząc, że jest to bezpłodna zabawka, obserwo wałem w sobie takie tendencje. Sytuacja była tem cięższa, że nieliczna grupa zawodowych logików weszła na drogę obcego mi formalizmu. Kto wie, na czym byłoby się skończyło, gdyby ten stan rzeczy nie uległ zmianie?

Żeby czytelnik miał sposobność zorientować się w stosunku marksistów do dialektyki Hegla, przytoczę następujący przykład, zaczerpnięty z Bucharina. Píše on:

³⁶ Bucharin, l. c. p. 76.



Pozostaje nam rozpatrzeć ostatnią stronę metody dialektycznej, a mianowicie teorię skoków. Wiadomo, że nadzwyczaj rozpowszechnione jest mniemanie, jakoby „przyroda nie robiła skoków“ (*natura non facit saltus*). Mądrego tego orzeczenia używa się zazwyczaj dla „solidnego“ dowiedzenia niemożliwości rewolucji, a jednak rewolucje wciąż się odbywają wbrew całej gorliwości panów profesorów.³⁷

Trudno sobie wyobrazić bardziej przekonującą argumentację. Nie wiadomo tylko, dlaczego ma to być metoda dialektyczna, bo przecież jest jasne, że mamy tu proste powołanie się na fakty. Ale właśnie o to idzie, że autorowi wcale to nie wystarcza. Może właśnie dlatego, żeby wywołać w czytelniku wrażenie, że przecież mamy tu do czynienia z jakąś osobliwą metodą, pyta: Ale czy przyroda istotnie tak jest wstrzemięźliwa, jak to się mówi?

Po tem, co słyszeliśmy, pytanie to mogłoby wydawać się zbytecznym, ale ostatecznie nie zaszkodziłoby tu przypomnieć jeszcze o katastrofach kosmicznych takich, jak odrywanie się satelitów, o wybuchach wulkanów, odrywaniach się skał i t. d. i *last not least* o fizyce kwantowej.

Zamiast tego wszystkiego znajdujemy cytaty z *Nauki logiki* Hegla, w którym m. i. figuruje zdanie następujące:

Okazuje się jednak, że zmiana istoty (tego, co jest, co istnieje, *des Seins*) polega nie tylko na przejściu jednej wielkości w drugą, lecz także na przejściu od *jakości do ilości i odwrotnie*; na podstawie *czegoś innego, różnego* (*Anderswerden*), na przerywaniu stopniowości (*ein Abbrechen des Allmählichen*), na jakościowej różnicy z poprzedniem znikającym istnieniem.³⁸

Gdybym na chwilę przypuścił, że Bucharin rozumie te słowa, nigdy nie potrafiłbym wziąć go na serjo. Wolę myśleć, że cytuje je przez osobliwy snobizm i chęć epatowania czytelnika.

O wiele gorzej przedstawia się dialektyczna poza u Tahlheimera, który występuje otwarcie przeciw logice, identyfikując ją z doktryną Arystotelesa, w imię dialektyki heglowskiej. Tahlheimer atakuje zasadę identyczności $A = A$ w imię ciągłego, heraklitowskiego ruchu i opisuje się frazesami godnymi Hegla.

Przypuszczam, że studenci chińscy, dla których wykładali w Moskwie, musieli popaść pod jego wpływem w rozpaczliwy stan duszy.

Na tego rodzaju argumenty jest jedna, prosta odpowiedź:

³⁷ L. c. p. 70.

³⁸ L. c.

Heraklitowskie zmiany, zachodzące w literze *A*, nie są na tyle silne, żeby wyrzucić mogły jakikolwiek wpływ na nasz stosunek do tej litery. Dopóki to nie nastąpi, liczenie się z tego rodzaju zmianami byłoby prostą pedanterją, która z natury rzeczy musi doprowadzić do paradoksów. Oczywiście, istnieją inne zmiany, które mogą sprawić nam poważny kłopot. Tak np. może ktoś poza naszymi plecami podstawić na miejsce litery *A* inną literę i nigdy nie mamy bezwzględnej pewności, czy to nie nastąpiło. Ale ten stan rzeczy może martwić tylko ludzi o zbyt wielkich pretensjach, którzy chcieliby za wszelką cenę pewności absolutnej, powiedzmy otwarcie: nadludzkiej, bo zwykła, ludzka pewność wcale ich nie bawi. Otóż, na pretensje tego rodzaju niema lekarstwa. To jest mniej więcej tak, jakgdyby ktoś nie chciał jechać pociągiem ze względu na możliwość katastrofy i dla pewności wybrał się w podróż pieszo. Z takimi zagadnieniami nie będziemy się liczyli.

Z rozważań tych wynika, że materializm dziejowy, podobnie jak pozytywizm, zatrzymał się na mieliźnie powstałej przez niedomaganie tkwiące u samego dna nauk ścisłych. Jeśli te nauki przejrzymy, jako coś gotowego, wraz z ich wszystkimi niedopowiedzeniami i naleciałościami idealistycznej metafizyki, nie zdołamy posunąć się ani o krok naprzód. Nawet najbystrzejszy umysł i najbardziej odporny na irracjonalne męty nie wybrnie z chaosu narzucających się zagadnień, jeśli nie zabierze się do pracy od samego dna, jeśli nie zajrzy do źródła najprostszych ludzkich wiadomości, takich właśnie, z jakimi mamy do czynienia, ucząc się tabliczki mnożenia. Bez względu na to, czy kieruje nami pragnienie walki o wzniesienie życia na ziemi na nieznane dotąd wyżyny, czy też idzie nam poprostu o zdobycie prawdy i zaspokojenie niecierpliwej ciekawości, radzi nie radzi musimy zabrać się do mrówczej pracy nad podstawami nauki i to nad podstawami najbardziej elementarnymi. Znajdziemy tam niemałe zamieszanie pojęć i różnice zdań bardzo jaskrawe. Będziemy musieli zdobyć się na wielki wysiłek i cierpliwość upartą. Jeśli tak będzie rzeczywiście, to owoce naszej pracy wynagrodzą nam ją stokrotnie. Uzyskamy wiarę w własne siły, wiarę w jasną przyszłość ludzkości i niezależność wewnętrzną od szerzącego się dokoła nas zamętu pojęć. Myślę, że są to wartości, dla których warto poświęcić bardzo wiele.

Rozdział II.

Rozwój pojęcia liczby.

1. Wiemy doskonale, że bardzo łatwo jest nauczyć każde dziecko liczenia na kamykach lub jabłkach. Trudności zaczynają się dopiero, kiedy przejdziemy do wprowadzenia liczb czystych. Zjawisko to wystąpiło jaskrawo w historii myśli ludzkiej. Arytmetyka Egipcjan i Babilończyków nie wychodziła poza sferę praktycznych zastosowań i dlatego była najzupełniej jasna. Trudności zaczęły się dopiero z chwilą, kiedy Grecy stworzyli pojęcie liczby naturalnej. Ten niezmiernie ważny krok dokonał się w sposób trudny do zbadania, niemniej jest pewne, że daleki był od prostoty i przejrzystości, z jaką łączą się dla nas sprawy arytmetyki liczb naturalnych. Arytmetyka Greków była częścią metafizyki i nigdy nie wywikłała się z niepokojącego zagadnienia, jak to jest możliwe, żeby coś takiego, jak liczby naturalne, istniało samodzielnie.

Jest wiadome, że pitagorejczycy doszli do przekonania, że liczby naturalne są jedyną prawdziwą substancją, i że do nich sprowadzali istnienie wszechrzeczy. Wszystko inne było tylko stosunkiem liczb naturalnych i nie posiadało bytu samodzielnego. Z tą koncepcją liczby łączył się kult mistyczny i przerażenie tajemnicą istnienia, żyjące do dzisiaj w duszach adeptów metafizyki.

Pitagoras zauważył, że długości strun, odpowiadających czterem znanym mu tonom: *C*, *F*, *G*, *c*, wyrażają się pewnymi stosunkami liczb 1, 2, 3, 4.

Jednocześnie widząc, że w systemie dziesiętnym — pisze X. Pawlicki — który on pierwszy wprowadził do Grecji ze Wschodu, z pierwszych 10 liczb wszystkie inne powstają przez dodawanie, orzekł, że wszystkie zawarte są w pierwszej dekadzie. Co więcej, ponieważ 10 pierwszych liczb czyli pierwsza dekada powstaje przez dodawanie czterech pierwszych ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$), tworzących podstawę mu-

zycznych spółdźwięków, wydawało się jemu, że w pierwszej „boskiej czwórce“ ($\tau\epsilon\tau\rho\alpha\kappa\tau\upsilon\varsigma$) mieści się pierwsza dekada, tak jak w tej wszystkie liczby następne. A nie tylko wszystkie liczby możebne rodzą się z pierwszej boskiej $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\kappa\tau\upsilon\varsigma$, lecz także wszystkie harmonje. Będzie ona twórczynią wszelkich praw duchowych i materialnych, bo i te przecież harmonją być muszą.¹

Umyślnie zatrzymuję się nad temi spekulacjami. Zobaczymy w dalszym ciągu, że element spekulacyjny, który zrodził się razem z matematyką grecką, dożył naszych czasów i jeszcze dziś jest bardzo silny, jakkolwiek został ujęty w karby. Trudno rozstrzygnąć, czy element ten wpływał w jakiś sposób na rozwój twierdzeń matematycznych; jest natomiast pewne, że hamował w najwyższym stopniu rozbudowę podstaw matematyki.

Jest dobrze wiedzieć, że żyjący w II. w. po Chr. pitagorejczyk Nikomachos z Gerazy nie miał odwagi wyprowadzać wszystkich liczb naturalnych z jedynki przy pomocy kolejnego dodawania. Był zdania, że nie tylko jedynka, ale i dwójka posiadają wyjątkową pozycję w świecie liczb, gdyż prawo:

$$a \times a > a + a$$

jest spełnione przez wszystkie liczby naturalne z wyjątkiem jedynki i dwójki.² Jest jasne, że dla Nikomachosa były liczby pewnego rodzaju fetyszami.

Kult liczb naturalnych uwidocznia się w dziele Nikomachosa p. t. *Wstęp do arytmetyki* na każdym kroku. Nikomachos zajmuje się między innymi teorią liczb *doskonałych*, *ułomnych* i *przepełnionych*.

Liczyby doskonałe są równe sumie liczb, które są ich czynnikami. Liczby większe od takiej sumy nazwano ułomnemi, liczby mniejsze przepełnionemi.³

Tak np. liczba 6 jest liczbą doskonałą, bo mamy:

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

liczba 8 jest liczbą ułomną, bo mamy:

$$1 + 2 + 4 < 8,$$

liczba 12 jest liczbą przepełnioną, bo mamy:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 > 12.$$

¹ Pawlicki, l. c. p. 200.

² C. Robbins and Karpiński: *Nicomachus of Gerasa*, New York 1926 p. 117.

³ Dickson: *History of Theory of Numbers*, Washington 1919, p. 4.

Uderzającym jest tutaj, że banalny czynnik 1 doliczany jest stale do każdej sumy czynników. Gdybyśmy zechcieli go opuścić, to wtedy natychmiast liczba 6 stałaby się z doskonałej ułomną. Nie bacząc na te niebezpieczeństwa, zapuszczał się Nikomachos w metafizyczne argumenty, aby tylko uzasadnić doniosłość tej klasyfikacji. O liczbach ułomnych pisze:

To jest tak, jakgdyby jakiemuś zwierzęciu brakowało naturalnej liczby członków lub części, albo jakgdyby jakiś człowiek miał tylko jedno oko, jak w poemacie „I jedno okrągłe oko było umocowane pod jego brwią”; albo tak, jakgdyby ktoś był jednoreki, albo miał mniej niż pięć palców u jednej ręki, albo gdyby brakło mu języka lub jakiegoś innego członka.⁴

A potem wypowiada słowa następujące:

Wychodzi na to, że tak, jak piękne i doskonałe rzeczy są nieliczne i łatwe do zliczenia, podczas gdy brzydkie i złe są rozprzestrzenione daleko, tak też i przepelnione i ułomne liczby znajdujemy w wielkiej ilości i nieregularnie rozmieszczone, bo metoda odkrywania ich jest nieregularna, ale doskonałe liczby są łatwe do wyliczenia i uporządkowane w ciąg należyty.⁵

Umyślnie cytuję te powiedzenia, bo jakkolwiek nic podobnego nie znajdujemy już w traktatach matematycznych, to jednak spotykamy się z bardzo pokrewnymi metodami wartościowania w rozmowach z bardzo wybitnymi matematykami, którzy baczą na to, żeby ile możności nie wychodzić poza pojęcia odziedziczone.

Koncepcja liczb doskonałych, ułomnych i przepelnionych wywarła kolosalny wpływ na średniowiecze, a jeszcze do dziś dnia nie przestała być aktualna. Żyjący w wieku IX. Alcuin przypisywał wszystkie nieszczęścia ludzkości temu, że w arce Noego znalazło się 8 osób, a 8 jest przecież liczbą ułomną.⁶

Prócz liczb ułomnych, doskonałych i przepelnionych były także liczby *zaprzyjażnione*, t. j. takie, że suma czynników jednej daje drugą. Takie np. są liczby 284 i 220.

Jamblichos pisze, że jest nieprawdą, jakoby liczby doskonałe były miłością. Miłością są liczby *zaprzyjażnione*.⁷

Liczby *zaprzyjażnione* są jeszcze do dzisiaj aktualne, zwa-

⁴ Robbins a. Karpiński, l. c. p. 208.

⁵ L. c. p. 209.

⁶ Dickson, l. c. p. 3.

⁷ Dickson, l. c.

szcza w Ameryce, gdzie zajmuje się nimi Dickson i Carmichael. Dickson wynalazł nawet nowy gatunek liczb zaprzyjaźnionych, zaprzyjaźnione trójki.

2. Zagłębianie się w istotę liczb naturalnych czyniło sprawę symboliki liczbowej zupełnie nieaktualną. Grecy nie posiadali prostych znaków liczbowych. Liczby 1, 2... 9, 10, 20... 100 oraz 100, 200... 1000 oznaczali literami starego alfabetu greckiego.

Dodawanie wykonywali, pisząc liczby obok siebie, przyczem na końcu u góry umieszczano przecinek. Mnożenie charakteryzowano przy pomocy znaku $\times$, wykonywano je jednak, podpisując jeden czynnik pod drugim i podkreślając, tak jak to dziś robi się z dodawaniem. Ułamki przedstawiano w sposób dość zażyły: Ułamek $\frac{17}{25}$ pisano: $\iota\zeta''\kappa\epsilon''\kappa\epsilon''$, gdzie $\iota\zeta'$ oznacza 17, $\kappa\epsilon''$ oznacza 25. Niekiedy umieszczano mianownik na miejscu dzisiejszego wykładnika.

Działania na ułamkach były znane już Babilończykom. Można przypuszczać, że dostały się do Grecji z Babilonu, gdyż są dowody wpływu metod babilońskich na naukę grecką.⁸

Niemniej metafizyczna różnica pomiędzy liczbą naturalną a ułamkiem, polegająca na tem, że liczby naturalne można było uważać za samodzielne byty, podczas gdy ułamki zarysowywały się jako fikcje, sprawiła, że nie spostrzeżono ścisłej analogii pomiędzy arytmetyką liczb naturalnych i arytmetyką liczb wymiernych. Karpiński twierdzi,⁹ że przewaga względów metafizycznych wystąpiła u Greków właśnie dlatego, że nie posiadali porządnie opracowanego systemu znakowania.

Cała sprawa sprowadza się do faktu, że pojęcia ułamka nie można na żaden sposób wyprowadzić z pojęcia liczby naturalnej. Żeby zdefiniować ułamek, trzeba odwołać się do pojęcia odcinka, klasy, relacji albo wyrażenia. Ale w każdym z tych wypadków wyjątkowa rola liczb naturalnych rozplywa się w nicłość, a tej konsekwencji Grecy chcieli uniknąć za wszelką cenę.

W zajmującej rozprawie p. t. *Warum haben die Griechen die Irrationalzahlen nicht aufgebaut?*¹⁰ zwrócił Heinrich Scholz uwagę na fakt, że istotną przyczyną, dla której Grecy nie zdobyli się

⁸ Por. O. Neugebauer: *Zur vorgriechischen Mathematik*. Erkenntnis 1930.

⁹ L. c.

¹⁰ P. Hasse u. Scholz: *Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928.

na stworzenie pojęcia liczby niewymiernej, było to, że nie posiadali pojęcia liczby wymiernej. Na poparcie tej tezy przytacza Scholz słowa Platona wypowiedziane w *Republice*, z których wynika, że Grecy uważali ułamki za utwory paradoksalne. Byli zdania, że jednostki nie można dzielić na części, nie wierzyli więc w istnienie ułamków. Działania na ułamkach tolerowali jako czynność czysto praktyczną, pozbawioną naukowej wartości. W tych warunkach nie można się dziwić, że ułamki zaliczane były do świata złudy i z lekceważeniem pozostawione na boku.

Było to tem łatwiejsze, że teoria stosunków geometrycznych stworzona przez współczesnego Platonowi Eudoxosa, umożliwiała operowanie ułamkami przez omówienie, bez wprowadzania osobnych znaków. Wiadomo, że zamiast pisać: $a = \frac{3}{5} b$, możemy posłużyć się odcinkiem pomocniczym k i powołać się na równości: $a = 3k$, $b = 5k$. Metoda ta wystarcza dla celów geometrycznych najzupełniej.

Z rozważań, jakie znajdujemy w *Metafizyce* Arystotelesa, zdaje się wynikać, że filozof ten był na drodze do wyzwolenia się od przesądu o prymacie liczb naturalnych. Arystoteles nie uważał liczb naturalnych za byty samodzielne i poszukiwał jednostek samodzielnych w sferze życia codziennego. Tutaj jednak natrafił na płynność pojęć popularnych i zgubił się w dialektycznych dociekaniach na ten temat. I tak zajął się Arystoteles tą sprawą, że cechę jedności posiada w wyższym stopniu to, co jest z natury zwarte, niż to, co jest zwarte w sposób sztuczny. Zwarte jest to, czego ruch jest jeden i inny być nie może.¹¹

Mamy tu jakgdyby powołanie się na pojęcie ciała sztywnego, od którego już nie było daleko do oparcia się na geometrycznym odcinku. Niemniej Arystoteles poprzestał na dociekaniach ontologicznych i nie wyciągnął z nich narzucających się konsekwencji.

Jest dobrze wiedzieć, że przesąd o prymacie liczb naturalnych utrudniał niezmiernie pogodzenie się z coraz to nowymi gatunkami liczb, jakie nasuwały się w rozwoju matematyki. O odkryciu liczb ujemnych pisze Young co następuje:

Pierwszym, jak się zdaje, który spostrzegł istnienie ujemnych pierwiastków równania kwadratowego, był Indus Bhaskara. W dziele, pisanem około r. 1150 po Chr., podaje on 50 i — 5 jako pierwiastki równania $x^2 - 45x = 250$; „lecz drugiej wartości“ — powiada on —

¹¹ Metaph. V. 6.

„nie należy brać w tym przypadku, gdyż jest niewłaściwą; ludzie nie uznają pierwiastków ujemnych“. Istotnie przez całe jeszcze stulecia po nim ludzie nie uznawali pierwiastków ujemnych. Matematyk niemiecki Michael Stifel mówi w r. 1544 o liczbach *absurdycznych* lub *fikcyjnych* *niżej zera*, które powstają, gdy *liczby rzeczywiste nad zerem* odejmujemy od zera.¹²

Liczby zespolone były jeszcze w XIX w. uważane za utwory fikcyjne, a psycholog niemiecki Teodor Lipps umieścił je na jednej liście z przedmiotami sprzecznymi takimi, jak kwadratowe koła.

3. Filozofja pitagorejska głosiła, że właściwą substancję stanowią czyste liczby, a zjawiska rzeczywiste są stosunkami liczbowymi. Jeszcze Nikomachos z Gerazy, który pod wpływem Platona i Arystotelesa przyjmował prócz ilości inne kategorie, uważał liczby za „najwyższy gatunek form, z którego inne formy są zrobione i któremu są podporządkowane“.¹³

Modyfikacje te były spowodowane wielką katastrofą, jaką pitagoreizm przeżył jeszcze pod wpływem prac swojego mistrza. Źródłem tej katastrofy było zagadnienie stosunku liczbowego pomiędzy bokiem, a przekątnią kwadratu. Zagadnienie to, na pozór proste i elementarne, doprowadziło do zjawisk zupełnie nowych i zupełnie nieoczekiwanych.

Badania przeprowadzone w tym kierunku przez Pitagorasa doprowadziły do odkrycia odcinków niewspółmiernych. W szczególności przekonał się Pitagoras, że bok kwadratu nie jest współmierny z przekątnią. Twierdzenie to jest dziś powszechnie znane. Podam tu jego dowód, który wydaje mi się osobliwie prosty.

W danym kwadracie odcinam na przekątni c bok a . Pozostały odcinek oznaczam przez a_1 . W punkcie M , dzielącym przekątnię w stosunku $a : a_1$, buduję prostopadłą do przekątni. W ten sposób powstaje trójkąt prostokątny, równoramienny AMN . Przekonujemy się z łatwością, że punkt N , w którym nasza prostopadła spotyka bok AC , dzieli ten bok w stosunku $a - a_1 : a_1$.

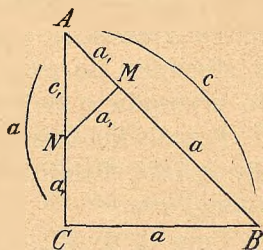


Fig. 1.

¹² Dwanaście wykładów o zasadniczych pojęciach algebry i geometrii, tłum. Silbersteina.

¹³ Robbins i Karpiński l. c.

Przypuśćmy teraz, że istnieje pewien odcinek j , który w odcinku c mieści się bez reszty γ razy, a w odcinku a mieści się bez reszty α razy. Mamy tedy: $a = \alpha j$, $c = \gamma j$. Oznaczmy teraz różnicę $\gamma - \alpha$ przez α_1 , różnicę $\alpha - \alpha_1$ przez γ_1 , a odcinek $a - \alpha_1$ przez c_1 . Widzimy, że:

$$c_1 = \gamma_1 j, \quad a_1 = \alpha_1 j.$$

Okazuje się tedy, że jeśli bok kwadratu i jego przekątnia mają wspólną miarę, to musi istnieć kwadrat mniejszy, którego bok i przekątnia mają tę samą wspólną miarę. W ten sposób otrzymujemy nieskończony ciąg kwadratów coraz to mniejszych, których bok i przekątnia posiadają stale tę samą miarę. Otóż, jest jasne, że odcinków mniejszych od c , mierzalnych przy pomocy tej samej miary j , może być co najwyżej $\gamma - 1$, nie możemy więc mieć nieskończenia wielu różnych od siebie kwadratów o przekątnej mniejszej od c , w których odcinek j mieściłby się bez reszty. Przypuszczenie nasze okazuje się tedy fałszywe i musimy się zgodzić z tem, że niema takiego odcinka, któryby zarówno w boku jak i w przekątnej kwadratu mieścił się bez reszty.

Odkrycie tego twierdzenia zrobiło na Pitagorasie niezmiernie wrażenie. Było to pierwsze zetknięcie się z tem, co nazywa się ciągiem nieskończonym. Było to pierwsze przekroczenie granic arytmetyki finitystycznej.

Sleszyński pisze o tem odkryciu co następuje:

Podanie głosi, że Pitagoras, chociaż złożył za nie bogom ofiarę ze 100 byków, nakazał jednak uczniom swoim zachować to odkrycie w największej tajemnicy. Uważał je bowiem za niebezpieczne dla nauki swojej, podług której wszystko miało być liczbą.¹⁴

To zjawisko, połączone z innemi objawami zahamowania w stosunku do procesów nieskończonościowych, dało podstawę do przesądu o finityzmie Greków.

Przeciwko temu przesądowi wystąpił z całą stanowczością Sleszyński. Ostatnio poruszył tę sprawę Scholz w dyskusji ze Spenglerem.¹⁵

Cała ta dyskusja jest niezmiernie ważna i dlatego chciałbym zatrzymać się przy niej nieco dłużej.

Przesąd o finityzmie Greków jest wynikiem prostego niepo-

¹⁴ Jan Sleszyński: O pierwszych stadiach rozwoju pojęć nieskończonościowych.

¹⁵ L. c.

rozumienia. Idzie on tak daleko, że nawet geometrię Euklidesa, która jest oparta na pojęciu nieskończenie długiej linii prostej, uważa się za produkt myśli finitystycznej. W jednym z popularnych swoich wykładów wygłosił takie twierdzenie słynny twórca mechaniki falowej prof. Schrödinger, zestawiając geometrię Euklidesa z świątynią grecką.

Otóż, trzeba zaznaczyć, że w świecie greckim, który był skończonym i w którym ruch po kole uważany był za najdoskonalszy,¹⁶ odkrycie nieskończenie długiej linii prostej było trudne i wymagało osobliwego wysiłku wyobraźni twórczej. Umysły przyzwyczajone od dzieciństwa do operowania pojęciem linii równoległych, które nigdy się nie przecinają, potrzebują pewnego wysiłku, żeby zrozumieć, że idzie tu o coś, co nie tylko nie rozumie się samo przez się, ale jest nawet bardzo trudne do intuicyjnego opanowania. Jest dobrze przypomnieć, że wszystkie przykłady linii równoległych, jakie podaje się w szkole, a mianowicie linie pionowe i promienie słońca, są właśnie przykładami linii, których punkt przecięcia się jest wprawdzie bardzo odległy, ale niemniej istnieje. Przykładów linii równoległych podać nie możemy i skutkiem tego musimy uważać je za fikcję. Z tym faktem liczy się współczesna fizyka, która wraz z ogólną teorią względności Einsteina przejęła geometrię riemannowską, nie dopuszczającą istnienia linii nieskończonych. Jeśli zwrócimy uwagę na ten fakt, to nasunie nam się twierdzenie, że właśnie umysł dzisiejszego człowieka jest finitystyczny w przeciwieństwie do greckiego. Rzeczywiście, Grecy, których świat był stale zamknięty, stworzyli pojęcie linii nieskończonej, natomiast fizycy dzisiejsi, którzy muszą liczyć się m. i. ze zjawiskiem nieskończenie rozszerzającego się świata, oparli się na koncepcji linii prostej skończonej.

4. Arytmetyka grecka zamarła w ekstatycznym podziwie dla tajemniczych właściwości liczb naturalnych. Odrodzenie dokonało się na gruncie rachunków formalnych dzięki wielkiemu, zbiorowemu wysiłkowi Arabów (Al Battani, Al Biruni, Nasir Eddin i i.). Arabowie zabrali się do studiowania matematyki greckiej już w w. IX. i zapalili się do zadań, jakie w niej napotkali. Sprawy metafizyczne pozostawili na boku. Nie zastanawiali się nad istotą liczb naturalnych, ułamków, ani liczb nie-

¹⁶ Ar.st. Metaph. V 6.

wymiernych, ale zato stworzyli dzisiejszy system liczb dziesiętnych i operowali sinusami i cosinusami. Dzięki tym rezultatom czysto formalnym stali się właściwymi twórcami algebry i trygonometrii. Badania ich wywarły wpływ na słynnego Leonarda Fibonacciego (XII.—XIII.), a potem na Levi ben Gersona (XIV.), który według słów Gino Loria¹⁷ uzupełnił je ważnymi i oryginalnymi przyczynkami. Ale dopiero w końcu XV. w. wyzwoliła się Europa z kultu liczb naturalnych przekazanego jej przez Greków za pośrednictwem Boecjusza. Rozwój interesów handlowych sprawił, że zagadnienia teorii liczb doskonałych, ułomnych, przepełnionych i zaprzysiężonych zeszły na plan drugi. Pierwsza arytmetyka, w której zagadnienia te zostały pominięte, wyszła w Wenecji w r. 1484. Była to arytmetyka handlowa, napisana przez Pietra Borgo.¹⁸ Pierwszy podręcznik trygonometrii wyszedł w r. 1533. (Johann Müller, zwany Regiomontano).¹⁹

Wiek XVI. poszedł drogą formalną, wskazaną przez Arabów. Rozwiązanie równania stopnia 3-go, dokonane przez Scipio Ferro, było wynikiem czysto rachunkowym, można powiedzieć pazygraficznym, gdyż, jak wiadomo, nie posiadało wartości praktycznej.

Ale dopiero w w. XVII. rozpoczęła się systematyczna praca nad ustaleniem znaków liczbowych. Historycy wymieniają nazwiska trzech badaczy: Oughtreda, Herigone'a i Leibniza. Wiadomo, że Leibniz przez ustalenie doskonałej, do dziś dnia utrzymującej się symboliki rachunku nieskończonościowego stał się jego współtwórcą. Leibniz był entuzjastą symboliki i spodziewał się po niej wielkiego przewrotu w nauce.

Śmiem powiedzieć — pisał do L'Hopitala — że to jest ostatni wysiłek umysłu ludzkiego (*Characteristica generalis*) i że z chwilą, kiedy ten projekt będzie przeprowadzony, pozostanie ludziom tylko pragnienie szczęścia, bo będą mieli przyrząd, który służyć będzie do upojenia umysłu w niemiejszym stopniu, jak teleskop służy do doskonałego widzenia.²⁰

Swoją charakterystykę ogólną określa Leibniz w sposób następujący w tym samym liście:

Jeden z sekretów analizy polega na charakterystyce, t. j. na sztuce zręcznego użycia użytecznych znaków.²⁰

¹⁷ G. Loria: *Storia delle Matematiche*, Torino 1929, p. 422.

¹⁸ V. artykuł G. E. Smitha, *Isis*, Vol. VIII (1).

¹⁹ Loria l. c.

²⁰ Cytowane w artykule Florjana Cajori, *Isis*, Vol. VII (3), p. 417.

O poglądzie Leibniza na liczby naturalne pisze Hölder:

Leibniz nie mówi całkiem wyraźnie, jak pojmuje liczbę; ponieważ jednak formuły:

$$2 = 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 3 + 1$$

oznacza jako definicje liczb 2, 3, 4..., możemy przyjąć, że chce uważać liczbę za znak miejscowy [systemu dziesiętnego liczb]²¹... i posuwanie się w szeregu o jeden człon oznacza jako dodawanie liczby 1.²²

Koncepcja Leibniza była genialna, zawierała jednak jedną ujemną stronę. Znak różniczki dx wprowadzony przez Leibniza pokrywał absurdalne pojęcie nieskończenie małej liczby, które groziło uwikłaniem się w sprzeczności. W ciągu w. XVIII. zaczęła się krytyka tego pojęcia (d'Alembert), w początkach w. XIX. zabrano się do systematycznej pracy nad wyeliminowaniem go z matematyki (Cauchy, Abel). Do tych spraw powrócę w dalszym ciągu.

Tutaj zaznaczę tylko, że z całej tej dyskusji zrodziła się świadomość, że znaków nie możemy tworzyć dowolnie, bo grozi nam uwikłanie się w sprzeczności. Na tem tle zrodził się w ciągu w. XIX. nawrót do realistycznego pojmowania liczb naturalnych, o którym wspomniałem poprzednio.

Niemniej badania przyrodnicze i psychologiczne z jednej strony, a z drugiej niepowodzenia prac nad sprowadzeniem liczb rzeczywistych do liczb naturalnych, spowodowały w drugiej połowie XIX. w. nawrót do koncepcji znakowej, przyczem jako gwarancja przeciw sprzeczności miało figurować doświadczenie przyrodnicze.

Helmholtz pisał:

Uważam arytmetykę czyli naukę o czystych liczbach za metodę, zbudowaną na czysto psychologicznych faktach, która uczy prawidłowego posługiwania się systemem znaków (mianowicie liczb) o nieograniczonym zakresie i nieograniczonej możliwości wydoskonalenia. Arytmetyka bada mianowicie, jakie rozmaite sposoby łączenia tych znaków (działania rachunkowe) prowadzą do tego samego wyniku.²³

Myślę, że Helmholtz odkrył istotę arytmetyki.

Frege, krytykując to zdanie, powiada, że tutaj znaki uzyskały siłę magiczną. Frege sądzi, że Helmholtz pomieszał teorię

²¹ Uwaga autora.

²² Die mathematische Methode, p. 163.

²³ Philosoph. Aufsätze, cytowane przez Fregego.

z praktyką, i dodaje, że nigdy nie spotkał pomysłu mniej filozoficznego.²⁴

Argument Fregego jest zajmujący z tego powodu, że porusza wątpliwość, jakoby odwoływanie się do automatyzmu psychicznego było rodzajem magji. Trzeba jednak pamiętać, że w takim razie wszystko byłoby magją, bo bez takiego automatyzmu nie możemy ruszyć z brzegu. Zarzut, jakoby tu była pomieszana teoria z zastosowaniami, jest niesłuszny, bo twierdzenia o właściwościach wyrażań są w tym samym stopniu prawdziwe lub fałszywe, co twierdzenia o właściwościach liczb. Można raczej powiedzieć, że, myśląc o liczbach oznaczonych przez znaki, wprowadzamy do teorii sprawy należące do dziedziny interpretacji. Niemniej Frege miał rację o tyle, że w owym czasie nie było możliwem sprowadzenie sądów arytmetyki do sądów o wyrażeniach.

Z dyskusyj przeprowadzonych przez Fregego dowiadujemy się, że Heine i Tomae sformułowali zupełnie jasno koncepcję formalnej arytmetyki, którą później opracował Hilbert. Różnica pomiędzy Heinem a Tomaem sprowadza się do tego, że pierwszy uważa liczby za znaki, a drugi odrzuca zagadnienie, czem są liczby, jako pozbawione znaczenia.

Frege charakteryzuje stanowisko Tomaego w sposób następujący:

Z liczb potrzebne są w arytmetyce tylko ich znaki, które jednak traktowane są nie jako takie, ale jako figury; i potrzebne są reguły, na podstawie których posługujemy się temi figurami. Tych reguł nie uzyskujemy na podstawie znaczenia, ale stawiamy je na własną odpowiedzialność, przyczem zastrzegamy sobie zupełną wolność i nie uznajemy żadnej konieczności uzasadnienia tych reguł, przyczem jednak w momencie korzystania z tej wolności zerkamy w kierunku możliwych zastosowań, bo bez nich arytmetyka byłaby grą i nieczem więcej.²⁵

Stanowisko to podyktowane było niewątpliwie stwierdzeniem faktu, że jedynie sądy o znakach mogą być zupełnie określone, przynajmniej te, które są sformułowane na piśmie.

Jeśli odwołujemy się do liczenia kamieni lub orzechów, albo do mierzenia odcinków, to wychodzimy tem samem poza zakres tego, co możemy sformułować, żądając od czytelnika w pierwszym wypadku pewnych doświadczeń, na które możemy wska-

²⁴ Grundgesetze der Arithmetik, Jena 1903. Tom II, p. 140.

²⁵ Frege, l. c. p. 102.

zać jedynie w sposób ogólnikowy, a w drugim wypadku odwołujemy się do przedmiotów zgoła fikcyjnych.

Niemniej arytmetyka musi być budowana z myślą o jej zastosowaniu do mierzenia odcinków.

Znaki możemy liczyć, a więc tem samem możemy zbudować arytmetykę liczb naturalnych bez odwoływania się do kamieni lub jabłek. Inaczej jednak jest z mierzeniem. Możemy wprowadzić zbudować naukę o liczbach rzeczywistych, posługując się jedynie pojęciem znaku i pojęciem klasy, jak to uczynił Dedekind, ale w tej naszej konstrukcji musimy liczyć się z właściwościami odcinków. Znaczy to, że nie mówimy wprowadzić o odcinkach, ale konstruujemy relacje pomiędzy naszymi znakami, t. zn. pomiędzy liczbami naturalnymi, w ten sposób, że naśladują pewne właściwości odcinków, a mianowicie te, z którymi mamy do czynienia, wykonując geometryczne pomiary.

Z tego to powodu nauka o liczbach rzeczywistych powinna być poprzedzona nauką o mierzeniu geometrycznem. Nauka ta prowadzi nas do semantycznej koncepcji liczby i przyzwyczajają nas do uświadomienia sobie faktu, że w matematyce nie mamy do czynienia z jakimiś tajemniczymi bytami. To, że odcinki są właśnie takimi tajemniczymi bytami, jest słabą stroną tej teorii. Ale należy zgodzić się z myślą, że rola odcinków jest tymczasowa, a wtedy, kiedy ustalimy zasadnicze pojęcia arytmetyki, będzie czas na wyeliminowanie odcinków. Z taką odcinkową teorią liczb rzeczywistych zaznajomimy się w dalszym ciągu.

5. Wiara w prymat liczb naturalnych odziedziczona po pitagorejczykach była jeszcze w w. XIX. bardzo silna i dotrwała poniekąd do naszych czasów. Max Black pisze:

Weierstrass próbował dowieść, że wszystkie utwory matematyki mogą być zbudowane z liczb naturalnych; Kronecker poszedł dalej i oświadczył, że tylko liczby naturalne są „rzeczywiste” i że *wszystkie* rezultaty matematyki muszą odnosić się do liczb naturalnych. Zatem nietylko liczby niewymierne, ułamki i liczby zespolone nie miały nigdy pojawić się w matematyce, ale nawet liczby ujemne były tabu. Jak Kronecker sam powiedział w efektownem zdaniu, które może jeszcze raz przetrzymać powtórzenie „Bóg zrobił liczby naturalne; wszystko inne jest ludzkim wymysłem”.²⁶

Namiętnym zwolennikiem prymatu liczb naturalnych był słynny matematyk francuski Henryk Poincaré, jakkolwiek daleki

²⁶ Max Black: *The Nature of Mathematics*. London, 1933, p. 177.

był od przypisywania im bytu samodzielniego. Poincaré sądził, że nie możemy myśleć o sprowadzeniu pojęcia liczby naturalnej do pojęć prostszych, bo nie możemy zbudować żadnego sądu bez odwołania się milczącego do pojęcia jedynki lub dwójki. Poincaré szydził z logików, którzy chcieli konstruować pojęcie liczby 1. Żeby dać czytelnikowi pojęcie o metodzie polemicznej Poincarégo, zacytuję następujące jego powiedzenia:

Śpieszę dodać, że definicja liczby 1, jaką daje Couturat, jest bardziej zadowalająca.

Jeden, mówi on, jest to ilość elementów klasy, której dwa jakiegokolwiek elementy są identyczne.

Jest ona bardziej zadowalająca, rzekłem, w tym sensie, że dla określenia 1 nie posługuje się on wyrazem *jeden*; wzamian zato posługuje się wyrazem *dwa*. Otóż obawiam się, że gdyby zapytano Couturata, co to jest *dwa*, musiałby się uciec do wyrazu *jeden*.²⁷

Argumenty te opierają się na nieporozumieniu. Z tego, że liczbę 2 interpretujemy z łatwością w sposób intuicyjny, nie wynika, że jest ona przedmiotem innego gatunku niż np. 10^{10} . Otóż jest jasne, że przedmioty takie, jak 10^{10} , muszą być definiowane, bo nie posiadają żadnego odpowiednika w bezpośrednim doświadczeniu. Jeśli tak jest, to nie możemy uchylać się od obowiązku konstruowania pojęcia liczby 2 narówni z pojęciem liczby 10^{10} . Choćby nawet tak było rzeczywiście, że do takiej konstrukcji potrzebne jest odwołanie się do intuicyjnego pojęcia dwójki, to i tak nie byłoby błędnego koła. W rzeczywistości tak nie jest dzięki środkom, jakie daje nam do dyspozycji metoda symboliczna.

Pomimo wyraźnej tendencyjności, a często nawet przykrej ciasnoty pojęć, przyniosła dyskusja, jaką Poincaré prowadził z logikami, wiele cennych wyników. Do najbardziej zajmujących należy wyraźne podkreślenie olbrzymiej doniosłości t. zw. *indukcji zupełnej*, zwanej także *matematyczną*.

Zasadę indukcji zupełnej w jej tradycyjnej postaci można sformułować w sposób następujący:

Jeśli jakąś właściwość posiada 1 i jeśli właściwość ta jest przechodnia, to posiada ją każda liczba całkowita.

Tutaj przez *właściwość przechodnią* rozumiemy taką właściwość, którą musi posiadać liczba $n + 1$, o ile posiada ją liczba n .

Taką właściwością jest np. „*być większym od pewnej liczby*“.

²⁷ Nauka i metoda, przekład Horwitza. Warszawa 1911, p. 120.

Żeby ułatwić zrozumienie zasady indukcji, zastosujemy ją naprzód do następującego ciekawego wzoru:

$$\sum_{i/1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Symbol $\sum_{i/1}^n i^2$ oznacza sumę kwadratów liczb naturalnych od 1 do n włącznie. Obrazowo możemy go przedstawić wyrażeniem:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2.$$

Żeby wzór ten udowodnić, sprawdzamy go naprzód dla 1. Mamy:

$$\sum_{i/1}^1 i^2 = 1.$$

Z drugiej strony: $\frac{2 + 3 + 1}{6} = 1.$

Widzimy więc, że wzór nasz jest słuszny dla 1.

Przypuśćmy teraz, że wzór nasz jest słuszny dla jakiejś liczby naturalnej p , zupełnie dowolnej. Zakładamy więc:

$$\sum_{i/1}^p i^2 = \frac{2p^3 + 3p^2 + p}{6}.$$

Przekonamy się, że wzór nasz jest słuszny dla $p + 1$.

Zauważmy naprzód, że według definicji symbolu $\sum_{i/1}^p i^2$ mamy:

$$\sum_{i/1}^{p+1} i^2 = \sum_{i/1}^p i^2 + (p + 1)^2.$$

Z naszego założenia wynika więc równość:

$$\sum_{i/1}^{p+1} i^2 = \frac{2p^3 + 3p^2 + p}{6} + (p + 1)^2 = \frac{2(p + 1)^3 + 3(p + 1)^2 + (p + 1)}{6}.$$

Z drugiej strony, podstawiając $(p + 1)$ na n w wyrażeniu

$$\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

otrzymujemy: $\frac{2(p + 1)^3 + 3(p + 1)^2 + (p + 1)}{6}.$

Widzimy więc, że wzór nasz jest przechodni ze względu na n . Na podstawie zasady indukcji wnosimy, że wzór jest prawdziwy dla dowolnej liczby naturalnej.

Nie będę tutaj wdawał się w dyskusję nad naturą tego rozumowania. Myślę, że w tym wypadku jest najzupełniej przekonujące. Gorzej jest, jeśli chcemy je zastosować do twierdzeń, które w formuły ująć się nie dadzą.

Przypuśćmy, że chcemy udowodnić twierdzenie następujące:

Jeśli bok trójkąta podzielimy na $(n + 1)$ równych części i z punktów podziału poprowadzimy równoległe do boku drugiego, to bok trzeci podzieli się też na n równych części.

Tutaj zamiast wzoru mamy zdanie wypowiedziane słowami i do tego zdania musimy zastosować indukcję. Dla ułatwienia oznaczmy to zdanie symbolem $\Phi(n)$, uwidoczniając literę n , figurującą w tem zdaniu.

Żeby zdanie to udowodnić, sprawdzamy je naprzód dla najprostszego wypadku, kiedy idzie o podział boku trójkąta na 2 równe części. Jest jasne, że w tym wypadku musimy wziąć na n liczbę 1. Otrzymamy wówczas, po krótkich rozważaniach nad przystawaniem trójkątów pomocniczych, twierdzenie

$$\Phi(1).$$

Żeby teraz udowodnić przechodność warunku $\Phi(n)$, przypuszczamy, że czyni mu zadość pewna liczba naturalna p , zupełnie dowolna; zakładamy tedy, że mamy: $\Phi(p)$.

Opierając się na tem założeniu i na konstrukcji geometrycznej, podobnej do poprzedniej, uzyskujemy twierdzenie $\Phi(p + 1)$.

Z tego wnosimy, że zachodzi twierdzenie:

$$\Phi(n),$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną.

Dowód ten nie budzi we mnie cienia wątpliwości, ale muszę przyznać, że nie podejmuję się wytłumaczyć go żadnemu laikowi w ten sposób, żeby naprawdę go zrozumiał. Prostu dlatego że dowód ten wykracza poza granice zdrowego rozsądku. Chodzi o to, że musimy tu mówić o funkcji zdaniowej, t. j. o wyrażeniu, które zawiera literę n i które obraca się w sąd, jeśli za tę literę podstawimy liczbę. Ale mówienie o wyrażeniach słownych jest zapuszczaniem się w bagno języka potocznego. Nie wątpię, że uczeń wzorowy uwierzy chętnie nauczycielowi, że tam, gdzie chodzi o sądy matematyczne, nie grożą nam żadne paradoksy. Ale temu samemu uczniowi nie będzie zbyt przyjemnie dowiedzieć się nagle, że prócz matematyki musi uprawiać gramatykę. Bo jest jasne, że teraz nie wystarczają nam już

formuły matematyczne, ani konstrukcje geometryczne. Musimy rozszerzyć materiał naszych badań i dołączyć do niego pewne zdania które, rzecz jasna, muszą być sformułowane poprawnie z punktu widzenia gramatycznego, bo inaczej doprowadzą do błędów. Żeby uniknąć nieporozumień, zaznaczam jeszcze wyrażenie, że co innego jest posługiwać się zdaniami, — bez tego nie możemy się obejść nawet w elementarnej arytmetyce. Ale co innego są środki badania, a co innego jest materiał. Tutaj zdanie jest nie tylko środkiem, ale zarazem *przedmiotem* badania, a to jest już napewno wkroczenie w zakres gramatyki.

Podświadoma chęć wymigania się od tej przykrej konsekwencji narzuca nam tendencję do wprowadzenia na miejsce zdania, jakiegoś symbolu, takiego np., jak podany wyżej symbol $\Phi(n)$. Ale jest jasne, że na tem nic nie zyskujemy. Przeciwnie, czytelnik może nabrać nowych wątpliwości, połączonych z wprowadzeniem nieznanego mu symbolu i jeszcze mniej znanego pojęcia funkcji zdaniowej. Żeby dać sobie z tem wszystkim radę, potrzeba osobliwego treningu, ale przecież jest wiadome, że odpowiedni trening może przysposobować nas do najzłośliwszego głupstwa.

W ten sposób stwierdzamy, że sytuacja klasycznej matematyki jest naprawdę nieprzyjemna. Pozostaje jej tylko lekceważący uśmiech wobec krytyków i przekonanie, że z tego i tak żadne błędy się nie zrodzą. Ale to jest mała pociecha. Matematycy szydzą z fizyków, że uprawiają rachunki prymitywne, ale fizycy kpią z matematyków, bo ich prymitywne rachunki doprowadzają ich do wynalazków, przekształcających powierzchnię ziemi, a precyzyjne wywody matematyków nie na wiele mogą im się do tego celu przydać.

W dalszym ciągu będziemy posługiwali się taką prymitywną indukcją, w nadziei, że czytelnik potrafi pogodzić się z nią na tyle, żeby przyjąć ją jako środek pomocniczy, ułatwiający rozejście się w omawianym materiale. Z chwilą, kiedy przejdziemy do analizy pełnego systemu logiki i matematyki, zobaczymy, że trudności, o których jest tu mowa, mogą być usunięte w sposób radykalny. Rzeczywiście, przez wprowadzenie języka symbolicznego semantyki racjonalnej możemy ująć zasadę indukcji zupełnej w sposób o wiele ogólniejszy i sformułować ją tak, żeby nie różniła się zasadniczo od innych reguł dowodzenia.

Poincaré interpretował zasadę indukcji fałszywie. Pisał on:

Reguła ta, niedostępna dowodowi analitycznemu i doświadczeniu, jest prawdziwym typem sądu syntetycznego *a priori*. Z drugiej strony nie można widzieć w niej konwencji, jak w niektórych postulatach geometrii.

Dlaczegoż więc ten sąd narzuca się nam z nieodpartą oczywistością? Bo jest to potwierdzenie potęgi umysłu, który czuje się zdolnym do pojęcia niewstrzymanego powtarzania się tego samego aktu z chwilą, kiedy ten akt okazał się raz możliwy.²⁸

Poincaré nie zdawał sobie sprawy, że żadna reguła logiczna nie jest, ściśle biorąc, sądem analitycznym, bo każda wnosi coś istotnie nowego, żadnej nie możemy udowodnić i żadna nie może być uważana za konwencję.

Przyczyną nieporozumienia było to, że Poincaré uważał liczby naturalne za jedyne prawdziwe przedmioty analizy matematycznej.

Sugestji liczb całkowitych uległ również sławny matematyk niemiecki, prof. Hilbert. W jego systemie liczby całkowite grają wyjątkową rolę, jakkolwiek uznane są za wyrażenia. Prócz tego stanowią podstawę intuicyjnego aparatu myślowego, przy pomocy którego Hilbert radby dowieść niesprzeczności swego systemu. Dowód taki pomyślany jest w ten sposób, że ma się opierać na rozumowaniach finitystycznych takich, jakie potrzebne są do sprawdzenia jakiejś formuły, zawierającej tylko poszczególne liczby całkowite. W rzeczywistości polegać musi na zastosowaniu indukcji zupełnej, jak to słusznie zauważył Poincaré.²⁹

6. Uczeń rozumie doskonale 4 działania na liczbach całkowitych, rozumie jeszcze sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika, ale z chwilą, kiedy zaczyna się mnożenie ułamków, zaczyna się i bardzo często nie jest w stanie ruszyć naprzód. Uczniowie sprytniejsi przychodzą do przekonania, że jeśli profesor mówi, że ułamki mnoży się w ten sposób, że licznik mnoży się przez licznik, a mianownik przez mianownik, to widać jest taki zwyczaj i temu smutnemu losowi trzeba się poddać. Ale uczniowie mało sprytni wyczuwają doskonale, że profesor jest niekonsekwentny, bo dotychczas wszystkie działania tłumaczył bardzo pięknie na kamykach i na jabłkach, a teraz nagle, ni stąd ni zowąd, milczy jak grób.

²⁸ La science et l'hypothèse, p. 23—24.

²⁹ Nauka i metoda, I. c., p. 119.

Poincaré radzi naprzód wyklądać proporcje, przyczem uważa za pożądane odwołanie się do obrazów geometrycznych,³⁰ ale jest jasne, że to wszystko nie na wiele się przyda. Nikt nigdy nie zrozumie tą drogą, dlaczego mnożenie licznika przez licznik a mianownika przez mianownik ma być właśnie mnożeniem ułamków.

Trudność tę usunął prof. Zaremba w swoim hektografowanym *Wstępie do analizy*, definiując działania na ułamkach przez odwołanie się do mierzenia odcinków.³¹ W dalszym ciągu przekonamy się, że arytmetyka oparta na mierzeniu odcinków może być zbudowana w ten sposób, że staje się zbiorem reguł trywjalnych i zrozumiałych dla każdego, o ile tylko poparta jest dostateczną ilością przykładów. Myślę, że metoda odcinkowa jest jedyną rozsądną metodą wykładu arytmetyki, na jaki zdobyć się możemy bez oparcia się na rachunku semantycznym, a nawet wtedy nie traci swego znaczenia jako system pomocniczy, ułatwiający orientację. Wszystkie inne próby wyprowadzenia arytmetyki są albo połowiczne i skutkiem tego niezupełnie jasne, albo też opierają się na pewnych założeniach metafizycznych, które prowadzą do wyraźnej kolizji ze zdrowym rozsądkiem. Pierwszy zarzut stosuje się do metody aksjomatycznej, stosowanej przez Peano'a i Hilberta, drugi do takich systemów, jak system Whitehead'a, Russell'a, a nawet do takich, jak mój system teorii typów konstruktywnych,³² w którym musimy założyć istnienie nieskończenie wielu przedmiotów, bez podania przykładu ani jednego z nich.

Prof. Zaremba przyjmuje teorię liczb naturalnych jako rzecz gotową. Założenie to jest zbyteczne, bo z chwilą, kiedy przyjęliśmy intuicyjne składanie odcinków i dzielenie ich na części, mamy dostateczne podstawy do zbudowania teorii liczb naturalnych. Musimy tylko zdecydować się uważać liczby naturalne za wyrażenia i zgodzić się na to, że niema takich indywiduów, jak liczba 1, liczba 2 i t. d.

Zaczynamy od tego, że wszystkie wyrażenia: 1, 2, 3, 4... należące do systemu dziesiętnego liczb naturalnych nazywamy *liczbami naturalnymi*.

Zbiór wyrażeń systemu dziesiętnego jest zbiorem ściśle okre-

³⁰ Poincaré: *Nauka i metoda*, I. c., p. 100.

³¹ Por. także: S. Zaremba: *Wstęp do analizy*. Część II. Warszawa 1918.

³² *Theory of constructive types*. Kraków 1925.

ślonym w popularnem tego słowa znaczeniu. Mamy pewną podstawę do wierzenia, że w każdym wypadku, w którym posługujemy się takimi wyrażeniami, możemy się przekonać, że należą one rzeczywiście do systemu dziesiętnego. O wyrażenia niewyraźnie napisane lub nazbyt długie nie potrzebujemy się troszczyć, bo i tak nie zamierzamy się nimi zajmować.

Przypuśćmy, że mamy do rozporządzenia zwykle, znane z geometrii odcinki i że umiemy porównywać je i budować z nich odcinki nowe przez składanie.

Zakładamy, że umiemy zbudować odcinek n razy dłuższy od danego odcinka E . Odcinek ten oznaczać będziemy symbolem (nE) . W szczególności odcinek $(1E)$ jest to poprostu odcinek E . Jeśli m, n są dwiema liczbami całkowitemi takimi, że m występuje w układzie dziesiętnym bezpośrednio przed n , to odcinek (nE) otrzymamy, przykładając odcinek E do odcinka (mE) .

Porównywanie liczb naturalnych sprowadzamy do porównywania odnośnych odcinków. Tak np.

$$m > n$$

znaczy, że odcinek (mE) jest dłuższy od (nE) dla dowolnego E .

Dodawanie liczb naturalnych sprowadza się do składania odnośnych odcinków.

Wyrażenie $(m + n)$ jest liczbą równą tej liczbie naturalnej, którą otrzymam, mierząc przy pomocy odcinka E odcinek zbudowany przez złożenie odcinka mE z odcinkiem nE .

Mnożenie uzyskujemy przy pomocy tej uwagi, że odcinek (aE) może być z kolei użyty jako jednostka miary, co prowadzi do odcinków takich jak $(\beta(aE))$. Tak np. odcinek $(3(5E))$ powstaje w ten sposób, że budujemy naprzód odcinek 5 razy dłuższy niż E , a potem odcinek 3 razy dłuższy od tak otrzymanego odcinka. Jest jasne, że ten ostatni odcinek jest równy odcinkowi $(15E)$.

Opierając się na tych danych, możemy uważać iloczyn $a \cdot \beta$ za liczbę, jaką uzyskamy, mierząc odcinek $(\beta(aE))$ przy pomocy odcinka E .

Ta sama metoda pozwala nam uporać się bez wysiłku z różnicami i z ilorazami.

Dr Nikodym nie uważa sum, różnic, iloczynów i ilorazów za liczby, lecz za pewne wyrażenia, których *wartościami* są liczby.³³

³³ Dydaktyka matematyki czystszej. Warszawa 1930, p. 84.

W praktyce wychodzi to na jedno, pociąga jednak konieczność zasadniczego odróżnienia liczb od wyników działań w teorii, co prowadzić może do złudzenia, jakoby liczby pomimo wszystko posiadały byt idealny.

Teoria liczb wymiernih jest naturalnem rozszerzeniem naszej teorii liczb naturalnych. Mówimy poprostu, że jeśli α , β są liczbami naturalnemi, to $\frac{\alpha}{\beta}$ jest liczbą *wymierną*.

Przyjmujemy nadto następującą regułę:

Jeśli E jest odcinkiem, a α , β liczbami naturalnemi, to $\left(\frac{\alpha}{\beta} E\right)$ jest odcinkiem, który otrzymujemy w następujący sposób:

Wyznaczamy naprzód odcinek I taki, że odcinek (βI) jest równy odcinkowi E . Następnie budujemy odcinek (αI) . Wyrażenie $\left(\frac{\alpha}{\beta} E\right)$ oznacza ten właśnie odcinek (αI) . Wszystkie nasze określenia podane dla liczb naturalnych przenoszą się na dziedzinę liczb wymiernih bez zmiany, z tą tylko różnicą, że ilarzy możemy budować z dwu dowolnych liczb wymiernih.

Prawidła działań wyprowadzają się z naszych reguł bez żadnych reguł dodatkowych.

Nie wdając się w ogólną teorię, rozpatrzmy następujący przykład:

Spróbujmy wyznaczyć $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$.

Według naszej reguły, idzie o zbudowanie odcinka $(\frac{1}{2}(\frac{5}{3} E))$.

Stwierdzamy naprzód, że odcinek ten musi być równy odcinkowi $(\frac{5}{10}(\frac{1}{6} E))$. Widzimy, że trzeba odcinek E podzielić na 6 równych części i wziąć takich części 10. Tak otrzymany odcinek $(\frac{10}{6} E)$ dzielimy na 10 równych części, co daje $(\frac{1}{6} E)$, i takich części bierzemy 5, co daje $(\frac{5}{6} E)$. W ten sposób uzyskujemy równość:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}.$$

Widzimy, że metoda prof. Zaremby załatwia w sposób niezmiernie prosty niepokojące zagadnienie mnożenia ułamków.

Pojęcie liczby niewymiernej objaśnię przy pomocy następującego przykładu:

Pragnę zmierzyć przeciwprostokątnię BA trójkąta równoramiennego przy pomocy przyprostokątnej OA . Oznaczmy odnośną miarę przez x . Będziemy mieli:

$$AB = (x OA).$$

Zbudujmy trójkąt prostokątny równoramienny, tak, żeby AB

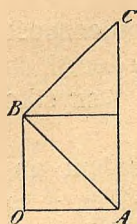


Fig. 2.

była jedną z przyprostokątni. Jeśli przeciwprostokątnię oznaczymy przez AC , będziemy mieli:

$$AC = (x \, OA),$$

skąd wynika, że $AC = (x(x \, OA))$.

Z drugiej strony widzimy, że

$$AC = 2 \, OA.$$

Jeśli tedy chcemy stosować do naszego przypadku przyjętą poprzednio regułę mnożenia, musimy zgodzić się na to, że

$$x^2 = 2.$$

W tych warunkach decydujemy się na przyjęcie nowego znaku: $\sqrt{2}$, który uważać będziemy za liczbę, przyczem związek tej liczby z liczbami wymiernymi ustalamy przy pomocy równania:

$$(\sqrt{2})^2 = 2.$$

Konstrukcja, podana poprzednio, upewnia nas, że nasza liczba musi być różna od wszystkich liczb wymiernych.

Działania na liczbach niewymiernych uzyskujemy przez automatyczne stosowanie reguł ustalonych dla liczb wymiernych.

Widzimy, że z punktu widzenia naszego niema istotnej różnicy między liczbami wymiernymi i niewymiernymi. I jedne i drugie są to pewnego rodzaju znaki służące do mierzenia odcinków. Różnica polega tylko na tem, że przy pomocy naszego aparatu pojęciowego nie jesteśmy w stanie podać ogólnej reguły budowania liczb niewymiernych.

Można zauważyć, że konstrukcja zapomocą cyrkla i lineалу nie zaprowadzi nas zbyt daleko. Nie potrafimy przecież wyznaczyć w ten sposób olbrzymiej mnogości odcinków, że tylko wymienię odcinek równy obwodowi koła. Ale niema powodu ograniczać się do konstrukcji przy pomocy cyrkla i lineálu. Jeśli np. obwiedzimy obwód koła nitką i tę nitkę rozprostujemy, to z punktu widzenia fizycznego konstrukcja ta jest równie dobra, jak konstrukcja przy pomocy cyrkla i lineálu. Idzie tylko o to, że za każdym razem potrzebne są nowe reguły i niema mowy o zbudowaniu systemu takich reguł.

Dedekind próbował załatwić sprawę przez przyjęcie t. zw. *aksjomatu ciągłości*.³⁴

³⁴ Por. Richard Dedekind: Was sind u. was sollen die Zahlen. Braunschweig 1930.

Wyobraźmy sobie, że udało nam się podać regułę budowania odcinków $A_n B_n$ w sposób następujący:

1. Dowolnej liczbie naturalnej 1, 2, 3, 4... odpowiada odcinek $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, $A_4 B_4$...
2. Każdy odcinek następny znajduje się wewnątrz poprzedniego.
3. Pomiędzy odcinkami $A_n B_n$ znajduje się odcinek mniejszy od dowolnego zgóry zadanego odcinka.

Aksjomat ciągłości powiada, że w takim razie odcinki nasze muszą posiadać jeden i tylko jeden punkt wspólny M , który nazywamy *kresem* wspólnym punktów A_n i punktów B_n .

Jeśli podporządkujemy punktowi A_n i B_n liczby rzeczywiste w ten sposób, że punktowi A_n odpowiada

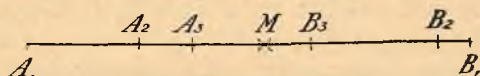


Fig. 3.

zawsze liczba mniejsza niż punktowi B_n , i jeśli punktowi M podporządkujemy pewną liczbę rzeczywistą, to liczba ta jest *górnym kresem* liczb podporządkowanych punktowi A_n , a zarazem *dolnym kresem* liczb podporządkowanych punktowi B_n .

Ogólnie mówiąc: górny kres liczb czyniących zadość pewnemu warunkowi jest to najmniejsza z liczb, które są od liczb określonych naszym warunkiem większe.

Jeśli pomiędzy danymi liczbami jest największa, możemy powiedzieć, że ona właśnie jest ich *górnym kresem*.

Analogiczne określenia możemy podać dla kresów dolnych.

Tak np. $\sqrt{2}$ jest to górny kres liczb wymiernych, których kwadrat jest mniejszy od 2, a zarazem jest to dolny kres liczb wymiernych, których kwadrat jest większy od 2. Liczba π jest to górny kres połówek obwodów wieloboków wpisanych w koło o promieniu 1, a zarazem jest to dolny kres połówek obwodów wieloboków opisanych na tem kole.

Widzimy, że metoda Dedekinda jest bardzo ogólna. Niemniej wszystko sprowadza się do podania pewnej reguły, której mają czynić zadość liczby, a właśnie idzie o to, jakie środki posiadamy do budowania takich reguł. Na pytanie to może dać odpowiedź jedynie nauka semantyki.

Zauważmy jeszcze, że pojęcie kresu wystarcza do zrozumienia podstaw rachunku nieskończonościowego. Zarazem usuwa zasadnicze wątpliwości, związane z *wyciąganiem* pierwiastków

i innemi metodami przybliżonego wyznaczania liczb rzeczywistych. Metody te wytwarzają w uczniach przekonanie, że $\sqrt{2}$ lub π są to pewnego rodzaju niewiadome, które radziłybyśmy wyznaczyć, co się jednak nie da zrobić dokładnie. Ten stan rzeczy wywołuje kompletny zamęt pojęć, połączony ze złudzeniem, jakoby chodziło o polowanie na nieskończoność. W rzeczywistości $\sqrt{2}$ jest równie dobrym znakiem, jak 2, a cała zabawa polega na wyznaczaniu pewnych nierówności.

7. Liczbę 0 możemy zdefiniować jako punkt, niemniej jednak nie znajdziemy w ten sposób intuicyjnej podstawy do określenia działań na liczbie 0. Działania te muszą mieć charakter konwencjonalny, bo niepodobna mówić o mierzeniu punktu przez odcinek, a tem mniej o mierzeniu odcinka przez punkt. Mówimy tedy poprostu:

$$(x + 0) = x$$

$$(x \cdot 0) = 0,$$

a dzielenie przez 0 i ułamki z mianownikiem równym 0 odrzucamy, przyjmując, że symbole $(x : 0)$, $\frac{x}{0}$ są pozbawione sensu.

Jest cała grupa filozofów, myślących kategorjami ontologicznymi, którzy radziły to ograniczenie usunąć. Jest dobrze zauważyć, że można tego dokonać bez trudności. Tak np. w systemie Whiteheada i Russella $\frac{x}{0}$ jest to klasa pusta. Niemniej potrzeba do tego wyjść poza elementarne pojęcie geometrii i arytmetyki; dopóki więc nie przyjmuje się gotowego systemu teorii klas, próby tego rodzaju nie przynoszą żadnej korzyści i stwarzają niepotrzebny balast. Co gorsza, mogą przyczynić się do wytworzenia iluzji, że matematykę można zbudować bez odwołania się do pojęcia wyrażenia, a w szczególności do pojęcia wyrażenia *pozbawionego sensu*. Otóż, trzeba powiedzieć odrazu, że wszelkie próby zbudowania systemu matematyki bez odwołania się do tych pojęć są zgóry skazane na niepowodzenie. Nie posiadamy i niema nadziei, żebyśmy osiągnąć mogli system wyrażen, w którym wszystkie wyrażenia posiadałyby sens określony. Nie widzę zresztą powodu, dlaczego mielibyśmy starać się o taki system. Tendencja taka może wprawdzie dogadzać smakowi metafizyków w stylu platońskim, ale jest sprzeczna

z tym faktem, że te pojęcia, z którymi mamy do czynienia, nie są same przez się jasno określone, nie posiadają więc same przez się jasnego sensu, a mogą go uzyskać jedynie dzięki naszej interwencji.

Arytmetykę odcinkową można bez trudności zamienić na algebrę, jeśli tylko pojęcie odcinka zastąpi się pojęciem wektora równoległego do pewnej prostej raz na zawsze wybranej.

W takim razie 1 jest to pewien wektor j , — 1 jest to wektor posiadający tę samą długość, ale przeciwnie skierowany. Stosunek dwu wektorów jednako skierowanych wyraża się liczbą czystą, stosunek dwu wektorów przeciwnie skierowanych wyraża się liczbą ujemną.

Dodawanie i odejmowanie liczb sprowadza się do odnośnych działań na wektorach, mnożenie uzyskujemy, przenosząc regułę podaną dla odcinków na obszar wektorów. Reguła ta pozwala nam udowodnić z łatwością, że $(-3 \cdot -5) = 15$, skutkiem czego rezultat ten, który w szkole uważany był zawsze za sztuczny a nawet naciągany, przedstawia nam się jako zjawisko naturalne.

Stosując naszą regułę, wybieramy dowolny wektor j i budujemy wektor a , równy wektorowi $(-3j)$. Widzimy, że wektor a jest 3 razy dłuższy niż j i przeciwnie skierowany. Biorąc z kolei wektor a za jednostkę, budujemy wektor b , równy wektorowi $(-5a)$. Widzimy, że wektor b jest 5 razy dłuższy niż a i przeciwnie skierowany. Z tego, co powiedzieliśmy, wynika, że wektor b jest 15 razy dłuższy niż wektor j i ma ten sam kierunek. Wobec tego widzimy, że wektor b jest równy wektorowi $(15j)$.

Z definicji naszej wynika, że mamy: $(-3 \cdot -5) = 15$.

8. Odkrycie tego faktu, że nigdy nie potrafimy podać reguły konstruowania liczb rzeczywistych, któreby wystarczały w zupełności, zawdzięczamy Julesowi Richardowi. Koncepcja Richarda jest następująca:

Zwróćmy uwagę — powiada Richard — na wszystko to, co można napisać, pisząc tylko n liter. Wobec tego, że w alfabecie francuskim jest 26 liter, jeśli napiszemy n liter, to jest to układ n -członowy tych 26 liter, przyczem ta sama litera może być powtórzona. Liczba tych układów jest, jak tego dowodzimy w rachunku kombinacyjnym, 26 podniesiona do potęgi n -tej. Można skatalogować te wszystkie układy. Wystarczy uszeregować je w porządku alfabetycznym. Weźmy naprzód układy dwójkowe, później trójkowe, później

czwórkowe... później n -członowe..., szeregując je za każdym razem: w postępie tak uszeregowanym układ n -członowy dowolny zajmować będzie pewne miejsce, bez względu na to, jakie jest n . Pomiedzy temi układami niektóre, większa ich część, nie będą nawet tworzyły wyrazów. Wymażmy je. Wymażmy także te, które tworzą zbiór wyrazów pozbawionych sensu. Pozostałe układy będą tworzyły zdania posiadające sens.³⁵

Jeśli z tych zdań usuniemy te wszystkie, które nie określają żadnej liczby rzeczywistej mniejszej od 1, otrzymamy postęp zdań określających liczby rzeczywiste mniejsze od 1.

Z chwilą, kiedy taki postęp jest dany, możemy, posługując się t. zw. przekątniową metodą Cantora, określić nową liczbę rzeczywistą, która nie jest określona przez żadne ze zdań naszego postępu. Liczba ta ma na n -tem miejscu dziesiętnym $k + 1$, jeśli liczba określona przez n -te zdanie naszego postępu ma na n -tem miejscu cyfrę k , przyczem k jest różne od 9. Jeśli liczba określona przez n -te zdanie ma na n -tem miejscu cyfrę 9, to nasza liczba ma na n -tem miejscu cyfrę 0.

Gdybyśmy przypuścili, że to ostatnie zdanie znajduje się w naszym postępie, otrzymalibyśmy natychmiast t. zw. paradoks Richarda.³⁶ Przypuszczenie takie uznał jednak Richard za niedopuszczalne, gdyż opierałoby się na błędnem kole. Rzeczywiście, żeby nasza konstrukcja miała sens, musimy przypuścić, że postęp zdań jest określony, jeśli zaś tak jest, to nie możemy w naszym postępie umieszczać zdań, w których jest mowa o tym właśnie postępie. W języku potocznym usunięcie tej sprzeczności jest bardzo trudne. Kiedy Poincaré sformułował pojęcie zdań *predykatywnych*, t. j. takich, których treścią nie są one same,³⁷ zarzucono mu, że to jego określenie jest niepredykatywne. Niemniej trudność ta da się usunąć, jeśli odwołamy się do języka odpowiednio skonstruowanego.

Z tego stanu rzeczy wywnioskował Jules Tannery, że muszą istnieć liczby rzeczywiste niewyraźalne skończoną liczbą skłó, ³⁸ ale konkluzja taka posiada wybitnie metafizyczny charakter. W takim razie trzeba zgodzić się koniecznie na idealny byt liczb i na to, że tylko niektóre z nich dostępne są naszemu pozna-

³⁵ Jules Richard: Sur la philosophie des Mathématiques. Paris 1903.

³⁶ P. Revue générale des sciences, 30 czerwca 1905, cyt. Poincarégo: Nauka i metoda p. 140.

³⁷ Nauka i metoda, p. 145.

³⁸ Richard, l. c., p. 113.

niu. Zdecydować się na taki krok, to znaczy zrezygnować z matematyki opartej na zdrowym rozsądku.

Przeciw takiej koncepcji matematyki wystąpił naprzód z wielką gwałtownością największy z ówczesnych matematyków Henri Poincaré.

Poincaré twierdził stanowczo, że liczby rzeczywiste nie tworzą określonego zbioru i że nie mamy prawa mówić o wszystkich liczbach rzeczywistych. Z wiosną 1909 słyszałem w Getyndze jego prelekcję, w której dał wyraz swemu stanowisku lichą niemiecką, ale bardzo dobitnie. Na prelekcji tej był obecny młody wówczas, świetnie zapowiadający się uczeń Hilberta Hermann Weyl. Trudno wątpić, że zaważyła ona na jego koncepcji liczb rzeczywistych.

Na mnie wywarły słowa Poincarégo olbrzymie wrażenie. W parę lat po owym getyngeskim przeżyciu zdobyłem się na odwagę wystąpienia do otwartej walki ze zwolennikami liczb niewyraźalnych słowami. Świeżo wówczas ogłoszony system Whiteheada i Russella uznałem za sprzeczny dlatego tylko, że pozwala dowieść istnienia pełnego zbioru liczb rzeczywistych.³⁹ Stanowisko takie było niewątpliwie zbyt radykalne. System Whiteheada i Russella nie prowadzi do sprzeczności, ani też niema żadnej obawy, żeby założenie istnienia pełnego zbioru liczb rzeczywistych prowadziło do sprzeczności. Później dopiero zrozumiałem, że jest z tem jak z aniołem stróżem i z djabełem. Jeśli postępujemy dobrze, jest to niewątpliwie dowód ingerencji anioła stróża, jeśli źle, to znaczy, że djabeł ma przewagę. Tak rozumując, napewno nigdy nie dojdziemy do sprzeczności. Ale nie o sprzeczność tu idzie. Idzie o to, żeby mieć system matematyki wolny od przedmiotów, których nie potrafimy zbudować.⁴⁰ Zagadnieniem tem zajmowałem się przez szereg lat. W dalszym ciągu czytelnik będzie mógł osądzić, czy udało mi się zagadnienie to rozwiązać.

Rozwój matematyki przeszedł nad temi sprawami do porządku. Olbrzymia większość matematyków pogodziła się z niekonstruowalnemi liczbami. Przy pomocy tej hipotezy uzyskano szereg wyników imponujących. Niemniej na dnie pozostała skaza metafizycznej fantasmagorii.

³⁹ Por. moją rozprawę: *Zasada sprzeczności w świetle nowszych badań* Bertranda Russella. Kraków 1912.

⁴⁰ Por. Richard, l. c., p. 111.

Jeśli mnie ktoś zapyta, czy stało się dobrze, odpowiem bez wahania: tak! Na rekonstrukcję podstaw i na krytykę jest zawsze czas. Gdybyśmy chcieli analizować od razu każdy szczegół i trwożliwie oglądać się za siebie, nie ruszylibyśmy nigdy z miejsca. Idzie tylko o to, żeby wyników tymczasowych nie przeceniać i zdawać sobie jasno sprawę, że zczasem muszą być ujęte w ścisły systemat, i wierzyć, że wytrzymają próbę najbezwzględniejszej krytyki.

Na to, że pospolitego pojęcia liczby rzeczywistej nie mamy i nigdy mieć nie będziemy, niema rady i szkoda czasu na wszelkie dyskusje na ten temat, ale z tego nie wynika bynajmniej, że proces tworzenia liczb rzeczywistych nie da się ująć w schemat i że zawsze będziemy musieli odwoływać się do intuicji. Zobaczymy w dalszym ciągu, że możemy zbudować schematy, które automatycznie przystosowują się do budowania coraz wyższych typów liczb rzeczywistych przy pomocy działań zgóry określonych i że teoria tych schematów może być z kolei ujęta w schemat. Zobaczymy, że metoda ta prowadzi do systemu matematyki równie bogatego, jak ten system, który opiera się na założeniu istnienia zbioru liczb rzeczywistych, i że przejście od naszych schematów do pełnego zbioru liczb rzeczywistych jest zawsze możliwe, o ile zdecydujemy się zrobić założenie formalne, że istnieją pewne wyrażenia, które nie są konstruowalne w naszym systemie.

Idąc tą drogą schematyzacji popadniemy w oczywistą kolizję z tą koncepcją matematyki, jaką podał Poincaré.

Poincaré przejął się kantowską ideą sądów syntetycznych *a priori* i wierzył, że intuicja matematyczna nie da się nigdy ująć w schemat. Z tego właśnie powodu był zawziętym wrogiem konstrukcyj, opartych na symbolice logicznej. Niemniej nie wskazał drogi załatwienia się z podstawami nowożytnej matematyki i zmuszony był odrzucić całą teorię mnogości Cantora, której wielką płodność i imponujący rozwój daremnie chciał przekreślić w imię nieuzasadnionej obawy przed sprzecznościami.

Próbę zbudowania podstaw matematyki opartych w całości na doktrynie Poincarégo przedsięwziął matematyk holenderski Brouwer.

Brouwer stworzył koncepcję neo-intuicjonizmu, który nie zapuszcza się w zdyskwalifikowaną od czasu Łobaczewskiego dziedzinę przestrzeni, ograniczając się do dziedziny czasu.

Ten neo-intuicjonizm — powiada Brouwer w swoim wykładzie inauguracyjnym: *Intuicionism and Formalism* — uważa rozpadanie się momentów życia na jakościowo różne części, żeby były związane tylko wtedy, kiedy są rozdzielone przez czas, jako fundamentalne zjawisko umysłu ludzkiego, przechodzącego przez abstrahowanie od emocjonalnej treści tego fundamentalnego zjawiska myślenia matematycznego do intuicji czystej dwu-jednostkowości.⁴¹

Widzimy, że Brouwer zaczyna od metafizyki. Jest faktem, że nie umie z niej wybrnąć do końca.

Odnosi się to w szczególności do koncepcji liczb rzeczywistych. Liczby rzeczywiste mają to być nieskończone postępy liczb 0, 1... 9, wybierane w sposób dowolny, przyczem wybór elementu następnego nie musi być zależny od wyboru elementu poprzedniego.⁴² Jest jasne, że szkolne *wyciąganie* pierwiastka jest szczytem ścisłości w stosunku do tej koncepcji. Cantorowski idealny zbiór wszystkich liczb rzeczywistych może się wydać przystanią jasną i kryształową w porównaniu z chaosem szalejącym w tych mrocznych pomysłach. Równocześnie, w imię jasności pojęć, zabrał się Brouwer do krytyki podstaw elementarnego rachunku logicznego, podstawiając na miejsce banalnych, z życia codziennego zaczerpniętych reguł logikę fantastyczną, w której obok sądów prawdziwych i fałszywych figurują sądy obojętne. O tych jego pomysłach będziemy mieli sposobność pomówić w dalszym ciągu. Tutaj zaznaczę tylko, że pomimo wszystko nie były one całkiem bezpłodne, gdyż przyczyniły się w wysokim stopniu do powstania nowej nauki, t. zw. metamatematyki, która okazała się niezmiernie płodną.

Jeśli chodzi o metafizyczny sposób myślenia, to Weyl przewyższa Brouwera niewątpliwie. Niemniej koncepcja liczb rzeczywistych, jaką podaje, jest bardzo bliska tej, do której dojdziemy w dalszym ciągu. Weyl zdaje sobie sprawę z tego, że liczby rzeczywiste możemy uzyskać jedynie przez stworzenie hierarchji reguł konstrukcyjnych. Kontinuum, czyli zbiór liczb rzeczywistych, pojęte jako coś gotowego, uważa za absurd.⁴³ Ta koncepcja Weyla wydaje mi się dlatego niezmiernie ważna, że stanowi wyłom w dość jednolitym froncie matematyków, którzy

⁴¹ Cytuję na podstawie książki Maxa Blacka l. c. p. 189, która zawiera bardzo ściśle streszczenie teorii Brouwera.

⁴² Por. Black, l. c., p. 203.

⁴³ Über die neue Grundlagenkrise in der Mathematik, odbitka z Mathem. Zeitschrift.

nie chcą liczyć się z ograniczeniami płynącymi z tego stanowiska i raczej wolą zrezygnować z konsekwentnej rozbudowy podstaw arytmetyki. Niemniej metoda konstrukcji, jaką posługuje się Weyl, nie jest na tyle precyzyjna, żeby można ją przeciwstawić skutecznie temu stanowisku matematyków. Jeśli mamy ponosić jakieś ofiary, to musimy mieć za to coś wzamian. Albo swobodne budowanie liczb, albo zmechanizowany system, wolny od wszelkiej intuicyjnej domieszki. Temu ostatniemu warunkowi czyni zadość zbudowany przeze mnie system teorii typów konstruktywnych,⁴⁴ który zresztą dopuszcza rekonstrukcję całej matematyki klasycznej.⁴⁵ Niemniej system ten nie jest w zupełności zadowalający, musi bowiem i tak odwoływać się do określeń słownych w nieograniczonym zakresie, a prócz tego nie pozwala nam uzyskać dowodu twierdzenia, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych. Trudności te usuwa dopiero system metamatematyki racjonalnej, z którym zapoznamy się w dalszym ciągu.

⁴⁴ The Theory of constructive Types, l. c.

⁴⁵ Por. Miara Lebesgue'a, Archiwum lwowskiego Tow. Naukowego. T. I.

Rozdział III

Elementarne pojęcia semantyki

1. Pierwsze systematyczne badania nad strukturalnemi właściwościami wyrażeń matematycznych zawdzięczamy Hilbertowi. Piszemy on:

Matematyka, jak każda inna nauka, nie może w żaden sposób oprzeć się jedynie na logice; jest raczej coś, co jako warunek użycia logicznych wniosków i zrealizowanie logicznych operacji jest nam już dane w wyobraźni: pewne pozalogiczne konkretne przedmioty, które intuicyjnie jako bezpośrednie przeżycie są tutaj przed wszelkiem myśleniem. Jeśli wnioskowanie logiczne ma być pewne, to te przedmioty muszą dać się przejrzeć dokładnie we wszystkich częściach, a ich pokazanie, odróżnienie, ich następstwo lub występowanie jednocześnie jest wraz z przedmiotami bezpośrednio intuicyjnie dane jako coś, co się nie da już sprowadzić do czegoś innego, ani też takiej redukcji nie potrzebuje...¹

A potem:

A w szczególności w matematyce są przedmiotem naszego badania same konkretne znaki, których postać dzięki naszemu nastawieniu jest bezpośrednio wyrażna i rozpoznawalna.²

Idąc za tokiem tej myśli, wprowadza Hilbert obok aksjomatów logiki, aksjomaty czysto matematyczne, a wszystkie razem pojmując jako proste zestawienia znaków. Chodzi mu tylko o to, żeby wykazać, że pomiędzy twierdzeniami, które uzyskać możemy z tych aksjomatów przy pomocy czysto formalnych reguł postępowania, nie znajdzie się twierdzenie $1 = 0$.

Żeby upewnić się o tem, trzeba było, rzecz jasna, zagłębić się w budowę matematycznych wyrażeń i rozpatrywać w szczególności takie pytania, jak np. jakie wyrażenie otrzymamy, jeśli

¹ Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem math. Seminar der hamburgischen Universität. Leipzig 1928, p. 65.

² L. c., p. 66.

w danem wyrażeniu E na miejsce wyrażenia F podstawimy wyrażenie G . Hilbert nie podał systematycznych reguł budowania wyrażeń, poprzestając na dość ogólnikowych wskazówkach, które dopiero z biegiem czasu były przez jego współpracowników (Bernays, Ackermann, v. Neumann i i.) coraz dokładniej precyzowane. Równocześnie, intuicyjne rozważania nad konstrukcją wyrażeń, w których na każdym kroku występowała już to jawna, już to zamaskowana indukcja, były tylko napozór prostsze od zagadnień matematyki samej. W rzeczywistości było jasne, że chodziło tam o jakąś nową naukę, która jest co najmniej równie głęboką i sięga równie daleko jak sama matematyka.

Naukę tę postanowiłem sformalizować. Zrazu opierałem ją na dwu pojęciach fundamentalnych, a mianowicie na pojęciu porządku dwu wyrażeń i pojęciu podstawiania: $(EFGH)$, słowami: H jest wynikiem podstawienia G za F w E ,³ później okazało się, że pojęcie porządku wyrażeń da się uzyskać z schematu $(EFGH)$.⁴ W dalszym ciągu pokazał p. Hetper, że pojęcie schematu $(EFGH)$ da się sprowadzić do jeszcze prostszego schematu $\{EF\}$, który czytamy: *Wyrażenie F jest zawarte w wyrażeniu E .*

Badania te doprowadziły zrazu do zbudowania systemu elementarnej semantyki, t. j. nauki o wyrażeniach. Później okazało się, że przy pomocy tego systemu możemy zbudować matematykę wraz z metamatematyką. Aksjomaty semantyki elementarnej są, jak zobaczymy w dalszym ciągu, zwykłymi regułami operowania wyrażeniami, ujętymi w formuły symboliczne. W tych warunkach mogą być uważane za twierdzenia najbardziej elementarne i najbardziej naturalne z wszystkich tych, jakie możemy zbudować.

Intuicyjna semantyka, na której oparł się Hilbert i jego szkoła, mogła budzić niejedną wątpliwość. O wyrażeniach możemy wypowiadać sądy różnorodne, z których nie wszystkie są równie jasne i ściśle. Już poprzednio zwróciłem uwagę na wątpliwości, jakie mogą się zrodzić z niedość wyraźnego pisania liter. Wątpliwości tego rodzaju grożą nam na każdym kroku. Tak np. możemy zastanawiać się nad tem, czy dane egzemplarze litery a

³ Neue Grundlagen der Logik u. Mathematik. Mathem. Zeitschrift, tom 30, r. 1929, p. 704.

⁴ Neue Grundlagen der Logik u. Math. (II-te Mitteilung). Math. Zeitschrift, tom. 34, r. 1932, p. 527.

są sobie równe, czy też od siebie odmienne. Ponieważ niema dwóch identycznych egzemplarzy litery *a*, możemy już na samym początku zabrnąć w niemałe trudności. Jeśli zechcemy mówić o klasie liter *a*, zamiast o literze *a*, jak tego chcą niektórzy, to wtedy sytuacja będzie bez wyjścia, bo z poszczególnymi egzemplarzami litery *a* można dać sobie radę, ale klasa liter *a* jest już napewno pojęciem mętnem i niejasnem właśnie dlatego, że niezawsze możemy odróżnić *a* od *o* lub od *d*.

Z dyskusji pomiędzy prof. Bernaysem a p. Müllerem, spowodowanej hilbertowską koncepcją wyrażen, wynika, że intuicyjne rozważania na temat wyrażen mogą przybrać charakter tak zawiły, że zamiast oczekiwanej atmosfery prostoty i jasności, zapędzą nas w chaos beznadziejnych dociekań na temat pojęcia postaci i indywidualności znaków. Dyskusja ta uczy nas, że nawet o najprostszych przedmiotach nie można bezkarnie mówić wszystkiego, co nam przyjdzie do głowy. Musimy koniecznie ograniczyć się do wypowiadania sądów czysto praktycznych, odnoszących się jedynie do sprawy budowania wyrażen z danych elementów. Pod tym jedynie warunkiem możemy uzyskać przejrzystość i prostotę, do której dążymy.

W dyskusji, jaką miałem z prof. Zermelo w czasie jego pobytu w Krakowie, zauważył ten uczony, że wyrażenia są utworami bezporównania bardziej zawiłymi, niż liczby lub klasy, i mogą budzić o wiele większe wątpliwości. Odpowiedziałem, że tak byłoby niewątpliwie, gdybyśmy chcieli zapuszczać się w dociekania metafizyczne. Z chwilą jednak, kiedy ograniczamy się do budowania wyrażen nowych z wyrażen danych przy pomocy reguł zgóry podanych, wszelkie wątpliwości stają się po prostu pedanterją.

Jest dobrze dodać, że oparcie się na znakach jest w zupełności niezależne od naszego stosunku do rzeczywistości. Wszystko jedno, czy uważamy znaki za rzeczy, za zbiorowiska atomów, czy też za wrażenia. Możemy także uważać znaki za byty idealne, opierając się na narzucającej nam się wizji. Wizja i połączony z nią kult może wystąpić w związku ze znakami w równie silnym stopniu, jak to ma miejsce w związku z pojęciami. Wystarczy wymienić stosunek Chińczyków do symbolów, używanych w piśmie potocznem. Pod wpływem zagłębiania się

⁵ Paul Bernays: Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: „Über Zahlen als Zeichen“. Mathem. Annalen. Berlin (1923), tom 90, zeszyt 3/4.

w indywidualne właściwości znaków, możemy dojść nawet do wiary w istnienie znaków, których człowiek nie potrafi napisać. W każdym razie możemy mówić o wyrażeniach, których nie można zbudować przy pomocy danego systemu znaków i reguł. Trzeba jednak pamiętać, że idąc tą drogą, wykraczamy poza granice zdrowego rozsądku. Mówić z sensem możemy tylko o znakach, które wymieniamy, lub o wyrazach, które przy pomocy danych reguł możemy z nich zbudować. Pojęcie znaku pozostawione samo sobie, jest niesłychanie mętne i płynne. Każda rzecz może być uważana za znak i żadna rzecz nie jest sama przez się znakiem. Wszystko zależy od umowy, zawartej zgóry.⁶

2. Semantyka elementarna nie zajmuje się dowolnymi wyrażeniami. Pojęcie dowolnego wyrażenia jest najzupełniej nieokreślone i nie może być przedmiotem żadnej ścisłej nauki.

Żeby mówić o wyrażeniach, trzeba naprzód podać reguły budowania tych wyrażeń. Wyrażenia, stanowiące materiał semantyki, nazywać będziemy *wyrażeniami właściwymi*. Wyrażenia właściwe dzielić będziemy na wyrażenia stałe i zmienne.

Podamy naprzód reguły budowania wyrażeń stałych:

I. 0 jest wyrażeniem stałym.

II. Jeśli E , F są wyrażeniami stałymi, to $*EF$ jest wyrażeniem stałym.

Przy pomocy tych reguł możemy zbudować tak wiele wyrażeń stałych, ile nam się podoba.

Przedewszystkiem stwierdzamy, że jedyne wyrażenie nie zawierające gwiazdki, jakie możemy zbudować, jest 0.

Nie mamy oczywiście sposobu, udowodnić, że np. $\S$ nie jest wyrażeniem stałym, ale możemy zobaczyć bez trudności, że znak $\S$ nie może znaleźć się pomiędzy wyrażeniami, które możemy zbudować, bo jest różny od 0, oraz nie zawiera gwiazdki, nie może więc być uzyskany ani przy pomocy reguły I, ani przy pomocy reguły II.

Zkolei stwierdzamy, że możemy zbudować tylko jedno wyrażenie stałe z jedną gwiazdką, a mianowicie:

$*00$,

⁶ Por. metafizykę znaków Drewnowskiego. Przegląd fil., rocznik 37.

tylko 2 wyrażenia stałe z dwiema gwiazdkami, a mianowicie:

$$*0*00, \quad **00,$$

tylko 5 wyrażen stałych z trzema gwiazdkami, a mianowicie:

$$***0000, \quad *0**000, \quad **0*000, \quad *0*0*00, \quad **00*00$$

i tylko 12 wyrażen stałych z czterema gwiazdkami, a mianowicie:

$$\begin{array}{ll} ***00000, & *0***0000, \\ **0**0000, & *0*0**000, \\ ***0*0000, & *0**0*000, \\ **0*0*000, & *0*0*0*00, \\ **0*00*00, & **00*0*00, \\ ***000*00, & **00**000. \end{array}$$

Jest dobrze zauważyć, że metoda nasza nie ma nic wspólnego z tradycyjną metodą definiowania. Nie jesteśmy w stanie podać ani *genus* ani *differentia specifica* pojęcia wyrażenia stałego, ograniczamy się natomiast do tego faktu, że umiemy budować wyrażenia stałe. Jesteśmy mniej więcej w takim położeniu, jak jakikolwiek rzemieślnik. Żaden drukarz nie potrafi odpowiedzieć na pytanie co to jest książka, ani też nie potrafi udowodnić, że afisz nie jest książką, ale każdy drukarz potrafi wydrukować tyle książek, na ile pozwolą mu warunki materialne.

Przystępujemy teraz do uzupełnienia naszych reguł w ten sposób, żebyśmy prócz wyrażen stałych mogli budować wyrażenia zmienne.

Przyjmujemy następujące reguły:

- III. Jeśli E jest wyrażeniem stałym, to E jest wyrażeniem właściwym.
- IV. Litera $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varsigma, \xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$ są *literami semantycznymi*.
- V. Jeśli E jest literą semantyczną, to E jest wyrażeniem właściwym.
- VI. Jeśli E, F są wyrażeniami właściwymi, to $*EF$ jest wyrażeniem właściwym.
- VII. Jeśli E jest wyrażeniem właściwym i jeśli E zawiera literę semantyczną I , to E jest wyrażeniem zmiennym.

Reguły te pozwalają na zbudowanie następujących wyrażen zmiennych:

$$*\lambda 0, \quad **\lambda \mu \nu, \quad *0*\lambda 0 \quad \text{i t. d.}$$

W ten sposób ustaliliśmy materiał, z którym mamy do czynienia w semantyce elementarnej.

Łatwo pokazać, że symbolika nasza jest jednoznacznie określona.⁷

W dowodzie naszym posługujemy się zasadą indukcji zupełnej, którą sformułujemy w sposób następujący:

*Jeśli jakąś właściwość posiada 0 i litery, i jeśli z tego, że posiadają ją wyrażenia właściwe E , F wynika, że posiada ją wyrażenie właściwe $*EF$, to właściwość tę posiadają wszystkie wyrażenia właściwe, które potrafimy zbudować przy pomocy naszych reguł.*

W dowodach naszych powołamy się na twierdzenia arytmetyki liczb naturalnych i na topologiczne właściwości wyrażen właściwych. Tak np. przyjmiemy jako jedno z założeń fakt, że jeśli E zawiera m gwiazdek, a F zawiera n gwiazdek, to $*EF$ zawiera $m + n + 1$ gwiazdek.

Nie będziemy tu dążyli do pedantycznego precyzowania dowodów. Precyzja możliwa jest dopiero na gruncie samej semantyki. Tutaj wystarczyć nam musi ten stopień ścisłości, jaki można uzyskać na gruncie zwykłej arytmetyki.

Żeby udowodnić jednoznaczność naszego systemu wyrażen wykażemy naprzód, że każde wyrażenie, zbudowane według naszych reguł, a zawierające n gwiazdek, zawiera $n + 1$ liter.

Widzimy naprzód, że jeśli E jest literą lub zerem, to E zawiera 0 gwiazdek i $0 + 1$ liter.

Przypuśćmy teraz, że prawo to jest słuszne dla wyrażen E i F .

Wyobraźmy sobie, że zbudowaliśmy wyrażenie $*EF$. Na podstawie naszego założenia: E ma np. k gwiazdek oraz $k + 1$ liter, F zaś m gwiazdek oraz $m + 1$ liter. Widzimy, że $*EF$ ma $m + k + 1$ gwiazdek oraz $(m + k + 1) + 1$ liter, jest tedy jasne, że właściwość nasza jest przechodnia.

Jeśli zatem powołamy się na zasadę indukcji zupełnej, sformułowaną wyżej, to twierdzenie nasze będzie ogólnie udowodnione.

Jest jasne, że dowód nasz posiada znaczenie czysto orjentacyjne, jak każdy dowód intuicyjny.

Wykażemy teraz, że każdy odcinek naszego wyrażenia od

⁷ Dowód tego twierdzenia podał p. Skarżeński w r. 1928.

strony prawej zawiera więcej liter niż gwiazdek. Stosujemy dowód indukcyjny.

Jeśli E jest literą lub zerem, to każdy odcinek wyrażenia E zawiera mniej gwiazdek niż liter.

Przypuśćmy teraz, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla wyrażeń E, F .

Zwróćmy uwagę na dowolny odcinek wyrażenia $*EF$ od prawej strony. Jeśli odcinek ten nie obejmuje części wyrażenia E , to jest zarazem odcinkiem wyrażenia F , zawiera więc mniej gwiazdek niż liter. Jeśli obejmuje część wyrażenia E , to ta część jest odcinkiem wyrażenia E , zawiera więc mniej gwiazdek niż liter. Ponieważ F zawiera też mniej gwiazdek niż liter, więc cały odcinek zawiera mniej gwiazdek niż liter.

Opierając się na tem twierdzeniu, dowiedzimy z łatwością, że jeśli E, F, E', F' są wyrażeniami, oraz $*EF = *E'F'$, to $E = E', F = F'$. Znak $=$ oznacza tu identyczność semantyczną.

Przypuśćmy, że tak nie jest, że więc np. E' jest dłuższe niż E . W takim razie mielibyśmy pewien odcinek R taki, że $ER = E'$. Ponieważ R zawierać musi mniej gwiazdek niż liter, więc mamy w R co najwyżej n gwiazdek i $n + 1$ liter. Ponieważ E' ma p gwiazdek i $p + 1$ liter, więc E musiałoby mieć $p - n$ gwiazdek i tyleż liter, co wykluczone.

3. Teraz zajmijmy się zbudowaniem reguł podstawiania wyrażeń stałych w wyrażeniach stałych za wyrażenia stałe.

Będziemy się posługiwali schematem $(EFGH)$. Schemat ten będziemy uważali za skrót pewnego wyrażenia właściwego, które podane będzie później.

Schemat $(EFGH)$ czytamy w sposób następujący: *Wyrażenie stałe H jest wynikiem podstawienia wyrażenia stałego G za wyrażenie stałe F w wyrażeniu stałym E .*

Jednoznaczność naszego schematu wynika natychmiast z rozważań paragrafu poprzedniego. Tak np. w sądzie $(*0*00*000*00)$ wyrażeniami E, F, G, H mogą być tylko wyrażenia $*0*00, *00, 0, *00$. Inne odczytanie nie jest możliwe.

Sposób wykonywania podstawień ustalimy podobnie jak sposób budowania wyrażeń stałych przy pomocy reguł rekurencyjnych, t. zn. ustalimy naprzód sprawę podstawiania w wyrażeniu 0 , a potem sprowadzimy podstawianie w wyrażeniu stałym $*EF$ do podstawienia w wyrażeniach stałych E, F .

a) Przyjmiemy następujące reguły podstawiania w wyrażeniu 0:

I. Jeśli F jest 0, to $(0FGG)$.

II. Jeśli F nie jest 0, to $(0FG0)$.

Reguły te nie rozstrzygają teoretycznie sprawy jednoznaczności podstawiania, w praktyce jednak dają zawsze wynik jednoznaczny, bo nie posiadamy poza nimi żadnych innych sposobów wykonania podstawiania w wyrażeniu 0.

Widzimy, że reguły nasze obejmują wypadek, jaki zachodzi, gdy w wyrażeniu 0 podstawiamy G za wyrażenie właściwe różne od 0. Jest jasne, że podstawienie nasze musi być w tym wypadku fikcyjne i nie może pociągnąć zmiany wyrażenia 0. Za wynik podstawienia uważamy więc wyrażenie 0, które było dane na początku.

b) Przypuśćmy teraz, że udało nam się stwierdzić, że $(EFGH)$ i $(E'FGH')$. Mogą zajść dwa wypadki:

I'. Jeśli F jest wyrażeniem $*EE'$, to $(*EE'FGG)$.

II'. Jeśli F jest różne od $*EE'$, to: $(*EE'FG*HH')$.

Ponieważ nie możemy mieć do czynienia z wyrażeniami innymi prócz tych, które budujemy przez kolejne stosowanie operatora $*EF$ do wyrażeń zbudowanych poprzednio, jest więc jasne, że podstawienie wykonamy w każdym konkretnym wypadku i to na jeden tylko sposób.

Zapytajmy się, jaki jest wynik podstawienia wyrażenia 0 za $*00$ w wyrażeniu $*0*00$. Pytanie nasze sformułujemy przy pomocy schematu $(*0*00*000H)$.

Odpowiedź uzyskamy przez kolejne wykonywanie podstawień w miarę budowania wyrażenia $*0*00$.

Widzimy naprzód na podstawie reguły II, że $(0*0000)$.

Biorąc w regule I' 0 za E , G , H , E' , H' , oraz $*00$ za F , stwierdzamy na podstawie tej reguły, że $(*00*0000)$.

Teraz bierzemy w regule II' 0 za E , G , H , H' , $*00$ za E' , F , co prowadzi nas na podstawie tej reguły po stwierdzeniu, że $*0*00$ jest różne od $*00$ do wniosku: $(*0*00*000*00)$.

Że innego wyniku uzyskać nie potrafimy, przekonamy się z łatwością, rozpatrując budowę wyrażenia $*0*00$.

W analogiczny sposób dochodzimy do twierdzeń:

(0000)
 (0*00*0000)
 (00*00*00)
 (*00*0000)
 (*000*00**00*00)
 (*0*0*00*0*00*00*0*00) i t. d.

4. Zwróćmy się obecnie do wyrażeń kształtu $(EFGH)$, w których E, F, G, H są dowolnymi wyrażeniami właściwymi. W wypadku, kiedy przynajmniej jedno z wyrażeń właściwych E, F, G, H zawiera literę semantyczną, będziemy nazywali wyrażenie $(EFGH)$ *funkcją zdaniową*, a zawartą w niem literę semantyczną *zmienną rzeczywistą*. Jest jasne, że możemy budować funkcje jednej, dwu, trzech i t. d. zmiennych, zależnie od tego, ile przyjęliśmy liter semantycznych. Teoria podstawiania za literę semantyczną w funkcji zdaniowej jest nam niepotrzebna, gdyż podstawienia takie będziemy wykonywali tylko w konkretnych wypadkach i to takich, w których litera semantyczna zachodzi rzeczywiście w funkcji zdaniowej. Tak np. podstawienia wyrażenia E za zmienną λ w funkcji zdaniowej $(*0\lambda*000\lambda)$ dokonujemy w ten sposób, że poprostu na miejsce zmiennej λ wpisujemy wyrażenie E . Jest jasne, że otrzymamy wyrażenie $(*0E*000E)$. Wyrażenie, jakie otrzymujemy przez podstawienie w funkcji zdaniowej wyrażenia właściwego na miejsce zmiennej rzeczywistej, nazywamy *wartością funkcji zdaniowej*. Jest jasne, że wartości funkcji zdaniowej mogą być funkcjami zdaniowymi lub *sądami*. Ten ostatni wypadek zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy wartość funkcji zdaniowej nie zawiera litery semantycznej. Reguły nasze pozwalają nam rozstrzygnąć o każdym sądzie, będącym wartością funkcji semantycznej, czy jest prawdziwy, czy fałszywy. W pierwszym wypadku charakteryzować go będziemy literą V , w drugim literą A .

Analogia pomiędzy równaniami algebraicznymi i przestępnymi a naszymi funkcjami zdaniowymi rzuca się w oczy. Wyrażenia stałe, które funkcję zdaniową obracają przez podstawienie w sąd prawdziwy, nazywać będziemy *pierwiastkami* funkcji zdaniowej. Nawiązując do naszej koncepcji podstawień martwych, będziemy mówili, że każde wyrażenie stałe jest pierwiastkiem sądu $(EFGH)$, pozbawionego litery semantycznej, w wypadku kiedy sąd ten jest prawdziwy. Żadne wyrażenie stałe nie jest pier-

wiastkiem sądu ($EFGH$), jeśli sąd ten jest fałszywy. Przekonamy się, że funkcje zdaniowe mogą mieć skończoną lub nieskończoną liczbę pierwiastków, mogą nie mieć żadnego pierwiastka i wszystkie wyrażenia stałe mogą być ich pierwiastkami.

Funkcje zdaniowe badać będziemy przy pomocy tablic.

A) Zwróćmy uwagę na funkcję: $(\lambda 00\lambda)$. Widzimy, że funkcja ta obraca się w sąd prawdziwy, jeśli za λ podstawimy 0. Przypuśćmy, że mamy $(E00E)$ oraz $(G00G)$. Zauważmy, że $*EG$ nie może być identyczne z 0, gdyż w każdym wypadku wynik zawiera przynajmniej jedną gwiazdkę. Mamy tedy na podstawie reguły II': $(*EG00*EG)$. Widzimy tedy na podstawie zasady indukcji, że wszystkie wyrażenia stałe są pierwiastkami funkcji $(\lambda 00\lambda)$.

Ten stan rzeczy przedstawiamy przy pomocy następującej tablicy:

$$\begin{array}{c|c} \lambda & (\lambda 00\lambda) \\ \hline \lambda & V \end{array}$$

B) Zobaczymy z łatwością, że żadne wyrażenie stałe nie jest pierwiastkiem funkcji $(000*\lambda 0)$. Wynika to z prostej uwagi, że żadne podstawienie wyrażenia stałego za λ w $*\lambda 0$ nie może dać 0, bo w każdym razie wynik zawierać będzie przynajmniej jedną gwiazdkę. Ten stan rzeczy jest sprzeczny z naszą regułą I.

Dla objaśnienia tego przypadku posługujemy się tablicą

$$\begin{array}{c|c} \lambda & (000*\lambda 0) \\ \hline \lambda & A \end{array}$$

C) Postaramy się teraz wyznaczyć pierwiastki funkcji $(\lambda*000*00)$.

Widzimy, że 0 nie jest pierwiastkiem tej funkcji (por. regułę II). Stąd wnosimy, że jeśli funkcja ma pierwiastek, to musi to być jakieś wyrażenie $*EF$. Jeśli tak jest, to albo E oraz F są identyczne z 0 i wtedy na podstawie reguły I' przekonujemy się, że $*EF$ nie jest pierwiastkiem danej funkcji, albo E oraz F nie są jednocześnie identyczne z 0 i wtedy na podstawie reguły II' mamy: $(E*0000)$, $(F*0000)$. Warunki te mogą być spełnione jedynie wtedy, gdy E, F są 0 lub $*00$. W pierwszym wypadku stosujemy regułę II, w drugim regułę I'. Inne możliwości są wykluczone, gdyż reguły I, II' nie mogą tu być zastosowane. Mamy tedy razem 3 możliwości, a mianowicie: E jest 0,

F jest $*00$; E jest $*00$, F jest 0 ; E, F są $*00$. Wypadek, kiedy E, F są 0 , odrzuciliśmy poprzednio. Ten stan rzeczy ilustrujemy następującą tablicą:

λ	$(\lambda * 000 * 00)$
$*0 * 00$	V
$**000$	V
$**00 * 00$	V
...	A

D) Wykażemy teraz, że wszystkie wyrażenia stałe, prócz wyrażeń $*00$, $**000$, są pierwiastkami funkcji $(**000\lambda 0**000)$. Widzimy naprzód, że $**000$ nie jest pierwiastkiem naszej funkcji, bo do tego wypadku stosuje się tylko reguła I', która daje wynik odmienny. Jeśli E nie jest $**000$, to reguła II' prowadzi nas do wyrażeń:

$$(*00E0*00), (0E00).$$

Teraz nasuwają się dwie możliwości. Albo E jest $*00$, to wtedy ze względów analogicznych do tych, z jakimi mieliśmy do czynienia przed chwilą, E nie jest pierwiastkiem funkcji $(*00\lambda 0*00)$. Jeśli E jest różne od $*00$, to funkcja nasza redukuje się do funkcji $(0\lambda 00)$, która jest spełniona dla dowolnego podstawienia na λ , gdyż wtedy w wypadku, kiedy λ jest 0 , działa reguła I, a kiedy λ nie jest 0 , działa reguła II. Widzimy tedy, że wartość naszej funkcji jest prawdziwa.

W tym wypadku mamy następującą tablicę orientacyjną:

λ	$(**000\lambda 0**000)$
$*00$	A
$**000$	A
...	V

Widzimy, że funkcja $(**000\lambda 0**000)$ prowadzi do wyznaczenia wszystkich wyrażeń zawartych w $**000$ z wyjątkiem 0 . Rzeczywiście, $**000$ zawiera prócz 0 jedynie wyrażenia $*00$, $**000$, t. j. te właśnie, które nie są pierwiastkami naszej funkcji.

Podobnie funkcja $(*0*0*0*00\lambda 0*0*0*0*00)$ jest spełniona przez wszystkie wyrażenia z wyjątkiem $*0*0*0*00$, $*0*0*00$, $*0*00$, $*00$. Są to te wszystkie wyrażenia, które są obok 0 zawarte w wyrażeniu $*0*0*0*00$.

Symbol $\{EF\}$ oznaczać będzie, że wyrażenie F jest zawarte w E . Zobaczymy w dalszym ciągu, że symbol ten da się skon-

struować z symbolu $(EFGH)$ i symbolów elementarnego rachunku zdań.

E) Zajmiemy się teraz przykładami funkcji, których pierwiastki tworzą postęp.

Zwróćmy naprzód uwagę na funkcję:

$$(*\lambda\lambda*000\lambda).$$

Widzimy naprzód, że pierwiastkiem tej funkcji jest 0 (por. regułę I').

Jeśli pierwiastkiem naszej funkcji jest $*EF$, to reguła II' daje warunki:

$$(*EF*000E), (*EF*000F).$$

Jeśli operacja podstawienia ma być jednoznacznie określona, musimy mieć E identyczne z F . Wstawiając E za F , dostajemy warunek: $(*EE*000E)$.

Otóż, jeśli $*EE$ jest pierwiastkiem naszej funkcji, to, na podstawie reguły II' także $**EE*EE$ jest pierwiastkiem naszej funkcji. Widzimy więc, że funkcja nasza jest *przechodnia* ze względu na podstawienie $*EE$ na miejsce E . Z tego wynika na podstawie zasady indukcji zupełnej, że pierwiastki naszej funkcji tworzą postęp:

$$0, *00, **00*00, ***00*00**00*00, \dots$$

W analogiczny sposób przekonujemy się, że pierwiastki funkcji $(*0\lambda*000\lambda)$ tworzą postęp:

$$0, *00, *0*00, *0*0*00, \dots$$

a pierwiastki funkcji $(*\lambda 0*000\lambda)$ tworzą postęp:

$$0, *00, **000, ***0000, \dots$$

F) Funkcje o 2 lub więcej literach semantycznych są odpowiednikami równań o dwu lub więcej niewiadomych.

a) Zwróćmy uwagę na funkcję $(\lambda 00\mu)$. Budujemy następującą tabelę:

λ	μ	$(\lambda 00\mu)$
λ	λ	V
0	$*\alpha\beta$	A

Tabela ta nie jest zupełna, bo nie umiemy zbudować schematu wyrażenia, któreby było napewno różne od danego wyrażenia E . Niemniej widzimy, że pierwiastkami naszej funkcji są te i tylko te pary wyrażeń stałych, których obydwa elementy są ze sobą identyczne. Wynika stąd, że funkcja $(\lambda 00\mu)$ może być czytana

μ jest identyczne z λ . W dalszym ciągu będziemy skracać ją przy pomocy symbolu $= \lambda \mu$.

b) Jest łatwo zobaczyć, że funkcja $(\lambda \mu 0 \lambda)$ charakteryzuje te wszystkie wyrażenia z wyjątkiem 0, które są w danym dowolnym wyrażeniu zawarte.

Widzimy, że $(0 \mu 0 0)$ jest spełniona przez wszystkie wyrażenia stałe. Mówimy, że żadne wyrażenie prócz 0 nie jest zawarte w 0.

Przypuśćmy teraz, że funkcje $(\lambda \mu 0 \lambda)$, $(\nu \mu 0 \nu)$ są spełnione przez wszystkie wyrażenia z wyjątkiem wyrażen, zawartych w λ , ν , różnych od 0. Budujemy wyrażenie: $(* \lambda \nu \mu 0 * \lambda \nu)$. Rozróżniamy dwa wypadki. Jeśli μ jest $* \lambda \nu$, widzimy, że mamy do rozporządzenia jedynie regułę I', która postuluje w tym wypadku identyczność 0 i $* \lambda \nu$. Ponieważ identyczność taka nie może zachodzić, widzimy, że $* \lambda \nu$ nie jest pierwiastkiem naszej funkcji.

Jeśli μ jest różne od $* \lambda \nu$, sprawa sprowadza się do warunków $(\lambda \mu 0 \lambda)$, $(\nu \mu 0 \nu)$, które wyznaczają wszystkie wyrażenia zawarte w $* \lambda \nu$, z wyjątkiem 0 i $* \lambda \nu$. Razem więc warunek nasz wyznacza wszystkie wyrażenia zawarte w $* \lambda \nu$, z wyjątkiem 0.

5. Zajmiemy się teraz arytmetyką liczb całkowitych. Oprzemy się na systemie arytmetyki liczb całkowitych zbudowanym przez p. W. Hetpera.⁸

Wyrażenie $(* E E * 0 0 0 E)$ skracać będziemy symbolem *Integ E* i będziemy czytali: *E jest liczbą całkowitą*. Wyrażenia liczbowe napisane w systemie dziesiętnym będziemy uważali za skróty pewnych wyrażen stałych, według następującej tabeli:

Skrót	Wyrażenie
1	* 0 0
2	* 1 1
3	* 2 2
4	* 3 3
5	* 4 4
6	* 5 5
7	* 6 6
8	* 7 7
9	* 8 8
10	* 9 9
11	* $\overline{10} \overline{10}$

⁸ Semantische Arithmetik. Sprawozdania Warszawskiego Towarzystwa Naukowego.

Czytelnik spostrzega, że ponad liczbami dwucyfrowymi, a to samo odnosi się do wszystkich liczb wielocyfrowych, umieszczamy kreskę. Czynimy to celem uniknięcia dwuznaczności.

Porównywanie liczb całkowitych sprowadza się do zagadnienia zawierania.

Mówimy, że sąd: *E jest większe lub równe F* jest skrótem sądu: *E, F są liczbami całkowitymi i $\{EF\}$* . Sąd ten oznaczamy przy pomocy symbolu $\geq EF$. Posługuję się tutaj metodą Łukasiewicza, co czytelnikowi nawykłemu do umieszczania znaku $\geq$ pomiędzy *E* i *F* może wydać się nieprzyjemne. Niemniej nie widzę powodu rezygnowania tutaj z tej metody, bo jeśli mamy i tak zapoznać się bliżej z językiem symbolicznym, musimy z konieczności zrezygnować z tylu przyzwyczajęń, że właśnie z tem jednym niema powodu się liczyć.

Sąd: *E jest większe od F* jest skrótem sądu: $\geq EF$ i nie jest $= EF$.

Sąd ten oznaczamy symbolem $> EF$.

Twierdzenie I:

Jeśli Integ *E*, jeśli $\{EF\}$, to albo $= EF$ albo $\{E*FF\}$.

Dowód: Zdanie podkreślone oznaczam symbolem $\Phi(E)$. Wykażemy w myśl zasady indukcji zupełnej, że $\Phi(0)$ i jeśli $\Phi(I)$, to $\Phi(*II)$. Takie uproszczone sformułowanie przechodniości uzasadnione jest tym faktem, że jeśli Integ $*IK$, to $= IK$, jak to stwierdziliśmy powyżej. O literach niema tutaj mowy, bo mamy do czynienia wyłącznie z wyrażeniami stałymi.

a) Jeśli $\{0F\}$, to $= F0$, zatem $\Phi(0)$.

b) Przypuszczam, że $\Phi(I)$, t. zn., że jeśli $\{IF\}$, to albo $= IF$, albo $\{I*FF\}$.

Jeśli teraz $\{*IIF\}$, to albo mamy $= *IIF$, albo $\{IF\}$.

Jeśli $= *IIF$, to mamy $\Phi(*II)$, bo jedna z dwu ewentualności postulowanych jest spełniona.

Jeśli $\{IF\}$, to na podstawie naszego założenia, albo $= IF$, albo $\{I*FF\}$.

Jeśli $= IF$, to $\{*II*FF\}$; z czego wynika $\Phi(*II)$, bo druga ewentualność jest spełniona.

Jeśli $\{I*FF\}$, to tem samem $\{*II*FF\}$, a zatem znowu $\Phi(*II)$, bo druga ewentualność jest spełniona.

W ten sposób przechodniość warunku $\Phi(I)$ jest stwierdzona.

Czytelnik, nie nawykły do ścisłych rozumowań, uzna ten do-

wód za bardzo zawiły. Trzeba jednak pamiętać, że cała trudność dowodu polega na odróżnianiu całego szeregu ewentualności. Ponieważ jest ich dużo, można się łatwo pomylić i stąd pochodzi wrażenie trudności. W rzeczywistości mamy tu do czynienia z obserwacjami najzupełniej banalnymi.

Twierdzenie II:

Jeśli *Integ E*, to *jeśli Integ F*, to albo $\{EF\}$ albo $\{FE\}$.

Dowód. Tutaj znowu oznaczamy zdanie podkreślone przez $\Phi(E)$ i znowu wykazujemy, że mamy $\Phi(0)$ oraz: *jeśli $\Phi(I)$, to $\Phi(*II)$* .

a) Jeśli *F* jest dowolnem wyrażeniem stałym, mamy $\{F0\}$, zatem druga alternatywa jest zawsze spełniona. Mamy tedy $\Phi(0)$ dla dowolnego *F*.

b) Przypuszczamy, że $\Phi(I)$, to znaczy, że jeśli *Integ F*, mamy albo $\{IF\}$, albo $\{FI\}$.

Jeśli $\{IF\}$, to tem samem $\{*IIF\}$, mamy więc $\Phi(*II)$.

Jeśli $\{FI\}$, to z uwagi na to, że *Integ F* i ze względu na twierdzenie I, mamy $=FI$ albo $\{F*II\}$.

Jeśli $=FI$, to $\{*IIF\}$, mamy więc znowu $\Phi(*II)$.

Jeśli $\{F*II\}$, to tem samem druga alternatywa jest spełniona, mamy więc także w tym wypadku $\Phi(*II)$.

Widzimy więc, że warunek $\Phi(I)$ jest przechodni.

Z warunków a) i b) wnosimy na podstawie zasady indukcji zupełnej, że nasze twierdzenie jest prawdziwe.

Dodawanie liczb całkowitych określamy symbolem: $+EFG$, który czytamy: *G jest sumą liczb całkowitych E i F*. Sąd ten uważamy za skrót sądu: *Integ E, Integ F oraz $(*EE1FG)$* .

Zobaczmy teraz, w jaki sposób sprowadza się mnożenie liczb całkowitych do dodawania.

Wprowadzamy symbol $\times EFG$, który czytamy: *G jest iloczynem liczb całkowitych E i F*.

Np. zamiast tradycyjnego $3 \cdot 4 = 12$, piszemy $\times 34 \overline{12}$.

Żeby zbudować sąd semantyczny odpowiadający symbolowi $\times 34 \overline{12}$, tworzymy skończony ciąg par liczb całkowitych: $*31$, $*62$, $*93$, $*124$.

Widzimy, że tu pierwsza para zawiera na pierwszym miejscu mnożną, a na drugim jedynekę, a wyrażenie ostatnie ma na miejscu pierwszym iloczyn, a na drugim mnożnik. Nadto każde wyrażenie $*CD$ należące do naszego ciągu, różne od $*31$, zbu-

dowane jest z pewnego wyrażenia $*AB$ należącego do naszego skończonego ciągu w ten sposób, że $+A3C$ oraz $+B1D$.

Widzimy, że w naszym ciągu wtedy tylko może się znaleźć $*124$, jeśli znajduje się w nim $*93$, a $*93$ może się znaleźć w nim tylko wtedy, jeśli znajduje się w nim $*62$, która to para otrzymuje się z $*31$ przy pomocy podanych operacji.

Łatwo zobaczyć, że nasz ciąg skończony możemy uzyskać przez konstrukcję pewnego wyrażenia stałego.

Budujemy naprzód wyrażenie:

$$****31*62*93*\overline{124},$$

które oznaczamy przez W_0 . W wyrażeniu tem figurują rzeczywiście nasze pary, ale prócz nich są jeszcze takie pary liczb całkowitych, jak $*11\overline{11}$, $*10\overline{10}$, bo przecież każda liczba całkowita prócz 0 jest parą liczb całkowitych.

Żeby uniknąć takiej dwuznaczności, wprowadził Hetper jeszcze inne wyrażenia. W naszym wypadku budujemy z W_0 i z naszych par następujące wyrażenie, które nazwiemy L_0 :

$$****W_0*31*W_0*62*W_0*93*W_0*\overline{124}.$$

Jeśli teraz będziemy mówili tylko o takich parach wyrażen $*AB$, które wchodzi do L_0 za pośrednictwem wyrażenia $*W_0*AB$, to wszelka dwuznaczność będzie usunięta. Rzeczywiście, pary zawarte w liczbach całkowitych odpadają, bo nie są objęte naszym schematem, pary takie jak np. $**W_0*31*W_0*62$ odpadają z tego samego powodu.

Przyjmijmy teraz następującą definicję mnożenia: $\times EFG$ jest skrótem następującego sądu: E, F są to liczby naturalne. Jeśli jedna z tych liczb jest 0, to G jest równe 0. Jeśli E, F są różne od 0, to pewne wyrażenie właściwe L posiada następujące własności:

Mamy takie wyrażenie stałe W , że

1. $\{L*W*E1\}$.
2. Mamy takie wyrażenie M , że $=L*M*W*GF$.
3. Jeśli $\{L*W*CD\}$, gdzie C, D są wyrażenia stałe takie, że nie jest $=*CD*E1$, to mamy takie wyrażenia stałe A, B , że $\{L*W*AB\}$, oraz $+AEC$ i $+B1D$.

Wygląda to dosyć zawile, bo chodzi o to, że nie możemy tutaj podać wyrażenia L explicite, lecz musimy je opisać. W systemie symbolicznym opis ten jest oczywiście pewnem wyrażeniem semantycznym. Tutaj ograniczyłem się do przedstawienia słownego.

6. Wprowadzenie liczb wymiernih nie przedstawia żadnych trudności. Są to poprostu pary wyrażeń budowane w sposób następujący:

Skrót	Wyrażenie
$\frac{1}{1}$	$* 1 * 0 1$
$\frac{1}{2}$	$* 1 * 0 2$
$\frac{2}{1}$	$* 2 * 0 1$

Widzimy, że w naszych parach licznik figuruje na pierwszym miejscu, podczas gdy drugie miejsce zajmuje para liczb zbudowana z 0 i z mianownika. Widzimy, że ta para nigdy nie może zamienić się w liczbę całkowitą, bo mianownik nigdy nie jest 0. Cały ułamek nigdy nie może zamienić się w liczbę całkowitą, bo pierwszy człon pary jest zawsze liczbą całkowitą, a drugi nigdy nią nie jest.

Równość liczb wymiernih nie da się sprowadzić do identyczności semantycznej.

Wprowadzamy symbol $\underset{R}{=} EF$, który czytamy: *Liczbę wymierną E, F są sobie równe*. Sąd ten uważamy za skrót sądu następującego: *Mamy liczby całkowite A, B, C, D, G takie, że nie jest $= 0 B$, $= E * A * 0 B$, $= F * C * 0 D$, oraz $\times A D G$, $\times B C G$.*

Widzimy, że jest to pospolite odwołanie się do t. zw. mnożenia na krzyż.

W analogiczny sposób definiujemy nierówność.

Dodawanie liczb wymiernih sprowadza się do dodawania i mnożenia liczb całkowitych. To samo odnosi się do mnożenia liczb wymiernih.

Odejmowanie i dzielenie liczb wymiernih sprowadza się do odejmowania i mnożenia liczb całkowitych, przyczem dzielenie przez 0 jest wykluczone.

7. Widzimy, że nasza metoda nie pozwala wprowadzić konstruować wprost sum, różnic, iloczynów i ilorazów, ale pozwala konstruować sądy $\underset{R}{+} EFG$, $\underset{R}{-} EFG$, $\underset{R}{\times} EFG$, $\underset{R}{:} EFG$. W ten sposób, z chwilą, kiedy zbudujemy rachunek logiczny, będziemy mogli uważać arytmetykę liczb wymiernih za rozdział semantyki elementarnej, pod warunkiem, że dodamy do niej zasadę indukcji zupełnej, pojętą jako regułę budowania twierdzeń.

W systemach arytmetyki niezależnych od semantyki (Peano,

Hilbert) skazani jesteśmy na rekurencyjne definicje działań. Tak np. mnożenie definiować musimy w następujący sposób:

$$1. E \cdot 1 = E.$$

$$2. \text{Jeśli } E \cdot F = G, \text{ to } E \cdot (F + 1) = G + E.$$

Trzeba jednak pamiętać, że definicje takie są zamaskowanymi aksjomatami. Jeśli dodajemy je do systemu, to tem samem wyłania się nowe zagadnienie niesprzeczności. W przeciwieństwie do tego stanu rzeczy nasze definicje nie wnoszą nic istotnie nowego. Są to poprostu skróty pewnych wyrażeń, które potrafimy *zbudować* w systemie semantyki elementarnej. Skrótów tych możemy zawsze pozbyć się, o ile zdecydujemy się na rozwlekłość formuł. W każdym razie możemy stwierdzić, że eliminacja taka możliwa jest w teorii.

Z chwilą, kiedy dopuszczamy definicje rekurencyjne, musimy z konieczności przyjąć jakieś reguły definiowania, jeśli bowiem dopuścimy dowolne definicje, popadniemy natychmiast w sprzeczność. Ale tutaj natrafiamy na trudność zasadniczą. Musimy powiedzieć, że tego samego znaku nie wolno nam użyć dla definiowania dwu różnych operacji. Ale takie zastrzeżenie opiera się na analizie systemu, który jeszcze nie jest gotowy, zawiera więc błędne koło.

Trudności tego rodzaju mogą wydać się nieistotne. Wiadomo, że matematycy nie liczą się z niemi i nigdy albo prawie nigdy nie popadają w sprzeczność. Jeśli jednak zechcemy być tak liberalni, to całe zagadnienie podstaw matematyki staje się iluzoryczne. W takim razie powiedzmy odrazu, że kierujemy się intuicją i koniec. Intuicja dobrze wyszkolona zawsze uchroni nas od sprzeczności, bo zawsze pozwoli nam cofnąć się, o ile zapuścimy się zbyt daleko. Ale właśnie o to chodzi, żeby intuicję ograniczyć do kilku reguł napisanych na początku. W takim razie musimy być bardzo ostrożni, bo teraz wolno nam reguły nasze stosować na ślepo i naprawdę grozi nam uwikłanie się w sprzeczność. Ale zato, jeśli uda nam się zbudować nasze reguły w ten sposób, że sprzeczność będzie wykluczona, a całą matematykę potrafimy uzyskać, to triumf nasz będzie tem większy. Będziemy wówczas mogli powiedzieć, że elementarne, na zdrowym rozsądku oparte reguły budowania wyrażeń i twierdzeń wyprowadzają nas automatycznie poza granice zdrowego rozsądku i pozwalają nam poruszać się swobodnie na terenach,

które poprzednio dostępne były jedynie dzięki intuicji. Myślę, że ta możliwość jest tak nęcąca, że wobec niej wszystkie inne zagadnienia filozofii nauk ścisłych stają się nikłe i drugorzędne.

Pozostaje jeszcze odeprzeć następujący zarzut: Żeby udowodnić jednoznaczność budowy naszych wyrażeń, musieliśmy odwołać się do indukcji zupełnej i korzystaliśmy z pojęcia liczby całkowitej. Zatem nasza konstrukcja liczby całkowitej jest iluzoryczna. Zarzut ten jest tylko pozornie słuszny. Dowód jednoznaczności naszej konstrukcji wyrażeń oparty jest na intuicyjnym pojęciu liczby całkowitej i posiada znaczenie pomocnicze, nie stanowiące wcale składowej części systemu. Z chwilą, kiedy raz upewniliśmy się, że konstrukcja nasza jest jednoznaczna, możemy przystąpić do sformułowania reguł systemu, które pozwalają nam z kolei na zbudowanie formalnej arytmetyki liczb całkowitych.

Ewentualne pytanie, czy ta formalna arytmetyka nakrywa się z arytmetyką intuicyjną, nie może być zupełnie ściśle rozstrzygnięte, bo arytmetyka intuicyjna nie jest uchwytna z powodu braku ścisłych określeń. Niemniej możemy zauważyć, że jest wszystko jedno pisać:

0, *00, **00*00, ***00*00**00*00 i t. d., czy też

0, 1, $1 + 1$, $1 + 1 + 1$ i t. d.

i że nasze reguły działań dają w każdym wypadku wyniki, zgodne z wynikami arytmetyki zwykłej.

Rozdział IV.

Rachunek zdań.

1. Początki rachunku zdań sięgają głębokiego średniowiecza. Jest zasługą prof. Łukasiewicza, że odnalazł odnośne wzmianki w wielkiej historii logiki Prantla, na które nikt uwagi nie zwracał.

Przedewszystkiem warto poznać następujący przykład, który zawdzięczamy Albertowi Wielkiemu (1193—1280):

- I. Nie wynika: *Każda róża jest dostępna umysłowi, więc wszystko, co jest nią, jest dostępne umysłowi*, przypuśćmy bowiem, że niema żadnej róży, poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy.

Albert stwierdza tu, że wynikania niema, jeśli poprzednik jest prawdziwy, a następnik fałszywy. Nadto zajmujące tu jest zwrócenie uwagi na zagadnienie pojęć pustych, które, jak widzieliśmy, było pominięte przez Arystotelesa. Jeśli zważymy, że Arystoteles nie czuł zupełnie tego zagadnienia, a współczesny nam Sleszyński starał się go usprawiedliwić, to pomysł myśliciela średniowiecznego musimy uznać za tem bardziej doniosły.

Dalej mamy następujące reguły rozumowania:

- II. Jeśli z A wziętego łącznie z jakąś przesłanką konieczną wynika B , to B wynika z samego A .
III. Dowolna konsekwencja typu:
Sokrates jest i Sokrates nie jest, zatem laska stoi w kącie jest dopuszczalna formalnie.
IV. Z zaprzeczenia następnika wynika zaprzeczenie poprzednika.

Wszystkie te reguły zostały później ujęte w symbole i weszły jako twierdzenia do rachunku zdań.

Reguła II. wprowadza iloczyn logiczny: A oraz C .

Reguła III. stwierdza, że z założenia fałszywego możemy wyprowadzić dowolny wniosek. Reguła ta jest osobiście ważna.

Na pierwszy rzut oka wydaje się nieco dziwaczna. Zobaczymy później, że jest zupełnie naturalna.

Reguła IV. daje t. zw. zasadę konwersji, posiadającą w rachunku zdań wielkie znaczenie.

U słynnego twórcy maszyny logicznej Rajmunda Lulla (1234—1305) znajdujemy zasadę elementarnego sylogizmu:

- I. W każdym dobrym wniosku formalnym to, co wynika z następnika, wynika też z poprzednika.

Nadto mamy następną ważną regułę:

- II. Każdy wniosek, którego poprzednik jest sprzeczny z negacją następnika, jest dobry.
- III. Wkońcu znajdujemy t. zw. zasadę identyczności logicznej, dopuszczającą wnioskowanie z synonimu jednego na inny.

Ta najbanalniejsza z wszystkich zasad była może najtrudniejsza do uchwycenia, właśnie dlatego, że rozumie się sama przez się.

Duns Scotus (1265(?)—1308) sformułował reguły następujące:

- I. Z dowolnego niemożliwego sądu wynika dowolny inny sąd, nie na podstawie wynikania formalnego, ale na podstawie dobrego wynikania materialnego.
- II. Każdy sąd prawdziwy wynika z dowolnego innego sądu na podstawie dobrego wynikania materialnego.

Zasadnicza myśl była już u Alberta Wielkiego, nowem jest natomiast wprowadzenie pojęcia wynikania *materalnego*, w odróżnieniu od *formalnego*. W życiu praktycznem mamy do czynienia jedynie z wnioskowaniem formalnem, polegającym na przejściu od pewnego sądu do sądu związanego z nim w pewien sposób formą. Niemniej, jeśli wiemy zgóry jaką wartość logiczną posiadają dane sądy, t. zn. jeśli o każdym z nich możemy rozstrzygnąć, czy jest prawdziwy, czy fałszywy, wtedy i tak możemy mówić o wynikaniu. Sprawą tą zajmiemy się w dalszym ciągu w sposób szczegółowy.

Przykłady przytoczone tutaj świadczą niezbicie, że scholastyki wyszli daleko poza Arystotelesa, tworząc podstawy tego, co dziś nazywamy rachunkiem zdań. Do zbudowania tego rachunku brakło im koncepcji doskonałego systemu logiki i języka symbolicznego. Skutkiem tego pomysły ich nie wpłynęły na dalszy rozwój logiki.

Niemniej *Ars magna* Rajmunda Lulla może być uważana za

pierwszy zarys systemu logiki, pomieszanego jeszcze z wyraźnym nonsensem. Mamy tam do czynienia z dowolnem rozdzieleniem 3 pojęć na 3 koła spółśrodkowe i budowaniem z nich wszystkich możliwych kombinacyj. Pachnie to horoskopem astrologicznym, albo zgoła czarami, ale na dnie jest wycucie potrzeby zmechanizowania operacyj logicznych.¹

Badania historyczne naszych czasów wykazały, że ewolucja logiki dokonywała się systematycznie, zdobywając krok po kroku coraz to nowe tereny. I tak Vailati zwrócił uwagę na to, że jezuita Clavius z XVI. w. wykrył w *Elementach* Euklidesa następującą zasadę rozumowania:

Jeśli z zaprzeczenia sądu wynika prawda tego sądu, to ten sąd jest prawdziwy.

Łukasiewicz znalazł w pismach jezuitów polskich, a w szczególności w dziele Krasnodębskiego: *Philosophia Aristotelis explicata, Varsavia 1676*, wielkie pochwały tej zasady, którą autor nazywa *Consequentia mirabilis*.²

Jasna idea systemu logiki symbolicznej rodzi się dopiero w XVII. w.

Zaczyna się od pomysłów Joachima Jungiusa, który zwraca uwagę na to, że wniosek:

Jeśli A jest ojcem B, to B jest synem A

nie da się sprowadzić do schematu sylogistycznego. W ten sposób obala Jungius ostatecznie autorytet Arystotelesa, wywierając na współczesnych wpływ zapładniający.³ Pierwsze próby zastosowania do logiki języka symbolicznego zawdzięczamy Dalgarnusowi (*Ars signorum*) i Wilkinsowi (*Essay towards the real character*).⁴ Ale dopiero Leibniz stworzył jasną koncepcję systemu logiki symbolicznej, jak to widzieliśmy poprzednio. Prace Leibniza odnosiły się do rachunku klas, przyczem nie wyszły poza dorywcze próby.

Próby te kontynuowali uczniowie Leibniza Lambert i Segner, ale prace ich nie wywarły bezpośredniego wpływu na powstawanie rachunku zdań.

¹ Por. Hölder: Die mathematische Methode. Berlin 1924, p. 4.

² Por. J. Łukasiewicz: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Warszawa 1930, p. 67.

³ Por. Enriques: Zur Geschichte der Logik. Leipzig u. Berlin 1927, p. 75.

⁴ L. c., p. 78.

Właściwym twórcą rachunku zdań jest matematyk angielski *Boole* (1815—1864).

O odkryciu Boole'a pisze Sleszyński co następuje:

Myśl Boole'a powstała na tle owego symbolizmu, jaki był właściwy matematykom angielskim pierwszej połowy ubiegłego stulecia. Symbolizm ten ma zastosowanie przedewszystkiem w algebrze, gdzie całe rachunki mogą podlegać rozmaitym interpretacjom. Operujemy w ten sposób pewnemi symbolami bez względu na ich znaczenie. Wprawdzie wszystkie własności symbolów algebraicznych wynikają z ich definicyj, różnych dla rozmaitych gatunków algebr, ale wynikają pośrednio, ponieważ można udowodnić pewne podstawowe twierdzenia, wspólne dla wszystkich gatunków algebr, z których wynikają prawa rachunku, także, rzecz oczywista, wspólne dla wszystkich gatunków algebr. Boole, jako matematyk, często stosował taki symboliczny punkt widzenia w swoich znakomitych i bardzo oryginalnych dziełach. Zobaczymy niebawem, jakie piękno ten punkt widzenia wycisnął na jego logice.⁵

W dalszym ciągu czytamy:⁶

Przechodząc do przedmiotu, zaznacza on, iż logika ma do czynienia z dwojakim stosunkiem: Stosunkiem rzeczy i stosunkiem faktów. Chodzi tu o podział na logikę klas i logikę zdań. Przytem nazywa Boole zdania pierwszej pierwotnemi, zdania zaś drugiej — wtórnemi... W logice zdań rozważa on pojęcie, które później wprowadził Frege jako funkcję logiczną.

Obok Boole'a należy wymienić de Morgana, którego prace wywarły potężny wpływ na rozwój rachunku zdań.

Pierwszą próbę zbudowania rachunku zdań przedsięwziął Mac Coll (*The calculus of equivalent statements*).⁷ Równocześnie pracowali nad podstawami logiki: Jevons, Peirce, Venn i Schröder. Wspólne wysiłki tych badaczy doprowadziły do powstania tego, co dzisiaj nazywamy *algebrą logiki*.

Algebra logiki była dyscypliną oderwaną od życia i od nauki. Została przez naukę oficjalną zupełnie zlekceważona. Zdanie Kanta, że logika Arystotelesa jest dziełem doskonałym i zamkniętym, wywarło wpływ hamujący na filozofów w. XIX. Nie wierzyli oni w wartość badań logicznych, ograniczając się do analizy psychologicznej procesu myślenia ścisłego i do zagadnień poznawczych (J. S. Mill, Sigwart, Wundt i i.). Tradycja tego stanowiska utrzymuje się do dziś dnia.

⁵ Teorja dowodu, T. II. L. c., p. 13.

⁶ L. c., p. 14.

⁷ Por. Padoa: La logique déductive. Paris 1912, p. 50.

Kiedy myśli się o tem wszystkim, trudno jest obronić się wrażeniu, że chodzi tu o jakieś niesamowite siły, tkwiące na dnie umysłów ludzkich, które starają się za wszelką cenę zniweczyć dążenie do radykalnego krytycyzmu. Jest rzeczą powszechnie znaną, że nowożytna nauka z wielkim wysiłkiem musiała walczyć z przesądem średniowiecznym, zanim zdobyła sobie obecne stanowisko. Duch średniowieczny zwalczał ją w imię logiki scholastycznej. Może dlatego właśnie logika stała się synonimem zacofania i bezpłodności i może dlatego została pozostawiona na boku. Trzeba jednak zauważyć, że ten właśnie fakt doprowadził do niemałego zamieszania pojęć. Mdłą psychologię myślenia zaczęto identyfikować z logiką, a wysiłki twórcze logików lekceważono zupełnie i uważano je za igraszki umysłowe.

Jest faktem, że logika XIX. w., może właśnie dlatego, że była odcięta od wielkiej linii rozwoju nauki, posiada charakter czysto formalnej konstrukcji. Rachunek logiczny przybiera w dziele Schrödera ogromne rozmiary, ale i tak pozostaje czemś samem dla siebie, czemś, czego nie można w żaden sposób powiązać ani z myśleniem codziennem, ani z myśleniem naukowem. Dopiero pod koniec XIX. w. powstaje zagadnienie skonstruowania *symbolicznego systemu matematyki*, opartego na rachunku zdań. Zagadnienie to rozwiązują niezależnie od siebie Peano i Frege, każdy na swój sposób. Dzieło Fregego pozostaje w cieniu skutkiem niezwykle ciężkiej symboliki. Natomiast Giuseppe Peano tworzy symbolikę tak prostą i tak przejrzystą i uzyskuje tak wielką prostotę w konstrukcji swego systemu, że jego *Formulaire de Mathématiques* (1-e wydanie 1895) staje się powszechnie znany, wywołując namiętny sprzeciw ze strony Poincarégo, a kolosalny entuzjazm ze strony Couturata i Russella. Wytwarza się namiętna polemika, postawiona na bardzo wysokim poziomie. Jest to początek XX. w. Wydać się może, że powróciły czasy dyskusyj ateńskich z czasów Sokratesa i Protagorasa. Jest jasne, że z tego wszystkiego musi się zrodzić zupełnie nowa logika i że wegetacja logiki w przedpokoju nauki skończyła się raz na zawsze.

Do wolnej od sprzeczności konstrukcji systemu logiki było jeszcze daleko. Zadanie to zostało rozwiązane w zasadzie dopiero przez Whiteheada i Russella,⁸ ale idea sama była fascy-

⁸ Whitehead a. Russell: Principia Mathematica. Cambridge 1910.

nująca. Poincaré, jako przedstawiciel tradycyjnego intuicjonizmu, nie posiadał się ze złości.

Tak tedy — pisał — aby dowieść pewnego twierdzenia, nie jest potrzebne, ani nawet pożyteczne wiedzieć, co ono oznacza. Można by zastąpić matematyka przez fortepian do rozumowania, wymyślony przez Stanleya Jevonsa; albo, jeśli wolicie, można by wymyślić maszynę taką, iż w jeden jej koniec wkładanoby pewniki, a z drugiego otrzymywanoby twierdzenia, podobnie jak do legendarnej maszyny chicagoskiej wkłada się żywe wieprze, a wydobywa szynki i kiełbasy. Matematyk nie potrzebuje więcej niż ta maszyna, rozumieć, co robi.⁹

Na innym miejscu pisze Poincaré:¹⁰

Język symboliczny, stworzony przez Peano'a, odgrywa w nowych tych badaniach dużą bardzo rolę. Wprawdzie język ten posiada pewną pożyteczność, lecz zdaje mi się, że Couturat przywiązuje doń przesadną wagę, co wywołać musiało zdziwienie u samego Peano'a.

Istotnym pierwiastkiem tego języka są pewne znaki algebraiczne, przedstawiające poszczególne łączniki: *jeżeli, i, albo, więc*. Być może, że znaki te są dogodne; inną jest rzeczą, czy są powołane do odnawienia całej filozofii. Trudno przypuścić, że wyraz *jeżeli*, skoro go napiszemy w postaci $\rightarrow$, nabiera nowej jakiejś mocy.

Poincaré zapomniał, że pozbycie się dwuznaczności, to siła niezmierna i doniosła, a właśnie do tego służy język symboliczny. Zapomniał, że jeśli wiemy napewno, że budujemy nasze wyrażenia z tych tylko symboli, to sytuacja jest zupełnie inna niż wtedy, kiedy odwołujemy się do całego języka potocznego wraz z wszystkimi jego mętami i pułapkami.

Ten wynalazek Peano'a — pisze dalej Poincaré¹¹ — nazywał się dawniej *pazygraffą*, t. j. sztuką napisania traktatu matematycznego bez użycia ani jednego wyrazu z języka pospolitego. Nazwa ta określała bardzo wyraźnie jego stosowalność. Później podniesiono ją do wybitniejszej godności *logistyki*.

Poincaré'go gniewała ta nazwa, bo zdradzała pretensję do dokonania przewrotu w logice. Poincaré nie zdawał sobie sprawy, że nazwa ta była objawem nadmiernej skromności. Było z tem tak, jakgdyby ktoś chciał zarezerwować nazwę *medycyna* dla starej doktryny Galena, a medycynę współczesną nazywał np. *medykamentyką*.

Przecież to, co nazywa się dzisiaj jeszcze *logiką*, różni się

⁹ Nauka i metoda, I. c., p. 111.

¹⁰ L. c., p. 117.

¹¹ L. c., p. 118.

od rzekomej *logistyki* tem tylko, że jest mniej ściśle sformułowane, że nie stanowi zwartej całości i że jest nierozzerwalnie związane z zagadnieniami gramatyki.

Zwolennicy starej logiki zapuszczają się w niezmiernie subtelne analizy wyników logiki dzisiejszej celem wykazania, że to nie jest prawdziwa logika.

I tak R. Feys radby wykazać, że metoda symboliczna nie jest w stanie odzwierciedlić dokładnie tego, co zawiera myśl.¹² Ale właśnie o to chodzi, że nikt nigdy nie wiedział, co zawiera myśl, a wszystko, co wyprodukowała w związku z tem zagadnieniem stara logika, było prymitywne w politowania godny sposób i roko się od sprzeczności. Trzeba raczej powiedzieć, że dopiero z chwilą, gdy zaczęto budować logikę symboliczną, możemy mieć nadzieję dowiedzenia się czegoś o naszych procesach myślowych.

Logika symboliczna zrodziła się jako nieunikniona reakcja przeciw banałom i mętom logiki tradycyjnej. Logika ta uprawiana jest jak wiadomo do dzisiaj. Nieustannie robione są próby zmodernizowania jej i wydobycia z niej za wszelką cenę czegoś godnego uwagi. Próby te zawodzą raz po raz.

Żeby się przekonać o prawdziwości tych słów, wystarczy wziąć do ręki podręcznik logiki prof. Goblot'a, opublikowany po wojnie, a więc w momencie, kiedy dzieło Whiteheada i Russella było już gotowe. Prof. Goblot pominął to dzieło w zupełności, w przekonaniu, że należy ono do innego działu nauki, który nazywa *logistyką*.

Przyznając *logistyce* zasługę *rozpoznania, wyprowadzenia i sklasyfikowania różnych rodzajów działań konstruktywnych, używanych w rozumowaniu matematycznym*, stwierdza ten badacz, że chodziło mu o ogólne prawa myślenia, a nie tylko o rozumowanie matematyczne.¹³ Nad tym faktem, że przecież matematyka musi korzystać z ogólnych praw myślenia i że nie jest możliwe zbudować system matematyki bez odwołania się do tych praw, nie zastanawia się ten myśliciel ani na chwilę. Również nie zastanawia się nad tem, że Celarenty, Camestresy i tym podobne banały, którym poświęca sporo miejsca, nie nadają się do wyprowadzenia matematyki, nie mogą więc pretendować do ogólnych praw myślenia. Książka prof. Goblot'a nie jest logiką —

¹² La transcription logistique du raisonnement. Louvain 1925.

¹³ E. Goblot: Traité de logique, 5-ième éd. Paris 1929, p. XIX.

jest popularną pogawędką na temat logiki tradycyjnej. Jest ona smutnem memento, jak nieuchwytnem i nietrwałem jest życie wielkich środowisk naukowych. Poincaré, wyszydając Couturata, nie zdawał sobie zapewne sprawy, że na miejsce entuzjazmu i wielkiej ambicji twórczej wprowadza marazm i powrót do średniowiecza.

Trzeba jednak pamiętać, że Poincaré był bardzo bliski pragmatyzmu i brał zupełnie serjo irracjonalizm Bergsona. Należał on do pokolenia matematyków, które nie chciało widzieć ścisłego myślenia poza granicami matematyki i nie liczyło się z tem, że brak ostrego krytycyzmu w stosunku do ogółu zagadnień życia musi spowodować szkodliwe zamieszanie pojęć. Nie baczył na to, że stara logika przedstawiała i przedstawia jeszcze do dziś dnia podwójne niebezpieczeństwo. Z jednej strony grozi nam identyfikowanie grubych reguł orientacyjnych ze ścisłymi prawami myślenia, z drugiej niewiara w ścisłe myślenie i oddanie się skrajnie indywidualistycznemu irracjonalizmowi.

Jeśli dzieło Arystotelesa uważamy za początek walki o racjonalistyczny pogląd na świat, a sformułowaną przez niego zasadę kontradycji jako drogowskaz, przy którego pomocy możemy posuwać się coraz dalej w konstrukcji systemu logiki, to wtedy dzieło to jest jedną z najcenniejszych zdobyczy ducha ludzkiego. Jeśli jednak chcemy brać poważnie system sylogistyki i wierzyć Kantowi, że jest to dzieło zamknięte, choć bezpłodne, to wtedy narażamy się na poważne niebezpieczeństwo. Wtedy nie możemy się dziwić, że irracjonalista taki jak Hegel powie nam, że u początku poznania leży sprzeczność, ani nie możemy się dziwić filozofowi komunistycznemu Tahleimerowi, który powiedział poprostu, że zasada identyczności jest fałszywa, bo niema sztywnych pojęć; wtedy musimy uznać w zupełności pragmatystyczną reakcję, bo przecież trudno ciągle udawać, że mamy ścisłe podstawy myślenia, jeśli wszystko jest tylko zgrub-sza określone.

Jeśli chodzi o krytykę starej logiki, to książka pragmatysty F. C. Schillera p. t. *Formal Logic*¹⁴ jest aktem uczciwej szczerości i bystrej obserwacji. Smutnem jest tylko to, że autor ignoruje zupełnie logikę współczesną i pomija milczeniem Boole'a, de Morgana, Peirce'a, Jevonsa, Venna i Whiteheada, a o Bert-

¹⁴ London 1934.

randzie Russella wspomina tylko mimochodem w związku z jakimś paradoksem. Umyślnie wymienilem tylko nazwiska słynnych logików angielskich, którzy przecież powinni być autorowi znani choćby z katalogów księgarskich. Warto zauważyć, że nazwiska Jevonsa, Venna i Couturata znajdują się na okładce książki Schillera w spisie dzieł wydanych przez firmę Macmillan and Co. Ltd.

Zjawiska tego rodzaju wydają mi się osobiście zajmujące. Świadczą one o tem, że niebezpieczeństwo powrotu do barbarzyństwa, o którym ciągle słyszymy, czai się na dnie naszej własnej kultury.

Zwróć jeszcze uwagę na rzecz następującą. Cytowany powyżej prof. Hölder nie zna zupełnie *Principiów* Whiteheada i Russella, a z *logistyką* załatwia się krótko z uwagi na to, że nie cieszy się uznaniem filozofów.¹⁵ Prof. Hölder nie waha się napisać, że rachunek zdań nietylko nie przyczynia się do wyjaśnienia zagadnień logicznych, ale wprowadza do nich zamieszanie.¹⁶

Tak było przed 10 laty. Dzisiaj stanowisko takie należy do rzadkości. Z chwilą, kiedy słynny Hilbert pogodził się z rachunkiem zdań, ogłaszając wspólnie z Ackermannem niezmiernie zajmującą książkę o podstawach tego rachunku,¹⁷ trudno sobie wyobrazić, żeby jakiś matematyk odważył się na sąd lekceważący.

Walka toczy się jeszcze o koncepcję podstaw matematyki. Ale wynik tej walki jest już przesądzony.

Podstawę dzisiejszego rachunku zdań stanowi dzieło Whiteheada i Russella. Ważnych udoskonaleń dokonali Sheffer,¹⁸ Nicod¹⁹ i Łukasiewicz.²⁰ Sheffer sprowadził pojęcie rachunku zdań do jednego pojęcia fundamentalnego. Nicod sprowadził rachunek zdań do jednego aksjomatu, oddzielając zarazem t. zw. reguły postępowania od aksjomatów symbolicznych. Łukasiewicz wprowadził metodę symboliczną, umożliwiającą pozbycie się kropek i nawiasów, służących do oddzielenia wyrażeń. Metoda ta okazała się niezmiernie płodna. W dalszym ciągu oprzemy się na tej metodzie.

¹⁵ Die mathematische Methode. Berlin 1924, p. 272.

¹⁶ L. c., p. 277.

¹⁷ Hilbert u. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin 1928.

¹⁸ Transactions of the American Mathematical society 1913).

¹⁹ A reduction in the number of primitive propositions of Logic (Proceedings, Vol. XIX).

²⁰ Elementy logiki matematycznej. Wydanie litograf. Warszawa 1929.

Hilbert i jego szkoła opiera się na symbolice, która nie nadaje się do ściśle formalnych rachunków. Wielką zasługą tej szkoły polega na zapoczątkowaniu badań metalogicznych nad właściwościami systemu logiki symbolicznej.

2. Wykład rachunku zdań zaczyna się zwykle od konwencjonalnego stwierdzenia, że mamy zdania prawdziwe i fałszywe, poczem przystępuje się do konstruowania związków pomiędzy zdaniami. Metoda ta zmusza nas od samego początku do pewnej wyrozumiałości, nie wiemy bowiem dobrze, o jakie zdania chodzi. Odwołanie się do języka potocznego napotyka na zasadnicze trudności, bo naprzód nie wszystkie zdania języka potocznego mają sens jasno określony, a potem jest naprawdę trudno ustalić kryterja prawdy i fałszu zdań języka potocznego, gdyż w każdym wypadku nasunąć się mogą wątpliwości. Pozostaje jeszcze możliwość odwołania się do jakiejś dyscypliny prostej i jasno określonej, np. do arytmetyki elementarnej. Wiemy jednak, że zbudowanie podstaw arytmetyki elementarnej w sposób zupełnie ścisły natrafia na niemałe trudności i nie da się przeprowadzić bez odwołania się do pojęć pomocniczych semantyki. W tych warunkach czysty formalizm wydać się może jedynym wyjściem z sytuacji. Gdyby tak było, to podstawy logiki wychodziłyby daleko poza granice zdrowego rozsądku i przepaść pomiędzy logiką formalną a zwykłym rozumowaniem należałoby uważać za smutną, ale nieuniknioną konieczność. Otóż, przekonamy się z łatwością, że tak nie jest bynajmniej. Zobaczymy, że nie jest wcale trudno podać przykłady zdań prawdziwych i fałszywych, których sens jest zupełnie ściśle określony. Wystarczy zwrócić się do podstawowych pojęć semantyki elementarnej.

Zaczynamy od zbudowania pojęcia wyrażenia logicznego:

Przyjmujemy następujące reguły:

1. Jeśli E, F, G, H są wyrażeniami właściwymi, to $(EFGH)$ jest wyrażeniem logicznym.
2. p, q, r, s, t, u, v, w są literami logicznymi.
3. Jeśli E jest literą logiczną, to E jest wyrażeniem logicznym.
4. Jeśli E, F są wyrażeniami logicznymi, to $/EF$ jest wyrażeniem logicznym.

Wprowadziliśmy tutaj nowy schemat: $/EF$, który nazwiemy schematem logicznym. Znaczenie tego schematu objaśnimy następującą tablicą:

E	F	$/EF$
V	V	Δ
V	Δ	V
Δ	V	V
Δ	Δ	V

Tablica ta ustala następującą regułę: Wyrażenie logiczne $/EF$ posiada wartość Δ wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia logiczne E, F posiadają wartość V .

W języku potocznym możemy wyrażenie to czytać: nie zachodzi (E oraz F). Schemat $/EF$ zawdzięczamy logikowi amerykańskiemu Shefferowi.

Wyrażenia logiczne, nie zawierające ani liter semantycznych, ani liter logicznych, nazywać będziemy sędami elementarnymi. Widzimy, że wyrażenia logiczne, które otrzymamy, podstawiając w schemacie ($EF\bar{G}H$) wyrażenia stałe na miejsce E, F, G, H , są sędami elementarnymi. Każdy z tych sądów posiada, jak widzieliśmy, wartość V , albo wartość Δ .

Jeśli E, F są sędami elementarnymi, posiadającymi czyto wartość V , czy też wartość Δ , to $/EF$ jest sędem elementarnym, który napewno na podstawie naszej tablicy posiadać będzie wartość V albo wartość Δ .

Z uwagi tej wnosić możemy, że każdy sąd elementarny, który zbudujemy, posiadać musi wartość V albo wartość Δ i że zawsze możemy rozstrzygnąć, którą z tych wartości sąd ten posiada.

Wyrażenia logiczne, zawierające litery logiczne, a nie zawierające liter semantycznych, nazywać będziemy *funkcjami logicznymi*.

Wyrażenia logiczne, zawierające zarówno litery logiczne, jak litery semantyczne, nazywać będziemy *funkcjami semantyczno-logicznymi*.

Wyrażenia logiczne, zawierające litery semantyczne, a nie zawierające liter logicznych, nazywać będziemy *funkcjami semantycznymi*.

Przykłady funkcji logicznych:

$$/pp, //pp/qq, /p/qq, //pq/pq, ///pp/qq//pq, \\(0000)p, /p/(*00000)p.$$

Przykłady funkcji semantyczno-logicznych:

$$/p/(λ00λ)(λ00λ), /(λ000)/pq.$$

Przykłady funkcji semantycznych:

$$/(λ000)(λ000)/(λμ0λ)(λμ0λ)/(λμ0λ)(λμ0λ), \\ /(0000)(λ0*000).$$

3. Zobaczymy teraz, że schemat $/EF$ nadaje się doskonale do zbudowania zasadniczych pojęć logicznych.

a) Naprzód zbudujemy negację danego wyrażenia logicznego. Zwróćmy uwagę na następującą tablicę:

E	$/EE$
V	Λ
Λ	V

Widzimy, że $/EE$ posiada wartość Λ wtedy i tylko wtedy, gdy E posiada wartość V . W przeciwnym wypadku $/EE$ posiada wartość V . Wobec tego możemy wyrażenie $/EE$ uważać za negację wyrażenia E . Wyrażenie to skracamy przy pomocy symbolu $\sim E$.

b) Przystępujemy z kolei do zbudowania sumy logicznej.

Zwróćmy uwagę na schemat $//EE/FF$. Tablica wartości tego schematu jest następująca:

E	F	$/EE$	$/FF$	$//EE/FF$
V	V	Λ	Λ	V
V	Λ	Λ	V	V
Λ	V	V	V	V
Λ	Λ	V	Λ	Λ

Widzimy, że $//EE/FF$ ma wartość Λ wtedy i tylko wtedy, gdy obydwa wyrażenia logiczne E, F mają wartość Λ . Schemat $//EE/FF$ jest tedy odpowiednikiem algebraicznego warunku:

$$x \cdot y = 0.$$

Wiemy, że warunek ten nie jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno x jak y są różne od 0.

Warunek $x \cdot y = 0$ czytamy:

$$x = 0 \text{ albo } y = 0,$$

przyczem dopuszczony jest wypadek, że zarówno x jak y jest równe 0

Jest to mniej więcej tak, jak wtedy, gdy mówimy: *w tej sprawie dopomoże ci pan X, albo pan Y*, przyczem nie wykluczamy, że mogą pomóc obaj.

Schemat $//EE/FF$ skracamy przy pomocy symbolu $\vee EF$ i czytamy go: *E albo F*. Nazywamy go *sumą logiczną*.

Zbudujmy teraz schemat:

$$/\sim = F0(EF0E).$$

Z naszej umowy wynika, że schemat ten jest równoważny schematowi $\vee = F0 \sim (EF0E)$. Dzięki tej równoważności jest łatwo zobaczyć, że schemat nasz posiada wartość *V* wtedy i tylko wtedy, gdy wyrażenie *E* zawiera wyrażenie *F*. W tych warunkach wprowadzony w rozdziale poprzednim schemat zawieraniowy $\{EF\}$, możemy uważać za skrót schematu

$$/\sim = F0(EF0F).$$

Za pośrednictwem schematu $\vee = F0 \sim (EF0F)$ przekonujemy się, że między oboma schematami panuje najzupełniejsza zgodność.

Rzeczywiście widzimy, że dla dowolnego wyrażenia stałego *E* mamy $\{E0\}$, co odpowiada temu faktowi, że dowolne wyrażenie stałe zawiera 0. Jeśli *F* nie jest 0, to podstawienie wyrażenia 0 na *F* w *E* daje *E* wtedy i tylko wtedy, jeśli to podstawienie jest martwe, t. zn. jeśli *E* nie zawiera *F*, bo podstawienie rzeczywiste w *E* wyrażenia 0 na miejsce wyrażenia *F* różnego od 0 musi pociągnąć modyfikację wyrażenia *E*.

W ten sposób przekonaliśmy się, że schemat podstawieniowy $(EFGH)$ i schemat logiczny $/EF$ wystarczają do zbudowania pojęcia identyczności semantycznej oraz pojęcia zawierania semantycznego.

Ten stan rzeczy objaśnimy następującym przykładem:

λ	$\sim (**000\lambda 0 **000)$	$= \lambda 0$	$\vee = \lambda 0 \sim (**000\lambda 0 **000)$
0	Δ	V	V
*00	V	Δ	V
**000	V	Δ	V
...	Δ	Δ	Δ

Widzimy, że jeśli na λ będziemy brali wyrażenia różne od 0, od *00 i od **000, będziemy mieli stale do czynienia z podstawieniem martwym, będziemy więc mieli $(**000\lambda 0 **000)$.

Wobec tego wyrażenie logiczne $\sim (**000\lambda 0**000)$ musi mieć wartość Δ , ponieważ zaś $=\lambda 0$ ma w naszym wypadku również wartość Δ , więc także $v = \lambda 0 \sim (**000\lambda 0**000)$ będzie miało wartość Δ . W ten sposób stwierdzamy, że wyrażenie $**000$ zawiera tylko wyrażenia $**000$, $*00$, 0 .

c) Schemat $//EF/EF$, albo krócej $\sim/EF$, nazywamy iloczynem logicznym i skracamy go przy pomocy symbolu ΔEF .

Tablica wartości logicznych tego schematu jest następująca:

E	F	$/EF$	$//EF/EF$
V	V	Δ	V
V	Δ	V	Δ
Δ	V	V	Δ
Δ	Δ	V	Δ

Schemat ten odpowiada ściśle temu, co mamy na myśli, mówiąc: zachodzi warunek E oraz warunek F .

d) Schemat $///EE/FF/EF$, albo krócej $/vEF/EF$, skracamy przy pomocy symbolu $\equiv EF$.

Zobaczmy, że schemat ten odpowiada ściśle temu, co mamy na myśli, mówiąc o równoważności dwu równań algebraicznych. Tablica wartości logicznych tego schematu jest następująca:

E	F	$/EF$	vEF	$\equiv EF$
V	V	Δ	V	V
V	Δ	V	V	Δ
Δ	V	V	V	Δ
Δ	Δ	V	Δ	V

Widzimy, że $\equiv EF$ posiada wartość V wtedy i tylko wtedy, gdy E, F mają tę samą wartość logiczną. Jeśli E, F mają wartości różne, $\equiv EF$ posiada wartość Δ .

Żeby zrozumieć znaczenie schematu równoważnościowego, zastosujemy go do rozwiązywania równań semantycznych.

Pojęcie równania semantycznego wprowadzamy zapomocą następujących reguł:

- 1) Jeśli $\equiv EF$ jest funkcją semantyczną, to $\equiv EF$ jest równaniem semantycznym.
- 2) Jeśli E, F są równaniami semantycznymi, to $/EF$ jest równaniem semantycznym.

Wyrażenie stałe, posiadające tę właściwość, że podstawione w równaniu semantycznym obróci je w wyrażenie logiczne posiadające wartość V , nazywać będziemy *pierwiastkiem* równania.

Dwa równania semantyczne, posiadające te same pierwiastki, nazywać będziemy *równoważnymi*.

Do rozwiązywania równań o jednej niewiadomej (t. j. o jednej literze semantycznej) wystarczą następujące założenia:

- 1) $\equiv = a0 = 0a$,
- 2) $\equiv = aa$,
- 3) $\equiv = *a\beta * \gamma\delta \wedge = a\gamma = \beta\delta$,
- 4) $\sim = 0*a\beta$.

Możemy przekonać się łatwo, że wyrażenia figurujące w naszych założeniach są równaniami semantycznymi. Przyjmując te założenia, twierdzimy, że wszystkie wyrażenia stałe są pierwiastkami naszych równań. Twierdzenie to jest prostym opisem tych operacji, jakie wykonujemy, porównując dwa wyrażenia właściwe.

Jako przykład rozwiążemy równanie:

$$\equiv = **a00**0a0.$$

Na podstawie założenia 3) mamy:

$$\equiv = **a00**0a0\wedge = *a0*0a = 00 \quad (a)$$

oraz $\equiv = *a0*0a\wedge = a0 = 0a \quad (b)$

Związki, jakie tu zachodzą, możemy objaśnić następującą tablicą:

$\equiv a0$	$\equiv 0a$	$\wedge a0 = 0a$	$\equiv *a0*0a$	$\wedge *a0*0a = 00$	$\equiv **a00**0a0$
V	V	V	V	V	V
Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ

Przy przejściu od kolumny pierwszej do drugiej korzystamy z założenia 1), przy przejściu do kolumny trzeciej korzystamy z schematu wartości iloczynu logicznego, przy przejściu do kolumny czwartej korzystamy z (b), przy przejściu do kolumny piątej korzystamy z założenia 2) i z schematu wartości iloczynu logicznego, przy przejściu do kolumny szóstej korzystamy z (a).

Z tablicy naszej odczytujemy, że jedynym pierwiastkiem danego równania jest 0.

Rozpatrzmy jeszcze równanie:

$$\equiv = *0*00*a a.$$

Założenie 3) daje:

$$\equiv = *0*00*aa\Lambda = 0a = *00a.$$

Rozpatrujemy następującą tablicę:

a	$=0a$	$=*00a$	$\Lambda=0a=*00a$	$=*0*00*aa$
0	V	Λ	Λ	Λ
$*EF$	Λ		Λ	Λ

Wobec tego, że wyrażenia stałe, o ile nie są 0, podpadają pod schemat $*EF$, widzimy, że równanie nasze nie posiada pierwiastków.

Zauważmy, że równoważność może zachodzić między sądem elementarnym a równaniem semantycznym. Tak np. mamy:

$$\equiv = 00 \equiv = a0 = 0a,$$

$$\equiv = *000 = *0*00*aa.$$

Równoważność taka zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy równanie posiada stałą wartość logiczną.

Zgodnie z naszą konwencją będziemy mogli powiedzieć, że pierwiastkiem sądu elementarnego, posiadającego wartość V , jest każde wyrażenie stałe, a żadne wyrażenie stałe nie jest pierwiastkiem sądu elementarnego posiadającego wartość Λ .

Umowa ta jest odpowiednikiem konwencji o martwym podstawieniu.

e) Zajmiemy się teraz pojęciem pociągania.

Mówimy, że równanie E pociąga równanie F , jeśli równanie F posiada wszystkie pierwiastki równania E .

Jest jasne, że w tym wypadku może się zdarzyć, że równanie F posiada pierwiastki nie będące pierwiastkami równania E . Sąd E pociąga F przedstawiać będziemy zapomocą symbolu $\supset EF$.

Zwróćmy uwagę na równania:

$$v = a0 = a*00, \quad = a0.$$

Widzimy, że $\supset = a0v = a0 = a*00$

oraz, że $\sim \supset v = a0 = a*00 = a0$.

Rozpatrzmy następującą tablicę:

a	$=a0$	$v=a0=a*00$	$\supset=a0v=a0=a*00$
0	V	V	V
$*00$	Λ	V	V
$**00$	Λ	Λ	V

Widzimy, że pociąganie charakteryzuje się następującymi wartościami:

Jeśli poprzednik fałszywy, to następnik prawdziwy lub fałszywy. Jeśli poprzednik prawdziwy, to następnik prawdziwy.

Ponieważ założyliśmy, że pierwiastkami sądu elementarnego posiadającego wartość V są wszystkie wyrażenia stałe, więc dowolne równanie pociąga dowolny sąd elementarny, posiadający wartość V .

Z analogicznych względów sąd elementarny, posiadający wartość Δ pociąga dowolne równanie semantyczne.

W tych warunkach mamy

$$\supset p = 00$$

$$\supset = *000p.$$

Zapytajmy się teraz, czy schemat $\supset EF$ możemy zbudować z elementarnego schematu logicznego $/EF$.

Tablica wartości schematów $\supset EF$ jest następująca:

E	F	$\supset EF$
V	V	V
V	Δ	Δ
Δ	V	V
Δ	Δ	V

Z drugiej strony mamy:

E	F	$/E/FF$
V	V	V
V	Δ	Δ
Δ	V	V
Δ	Δ	V

Widzimy, że rozkład wartości w obu tablicach jest identyczny, że więc schemat $/E/FF$ daje nam związek: E pociąga F .

W tych warunkach nie ma potrzeby wprowadzania osobnego symbolu $\supset EF$. Symbol ten uważać będziemy za skrót symbolu $/E/FF$.

4. Jest łatwo stwierdzić, że rachunek zdań można uniezależnić od schematu $(EFGH)$.

Wystarczy ograniczyć się do funkcji logicznych elementarnych, t. zn. takich, które nie zawierają wyrażeń stałych. Tak

otrzymany czysty rachunek zdań zawiera tylko litery logiczne i schematy $/EF$. Każde zadanie tego rachunku może być rozwiązane przy pomocy metody tablicowej. W szczególności możemy zawsze wyznaczyć funkcję logiczną dowolnej liczby zmiennych, przyjmującą wartości, zgóry zadane dla danych wartości zmiennych.

Rozwiążemy zadanie następujące:

Wyznaczyć funkcję $\psi(p, q, r)$ spełniającą następujące warunki (t. I.):

I.				II.			
p	q	r	$\psi(p, q, r)$	$v \sim pv \sim q \sim r$	$v \sim pvq \sim r$	$vpv \sim q \sim r$	$vpvqr$
V	V	V	Δ	Δ	V	V	V
V	V	Δ	V	V	V	V	V
V	Δ	V	Δ	V	Δ	V	V
V	Δ	Δ	V	V	V	V	V
Δ	V	V	Δ	V	V	Δ	V
Δ	V	Δ	V	V	V	V	V
Δ	Δ	Δ	V	V	V	V	V
Δ	Δ	V	Δ	V	V	V	Δ

Tablica II. zawiera funkcje, które mają wartość V dla wszystkich kombinacji wartości liter p, q, r , z wyjątkiem jednej, przy czem w każdym wypadku ta kombinacja jest odmienna. Widzimy, że szukana funkcja jest:

$$\Delta v \sim pv \sim q \sim r \Delta v \sim pvq \sim r \Delta vpv \sim q \sim rvpvqr.$$

Metoda ta jest prostem zastosowaniem t. zw. formy kanonicznej Hilberta. Hilbert wykazał, że każda funkcja logiczna elementarna może być przedstawiona jako iloczyn sum liter logicznych i ich negacyj. Redukcja ta uczy nas, że każde twierdzenie czystego rachunku zdań da się przedstawić jako forma kanoniczna, której każda suma zawiera, prócz pewnej litery E , wyrażenie $\sim E$.

Widzimy, że nasz rachunek tabliczkowy pozwala udowodnić wszystkie twierdzenia rachunku zdań.

5. Idąc śladem młodo zmarłego logika francuskiego Nicoda, wyprowadzimy rachunek zdań z dwóch aksjomatów, z których pierwszy nazwiemy *sylogizmem Nicoda*, a drugi *zasadą identyczności logicznej*. Aksjomaty te są następujące:

$$(1) \quad \supset / p / q r \supset / s q / p s,$$

$$(2) \quad \supset p p.$$

Nicod wykazał, że aksjomaty te można sprowadzić do jednego. Z tego zajmującego rezultatu nie będziemy korzystali, na-przód ze względu na chęć uniknięcia zbytej komplikacji rachunków, a potem dlatego, że aksjomat (2) wynika z pewnych aksjomatów, które w pełnym systemie semantyki elementarnej i tak przyjąć musimy.

Przyjmujemy nadto za Nicodem *regułę podstawiania*, która pozwala nam za litery podstawiać litery lub dowolne funkcje logiczne elementarne. Nadto przyjmujemy *regułę odrywania* (*Modus ponens*), która mówi: *Jeśli E oraz $\supset E F$ są twierdzeniami, to F jest twierdzeniem.*

Zobaczymy teraz, w jaki sposób pracuje się przy pomocy tych aksjomatów i tych reguł.

Podstawiając w (1) p za q i za r , otrzymujemy:

$$\supset \supset p p \supset / s p / p s,$$

co ze względu na (2) daje przez zastosowanie reguły odrywania t. zw. zasadę permutacji:

$$(3) \quad \supset / s p / p s,$$

podstawiając tu $\sim s$ za s i $\sim p$ za p dostajemy warjant tej zasady:

$$(3a) \quad \supset \vee s p \vee p s.$$

Stosując zasadę permutacji do zasady identyczności, otrzymujemy:

$$(4) \quad / \sim t t.$$

Tutaj podstawiamy $\sim t$ za t , co daje po zastosowaniu skrótu:

$$(5) \quad \supset \sim \sim t t;$$

jest to pierwsza zasada podwójnego przeczenia.

Teraz podstawiamy w (1) $\sim \sim t$ za p , t za q oraz r i stosujemy regułę odrywania ze względu na (5). Otrzymujemy:

$$\supset / s t / \sim \sim t / s.$$

Tutaj podstawiamy $\sim s$ za t , co daje przez zastosowanie reguły odrywania ze względu na (2):

$$/ \sim \sim \sim s s.$$

Wykonując permutację i stosując skrót, otrzymujemy drugą zasadę podwójnego przeczenia:

$$(6) \quad \supset s \sim \sim s.$$

Zauważmy odrazu, że zasada (5) daje po zastosowaniu odpowiednich skrótów t. zw. zasadę tautologii:

$$(7) \quad \supset \vee p p p.$$

Podstawiając w (1) q za r , otrzymujemy zasadę (1a):

$$\supset \supset p q \supset / s q / p s.$$

Ta zasada pozwala nam w praktyce posługiwać się regułą sylogizmu.

Wyobraźmy sobie, że dowiedliśmy twierdzeń: $\supset EF$ oraz $\supset FG$. To ostatnie twierdzenie możemy poddać przekształceniu takiemu właśnie, jakie doprowadziło nas od zasady identyczności do twierdzenia (14). W ten sposób uzyskujemy twierdzenie $/ \sim GF$. Podstawmy teraz w (1a) E za p , F za q oraz $\sim G$ za s .

Otrzymamy: $\supset \supset EF \supset / \sim GF / E \sim G$.

Stosując tu dwa razy regułę odrywania, z powołaniem się na-przód na twierdzenie $\supset EF$ a potem na twierdzenie $/ \sim GF$, uzyskamy twierdzenie $/ E \sim G$, które po zastosowaniu skrótu przybierze postać $\supset EG$.

Widzimy tedy, że ilekroć zachodzą twierdzenia $\supset EF$ oraz $\supset FG$, tyle razy potrafimy udowodnić twierdzenie $\supset EG$.

Zważmy teraz, że mamy twierdzenie:

$$\supset / \sim / p s / s q // q s \sim / p s,$$

które uzyskujemy, podstawiając zasadę permutacji do (1a) i biorąc w (1a) $\sim / p s$ za s , a następnie stosując regułę odrywania.

Stosując permutację do $// s q \sim / p s$ i posługując się regułą sylogizmu, uzyskujemy z uwagi na (1a) twierdzenie

$$(8) \quad \supset // s q \sim / p s // q s \sim / p s.$$

Stosując regułę sylogizmu do (1a) i (8) dostajemy po podstawieniu $\sim s$ za s zasadę sylogizmu:

$$(9) \quad \supset \supset p q \supset \supset q s \supset p s.$$

Od tej chwili możemy oczywiście posługiwać się w praktyce zwykłą regułą sylogizmu jako skrótem.

Z zasady tej otrzymujemy bez trudności t. zw. zasadę konwersji.

Za p podstawiamy $\sim \sim q$ i stosujemy regułę odrywania ze względu na (5). Otrzymujemy:

$$\supset \supset q s / \sim \sim q \sim s.$$

Z drugiej strony zasada permutacji daje:

$$\supset / \sim \sim q \sim s / \sim s \sim \sim q.$$

Stosując regułę sylogizmu do tych dwu ostatnich twierdzeń, otrzymujemy, po wprowadzeniu skrótów, zasadę konwersji:

$$(10) \quad \supset \supset q s \supset \sim s \sim q.$$

Jeśli teraz w zasadzie sylogizmu podstawimy $\sim s$ za p , $\sim q$ za q , a r za s , otrzymamy:

$$\supset \supset \sim s \sim q \supset \sim \sim q r \supset \sim s r,$$

co po wprowadzeniu innych skrótów daje:

$$\supset \supset \sim s \sim q \supset \vee q r \vee s r.$$

Stosując teraz regułę sylogizmu do (10) i do tego ostatniego twierdzenia, dostajemy zasadę summacji:

$$(11) \quad \supset \supset q s \supset \vee q r \vee s r.$$

Żeby teraz otrzymać t. zw. zasadę addycji, zaczynamy od zasady permutacji, którą piszemy w formie następującej:

$$/ / r q \sim / q r.$$

Stosując permutację do tego twierdzenia, dostajemy:

$$/ \sim / q r / r q.$$

Teraz zwracamy się do aksjomatu (1), w którym piszemy: $\sim / q r$ za p , r za q , q za r , poczem stosujemy regułę odrywania ze względu na nasze ostatnie twierdzenie. Otrzymujemy:

$$\supset / s r / \sim / q r s.$$

Tutaj podstawiamy $\sim s$ za r i stosujemy regułę odrywania ze względu na (2). Dostajemy:

$$/ \sim / q \sim s s.$$

Twierdzenie to poddajemy permutacji, co daje

$$/ s \sim / q \sim s,$$

co można inaczej napisać w formie:

$$(12) \quad \supset s \supset q s.$$

Jeśli w poprzednim twierdzeniu wstawimy $\sim q$ za q i zastosujemy skrót, dostaniemy zasadę addycji:

$$(13) \quad \supset s \vee q s.$$

Zasadę kojarzenia wyprowadzamy z łatwością przy pomocy metody następującej, posługując się zasadą addycji, zasadą summacji i regułą sylogizmu. Stosując zasadę summacji do zasady addycji i powtarzając jeszcze raz tę operację, uzyskujemy na-przód:

$$\supset v v p r q v v v p q r q.$$

Z drugiej strony mamy przez dwukrotne zastosowanie addycji:

$$\supset q v v p q r.$$

Stosując do tego twierdzenia naprzód summację, a potem permutację, dostajemy:

$$\supset v v v p q r q v v v p q r v v p q r.$$

Powołując się na zasadę tautologii i postępując według reguły sylogizmu, dostajemy:

$$\supset v v v p q r q v v p q r.$$

Stosując metodę sylogizmu do dwu przedostatnich twierdzeń, dostajemy:

$$(14) \quad \supset v v p r q v v p q r.$$

To jest zasada kojarzenia.

Dowód ten został podany niezależnie przez Bernaysa i Łukasiewicza.

Pozostaje jeszcze wyprowadzić twierdzenia potrzebne do zbudowania formy kanonicznej Hilberta.

Zaczynamy od twierdzeń:

$$(15) \quad \supset \supset p q v \sim p q,$$

$$(16) \quad \supset v \sim p q \supset p q,$$

których wyprowadzenie polega na zastosowaniu zasad podwójnego przeczenia.

Twierdzenia te pozwalają nam wyprowadzić twierdzenie:

$$(17) \quad \supset p \supset q \Delta p q,$$

które uzyskujemy, wstawiając $\Delta p q$ za t w zasadzie identyczności, i korzystając następnie z (15) z zasad podwójnego przeczenia, z zasad kojarzenia, a potem z zasady (16).

Kolejne zastosowanie zasady summacji i zasady (15) daje twierdzenie

$$(18) \quad \supset \supset q \Delta p q v \sim v q r v \Delta p q r.$$

Stosując zasadę sylogizmu do (17) i (18) dostajemy

$$(19) \quad \supset p v \sim v q r v \Delta p q r.$$

Do twierdzenia (19) stosujemy naprzód zasadę summacji, która daje:

$$(20) \quad \supset \vee p r \vee \vee \sim \vee q r \vee \Delta p q r r.$$

Postępując podobnie jak w dowodzie zasady kojarzenia i stosując zasadę kojarzenia, dostajemy:

$$(21) \quad \supset \vee \vee \sim \vee q r \vee \Delta p q r r \vee \sim \vee q r \vee \Delta p q r \vee \Delta p q r.$$

Zasada tautologii i zasada summacji daje

$$(22) \quad \supset \vee \sim \vee q r \vee \vee \Delta p q r \vee \Delta p q r \vee \sim \vee q r \vee \Delta p q r.$$

Stosując teraz zasadę sylogizmu naprzód do (20) i (21), a następnie do wyniku tej operacji i do (22), otrzymujemy:

$$(23) \quad \supset \vee p r \vee \sim \vee q r \vee \Delta p q r.$$

Z twierdzenia tego dostajemy przez zastosowanie (16) twierdzenie:

$$(24) \quad \supset \vee p r \supset \vee q r \vee \Delta p q r.$$

Przez kolejne zastosowanie (15), zasady kojarzenia i zasad podwójnej negacji, dostajemy z (23) twierdzenie:

$$(25) \quad \supset \Delta \vee p r \vee q r \vee \Delta p q r.$$

Stosując teraz zasadę konwersji do (25), uzyskujemy

$$(26) \quad \supset \Delta \vee p q r \vee \Delta p r \Delta q r.$$

Twierdzenie (25) i (26) stanowią podstawę hilbertowskiej redukcji. Pozostaje jeszcze wykazać, że w pociąganiach, z jakimi mamy w tych twierdzeniach do czynienia, można zamienić role następnika i poprzednika.

Przez zastosowanie permutacji i twierdzenia (16) uzyskujemy z twierdzenia (24) twierdzenie:

$$(27) \quad \supset \supset r p \supset \supset r q \supset r \Delta p q.$$

W twierdzeniu tem podstawiamy:

$$\vee \Delta p q r \text{ za } r, \vee p r \text{ za } p \text{ i } \vee q r \text{ za } q$$

i korzystamy z twierdzeń:

$$\supset \vee \Delta p q r \vee p r,$$

$$\supset \vee \Delta p q r \vee q r,$$

które uzyskujemy przez zastosowanie konwersji do zasady addycji i przez następne użycie naprzód zasad podwójnego przeczenia, a potem zasady summacji.

Metoda ta pozwala nam na dwukrotne zastosowanie reguły odrywania, która ostatecznie daje:

$$(28) \quad \supset \vee \Delta p q r \Delta \vee p r \vee q r.$$

Stosując do (28) zasadę konwersji, otrzymujemy:

$$(29) \quad \supset \vee \Delta p r \Delta q r \Delta \vee p q r.$$

Na tych twierdzeniach kończy się zajmująca część rachunku zdań. Wszystkie pozostałe twierdzenia możemy udowodnić przez sprowadzenie ich do formy Hilberta. Wymaga to oczywiście szeregu żmudnych operacji, ale nie przedstawia istotnych trudności.

Posługując się metodą Hilberta, możemy łatwo wykazać, że przedstawiony tu elementarny rachunek zdań daje to właśnie i tylko to, co uzyskać możemy przy pomocy rachunku tablicowego. Z tego punktu widzenia nie posiada on sam przez się większego znaczenia. Potrzebny jest natomiast jako istotny składnik pełnego systemu semantyki elementarnej.

6. Logika Arystotelesa opierała się na schematach zdaniowych: *Wszystkie S są P* (SaP), *Żaden S nie jest P* (SeP), *Niektóre S są P* (SiP) oraz *Niektóre S nie są P* (SoP).

Arystoteles szukał związków pomiędzy temi schematami i trzeba przyznać, że pominąwszy zasadniczy błąd w wnioskowaniu z SaP na SiP , na który wskazaliśmy poprzednio, rozwiązał zadanie swoje w sposób imponujący. Niemniej wybór takich właśnie schematów był związany ściśle z tradycją językową i pozostawiał otwartą kwestję, czy sprawa nie da ująć się w sposób bardziej prosty i bardziej jednolity. Niestety, stosunki złożyły się w ten sposób, że zadanie to ludzkość pozostawiła na boku i dopiero w ostatnich czasach zabrała się do niego w sposób radykalny. Jeszcze dzisiaj są w użyciu podręczniki logiki, w których figuruje kwadrat logiczny, razem z błędnym twierdzeniem, że SiP jest konsekwencją sądu SaP . Do dzisiaj pokutuje schemat ontologiczny: *A jest B*, wraz zasadniczą dwuznacznością związaną z nim nierozłącznie. Wreszcie do dzisiaj używa się eulerowskiej metody porównywania zakresów pojęć zapomocą kół, jakkolwiek metoda ta zawodzi już w najprostszych wypadkach.

Krytyczną analizę schematów Arystotelesa zawdzięczamy

wielkiemu współczesnemu logikowi angielskiemu Bertrandowi Russellowi.

Analiza Russella doprowadziła do redukcji schematów Arystotelesa do schematu: x jest B , gdzie x oznacza dowolne indywiduum, do pojęcia *dla wszystkich* x , w skróceniu Πx , które nazywamy kwantyfikatorem, i do pojęć elementarnego rachunku zdań.

Redukcję Russella możemy ująć w następującą tablicę:

SaP	$\Pi x \supset (x \text{ jest } S) (x \text{ jest } P)$
SeP	$\Pi x \supset (x \text{ jest } S) \sim (x \text{ jest } P)$
SiP	$\sim \Pi x \supset (x \text{ jest } S) \sim (x \text{ jest } P)$
SoP	$\sim \Pi x \supset (x \text{ jest } S) (x \text{ jest } P)$

Widzimy, że np. sąd *Wszyscy ludzie są śmiertelni* został sprowadzony do sądu *wszystkie indywidua, które są ludźmi, są śmiertelne*. Sąd: *Żaden człowiek nie jest śmiertelny* został zastąpiony sądem *wszyscy ludzie są nieśmiertelni*. Sąd: *niektórzy ludzie są śmiertelni* jest zaprzeczeniem sądu: *Żaden człowiek nie jest śmiertelny*, sąd: *niektórzy ludzie nie są śmiertelni* jest zaprzeczeniem sądu *wszyscy ludzie są śmiertelni*.

Jeśli teraz wprowadzimy zamiast sądów kształtu $\sim \Pi x \sim F$ skrót $\exists x F$, to wtedy, po zastosowaniu zwykłych przekształceń rachunku zdań, otrzymamy:

$\exists x \wedge (x \text{ jest } S) (x \text{ jest } P)$ zamiast SiP

$\exists x \wedge (x \text{ jest } S) \sim (x \text{ jest } P)$ zamiast SoP .

Powiedzieć, że nie wszystkie indywidua czynią zadość warunkowi $\sim F$, jest to w myśl t. zw. zasady wykluczonego środka twierdzić, że niektóre indywidua czynią zadość warunkowi F , albo, że *istnieją* takie indywidua, które czynią zadość warunkowi F .

Rachunek zdań doprowadza nas tedy do wniosku, że zaprzeczenie sądu: *Żaden człowiek nie jest śmiertelny* jest równoważne sądowi: *Istnieją indywidua, które są ludźmi i są śmiertelne*. Zaprzeczenie sądu: *Wszyscy ludzie są śmiertelni* jest równoważne sądowi: *Istnieją indywidua, które są ludźmi i nie są śmiertelne*. Widzimy, że wnioski te są najzupełniej zgodne z prymitywną intuicją.

Porównanie schematów:

$$\begin{aligned} & \Pi x \supset (x \text{ jest } S) (x \text{ jest } P) \text{ oraz} \\ & \sim \Pi x \supset (x \text{ jest } S) \sim (x \text{ jest } P), \end{aligned}$$

które podstawiliśmy za *SaP* oraz za *SiP* prowadzi do wniosku, że nie może być mowy o formalnem wnioskowaniu z schematu pierwszego na drugi, co zgadza się z intuicyjnie stwierdzoną tezą o fałszywości przejścia od *SaP* do *SiP* w kwadracie logicznym.

Opierając się na przedstawionej tu redukcji pojęć, sprowadził Russell sylogistykę Arystotelesa do elementarnego rachunku zdań i do rachunku funkcyj zdaniowych.

Metodzie Russella przeciwstawił prof. Leśniewski t. zw. *rachunek nazw*. Różnica polega na tem, że zamiast odwoływać się do ogólnego schematu funkcji zdaniowej, operujemy w rachunku nazw schematem *A jest B*, przyczem *A* nie jest elementem klasy *B*, ale klasą, której jedynym elementem jest pewien element klasy *B*.

Modyfikacja ta usprawiedliwiona jest jedynie chęcią powrotu do schematu *A jest B*, poza tem jednak nie przynosi nic istotnie nowego. Trudno zgodzić się z prof. Kotarbińskim, że system Leśniewskiego jest „najdoskonalszy, najnaturalniejszy i najpraktyczniejszy w zastosowaniach”,²¹ powiedziałbym raczej, że system ten jest sztuczny i zawiły. Natomiast zgadzam się z Kotarbińskim, że rachunek nazw Leśniewskiego łączy się „najspójniej” z arystotelesowską tradycją, ale tego nie uważam wcale za zaletę. Rachunek, który opiera się na nieokreślonym pojęciu nazwy i postuluje istnienie jednego desygnatu nazwy, posiada charakter wybitnie metafizyczny i jako taki nie może być użyty jako element składowy systemu nauk matematycznych.

7. Dopóki znajdujemy się na terenie języka potocznego, możemy mówić jedynie o grubej orientacji. Sądów powszechnych o ściśle określonym sensie nie posiadamy w języku potocznym, bo nie mamy ścisłych reguł podstawiania.

Inaczej przedstawia się sprawa, jeśli znajdujemy się w obrębie działania reguł systemu semantyki elementarnej. Jeśli np. zbudujemy sąd $\Pi x (x \supset 0 \supset x)$, to jest jasne, że sąd ten wprowadzie sam przez się nie posiada jasnego sensu, niemniej wewnątrz systemu semantyki elementarnej może być najzupełniej okre-

²¹ Por. *Elementy etc.*, p. 253.

ślony, o ile przyjmujemy ściśle reguły budowania takich sądów i reguły budowania twierdzeń, w których sądy takie figurują. W ten sposób występuje zasadnicza różnica pomiędzy logiką intuicyjną, a logiką symboliczną. Logika intuicyjna, wzięta w całości, jest tylko zgrubsza określona. Możemy jednak wyrwać z niej pewne proste reguły, które pozwalają nam na budowanie wyrażeń i twierdzeń ściśle określonych. W ten sposób uzyskujemy logikę zdań ogólnych w sposób automatyczny, nie posługując się w budowaniu jej zdaniami ogólnymi. Jak wygląda ta konstrukcja, zobaczymy w dalszym ciągu.

Rachunek kwantyfikatorów budowany jest zwykle dla schematów funkcji zdaniowych takich jak $\Phi\{x\}$, $\psi\{x\}$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ i t. p.

Przyjęcie takich schematów wymaga specjalnego aktu intuicji i czyni podstawy logiki dziedziną trudną do zrozumienia. Zobaczymy później, że schematy te można zbudować przy pomocy pojęć semantyki. Z drugiej strony jest łatwo wykazać, że możemy zbudować rachunek kwantyfikatorów bez odwołania się do tych schematów.

Ograniczymy się do funkcji semantycznych. Prócz liter semantycznych wprowadzimy zmienne pozorne semantyczne x, y, z, u, v, w .

Przyjmujemy nadto następującą regułę:

Jeśli E jest funkcją semantyczną, zawierającą literę semantyczną I , a nie zawierającą zmiennej pozornej semantycznej K , i jeśli F jest wynikiem podstawienia K za I w E , to $\Pi K F$ jest wyrażeniem logicznym.

Tak więc mamy następujące wyrażenia logiczne:

$$\Pi x(x \supset 0x), \quad \Pi x \Pi y(xyxy), \quad \sim \Pi x \sim = 0x \quad \text{i t. d.}$$

Schematy $\sim \Pi K \sim F$ skracać będziemy przy pomocy symbolu:

$$\exists K F.$$

Wyrażenie $\Pi K F$ czytamy:

dla wszystkich K zachodzi F .

Wyrażenie $\sim \Pi K \sim F$ możemy czytać:

istnieje takie K , że F , albo: dla pewnych K zachodzi F .

Cały rachunek kwantyfikatorów sprowadza się do następującej reguły postępowania, którą nazywamy *regułą uogólnienia*.

Jeśli zachodzi twierdzenie:

$$\Delta \supset LM \supset MN,$$

jeśli M nie zawiera zmiennej pozornej K i zawiera literę semantyczną I nie zawartą w L , jeśli wreszcie F jest wynikiem podstawienia K za I w M , to zachodzi twierdzenie:

$$\Delta \supset L \Pi K F \supset \Pi K F \supset M N.$$

Spróbujmy naprzód udowodnić przy pomocy tej reguły twierdzenie:

$$\supset \Pi x \{x\lambda\} \{a\lambda\}.$$

Zaczynamy od twierdzenia:

$$\Delta \supset \Delta p \sim p \{a\lambda\} \supset \{a\lambda\} \{a\lambda\}.$$

W regule naszej bierzemy $\Delta p \sim p$ za L , $\{a\lambda\}$ za M , $\{a\lambda\}$ za N . Widzimy, że M nie zawiera zmiennej pozornej x i zawiera literę semantyczną a nie zawartą w L , widzimy wreszcie, że $\{x\lambda\}$ jest wynikiem podstawienia x za a w M . W tych warunkach musi zachodzić na podstawie naszej reguły twierdzenie:

$$\Delta \supset \Delta p \sim p \Pi x \{x\lambda\} \supset \Pi x \{x\lambda\} \{a\lambda\}.$$

Z twierdzenia tego uzyskujemy na podstawie prostych operacji elementarnego rachunku zdań twierdzenie żądane.

Jest łatwo zobaczyć, że twierdzenie nasze jest szczególnym przypadkiem t. zw. aksjomatu dedukcji, który przy pomocy schematu funkcyjnego $\Phi\{x\}$ można sformułować w sposób następujący:

$$\supset \Pi x \Phi\{x\} \Phi\{a\}.$$

To sformułowanie jest możliwe jedynie wtedy, jeśli przyjmujemy schematy funkcyjne. Możemy jednak posługiwać się niem jako tymczasowym skrótem, służącym dla orientacji.

Tak postępując, udowodnimy twierdzenie:

$$\supset \Pi x \Phi\{x\} \Phi\{a\}$$

przy pomocy wyżej podanej metody, posługując się schematem $\Phi\{a\}$ zamiast funkcją semantyczną $\{a\lambda\}$.

Zkolei możemy wykazać, że t. zw. zasadę dysjunkcji wyprowadzić możemy dla dowolnej funkcji semantycznej $\Phi\{a\}$.

W tym celu stosujemy zasadę dedukcji do funkcji $\vee p \Phi\{a\}$, co daje twierdzenie:

$$\supset \Pi x \vee p \Phi\{x\} \vee p \Phi\{a\}.$$

Twierdzenie to przekształcamy przy pomocy łatwych zastosowań rachunku elementarnego na twierdzenie:

$$\supset \Delta \Pi x \vee p \Phi\{x\} \sim p \Phi\{a\}.$$

Żeby zadość uczynić postulatowi naszej reguły, dowodzimy teraz z łatwością twierdzenia:

$$\Delta \supset \Delta \Pi x \vee p \Phi \{x\} \sim p \Phi \{a\} \supset \Phi \{a\} \Phi \{a\}.$$

Bierzemy teraz $\Delta \Pi x \vee p \Phi \{x\} \sim p$ za L , $\Phi \{a\}$ za M i za N . Stwierdzamy, że wyrażenie logiczne L nie może zawierać litery semantycznej a , gdyż $\Phi \{x\}$ powstało z $\Phi \{a\}$ przez wprowadzenie x za a . Z chwilą kiedy przyjęliśmy, że $\Pi x \vee p \Phi \{x\}$ jest wyrażeniem logicznym, założyliśmy, że $\Phi \{a\}$ nie zawiera zmiennej pozornej x , gdyż w przeciwnym razie nie moglibyśmy zbudować wyrażenia $\Pi x \vee p \Phi \{x\}$. W tych warunkach założenia naszej reguły są spełnione, dostajemy więc twierdzenie:

$$\Delta \supset \Delta \Pi x \vee p \Phi \{x\} \sim p \Pi x \Phi \{x\} \supset \Pi x \Phi \{x\} \Phi \{a\}.$$

Z twierdzenia tego przechodzimy bez trudności do t. zw. zasady dysjunkcji:

$$\supset \Pi x \vee p \Phi \{x\} \vee p \Pi x \Phi \{x\}.$$

Jest to, podobnie jak zasada dedukcji, schemat metalogiczny, który uczy nas, w jaki sposób dla każdej danej funkcji semantycznej mamy dowieść zasady dysjunkcji. Gdybyśmy np. chcieli dowieść tej zasady dla funkcji semantycznej $\{a\lambda\}$ rozważanej poprzednio, to należałoby powtórzyć cały dowód, biorąc funkcję $\{a\lambda\}$ zamiast schematu $\Phi \{a\}$. W praktyce jest to oczywiście zbyt ciężkie, gdyż możemy skorzystać z gotowego schematu zasady dysjunkcji.

Zobaczmy teraz, że nasza reguła pozwala nam bez trudności uogólniać twierdzenia. Przypuśćmy, że udowodniliśmy twierdzenie $\Phi \{a\}$. W takim razie udowodnimy napewno twierdzenie:

$$\Delta \supset \supset p p \Phi \{a\} \supset \Phi \{a\} \Phi \{a\}.$$

Stosując do tego twierdzenia naszą regułę uogólnienia, dostajemy twierdzenie:

$$\Delta \supset \supset p p \Pi x \Phi \{x\} \Pi x \Phi \{x\} \Phi \{a\},$$

o ile $\Phi \{a\}$ nie zawiera zmiennej pozornej x . W przeciwnym razie posłużymy się oczywiście inną zmienną.

Z tego ostatniego twierdzenia uzyskujemy twierdzenie $\Pi x \Phi \{x\}$ przez łatwe operacje elementarnego rachunku zdań.

Jest dobrze zauważyć, że nasza metoda pozwala nam wyprowadzać różne twierdzenia rachunku kwantyfikatorów w sposób nader łatwy,

Tak np., żeby wyprowadzić sylogizm Barbara, dowodzimy naprzód twierdzenia

$$\supset \wedge \Pi x \supset \varphi \{x\} \psi \{x\} \Pi x \supset \psi \{x\} \sigma \{x\} \wedge \supset \varphi \{a\} \psi \{a\} \supset \psi \{a\} \sigma \{a\},$$

stosując zasadę dedukcji oddzielnie dla funkcji $\supset \varphi \{a\} \psi \{a\}$ oraz $\supset \psi \{a\} \sigma \{a\}$.

Twierdzenie nasze prowadzi do twierdzenia:

$$\supset \wedge \Pi x \supset \varphi \{x\} \psi \{x\} \Pi x \supset \psi \{x\} \sigma \{x\} \supset \varphi \{a\} \sigma \{a\}.$$

Stosując do tego twierdzenia zasadę uogólnienia, uzyskujemy natychmiast twierdzenie

$$\supset \wedge \Pi x \supset \varphi \{x\} \psi \{x\} \Pi x \supset \psi \{x\} \sigma \{x\} \Pi x \supset \varphi \{x\} \sigma \{x\},$$

które jest symboliczną transkrypcją sylogizmu Barbara.

8. Obok dwuwartościowej logiki istnieją różne systemy logiki wielowartościowej.

Najstarszym bodaj jest system prof. N. A. Wasiliewa, który ogłaszał swoje prace w latach 1910—1913. Krótką wzmiankę o tych pracach podał Wasiliew na Kongresie Filozofów w Neapolu.²²

Wasiliew przyjmuje obok sądów *S jest P* i *S jest non-P*, sądy *S jest P* i *non-P* i na tej podstawie buduje system wolny od sprzeczności. Jest jasne, że takie sądy jak *S jest P* i *non-P* są to poprostu sądy nierozstrzygalne. Możemy np. mówić o niektórych materjach, że są białe i nie białe, możemy mówić, że elektrony są rzeczywiste i nie są rzeczywiste.

Sądy takie odgrywają w życiu niemałą rolę i są niewątpliwie bardzo zajmujące. Są takie dlatego, że wyprowadzają nas poza sferę ścisłego myślenia. Czy ujęcie tych zjawisk w system może doprowadzić do zajmujących wyników, trudno przewidzieć. Na dnie wysiłków tego rodzaju tkwi założenie, że pojęcia mają sens określony. W rzeczywistości sądy: to jest białe i niebiałe, lub elektrony są rzeczywiste i nierzeczywiste, stwierdzają tylko, że odnośne pojęcia nie mają ściśle określonego zakresu.

Koncepcja Wasiliewa wymierzona jest przeciw zbyt ogólnemu pojmowaniu zasady sprzeczności.

²² Atti del Quinto Congresso Internazionale di Filosofia, Napoli 1924, p. 107.

Jeszcze dalej poszedł w tym kierunku prof. Łukasiewicz, który był swojego czasu zdania, że gdyby w naukach ścisłych została udowodniona jakaś sprzeczność, to należałoby ją przyjąć jako cenny rezultat.

Niemniej trzeba przyznać, że Łukasiewicz wycofał się rychło z tego niefortunnego stanowiska i poświęcił całą uwagę innemu zagadnieniu, a mianowicie sprawie *sądów możliwych*. Łukasiewicz uchodzi dzisiaj słusznie za najwyższy autorytet w sprawach rachunku zdań i jest faktem, że uzyskał w tym kierunku doniosłe wyniki. Jego koncepcja logiki wielowartościowej, obejmującej prócz sądów prawdziwych i fałszywych sądy półprawdziwe, ćwierćprawdziwe i t. d. jest niewątpliwie godna uwagi. Jest ona pokrewna ideom wysuniętym przez Brouwera i C. I. Lewisa, wyróżnia się jednak wielką prostotą i jasnością.

Łukasiewicz powołuje się na to, że Arystoteles, znając zasadę wykluczonego środka, nie przyjmował jej bez zastrzeżeń, z uwagi na to, że nie stosuje się do sądów o zdarzeniach przypadkowych, które mogą mieć miejsce w przyszłości. Epikurejczycy nie uznawali zasady wyłącznego środka. Właściwym jej twórcą był Chrysippos, jeden z założycieli szkoły stoików.²³

Jeśli zechcemy się liczyć z sądami możliwymi, to zasada wyłączonego środka okaże się fałszywą.

Jeśli np. — idąc śladem Łukasiewicza — zwrócimy uwagę na sąd: *w przyszłym roku będę tutaj tego a tego dnia o tej właśnie godzinie*, to musimy przyznać, że sąd ten nie jest ani prawdziwy, ani fałszywy. Nie możemy przyznać mu wartości 1, odpowiadającej prawdzie, ani wartości 0, odpowiadającej fałszowi. Musimy mu przyznać wartość $\frac{1}{2}$.

Jest jasne, że znaki 1, 0 odpowiadają wprowadzonym wyżej znakom V, A.

Na podstawie tej uwagi rozwija Łukasiewicz rachunek zdań logiki trójwartościowej, poczem przechodzi do logiki wielowartościowej.²⁴ Ograniczę się tutaj do przedstawienia tabeli, objaśniającej wartości schematów $\supset EF$ i $\sim F$ we wszystkich możliwych wypadkach. Będę przytem posługiwał się znakami 1, 0, $\frac{1}{2}$.

²³ Por. J. Łukasiewicz: Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls. Warszawa 1930, p. 63.

²⁴ Por. Łukasiewicz i Tarski: Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Warszawa 1930.

E	F	$\sim E$	$\supset EF$
1	1	0	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	1	1
0	0	1	1

Rachunek sam jest zajmujący, ale budzić musi szereg bardzo poważnych wątpliwości. Przedewszystkiem jest jasne, że pociągnie ogromne ograniczenia w budowie systemu matematyki, a nie jest pewne czy pozwoli obejść się bez teorii typów. Innymi słowami, zachodzi poważna wątpliwość, czy wielowartościowa logika nadaje się do zbudowania pełnego systemu matematyki wraz z metamatematyką. Z drugiej strony, ponieważ ugruntowanie rachunku prawdopodobieństwa jest, jak wiadomo, możliwe w ramach logiki dwuwartościowej, trudno przewidzieć, jaka mogłaby wyniknąć korzyść z odwołania się do rachunku Łukasiewicza.

Argumenty filozoficzne, na jakie powołuje się Łukasiewicz, a w szczególności arystotelesowski podział zdarzeń na przypadkowe i konieczne, są zgoła naiwne i tchną najczarniejszą reakcją.

Pytanie, czy mój pobyt w danym mieście w oznaczonym terminie jest sprawą przypadku, nie może być tak symplicystycznie rozstrzygnięte, jak to wydaje się p. Łukasiewiczowi. Wystarczy zauważyć, że może właśnie dziś rano wypilem, nie wiedząc o tem, truciznę i umrę za kilka godzin. W takim razie jest chyba pewne, że nie stawię się na termin w przyszłym roku.

W każdym razie cała ta sprawa musi być poddana gruntownej rewizji.

Rozdział V.

Teoria klas.

1. Rachunek klas rozwinął się z badań nad porównywaniem zakresów pojęć. Pojęcia oznaczano literami A , B , C , ... i wprowadzano symboliczne związki pomiędzy temi literami. Posłużę się tutaj symboliką Peano'a, przyczem celem uniknięcia nawiasów będę zgodnie z wskazówką Łukasiewicza pisał symbol na początku, a potem litery.

Równość dwu klas A , B oznaczać będziemy symbolem $\stackrel{ci}{=} A B$. Znak $\stackrel{ci}{=}$ oznacza równość klasową, którą należy odróżnić od identyczności semantycznej. Klasy są równe, jeśli posiadają te same elementy. Nie wynika z tego bynajmniej, że są identyczne. Tak np. mamy $\stackrel{ci}{=} (\text{człowiek}) (\text{bezpłoty dwunóg})$, jakkolwiek pojęcia *człowiek* i *bezpłoty dwunóg* nie są wcale identyczne. Sprawa identyczności dwu klas równych niepokoiła przez czas dłuższy logików. Skończyło się na tem, że przyjęto t. zw. *aksjomat ekstensjonalności*, zapewniający identyczność dwu klas równych (Carnap). Aksjomat ten okazał się zbyt cenny, bo możemy ograniczyć się poprostu do klas ekstensjonalnych.¹

Jeśli elementy klasy A są zarazem elementami klasy B , piszemy $\subset A B$. Mówimy wtedy, że A jest *podklasą* klasy B . Jeśli A jest klasą, — A oznacza klasę przedmiotów, które nie są elementami klasy B . Jeśli A , B są klasami, $\cap A B$ jest klasą przedmiotów, które są elementami klasy A i klasy B , $\cup A B$ jest klasą przedmiotów, które są elementami klasy A lub klasy B . Klasę $\cap A B$ nazywamy iloczynem klas A , B , klasę $\cup A B$ nazywamy sumą klas A , B .

Pierwsze badania związku $\subset A B$ zawdzięczamy Leibnizowi.

¹ Por. moją rozprawę: *Theory of constructive Types*, l. c.

Leibniz udowodnił m. i. następujące twierdzenie, które nazwał *praeclarum theorema*:

Jeśli $(AB$ oraz $(CD$, to $(\neg AC \neg BD$.

Skromność tego wyniku, mierzona miarą wielkiego ideału Leibniza, jest uderzająca.

O tej sprawie pisze Sleszyński, co następuje:

Leibniz szuka logiki takiej, któraby była narzędziem badania, któraby prowadziła nie tylko do dowodu prawd wykrytych, ale i do wynajdywania prawd nowych. Tę logikę udało mu się zrealizować w postaci bardzo dalekiej od tej, o której marzył; w ten sposób powstały zaczątki logiki matematycznej w jej najpierwotniejszej postaci, jaką jest algebra logiki czyli logika klas. Jakkolwiek logika ta może mieć zajmujące i ważne zastosowania, np. do rachunku prawdopodobieństwa, to jednak zakres jej zastosowań jest nader szczupły. Jeśli porównamy olbrzymie odkrycia matematyczne Leibniza z jego skąpymi zdobyczami na polu logiki, to ujawni się fakt niezmiernie charakterystyczny dla logiki. Okazuje się mianowicie, jak skalistym i jałowym jest jej grunt i jak trudno na nim dokonać istotnego postępu. Ten sam Leibniz jednak dał swoją działalnością dowód, jak nadzwyczajnie pożyteczne ze względu na inne nauki jest przebywanie myślą w tej dziedzinie.²

Uczniowie Leibniza Segner i Lambert wprowadzili dla oznaczenia relacji $(AB$ znaki $>$ i $<$.

Segner pisał: *zwierzę* $>$ *kęrowiec* dla zaznaczenia, że zakres pojęcia *zwierzę* jest większy od zakresu pojęcia *kęrowiec*. Lambert pisał *zwierzę* $<$ *kęrowiec* z uwagi na to, że treść pojęcia *kęrowiec* jest bogatsza, niż treść pojęcia *zwierzę*.³

Lambert wykrył prawo dystrybutywności znaku $\neg$ ze względu na znak $\neg$ (1781).⁴ Odnośne twierdzenie możemy sformułować w sposób następujący:

$$\underset{ci}{=} \neg C \neg A B \neg C A \neg C B.$$

Nadto dowiódł Lambert szeregu innych twierdzeń rachunku klas, ale był to dopiero początek. Lambert i Segner nie pozostawili następców i nie wywarli bezpośredniego wpływu na dalszy rozwój rachunku klas.

Natomiast metoda Eulera, polegająca na porównywaniu zakresów pojęć przy pomocy kół, zyskała wielką popularność i fi-

² Sleszyński: Teoria dowodu, l. c. T. II, p. 4.

³ Enríques l. c., p. 146.

⁴ Padoa: La logique déductive. Paris 1912, p. 70.

Powiedzieć: *nie jest prawdą, że ten człowiek jest albo głupi albo zły*, wychodzi na jedno z powiedzeniem: *ten człowiek jest niegłupi i niezły*. Powiedzieć: *nie jest prawdą, że ten człowiek jest głupi i zły*, wychodzi na jedno z powiedzeniem: *ten człowiek jest albo niegłupi albo niezły*.

Zasadę kojarzenia znaku $\sim$ odkrył G. Boole w r. 1854. Zasada kojarzenia znaku $\cup$ została odkryta dopiero w r. 1877 przez Schrödera.⁶

Boole'owi zawdzięczamy wprowadzenie pojęcia *klasy pełnej* i *klasy pustej*. Pierwszą oznaczał cyfrą 1, drugą cyfrą 0. Klasa pełna obejmuje wszystkie przedmioty, o których mówimy. Tak np. w arytmetyce klasa liczb jest klasą pełną. Klasę pełną oznaczać będziemy za przykładem Peano'a znakiem V . Klasa pusta jest to klasa — V . Oznaczać ją będziemy symbolem Δ . Przykładem klasy pustej jest w arytmetyce *klasa pierwiastków równania*: $x + 1 = x$.

Prof. Leśniewskiemu nie podoba się pojęcie klasy pustej. Powołuje się na zdanie Fregego, który pisał, że *jeśli klasa składa się z przedmiotów, jest kolektywnem połączeniem tychże, to musi zniknąć, jeśli te przedmioty znikają. Jeśli spalimy wszystkie drzewa lasu, to tem samem spalimy las. Nie może więc być pustej klasy*.⁷ Leśniewski chlubi się, że *w życiu jego nie było wogóle okresu, w którymby nie pozostawał w zgodzie z ową lapidarną uwagą*. Wynika stąd, że w życiu Leśniewskiego nie było wogóle okresu, w którymby rozumiał pojęcie klasy. Las nie jest klasą, a klasa nie jest kolektywnem połączeniem przedmiotów i wcale nie musi zniknąć, jeśli te przedmioty znikną.

Zwróćmy uwagę na pojęcie:

$$\text{pierwiastek równania: } x + 1 = x.$$

Jest jasne, że pojęcie to nie składa się z liczb, tem samem więc nie składa się z pierwiastków równania: $x + 1 = x$. Równanie to nie posiada pierwiastków. Pojęcie nasze jest klasą pustą.

Gdybyśmy odrzucili klasy puste, nie moglibyśmy wprowadzić nauki o równaniach. Przypuśćmy, że nie wiemy, czy funkcja $f(x)$ zeruje się w jakimś punkcie. Żeby się o tem przekonać, badamy równanie: $f(x) = 0$. Gdybyśmy odrzucili klasy puste, nie moglibyśmy tego uczynić.

⁶ L. c., p. 70.

⁷ Por. S. Leśniewski: O podstawach matematyki. Warszawa 1930, p. 196.

Również nie moglibyśmy posługiwać się w geometrii t. zw. *reductio ad absurdum*. W tych warunkach teoria Leśniewskiego musi być uważana za bezużyteczny balast.

Krytyka założeń, na jakich opiera się rozwój nauki, jest koniecznie potrzebna i ona właśnie jest jednym z głównych środków do walki o pogląd na świat oparty na zdrowym rozsądku. Ale krytyka zrodzona z pospolitych nieporozumień, a narzucana czytelnikowi przy pomocy silnych środków dydaktycznych, prowadzić musi do zamieszania pojęć.

Prof. Leśniewski przyjmuje taki ton, jakgdyby posługiwanie się klasami pustymi było pospolitym błędem. W rzeczywistości można zarzucić matematikom jedynie to, że interpretują klasy jako coś podobnego do zbiorów materialnych. W tych warunkach jest rzeczywiście trudno zrozumieć, co to ma być zbiór pusty. Ale z tego nie wynika, że niema klas pustych, podobnie jak z tego, że różniczki Newtona i Leibniza nie były pojęciowo ściśle określone, nie wynika, że niema liczb nieskończenie małych.

Ani logika, ani matematyka nie może mieć do czynienia z niczem innym, prócz pewnych wyrażań. W tych warunkach klasy są oczywiście pewnymi wyrażeniami. Klasy puste są równie dobrymi wyrażeniami, jak klasy pełne. Na tem koniec.

Argument Leśniewskiego, jakobyśmy w życiu codziennem nie mieli do czynienia z klasami pustymi, nie da się utrzymać. Raz po raz mamy sposobność stwierdzić, że pewne klasy, które uważamy za pełne, są w rzeczywistości puste. Gdybyśmy chcieli ograniczyć się do klas niepustych, nie moglibyśmy ruszyć z brzegu, nie moglibyśmy mówić o nieznanym nam gwiazdach, o nieznanym pierwiastkach i t. d. Bylibyśmy skazani na język sztuczny i zawiły, taki właśnie, jakim posługuje się Leśniewski.

Dzieło Boole'a i de Morgana kontynuowali: Peirce, Mac Coll, Jevons, Venn i Schröder.

Peirce (1867) odkrył prawo dystrybutywności znaku $\sim$ ze względu na znak $\wedge$. Odnośne twierdzenie opiewa w naszej symbolice:

$$\underset{ci}{=} \sim C \wedge AB \wedge \sim CA \wedge CB.^8$$

Mac Coll (1878) odkrył prawa następujące:

$$1) \quad \equiv (A \wedge BC) \wedge (AB \wedge AC).$$

⁸ Por. Padoa, l. c., p. 70.

Jest to prawo dystrybutywności znaku $\subset$ ze względu na znak $\sim$.⁹

$$2) \quad \equiv (\sim BCA \wedge \subset BA \subset CA.$$

Badania te zostały doprowadzone do ostatecznego wykończenia przez Huntingtona. Huntington ujął rachunek klas w tabelę aksjomatów, którą tu podaję z tą zmianą, że oddzielał reguły konstrukcji od zwykłych aksjomatów.

1. Reguły konstrukcji:

- a) Jeśli A jest klasą, to $\sim A$ jest klasą,
- b) Jeśli A, B są klasy, to $\sim AB$ jest klasą,
- c) Jeśli A, B są klasy, to $\subset AB$ jest klasą.

2. Aksjomaty:

$$\begin{aligned} Ia &= \underset{cl}{\sim A \wedge A}, \\ Ib &= \underset{cl}{\sim A \vee A}, \\ IIa &= \underset{cl}{\sim AB \sim BA}, \\ IIb &= \underset{cl}{\sim AB \subset BA}, \\ IIIa &= \underset{cl}{\sim \sim AB \sim AC \sim A \sim BC}, \\ IIIb &= \underset{cl}{\sim \sim AB \subset AC \subset A \sim BC}, \\ IVa &= \underset{cl}{\sim A - A \wedge}, \\ IVb &= \underset{cl}{\sim A - A \vee}, \\ V &= \underset{cl}{\sim \sim A \vee}.^{10} \end{aligned}$$

2. Istotną trudność rachunku klas stanowił brak ściśle określonego *univers du discours*, t. j. to, że nie było wiadome, o jakich przedmiotach wolno nam mówić. Z tej niejasności zrodziły się paradoksy z chwilą, kiedy Cantor przeszedł od rachunku klas do ogólnej teorii.

Pojęcia semantyki elementarnej i rachunku zdań pozwalają nam oprzeć rachunek klas na silnych podstawach.

Klasami będą dla nas wszystkie sądy semantyki elementar-

⁹ L. c., p. 71.

¹⁰ Por. Whitehead i Russell, l. c., Nr 22.

nej, objęte schematem ΠIF , a więc zaczynające się od kwantyfikatora ogólnego. W szczególności mamy klasy następujące:

$$\begin{aligned} \Pi x = x x, \quad \Pi x = x 0, \quad \Pi x \sim = x x, \quad \Pi x \{ ** 000 x \}, \\ \Pi x (* x x * 000 x). \end{aligned}$$

Pierwsza z naszych klas jest klasą pełną, gdyż mamy stale: $= \lambda \lambda$. Jedynym elementem klasy $\Pi x = x 0$ jest 0, gdyż tylko 0 czyni zadość warunkowi $= \lambda 0$. Klasa $\Pi x \sim = x x$ jest pusta, bo żadne wyrażenie nie czyni zadość warunkowi $\sim = \lambda \lambda$. Klasa $\Pi x \{ ** 000 x \}$ posiada trzy elementy, a mianowicie wyrażenia: 0, *00, **000, bo tylko te wyrażenia czynią zadość warunkowi: $\{ ** 000 \lambda \}$, wreszcie klasa $\Pi x (* x x * 000 x)$ jest klasą nieskończenie wielu wyrażen, czyniących zadość warunkowi $(** \lambda \lambda * 000 \lambda)$. Są to te właśnie wyrażenia, które nazwaliśmy *liczbami całkowitemi*.

Jeśli I jest elementem klasy F , piszemy: $\in IF$. Mamy więc twierdzenia następujące:

$$\begin{aligned} \in \lambda \Pi x = x x, \\ \in 0 \Pi x = x 0, \\ \sim \in \lambda \Pi x \sim = x x, \\ \wedge \in 0 \Pi x \{ ** 000 x \} \wedge \in * 00 \Pi x \{ ** 000 x \} \in ** 000 \Pi x \{ ** 000 x \}, \\ \supset \in \lambda \Pi x (* x x * 000 x) \in ** \lambda \lambda \Pi x (* x x * 000 x). \end{aligned}$$

Jeśli oprzemy się na schemacie $\in AB$, możemy rachunek klas sprowadzić do rachunku zdań.

Trzeba tylko przyjąć jeszcze regułę następującą, którą nazwiemy *regułą transformacji*:

Jeśli w funkcji zdaniowej F podstawię na miejsce zmiennej rzeczywistej I zmienną pozorną K , niezawartą w F , i jeśli wynik podstawienia jest G , to $\equiv F \in I \Pi K G$ jest twierdzeniem.

Tak więc mamy np. następujące twierdzenia:

$$\begin{aligned} \equiv (* 0 a * 000 a) \in a \Pi x (* 0 x * 000 x), \\ \equiv \{ * 0 * 00 a \} \in a \Pi x \{ * 0 * 00 x \} \quad \text{i t. p.} \end{aligned}$$

Przy pomocy schematu $\varphi \{ x \}$ możemy napisać:

$$\equiv \varphi \{ a \} \in a \Pi x \varphi \{ x \}.$$

Poza naszą regułą potrzebne są tylko następujące skróty:

Skrót	Wyrażenie
$\neg A$	$\Pi L \sim \in L A$
$\cap A B$	$\Pi L \wedge \in L A \in L B$
$\cup A B$	$\Pi L \vee \in L A \in L B$
$= A B$	$\Pi L \equiv \in L A \in L B$
$\underset{cl}{\subset} A B$	$\Pi L \supset \in L A \in L B$
V	$\Pi x = x x$
A	$\neg V$

Z uwagi na przyjęcie symbolu $\in A B$ oraz reguły transformacji, redukcja nasza nie może być uważana za zupełną. Redukcję zupełną pozwala nam uzyskać metamatematyka racjonalna, z którą zapoznamy się w dalszym ciągu.

Celem zorientowania się w roli naszych skrótów, zwróćmy się do następujących przykładów.

Mamy twierdzenia:

$$\begin{aligned}
 & \underset{cl}{=} \neg \Pi x (*0x*000x) \Pi x \{**000x\} \Pi x \wedge (*0x*000x) \{**000x\} \\
 & \underset{cl}{=} \neg \Pi x (*0x*000x) \Pi x \{**000x\} \Pi x \{*00x\} \\
 & \underset{cl}{=} \cup \Pi x \{**000x\} \Pi x \{*0*00x\} \Pi x \vee \{**000x\} \{*0*00x\} \\
 & \underset{cl}{=} \cup \Pi x \{**000x\} \Pi x \{*0*00x\} \Pi x \vee = x0 \vee = x*00 \vee = x*0*00 = x**000.
 \end{aligned}$$

Przekonamy się teraz, że mamy:

$$\subset A A,$$

gdzie A jest dowolną klasą.

Podstawiamy za A klasę $\Pi x \sim = x x$, za A schemat klasowy $\Pi x \varphi \{x\}$. Rachunek zdań daje:

$$\supset \sim = \lambda \lambda \varphi \{\lambda\},$$

bo sąd fałszywy pociąga sąd dowolny.

Stosując regułę transformacji, dostajemy twierdzenie:

$$\supset \in \lambda \Pi x \sim = x x \in \lambda \Pi x \varphi \{x\}.$$

Po wprowadzeniu symbolu A za $\Pi x \sim = x x$, litery A za schemat $\Pi x \varphi \{x\}$, otrzymujemy:

$$\supset \in \lambda A \in \lambda A.$$

Reguła uogólnienia daje:

$$\Pi z \supset \in z A \in z A,$$

co po zastosowaniu skrótu daje nasze twierdzenie.

Trzeba zaznaczyć, że środki nasze podane wyżej nie pozwalają nam udowodnić tego ogólnego twierdzenia. Natomiast przekonaliśmy się, że potrafimy udowodnić je dla każdej poszczególnej klasy.

Zwróćmy uwagę na następujący przykład:

Wyrażenie $\Pi x \{ *0*00x \}$ możemy uważać za klasę wyrażeń zawartych w $*0*00$. Z drugiej strony wyrażenie

$$\Pi xv = x0v = x*00 = x*0*00$$

przedstawia klasę, której elementami są wyrażenia: 0, $*00$, $*0*00$. Możemy udowodnić, że obiedwie klasy zawierają te same elementy, t. j. że są sobie równe.

Naprzód dowodzimy twierdzenia:

$$= \{ *0*00a \} v = a0v = a*00 = a*0*00.$$

Dowód polega na kolejnem rozbijaniu wyrażenia $*0*00$ na wyrażenia składowe według schematu $= *a_1 a_2 a$.

Stosując teraz do naszego twierdzenia podaną wyżej regułę transformacji, otrzymujemy twierdzenie:

$$= \in a \Pi x \{ *0*00x \} \in a \Pi xv = x0v = x*00 = x*0*00.$$

Do tego twierdzenia stosujemy regułę uogólnienia, co daje:

$$\Pi z = \in z \Pi x \{ *0*00x \} \in z \Pi xv = x0v = x*00 = x*0*00.$$

To ostatnie twierdzenie możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\underset{ci}{=} \Pi x \{ *0*00x \} \Pi xv = x0v = x*00 = x*0*00.$$

Twierdzenie tak otrzymane możemy odczytać w następujący sposób: Klasa $\Pi x \{ *0*00x \}$ zawiera te same elementy, co klasa $\Pi xv = x0v = x*00 = x*0*00$.

Rachunek relacyj rozwinął się równolegle do rachunku klas. Doniedawna uważany był za samodzielną dyscyplinę. Dopiero prof. Kuratowski wykazał, że da się sprowadzić do rachunku klas.¹¹

Jest jasne, że zamiast mówić o relacji R , możemy mówić o klasie par elementów, pomiędzy którymi zachodzi nasza relacja. Tak np. zamiast mówić o relacji zachodzącej pomiędzy oj-

¹¹ Por. Sur la notion de l'ordre, Fundamenta Mathematicae 2.

cem a synem, możemy mówić o klasie par mężczyzn, w których pierwszym elementem jest ojciec, a drugim syn.

Chodzi tylko o sprowadzenie pojęcia uporządkowanej pary elementów do pojęcia klasy.

Otóż, Kuratowski postąpił w sposób następujący: Z dwu elementów x, y , z których x ma być na pierwszym, a y na drugim miejscu, tworzy klasy α, β takie, że α zawiera jeden tylko element x , a β jest klasą elementów x, y . Klasa, której elementami są klasy α, β , reprezentuje parę elementów x, y . Rzeczywiście, widzimy, że element x jest tu wyróżniony, bo należy do obu klas α, β , podczas gdy element y należy tylko do klasy β . W wypadku, kiedy x jest identyczne z y , klasy α, β redukują się do jednej, ale wtedy mamy do czynienia z parą elementów (x, x) , którą charakteryzuje w zupełności jeden tylko element x .

Rachunek relacji możemy sprowadzić do rachunku funkcji zdaniowych w sposób analogiczny do tego, który zastosowaliśmy do rachunku klas.

Relację, jaka zachodzi pomiędzy dwoma wyrażeniami, z których pierwsze zawiera drugie, przedstawiamy symbolem:

$$\Pi x \Pi y \{xy\}.$$

Relację odwrotną przedstawiamy symbolem:

$$\Pi x \Pi y \{yx\}.$$

Sąd $(EI) \Pi H \Pi K$ czytamy:

E pozostaje do I w relacji $\Pi H \Pi K$.

Reguła transformacji opiewa jak następuje:

Jeśli w funkcji zdaniowej F podstawię na miejsce zmiennej rzeczywistej I zmienną pozorną K , a na miejsce zmiennej rzeczywistej E zmienną pozorną H , przyczem ani H ani K nie jest zawarte w F , i jeśli wynik tego podstawienia jest G , to $\equiv F(EI) \Pi H \Pi K G$ jest twierdzeniem.

W szczególności mamy:

$$\equiv (*000) \Pi x \Pi y \{xy\} \{ *000 \},$$

$$\equiv (0*00) \Pi x \Pi y \{xy\} \{ 0*00 \}.$$

Podobnie jak poprzednio przyjmujemy tabelę skrótów. Tabela ta jest następująca:

Skrót	Wyrażenie
$\cdot - A$	$\Pi L \Pi M \sim (LM) A$
$\cdot \cap A B$	$\Pi L \Pi M \wedge (LM) A (LM) B$
$\cdot \cup A B$	$\Pi L \Pi M \vee (LM) A (LM) B$
$\cdot = A B$	$\Pi L \Pi M \equiv (LM) A (LM) B$
$\cdot \subset A B$	$\Pi L \Pi M \supset (LM) A (LM) B$
V_{Rel}	$\Pi x \Pi y \wedge = x x = y y$
Δ_{Rel}	$\cdot - V_{Rel}$

Jeśli x, y spełniają warunek $(xy)R$, to x nazywa się *poprzednikiem*, y *następnikiem* należącym do relacji R . Klasa łączna poprzedników i następników należących do relacji R nazywa się *polem* relacji R .

3. Żeby zdać sobie sprawę z płodności rachunku klas, wystarczy zobaczyć, w jaki sposób rachunek ten pozwala nam wyeliminować pojęcie odcinka z arytmetyki liczb rzeczywistych. Posługując się metodą *Dedekinda*, będziemy uważali za liczby rzeczywiste dowolne klasy liczb wymiernych, mniejszych od pewnej liczby całkowitej.

Pomiędzy tak pojętymi liczbami rzeczywistymi a liczbami wymiernymi ustanowimy następujące związki:

- Klasa pusta jest *arytmetycznie równa* 0.
- Klasa, która zawiera elementy większe od każdej liczby wymiernej mniejszej od liczby wymiernej λ , a nie zawiera elementów większych od λ , jest *arytmetycznie równa* λ .
- Klasa, której wszystkie elementy są mniejsze od pewnej liczby wymiernej mniejszej od liczby wymiernej λ , jest *arytmetycznie mniejsza* od λ .
- Klasa, która nie jest ani mniejsza ani równa arytmetycznie λ , a jest liczbą rzeczywistą, jest *arytmetycznie większa* od λ .

Widzimy, że np. klasa liczb wymiernych mniejszych od $\frac{1}{2}$, klasa, której jedynym elementem jest $\frac{1}{2}$, i klasa, której elementy otrzymuje się z schematu $\frac{1}{n}$, gdzie $n = 2, 3, \dots$, są to liczby rzeczywiste, równe arytmetycznie $\frac{1}{2}$.

Porównywanie liczb rzeczywistych odbywa się na podstawie następujących reguł:

Liczba E jest *większa* od liczby F , jeśli jeden z elementów liczby E jest większy od liczby F .

Liczba E jest *równa* liczbie F , jeśli ani E nie jest większa od F , ani F nie jest większa od E .

Działania na liczbach rzeczywistych E , F wykonujemy, wykonując je na parach elementów tych liczb.

Tak np. $(E + F)$ jest to klasa sum otrzymanych przez dodanie dowolnego elementu klasy E do dowolnego elementu klasy F .

Oczywiście, systematyczna konstrukcja arytmetyki liczb rzeczywistych wymaga sporo pracy, ale zasadnicza koncepcja jest, jak widzimy, niezmiernie prosta.

Zauważę jeszcze, że $\sqrt{2}$ jest to poprostu klasa liczb wymiernych, których kwadrat jest mniejszy od 2.

W podobny sposób możemy konstruować liczby rzeczywiste takie jak π , zasada logarytmów naturalnych e i t. p.

Jeśli zważymy, że metoda semantyczna pozwala nam uważać klasy za pewne wyrażenia, to będzie nam łatwo zrozumieć, że tym przedmiotem konkretnym, który na miejsce pseudokonkretnych odcinków podsunął się w arytmetyce, są wyrażenia. Z tą chwilą arytmetyka przestaje być nauką o idealnych przedmiotach.

Zobaczymy, że utworzenie pełnej klasy liczb rzeczywistych jest niemożliwe, a to z uwagi na paradoks Richarda. Możemy jednak budować poszczególne klasy liczb rzeczywistych tak, jak budowaliśmy klasy odcinków, i możemy mówić o *górnym kresie* takich klas.

Otóż, metoda nasza pozwala na bardzo proste określenie górnego kresu klasy liczb rzeczywistych.

Jest to poprostu klasa liczb wymiernych, które są elementami przynajmniej jednej z liczb rzeczywistych naszej klasy.

Jeśli klasa ta zawiera elementy większe od dowolnej liczby całkowitej, możemy mówić, że górny kres naszej klasy jest nieskończony. W przeciwnym razie jest to liczba rzeczywista.

Widzimy, że jeśli dany przedział liczb rzeczywistych (α_0, β_0) dzielić będziemy kolejno na części, wprowadzając przedziały liczb (α_1, β_1) , (α_2, β_2) , (α_3, β_3) w ten sposób, że $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, $\alpha_{n+1} < \beta_{n+1}$, $\beta_{n+1} < \beta_n$, dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, to istnienie górnego kresu liczb α_n jest sprawą trywialną. Górny kres liczb α_n jest to klasa liczb wymiernych, które są elementami przynajmniej jednej z liczb α_n . Górny kres liczb α_n jest liczbą rzeczywistą, bo wszystkie jego

elementy są mniejsze od każdej liczby wymiernej, większej arytmetycznie od β_0 .

Metoda ta daje niesłychane uproszczenie dowodów twierdzeń geometrii elementarnej, odnoszących się do proporcjonalności odcinków, pomiaru powierzchni, objętości i t. d.

4. Klasyczna teoria klas zrodziła się z skrajnie idealistycznego, platońskiego poglądu na świat. Jest to jedyny wypadek zapładniającego oddziaływania platońskiego idealizmu w historii nauki nowożytnej.

Twórcą teorii klas jest *Jerzy Cantor*. Jedynym prekursorem Cantora jest Bernard Bolzano (1781—1848), duchowny austriacki. Bolzano wierzył w aktualną nieskończoność. Całe życie poświęcił wykazaniu, że paradoksy nieskończoności są iluzją.¹² Jego wynalazkiem jest idea wzajemnie-jednoznaczności¹³ odwzorowania dwu klas nieskończonych. Klasę liczb parzystych możemy odwzorować w sposób wzajemnie-jednoznaczny klasie liczb całkowitych zapomocą równości

$$k = 2 \cdot i.$$

Widzimy, że dowolnej liczbie całkowitej i odpowiada liczba parzysta $2 \cdot i$. Naodwrot, dowolnej liczbie parzystej k odpowiada liczba całkowita $(k : 2)$. Z tego wynika, że klasy nasze są *równoliczne*, jakkolwiek jedna jest częścią drugiej. Bolzano stwierdza, że paradoks, jakiego można się tutaj dopatrywać, jest pozorny, bo istotną cechą nieskończoności jest właśnie to, że część klasy nieskończonej może być równoznaczna z całością.¹⁴

Badania nad równolicznością klas posunął Cantor bardzo daleko. Przedewszystkiem udowodnił, że klasa liczb wymiernych jest równoliczna z klasą liczb całkowitych. Klasy, równoliczne z klasą liczb całkowitych, nazywamy przeliczalnymi. Innymi słowami możemy powiedzieć, że klasy przeliczalne posiadają tę właściwość, że z ich elementów możemy ułożyć postęp. Przekonamy się, że z elementów klasy liczb wymiernych możemy ułożyć postęp.

Postęp ten jest następujący:

Ograniczam się do wyrażen nieprzywiedlnych, t. j. do takich

¹² Por. Enriques, l. c., p. 125.

¹³ Termin ten został wprowadzony przez Sierpińskiego na miejsce sztucznego terminu jedno-jednoznaczny.

¹⁴ Por. Enriques, l. c., p. 126.

ułamków, których już uprościć nie można. Zaczynam od ułamków nieprzywiedlnych takich, których licznik i mianownik dają sumę 1. Taki ułamek jest tylko jeden, a mianowicie $\frac{0}{1}$. Zatem pierwszym wyrazem naszego postępu jest 0. Przechodzę z kolei do ułamków nieprzywiedlnych, których licznik i mianownik dają sumę 2. Taki ułamek jest tylko jeden, a mianowicie $\frac{1}{1}$; zatem drugim wyrazem naszego postępu jest 1. Posiadamy dwa ułamki nieprzywiedlne, których licznik i mianownik dają sumę 3. Ułamki te są: $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{1}$. Zaczynamy od mniejszego, uzyskujemy więc jako trzeci wyraz postępu $\frac{1}{2}$, jako czwarty: 2. Postępując w ten sposób w dalszym ciągu, uzyskujemy następujący postęp:

0, 1, $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1}{3}$, 3, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, 4, $\frac{1}{5}$, 5, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$, 6, ...

Jest łatwo podać ogólne prawidło budowania tego postępu. Z dwu ułamków nieprzywiedlnych ten jest wcześniejszy, którego licznik i mianownik dają sumę mniejszą. Jeśli suma licznika i mianownika jest w obu danych ułamkach równa, to wcześniejszy jest ułamek mniejszy.

Główne odkrycie Cantora polega na wykazaniu, że liczby rzeczywiste nie tworzą klasy przeliczalnej, albo innemi słowami, że niema takiej klasy przeliczalnej liczb rzeczywistych, któraby obejmowała wszystkie liczby rzeczywiste. Dowód tego twierdzenia poznaliśmy w art. 8 rozdziału II-go. W tymże artykule zwróciłem uwagę na trudności pojęciowe, związane z koncepcją *klasy wszystkich liczb rzeczywistych*. Cantor nie wahał się operować pojęciem klasy wszystkich liczb rzeczywistych i pojęcie to zdobyło sobie prawo obywatelstwa w matematyce współczesnej. Nad obiekcjami Richarda i Poincarégo przeszli matematycy do porządku, opierając się na uwadze, że kwestje semantyczne nie należą do matematyki.

Drugim wielkiem odkryciem Cantora jest koncepcja dobrych porządków.

Mówimy, że klasa jest dobrze uporządkowana, jeśli każda jej niepusta podklasa posiada element najwcześniejszy.

Widzimy, że klasa liczb wymiernych nie jest dobrze uporządkowana na podstawie wielkości, bo np. klasa liczb wymiernych większych od 1 nie posiada elementu najmniejszego.

Natomiast każdy postęp jest klasą dobrze uporządkowaną.

Wyobraźmy sobie postęp postępów:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & & \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & & \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & & \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & &
 \end{array}$$

Uporządkujemy wyrazy tych postępów w ten sposób, żeby wyraz a_{lk} poprzedzał wyraz $a_{l(k+m)}$ oraz wyraz $a_{(l+m)n}$. Innymi słowami z dwu wyrazów, których pierwszy wskaźnik jest ten sam, które więc należą do tego samego danego postępu, uważamy za wcześniejszy ten wyraz, który jest wcześniejszy w danym postępie. Z dwu wyrazów należących do dwu różnych danych postępów uważamy za wcześniejszy ten wyraz, który należy do postępu wcześniejszego.

Przekonujemy się z łatwością, że nasza klasa została w ten sposób dobrze uporządkowana.

Zgodzimy się teraz uważać dwie klasy uporządkowane za podobne, jeśli możemy ustalić pomiędzy nimi odpowiedniość wzajemnie-jednoznaczłą w ten sposób, że obraz elementu wcześniejszego jest stale wcześniejszy od obrazu elementu późniejszego.

Klasy klas dobrze uporządkowanych podobnych uważać możemy za liczby porządkowe (Whitehead i Russell).

Mamy naprzód liczby porządkowe skończone, które są odpowiednikami liczb całkowitych. Po liczbach tych następuje liczba porządkowa ω , która jest klasą klas przeliczalnych. Po liczbie tej następuje liczba $\omega + 1$, która jest klasą klas takich, jak:

$$1, 2, 3 \dots \omega,$$

t. j. klas, które otrzymujemy, umieszczając po wyrazach postępu jeszcze jeden wyraz.

Jest jasne, że możliwości tworzenia klas dobrze uporządkowanych są nieograniczone.

Czytelnik zauważy, że mamy tu do czynienia z rozważaniami pełnemi osobliwego uroku. *Eodem modo litteris atque arte delectari posse.*¹⁵

Niestety, trudności podobne do tych, jakie występują w teorii liczb rzeczywistych, brózdzą i tu na każdym kroku.

Teoria liczb porządkowych pozwoliła Cantorowi zbudować

¹⁵ Motto Cantora, cytowane przez Fraenkla: *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin 1928, 3. Wyd., p. 1.

teorię liczb kardynalnych. Przez liczbę kardynalną klasy rozumiemy klasę klas równolicznych z daną klasą (Whitehead i Russell).

Klasę klas równolicznych z klasą liczb naturalnych oznaczamy symbolem $\aleph_0$.

Klasę klas równolicznych z klasą liczb porządkowych klas przeliczalnych oznaczamy symbolem $\aleph_1$.

Możemy udowodnić, że klasy, których liczba kardynalna jest $\aleph_1$, nie są przeliczalne, podobnie jak klasa liczb rzeczywistych. Zagadnienie, czy $\aleph_1$ jest liczbą kardynalną klasy liczb rzeczywistych, okazało się nierozstrzygalne. Rozstrzyga się je pozytywnie w drodze konwencji, przyjmując t. zw. *hipotezę kontinuum*.

5. Trudności tkwiące u dna tych wspaniałych koncepcyj stały się przyczyną wielkiego dramatu życia i twórczości Jerzego Cantora.

Prof. Adolf Fraenkel pisze:¹⁶

Rzadko zdarzało się w historii matematyki a może w historii całej nauki, żeby jakaś dyscyplina została przez jednego człowieka stworzona i tak daleko rozwinięta do wyzyn wyniosłych, jak teoria mnogości przez twórcę swego Jerzego Cantora (1845—1918). Wbrew oporowi prawie całego matematycznego świata przeprowadził swoje idee i potrafił je utrzymać.

W wstępie do swojego doskonałego podręcznika teorii mnogości pisze Fraenkel, co następuje:¹⁷

Prócz intuicji twórczej i artystycznej płodności, którą kierował się Cantor w swoich odkryciach, trzeba jeszcze było niezwyklej energii i wytrwałości odkrywcy, żeby swoje poglądy utrzymać i przewalczyć, bo przecież były one ku jego żywej boleści przez długi czas przez ogromną większość współczesnych mu matematyków (przedewszystkiem przez L. Kroneckera) zwalczane jako niejasne lub fałszywe albo przynajmniej jako „o sto lat zawczesne“, aż do ostatniego dziesiętka poprzedniego stulecia, w którym Cantor (1897) swoją pisarską działalność zakończył.

Cantor został przez swoich przeciwników złamany. Trudno było przewidzieć, że czasem zwalczani będą z równą namiętnością nawet ci następcy Cantora, którzy, odrzucając jego me-

¹⁶ Die Entstehung der Mengenlehre. Scientia, Grudzień 1930.

¹⁷ A. Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. Berlin 1928, 3. wyd., p. 1.

tafizykę, zechcą bronić tych niewzruszonych wyników jego pracy, które zadecydowały o losach matematyki.

Czy zawsze tak będzie, że walka o nowy pogląd na podstawy nauki grozić będzie nędzą, pogardą i obłędem, trudno przewidzieć. Jest pewne, że dotychczas zawsze tak było. Ci myśliciele, którzy rozwijają idee uznane, opływali zawsze w zaszczyty i dobra materialne. Zdobywcy nowych obszarów myśli narażeni byli na najgroźniejsze niebezpieczeństwa.

Teorja Cantora jest pozornym triumfem idealizmu. W każdym razie jest dowodem jego twórczej potęgi.

Gdyby byli tylko tacy idealisci, jak Husserl i jego uczniowie, to walka z idealizmem byłaby może bezcelowa. Kiedy jednak pomyśli się o twórczej potędze Cantora i kiedy stanie nam się jasnym fakt, że jest ona nierozzerwalnie związana z głęboką wiarą w świat przedmiotów idealnych i mistyczną niemal religijnością, to wtedy może się zdarzyć, że opuści nas ochota do radykalnego krytykowania podstaw twórczości ludzkiej. Może się zdarzyć, że uczepi nas się odwieczny kult naszych własnych tworów, taki jak ten, który opanował umysły pitagorejczyków.

Natura ludzka jest dziwnie słaba i dziwnie kapryśna. Wielowiekowe doświadczenia zdają się wobec niej bezsilne. Raz przecie trzeba zrozumieć, że rodzące się myśli przepojone są zawsze tajemniczą głębią i że metafizyczna ich groza jest najzupełniej niezależna od ich naukowej wartości. To, że Cantor obcował bezpośrednio z aktualną nieskończonością, to jest jego osobiste przeżycie, którego wielkość nie ma nic wspólnego z płodnością jego pomysłów. Wielkość nauki Cantora nie ma nic wspólnego z tajemniczym czarem nieskończoności. Sprowadza się do tego faktu, że przy pomocy określonych znaków możemy wykonywać pewne działania. Trzeba jednak pamiętać, że gdyby Cantor ograniczył się do wykonywania tych działań, gdyby w jego duszy nie płonął ogień mistycznej tęsknoty za nieskończonością, to nigdy nie byłby dostrzegł tych prostych prawideł, które pozostawił ludzkości jako niezniszczalną zdobycz (*aere perennius*).

Niemniej musimy stwierdzić, że metafizyka Cantora stała się źródłem tragicznej pomyłki, która zadecydowała o jego losie.

Definicja klasy podana przez Cantora jest nie tylko niejasna, ale zbyt ogólna.

Cantor używa terminu *mnogość*.

Mnogość — pisze Cantor — *jest to ujęcie w całość określonych, dobrze wyróżnionych przedmiotów naszego spostrzegania lub naszej myśli — które nazywają się elementami mnogości.*¹⁸

Czytelnik zauważy z łatwością, że pojęcie to zawiera cechy utworów sprzecznych, opisanych powyżej, takich jak wyrażenie heteronomiczne. Odkrycie tego faktu zawdzięczamy Bertrandowi Russellowi.

Żeby zbudować słynną antynomję Russella, trzeba zwrócić uwagę na fakt, że w myśl koncepcji Cantora każda klasa (mnogość) jest określonym, dobrze wyróżnionym przedmiotem naszej myśli, może więc być uważana z kolei za element jakiejś klasy. W szczególności możemy się pytać, czy dana klasa jest swoim własnym elementem, czy też nim nie jest. Tak np. klasa ludzi jest swoim własnym elementem, bo przecież klasa ta nie jest człowiekiem. Podobnie klasa wszystkich klas musi być swoim elementem i t. d. Klasa wszystkich klas jest przedmiotem tak bardzo wzniosłym, że może obudzić w nas ochotę do szukania związku ścisłego między teorią klas a teologią. Marzenia tego rodzaju rozwiewają się w nicość dzięki konstrukcji Russella.

Russell buduje *klasę takich klas, które nie są swymi elementami*.

W naszej symbolice klasę tę przedstawia wyrażenie

$$\Pi x \sim \in x x.$$

Oznaczmy to wyrażenie literą Ω i zwróćmy uwagę na sąd:

$$\in \Omega \Omega.$$

Stosując zasadę transformacji do tego sądu, otrzymujemy równoważność:

$$\equiv \in \Omega \Omega \sim \in \Omega \Omega.$$

Widzimy, że sąd $\in \Omega \Omega$ jest równoważny swemu zaprzeczeniu.

Słowami można wyrazić ten paradoks w sposób następujący

Jeśli Ω jest klasą klas nie będących swymi elementami, to Ω nie może być swoim elementem ani też nie może nim nie być.

Jeśli Ω jest swoim elementem, to nie jest klasą nie będącą swoim elementem, nie może więc być swoim elementem.

Jeśli Ω nie jest swoim elementem, to jest klasą nie będącą swoim elementem, a zatem jest swoim elementem.

Z antynomji tej wynika natychmiast, że pytanie, czy klasa

¹⁸ Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre, I. c., p. 3.

jest swoim elementem, czy też nim nie jest, nie posiada ściśle określonego sensu.

Odkrycie Russella było jednym z najbardziej dramatycznych wstrząsów, jakie przeżyła nauka. Cały gmach teorii klas, który wznoszono z takim mozolem i po którym tyle sobie obiecywano, przestał być jasną i prostą budową. Na dnie pokazała się skaza, która groziła zupełną katastrofą.

Gottlieb Frege pisał w zakończeniu II-go tomu *Podstaw arytmetyki*:

Pracownikowi naukowemu nie może chyba wydarzyć się coś mniej pożądanego jak to, że po ukończeniu pracy zostanie wstrząśnięta jedna z podstaw jego konstrukcji. W takim położeniu znalazłem się skutkiem pewnego listu p. Bertranda Russella, kiedy druk tego tomu zbliżał się ku końcowi.

A potem, nieco niżej:

Solatium miseris, socios habuisse malorum. Ta pociecha, jeśli taką jest, jest także moim udziałem, bo wszyscy, którzy posługiwali się w swoich dowodach zakresami pojęć, klasami, mnogościami, są w tem samem położeniu.¹⁹

Autorem pierwszej antynomji ogłoszonej drukiem jest matematyk włoski Burali-Forti.²⁰ Antynomję tę można sformułować w sposób następujący:

Zwróćmy uwagę na klasę wszystkich liczb porządkowych. Klasa ta tworzy klasę dobrze uporządkowaną, stanowi więc podstawę do utworzenia nowej liczby porządkowej. Liczba ta musi być większa od wszystkich liczb porządkowych.

Paradoks ten jest może jeszcze bardziej niepokojący od antynomji Russella, ze względu na swoją niesamowitą prostotę.

Obydwa te paradoksy są niezbitym dowodem faktu, że naiwna koncepcja klasy podana przez Cantora nie da się utrzymać.

Nie wynika z tego bynajmniej, żeby teoria Cantora została unicestwiona. Zobaczmy, że można ją uratować przy pomocy bardzo prostych ograniczeń języka, którym się posługujemy. Zobaczmy również, że można zrekonstruować ją w ten sposób, że tkwiące w niej pierwiastki metafizycznego idealizmu będą uratowane.

Ale marzenie o matematyce absolutnej, niezależnej od konstrukcji logicznych, rozplynęło się w nicłość.

¹⁹ Grundzüge der Arithmetik II. Jena 1903, p. 253.

²⁰ Una questione sui numeri transfiniti, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. XI, 1897.

6. Żeby usunąć antynomję Russella, wystarczy przyjąć uproszczoną teorię typów logicznych. Twórcą teorii typów jest Bertrand Russell. Teorja ta jest skomplikowana i nie można sformułować jej jasno w kilku słowach. Natomiast można ją uprościć w ten sposób, że rzeczywiście da się ująć w kilka zdań prostych.

Przyjmuję t. zw. *univers du discours*, złożony z przedmiotów, które nazywam *indywiduami*. Bliższych właściwości tych indywiduów, ani konkretnych przykładów nie podaję.

Prócz indywiduów przyjmuję *klasy indywiduów*, *klasy klas indywiduów* i t. d.

To jest wszystko. Jest jasne, że tutaj pojęcie klasy jako takiej nie ma sensu. Wolno tylko mówić o klasach pewnych określonych przedmiotów. Tem samem pytanie, czy klasa jest swoim elementem, odpada jako pozbawione sensu.

Tę uproszczoną teorię typów sformułowałem po raz pierwszy w pracy p. t. *Antynomje logiki formalnej*, wydanej w r. 1921.²¹

W pracy tej znajduje się następujące zdanie:

Do usunięcia tej antynomji (chodzi o Antynomję Russella) wystarczy prosta teoria typów, polegająca na odróżnieniu indywiduów, funkcji indywiduów, funkcji tych funkcji i t. d.²²

Tutaj pojęcie funkcji jest ekwiwalentem pojęcia klasy.

Tę samą koncepcję sformułowałem w roku następnym w pracy p. t. *Über die Antinomien der Principien der Mathematik*.²³

W r. 1925 opublikowałem pracę p. t. *Über die Hypothesen der Mengenlehre*,²⁴ opartą na uproszczonej teorii typów. Niemniej nigdy nie uważałem teorii tej za definitywne załatwienie podstaw logiki.

Tezę taką wysunął w r. 1925 F. P. Ramsey, przyczem powołał się na moją pracę z r. 1922, ale z zupełnie innego punktu widzenia. Praca Ramseya²⁵ zyskała szybko popularność. Mój pomysł został uwzględniony jedynie przez prof. Fraenkla. Dopiero prof. Carnap w świeżo ogłoszonej pracy przyznał mi pierwszeństwo bez zastrzeżeń.²⁶

²¹ Przegląd filozoficzny 24, p. 164.

²² L. c., p. 168.

²³ Mathematische Zeitschrift 14, p. 241.

²⁴ Mathem. Zeitschrift 25, p. 439.

²⁵ The foundations of Mathematics [Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 25 (1925)].

²⁶ Por.: Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik, Monatshefte für Math. u. Physik, tom 41, zeszyt 2, r. 1934.

Jest dobrze dodać, że już w r. 1925 zbudował prof. Wilkosz teorię klas, opartą na uproszczonej teorii typów, przyczem jednak genezę tej teorii pominął milczeniem.²⁷

Uproszczona teoria typów jest z tego powodu niezmiernie ważna, że daje nam możliwość uzyskania prostych podstaw intuicyjnych teorii klas, bez odwoływania się do aparatu symbolicznego.

Niemniej teoria ta nie pozwala nam na posługiwanie się językiem potocznym w całym jego zakresie. W szczególności jesteśmy zmuszeni do zrezygnowania z rozważań semantycznych, gdyż w razie przeciwnym popadniemy natychmiast w antynomję Richarda.

Pomijam tu sprawę, w jaki sposób możemy przy pomocy uproszczonej teorii typów skonstruować pojęcie liczby rzeczywistej. Jest faktem, że jeśli przyjmiemy t. zw. aksjomat nieskończoności, z którego wynika, że klas klas indywiduów jest nieskończenie wiele, to wówczas możemy bez trudności zbudować całą teorię liczb rzeczywistych, jak tego dowiedli Whitehead i Russell w swem fundamentalnem dziele: *Principia Mathematica*. Liczby rzeczywiste możemy pojmować jako pewne klasy liczb wymiernych. Otóż, wszystkie klasy liczb wymiernych posiadają według uproszczonej teorii typów ten sam typ. Z tego wynika, że liczba cantorowska na przekątni posiada ten sam typ, co liczby tworzące postępow podstawowy. Konsekwencją tego stanu rzeczy jest antynomja Richarda. Antynomji tej możemy uniknąć jedynie pod warunkiem, że uznamy teorię klas za dyscyplinę zamkniętą w sobie, wykluczając z niej wszelkie dociekania semantyczne.

Prowadzi to do dość dziwnego stanu rzeczy. Z jednej strony mówimy o wszystkich właściwościach liczb rzeczywistych, a z drugiej pomijamy tę ich właściwość, że mogą być przedstawione przy pomocy wyrażeń naszego systemu. Tem samem stwarzamy taką sytuację, jakgdyby nam chodziło tylko o te właściwości, które faktycznie w naszym systemie możemy skonstruować. Otóż z chwilą, kiedy zapuścimy się myślą w tę koncepcję, okaże się, że cały idealizm uproszczonej teorii typów jest dość iluzoryczny. Jeśli mówimy, że klasa liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalna, i jeśli to nasze twierdzenie nie prowadzi do sprzeczno-

²⁷ Podstawy ogólnej teorii mnogości. Kraków 1925.

ści, jakkolwiek w gruncie rzeczy chodzi nam o liczby konstruowalne w naszym systemie, to jest to możliwe tylko dlatego, że nasz system nie dostarcza nam środków, przy pomocy których moglibyśmy utworzyć postęp tych liczb.²⁸

Z tego punktu widzenia nieskończoność aktualna rozpada się w proch, a t. zw. *nieprzeliczalność* jest tylko niezręcznym opisem ubóstwa naszego systemu.

Z uwag powyższych wynika, że teoria typów jest osobliwą mieszaniną elementów idealistycznych i nominalistycznych.

Idealistyczny charakter tej doktryny występuje naprzód w założeniu istnienia nieskończenie wielu klas indywiduów, przyczem o tych indywiduach niczego się nie zakłada.

Nadto, o ile nie zechcemy przyjąć wspomnianego wyżej aksjomatu ekstensjonalności, który jest zgoła zbyteczny i posiada charakter czysto metafizyczny, to wówczas potrafimy dowieść istnienia klasy niekonstruowalnej w naszym systemie.²⁹

Decydującym momentem dla osądzenia uproszczonej teorii typów jest jej niezgodność z aksjomatami semantyki. Szczegółowe badania nad podstawami nauk ścisłych nie są możliwe bez zapuszczenia się drobiazgowego w konstrukcje semantyczne. Z tego punktu widzenia jest uproszczona teoria typów przeżytkiem. Na jej miejsce musi przyjść nowa logika, bezporównania ogólniejsza. Można zauważyć, że uproszczona teoria typów nadaje się doskonale do badań pół-intuicyjnych. Ale badania takie możemy uprawiać równie łatwo przy pomocy starej aksjomatyki, podanej przez prof. Zermelo, która przez prof. Fraenkla została w wysokim stopniu udoskonalona. Możemy jednak, idąc śladem Hausdorffa i Sierpińskiego, przejść prosto do porządku dziennego nad trudnościami, tkwiącymi u dna teorii klas, unikając konstrukcyj zbyt daleko posuniętych i kierując się zdrową intuicją. Jest powszechnie wiadome, że ta właśnie metoda okazała się najpłodniejsza i zadecydowała o kolosalnym rozroście badań nad teorią klas. Badania te rozwinęły się z osobliwą potęgą na gruncie polskim. Założone przez ś. p. Janiszewskiego pismo: *Fundamenta mathematicae*, wydawane w Warszawie przez prof. Sierpińskiego wspólnie z prof. Mazurkiewiczem i prof.

²⁸ Tę zajmującą interpretację prostej teorii typów podał prof. Carnap w pracy p. t. *Die Antinomien u. die Unvollständigkeit der Mathematik*, cytowanej powyżej.

²⁹ Por. mój artykuł: *Nominalistische Grundlegung der Mathematik*, Erkenntnis, 1933.

Kuratowskim, przedstawia dziś trudny do ogarnięcia ogrom wyników, posiadających wartość pierwszorzędą dla badacza podstaw matematyki. Dalszy rozwój tych badań natrafia na poważne trudności związane z tym faktem, że pojęcie klasy, oderwane od pojęcia wyrażenia, nie jest jednoznacznie określone. Trudności te świadczą dobitnie, że teoria klas rozplynie się zczasem w nauce o wiele ogólniejszej, jaką jest metamatematyka racjonalna.

7. Trudnościami temi zajmę się w artykule następnym. Tutaj pragnę jeszcze poświęcić parę słów *czystej teorii typów logicznych*. Intuicyjna koncepcja tej teorii została stworzona przez Bertranda Russella. W myśl tej teorii ani klasy indywiduów, ani klasy klas indywiduów i t. d. nie tworzą określonego typu logicznego, ale ze swej strony rozpadają się na typy, które w tym wypadku nazywać możemy rządami.

Celem uniknięcia nieporozumień zaznaczę, że Russell zamiast o klasach mówi o *funkcjach zdaniowych*, a przez klasę rozumie pewien utwór fikcyjny, którego wprost podać nie możemy. W sprawy te wdawać się tutaj nie będę, ograniczając się do uwagi, że metoda ta okazała się niefortunna i doprowadziła do nie-małego zamieszania pojęć. Szczegółową krytykę koncepcji klasy Russella podałem w rozprawie: *The theory of constructive Types*.³⁰

Wracam do russellowskiej teorii typów.

Najniższy typ klas tworzą *klasy predykatywne indywiduów*. Klas tych nie możemy zdefiniować, ani też nie możemy skonstruować przykładu takiej klasy w systemie logiki. Widzimy więc, że wchodzimy tu na grunt skrajnego idealizmu. Jeśli teraz zbudujemy jakąkolwiek klasę klas predykatywnych indywiduów ω , możemy zająć się konstrukcją jej sumy i iloczynu. Suma klasy ω , którą oznaczamy przez $\Sigma \omega$, jest to klasa indywiduów, które należą do pewnej klasy predykatywnej, będącej elementem klasy ω .

Iloczyn klasy ω , który oznaczamy przez $\Pi \omega$, jest to klasa indywiduów, które należą do wszystkich klas indywiduów, będących elementami klasy ω .

Klasy $\Sigma \omega$, $\Pi \omega$ są przykładem niepredykatywnych klas indywiduów. Są to utwory wyższego rzędu. Utwory te tworzą osobny typ przedmiotów.

³⁰ L. c.

Jeśli teraz mamy przedmioty dowolnego typu, możemy budować klasy predykatywne tych przedmiotów. Sumy i iloczyny tych klas dostarczają nam przedmiotów nowego typu i t. d.

Teorię tę nazwano *rozgałęzioną* teorią typów, gdyż, jak widzimy, typy nie tworzą tutaj postępu.

Żeby przy pomocy tej radykalnej teorii zrekonstruować cantoryzm, chwycił się Russell następującego pomysłu. Przyjął aksjomat, który nazwał *aksjomatem sprowadzalności* (reduktywności). Aksjomat ten mówi, że *każdej klasie odpowiada pewna równa jej klasa predykatywna*. W myśl tego aksjomatu klasy $\Sigma\omega$, $II\alpha$ posiadają swoje ekwiwalenty wśród predykatywnych klas indywiduów. W praktyce więc sytuacja jest taka, że jeśli mówimy o wszystkich klasach predykatywnych indywiduów, to mamy na myśli także takie klasy, które zawierają te same elementy, co $\Sigma\omega$, względnie $II\omega$. W praktyce nigdy nie mamy do czynienia z sądami o klasach konstruowalnych. Cała teoria klas odnosi się do predykatywnych ekwiwalentów klas danych. Te ekwiwalenty są oczywiście niekonstruowalne. Zadowolamy się założeniem, że istnieją.

Widzimy, że jest to idealizm o wiele dalej posunięty od cantorowskiego. Teoria ta jest, rzec można, najwyższym triumfem idealizmu, jest bowiem jasne, że wyklucza ona wszelką obawę przed paradoksami i to nie tylko klasowymi, ale i semantycznymi, takimi jak paradoks Richarda. Walka z idealizmem nie może być prowadzona w imię sprzeczności. Gdyby można było doprowadzić idealizm do sprzeczności, to sprawa byłaby raz na zawsze załatwiona. Chodzi jednak o to, że zagadnienie istnienia nie jest aż tak proste. Wiara w istnienie przedmiotów idealnych nigdy nie będzie mogła być radykalnie przewyciężona. Możemy jedynie przeciwstawiać jej konstrukcje konkretne i wykazywać, że to wszystko, co w idealizmie jest płodne i twórcze, może być uzyskane przy pomocy tych konstrukcyj.

Wszystko, prócz pewnego specyficznego nastroju, który dla pewnego typu umysłów jest synonimem urody życia. Z tym ostatnim czynnikiem niepodobna walczyć przy pomocy ścisłych argumentów. Mogę tylko zauważyć, co następuje.

Nastrój idealistycznej metafizyki jest mi znany z doświadczenia i znane mi są rozkosze, rodzące się z niego. W nastroju tym tkwi jednak groźne niebezpieczeństwo. Tak długo jest dobrze, dopóki groza życia nie dobierze się do naszych wnętr-

ności. Zamykamy się jak żółw w skorupie i z lekceważeniem patrzymy na szerzącą się dokoła nas nieprawość. Aż wkońcu brutalny młot rozbija naszą skorupę. Wtedy powstaje tylko niesmak i pustka. Myślę, że o wiele jest lepiej walczyć z idealistycznym kwietyzmem zawczasu. Walka ta daje większą rozkosz, niż ta, której dostarcza nam nastrój idealistyczny.

Zobaczmy teraz, w jaki sposób teoria Russella usuwa paradoks Richarda. Każdą liczbę rzeczywistą możemy uważać za klasę par, składających się z liczby całkowitej wyznaczającej pewne miejsce dziesiętne i z jednej z liczb 0, 1, 2... 9, wyznaczającej cyfrę, znajdującą się na tem miejscu.

Twierdzę, że klasa klas predykatywnych tego typu jest nieprzeliczalna. Rzeczywiście, liczba cantorowska nie jest wprawdzie klasą predykatywną, ale z aksjomatu sprowadzalności wynika, że istnieje predykatywny ekwiwalent tej liczby. Ekwiwalent ten nie mógł należeć do postępu, na którym oparliśmy cantorowską konstrukcję. Liczba na przekątni jest wprawdzie skonstruowana, ale nie o nią przecież chodzi, a ekwiwalent jej nie jest bynajmniej konstruowalny i skutkiem tego urąga wszelkim próbom uchwycenia go przy pomocy metod semantycznych.

Aksjomat sprowadzalności jest typowym sądem syntetycznym *a priori*. Na ten fakt zwrócił uwagę Poincaré zaraz po ukazaniu się teorii Russella. Gdyby logika musiała opierać się na takich aksjomatach, to nie możnaby żadną miarą uważać jej za naukę niezależną od metafizyki. Gdyby nie było innych dróg nauki, to metafizyka byłaby nauką naczelną, a Platon byłby odkrywcą tajemnicy istnienia. Na szczęście tak nie jest. Przede wszystkim okazało się, że czystą teorię typów można uniezależnić od pojęcia klas predykatywnych. Badania, jakie w tym kierunku przedsięwziąłem, doprowadziły ostatecznie do zbudowania podstaw logiki, wolnych od metafizycznych założeń.

W szczególności okazało się, że odrzucenie zasady sprowadzalności nie obala zasadniczej idei Whiteheada i Russella zbudowania systemu nauk apriorycznych opartego na logice. Trzeba tylko przyjąć aksjomat nieskończoności, którego jednak nie można traktować na tym samym poziomie, co aksjomat sprowadzalności. W tym drugim wypadku postulujemy istnienie przedmiotów niekonstruowalnych, w wypadku pierwszym odwołujemy się do istnienia dowolnej liczby różnych indywiduów, a więc do czegoś, z czem mamy do czynienia bezpośrednio

w semantyce. Z tego punktu widzenia aksjomat nieskończoności jest tylko łącznikiem pomiędzy logiką a semantyką. System logiki, opartej na czystej teorii typów, uzupełniony aksjomatem nieskończoności pozwala nam na rekonstrukcję matematyki klasycznej, a tylko wobec cantoryzmu jest bezsilny.³¹ Wynik ten jest z punktu widzenia filozoficznego niezmiernie ważny. Okazuje się, że nauki ścisłe mogą być uniezależnione od metafizyki, a tylko pewne ich działy związane są z metafizyką. Niemniej ten stan rzeczy dowodziłby, że idealizm jest w pewnym sensie konieczny, że istnieją wyżyny myśli ludzkiej, do których metodami nominalistycznymi nigdy dotrzeć nie potrafimy. Konsekwencja ta jest bezwątpienia sztuczna i wywołać musi potrzebę ostrej krytyki. Odrazu nasunąć się musi przypuszczenie, że może mamy tu do czynienia z czemś podobnym jak w geometrii. Idealistyczny charakter geometrii pochodzi oczywiście stąd, że nie jest to samodzielna nauka, ale poprostu pewna metoda interpretowania teorii funkcji liczbowych. Może logika również nie jest samodzielną nauką, może cała jej bezsilność pochodzi stąd, że oderwaliśmy ją sztucznie od semantyki, która jest z konieczności podstawą wszystkich nauk? Czytelnik, który przeczytał uważnie rozdziały poprzednie, nie będzie wahał się nad odpowiedzią na to pytanie. Logika bez semantyki jest fragmentem i nic dziwnego, że metody jej nie sięgają zbyt daleko. Zobaczmy w dalszym ciągu, że nietylko logika nominalistyczna, ale nawet skrajnie idealistyczna logika Russella musi być uzupełniana nowymi hipotezami, w miarę jak rozwój matematyki postępuje coraz dalej. W tych warunkach nie można się wahać. Trzeba zabrać się do budowy systemu metamatematyki racjonalnej, opartego na aksjomatach semantyki. Zobaczmy, że metoda ta likwiduje raz na zawsze wszelkie uroszczenia idealizmu, sięgając do jego najbardziej tajemniczych wyżyn.

Metoda semantyki pozwala nam na zrealizowanie pierwotnej koncepcji typów logicznych, sformułowanej swojego czasu przez Richarda i Poincarégo.

Wystarczy powiedzieć, że wyrażenia, przy pomocy których mówimy o danych wyrażeniach, muszą posiadać typ wyższy od wyrażen danych. W ten sposób dostajemy postęp wyrażen, posiadających coraz to wyższe typy. Taką hierarchję wyrażen można zbudować w sposób następujący:

³¹ Por. The theory of constructive types, I. c.

Zwróćmy uwagę na wyrażenia spełniające warunek:

$$(*E0*000E).$$

Wiemy, że są to wyrażenia: 0, *00, **000, ***0000 i t. d. Nazwijmy wyrażenia te *typami* i umówmy się skracać je przy pomocy liczb rzymskich, zaczynając od **000. Będziemy mieli:

Skrót	Wyrażenie
I	**000
II	*10
III	*II0
...	...

Powiemy teraz, że wyrażenia typu I nie zawierają I, wyrażenia typu II nie zawierają II i t. d.

Ta reguła musi być coprawda nieco zmodyfikowana z uwagi na potrzebę wprowadzenia zmiennych rzeczywistych, ale to nie zmienia tego faktu, że jest uderzająco prosta.

Teorja typów wyrażeń oparta na naszej regule może być nazwana *teorją typów semantycznych*. Teorja ta została opracowana w rozprawie: *Fondements de la métamathématique rationnelle*, którą ogłosiłem wspólnie z pp. Hetperem i Herzbergiem.³² W systemie semantyki, opartym na tej teorji, musimy posługiwać się nawiasem podstawieniowym: $(EFGH)[L]$, gdzie L oznacza typ wyrażeń figurujących wewnątrz nawiasu.

Teorja ta stała się podstawą do zbudowania metamatematycznej teorji typów, która będzie przedstawiona szczegółowo w rozdziale VI.

8. Zwróćmy się teraz do wspomnianych wyżej trudności, związanych z rozbudową teorji klas.

Chodzi mi przede wszystkim o słynną *zasadę wyboru*, zwaną także *zasadą Zermeli*.

Jest jasne, że do każdej niepustej klasy liczb naturalnych lub wymiernych należy *element wybrany*, który może być uważany za jej reprezentanta.

W wypadku pierwszym elementem wybranym jest ta liczba naturalna, która nie jest większa od żadnego elementu danej klasy.

W wypadku drugim elementem wybranym jest ta liczba wy-

³² Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Kraków 1933.

mierna, która nie jest późniejsza od żadnej liczby wymiernej w postępie liczb wymiernych podanym powyżej.

Wyobraźmy sobie teraz dowolną klasę liczb rzeczywistych. Jeśli klasa podana jest *explicitie* i jeśli przynajmniej o jednej z liczb rzeczywistych możemy dowieść, że jest elementem tej klasy, to możemy poprostu powiedzieć, że ta właśnie liczba jest reprezentantem naszej klasy, kierując się swobodnym wyborem. Ale taki wybór indywidualny nie na wiele się przyda, może być bowiem wykonany tylko w ograniczonej liczbie wypadków. Natomiast o zbudowaniu jakiejś reguły, która pozwoliłaby nam podporządkować każdej klasie liczb rzeczywistych jej reprezentanta, tak właśnie, jak to uczyniliśmy z klasami liczb naturalnych, żadną miarą nie możemy marzyć. Ten stan rzeczy pociąga ogromne ograniczenie teorii klas, sprowadzając ją do poziomu bezużytecznego fragmentu. Żeby wybrnąć z tej trudnej sytuacji, zaproponował Zermelo przyjęcie następującego aksjomatu: *Do każdej klasy klas należy klasa reprezentantów tych klas.*

Zajmujące są tutaj jedynie zagadnienia następujące:

- 1) Czy można zbudować płodną teorię klas, w której zasada Zermeli byłaby fałszywa?
- 2) Czy można zbudować taką teorię klas, w której zasada Zermeli byłaby zbędna?

Na to drugie pytanie możemy odpowiedzieć w sposób twierdzący dzięki temu faktowi, że teoria klas może być uważana za rozdział metamatematyki racjonalnej. W metamatematyce racjonalnej mamy do czynienia jedynie z klasami przeliczalnymi, więc sprawa reprezentantów klas jest zgóry przesądzona w sposób pozytywny. Pozostaje tylko kwestja zakresu metamatematycznej teorii klas, bo idzie przecież o to, żeby nie musieć rezygnować z wspaniałych zdobyczy, uzyskanych przez teorię klas w ostatnich dziesiątkach lat. Otóż, mamy poważne podstawy do przeświadczenia, że rezygnacja taka nie będzie potrzebna. Szczegółowa analiza tej sprawy podana będzie w rozdziale następnym.

Zajmiemy się teraz pierwszym z sformułowanych wyżej pytań i rozstrzygniemy je również w sensie pozytywnym. Badania, jakie przedsięwziąłem nad rolą zasady Zermeli w teorii klas,³³ doprowadziły do wniosku, że zachodzi ścisła analogja pomiędzy

³³ Por. Über die Hypothesen der Mengenlehre. Mathem. Zeitschrift, 1. c.

tą zasadą a t. zw. postulatem Euklidesa, t. zn. że możemy zbudować teorię klas równie płodną jak teoria Cantora, w której zasada Zermeli jest fałszywa.

Za podstawę naszych dociekań weźmiemy uproszczoną teorię typów wraz z aksjomatem nieskończoności. W systemie opartym na tych założeniach możemy udowodnić jedynie istnienie klas indywiduów zawierających n elementów, gdzie n jest dowolną liczbą całkowitą, lub też takich klas, do których należą wszystkie indywidua z wyjątkiem n indywiduów, gdzie znowu n jest dowolną liczbą całkowitą.

Twierdzenia tego nie udało mi się wprowadzić udowodnić, jest ono jednak oczywiste dla każdego, kto zaznajomił się z metodami badawczymi teorii klas. Ale nawet czytelnik, który niewiele słyszał o tym przedmiocie, zrozumie, że skoro o indywiduach założyliśmy tylko tyle, że potrafimy zbudować nieskończenie wiele klas indywiduów, to nie posiadamy środków wystarczających do konstruowania postępów indywiduów, a jedynym środkiem budowania klas indywiduów, jakim rozporządzamy, jest wypisanie pewnej liczby liter i założenie, że te litery oznaczają różne indywidua.

Ten stan rzeczy możemy opisać, przyjmując t. zw. *zasadę transcendencji*, która opiewa:

Jeśli α oznacza pewną klasę indywiduów, to albo α albo — α zawierać musi n indywiduów, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Z zasady tej wynika, że nie może istnieć nieskończony postęp indywiduów. Gdyby taki postęp istniał, to klasa elementów parzystych tego postępu byłaby nieskończona. To samo możnaby powiedzieć o klasie wszystkich pozostałych indywiduów, a to jest sprzeczne z naszą zasadą.

Jeśli nie może istnieć nieskończony postęp indywiduów, to nie może też istnieć dobrze uporządkowana klasa indywiduów. Ale z zasady Zermeli wynika, że do każdej klasy indywiduów należy relacja, ustanawiająca dobry porządek jej elementów. Jest to słynne twierdzenie Zermeli, opublikowane w r. 1904 w rozprawie, o której pisze Fraenkel, że jest napełniona godną podziwu bystrością.³⁴ Otóż, z tego twierdzenia i z tej konsekwencji naszej zasady transcendencji, że nie istnieje postęp indywiduów, wynika niezbicie, że zasada wyboru jest fałszywa.

³⁴ L. c., p. 148.

Opierając się na aksjomacie transcendencji, zbudowałem teorię liczb całkowitych uogólnionych, do których nie stosuje się indukcja zupełna. Rezultat ten świadczy, że aksjomat transcendencji rozszerza w pewnym sensie nasz zakres badania.

Żeby nie uronić tych twierdzeń teorii klas, które opierają się na zasadzie Zermeli, wystarczy przyjąć aksjomat następujący:

Klasa klas, których elementy tworzą dobry porządek, tworzy również dobry porządek.

Z aksjomatu tego wynika m. i., że liczby rzeczywiste tworzą dobry porządek.

Aksjomat ten jest oczywiście jednym z wielu aksjomatów tego rodzaju, jakie przyjąć możemy. Widzimy więc, że mamy tu do czynienia z pojęciami zgrubsza tylko określonymi.

Jest dobrze zauważyć, że zasada Zermeli nie wystarcza do określenia pojęcia klasy. Jest ona bezsilna wobec zagadnienia wspomnianej wyżej hipotezy kontinuum.

Co więcej, nie możemy przewidzieć, czy rozstrzygnięcie tej hipotezy w sensie pozytywnym usunie nieokreśloności, tkwiące w pojęciu klasy.

Wszystko to świadczy o tem, że teoria klas nie jest nauką samodzielną i jest potężnym argumentem za koniecznością przeniesienia badań mnogościowych na teren semantyki.

Rozdział VI.

Podstawy metamatematyki racjonalnej.

1. Metamatematyka intuicyjna jest dziełem Hilberta i jego szkoły. Hilbert uważał metamatematykę za środek do udowodnienia niesprzeczności aksjomatów idealistycznej matematyki i nie myślał wcale o ścisłym sformułowaniu metamatematycznych metod. Zadanie to mogło być rozwiązane dopiero dzięki rozwojowi semantyki elementarnej.

Koncepcja Hilberta okazała się iluzoryczna. Dzisiaj wiemy, że jeśli zbudujemy metamatematykę w sposób poprawny, to wtedy wprowadzenie osobnych aksjomatów matematyki staje się najzupełniej zbyteczne. Dzięki temu możemy przewyciężyć radykalnie wszelkie zakusy idealizmu, nie narażając się wcale na ograniczenie zakresu matematycznych badań.

Idealistyczny charakter aksjomatyki Hilberta występuje nader jaskrawo w t. zw. aksjomacie epsilonowym, który wygląda w sposób następujący:

$$\supset A(a) A(\varepsilon A)^1$$

Ta niewinna napozór formułka kryje w sobie całą metafizykę. Powiada ona, że w każdej niepustej klasie A istnieje element wyróżniony εA , jakkolwiek niema żadnej podstawy do takiego twierdzenia prócz tej, że w ten sposób upraszczają się rachunki.

Wyobraźmy sobie klasę K liczb niewymiernych. Jest jasne, że żadna z tych liczb nie jest lepsza ani gorsza od drugiej. Żaden z elementów klasy K nie jest wyróżniony. Ale i tak zakładamy istnienie takiego elementu i — mało tego — wprowadzamy dla określenia go symbol εK , który stwarza iluzję, że

¹ Por. D. Hilbert: Die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. Leipzig 1928, p. 64.

mamy do czynienia z określonym przedmiotem. Jest to typowy *deus ex machina*. Pamiętam, że jako student getyngeski wpadłem na koncept podobny i pisałem o tem do Bertranda Russella. Russell odpisał mi, że w ten sposób nie uzyskuję nic, mając jedynie istniejącą trudność.

Praca przedsięwzięta przez Hilberta i Bernaysa dla obrony tego aksjomatu jest tak olbrzymia i tak skomplikowana,² że zysk praktyczny, jaki osiągamy przez jego przyjęcie jest naprawdę iluzoryczny. Takie mniej więcej zdanie wypowiedział o tej sprawie Hermann Weyl, z tą różnicą, że ograniczył się do powątpiewania.³

Zarzut ten byłby decydujący nawet wtedy, gdyby Hilbertowi udało się naprawdę dać dowód niesprzeczności tego aksjomatu. Ale idzie właśnie o to, że takiego dowodu nie mamy i nic nie świadczy o tem, że będziemy go mieli kiedykolwiek. Prace dotychczasowe, przedsięwzięte m. i. przez v. Neumanna zdają się świadczyć niezbiecie, że o dowodach niesprzeczności może być mowa tylko tam, gdzie pozostajemy w sferze przedmiotów konstruowalnych.⁴

Koncepcja Hilberta kryje w sobie poważne niebezpieczeństwa metodologiczne, usprawiedliwiając każdą bzdurę, która nie podlega sprzeczności i jest do pewnego stopnia użyteczna.

Wiadomo, że doprowadzenie do sprzeczności magji, astrologji i t. p. jest zgoła niemożliwe, a użyteczności tego wszystkiego można bronić z niemałemi szansami powodzenia. W każdym razie założenie, że istnieją jakieś istoty wyższe, które nie mogą wywierać na nas żadnego wpływu, jest napewno wolne od sprzeczności i jest niezmiernie użyteczne dla zwolenników hierarchji klasowej. Niemniej jest to fikcja przecząca zdrowemu rozsądkowi i hamująca w wysokim stopniu rozwój kultury duchowej.

2. Są niewątpliwie działy matematyki, które oddają nam wielkie usługi, jakkolwiek opierają się na konstrukcjach niezupełnie jasnych. Takim np. jest rachunek prawdopodobieństwa. Znacze-

² Por. Hilbert u. Bernays: *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934.

³ Por. H. Weyl: *Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbert'schen Vortrag über die Grundlagen der Mathematik. Abhandlungen aus dem math. Sem. etc.*, p. 87.

⁴ Por. v. Neumann: *Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitschr.* 1927.

nie tego rachunku polega na zastosowaniach, a te zastosowania wypadają naogół zgodnie z doświadczeniem. Inaczej jest z metamatematyką. Metamatematyka nie daje nam niczego zasadniczo nowego. Zadaniem jej jest tylko uzyskanie wyższego stopnia pewności, wyeliminowanie założeń metafizycznych i sprowadzenie dowodów do formy elementarnej. Otóż, jeśli taka nauka ma mieć jakąkolwiek wartość, to musi być sformułowana ściśle. Musimy wyraźnie powiedzieć co przyjmujemy i w jaki sposób postępować zamierzamy. Ale w postulatcie tym zdaje się tkwić błędne koło. Jeśli chcemy sformułować, na czym ma polegać metamatematyka, to jest to przecież tylko przesunięcie zagadnienia. Przenosimy się z terenu matematyki na teren metamatematyki i postulujemy jakąś metamatematykę wyższego rzędu. Tak bynajmniej nie jest. Zobaczmy, że możemy zacząć od niezmiernie prostego, naprawdę finitystycznego systemu, który nazwiemy systemem pomocniczym. Przy pomocy tego systemu budujemy systemy semantyki elementarnej. Przy pomocy tych systemów możemy już zbudować nieskończony postęp systemów metamatematyki, z których każdy następny może być przedmiotem badania w systemie poprzednim.

Przystępujemy teraz do zbudowania pełnego systemu semantyki elementarnej. System ten podam naprzód bez żadnych objaśnień, gdyż w rzeczywistości zawiera on wszystko, co jest potrzebne do tego, żeby budować wyrażenia i twierdzenia. Niemniej mechaniczne budowanie wyrażeń i twierdzeń byłoby bardzo nieekonomiczne. Żeby otrzymać te właśnie wyrażenia i te twierdzenia, o które nam idzie, trzeba koniecznie orjentować się w budowie systemu. Orientacja ta potrzebna jest także do tego, żebyśmy mogli nabrać przekonania, że w systemie mamy rzeczywiście jedynie opis tych działań, które wykonujemy w semantyce intuicyjnej. Z tego powodu podam w paragrafie następnym analizę poszczególnych reguł i przerobię kilka przykładów.

System, jaki tutaj podaję, nie był dotąd ogłoszony drukiem. Jest to modyfikacja systemu opublikowanego wspólnie z pp. Hetperem i Herzbergiem,⁵ podyktowana nową koncepcją budowania wyrażeń semantycznych, oraz tendencją do wyeliminowania dwu gatunków liter zmiennych.

⁵ Por.: Chwistek, Hetper, Herzberg: *Fondements de la métamathématique rationelle*: Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres, Kraków 1933, p. 257.

Pragnę zaznaczyć, że ociężałość i pozorna nuda, jaka bije z reguł tego systemu, jest nieuchronną koniecznością, płynącą z jak najdalej posuniętego ograniczenia języka potocznego. Dzięki skrótom wprowadzonym w tabeli (2) formuły nie są zbyt rozwlekłe. W rzeczywistości system pomyślany jest w ten sposób, że mógłby być rozwinięty również bez użycia skrótów, oczywiście gdybyśmy mieli do dyspozycji maszynę do wyznaczania niezmiernie długich wyrażeń gwiazdkowych i do mechanicznego rozkładania ich na wyrażenia prostsze. W każdym razie trzeba zdawać sobie sprawę, że w gruncie rzeczy mamy tu do czynienia z wskazówkami do obsługiwaną takiej maszyny.

Myślę, że nawet taki czytelnik, który nie zechce zadać sobie trudu oswojenia się z użytą tu symboliką, stwierdzi z zajęciem niesłychane ubóstwo języka potocznego użytego w naszym systemie.

W przeciwieństwie do systemu Whiteheada i Russella, systemu Hilberta i mojego własnego systemu czystej teorii typów, mamy tu do czynienia z ograniczonym do minimum językiem potocznym. Język ten da się ująć w następujące schematy:

- I. E jest wyrażeniem
- II. E jest twierdzeniem
- III. Jeśli X , Y .

Tutaj E oznacza dowolne wyrażenie, X , Y oznaczają dowolne zdania typu I, II, III. Reguły rozumowania intuicyjnego sprowadzają się do reguły podstawiania i do reguły odrywania. Widzimy, że jakiegokolwiek podświadome posłużenie się sądami przeczącymi, albo sądami ogólnymi jest tu wykluczone. Widzimy, że logika intuicyjna, na której się opieramy, jest bez porównania uboższa od logiki Brouwera i t. p. Z punktu widzenia naszej logiki negacja jest operacją wyższego rzędu, która pojawia się dopiero w momencie, gdy odwołujemy się do języka symbolicznego. Ten stan rzeczy zgodny jest z teorią Dra Steinberga, według której bezpośrednio konstataowanie faktów nie jest nigdy przeczeniem. Początków tej teorii należy szukać u Sigwarta, który sądy przeczące uważał za sądy o sądach. Myślę, że jest ona godna uwagi, pozwala nam bowiem zrozumieć ten fakt, że twórczość myśli intuicyjnej sprowadza się do konstruowania przedmiotów konkretnych.

Pragnę tu jeszcze zaznaczyć, że wyższość metody opartej na

ograniczeniu języka potocznego w stosunku do metod pozostałych została podkreślona bardzo silnie w cytowanych wyżej książkach A. F. Bentley'a i Maxa Blacka.

System semantyki elementarnej.

a) System pomocniczy.

(1) Reguły konstrukcji.

1·1 c jest wyrażeniem.

1·2 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, $*EF$ jest wyrażeniem.

(2) Tabela skrótów.

Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, jeśli I jest wyrażeniem, jeśli K jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli M jest wyrażeniem

Nr	jest skrótem	wyrażenia	Nr	jest skrótem	wyrażenia
2·1	0_L	$*LL$	2·101	0	0_c
	1_L	$*0_L 0_L$		1	1_c
	2_L	$*1_L 1_L$		2	2_c
	3_L	$*2_L 2_L$		3	3_c
	4_L	$*3_L 3_L$		4	4_c
	5_L	$*4_L 4_L$		5	5_c
	6_L	$*5_L 5_L$ ⁶		6	6_c
2·2	α_L	$**1_L LL$	2·202	α	α_c
	β_L	$**2_L LL$		β	β_c
	γ_L	$**3_L LL$		γ	γ_c
	δ_L	$**4_L LL$		δ	δ_c
	η_L	$**5_L LL$		η	η_c
	θ_L	$**6_L LL$		θ	θ_c

Nr	jest skrótem	wyrażenia
2·3	$\Psi[M]LIEF$	$*E * F * M * L I$
2·31	$/_L EF$	$\Psi[0_L]0_L 0_L EF$
2·32	$\sim_L E$	$/_L EE$
2·33	$\supset_L EF$	$/_L E /_L FF$
2·34	$\vee_L EF$	$/_L /_L EE /_L FF$

⁶ Liczby wielocyfrowe ujmujemy w nawiasy okrągłe, pisząc np. (10) zamiast 10, (100) zamiast 100 i t. d.

Nr	jest skrótem	wyrażenia
2'35	$\Delta_L EF$	$/_L /_L EF /_L EF$
2'36	$\equiv_L EF$	$/_L /_L /_L EE /_L FF /_L EF$
2'37	$\Pi_L IF$	$\Psi[L] LI \sim_L F \sim_L F$
2'38	$\exists_L IF$	$\sim_L \Pi_L I \sim_L F$
2'301	$/ EF$	$/_c EF$
2'302	$\sim E$	$\sim_c E$
2'303	$\supset EF$	$\supset_c EF$
2'304	$\vee EF$	$\vee_c EF$
2'305	ΔEF	$\Delta_c EF$
2'306	$\equiv EF$	$\equiv_c EF$
2'307	ΠIF	$\Pi_c IF$
2'308	$\exists IF$	$\exists_c IF$
2'41	$(EFGH)[L]$	$****EFGH*1_L 0_L$
2'42	$= EF[L]$	$(E0_L 0_L F)[L]$
2'43	$\{EF\}[L]$	$\vee_L = F0_L[L] \sim (EF0_L E)[L]$
2'401	$(EFGH)$	$(EFGH)[c]$
2'402	$= EF$	$= EF[c]$
2'403	$\{EF\}$	$\{EF\}[c]$
2'5	$\exists E[L]$	$*E* L 0_L$
2'6	$\models E[L]$	$**L 0_L E$
2'71	Ax log $EFGH[L]$	$\supset_L /_L E /_L FG \supset_L /_L HF /_L EH$
2'72	Ax id $E[L]$	$= EE[L]$
2'73	Ax sem (1) $EFGH[L]$	$\supset_L \vee_L = E0_L[L] = H0_L[L]$ $\equiv_L (EFGH)[L] \vee_L \Delta_L = HE[L]$ $\sim_L = EF[L] \Delta_L = FE[L]$ $= HG[L]$
2'74	Ax sem (2) $EFGHIK[L]$	$\equiv_L (*EFGH*IK)[L] \vee_L \Delta_L$ $= H*IK[L] = G*EF[L] \Delta_L$ $\sim_L = G*EF[L] \Delta_L (EGHI)[L]$ $(FGHK)[L]$
2'75	Ax sem (3) $EF[L]$	$\sim_L = 0_L * EF[L]$
2'76	Ax sem $EFGHIK[L]$	Δ_L Ax sem (1) $EFGH[L] \Delta_L$ Ax sem (2) $EFGHIK[L]$ Ax sem (3) $EF[L]$
2'77	Ax log sem $EF[L]$	$\supset_L = EF[L] \supset_L EF$

(3) *Reguły dowodzenia.*

3·1 Aksjomaty.

- 3·11 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, $Ax \log EFGH[c]$ jest *twierdzeniem*.
- 3·12 Jeśli E jest wyrażeniem, $Ax \text{ id } E[c]$ jest *twierdzeniem*.
- 3·13 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, jeśli I jest wyrażeniem, jeśli K jest wyrażeniem, $Ax \text{ sem } EFGHIK[c]$ jest *twierdzeniem*.
- 3·14 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, $Ax \log \text{ sem } EF[c]$ jest *twierdzeniem*.

3·2 Reguła odrywania.

Jeśli E jest *twierdzeniem*, jeśli $\supset EF$ jest *twierdzeniem*, F jest *twierdzeniem*.

b) System właściwy.

(4) *Reguły konstrukcji.*

- 4·1 Jeśli L jest wyrażeniem, $\exists 0_L[L]$ jest *twierdzeniem*.
- 4·2 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli $(*EE1_L 0_L E)$ jest *twierdzeniem*, $\exists^{**}ELL[L]$ jest *twierdzeniem*.
- 4·3 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli M jest wyrażeniem, jeśli $\wedge (*EE1_L 0_L E) \wedge (*MM0_L LM) \sim \{F*L**EML\}$ jest *twierdzeniem*, $\exists *F*F*M*L**EML[L]$ jest *twierdzeniem*.
- 4·4 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, $*EF$ jest wyrażeniem.

(5) *Reguły dowodzenia.*

5·1 Aksjomaty.

- 5·11 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli

$$\wedge EE[L] \wedge EF[L] \wedge EG[L] \wedge EH[L]$$

jest *twierdzeniem*,

$$\models Ax \log EFGH[L] [L]$$

jest twierdzeniem.

5·12 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli $\models E[L]$ jest twierdzeniem,

$$\models Ax \text{ id } E[L] [L] \text{ jest twierdzeniem.}$$

5·13 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, jeśli I jest wyrażeniem, jeśli K jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli

$$\Delta \models E[L] \Delta \models F[L] \Delta \models G[L] \Delta \models H[L] \Delta \models I[L] \models K[L]$$

jest twierdzeniem,

$$\models Ax \text{ sem } EFGHIK[L] [L]$$

jest twierdzeniem.

5·14 Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli

$$\Delta \models E[L] \models F[L]$$

jest twierdzeniem,

$$\models Ax \log \text{ sem } EF[L] [L]$$

jest twierdzeniem.

5·15 Jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli H jest wyrażeniem, jeśli I jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli

$$\Delta (*II_1L 0_L I) \Delta \models F[L] \Delta \sim \{F * L ** IL L\} \\ \Delta \models G[L] \Delta \models H[L] (F ** IL L GH)$$

jest twierdzeniem,

$$\models \supset_L II_L ** IL L FH[L]$$

jest twierdzeniem.

5·2 Reguła odrywania.

Jeśli E jest wyrażeniem, jeśli F jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli $\models E[L]$ jest twierdzeniem, jeśli $\models \supset_L EF[L]$ jest twierdzeniem, $\models F[L]$ jest twierdzeniem.

5·3 Reguła uogólniania.

Jeśli F jest wyrażeniem, jeśli G jest wyrażeniem, jeśli I jest wyrażeniem, jeśli L jest wyrażeniem, jeśli

$$\Lambda (*II1_L 0_L I) \Lambda \sim \{F* L ** ILL\} \Lambda \sim \{G** ILL\} \\ \models \supset_L GF[L]$$

jest twierdzeniem,

$$\models \supset_L GII_L ** ILLF[L]$$

jest twierdzeniem.

3. Zaczynamy od analizy systemu pomocniczego. Wyrażenia tego systemu określone są regułami konstrukcji (1). Wyrażenia te są wyrażeniami *stałymi*. Zmiennych rzeczywistych ani pozornych system pomocniczy nie zawiera wcale. Skutkiem tego nie może być w tym systemie twierdzeń ogólnych. Litery $E, F, G, H, I, K, L, M, N$, przy pomocy których budujemy nasze reguły odgrywają rolę zmiennych rzeczywistych, nie należą jednak do systemu.

Każde wyrażenie systemu pomocniczego uważamy za sąd, naogół jednak nie możemy o wartości logicznej naszych sądów nic powiedzieć. Przedmiotem badania mogą być jedynie takie sądy jak $/EF$ (2'31) i $(EFGH)$ (2'41).

Pierwszy sąd jest znanym nam już symbolem Sheffera, drugi jest schematem podstawieniowym. Wszystkie sądy, którymi zajmujemy się w systemie pomocniczym, sprowadzają się do tych dwu typów.

Sądy z kwantyfikatorami (2'37, 2'38) nie posiadają w systemie pomocniczym określonego znaczenia.

Aksjomat $Ax \log EFGH[c]$ (3'11) jest to poprostu sylogizm Nicoda.

Aksjomatu logicznej identyczności nie przyjmujemy, gdyż możemy go otrzymać z aksjomatu identyczności semantycznej: $Ax \text{ id } E[c]$ (3'12) i z aksjomatu logiczno semantycznego:

$$Ax \log \text{ sem } EF[c] \text{ (3'14).}$$

W tym celu postępujemy w sposób następujący. Wyobraźmy sobie, że E jest wyrażeniem należącym do naszego systemu. W takim razie mamy twierdzenia:

$$= EE \quad (a)$$

$$\supset = EE \supset EE \quad (b),$$

które otrzymujemy biorąc nasze wyrażenie E za E i F w aksjomatach 3'12, 3'14.

Stosując do tych twierdzeń regułę odrywania, otrzymamy identyczność logiczną:

$$\supset E E.$$

Identyczność logiczna i sylogizm Nicoda pozwalają nam, jak wiemy, wyprowadzić cały rachunek logiczny. Trzeba jednak pamiętać, że w naszym wypadku każde twierdzenie musi być udowodnione osobno dla danych wyrażeń. W praktyce możemy postąpić w ten sposób, że przerobimy dowód dla liter E, F, G, H i t. d., a potem powtórzymy go, biorąc zamiast tych liter te wyrażenia stałe, o które nam idzie.

Aksjomat semantyczny 3·13 jest zlepkiem trzech aksjomatów, które zostały zbudowane przez p. Hetpera w ten sposób, żeby każde zagadnienie, odnoszące się do wyrażenia złożonego, mogło być sprowadzone do zagadnienia odnoszącego się do wyrażenia 0 tak, jak to miało miejsce w semantyce intuicyjnej.⁷

Żeby zorientować się w metodzie pracy przy pomocy aksjomatu 3·13, spróbujemy udowodnić twierdzenie:

$$(*0000*00).$$

Zaczynamy od tego, że w aksjomacie 3·13 podstawiamy 0 za wszystkie litery. Tak otrzymane twierdzenie rozbijamy przy pomocy rachunku logicznego na 3 następujące twierdzenia:

$$(a) \supset v = 00 = 00 \equiv (0000) \vee \wedge = 00 \sim = 00 \wedge = 00 = 00$$

$$(b) \equiv (*0000*00) \vee \wedge = 0*00 = 0*00$$

$$\wedge \sim = 0*00 \wedge (0000) (0000)$$

$$(d) \sim = 0*00.$$

Czytelnik, który zaznajomił się z podanymi wyżej rachunkami, zauważy bez trudu, że twierdzenie nasze wynika z twierdzeń (a), (b), (d).

Przykłady podane tutaj wystarczają do tego, żeby zrozumieć, że przy pomocy systemu pomocniczego możemy rozstrzygnąć każde zagadnienie, które potrafimy w tym systemie postawić, jest to więc system *zupełny*.

Aksjomat logiczno-semantyczny pozostaje w jaskrawej sprzeczności z nałogami idealistycznymi dawnej logiki, gdyż mówimy w nim równocześnie o właściwościach semantycznych i logicznych wyrażenia E . Ale właśnie o to chodzi, że właściwości lo-

⁷ Aksjomat 2·73 odpowiada regułom I, II, aksjomat 2·74 odpowiada regułom I', II', którymi posługiwaliśmy się w Rozdziale III.

giczne mogą odnosić się jedynie do wyrażeń, a nie do jakichś fikcyjnych przedmiotów, które wyrażenia te rzekomo oznaczają.

Przystępuję z kolei do analizy reguł systemu właściwego typu L .

Symbol $\Xi E[L]$ czytamy: E jest wyrażeniem właściwym typu L .

Reguła 4'1 stwierdza, że 0_L jest wyrażeniem typu L .

Reguła 4'2 pozwala nam stwierdzić, że wyrażenia takie jak $\alpha_L, \beta_L, \gamma_L, \delta_L, \eta_L, \theta_L$ i t. d. są wyrażeniami typu L . Wyrażenia te nazywać będziemy *literami semantycznymi*.

Żeby się przekonać, że α_L jest wyrażeniem typu L , wystarczy dowieść twierdzenia:

$$(*1_L 1_L 1_L 0_L 1_L).$$

Opierając się na tem twierdzeniu uzyskujemy na podstawie reguły 4'2 twierdzenie: $\Xi *1_L L L[L]$, które po zastosowaniu skrótu 2'2 przybiera kształt $\Xi \alpha_L[L]$.

Regułą 4'3 posługujemy się przy wprowadzaniu kwantyfikatorów. Z uwagi na analogję z symbolem Sheffera ograniczamy się w praktyce do wyrażeń F kształtu $^L G G$. Wyrażenie M jest w naszym systemie identyczne z L .

Zbudujmy np sąd $\Pi_L \alpha_L = \alpha_L \alpha_L[L]$, który orzeka, że wszystkie wyrażenia typu L są sobie równe. Dowodzimy naprzód, że α_L jest wyrażeniem typu L i że $*1_L 0_L$ jest różne od L . W ten sposób upewniamy się pośrednio, że α_L jest literą semantyczną. Z kolei dowodzimy, że $= \alpha_L \alpha_L[L]$ i $\sim = \alpha_L \alpha_L[L]$ są wyrażeniami typu L , konstruując je krok po kroku i korzystając z reguły 4'3. Teraz dopiero możemy przystąpić do zbudowania wyrażenia:

$$*_L \sim = \alpha_L \alpha_L[L] *_L \sim \alpha_L \alpha_L[L] *_L *L \alpha_L.$$

Reguła 4'3 orzeka, że mamy tu przed sobą wyrażenie typu L . Symbol $\Pi_L \alpha_L = \alpha_L \alpha_L[L]$ jest skrótem tego wyrażenia. Widzimy, że symbol ten przedstawia wyrażenie typu L .

W konstrukcji tego symbolu dokonaliśmy upozornienia litery semantycznej α_L przez wprowadzenie wyrażenia $*L \alpha_L$. Zważmy, że gdybyśmy zechcieli upozornić tę zmienną powtórnie, stosując wyżej przedstawioną operację do wyrażenia $\Pi_L \alpha_L = \alpha_L \alpha_L[L]$, to zadania tego nie moglibyśmy rozwiązać. Przyczyną tego stanu rzeczy jest to, że wyrażenie $\Pi_L \alpha_L = \alpha_L \alpha_L[L]$ zawiera $*L \alpha_L$, zatem nie wszystkie warunki postulowane przez regułę 4'3 są tu spełnione.

Pomysł tej metody zawdzięczamy panu Pepisowi. Widzimy, że dzięki niemu można było ograniczyć się do jednego rodzaju zmiennych, które możemy interpretować już to jako zmienne rzeczywiste, już to jako zmienne pozorne.

Zauważmy, że litery semantyczne są zbudowane w ten sposób, że nie możemy w systemie L ustalić żadnej indywidualnej ich właściwości. Tak np. twierdzenie systemu pomocniczego $\sim = 0_L a_L [c]$ nie ma odpowiednika w systemie L , gdyż sąd $\sim = 0_L a_L [L]$ jest nierozstrzygalny. Żeby się o tem przekonać napiszemy ten sąd w sposób następujący: $\sim = 0_L * 1_L L L [L]$. Otóż, żeby dowieść w systemie L prawdziwości tego sądu, trzeba by skorzystać z aksjomatu identyczności, biorąc w niem $* 1_L L$ za E , a L za F . Ale to jest niemożliwe, bo wyrażenie L nie jest wyrażeniem typu L . Dzięki tej okoliczności a_L jest rzeczywiście tem, co uważamy za literę zmienną.

Jest łatwo zrozumieć, że wyrażenia zawierające literę semantyczną nie mogą również być zbadane przy pomocy systemu L . W szczególności sąd $(F a_L E G) [L]$ nie może być żadną miarą rozstrzygnięty, bo do tego trzeba by koniecznie wiedzieć naprzód czy $= F a_L [L]$ czy też nie, a to pytanie nie może być rozstrzygnięte, dopóki nie wiemy, czy $= 0_L a_L [L]$, czy też nie.

W tych warunkach możemy sobie pozwolić na zaliczenie sądów kształtu $\Pi_L a_L F$ do wyrażeń typu L , jakkolwiek napozór powinny one być z tego typu wyłączone, z uwagi na to, że odnoszą się do *wszystkich* wyrażeń typu L .

Metoda ta uniemożliwia nam oczywiście ostre sformułowanie zagadnienia rozstrzygalności w granicach systemu L , ale zagadnienie to nie należy wcale do zakresu semantyki elementarnej. Zaznaczyć należy, że gdybyśmy chcieli nie dopuścić sądów podstawiania wyrażeń kwantyfikatorowych do nawiasu podstawieniowego, to trzeba by odwołać się do reguł bardziej skomplikowanych, takich, jakie podałem swego czasu.⁸ Uproszczenie, o którym mowa, wprowadziłem pod wpływem uwag krytycznych p. Hetpera.⁹

Jeśli zależy nam na tem, żeby uniknąć w budowie systemu wszelkich niedopowiedzeń, ograniczając równocześnie język co-

⁸ Por.: Neue Grundlagen der Logik u. Mathematik. Mathem. Zeitschrift, tom 30, r. 1929.

⁹ Por.: Neue Grundlagen der Logik u. Mathematik. Mathem. Zeitschrift, tom 34, r. 1932.

dzienny do minimum, to zmuszeni jesteśmy stwierdzić, że różnica między regułą dowodzenia a aksjomatem zaciera się do tego stopnia, że trzeba ustalić ją przy pomocy jakiejś nowej umowy. Aksjomaty są niewątpliwie regułami dowodzenia, bo dostarczają nam twierdzeń należących do systemu. Jeśli tak jest, że każdy poszczególny aksjomat dostarcza nam jednego tylko twierdzenia, to można to wziąć za podstawę do odróżnienia aksjomatów od reguł pozostałych. Z chwilą jednak, kiedy aksjomaty sformułowane są przy pomocy liter przedstawiających dowolne wyrażenia, skutkiem czego dostarczają nam nieskończenie wielu twierdzeń, trzeba szukać odróżnień sięgających głębiej. Tak właśnie jest w naszym wypadku. Coprawda, jeśli tak jest, to stało się to jedynie dlatego, żeby t. zw. reguła podstawienia mogła być wyeliminowana, ale tam, gdzie można pozbyć się jednej reguły bez rażącej komplikacji systemu, wszystkie inne względy stają się drugorzędne. Otóż, wprowadzając aksjomaty przy pomocy liter dodatkowych, musimy założyć, że litery te przedstawiają wyrażenia właściwe typu L , co nadaje naszym aksjomatom charakter hipotetyczny.

W tym wypadku różnica między aksjomatami a pozostałymi regułami dowodzenia sprowadza się do tego, że w pierwszym wypadku założenia nasze nie są zbudowane przy pomocy symbolu $\models E [L]$. Symbol ten czytamy: *E jest twierdzeniem systemu L* . W tych warunkach możemy powiedzieć, że aksjomaty orzekają, że pewne wyrażenia są twierdzeniami systemu L bez powołania się na to, że jakieś inne wyrażenia są twierdzeniami systemu L , podczas gdy pozostałe reguły nie spełniają tego warunku.

Metoda budowania reguł dowodzenia, jaką tutaj się posługuję, sprawiła, że t. zw. aksjomat dedukcji, który w dawniejszych moich pracach wprowadzany był przy pomocy odpowiednio skonstruowanej reguły uogólnienia, figuruje pomiędzy aksjomatami. Aksjomat ten orzeka, że *jeśli jakiś warunek jest spełniony przez wszystkie wyrażenia typu L , to jest też spełniony przez każde wyrażenie poszczególne*.

Skutkiem wymienionej modyfikacji, jak również skutkiem tego, że mamy jeden tylko gatunek zmiennych, reguła uogólniania przedstawia się w sposób bardzo prosty.

Na zakończenie tych uwag pokażę jeszcze, w jaki sposób możemy w systemie L udowodnić zwrotność i przechodniość identyczności. Ograniczę się do systemu właściwego typu c .

Zwróćmy uwagę na wyrażenie:

$$(=\lambda\lambda 00=\mu\lambda),$$

które możemy skrócić przy pomocy symbolu

$$==\lambda\lambda=\mu\lambda.$$

Odwołując się do definicji identyczności możemy napisać następujące twierdzenie:

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda(****\lambda 00\lambda*1000****\mu 00\lambda*10).$$

Dzięki aksjomatowi rozbitcia (2.74) uzyskujemy teraz naprzód twierdzenie

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda(***\lambda 00\lambda 00***\mu 00\lambda).$$

W dalszym ciągu, przez kolejne stosowanie aksjomatu rozbitcia, uzyskujemy twierdzenia:

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda(**\lambda 0000**\mu 00)$$

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda(*\lambda 000*\mu 0)$$

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda(\lambda 00\mu)$$

$$\equiv\equiv\equiv\lambda\lambda=\mu\lambda=\lambda\mu.$$

Stąd dostajemy twierdzenie:

$$\rangle=\lambda\mu==\lambda\lambda=\mu\lambda.$$

Stosując tu aksjomat logiczno-semantyczny, dostajemy:

$$\rangle=\lambda\mu\rangle=\lambda\lambda=\mu\lambda,$$

skąd już przez zwykłe operacje rachunku zdań wypada zasada zwrotności

$$\rangle=\lambda\mu=\mu\lambda.$$

Przechodniość uzyskujemy w zupełnie taki sam sposób, biorąc za punkt wyjścia sąd:

$$(=\lambda\nu 00=\mu\mu).$$

Sąd ten jest równoważny sądowi $\Delta=\lambda\mu=\nu\mu$; jeśli więc powołamy się na zasadę zwrotności, będziemy mogli napisać:

$$\rangle\Delta=\lambda\mu=\mu\nu==\lambda\nu=\mu\mu,$$

skąd, z uwagi na zasadę zwrotności i aksjomat logiczno-semantyczny 3, dostajemy

$$\rangle\Delta=\lambda\mu=\mu\nu\rangle=\mu\mu=\lambda\nu.$$

To ostatnie twierdzenie daje, po wykonaniu zwykłych operacji rachunku zdań zasadę przechodniości:

$$\supset \wedge \lambda \mu = \mu \nu = \lambda \nu.$$

Aksjomaty nasze nie zawierają zasady jednoznaczności podstawienia. Zasada ta byłaby następująca:

$$\supset \wedge (\lambda \xi \eta \mu) (\lambda \xi \eta \nu) = \mu \nu.$$

Z uwagi na tę okoliczność, że aksjomat rozbicia (2'74) zapewnia jednoznaczność podstawienia dla wszystkich wyrażeń stałych, moglibyśmy udowodnić jednoznaczność podstawiania dla każdego danego λ opierając się na następującym aksjomacie:

$$\nu = \alpha \ 0 \ \mathcal{A} \ x \ \mathcal{A} \ y = \alpha * x \ y.$$

Jest to napozór aksjomat istnienia, w rzeczywistości jednak mamy tu do czynienia jedynie z opisem stanu faktycznego. Dzięki temu, zgodnie z uwagą p. Melamida, możemy się go pozbyć przez zaznaczenie, że zajmujemy się takimi wyrażeniami, które czynią mu zadość. Wyrażenia takie nazwiemy *regularnymi*. Jest to oczywiście czysto formalna konwencja, bo wiemy, że innych wyrażeń być nie może.

Konstrukcja sądu E jest wyrażeniem regularnem (Reg E) jest następująca:

$$\Pi x \supset \nu = E x \{ E x \} \nu = x \ 0 \ \mathcal{A} \ y \ \mathcal{A} \ z \wedge = x * y \ z \wedge \{ y y \} \{ z z \}.$$

Konstrukcja taka podyktowana jest brakiem twierdzenia $\{ \alpha \alpha \}$, którego bez indukcji zupełnej dowieść nie możemy.

Jeśli teraz będziemy pisali krótko $((E F G H))$ zamiast $\wedge (E F G H)$ Reg H , będziemy mogli udowodnić bez trudności twierdzenie

$$\supset \wedge ((E \xi \eta \mu)) ((E \xi \eta \nu)) = \mu \nu$$

dla każdego zadanego zgóry wyrażenia E .

4. Przy pomocy systemu L możemy zbudować *metasystem semantyki racjonalnej*, posługując się wyłącznie językiem symbolicznym. Za podstawę naszych rozważań bierzemy system właściwy typu c .

Nie będziemy tutaj zapuszczali się w szczegółową konstrukcję symboliczną, ograniczając się do ogólnej charakterystyki metody, jaką należy się posługiwać.

Zobaczmy, w jaki sposób buduje się metasystem L . W tym wypadku L nie jest dowolnem wyrażeniem, ale liczbą całkowitą różną od 0, czyni więc zadość warunkowi

$$\wedge (*LL10L) \sim = L0.$$

Widzimy, że metasystemy L tworzą postęp.

Metasystem L różni się przede wszystkim tem od systemu L , że wyrażenia kwantyfikatorowe $\Pi_L IF$ nie są wyrażeniami właściwymi metasystemu L i nie mogą być wprowadzane do wnętrza nawiasu podstawieniowego. Z drugiej strony nie każde wyrażenie metasystemu L jest sądem tego systemu.

Opierając się na koncepcji sformułowanej swojego czasu przez p. Herzberga i posługując się przedziałami p. Hetpera, zmodyfikowanymi przez p. Pepisa, budujemy sąd systemu c , który skracamy przy pomocy symbolu $\text{Expr } E[L]$. Sąd ten orzeka, że $*W*KE$ jest zawarte w pewnem wyrażeniu F systemu c , które posiada tę właściwość, że każde wyrażenie I takie, że $*W*XI$ jest zawarte w F , jest albo 0_L , albo literą semantyczną typu L , albo też posiada kształt $*GH$, przyczem wyrażenia $*W*YG$, $*W*ZH$ są zawarte w F , a X jest zbudowane z dwu składników: Y i Z .

Widzimy, że warunek $\text{Expr } E[L]$ spełniają naprzód wszystkie *wyrażenia stałe metasystemu L* , t. j. takie wyrażenia, które możemy otrzymać, zaczynając od 0_L i budując następnie wyrażenia $*EF$ z otrzymanych poprzednio wyrażeń E, F . Nadto spełniają warunek $\text{Expr } E[L]$ *wyrażenia zmienne metasystemu L* , t. j. takie wyrażenia, które przechodzą w wyrażenia stałe metasystemu L , jeśli w nich na miejsce liter semantycznych wprowadzimy wyrażenia stałe metasystemu L .

Przy pomocy analogicznej metody budujemy sąd systemu c : $\text{Prop } E[L]$, który orzeka, że E jest sądem metasystemu L . Za sądy metasystemu L uważamy: 1° litery semantyczne, 2° wyrażenia metasystemu L objęte schematem $(EFGH)[L]$, gdzie E, F, G, H są wyrażeniami metasystemu L , 3° wyrażenia kształtu $/EF$ i $\Pi_L IF$, gdzie E, F są sądami metasystemu L , a I jest literą semantyczną zawartą w F , przyczem F nie zawiera wyrażenia $*LI$.

Jest łatwo zrozumieć, że wszystkie sądy metasystemu $*LL$ są wyrażeniami metasystemu L , ale nie wszystkie sądy metasystemu $*LL$ są wyrażeniami metasystemu $*LL$. Pochodzi to

stąd, że wyrażenia kwantyfikatorowe $\Pi_{*LL} IF$ spełniają warunek $\text{Expr } \Pi_{*LL} IF[L]$, ale nie spełniają warunku $\text{Expr } \Pi_{*LL} IF[*LL]$.

Jest jasne, że koncepcja podana tutaj jest najzupełniej zgodna z prymitywną intuicją.

Koncepcja ta pociąga konieczność pewnych zmian w budowie pojęcia twierdzenia metasystemu L . Idzie nam o wyrażenie systemu c , które skracamy przy pomocy symbolu $\vdash E[L]$, a które interpretować możemy przy pomocy zdania: *E jest twierdzeniem metasystemu L* .

Zaczynamy od aksjomatów systemu L , musimy jednak zamiast symbolu $\Xi E[L]$ używać jużto symbolu $\text{Expr } E[L]$, jużto symbolu $\text{Prop } E[L]$. W szczególności $\text{Ax log } EFGH[L]$ musi być przebudowany w ten sposób, żeby E, F, G, H były sędami metasystemu L . $\text{Ax log sem } EF[L]$ musi być przebudowany w ten sposób, żeby E, F były sędami i równocześnie wyrażeniami metasystemu L .

W aksjomacie dedukcji podstawiania wyrażenie G może być sędem lub wyrażeniem, ale wynik podstawiania H i wyrażenie F , w którym dokonujemy podstawiania, musi być sędem.

Pozostałe aksjomaty pozostają bez zmiany z tem tylko ograniczeniem, że zamiast symbolu $\Xi E[L]$ figuruje w nich symbol $\text{Expr } E[L]$. To samo odnosi się do reguły uogólnienia.

Reguły dowodzenia uzupełniamy regułą indukcji zupełnej, która w systemie L nie mogła być sformułowana.

Reguły tej moglibyśmy uniknąć, ograniczając się do wyrażen *metainduktywnych*, t. j. do takich wyrażen, o których możemy dowieść, że spełniają wszystkie warunki, którym czyni zadość 0_L , i którym czyni zadość wyrażenie $*EF$, jeśli czynią im zadość wyrażenia E, F . Takie ograniczenie jest jednak możliwe dopiero na wyższych piętrach hierarchji systemów matematycznych, skutkiem czego nie nadaje się do zbudowania elementarnej arytmetyki. Prócz tego teoria ta zmusza nas do ciągłego liczenia się z ewentualnością istnienia wyrażen, które nie są wyrażeniami metainduktywnymi. Z podobnem zagadnieniem mamy do czynienia w abstrakcyjnej logice, o ile opieramy się na *czystej teorii typów*, ale tam mamy do czynienia z indywiduami idealnymi, o których i tak nic pewnego powiedzieć nie można. Nadto aksjomat indukcji zupełnej posiada w logice charakter szczegółowy i byłby tam typowym *deus ex machina*. Inaczej przedstawia się sprawa w naszym wypadku. Tutaj indukcja

zupełna jest relacją między dwoma sędami metasystemu L , która pozwala nam uważać sąd drugi za twierdzenie tego systemu, jeśli to samo odnosi się do sądu pierwszego. Reguła uogólniania jest relacją analogiczną i nie jest bardziej ogólna od indukcji zupełnej.

Relacja ustanowiona przez indukcję zupełną pomiędzy sędami E, F może być sformułowana w systemie c w sposób następujący:

$$\mathcal{A} a \mathcal{A} \beta \mathcal{A} \gamma \mathcal{A} \delta \mathcal{A} \Theta \wedge \text{Prop } F[L] \wedge \text{Lit } a[L] \wedge \text{Lit } \beta[L] \wedge \{Fa\} \wedge \sim \{F * L a\} \\ \wedge (Fa 0_L \gamma) \wedge (Fa \beta \delta) \wedge (Fa * a \beta \Theta) = E \wedge \gamma \Pi L a \Pi L \beta \supset \wedge F \delta \Theta.$$

Tutaj $\text{Lit } E[L]$ jest skrótem sądu $\mathcal{A} \eta \wedge = E * * \eta L L (* \eta \eta 1_L 0_L \eta)$.

Przy pomocy symbolów klasowych możemy relację tę streścić w sposób następujący:

F jest sądem $f\{\lambda\}$ zawierającym literę semantyczną λ , która występuje w nim bez kwantyfikatora. Sąd E jest identyczny z sądem:

$$\wedge f\{0_L\} \Pi_L \lambda \Pi_L \mu \supset \wedge f\{\lambda\} f\{\mu\} f\{*\lambda\mu\}.$$

Reguła indukcji dostarcza nam szeregu ogólnych twierdzeń semantyki; w szczególności pozwala nam udowodnić wspomniane wyżej twierdzenie:

$$\vee_L = a_L 0_L [L] \mathcal{A}_L \beta_L \mathcal{A}_L \gamma_L = a_L * \beta_L \gamma_L [L].$$

Arytmetykę liczb całkowitych i wymiernych otrzymujemy w sposób prosty, posługując się metodą p. Hetpera.

Na tem kończy się rola metasystemu L .

Żeby uzyskać więcej musimy posunąć się na następne piętro w hierarchji systemów semantycznych.

5. Przystępujemy do budowy systemów złożonych $[LM]$. Zaczynamy od systemu $[LL]$. System $[LL]$ otrzymujemy z metasystemu L , wprowadzając litery semantyczne $**EIK$, w których E, I są liczbami całkowitymi niemniejszymi od L , a K jest liczbą całkowitą nie mniejszą od 1 a nie większą od L . W tych warunkach możemy korzystać z wyrażeń:

$$* \sim_L F * \sim_L F * I * K ** EIK.$$

Symbol $\Pi[IK]GF$ uważać będziemy za skrót wyrażenia:

$$* \sim_L F * \sim_L F * I * KG.$$

Wyrażenie to jest sądem systemu $[LL]$ jeśli G jest literą semantyczną $**EIK$ i jeśli F nie zawiera $*KG$. Czytamy je: *Wszystkie wyrażenia typu I spełniają warunek F*.

W tych warunkach aksjomat dedukcji musi być sformułowany w ten sposób, żeby za literę semantyczną $**EIK$ wolno było podstawić jedynie wyrażenia typu I. Ograniczenie to okaże się w dalszym ciągu bardzo użytecznym.

Żeby teraz zbudować system $[LM]$ musimy zwrócić uwagę na osobliwą rolę wyrażeń kształtu $\downarrow EF, (EFGH) [N]$. Wyrażenia typu N , które nie zawierają wyrażeń kształtu $\downarrow EF$ ani wyrażeń kształtu $(EFGH) [N]$, będziemy nazywali *wyrażeniami kwantyfikatorowymi* typu N . Odróżnienie to jest potrzebne z następującego powodu:

Zwróćmy uwagę na sądy:

$$= a_2 \beta_2 [1] \quad (a)$$

$$\Lambda_2 \beta_2 \mathcal{A} [22] a_2 = a_2 \beta_2 [2] \quad (b)$$

Obydwa sądy są wyrażeniami typu 1, ale sąd (b) jest sądem kwantyfikatorowym, podczas gdy sąd (a) tej właściwości nie posiada. Otóż, jest łatwo zrozumieć, że w sądzie (a) nie możemy żadną miarą uważać liter a_2, β_2 za zmienne, bo potrafimy rozłożyć je na wyrażenia składowe i udowodnić poprostu, że sąd (a) jest fałszywy. Inaczej przedstawia się sprawa w sądzie (b), gdzie rozłożenie liter $a_2 \beta_2$ z uwagi na znak [2] schematu podstawieniowego, wykonane być nie może. Tutaj musimy literę β_2 uważać za zmienną rzeczywistą, podczas gdy litera a_2 jest zmienną pozorną.

Zauważmy jeszcze, że w systemie $[0_N 0_N]$ dopuszczamy sądy kształtu $\downarrow EF$ także w tym wypadku, kiedy E, F są wyrażeniami typu N , a nie są wyrażeniami typu 0_N , ale czynimy to jedynie pod warunkiem, że E, F są wyrażeniami kwantyfikatorowymi.

Opierając się na tych pojęciach, możemy podać następujące reguły budowania systemu $[LM]$:

- a) Wyrażenia L, M są liczbami całkowitymi różnymi od 0. Liczba M jest większa od L .
- b) Wyrażenia systemu $[LM]$ są to wyrażenia systemu $[LL]$.
- c) Wszystkie sądy i wszystkie twierdzenia systemów $[NN]$

takich, że N jest liczbą całkowitą niemniejszą od L i nie-większą od M , są sędami, względnie twierdzeniami sy-stemu $[LM]$.

d) Jeśli wyrażenia E, F typu N są sędami systemu $[LM]$, i jeśli E, F są wyrażeniami kwantyfikatorowymi typu N , to $/EF$ jest sędem systemu $[LM]$.

^{*NN}
e) Jeśli F jest sędem systemu $[LM]$ i jeśli F jest wyraże-niem kwantyfikatorowym typu N , jeśli nadto F zawiera literę semantyczną $**EIP$, gdzie P nie jest liczbą mniej-szą od L , ani większą od 0_N , a nie zawiera wyrażenia $*P**EIP$, to $\Pi[IP]**EIPF$ jest sędem systemu $[LM]$.

Reguły dowodzenia formułujemy na podstawie reguł systemu $[LL]$, uwzględniając zmiany poczynione w budowie sądów.

Aparat pojęć systemu $[LM]$ pozwala nam zbudować pojęcie klasy.

Odpowiednikiem zdania:

Wyrażenie E typu N jest elementem klasy F typu P

jest następujący sąd systemu $[LM]$:

$$\begin{aligned} \Lambda_P \supset FFF[PP] \alpha_P \mathcal{A}[PP] \beta_P \mathcal{A}[PP] \gamma_P \Lambda_P &= \\ = F \Pi[N0_P] \alpha_P \beta_P [P] \Lambda_P (\beta_P \alpha_P E \gamma_P) [P] \gamma_P. \end{aligned}$$

Sąd ten skracamy przy pomocy symbolu

$$\in_{NP} EF.$$

Tak np. sąd $\in_{21} 0_2 \Pi[22] x_2 \{**0_2 0_2 0_2 x_2\} [2]$ orzeka, że 0_2 jest elementem klasy wyrażen typu 2, zawartych w wyrażeniu $**0_2 0_2 0_2$. Widzimy, że wykonanie działań prowadzi w tym wy-padku do sądu prawdziwego:

$$\Lambda_1 (\{**0_2 0_2 0_2 x_2\} [2] x_2 0_2 \{**0_2 0_2 0_2 0_2\} [2]) [1] \{**0_2 0_2 0_2 0_2\} [2].$$

Jest to sąd systemu $[12]$.

Analogiczną konstrukcję możemy przeprowadzić dla relacyj i to nie tylko dwuczłonowych, ale posiadających dowolną ilość członów. Z tego wynika, że konstrukcja takich pojęć fizyki teo-retycznej, jak tensory, matryce i t. p., będzie mogła być doko-nana w sposób niezmiernie prosty.

6. W systemie złożonym $[LM]$ możemy zbudować teorię liczb rzeczywistych i klasyczną teorię funkcji zmiennej rzeczy-wistej. Każdy system złożony, dostatecznie szeroki, może być

uważany za system matematyki klasycznej. Nadto system taki jest zarazem systemem *metamatematyki racjonalnej*, możemy bowiem przy jego pomocy badać dowolny system $[NP]$, byleby tylko liczba P była większa od L o liczbę dostatecznie dużą.

Zwróćmy uwagę na system $[1(10)]$. Żeby w systemie tym miał sens sąd $\in_{NP} EF$, musi być P conajmniej równe 1, widzimy więc, że F musi być wyrażeniem typu 1. Liczba N musi być conajmniej równa 2, z czego wynika, że liczby wymierne, które figurują jako elementy naszych liczb rzeczywistych, muszą mieć conajmniej typ 2.

Mamy więc liczby:

$$\begin{array}{l} 0_2, 1_2, 2_2, 3_2, \dots \\ 0_3, 1_3, 2_3, \dots \\ 0_4, 1_4, \dots \\ \dots \dots \dots \\ 0_9, 1_9, 2_9, \dots \\ 0_{(10)}, 1_{(10)}, 2_{(10)}, \dots \end{array}$$

Widzimy, że liczba n_m jest równa liczbie $(n-1)_{m+1}$. Pomiedzy wyrażeniami różnych typów istnieje bardzo prosty związek, który możemy nazwać *równością międzytypikalną*. Mówimy, że wyrażenie E typu N jest równe międzytypikalnie wyrażeniu F typu P , jeśli F jest wynikiem podstawienia P za N w E . Związek ten formułujemy przy pomocy wyrażenia, którego skrót jest $= EF[NP]$. Tak np. mamy: $= 2_2 2_4 [24]$, co bardzo łatwo sprawdzić. Rzeczywiście, 2_2 jest to wyrażenie $***22*22**22*22$, a 2_4 jest to wyrażenie: $***44*44**44*44$. Widzimy, że pierwsze wyrażenie przechodzi w drugie, jeśli w niem za 2 podstawimy 4. Podstawienie 2 za 4 w wyrażeniu drugim da nam wyrażenie pierwsze.

Liczby wymierne równe międzytypikalnie są od siebie różne arytmetycznie. Natomiast liczby rzeczywiste możemy uważać za arytmetycznie równe, jeśli równość międzytypikalna ustala pomiędzy ich elementami relację wzajemnie jednoznaczłą.

Oznaczmy teraz przez $x_{(10)2}$ literę semantyczną $*(100)(10)2$, a przez y_{22} literę semantyczną $*(101)22$. Wyobraźmy sobie, że $F(x_{(10)2})$ jest sądem należącym do systemu $[12]$. Przypuśćmy nadto, że $\Pi[(10)2]x_{(10)2}F(x_{(10)2})$ jest liczbą rzeczywistą. Widzimy, że liczba ta posiada typ 1. W tych warunkach klasa:

$$\Pi[22]y_{22}\mathcal{A}[(10)2]x_{(10)2}\Delta 2 = x_{(10)2}y_{22}[(10)2]F(x_{(10)2})$$

jest liczbą rzeczywistą równą arytmetycznie danej liczbie $II[(10)2]x_{(10)2}F(x_{(10)2})$. Ta nowa liczba jest również wyrażeniem typu 1, a elementy jej są wyrażeniami typu 2, podczas gdy elementy liczby danej posiadają typ (10). Będziemy mówili, że liczba dana posiada rząd 9, podczas gdy liczba nowa posiada rząd 1.

Ogólnie mówiąc, liczba rzeczywista $II[NP]EF$ posiada rząd $(N - P) + 1$. Widzimy, że arytmetykę liczb rzeczywistych możemy zawsze sprowadzić do badania liczb rzędu 1-go, a tem samym klasę liczb rzeczywistych rzędu 1-go, typu L , możemy w systemie $[LM]$ uważać za kontinuum. Jest to kontinuum niepełne, takie mniej więcej, jakie swojego czasu skonstruował prof. Weyl, różnica jednak polega na tem, że tego faktu nie możemy stwierdzić przy pomocy systemu $[LM]$, bo w tym systemie nie możemy badać klas typu niższego niż L . W szczególności nie mamy podstawy do twierdzenia w systemie $[LM]$, że kontinuum jest klasą przeliczalną. W systemie $[NM]$, w którym N jest liczbą mniejszą od L możemy dowieść, że kontinuum systemu $[LM]$ jest klasą przeliczalną, ale w tym systemie występują nowe liczby rzeczywiste, różne od wszystkich liczb systemu $[LM]$, dzięki konstrukcji cantorowskiej liczby na przekątni.

Ten stan rzeczy dowodzi, że zjawisko nieprzeliczalności posiada w naszych systemach swój odpowiednik, nie daje jednak podstawy do przekroczenia granic zdrowego rozsądku.

Nie mamy klas nieprzeliczalnych, posiadamy jednak *schematy klasowe*, które można nazwać nieprzeliczalnemi. Wyrażenie $II[NP]EF$, w którym P jest literą semantyczną, będziemy uważali za schemat klasowy, jeśli wyrażenie to posiada tę właściwość, z chwilą kiedy na miejsce P podstawimy jedną z liczb całkowitych N , zawartych między L i M , staje się sądem systemu $[LM]$. Otóż, schematy klasowe można podzielić na dwie kategorie. W jednych obniżenie liczby podstawionej na P pociąga przyrost elementów, w drugich ilość elementów pozostaje niezmienną. Schematy klasowe kategorii pierwszej możemy nazywać *nieprzeliczalnemi*.

Istotna treść naszej teorii sprowadza się do tego, że przyrastanie elementów w miarę obniżania znaku typikalnego schematu klasowego możemy uważać za charakterystyczną cechę nieprzeliczalności. Idea ta została po raz pierwszy sformułowana

przez Poincarégo, ale w sensie zupełnie odmiennym. Poincaré nie mógł przypuszczać, że kiedyś zjawisko przyrastania elementów, które odkrył, da się ująć w system pojęciowy równie ścisły, jak elementarny rachunek klas, i że dzięki temu schematy klasowe obejmą prócz klas przeliczalnych takie utwory, jak kontinuum.

Szczegółowa rekonstrukcja cantoryzmu na podstawie koncepcji przyrastania elementów wraz z obniżaniem znaku typikalnego nie jest jeszcze w tej chwili gotowa. Niemniej nie waham się twierdzić, że nie nastrocza ona żadnych istotnych trudności. Jestem pewny, że obejmie ona całą dzisiejszą teorię alefów wraz z jej najbardziej finezyjnymi twierdzeniami. Co więcej, liczę na to, że na tej drodze będzie można znaleźć rozwiązanie niepokojącego zagadnienia t. zw. hipotezy kontinuum. Jeśli stanie się to rzeczywiście, to wtedy metafizyka idealistyczna zostanie położona na obie łopatki. Rola jej sprowadzi się do oddziaływania twórczego na pewien typ umysłów. Pretensja jej do prymatu poznawczego zostanie unicestwiona raz na zawsze.

Zauważę jeszcze, że metoda nasza realizuje ważny postulat wysunięty przez Kaufmanna. Kaufmann, opierając się na badaniach Löwenheima i Skolema, stwierdził, że wszystko to, co jest w teorii klas poprawne i posiada sens ściśle określony, da się sprowadzić do badania klas indywiduów.¹⁰

Postulat ten był napozór kolosalnem ograniczeniem cantoryzmu. Widzimy, że jest on zrealizowany w naszym systemie, bo wszystko sprowadza się do wyrażen, które przecież są typowymi indywiduami. Niemniej nieuchronne ograniczenia podstawień dopuszczalnych w naszych wyrażeniach, które obalają cantoryzm w jego pierwotnej postaci, pozwoliły nam na taką rekonstrukcję tej doktryny, że nic godnego uwagi nie powinno być przekreślone.

Nie mamy naiwnej nieskończoności, ani naiwnej nieprzeliczalności, nie mamy naiwnej ciągłości czasu i przestrzeni. Sprawy te nie mogą być uchwycone przy pomocy środków naszego systemu. Natomiast system nasz pozwala nam uchwycić te wszystkie fakty, które dotychczas uważaliśmy za rezultat praw opartych na wymienionych idealistycznych koncepcjach. Jest pewne, że wszystko to wygląda bez porównania mniej efektownie,

¹⁰ Por. F. Kaufmann: *Das Unendliche in der Mathematik u. seine Ausschaltung*. Leipzig u. Wien 1930.

a umysł przepojony tradycją może ubolewać nad utratą czaru tkwiącego w starych koncepcjach. Jest z tem tak, jak z całą nowożytnością. Obala ona tajemniczy urok dawnych pojęć, ale na ich miejsce wprowadza nowe piękno, polegające na podwyższeniu tego, co było poniżone.

Jeśli raz zasmakujemy w tem nowem pięknie, nie będziemy napewno żałowali tego, co stracone jest na zawsze.

7. Opierając się na pojęciu systemu złożonego $[LM]$ możemy zbudować *system metamatematyki racjonalnej*, obejmujący nieskończenie wiele typów.

Jeśli L jest liczbą naturalną, możemy zbudować wyrażenie:

$$\mathcal{H} [LL] x_L \vdash E [L x_L],$$

które skracamy zapomocą symbolu:

$$\vdash [L] E.$$

Tutaj $\vdash E [LM]$ znaczy: *E jest twierdzeniem systemu złożonego $[LM]$* , podczas gdy $\vdash [L] E$ znaczy: *E jest twierdzeniem pewnego systemu złożonego $[LM]$* .

Różnica polega na tem, że w pierwszym wypadku M jest liczbą daną, w drugim wypadku jest M liczbą całkowitą, większą od L , której bliżej nie określamy.

Sąd $\vdash [L] E$ możemy interpretować słowami: *E jest twierdzeniem systemu metamatematyki racjonalnej*.

Jest jasne, że jeśli L jest mniejsze od M , to przy pomocy systemu $\vdash [L] E$ możemy badać system $\vdash [M] E$, trudno jednak przypuścić, żebyśmy mogli w tych warunkach rozwiązać te wszystkie zagadnienia, które mogą się nasunąć. W szczególności badania d-ra Gödela wskazują, że nie potrafimy przy pomocy systemu $\vdash [L] E$ udowodnić niesprzeczności systemu $\neg [M] E$. Do tego celu potrzebne jest wprowadzenie nowego systemu $\Vdash [L] E$, w którym obok starych aksjomatów będą figurowały jakieś aksjomaty nowe. Ten nowy system możemy nazwać *systemem uogólnionym*.

Badania tego rodzaju są w stadium początkowem i trudno przewidzieć, jakie będą ich wyniki. Tutaj ograniczę się do uwagi, że dowód niesprzeczności systemu $\vdash [M] E$ byłby trywjalny, gdybyśmy przyjęli w systemie uogólnionym aksjomat:

$$\Vdash [L] \supset_L \vdash [M] E E.$$

Aksjomat ten możemy nazwać *aksjomatem metamatematycznym*. Treść jego jest banalna. Idzie poprostu o to, że jeśli E jest twierdzeniem systemu $\vdash [M] E$, to E jest sądem prawdziwym.

Gdybyśmy przyjęli ten aksjomat, rezygnując tem samym z hilbertowskich badań nad niesprzecznością systemu $\vdash [M] E$, to wtedy moglibyśmy rozstrzygać wiele zajmujących zagadnień metamatematycznych, trudno jednak przewidzieć, czy i tak nie trzeba by odwołać się do jakichś aksjomatów dodatkowych. O tych sprawach nie mogę w tej chwili nic stanowczego powiedzieć. Jedno jest pewne, a mianowicie to, że badania takie nie wyprowadzą nas nigdy poza świat konkretnych wyrażeń i poza granice zdrowego rozsądku.

Pragnę tu jeszcze zwrócić uwagę na sprawę następującą. Prof. Wilkosz zbudował arytmetykę nieeuklidesową, zakładając, że sumy liczb przekraczających pewną granicę są różne od sum klasycznych. Jest jasne, że moglibyśmy postępując w sposób analogiczny zbudować semantykę nieeuklidesową. Trzeba jednak pamiętać, że semantyka ta nie byłaby teoretycznie równouprawniona z semantyką klasyczną, musiałaby bowiem zawierać aksjomat semantyczny, niekonstruowalny w systemie pomocniczym.

8. Nieskończony postęp pięter systemu metamatematyki racjonalnej pozwala nam na niezmierne uogólnienie zagadnienia rozstrzygalności funkcji zdaniowych. Wiadomo, że w elementarnym systemie rachunku zdań, mając daną funkcję zdaniową, możemy rozstrzygnąć, czy jest ona twierdzeniem tego systemu. Pod wpływem tego stanu rzeczy wytworzyło się zagadnienie, czy możemy zbudować system matematyki, w którym każde pytanie dające się sformułować byłoby rozstrzygalne. Pracując w zakresie czystej teorii typów, a więc w dziedzinie, w której z konieczności wiele spraw jest nierozstrzygalnych, odnosiłem się zawsze do wysiłków czynionych celem uzyskania pełnej rozstrzygalności matematyki z dużym sceptycyzmem. Radykalne potwierdzenie mojego stanowiska znalazłem w pracy *d-ra Gödela*, który udowodnił, że w żadnym systemie zawierającym klasy liczb naturalnych nie może być mowy o rozstrzygalności wszystkich zagadnień.¹¹ Rezultat *d-ra Gödela* został uzyskany z dużym wysiłkiem, przyczem musiała zostać stworzona *ad hoc*

¹¹ Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica etc., Monatshefte für Mathematik u. Physik 1931.

intuicyjna semantyka. Jest jasne, że sprawy tego rodzaju można badać z łatwością przy pomocy metamatematyki racjonalnej; przyczem 1^o nadajemy im charakter równie ścisły, jak każdemu zagadnieniu metamatematycznemu, 2^o rozważamy je odrazu z punktu widzenia nieskończonej hierarchji systemów uogólnionych.

Zobaczmy teraz, w jaki sposób przedstawia się w uogólnionym systemie zagadnienie rozstrzygalności.

Wyobraźmy sobie postęp liczb rzeczywistych typu 0_L i zbudujmy liczbę cantorowską C na przekątni tego postępu. Liczba C ma typ L , ale istnieje równa jej międzytypikalnie liczba C' , posiadająca typ 0_L , która musi należeć do danego postępu. Przypuśćmy, że liczba ta znajduje się w naszym postępie na miejscu n , i przypuśćmy jeszcze, że możemy dowieść, że liczba ta ma na miejscu n -tem cyfrę 0. W takim razie będziemy mogli dowieść, że liczba C ma na miejscu n -tem cyfrę 1. Jeśli jednak mogliśmy dowieść, że liczba C' ma na miejscu n -tem cyfrę 0, to, wykonując analogiczne rozumowanie, udowodnimy także, że liczba C ma na miejscu n -tem cyfrę 0. W ten sposób uzyskalibyśmy w systemie uogólnionym sprzeczność. Z tego wynika, że nie możemy rozstrzygnąć, w żadnym systemie metamatematycznym, jaką cyfrę posiada liczba C' na n -tem miejscu.

Nasuwa się pytanie, czy w każdym wypadku możemy przewidzieć, jakie twierdzenia mogą być otrzymane przy pomocy naszej maszyny. Pytanie to wiąże się ściśle z takimi twierdzeniami, jak twierdzenie Goldbacha i Fermata. Pierwsze z nich mówi, że każdą liczbę parzystą możemy przedstawić jako sumę dwu liczb pierwszych, t. j. takich, które nie dadzą się rozłożyć na czynniki. Drugie twierdzenie powiada, że równanie:

$$x^n + y^n = z^n,$$

gdzie n jest liczbą daną, większą od 2, nie da się rozwiązać w liczbach całkowitych.

Tutaj idzie poprostu o to, czy, biorąc pokolei liczby parzyste, będziemy mogli za każdym razem uzyskać rozkład na sumę liczb pierwszych, względnie o to, czy, biorąc pokolei trójki liczb całkowitych x, y, z , nie znajdziemy takiej, któraby zaprzeczyła twierdzeniu Fermata. Idzie o to, żeby przewidzieć, czy tak będzie, czy nie. Jest jasne, że mamy tu do czynienia z przewidywaniem na bardzo daleką metę. Wiemy, że w wielu wypadkach

przewidywanie takie jest możliwe. Byłoby ciekawe wiedzieć, czy jest to możliwe w naszych wypadkach.

Badania nad temi zagadnieniami prowadzą do analizy budowy twierdzeń arytmetycznych. Badania takie przeprowadzali: Skolem, Bernays, Ackermann, Gödel i i. Trudno przewidzieć, jaki będzie ich ostateczny wynik. W każdym razie musimy się liczyć z tem, że nie wszystkie wyniki, jakich dostarczyć nam może nasza maszyna, możemy zgóry przewidzieć. Ten stan rzeczy ma niezmiernie doniosłe znaczenie metodologiczne. Widzimy, że twierdzenie Fermata jest czemś najzupełniej zdeterminowanym. Wiemy napewno, że każda trójka liczb da nam wyniki, które albo będą z niem zgodne, albo mu będą przeczyły. Nie tu nie zależy ani od nas, ani od kogokolwiek innego. Niemniej musimy liczyć się z tem, że nie potrafimy przewidzieć, czy twierdzenie Fermata będzie zaprzeczone, czy też nie.

Z tego wynika, że tradycyjna koncepcja determinizmu jako doktryny o przewidywalności zdarzeń nie chwyta istoty rzeczy. Możemy nie wiedzieć, jaki będzie wynik czynności, a wiedzieć napewno, że jest w zupełności określona. Do sprawy tej powrócimy w dalszym ciągu.

Rozdział VII.

Podstawowe pojęcia analizy matematycznej.

1. Widzieliśmy, że początki arytmetyki toną w mroku metafizycznych majaczeń. Widzieliśmy również, że teoria klas zrodziła się z mętnego cantorowskiego idealizmu. To samo odnosi się do klasycznej analizy matematycznej. Możemy powiedzieć, że właśnie ci matematycy, którzy nie chcieli wyjść poza sferę ścisłych rozumowań, zatrzymali się u brzegu i nie dotarli do upragnionego celu. Natomiast ci właśnie, którzy nie wahali się zaufać swojej wizji rzeczywistości, odnieśli decydujące zwycięstwo.

Powiedziałem wyżej, że Greków nie możemy uważać za finitystów, choćby z tego powodu, że stworzyli geometrię euklidesową. Natomiast eleaci byli niewątpliwie finitystami i robili wszystko co mogli, żeby zahamować rozwój pojęć nieskończonościowych. Odnosi się to przede wszystkim do słynnego Zenona z Elei, któremu jedni przypisują niezwykłą głębię, a drudzy wyszydają go niemiłosiernie. Zobaczymy odrazu, że argumenty Zenona były z gruntu fałszywe i usprawiedliwić się dadzą jedynie panującym za jego czasów zamieszaniam pojęć.

Zenon chciał wykazać, że ruch jest niemożliwy. W tym celu wysunął następujące argumenty:

(1) Jeśli każda rzecz jest w ruchu lub w spoczynku w przestrzeni równej samej sobie i jeśli to, co porusza się, jest zawsze w danym momencie, strzała lecąca pozostaje w spoczynku.

Argument ten jest beznadziejnie mętny.

Według Russella (*Principles of Mathematics*, Cambridge 1903) i Bergsona (*Essai sur les données immédiates de la conscience*, Paris 1906) idzie tu o to, że podporządkowanie różnych punktów przestrzeni różnym momentom czasu nie chwyta zjawiska

zmiany, które narzuca nam się pod wpływem ruchu rzeczywistego.

Russell załatwia się z tym argumentem w ten sposób, że odrzuca pojęcie zmiany jako pozbawione jasnego sensu, natomiast Bergson uważa to pojęcie za podstawowe i właśnie dlatego odmawia głębszej wartości interpretacji ruchu przy pomocy analizy punktowej.

Otóż trzeba zaznaczyć, że analiza punktowa pozwala nam przypisać każdej punktochwili, t. zn. parze liczb charakteryzujących moment czasu i podporządkowany mu punkt przestrzeni, pewną liczbę zwaną szybkością, która w wypadku spoczynku jest równa 0. W tych warunkach możemy twierdzić, że przypisanie punktochwili szybkości jest wystarczającym zaznaczeniem tego faktu, że stan poruszającej się rzeczy ulega w danej punktochwili zmianie.

Trzeba tutaj dodać, że według zapatrywań współczesnych fizyków pojęcie szybkości w punkcie nie odpowiada rzeczywistości i nie posiada przyrodniczego znaczenia (por. E. Schrödinger: *Über Indeterminismus in der Physik*, Leipzig 1932). Jeśli jednak zechcemy stanąć na takim czysto wrażeniowym stanowisku, nie będziemy mogli przypisywać przyrodniczego znaczenia pojęciu punktochwili, ani też mówić o tem, że *przestrzeń jest równa samej sobie*. Cały ten aparat pojęć zaczerpnięty jest z geometrii i tam też tylko można zbudować pojęcie szybkości w punkcie. Poza tym terenem niema szybkości w punkcie, ale niema też podstawy do sformułowania argumentu Zenona.

(2) Ruch jest niemożliwy, bo to, co się porusza, zanim dosięgnie końca drogi, musi dosięgnąć jej środka.

Innemi słowami ma to znaczyć, że ruch jest niemożliwy, bo nie może się zacząć (por. Sleszyński l. c.).

W argumencie tym zdaje się leżeć na dnie założenie, że nie możemy mówić z sensem o momencie czasu, ale tylko o odcinku czasowym.

Otóż, rzeczywiście, niema najmniejszego odcinka czasowego, w którym ruch mógłby się zacząć, ale pod warunkiem, że dopuszczamy dzielenie odcinków czasowych w nieskończoność. Jeśli jednak uważamy, że operacja taka jest dozwolona, to stajemy na ściśle geometrycznym stanowisku, gdzie nie potrafimy uchylić się od konieczności przyjęcia momentów czasu jako odpowiedników punktów.

Z chwilą, kiedy przyjmiemy pojęcie momentu, odpowiedź na pytanie Zenona jest prosta. Ruch zaczyna się w momencie, gdy ciało znajduje się w początku drogi, przyczem w każdym momencie następnym już się w nim nie znajduje. Innymi słowami, ruch zaczyna się w najwcześniejszym momencie kresowym wszystkich odcinków czasu, w których ruch się odbywa.

Wbrew temu wyjaśnieniu pisze Sleszyński:

W argumentach Zenona tkwi fakt następujący: Nie istnieje punkt najbliższy do punktu danego. Tak samo nie istnieje moment czasu najbliższy do momentu danego. Ta okoliczność robi wszelką zmianę niezrozumiałą. Myślenie nasze składa się z aktów, które zajmują skończone przedziały czasu, niemniejsze od pewnej wielkości. Ilość ich jest więc dla każdego z nas skończona. Nie możemy więc objąć świadomością nieskończonej ilości chwil.¹

Trudno sobie wyobrazić argumentację bardziej mętną. Na-przód ruch obserwowany składać się musi właśnie z tylu elementów, ile jest aktów naszej myśli. Potem: nieskończonej ilości chwil nie możemy sobie wyobrazić, to jest pewna, ale to nie ma nic wspólnego z tem, że ilość aktów naszej myśli jest skończona, bo nikt nigdy nie przeliczył aktów swojej myśli i niema mowy o tem, żeby to ktoś kiedy uczynił.

Trudno twierdzić, że rozumiemy, co to jest ruch, ale niema powodu do mniemania, że rozumiemy to w mniejszym stopniu, niż np. pytanie: co to jest stół, lub: co to jest krowa? Natomiast argumenty Zenona są w znacznie wyższym stopniu niezrozumiałe, jeśli chce się je wziąć serjo. Idąc tą właśnie drogą popadł Bergson w rozpaczliwy zamęt metafizyki irracjonalnej.

(3) Warto jeszcze poświęcić słów parę słynnemu paradoksowi Achillesa i żółwia. Posłużę się sformułowaniem podanem przez Richarda.²

Achilles biegnie 10 razy szybciej niż żółw. Pierwotna odległość jest 1. Z chwilą kiedy Achilles zrobi drogę 1, odległość między nim a żółwiem będzie 0,1, bo taką drogę zrobi żółw. Kiedy Achilles przebiegnie ten odcinek, żółw zrobi drogę 0,01, zatem odległość Achillesa od żółwia będzie 0,01. W następnych momentach odległość Achillesa od żółwia będzie 0,001, 0,0001, 0,00001 i t. d., będzie więc coraz mniejsza, ale nigdy nie będzie 0.

¹ Sleszyński: O pierwszych stadiach rozwoju pojęć nieskończonościowych (Poradnik dla Samouków T. III), p. 57.

² Richard, l. c., p. 118.

Paradoks ten nazywa Richard ordynarnym i ma rację. Jeśli Achilles na przebycie drogi 1 potrzebował czasu t , to na przebycie następnego odcinka 0,1 potrzebuje czasu $0,1t$ i t. d. Zatem odległościom Achillesa od żółwia

1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001, 0,00001 i t. d.

odpowiadają na stoperze czasy:

$t, 1,1t, 1,11t, 1,111t, 1,1111t, 1,11111t$ i t. d.

Widzimy, że miary czasu nie mogą przekroczyć $\frac{1}{9}t$, że więc cały bieg nie tylko nie trwa nieskończenie długo, ale jest bardzo krótki. Nieskończenie długo trwałoby wyliczanie poszczególnych, coraz krótszych dystansów Achillesa i żółwia, ale z tego nie wynika nic zajmującego.

Jeśli spytamy się jaka będzie odległość między Achillesem a żółwiem, w momencie $\frac{1}{9}t$, odpowiedź musi opiewać: 0. Gdyby odległość w tym momencie była większa od 0 i wynosiła np. x , to moglibyśmy wyznaczyć na tyle dużą liczbę naturalną n , żeby 10^n była większa od $\frac{1}{x}$; w takim razie ułamek $\frac{1}{10^n}$ byłby mniejszy od x . Ale ułamek $\frac{1}{10^n}$ można napisać w postaci 0,00... 1, przyczem po kropce dziesiętnej następuje $n-1$ zer. Otóż odległości takiej odpowiada czas $1,11... 1$, przyczem po kropce dziesiętnej mamy n jedynek. Ale liczba ta jest napewno mniejsza niż $\frac{1}{9}$.

2. Widzimy, że podane tutaj wyjaśnienia sofizmu Zenona z Elei sprowadza się do wyznaczenia kresów danych postępów.

Mieliśmy tu do czynienia z następującymi postępami liczb:

1, 1,1, 1,11, 1,111, 1,1111 i t. d.

1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001 i t. d.

Górnym kresem pierwszego postępu jest liczba $\frac{1}{9}$. To znaczy, że wyrazy tego postępu są stale mniejsze od $\frac{1}{9}$ oraz że niema liczby dodatniej na tyle małej, żeby różnica między $\frac{1}{9}$ a pewnym wyrazem postępu nie była od niej mniejsza.

Dolnym kresem drugiego postępu jest 0. To znaczy, że wyrazy tego postępu są stale większe od 0 oraz że niema liczby dodatniej na tyle małej, żeby pewien wyraz postępu nie był od niej mniejszy.

Widzimy, że wyznaczanie kresów górnych i dolnych jest pewnem nowem działaniem matematycznym, nie gorszem od innych działań i naogół wcale nietrudnem.

Widzimy np. odrazu, że liczby naturalne nie posiadają kresu górnego, a kresem dolnym tych liczb jest 1, bo nie ma liczby dodatniej na tyle małej, żeby różnica pomiędzy pierwszym wyrazem naszego postępu (t. zn. liczbą 1) a liczbą 1 nie była od niej mniejsza.

Dalej widzimy, że t. zw. suma szeregu geometrycznego

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots, \text{ gdzie } 1 > q > 0,$$

która, jak wiemy, wynosi:

$$\frac{1}{1-q},$$

jest kresem górnym liczb: $1, 1 + q, 1 + q^2, \dots$

Pojęcie kresu jest bez porównania prostsze, niż pojęcie granicy, ale nie różni się od niego istotnie.

Kto zrozumiał, że wyznaczanie kresów jest pewnem działaniem matematycznym, zupełnie niezależnem od posuwania się w nieskończoność, i że może być dokonane na różne sposoby, choćby przy pomocy *zgadywania*, ten przewyciężył jedyną istotną trudność tkwiącą u podstaw analizy nieskończonościowej. Wszystko inne jest tylko rozbudowaniem tej podstawowej myśli.

Nauka o kresach kryje w sobie ciekawe niespodzianki. Tak np. szereg:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

nie posiada kresu górnego, t. zn. przekracza każdą liczbę naturalną, jeśli tylko weźmiemy dostateczną ilość wyrazów. Natomiast szereg

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

posiada kres górny, o czym można się przekonać bez zbyt wielkiej trudności.

Można przypuszczać, że te niespodzianki, związane z pojęciem kresu, utrudniały Grekom odnalezienie tego pojęcia. Z sposobów rozumowania, jakimi posługiwali się Grecy, mamy prawo wnosić, że działanie, które można wykonać w pewnych wypadkach, a w innych nie, nie odpowiadało ich smakowi.

Jest faktem, że Archimedes umiał wyznaczać kresy szeregów w poszczególnych wypadkach, ale nie zdobył się na zbudowanie

pojęcia kresu. Jest faktem, że wyznaczył górny kres szeregu geometrycznego i w ten sposób podał wzór na powierzchnię odcinka paraboli.³

Sleszyński pisze:

Widzimy więc, iż nauka grecka zdołała opanować nieskończoność, ale tylko, że tak powiem, w sposób niejawny. Potężny umysł Archimedes widział metodę ogólną, opartą w sposób jawny na nieskończoności, ale, mając doskonałe poczucie ścisłości naukowej, rozumiał, że metoda ta logicznie nie jest uzasadniona, że jest ona metodą heurystyczną, której wyniki i zastosowania muszą być na innej drodze sprawdzone.⁴

Czy było tak, czy inaczej, jest faktem, że nauka nowożytna musiała rachunek nieskończonościowy wynaleźć na swój sposób.⁴

Dzieło to zostało dokonane przy pomocy obrazów zgoła mętnych i niepewnych.

Sleszyński cytuje następujące słowa Keplera:⁵

Archimedes posługuje się dowodem niewprost, o którym są różne zdania. Mnie się zdaje, że sens jest taki. Obwód koła BG ma tyle części, ile punktów, t. j. nieskończoność; każda z nich można uważać za podstawę pewnego trójkąta równoramiennego o ramionach AB ,

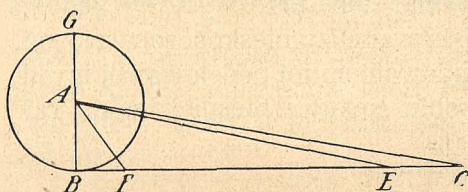


Fig. 6.

tak iż pole koła składa się z nieskończoności trójkątów schodzących się z wierzchołkami w środku koła. Wyprostujmy teraz obwód koła BG i niech BC równa się tej długości, a AB niech będzie prostopadłą do niej. Wyobraźmy sobie teraz wszystkie podstawy owych trójkątów, czyli sektorów, umieszczone z kolei na prostej BC . Niech jedną z takich podstaw będzie BF , jakkolwiek mała równa jej część niech będzie CE . Niech będą dalej połączone punkty F, E, C z A . Ponieważ trójkątów ABF, AEC jest tyle na prostej BC , ile sektorów w polu koła, i podstawy ich BF, EC równe są podstawom tamtych, a wysokością wszystkich wspólną jest BA , ta sama, co u sektorów, to trójkąty EAC, BAF będą równe między sobą i każdy równa się jednemu sektorowi, więc wszystkie trójkąty mające podstawy na linii BC , t. j. trójkąt BAC z nich wszystkich złożony będzie się równał wszystkiemu sektorowi koła, t. j. polu koła, z nich wszystkich złożonemu. Tyle znaczy *reductio ad absurdum* archimedesowa.

³ Por.: Sleszyński, l. c., p. 65.

⁴ L. c., p. 66.

⁵ L. c., p. 67.

Mamy tu przykład błędnego rozumowania prowadzącego do poprawnego wyniku. Dość powiedzieć, że Kepler mówi o trójkątach o nieskończonej małej podstawie i liczy je tak, jakgdyby miał do czynienia z ilością skończoną. O paradoksy nieskończoności nie dba. Mimo to uzyskuje wynik poprawny i staje się wielkim pionierem nowej matematyki.

Fakt ten można wytłumaczyć w sposób następujący: Kepler odwołuje się wprawdzie do pojęć niejasnych, ale posługuje się nimi w ciasnych granicach, nie wychodząc poza sferę, w której one funkcjonują poprawnie. Prostu postępuje tak właśnie, jak postępować należy, dopóki pojęcia nie dadzą się ująć w formuły. Czytelnik zauważy z łatwością, że tą metodą posługiwaliśmy się w rozdziałach poświęconych zagadnieniom filozoficznym.

Śladami Keplera poszli Cavalieri, Wallis, Pascal, Gregorius a Sancto Vincentio, Fermat, Barrow i inni. Cytuję na podstawie Sleszyńskiego.

Właściwym twórcą rachunku nieskończonościowego jest niewątpliwie Newton.

Leibnizowi zawdzięczamy wprowadzenie dogodnej symboliki, które zadecydowało o jego dalszym rozwoju.

3. Z odkryciem rachunku nieskończonościowego łączy się osobliwa historia, która budzić musi niepokojące wątpliwości.

Rachunek całkowity odkrył Isaac Newton w r. 1666. Wyniki swoje zestawił w pracy p. t. *Analysis per aequationes*, której jednak nie ogłosił drukiem. W r. 1673 bawił w Londynie Leibniz, gdzie zakupił książkę Barrowa, ucznia Newtona i jego współpracownika, p. t. *Lectiones tum opticae tum geometricae*, na polecenie Oldenburga, z którym nawiązał bardzo przyjazne stosunki. Zaraz po powrocie zabrał się Leibniz do studiów nad rachunkiem całkowitym. W r. 1675 wynalazł znak całki $\int y dx$. Ten rezultat napozór czysto formalny, był w rzeczywistości decydującym momentem w rozwoju rachunku nieskończonościowego. W r. 1684 ogłosił Leibniz wyniki swoich badań, nie powołał się jednak ani na Newtona, ani na Barrowa, co wywołało niesłychane oburzenie w Londynie. Leibniz wymawiał się, że o pracy Newtona nic nie wiedział, a z Barrowa nie korzystał. Niemniej posługiwał się literami e , a , używanymi przez Barrowa dla oznaczenia przyrostów nieskończonej małych, a prócz tego posłużył

się wyrażeniem *momentum*, stworzonym przez Newtona, jakkolwiek w innym znaczeniu. Nadto jest pewne, że czytał książkę Barrowa, bo zachował się egzemplarz z jego dopiskami. Moritz Cantor chciałby narzucić nam przekonanie, że notatki były robione później, bo nie chce przypuścić, żeby Leibniz kłamał. Zobaczymy jednak, że typ psychiczny Leibniza upoważnia nas do tego przypuszczenia. Moritz Cantor chce za wszelką cenę oczyścić Leibniza z zarzutu plagiatu i w tym celu dokonuje istnych sztuczek dialektycznych.

Chcąc wykazać, że Leibniz nie poznał w Londynie Collinsa, który znał wyniki Newtona, powołuje się Cantor na list Oldenburga do Leibniza, w którym tenże donosi mu, że jego pracę oddał Collinsowi.

To — pisze Cantor — musiałby Leibniz wiedzieć od Collinsa, o ile z nim się zetknął, a zetknięcie ich obu bez wiedzy Oldenburga nie da się zgoda pomyśleć wobec ścisłych stosunków członków londyńskiego towarzystwa.⁶

Wszystko to pięknie, ale Oldenburg mógł nawet wiedzieć o spotkaniu się Leibniza z Collinsem i mógł wiedzieć, że Collins zawiadomił Leibniza o otrzymaniu skryptu, a i tak mógł uważać za stosowne donieść o tem Collinsowi. Zresztą, w ówczesnych stosunkach nie było trudno osiąść tajemnicę Collinsa nawet bez poznania go, jeśli się było zręcznym dyplomata, a do tych Leibniz niewątpliwie należał.

Dla mnie jest decydujące, że Leibniz zabrał się do rachunku nieskończonościowego pod wrażeniem pobytu w Anglii, i to, że nie przyznał się do znajomości podręcznika Barrowa.

Skutkiem tego nie przekonują mnie argumenty Cantora i dziwię się, że Sleszyński uznał je za decydujące.⁷ Natomiast przekonuje mnie następujący argument Dühringa:

Pozatem nie należy przeoczyć tego, że newtonowska metoda fluksyj powstała w służbie wielkiego przyrodniczego celu w sposób dla znawcy bardzo naturalny i łatwo zrozumiały, podczas gdy metoda różniczkowa Leibniza okazuje się z tego punktu widzenia zupełnie nieumotywowana, i pozostała też w rękach rzekomego odkrywcy bez odpowiednich zastosowań do systemu Przyrody.⁸

⁶ M. Cantor: Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik, Leipzig 1898, T. III, p. 28.

⁷ L. c., p. 53—54.

⁸ Por. E. Dühring: Kritische Geschichte der Philosophie. Berlin 1869, p. 331.

Cały ten spór należy zresztą uważać za zgoła jałowy. Jeśli zgodzimy się na to, że Leibniz chciał w sposób nieuczciwy odebrać Newtonowi jego wynalazek, to z tego wynika jedynie, że nie był człowiekiem wielkiej miary. Ale wniosek ten nie jest bynajmniej nowością. Leibniz był dworakiem schlebającym możnym panom, a wśród takich ludzi trudno szukać bohaterów. Można jednak być pozbawionym charakteru, a być równocześnie genialnym. Leibniz chciał odebrać Newtonowi jego wynalazek, ale udoskonalił go do tego stopnia, że, jak to już powiedziałem powyżej, zdecydował o jego losie.

Bertrand Russell pisze:

Anglicy z pobudek patriotycznych uznawali metody matematyczne podane przez Newtona, aczkolwiek były one gorsze, aniżeli metody podane przez Leibniza, co spowodowało, że po śmierci Newtona, w ciągu całego wieku, matematyka w Anglii była prawie całkowicie w zaniedbaniu.⁹

4. Żeby zrozumieć istotę rachunku nieskończonościowego, nie potrzeba wcale znajomości pojęcia granicy, na którym rachunek ten się opiera. Wystarczy najzupełniej pojęcie *kresu*. Pojęcie to pozwala nam zdefiniować szybkość punktu w danym momencie we wszystkich elementarnych przypadkach zmiennego ruchu. Jak wiadomo, szybkość jest to stosunek drogi do czasu potrzebnego na jej przebycie, możemy więc mówić o szybkościach w okresach czasu bardzo krótkich, ale niema sensu mówić o szybkości punktu w danym momencie. Jeśli jednak ruch jest taki, że szybkość stale wzrasta wraz z czasem, lub stale maleje, to przez szybkość w momencie danym możemy rozumieć kres wszystkich szybkości w okresach od tego momentu do jakiegoś momentu następnego.

Wyobraźmy sobie punkt swobodnie spadający. W takim razie związek pomiędzy czasem spadania t , a poziomem x jest: $x = -5t^2 + c$, gdzie c jest poziomem punktu w momencie 0, -10 wartością przyspieszenia (podaną okrągło). Równanie to prowadzi do wy-

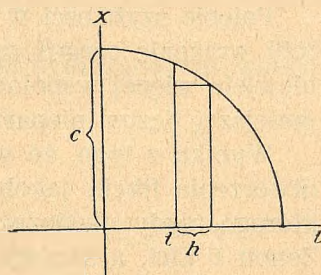


Fig. 7.

⁹ B. Russell: Poglądy i widoki nauki współczesnej, przeł. Krassowski. Wydawnictwo Przeworskiego.

kresu przedstawiającego parabolę, przecinającą oś x -ów na poziomie c , oś t -ów w punkcie odpowiadającym momentowi $\sqrt{\frac{c}{5}}$.

Zwróćmy teraz uwagę na moment t i na moment następny $t + h$. Momentom tym odpowiadają poziomy: $-5t^2 + c$ i $-5(t + h)^2 + c$. Długość drogi odbytej przez punkt w okresie h jest różnicą tych poziomów, wziętą z znakiem przeciwnym, jest to więc liczba $10t \cdot h + 5h^2$. Stosunek tej długości do czasu h wzięty z znakiem $-$, jest średnią szybkością punktu w okresie od momentu t do momentu $t + h$. Szybkość ta wynosi $-(10t + 5h)$ i zależy, jak widzimy, od długości okresu h , przyczem jej wartość bezwzględna jest tem mniejsza, im mniejszy jest okres h . Oczywiście formuła ta nie stosuje się do szybkości w momencie t , bo tam wcale nie może być mowy o jakimś okresie, ale możemy powiedzieć, że *szybkość w momencie t jest to kres górny szybkości średnich, liczonych od momentu t do momentu $t + h$* . Kres ten wynosi $-10t$. Mówimy, że szybkość punktu w momencie t jest $-10t$.

Zauważmy jeszcze, że zamiast przyrostu dodatniego h moglibyśmy wziąć przyrost ujemny. Wtedy możnaby przeprowadzić rozumowanie analogiczne z tą różnicą, że na końcu zamiast kresu górnego szybkości średnich należałoby wziąć kres dolny. Wynik byłby również $-10t$.

Widzimy, że cały dowcip polega na tem, że teraz możemy mówić o szybkości punktu, mając podany określony moment.

Tak więc w momentach 0, 1, 2, 3... sekund ma nasz punkt szybkości: 0, -10 , -20 , -30 ... metrów na sekundę. Natomiast odwoływanie się do szybkości średniej, obliczanej w pewnym okresie czasu, staje się zupełnie zbyteczne.

Pojęcie szybkości w punkcie nie jest wcale skomplikowane, robi wrażenie czegoś zupełnie naturalnego, a co ważniejsza, ma niewiele więcej wspólnego z nieskończonością, jak pojęcie najmniejszej liczby nieparzystej albo doskonałej.

Wynika z tego, że właściwie nie było żadnego powodu do utworzenia fikcji, jakoby chodziło tu o jakiś ciąg przybliżeń, którego nigdy ukończyć nie można. Prostu wszystko popsuł Zenon z Elei, a sugestia jego zaciążyła nawet na tych, którzy stworzyli rachunek nieskończonościowy.

Dopóki mamy do czynienia z ruchem tego rodzaju, że szybkość średnia liczona od momentu badanego do jakiejś chwili następnej wzrasta stale lub stale maleje przynajmniej przez bar-

dzo krótką chwilę, i jeśli to samo odnosi się do szybkości średnich liczonych do momentu badanego od jakiejś chwili poprzedniej, to pojęcie kresu wystarcza najzupełniej do obliczenia szybkości. Trzeba dodać, że z innymi ruchami można spotkać się tylko w wypadkach dalekich od zagadnień elementarnych i wtedy dopiero okazuje się potrzebne pojęcie *granicy*. Pojęcie to nie jest wcale trudne, niemniej konstrukcja tradycyjna wymaga pewnej wprawy w liczeniu nierównościami. W dalszym ciągu podam łatwą konstrukcję tego pojęcia. Zaznaczę przy tej sposobności, że wykłady rachunku nieskończonościowego zaczyna się zawsze od pojęcia granicy, przyczem pojęcie kresu spycha się na plan dalszy. Jest to zupełnie niepotrzebna komplikacja przedmiotu.

Pierwsze próby ścisłego sformułowania pojęcia granicy przedsięwziął d'Alembert.

Zupełnie ścisłą definicję tego pojęcia podał dopiero Cauchy w pierwszej połowie XIX stulecia.

Newton i Leibniz definjowali szybkość w punkcie jako stosunek nieskończenie małego przyrostu drogi do nieskończenie małego przyrostu czasu. Przyrosty te oznaczał Leibniz symbolami dx , dt , szybkość w punkcie stanowił więc stosunek $\frac{dx}{dt}$.

Rachunek wyglądał mniej więcej w sposób następujący: Przyrost drogi dx była to różnica poziomów, odpowiadająca przyrostowi czasu dt , zatem w momencie t było:

$$dx = -(10t + 5dt) dt.$$

Stosunek $\frac{dx}{dt}$ spełniał zatem równość:

$$\frac{dx}{dt} = -(10t + 5dt).$$

Przyrost nieskończenie mały $5dt$ można było zaniedbać wobec liczby skończonej $10t$, co dawało:

$$\frac{dx}{dt} = -10t.$$

Mówimy, że symbol $\frac{dx}{dt}$ przedstawia *pochodną funkcji x ze względu na zmienną t* .

Ten sposób pisania zachował się do dziś dnia. I dzisiaj mówimy, że szybkość w momencie t jest $\frac{dx}{dt}$ i że $\frac{dx}{dt} = -10t$, tylko obecnie nie jest to dla nas stosunek dwu przyrostów,

tylko poprostu kres górny liczb, jakie możemy otrzymać z wyrażenia $-(10t + 5h)$, biorąc na h dowolne liczby dodatnie.

Widzimy, że pojęcie przyrostów nieskończenie małych nie było wcale nieodzowne.

5. Określenia pojęcia funkcji zmiennej rzeczywistej podawane w podręcznikach klasycznych budzą poważne wątpliwości. W *Kursie analizy* Goursata czytamy co następuje:

Kiedy dwie wielkości zmienne są związane z sobą w ten sposób, że wartość jednej zależy od wartości drugiej, mówi się, że jedna jest funkcją drugiej.¹⁰

Czytelnik może myśleć, że idzie tu o jakieś wielkości konkretne, takie np., jak chwila i liczba, którą wyrzucę w owej chwili, grając w kości, albo np. ta liczba, którą właśnie pomyślałem. Rzeczywiście, wielkości te są z sobą związane w ten sposób, że wartość jednej jest zależna od drugiej.

Jest faktem, że przykłady tego rodzaju bywają często przytaczane celem objaśnienia pojęcia funkcji. Rezultat jest ten, że pojęcie to zostaje radykalnie zaciemnione.

Bez porównania poprawniejsza definicja znajduje się w *Wstępie do teoryj funkcyj jednej zmiennej* J. Tannery'ego.

Czytamy tam, że:

Funkcja y od x jest określona w przedziale (a, b) , jeśli każdej wartości na x , należącej do tego przedziału, odpowiada wartość określona na y .¹¹

Niemniej i ta definicja pozostawia wiele do życzenia. Nie wiemy, co to jest *wartość na x* , lub *na y* , bo x , y są to litery, które nie mają żadnej cechy, którąby można nazwać wartością, i nie wiemy, co to znaczy *odpowiada*.

Dowiadujemy się tych rzeczy dopiero po rozpatrzeniu przykładów. Jeśli np. powiedzą nam, że funkcja litery x jest określona w przedziale (a, b) , o ile dowolnej liczbie wymiernej, należącej do tego przedziału, odpowiada wartość 0, a dowolnej wartości niewymiernej wartość 1, to zaczynamy orjentować się w całej sprawie. Jeśli nam powiedzą, że $\sin x$ jest funkcją zmiennej x , bo każdej *wartości na x* odpowiada pewna *wartość*

¹⁰ E. Goursat: Cours d'analyse mathématique. Paris 1902. T. I, p. 2.

¹¹ J. Tannery: Introduction à la théorie des fonctions d'une variable. Paris 1886, p. 99.

na $\sin x$, to sprawa staje się o wiele jaśniejszą, aż wreszcie, kiedy przekonamy się, że każde wyrażenie, które umiemy zbudować przy pomocy znaków danego systemu i które zawiera jakąś literę zmienną, jest funkcją tej litery, przychodzimy do przekonania, że wiemy, co to jest funkcja.

Ale wtedy nasuwa nam się następujące pytanie:

Dlaczego autor nie powiedział poprostu, że każde wyrażenie, które możemy zbudować przy pomocy znaków matematycznych, zawierające literę x , jest funkcją litery x w przedziale (a, b) , jeśli wyrażenie to obróci się w liczbę z chwilą, kiedy na miejsce x podstawimy dowolną liczbę większą od a , a mniejszą od b ?

Czyż nie lepiej jest powiedzieć poprostu, że x jest literą i niczem więcej i że nie idzie tu o jakąś odpowiedniość metafizyczną, ale o tę odpowiedniość, jaka zachodzi pomiędzy pewnym wyrażeniem zawierającym literę x a tem wyrażeniem, które z niego otrzymamy, podstawiając za x pewną liczbę?

Z chwilą, kiedy posłużyliśmy się raz wyrażeniem $(x + 1)$, stworzyliśmy tem samem pojęcie funkcji matematycznej. Jest wielkim błędem dydaktyki dawniejszej, a poczęści i dzisiejszej, (ostatnie nasze programy szkolne wykazują pod tym względem stanowczy postęp), że nie uwzględnia tego faktu od pierwszego momentu nauki elementarnej. Wynik tego przeoczenia jest ten, że uczeń wyobraża sobie, jakoby litery i wyrażenia z nich zbudowane stanowiły jakiś nowy gatunek liczb (ogólnych), i później musi walczyć z przesądem, powstałym w ten sposób, z wielkim wysiłkiem i bardzo często bez skutku. Trzeba wyraźnie powiedzieć, że $(x + 1)$ nie jest wcale nową liczbą, ale wyrażeniem, które obraca się w liczbę wtedy i tylko wtedy, kiedy za x podstawimy liczbę. Znaczy to, że wyrażenie nasze zamieni się w liczbę dopiero wtedy, jeśli w niem na miejsce litery x *podstawimy* jakąś liczbę.

Należy zauważyć, że funkcja $(x + 1)$ jest określona w wszystkich możliwych przedziałach, bo za x możemy podstawić dowolną liczbę. Funkcja $\sqrt{x + 1}$ określona jest warunkiem $x \geq -1$, a więc w wszystkich przedziałach (a, b) , których dolny kres a spełnia warunek $a > -1$.

Będziemy mówili, że warunki, które spełniać musi liczba, byśmy ją mogli podstawić za x w danej funkcji, wyznaczają zakres tej funkcji.

Wróćmy do pytania, dlaczego matematycy klasyczni nie mó-

wią poprostu, że funkcje są wyrażeniami. Pochodzi to stąd, że nie posiadają środków konstrukcji dostatecznie rozwiniętych. Środki te nie wystarczają nawet do zbudowania tak prostej funkcji jak ta, której wartość w punkcie 0 jest 0, a w wszystkich punktach pozostałych 1.

Funkcje takie możemy opisać w teorii relacyj, ale i tam nie możemy ich zbudować. Inaczej przedstawia się sprawa w naszym wypadku. Żeby się o tem przekonać, zbudujemy funkcję dopiero co wspomnianą. W konstrukcji, którą tu podaję, pomijam znaki typikalne, gdyż tam, gdzie nieporozumienie jest wykluczone, posługiwanie się niemi byłoby pedanterją.

Zaczynamy od sądów $\text{Real } E, \underset{A}{=} E 1, \underset{Cl}{=} F \Delta$, których budowa nie przedstawia żadnej trudności.

Pierwszy sąd czytamy: *E jest liczbą rzeczywistą*. Następne sądy możemy czytać kolejno: *E jest liczbą wymierną równą arytmetycznie liczbie 1*, *F jest klasą pustą*. Przy pomocy tych sądów budujemy sąd:

$$\Delta \text{ Real } E \Delta \underset{Cl}{\sim} \underset{A}{=} E \Delta \underset{A}{=} F 1,$$

który skracamy przy pomocy symbolu $\Phi(EF)$.

W tych warunkach wyrażenie $\Pi y \Phi(xy)$ jest szukaną funkcją. Jest to klasa liczb wymiernych równych 1 pod warunkiem, że liczba rzeczywista x nie jest klasą pustą, a tem samem jest różna od 0. W wypadku kiedy x jest zerem, klasa nasza jest klasą pustą, jest więc równa 0.¹²

Zwróć tu uwagę na sprawę znaną oddawna, ale dotychczas niezauważoną i dającą się we znaki studentom matematyki. W matematyce klasycznej nie odróżnia się wyraźnie związków pomiędzy funkcjami, od związków pomiędzy ich wartościami.

W podręcznikach analizy mówi się często o funkcji $y=f(x)$, zamiast mówić poprostu o funkcji $f(x)$. Trudno wyobrazić sobie bardziej dwuznaczny język. Naprzód $y=f(x)$ jest równaniem, względnie funkcją zdaniową, ale w żadnym wypadku nie jest to funkcja matematyczna. Potem, kiedy się wreszcie zrozumie, że idzie tu o funkcję $f(x)$, nasunąć się musi przypuszczenie, że równanie $y=f(x)$ jest związkiem między dwiema funkcjami. Otóż, o niczem podobnem nie może być mowy.¹³ Litera y jest

¹² Inne przykłady takich konstrukcyj znajdzie czytelnik w mojej rozprawie p. t. *Une méthode métamathématique d'analyse*. Sprawozdania kongresu matematyków krajów słowiańskich. Warszawa 1930.

¹³ Por.: Frege, l. c. T. II, p. 148.

funkcją zmiennej y , $f(x)$ jest funkcją zmiennej x , mamy tu więc napewno dwie z gruntu różne funkcje. Równanie nasze jest po prostu związkiem między dwiema niewiadomymi x , y i na tem koniec. Że równanie nie jest związkiem między funkcjami świadczy o tem przedewszystkiem ten fakt, że zakres zmiennej równania może być różny od zakresu zmiennej poszczególnych funkcyj. Tak np. zakres funkcji $\frac{x}{x}$ obejmuje wszystkie liczby z wyjątkiem 0, zakres funkcji $\frac{x-1}{x-1}$ obejmuje wszystkie liczby z wyjątkiem 1, a zakres równania:

$$\frac{x}{x} = \frac{x-1}{x-1}$$

obejmuje wszystkie liczby z wyjątkiem 0 i 1.¹⁴

Mówi się często, że funkcje są sobie równe w przedziale (a, b) , jeśli są w tym przedziale określone i jeśli w tych samych punktach przyjmują te same wartości. Z tego wynika, że funkcje $\sqrt[3]{x^2}$, $(\sqrt[3]{x})^2$ są sobie równe w każdym przedziale. Niemniej mamy tu do czynienia w pierwszym wypadku z trzecim pierwiastkiem z x^2 , w drugim wypadku z kwadratem $\sqrt[3]{x}$. Ten stan rzeczy nakłada na nas obowiązek wykazania, że operacje, które wprowadzamy, nie zależą od budowy funkcyj, tylko od ich wartości. Matematycy klasyczni nie zdają sobie zbyt często sprawy z tego, że zajmując się tem zagadnieniem wykraczają poza zakres matematyki i z konieczności uprawiają semantykę. W każdym razie nie wspominają o tem uczniom, którzy skutkiem tego skazani są na niepewność.

Wyłączając z zakresu funkcyj pewne obszary, wkraczamy tem samem w dziedzinę teorii typów. Z chwilą kiedy odróżniamy np. funkcję zmiennej rzeczywistej $\frac{1}{x}$ od funkcji zmiennej naturalnej $\frac{1}{i}$ uprawiamy teorię typów w sposób jawny. W tych warunkach większa przejrzystość formuł klasycznych w stosunku do formuł semantycznych jest jedynie rezultatem rezygnacji z ścisłego sposobu pisania. Trzeba jednak pamiętać, że jeśli raz

¹⁴ Por.: Zajmujące uwagi podane w podręczniku algebry Gutkowskiego i Wilkosza.

mamy do dyspozycji aparat symboliki semantycznej, to wtedy możemy sobie pozwolić bez obawy nieporozumień na wprowadzenie symboliki uproszczonej tak, jak to uczyniliśmy przed chwilą.

Wystarczy pomijać znaki typikalne tam, gdzie niema obawy nieporozumień. Wówczas symbolika semantyczna staje się bardziej przejrzysta i bardziej prosta od symboliki klasycznej.

6. Słabą stroną symboliki klasycznej są postępy i szeregi. Postęp przedstawia się do dziś dnia przy pomocy obrazu:

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$$

zamiast powiedzieć poprostu, że postęp nie różni się niczem od funkcji zmiennej naturalnej a_n . Najgorsze jest to, że schematu funkcyjnego a_n używa się równocześnie z schematem $f(n)$, nie mówiąc o tem, że obydwie schematy służą do identycznych celów. Trzeba przecież wiedzieć, że gdyby $a_1, a_2, a_3 \dots$ były danymi liczbami, to nie byłoby postępu nieskończonego, bo nie możemy ani napisać nieskończenie wielu liczb, ani też pomyśleć. Do tego, żeby można mówić o postępie, czyli ciągu liczb, musi być dana funkcja zmiennej naturalnej a_n , albo $f(n)$, bo wtedy możemy powiedzieć, że n -tym wyrazem postępu jest a_n , względnie $f(n)$.

W osobiwie przykrej formie występuje to zamieszanie pojęć w związku z szeregami.

Symbol:
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \dots$$

jest używany jeszcze ciągle, pomimo, że sugeruje nam zupełnie fałszywą myśl, jakoby dodawać można w nieskończoność. Do

tęgo napisu dołącza się symbol $\sum_{k=1}^n a_k$, który oznacza sumę n

pierwszych wyrazów szeregu, przez co tem bardziej podkreśla się myśl, że prócz takich sum możemy tu mieć jeszcze do czynienia z innymi sumami.

W rzeczywistości cała nauka o szeregach sprowadza się do badania wyrażań kształtu

$$\sum_{k=1}^n a_k, \text{ lub } \sum_{k=1}^n f(k), \text{ albo też } \sum_{k=1}^n f(k, x) \text{ i t. p.}$$

Są to poprostu funkcje zmiennej całkowitej n i ewentualnie

innych zmiennych. Litera k jest tutaj typową zmienną pozorną, za którą nie podstawiać nie wolno.

Trzeba jeszcze powiedzieć wyraźnie, że funkcje te nie mogą być sformułowane przy pomocy zwykłego pojęcia sumy. Żeby zbudować takie funkcje trzeba koniecznie odwołać się do takich przedziałów, jakimi posługiwał się p. Hetper w definicji mnożenia i potęgowania.

Wprowadzając schematy a_k , $f(k)$, $f(x)$ i t. p., wkraczamy wyraźnie w granice semantyki, bo przecież nie są to ani liczby ani funkcje, tylko pewne osobliwe wyrażenia, które obracają się w funkcje, jeśli dokonamy odpowiednich podstawień. Zdarza się, że uczniowie traktują schemat $f(x)$ narówni z funkcją $\sin x$. Muszę przyznać, że ta gruba pomyłka nie jest wyłączną ich winą.

Schematy, o których mowa, są tak zbudowane, że możemy używać ich do wykonania szeregu działań, które wykraczają daleko poza granice czystej matematyki. W szczególności mogą budować z schematów starych schematy nowe, takie np. jak $f(x+h)$, $f(f(x))$ i t. p. Wszystkie te działania wymagają ścisłego sprecyzowania. Tak np. może się zdarzyć, że $f(i)$ nie jest liczbą całkowitą. Trzeba wówczas pamiętać, że $f(f(i))$ nie posiada sensu. Trzeba nadto pamiętać, że w wyrażeniu, w którym figuruje $f(0)$ nie wolno nam na $f(x)$ podstawić $\frac{1}{x}$, jeśli zaś ograniczamy się do liczb rzeczywistych, to także podstawienie $\sqrt{x-1}$ jest niedopuszczalne. Widzimy, że mamy tu do czynienia z olbrzymim aparatem milcząco przyjętych umów. Myślę, że to milczenie sprawia, że matematyka uchodzi w oczach wielu matematyków i bodaj wszystkich fizyków teoretycznych za wiedzę tajemną.

Metoda semantyczna stawia te sprawy odrazu jasno i prosto. W przeciwieństwie do czystej teorii klas i relacji, w której niema miejsca na symbol $f(x)$, metoda semantyczna pozwala nam symbol ten skonstruować.

Jeśli pominiemy częściowo znaki typikalne, pamiętając, że muszą być odpowiednio dobrane, konstrukcja będzie bardzo prosta.

Symbol $f(x)$ jest skrótem wyrażenia:

$$\begin{aligned} \Pi a \Delta \supset f f \mathcal{E} y \mathcal{E} \varphi \mathcal{E} \psi \Delta &= f \Pi [ML] y \varphi \Delta (\varphi y x \psi) \\ \Delta \text{ Real } x \Delta &\leq_A a \psi \text{ Rat } a. \end{aligned}$$

Tutaj Rat E czytamy: E jest liczbą wymierną. Konstrukcja poprawna byłaby nieco rozwleklejsza z uwagi na znaki typikalne. Należałoby też mówić nie o symbolu $f(x)$, ale o symbolu $f(x)[ML]$, ale to wszystko byłoby potrzebne jedynie na terenie systemu. Poza systemem wolno nam postępować mniej rygorystycznie. Myślę, że zczasem ustalić będzie można reguły takiego postępowania. Wówczas symbolika semantyczna zadecyduje o języku popularnej matematyki.

Myślę, że podana tutaj konstrukcja symbolu $f(x)$ przyczyni się do ugruntowania teorii operacji funkcjonalnych, która rozwinęła się w ostatnich latach w sposób nieoczekiwany, głównie pod wpływem prac prof. Banacha i jego szkoły.

7. Usunięcie różniczek z analizy matematycznej, dokonane przez Cauchy'ego, utrudnia w wysokim stopniu budowę systemu fizyki teoretycznej. Skutkiem tego analiza matematyczna nie zrezygnowała nigdy z pojęcia różniczki, wprowadzając je za pośrednictwem pojęcia funkcji zmierzającej w punkcie 0 do 0. Teoria różniczek nie została dotąd ściśle opracowana. W kursach analizy spotykamy w związku z tą sprawą jedynie dość ogólne uwagi. Ten stan rzeczy zdaje się potwierdzać stary przesąd, że pomiędzy algebrą a analizą istnieje przepaść nie dająca się zapłacić.

Żeby zaradzić złemu trzeba koniecznie pokazać, że pojęcie liczby można uogólnić w ten sposób, żeby pojęcie różniczki zostało niem objęte, bez odwoływania się do pojęć różnych od tych, na których się opiera algebra. Zobaczymy, że aparat pojęciowy semantyki racjonalnej pozwala rozwiązać zagadnienie to w zupełności.

Zamiast mówić o funkcjach zmiennej rzeczywistej zmierzającej w punkcie 0 do 0, będziemy mówili o dowolnych postęпах liczb rzeczywistych. Postępy, które w punktach dostatecznie odległych od 1 przyjmują stałe te same wartości, t. zn. są sobie równe począwszy od pewnego wyrazu, skupimy w oddzielne klasy. Klasy te będziemy nazywali *liczbami progresyjnemi*.¹⁵

Liczbę progresyjną należącą do postępu E oznaczać będziemy symbolem $N_i E$, gdzie i jest literą semantyczną raz na zawsze wybraną. Tak np. $N_i \frac{1}{i}$ jest to klasa postępów, które w punk-

¹⁵ Por. Über die Hypothesen der Mengenlehre, I. c.

tach i dostatecznie odległych od 1 przyjmują wartość $\frac{1}{i}$. Liczba $N_i 2$ jest to klasa postępów, które w punktach i dostatecznie odległych od 1 przyjmują stale wartość 2. Wyrażenie $N_i k$ nie jest liczbą progresywną, ale funkcją zmiennej całkowitej k , która dla każdej poszczególnej wartości tej zmiennej daje klasę postępów, przyjmujących wartość k w wszystkich punktach i dostatecznie odległych od 1.

Jest łatwo zrozumieć, że liczby progresywne tej ostatniej kategorii mogą być uważane za odpowiedniki liczb rzeczywistych w progresywnem ciele liczbowym. Będziemy je nazywali *liczbami progresywnymi rzeczywistymi*.

Dwie liczby progresywne $N_i E$, $N_i F$ będziemy uważali za równe, jeśli E , F są elementami i jednej i drugiej z nich. W tych warunkach będziemy pisali

$$= N_i E \ N_i F.$$

Jeśli wartości postępu E w punktach i dostatecznie odległych od 1 są stale większe od odnośnych wartości postępu F , będziemy mówili, że $N_i E$ jest liczbą większą od $N_i F$ i będziemy pisali:

$$> N_i E \ N_i F.$$

Zauważmy, że mamy stale:

$$\begin{aligned} &> N_i \ i \ N_i \ x \\ &> N_i \ \frac{1}{x} \ N_i \ \frac{1}{i}, \end{aligned}$$

jeśli tylko x jest określoną liczbą rzeczywistą dodatnią. Liczbę $N_i i$ możemy uważać za nieskończenie wielką, liczbę $N_i \frac{1}{i}$ za nieskończenie małą.

Klasa liczb progresywnych posiada nieskończenie wiele wymiarów, t. zn. nie da się podzielić na klasy liczb z sobą porównywanych przy pomocy skończonej ilości warunków.

Jeśli zważymy, że fizyka zmuszona jest do posługiwania się wielowymiarowymi obrazami, to narzucić się nam tu musi pewna analogja, która czasem zadecydować może o wysunięciu się liczb progresywnych na plan pierwszy.

Sumę dwu liczb progresywnych $N_i E$, $N_i F$ otrzymujemy, budując liczbę progresywną $N_i (E + F)$. W analogiczny sposób wykonujemy działania pozostałe.

Dzielenie prowadzi nas do wyróżnienia osobnego gatunku liczb takich jak $N_i \sin \left(\frac{\pi}{2} i \right)$. Liczby te nazywać będziemy *pseudo-zerami*. Są to liczby zbudowane przy pomocy postępów, które przyjmują wartość 0 w nieskończenie wielu punktach t. zn. posiadają nieskończenie wiele wyrazów równych 0. Rola tych liczb w dzieleniu jest ta sama co rola 0. Możemy załatwić się z nimi w ten sposób, żeby dzielenie przez nie dawało zawsze wynik 0.

Zauważmy teraz, że konwencję naszą możemy rozszerzyć na wszystkie operacje funkcyjne. W szczególności będziemy mieli:

$$\begin{aligned} &= N_i |E| |N_i E| \\ &= \sin N_i E \ N_i \sin E \quad \text{i t. p.,} \end{aligned}$$

gdzie $|F|$ oznacza bezwzględną wartość F .

Jeśli $f(x)$ jest zwykłym schematem funkcyjnym, to w obszarze liczb progresywnych odpowiada mu schemat $f_p(\xi)$, który budujemy w ten sposób, żeby było:

$$= f_p(N_i a(i)) \ N_i f(a(i)).$$

Analogicznie postępujemy w przypadku schematów funkcyjnych o wielu zmiennych, wysuwając prosto symbol N_i przed schemat funkcyjny.

Przypuśćmy teraz, że a jest daną liczbą rzeczywistą i że są spełnione następujące warunki dla dowolnego a :

$$\begin{aligned} &>_p |N_i E| \ N_i a \\ &>_p N_i a \ |N_i F|. \end{aligned}$$

Liczbę $N_i E$ nazywać będziemy *liczbą nieskończenie wielką*, liczbę $N_i F$ *liczbą nieskończenie małą* albo *różniczką*.

Przy pomocy pojęcia różniczki i liczby nieskończenie wielkiej możemy z łatwością zbudować pojęcie granicy.

W wypadku kiedy $N_i E$ jest różniczką, będziemy posługiwali się również symbolem $d_i E$.

Jeśli $N_i E$ jest liczbą nieskończoną i jeśli wartości funkcji E w punktach i dostatecznie odległych od 1 są stałe liczbami całkowitami, będziemy mówili, że $N_i E$ jest liczbą nieskończoną całkowitą.

Dodam tutaj, że jeśli ograniczymy się do liczb całkowitych

skończonych i do tych liczb, które możemy otrzymać z nich i z liczby N_i przez kolejne wykonywanie dodawania, odejmowania i mnożenia, otrzymamy t. zw. pierścień liczb całkowitych, t. j. klasę tych liczb, w której wszystkie liczby mogą być uporządkowane według wielkości, a nie stanowią bynajmniej postępu. Jest jasne, że indukcja zupełna polegająca na przechodzeniu od n do $n + 1$ nie może osiągnąć wszystkich liczb całkowitych naszej klasy. Ten stan rzeczy jest potwierdzeniem tezy wypowiedzianej poprzednio, że rozumowanie indukcyjne nie posiada charakteru arytmetycznego.¹⁶

Wprowadzimy teraz pojęcie *równoważności analitycznej* liczb progresywnych.

Mówimy, że liczby progresywne E, F są sobie równoważne analitycznie, jeśli różnica ich jest liczbą nieskończenie małą.

W tym wypadku piszemy:

$$\underset{An}{=} E F$$

Jeśli teraz dla wszystkich x mamy spełniony warunek:

$$\underset{An}{=} g f_p(a + d_i x),$$

gdzie g jest liczbą progresywną rzeczywistą, mówimy, że funkcja $f(y)$ posiada *granice* g w punkcie a .

Jeśli dla wszystkich x mamy spełniony warunek

$$\underset{An}{=} g f_p(N_i x),$$

gdzie $N_i x$ jest liczbą nieskończenie wielką, a g liczbą progresywną rzeczywistą, mówimy, że funkcja $f(x)$ ma *granice* g w nieskończoności.

Widzimy, że ta druga definicja stosuje się do postępów i szeregów. Trzeba tylko zamiast postępu x użyć postępu $E(x)$, który otrzymujemy z x w ten sposób, że jeśli $n \leq x < n + 1$, przypisujemy postępowi $E(x)$ wartość n .

Widzimy, że cała sprawa sprowadza się do badania funkcji $f(y)$ w punktach nieskończenie mało odległych od a , lub w punktach nieskończonych. Pojęcie takich punktów jest w tym wypadku równie konkretne jak pojęcie punktów skończonych i nie tylko czyni zbytecznem wszelkie odwoływanie się do geometrii, ale umożliwia nam nieoczekiwane rozszerzenie granic geometrii, pojętej jako interpretacja przestrzenna formuł analitycznych.

¹⁶ Por. Über die Hypothesen der Mengenlehre, I. c.

Funkcję $f(y)$, która dla wszystkich x spełnia warunek

$$\underset{An}{=} f_p(a) f_p(a + d_i x),$$

uważamy za funkcję *ciągłą* w punkcie a .

Pochodna funkcji $f(y)$ w punkcie a jest to wspólna granica w punkcie a funkcji zmiennej y

$$\frac{f_p(y + d_i x) - f_p(y)}{d_i x},$$

gdzie $d_i x$ jest dowolną różniczką, różną od 0 i od pseudo-zera.

Widzimy, że jeśli y jest czasem, a $f(y)$ poziomem punktu, to pochodna jest szybkością punktu w chwili a .

Zobaczmy jeszcze, w jaki sposób możemy zbudować całkę $\int_a^b f(x) dx$. Symbol ten przedstawia powierzchnię figury zbudowanej z odcinka (a, b) , położonego na osi x -ów, z prostych $x = a$, $x = b$ i z części linii przedstawionej równaniem $y = f(x)$, zawartej między temi prostymi.

Budujemy wyrażenie:

$$\sum_{k|1} N_i E\left(\frac{b-a}{x}\right) d_i x f_p(a + k d_i x).$$

Jeśli x jest postępem takim, że $d_i x$ jest różniczką, to wyrażenie nasze przedstawia liczbę progresyjną. Jeśli np. x jest postępem $\frac{1}{i}$, to liczba ta jest:

$$N_i \sum_{k|1} E((b-a)i) \frac{1}{i} f\left(a + \frac{k}{i}\right).$$

Jeśli wszystkie liczby, które w ten sposób możemy otrzymać, różnią się od pewnej liczby progresyjnej rzeczywistej g o liczbę nieskończenie małą, możemy tę liczbę g uważać za powierzchnię naszej figury.

Algebra liczb progresyjnych może być uważana za podstawę do zbudowania geometrii, która przekracza bardzo daleko granice doświadczenia. Tak np. liczbę

$$d_i x \cdot f_p(a + k d_i x)$$

możemy uważać za powierzchnię prostokąta o podstawie nieskończenie małej, a wysokości nieskończenie mało różnej od

$f(a)$. Powierzchnię wyznaczoną powyżej możemy uważać za sumę nieskończenie wielu powierzchni takich prostokątów.

Pole do fantazjowania jest tu olbrzymie. Przekracza ono znacznie granice najśmielszych wybuchów swobodnej imaginacji. A jednak, jeśli pamiętamy, że wszystko to są tylko skrócone sposoby orjentowania się w związkach zachodzących pomiędzy wyrażeniami naszego systemu, to nie może być mowy o wyjściu poza granice zdrowego rozsądku i opartej na nim nauki. Przykład ten charakteryzuje lepiej może niż wszystkie inne, na czym polega twórcza potęga nauki i dlaczego pomiędzy nauką ścisłą a metafizyczną fenomenologią istnieje przepaść niezgłębiona.

Rozdział VIII.

Zagadnienia metodologii nauk ścisłych.

1. System metamatematyki racjonalnej można uważać za przyrząd nie różniący się zasadniczo od arytmetometru. Różnica sprowadza się do tego, że nasz system pozwala nam uzyskać to samo, co arytmetometr, a prócz tego jeszcze bardzo wiele innych rzeczy. W szczególności możemy przy pomocy naszego systemu otrzymać takie wyrażenia, które pozwalają nam przewidzieć, jakie wyrażenia możemy otrzymać w ciągu dalszym. Podczas gdy arytmetometr pozwala nam przewidywać wyniki pewnych określonych doświadczeń, a mianowicie wyników liczenia, zakres doświadczeń, które mogą być uchwycone przy pomocy naszego systemu, nie może być zgóry ustalony.

Pierwszym krokiem naprzód w stosunku do arytmetometru jest możliwość ujęcia w schemat doświadczeń, polegających na wykonywaniu pomiarów przestrzennych. Innymi słowami, system metamatematyki racjonalnej obejmuje tę naukę, którą nazywamy geometrią.

Geometria jest nauką doświadczalną. Polega ona na mierzeniu odcinków, kątów i powierzchni. Tak pojmowali ją Egipcjanie i taką pozostała w istocie swojej do dzisiaj. To, co uważa się powszechnie za geometrię za naszych czasów, t. j. to, o czym pisze się w podręcznikach, jest osobliwą mieszaniną geometrii doświadczalnej i metafizyki geometrycznej, którą pozostawili nam w spadku Grecy pod postacią elementów Euklidesa.

Jeśli zastanowimy się bliżej nad utworami, które operuje geometria Euklidesa, musimy przyjść do przekonania, że są one niedostępne naszej wyobraźni i naszemu doświadczeniu w równym stopniu jak mnogości Cantora. Wszystkie przykłady doświadczalne, czy intuicyjne linii prostych, płaszczyzn i punktów, jakie podaje się w podręcznikach, odznaczają się tem, że są

czemś zasadniczo różnem od tego, o co idzie, a jedyna ich wartość polega na stworzeniu iluzji, że nam coś objaśniają. Kończy się na tem, że każdy uczeń jest przekonany, że wie, co to jest punkt, prosta lub płaszczyzna, i mówi o tych rzeczach z wielką swobodą, tak mniej więcej, jak o ziarenkach piasku, promieniach słońca, lub o powierzchni spokojnego jeziora, a nie zdaje sobie sprawy z tego, że to, co łączy te obiedwie sfery przedmiotów, jest drobiazgiem w stosunku do różnic, które je dzielą. Z chwilą, kiedy zdamy sobie sprawę z tego stanu rzeczy, trudno nam będzie nie przyznać, że ostatecznie nie mamy pojęcia o tem, co to są utwory geometrii Euklidesa; to doprowadzić nas musi do wniosku, że nauka ta operuje przedmiotami fikcyjnymi, że więc w gruncie rzeczy idzie tam o słowa, które żadnego znaczenia nie posiadają.

Jeśli jednak wiara idealistyczna w istnienie punktów, linii prostych i płaszczyzn doprowadziła Greków do stworzenia nauki, która stała się jednym z najpotężniejszych środków w walce z rzeczywistością, która pozwoliła nam rozszerzyć granice naszego doświadczenia w sposób zgoła nieoczekiwany, tworząc zarazem pierwowzór doskonale opracowanego aparatu pojęciowego, to chyba jest to potężnym argumentem na korzyść metafizycznego charakteru podstaw nauki.

Z tego przekonania zrodziła się niewątpliwie próba Spinozy zbudowania podstaw metafizyki przy pomocy metody geometrycznej. Fiasko tej próby stało się podniecią niezwykle intensywnych dociekań nad istotą geometrii. Szło o to, żeby dociec, czem się różni geometria grecka od metafizyki. Analogja jest przecież uderzająca. A jednak — tam wszechstronne możliwości rozwoju, niezachwiana pewność argumentów i wielkie bogactwo zastosowań, tutaj uderzanie czołem o twardą ścianę, niepokojąca świadomość samowoli i atmosfera zastoju i martwoty.

Empiryści angielscy, naprzód Berkeley, a potem Hume, stanęli na stanowisku, że idealizm geometrii greckiej jest pozorny. Utwory geometryczne są to wyrazy pozbawione określonego znaczenia. W rzeczywistości są tylko konkretne figury geometryczne. Myśl ta była niewątpliwie słuszna, ale uzasadnienie jej było wadliwe. Bo przecież konkretne figury geometryczne są grube i niedokładne, a w geometrii greckiej wszystko jest doskonałe i ścisłe. Trudność ta pozostała w wszystkich empirystycznych koncepcjach geometrii aż do naszych czasów.

Kant obrał inną drogę, która była zaiste genialnem rozwiązaniem zagadnienia w tych granicach, jakimi rozporządzała ówczesna nauka. Według Kanta siła twórcza geometrii greckiej polega *na czystej intuicji*, osobliwej zdolności naszego umysłu, która pozwala nam wyczuwać związki zachodzące między utworami geometrycznymi niezależnie od doświadczenia. Aksjomaty geometrii są to tylko słowne sformułowania czystych spostrzeżeń, narzucających się nam z nieubłaganą siłą.

Są to t. zw. *sądy syntetyczne a priori*.

Trwałą zdobyczą teorii Kanta jest wykrycie tego faktu, że rozumowania, jakimi posługuje się geometria grecka, są tylko napozór ścisłe. Że tak jest, o tem miał sposobność przekonać się każdy absolwent szkoły średniej. Według mojego przekonania niema dyscypliny bardziej dezorjentującej od geometrii szkolnej. Jest to dziwny konglomerat fragmentarycznych rozumowań, bezkrytycznie przyjętego konwenansu i doświadczenia. Wadą zasadniczą tego konglomeratu jest właśnie to, że można się w niego wżyć i że funkcjonuje on mimo wszystkich swoich braków doskonale. Jest jasne, że jest on silną podporą wszystkich utartych przesądów i zręcznie zamaskowanych paralogizmów.

Zaczyna się od tego, że przyjmujemy słynny postulat Euklidesa:

Przez punkt poza prostą mogą przeprowadzić jedną i tylko jedną równoległą do tej prostej.

Uczeń nie ma pojęcia, co to są linje proste równoległe. Może to coś takiego, jak linje na zeszycie, albo szyny kolejowe, albo może coś takiego, jak dwa piony, przedłużone w nieskończoność. Ale piony przedłużone w nieskończoność spotykają się w środku ziemi. Skąd wiemy, że linje na zeszycie lub szyny kolejowe nigdy się nie spotkają?

O tem wszystkiem nie myśli się jednak zbyt długo i przechodzi się do dowodu, że dwa kąty odpowiednie między dwiema równoległymi są sobie równe. Rysujemy dwie linje równoległe, prowadzimy do nich prostopadłą i widzimy odrazu, że kąty odpowiednie są równe, bo przecież są proste. Ale okazuje się, że ta intuicja jest zawodna. Nauczyciel mówi, że z tego, że kąt u góry jest kątem prostym, nie wynika, że kąt u dołu jest też prostym. Wytwarza się nastrój nieprzyjemny. Jeśli tak elementarna intuicja zawiodła, to co nie zawiedzie?

Ostatecznie kończy się na powołaniu się na postulat Eukli-

desa. Tym razem zastanawiamy się nad nim nieco dłużej. Idzie o to, że przez punkt poza prostą nie możemy poprowadzić dwu linii do niej równoległych: ależ rzeczywiście, to przecież najzupełniej jasne.

I ani na chwilę nie przychodzi nam do głowy, że w tych tak jasnych rozumowaniach załatwiamy ni mniej ni więcej tylko zagadnienie zachowania się linii prostej w nieskończoności, jakkolwiek przecież nie mamy pojęcia, co to jest nieskończoność. Ale o to właśnie idzie. Bo gdyby nasze proste spotykały się w środku gwiazdy polarnej, to przecież nie byłyby równoległe, a gdyby odległość ich punktu spotkania wynosiła 10^{10} lat światła, to także nie byłyby równoległe. Kąty odpowiednie, które możemy mierzyć, byłyby oddawna uznane za równe. Cienia różnicy nie moglibyśmy wykazać, a linje i tak nie byłyby równoległe. Trzeba koniecznie, żeby naprawdę nigdzie się nie spotykały. Wystarczy o tem pomyśleć, żeby człowiekowi zrobiło się zimno. Jest ciekawe, że nigdy nikomu nie przychodzi na myśl straszyć publiczność temi sprawami. Straszycie się ją Kopernikiem, Łobaczewskim, Lamarckiem, a potem Darwinem. Straszy się ją Einsteinem i mechaniką falową, ale geometria grecka uchodzi po staremu za szczyt harmonii, pogody ducha i, co najlepsze, *finityzmu*.

O kątach odpowiednich zapominamy rychło. Przechodzimy pośpiesznie do trójkątów i wieloboków, mówimy o figurach przystających i podobnych. Wszystko to jest przecież proste jak elementarz i pogodne jak wieczór majowy. O tem, że na dnie tkwi groza linii nie spotykających się *nigdzie*, o tem, że cała ta wiedza zrodziła się z marzenia o nieskończoności, o tem nie mamy wcale ochoty myśleć.

A przecież wartołoby zastanowić się nad tem, że dla dostarczenia geometrze wiejskiemu wzorów potrzebnych do parcelacji gruntów trzeba było poruszyć otechłanie wszechświata, wobec których to wszystko, z czem mają do czynienia astronomowie, jest drobiazgiem, pozbawionym wszelkiego znaczenia.

Jest pewne, że gdyby nauka o podstawach geometrii sprawdzała się do przyjęcia postulatu Euklidesa wraz z innemi aksjomatami jako oczywistego pewnika tak, jak się to robi w szkole, to nie byłoby sposobu wymigać się od metafizycznej trwogi przed tajemnicą istnienia, o której znajdujemy godne

uwagi wzmianki w utworach literackich Stanisława Ignacego Witkiewicza.

Wszystko jedno, czy idzie o rzecz samą w sobie, czy o kantowskie czyste spostrzeganie formy fenomenów. Wszystko to przecież przekracza daleko granice zdrowego rozsądku. W takich warunkach nie pora polegać na samym sobie. Lepiej zawczasu powierzyć swój los sile wyższej i poddać się autorytetowi. Chyba, że się jest tak zawziętym i upartym manjakiem, jakim był Mikołaj Łobaczewski lub owi szlachcice węgierscy, ojciec i syn Bolyaiowie, którzy tak długo szarpali się wewnątrznie i taki ogrom wysiłku umysłowego zdołali z siebie wydobyć, że autorytet postulatu Euklidesa zmełli na proch, otwierając nauce o podstawach geometrii zgoła nieoczekiwane perspektywy.

2. Druga niezmiernie ważna droga rozwoju podstawowych pojęć geometrii została odkryta dzięki pracom Poncelet'a i Brianchona nad geometrią rzutową. Szło o taką geometrię, w której zajmujemy się tylko wzajemnem położeniem punktów, prostych i płaszczyzn, przechodząc do porządku nad ich właściwościami metrycznymi.

W r. 1826. sformułował Gergonne¹ słynną zasadę *dualizmu*, według której w geometrii rzutowej płaskiej każdemu twierdzeniu odpowiada pewne nowe twierdzenie, które z danego twierdzenia otrzymamy, zamieniając rolę punktu i linii prostej. Podobna odpowiedniość zachodzi w geometrii przestrzennej między punktami i płaszczyznami.

Tak np. twierdzeniu: *dwa punkty wyznaczają linię prostą* odpowiada twierdzenie: *dwie linie proste wyznaczają punkt*. (Celem uniknięcia ograniczeń dodaje się tu utwór konwencjonalny: *punkt w nieskończoności* i mówi się, że proste równoległe spotykają się w tym punkcie).

Metodologiczne znaczenie tej zasady było olbrzymie. Okazało się, że utwory tak zasadniczo różne jak linia prosta i punkt, względnie płaszczyzna i punkt, odgrywają w geometrii rolę zamienne. Było więc jasne, że nie idzie o właściwości tych właśnie utworów, ale o to, że są one tylko środkami pomocniczymi, służącymi do zbudowania pewnych związków, które właściwie są od nich niezależne.

¹ Por. Enriques, l. c., p. 110.

W r. 1830. formułuje Plücker *zasadę nieskończenie wielu możliwych interpretacji abstrakcyjnej geometrii*.²

Plücker zwraca uwagę, że trójka liczb (x, y, z) może charakteryzować zarówno punkt w przestrzeni, jak linię prostą, lub koło w płaszczyźnie.

Tak np. $(-1, 3, 2)$ charakteryzuje punkt w przestrzeni o współrzędnych $-1, 3, 2$, albo linię prostą

$$-x + 3y + 2 = 0$$

w płaszczyźnie, albo też koło:

$$(x + 1)^2 + (x - 3)^2 = 4.$$

Koncepcja Plückera była ciosem śmiertelnym dla idealizmu geometrycznego. Upłynęło jednak wiele czasu, zanim została do głębi oceniona. W drugiej połowie XIX. wieku wystąpił Hoüel z formalistyczną koncepcją geometrii. Hoüel rezygnuje całkowicie z intuicyjnej treści pojęć geometrycznych. Dla niego punkty, proste i płaszczyzny są to poprostu takie przedmioty, które czynią zadość aksjomatom; poza tem nie możemy o nich nic zgoła powiedzieć. Cała ta koncepcja była możliwa jedynie dlatego, że były do dyspozycji formuły matematyczne. Bez nich nie możnaby zrobić kroku naprzód, bo, jak widzieliśmy, system geometrii był w owym czasie aparatem niedoskonałym, którym bez uzupełnień intuicyjnych żadną miarą nie można było pracować.

Zadania polegającego na doskonałym opracowaniu systemu geometrii euklidesowej podjął się Hilbert i rozwiązał je w zupełności, ale zarazem dowiódł, że cała ta praca była właściwie zbyteczna.³

Hilbert uważa podobnie jak Hoüel punkty proste i płaszczyzny za pewne bliżej nieokreślone przedmioty, o których tyle wiemy, że czynią zadość aksjomatom wypisanym *explicite*.

Hilbert zdawał sobie jednak sprawę, że takie określenie nie jest wystarczające. Nasuwała się przecież możliwość, że nasze aksjomaty są sprzeczne. W takim razie nie możnaby mówić z sensem o przedmiotach czyniących zadość tym aksjomatom. Otóż, żeby przezwyciężyć tę trudność, należało dać *dowód niesprzeczności* przyjętych aksjomatów. Hilbert dał taki dowód, powołując się poprostu na interpretację algebraiczną. Jeśli punkty

² L. c., p. 113.

³ D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig 1899.

interpretować będziemy jako trójki liczb rzeczywistych, płaszczyzny jako równania linijowe o 3 niewiadomych, a proste jako pary takich równań, to okaże się, że te utwory czynią zadość naszym aksjomatom. Gdyby aksjomaty nasze prowadziły do sprzeczności, to sprzeczność musiałaby pojawić się na gruncie algebry. Jeśli to uważamy za wykluczone, to możemy być pewni, że sprzeczność nie pojawi się także w geometrii.

Dzieło Hilberta było pozornym triumfem idealizmu. Można było sądzić, że w ten sposób istnienie idealnych przedmiotów: punktów, prostych i płaszczyzn zostało udowodnione. Braki geometrii greckiej zostały usunięte, geometria stała się systemem doskonałym — tak przynajmniej można było sądzić na pierwszy rzut oka. Wydawało się, że idealizm przeżyje okres odrodzenia.

Stało się wprost przeciwnie. Metoda Hilberta nie zdołała pochwycić całokształtu współczesnej geometrii. Doskonałość systemu okazała się iluzoryczna z chwilą, kiedy rozwój logiki zaostrzył kryterja ścisłości naukowej. Skończyło się na tem, że geometria rozplynęła się w systemie metamatematyki racjonalnej.

Procesem tego rozkładu zajmujemy się w dalszym ciągu.

3. Geometria nieeuklidesowa jest najważniejszym odkryciem metodologicznym w historii nauk ścisłych.

Cała sprawa sprowadza się do pytania, czy teoretyczna konstrukcja kwadratu jest możliwa. Kwadraty, które konstruujemy w doświadczeniu, są tylko w przybliżeniu dokładne. Skąd wiemy, że w czworoboku, w którym są 3 kąty proste, kąt czwarty nie musi być mniejszy od kąta prostego?

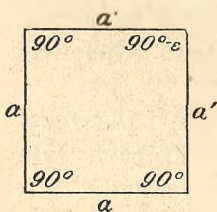


Fig. 8.

Sprawę tę rozstrzygamy zwykle przy pomocy postulatu Euklidesa, który nas zapewnia, że przez punkt poza prostą można w płaszczyźnie poprowadzić tylko jedną równoległą do tej prostej. Ale postulat ten budził poważne wątpliwości już w czasach greckich. Już Posidonios na 100 lat przed Chrystusem starał się sprowadzić go do założenia, że zbiór punktów w płaszczyźnie, równo odległych od danej prostej, jest linią prostą, ale jest przecież jasne, że założenie to jest najzupełniej dowolne.

Nazir-Eddin (w. XIII) uważał za stosowne wyprowadzić postulat Euklidesa z założenia, że suma kątów w trójkącie wynosi

180°, zaznaczając tem samem, że nie uważa tego postulatu za oczywisty. W w. XVII. zaczęły się olbrzymie wysiłki doprowadzenia negacji postulatu Euklidesa do absurdu. W w. XVIII. Girolamo Saccheri S. J. posunął prace swoje tak daleko, że mimo-woli uzyskał cały szereg podstawowych twierdzeń geometrii nie-euklidesowej.

W ciągu wieku XVIII. sprawa podstaw geometrii stała się wyjątkowo niepokojącą i drażniącą.

D'Alembert nazywał definicję linii prostej i linii równoległych pułapką i skandalem, Lagrange przerwał swój odczyt o tych sprawach w Akademji Nauk, spostrzegłszy błąd w swoich wywodach. Legendre, Carnot, Laplace, Fourier, Monge i Gauss wykonali kolosalne prace, które nie dały jednak pomyślnych wyników.⁴

Uczeni niemieccy radziby przypisać Gaussowi odkrycie geometrii nieeuklidesowej, powołując się na jego ustne oświadczenia i listy do Wolfganga Bolyaia, ojca Jana, jednego z twórców tej geometrii.⁵

Tendencje te podyktowane są naprzód łatwo zrozumiałym patriotyzmem, a potem i tem uprzedzeniem, że największe odkrycia są przywilejem uznanych powszechnie autorytetów. Przeciwnie takiej hipotezie świadczy fakt następujący. Wolfgang Bolyai poświęcił całe życie zagadnieniu równoległych i, jak sam pisze do Gaussa, życie to zmarnował. Cierpienia jego i niedola były bezgraniczne i mogły być wzbudzić litość najzatatwardzalszego okrutnika.⁶ Niemniej Gauss nigdy nie odkrył przed nim rąbka tajemnicy, którą rzekomo posiadał, kiedy zaś syn Wolfganga Jan odkrył geometrię nieeuklidesową, Gauss nie wahał się stwierdzić, że sprawy te są mu znane od lat 35. Ten fakt można tłumaczyć jedynie pewnem zacofaniem umysłowem, które każało Gaussowi lekceważyć narzucającą mu się koncepcję, a zarazem brakiem śmiałości potrzebnej wielkiemu odkrywcy. Tę właśnie śmiałość, której brakło Gaussowi, posiadał Jan Bolyai de Bolyá, młody oficer austriacki, i posiadał ją jeszcze Mikołaj Łobaczewski, młody profesor uniwersytetu w odległym Kazaniu.

Pomysł, że postulat równoległych nie może być doprowadzony

⁴ Por. Gonseth: *Les Fondements des Mathématiques*. Paris 1926, p. 78.

⁵ Por. Mach: *Erkenntniss u. Irrtum*.

⁶ Por. *Der Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und W. Bolyai*, herausgegeben durch F. Schmidt u. F. Stäckel. Leipzig 1898.

do sprzeczności, zawdzięczał Jan Bolyai swojemu ojcu. O dziele ojca pisał:

Jego dowód przeciw możliwości jest ten, że wszystko, co przeczy XI. aksjomatowi, może ukryć się w nieskończoności...⁷

Dowód ten nie był wystarczający, posiadał jednak wielką siłę sugestywną. Jan Bolyai oceniał sprawiedliwie i głęboko zapładniający wpływ swego ojca. Natomiast pretensje Gaussa do pierwszeństwa potępiał z całą sprawiedliwą surowością. W sprawie tej napisał następujące, niezmiernie ważne słowa:

Według zapatrywania mojego i wszystkich ludzi nieuprzedzonych, o czym mocno jestem przekonany, są wszystkie przez Gaussa podane powody, dla których z swoich odnośnych prac niczego nie chciał opublikować za swego życia, pozbawione mocy i znaczenia, bo przecież w nauce, jak w życiu rzeczywistym, idzie nieustannie właśnie o to, żeby rzeczy konieczne i użyteczne dla wszystkich, ale jeszcze niejasne, wyświetlić należycie i nieistniejący jeszcze lub raczej drzemiący zmysł prawdy i prawa obudzić, odpowiednio go umocnić i poprzeć...

A ta okoliczność, że niestety nawet pomiędzy matematykami, i to sławnymi, jest wielu powierzchownych, nie może być dla nikogo rozsądnego powodem, aby produkować tylko pływaczę i miernotę i pozostawić naukę w stanie odziedziczzonego letargu.⁸

Jan Bolyai urodził się w r. 1802. Podstawy geometrii nie-euklidesowej uzyskał przed r. 1825. Opublikował je w dziesięć lat później w dodatku do dzieła swego ojca p. t. *Tentamen...*

Na parę lat przed tem ogłosił swoje dzieło Mikołaj Łobaczewski, odbierając w ten sposób Janowi Bolyaiowi prawo pierwszeństwa.

Jeszcze przed Łobaczewskim ogłosił Taurinus rozprawę p. t. *Geometriae prima elementa*, zawierającą podstawy trygonometrii nieeuklidesowej, ale rozprawa ta nie była jeszcze ostatecznym rozwiązaniem zagadnienia. Właściwymi odkrywcami nowej geometrii są Łobaczewski i Jan Bolyai. Czyn ich da się porównać jedynie z czynem Kopernika. Wielkość ich polega nie tylko na bystrości rozumowania i sile wyobraźni, bo tę posiadali także inni, ale na szczerości myśli i na opanowaniu lęku w obliczu rodzącej się wielkiej prawdy.

Jan Bolyai dowiedział się o dziele Łobaczewskiego od swo-

⁷ Wolfgang u. Johann Bolyai: *Geometrische Untersuchungen*, herausgegeben von P. Stäckel, I Teil. Leipzig u. Berlin 1913, p. 90.

⁸ Ibid, p. 96.

jego ojca w r. 1844. Zrazu nie chciał wierzyć, że podobna zgodność pomysłów mogła mieć miejsce i lekceważył całe zdarzenie. Kiedy dowiedział się, że Gauss zachwyca się dziełem Łobaczewskiego, było to dla niego druzgocącym ciosem. Cios ten dopełnił wielkiej i niesamowitej tragedji Bolyaiów.

Łobaczewski nigdy podobno nie wiedział o dziele Bolyaiów.

Łobaczewski urodził się w r. 1793 w gubernji niżno-nowogrodzkiej. Był on synem Iwana Maksymowicza Łobaczewskiego, geometry prowincjonalnego, który przywędrował z Polski. Część rodziny Łobaczewskiego mieszka do dzisiaj w Polsce.

W przeciwieństwie do Bolyaiów był Łobaczewski człowiekiem bardzo zrównoważonym, bardzo silnym i zdolnym do pracy nadludzkiej. Od roku 1816 był profesorem uniwersytetu w Kazaniu, dla którego poświęcił pracę całego życia.

W r. 1826. przedłożył wydziałowi fizyczno-matematycznemu uniwersytetu kazańskiego swój system geometrii nieeuklidesowej. W r. 1829. wyszła w *Gońcu Kazańskim* pierwsza część jego dzieła *O początkach geometrii*. W ten sposób — według słów Engla⁹ — został załatwiony spór, który trwał dwa tysiące lat.

Dzieła swojego dokonał Łobaczewski zupełnie samodzielnie, będąc odciętym od tego wszystkiego, co o tej sprawie mówiło się poza Kazaniem. Nauczyciel Łobaczewskiego i poprzednik na katedrze matematyki w uniwersytecie kazańskim Bartels korespondował wprawdzie z Gaussem, ale nie zajmował się wcale zagadnieniem postulatu Euklidesa, a pomysły Łobaczewskiego uważał raczej za igraszki umysłowe, nie zaś za zdobycz naukową. Otóż, jest dobrze zastanowić się na chwilę nad tem, jak taki sąd mistrza podzielać musiał na ucznia.

Gdyby zapuścić się bliżej w historję nauki, to okazałoby się, że ogromna ilość twórczych pomysłów poszła na marne skutkiem takiego właśnie stanowiska autorytetów. W imię bezpłodnych igraszek niszczyło się i niszczy do dzisiaj porywy ambitnych pracowników, którzy radziłyby przecież pracować na głównym froncie, a nie trwonić czasu na bezpłodne dociekania. Na miejsce zagadnień niepokojących i pobudzających do wytężonego myślenia podstawia się wyjałowione obszary myśli ludzkiej, stworzone na to, żeby na nich żerowały miernoty. Znam takich przedstawicieli nauki, którzy odrzucają całkiem świadomie wszel-

⁹ Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen. I Teil. Leipzig 1898, p. 381.

kie próby rozwiązywania starych zagadnień przy pomocy nowego aparatu pojęć tak, jak gdyby nie było to *fair play*. Woleliby, żeby nauka stanęła na miejscu, żeby na zawsze uderzała bezsilnie głową o mur, byle tylko nie przekroczyć szablonu, do którego przywykli.

Dla tych typów umysłowych geometria Łobaczewskiego i Bolyaia była zawsze i jest dotychczas czynnikiem niemitym i niepożądanym.

Nie będę tutaj zajmował się argumentami, jakie wytoczono przeciw geometrii nieeuklidesowej. Są one jedynie dowodem powierzchownej znajomości przedmiotu. Pragnę tylko wspomnieć o tem, że modny u nas przed wojną filozof austriacki Meinong był głęboko przekonany, że w geometrii nieeuklidesowej idzie o przecinające się równoległe, i walczył zupełnie poważnie z tym wysysanym z palca absurdem.¹⁰

Dodam jeszcze, że w świeżo opublikowanym dziele G. A. Kaufmanna znajdujemy następujący zgola nieoczekiwany argument:

W niechęci do mówienia o nieokreślonych peryferycznych dachach — w niechęci, która odpowiada kulturalno-historycznej drodze ludzkości do fizycznie mierzonego, ograniczonego ziemskiego życia — tkwiła tajemna przyczyna, że system Euklidesa musiał zawsze przyjmować założenie, które odczuwało się jako niezupełność logiczną. W rzeczywistości są przecież wszystkie fizyczno-przestrzenne miary dane z eterycznej dali — z „nieskończonej odległości“. Z chwilą, kiedy odważymy się zapuścić się w nią na nowo, staje się system przejrzysty i jasny.¹¹

Myślę, że taki sposób myślenia doprowadziłby ludzkość czy prędzej czy później do zatonięcia w beznadziejnym mroku.

W dalszym ciągu zapoznamy się z podstawami geometrii nieeuklidesowej, gdyż wobec środków, jakimi dziś rozporządzamy, nie jest to sprawa trudna, a opłaci się sownie, bo ułatwi nam walkę z rodzącymi się w naszych oczach przesadami.

4. Matematyk włoski Beltrami wykazał, że istnieje pewna powierzchnia (pseudosfera), na której najkrótsze drogi pomiędzy dwoma punktami zachowują się jak proste Łobaczewskiego i Bo-

¹⁰ Por.: Über die Stellung der Gegenstandstheorie im System der Wissenschaften. Leipzig 1907, p. 80.

¹¹ Por. A. G. Kaufmann: Strahlende Weltgestaltung. Dornach/Schweiz 1934.

lyaia. Powierzchnia ta jednak nie daje obrazu całej płaszczyzny Łobaczewskiego i Bolyaia.

Prosty i łatwy do intuicyjnego opanowania obraz tej płaszczyzny zawdzięczamy nieżyjącemu dziś wieloletniemu profesorowi uniwersytetu getyngeskiego Feliksowi Kleinowi.

Wyobraźmy sobie istoty dwuwymiarowe, żyjące wewnątrz koła K o promieniu 1. Przypuśćmy, że istoty te kurczą się w miarę zbliżania się do obwodu koła, w ten sposób, że nigdy do tego obwodu dotrzeć nie potrafią.

W takim razie punkty obwodu koła znajdują się z ich punktu widzenia w nieskończoności. Dla tych jednostek cięciwa koła K jest linią prostą. Dwie cięciwy spotykające się na obwodzie koła są prostymi równoległymi. Widzimy, że pęk prostych przechodzących przez punkt M ograniczony prostymi AA' , BB' nie ma punktów wspólnych z prostą AB' . W tych warunkach możemy przyjąć, że istoty żyjące na kole K definiują proste AA' i BB' jako *proste równoległe* do prostej AB' . Pozostałe proste należące do naszego pęku mają oczywiście tę właściwość, że w miarę, jak nasze istoty posuwają się wzdłuż nich coraz dalej w tę czy w tamtą stronę, odległość ich od prostej AB rośnie nieograniczenie.

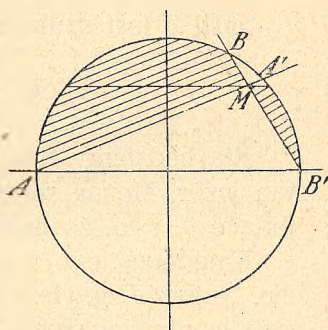


Fig. 9.

Przyjmijmy teraz prostokątny układ Kartezjusza i umieścmy środek naszego modelu w początku tego układu. Promień naszego koła-modelu uważać będziemy za jednostkę długości. W tych warunkach równanie

$$x^2 + y^2 = 1$$

będzie równaniem właśnie tego koła-modelu.

Widzimy, że liczby x , y , czyniące zadość warunkom

$$|x| < 1, |y| < 1$$

określają położenie punktów wewnątrz modelu.

Wyobraźmy sobie teraz dwie istoty, znajdujące się w punktach określonych na modelu parami liczb (x_1, y_1) , (x_2, y_2) . Odległość d punktów modelu wyznaczamy znanym wzorem:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

ale nie o tę odległość nam idzie. To jest odległość wyznaczona przez nas, o której nasze fikcyjne istoty nie mogą mieć pojęcia. Jest zajmujące podać taką formułę, która pozwoliłaby nam przewidzieć, jaką odległość wyznaczają nasze fikcyjne istoty pomiędzy punktami, których obrazy są $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$.

Oznaczmy przez $\Omega(x_1 y_1 x_2 y_2)$ wyrażenie $1 - x_1 x_2 - y_1 y_2$, a przez $\Delta(x_1 y_1 x_2 y_2)$ oznaczmy wyrażenie

$$\Omega(x_1 y_1 x_2 y_2)^2 - \Omega(x_1 y_1 x_1 y_1) \cdot \Omega(x_2 y_2 x_2 y_2).$$

Jeśli δ jest szukaną odległością, będziemy mieli:

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{\Omega(x_1 y_1 x_2 y_2) + \sqrt{\Delta(x_1 y_1 x_2 y_2)}}{\Omega(x_1 y_1 x_2 y_2) - \sqrt{\Delta(x_1 y_1 x_2 y_2)}}.^{12}$$

Nie będziemy tutaj zastanawiali się nad tem, skąd się wziął ten wzór. Można sobie wyobrazić, że został odgadnięty. Decydujące jest to, że daje nam rozwiązanie naszego zagadnienia.

Najgorszą jego wadą jest to, że wygląda dosyć niesamowicie. Naprzód bowiem jest bardzo rozwlekły, a na dobitkę figuruje w nim logarytm, i to nie pospolity logarytm o zasadzie 10, dla którego sporządzone są tabliczki szkolne, tylko t. zw. logarytm naturalny, którego zasadą jest pewna liczba niewymierna e . Zobaczymy jednak, że sprawa jest drugorzędna. Wzór nasz, taki, jaki jest, pozwoli nam zorjentować się w sytuacji bez znajomości liczby e i bez zaglądania do tablic logarytmicznych.

Zacniemy od pytania, ile wynosi w płaszczyźnie (t) odległość punktu $(x_1 y_1)$ od początku układu. W tym wypadku musimy wziąć $x_2 = y_2 = 0$, jeśli więc szukaną odległość oznaczmy δ_1 , otrzymamy:

$$\delta_1 = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1 - \sqrt{x_1^2 + y_1^2}}.$$

Jeśli więc na modelu wyznaczmy koło o promieniu $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, to jego obrazem w płaszczyźnie (t) będzie koło o promieniu δ_1 .

Jeśli promień $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ zmierza do 1, to δ_1 rośnie nieograniczenie. Rzeczywiście, w tym wypadku liczba logarytmowana rośnie nieograniczenie, bo licznik jej zmierza do 2, a mianownik do 0. Jeśli zaś liczba logarytmowana rośnie nieograniczenie, to logarytm, a tem samem jego połowa rośnie również nieograniczenie.

¹² Por. H. Weyl: Raum, Zeit, Materie. Berlin 1921, p. 73.

Widzimy, że w ten sposób to, co dla nas jest kołem o promieniu 1, przedstawia się naszym fikcyjnym istotom jako obszar nieskończony.

Możemy przekonać się rachunkiem, że wzór nasz czyni zadość następującym warunkom:

$$1^{\circ}. \quad A A = 0$$

$$2^{\circ}. \quad A B + B C = A C,$$

w wypadku kiedy punkt B leży na prostej $A C$ pomiędzy punktami A , C ,

$$3^{\circ}. \quad A B + B C > A C,$$

w wypadku kiedy punkt B leży poza prostą $A C$.

Wyznamy teraz w płaszczyźnie (t) miejsce geometryczne punktów, których odległość od osi x -ów jest równa danej liczbie δ . Przypuśćmy, że punkt $A(0, y_0)$ czyni zadość żądanemu warunkowi, że więc mamy:

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |y_0|}{1 - |y_0|}. \quad (1)$$

Zwróćmy teraz uwagę na dowolny punkt $C(x, 0)$, położony na osi x -ów. Prowadźmy przez ten punkt prostą do osi x -ów i wyznaczmy na niej punkt $B(x, y)$ w ten sposób, żeby w płaszczyźnie (t) odległość BC była równa δ . Zauważmy, że cięciwa prostopadła do osi x -ów w punkcie C , wyznaczona na naszym modelu, jest szukaną prostą BC , gdyż ze względu na to, że oś x -ów jest zarazem osią symetrii naszego modelu, kąt BCO mierzony w płaszczyźnie (t) musi być równy kątowi $B'CO$.

Stosując teraz nasz wzór na odległość otrzymujemy warunek:

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{1 - x^2 + |y| \sqrt{1 - x^2}}{1 - x^2 - |y| \sqrt{1 - x^2}}, \quad (2)$$

co z uwagi na równość (1) daje:

$$y_0 = \frac{|y|}{\sqrt{1 - x^2}},$$

skąd

$$x^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 = 1.$$

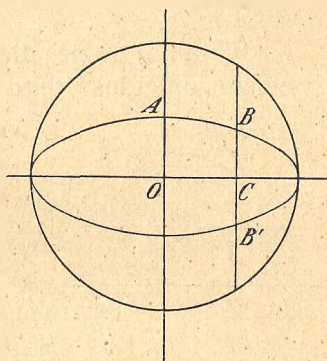


Fig. 10.

Widzimy, że szukane miejsce geometryczne przedstawia się na naszym modelu jako elipsa, której osiami są osie współrzędnych, przyczem pierwsza półoś wynosi 1, a druga y_0 .

Rezultat ten jest niezmiernie ważny, bo usuwa zasadniczą wątpliwość, jaka się musi nasunąć zaraz na początku. Widzimy, że jeśli nasze fikcyjne istoty będą wbijały w szosę reprezentowaną przez oś x -ów prostopadłe do niej słupy telegraficzne o tych samych długościach, to wierzchołki swobodne tych słupów nie utworzą bynajmniej linii prostej tak, jak to jest w geometrii Euklidesa, lecz pewną linię krzywą, którą nazywamy *krzywą równych odległości*.

Zobaczmy, co się teraz stanie, jeśli nasze istoty zechcą wbijać w oś x -ów słupy telegraficzne w ten sposób, żeby swobodne ich końce znajdowały się na prostej, którą możemy wyznaczyć równaniem:

$$y = y_0.$$

W takim razie długością słupa wbitego w punkcie $C(x_1, 0)$ będzie odległość tego punktu od punktu $B(x, y_0)$. Otrzymujemy, oznaczając długość słupa przez δ ,

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{|1 - x^2| + |y_0|}{|1 - x^2 - |y_0||}.$$

Widzimy, że jeśli x zmierza do x_0 , gdzie

$$x_0^2 + y_0^2 = 1,$$

to wówczas δ rośnie nieograniczenie. Z tego wynika sytuacja napozór paradoksalna. Okazuje się, że w miarę, jak nasze fikcyjne istoty posuwają się wzdłuż osi x -ów, muszą sporządzać coraz to dłuższe słupy telegraficzne. Wpobliżu punktu

$(x_0, 0)$ słupy będą musiały być tak olbrzymie, że o zrealizowaniu ich nie będzie mowy. W punkcie x_0 zagadnienie traci sens, bo słupy musiałyby być nieskończone. Poza punktem x_0 zagadnienie nie posiada sensu z tego samego powodu, poprostu dlatego, że żadna prostopadła do osi x -ów nie spotka się nigdy z prostą $y = y_0$. Przekonamy się teraz, że suma kątów w trójkącie jest mniejsza niż 180° .

Ponieważ z uwagi na to, że oś x -ów jest osią symetrii koła, linie równoległe do osi y -ów na modelu tworzą z osią x -ów

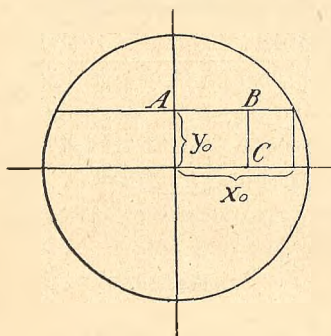


Fig. 11.

w płaszczyźnie ($\angle$) kąty proste, zrozumiemy z łatwością, że w płaszczyźnie ($\angle$) nie mogą istnieć trójkąty, któreby nie miały przynajmniej dwu kątów ostrych. Z tego wynika, że każdy trójkąt możemy otrzymać przez złożenie dwu trójkątów prostokątnych. W tych warunkach wystarczy się przekonać, że suma dwu kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest mniejsza od 90° . W tym celu buduję trójkąt OBC w ten sposób, że bok BC jest prostopadły do osi x -ów, a wierzchołek O znajduje się w początku układu. Trójkąt ten przemieszczam w sposób sztywny tak, żeby punkt B przeszedł do początku układu i żeby punkt C znalazł się na osi y -ów. Nazwijmy wierzchołki nowego trójkąta tak otrzymanego odpowiednio O' , B' , C' . Zważmy, że skoro $B'C' = BC$, to punkt C' musi znaleźć się powyżej poziomu punktu B , bo w przeciwnym razie punkty te nie mogłyby leżeć na krzywej równych odległości. Z tego samego powodu punkt O' musi leżeć na lewo od prostej BC . Z tego wynika, że prosta OO' znajduje się pomiędzy prostą OB a osią y -ów, że więc suma kątów B' i O jest mniejsza od 90° . Ponieważ kąt B' jest równy kątowi B , widzimy, że suma kątów B i O musi być mniejsza od 90° .

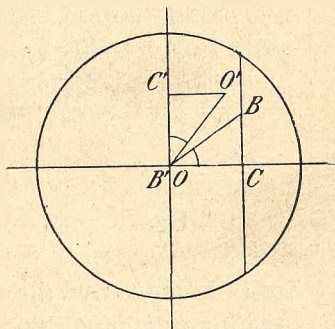


Fig. 12.

Różnicę pomiędzy liczbą 180° a liczbą mierzącą w stopniach sumę kątów w trójkącie nazwiemy *niedoborem* trójkąta. Można się przekonać, że powierzchnia trójkąta musi być proporcjonalna do niedoboru.¹³ Ograniczam się do uwagi, że trójkąt złożony z dwu równych trójkątów ma powierzchnię dwa razy większą i dwa razy większy niedobór, niż trójkąty składowe. Jeśli powierzchnia zmierza do 0, to suma kątów trójkąta zmierza do 180° . Jest to zgodne z tym faktem, że w małym obszarze geometria Łobaczewskiego-Bolyaia różni się nieznacznie od geometrii Euklidesa.

5. Odkrycie geometrii nieeuklidesowej było ciosem śmiertelnym dla kantowskiego idealizmu. Okazało się, że takich przedmiotów jak linje proste nie ma ani poza nami ani w nas. Są co najwyżej jakieś utwory nieokreślone, które raz możemy uważać

¹³ Por. np. Manning: *Non-Euclidean Geometry*. Boston 1901.

za linie proste, drugi raz za linie krzywe. Dalsze badania przedsięwzięte przez Riemanna wykazały, że rolę linii prostych mogą pełnić z powodzeniem nawet linie krzywe zamknięte.

Wyobraźmy sobie istoty dwuwymiarowe, żyjące na powierzchni kuli. Można powiedzieć razem z Poincarém, że to są właśnie te istoty, które widzimy w szklanych kulach ogrodowych.

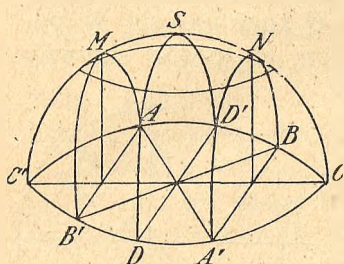


Fig. 13.

Dodajmy, że istoty te mogą poruszać się tylko po pewnym bardzo małym wycinku powierzchni kuli. Przypuśćmy, że pomiary długości wykonują według zasad geometrii euklidesowej. Najkrótszą odległością między dwoma punktami jest dla nich łuk wielkiego koła na kuli. Ten łuk jest więc dla nich odcinkiem linii prostej, a długość tego łuku jest zarazem długością odcinka.

Jest jasne, że całe wielkie koło na kuli nie może być dla naszych istot linią prostą, bo wtedy przez dwa punkty moglibyśmy przeprowadzić nieskończenie wiele linii prostych. W tych warunkach istoty nasze przyjdą do przekonania, że cała płaszczyzna redukuje się do półkuli, a punkty leżące u podstawy tej półkuli na tej samej średnicy będą zmuszone uważać za jeden punkt. Tak więc na naszej figurze punkt A jest identyczny z punktem A' , punkt B z punktem B' , punkt C z punktem C' , punkt D z punktem D' . Widzimy, że tutaj linie proste posiadają długość skończoną i są zamknięte. Są to największe z wszystkich kół możliwych. Jeśli z punktu CC' będziemy kreślili koła coraz to większym promieniem, takie, jak np. koło $AA'NBB'M$, to z chwilą, kiedy promień wzrośnie do ćwierci obwodu wielkiego koła na kuli, nasze koło stanie się linią prostą SDD' . Jest jasne, że tutaj linii równoległych być nie może i że do każdego punktu płaszczyzny mogą dotrzeć do przekroczenia danej linii prostej.

Wszystko to może się zdawać w pierwszej chwili majaczeniem w gorączce, a jednak jeśli się zważy, że wszystkie niepokojące nas możliwości dopuszczalne są jedynie w olbrzymich odległościach, do których istoty nasze żadną miarą dotrzeć nie mogą, to cała sprawa wyda nam się znacznie niewinniejszą. Jeśli dodamy, że gdyby obszar, w którym żyją nasze istoty, był dostatecznie mały, to wzory ich byłyby identyczne z wzorami

geometrii euklidesowej, a cała wspomniana koncepcja może wcale nie przysłały im do głowy, to wtedy cała sprawa stanie się jasną. Prostu idzie tu o załatwianie spraw, które przekraczają wielokrotnie zakres naszego doświadczenia, a które nauczyliśmy się załatwiać przy pomocy aparatu pojęciowego narzuconego nam przez Euklidesa. Do tego, co było niesamowite w geometrii greckiej, zdążyliśmy przywyknąć; w im wyższym stopniu przeprowadzona została ta adaptacja, tem trudniej pogodzić nam się z faktem, że może być zupełnie inaczej. Ale ostateczny rezultat jest ten, że jest wszystko jedno, jakim aparatem pojęciowym operujemy, byle tylko nie było w tem sprzeczności i byle była zgodność z doświadczeniem. W ten sposób dochodzimy do idealizmu osobliwego gatunku, który nazywa się *konwencjonalizmem*.

Źródła konwencjonalizmu należy szukać w teorii Johna Stuarta Milla, który uważał punkty, proste i płaszczyzny za utwory hipotetyczne, dobrane tak, żebyśmy mogli jak najłatwiej orjentować się w doświadczeniu. Właściwym twórcą konwencjonalizmu jest Ernest Mach, dla którego nauka jest konwencjonalnym aparatem, zbudowanym na zasadzie *ekonomji myślenia*, t. j. tak, żeby w sposób jak najprostszy umożliwiał nam orjentowanie się w doświadczeniu. Ta teoria Macha była najrzęczniejszem wybrnięciem z nowej sytuacji, tak jak teoria Kanta była najlepszym przewyciężeniem kryzysu starej metafizyki. Teoria Macha znalazła gorliwego propagatora w Poincarém, który z osobliwą siłą podkreślał konwencjonalny charakter geometrii.

Jest dobrze zauważyć, że idealizm ubrany w piórka konwencjonalizmu stał się jeszcze bardziej niebezpiecznym narzędziem w rękach elementów reakcyjnych od starego dogmatycznego idealizmu.

Tam potrzebna była wiara, na którą bądź co bądź nie każdy potrafi zdobyć się na zawołanie. Tutaj wystarczyła wygoda. Otóż, o zwolenników wygody jest najłatwiej. Znalazła się zaraz spora ich liczba. Jedni jęli głosić *pragmatyzm*, inni *humanizm*, inni *uniwersalizm*, *panidealizm* i tym podobne doktryny. Szło o to, żeby zbudować taki obraz świata, któryby spełniał określone zadanie, np. takie, żeby pewne klasy uznane za wyższe rządziły innemi i żywiły się ich kosztem, a to wszystko w imię autorytetu nauk ścisłych. Stan ten był rozpaczliwy. Życie wystąpiło przeciw tym doktrynom w sposób bezpośredni.

Pozostało podważyć je u podstawy. Ale do tego trzeba było przewyciężyć za wszelką cenę konwencjonalizm naukowy.

Pierwszy decydujący krok został w tym kierunku zrobiony przez Riemanna. Riemann uogólnił pojęcie przestrzeni, wprowadzając na jego miejsce pojęcie pewnej *klasy punktów*. W ten sposób uzyskał najrozszybsze przestrzenie trójwymiarowe, jako odpowiedniki znanych już od dawna przestrzeni dwuwymiarowych, za jakie można uważać powierzchnie. Ta koncepcja doprowadziła Riemanna do przewyciężenia wyjątkowej pozycji linii prostej. Na miejsce linii prostej wysunęła się *najkrótsza droga między dwoma punktami*, czyli t. zw. *linja geodetyczna*.

Że linje geodetyczne dają nam rzeczywiście to samo, co linje proste, łatwo zrozumieć na następującym przykładzie. Weyl pisze:

Jeśli wezmę kartkę papieru, wyrysuję na niej jakiekolwiek figury i zemnę, to przez pomiar figur na tej zmiętej kartce uzyskam te same wartości co poprzednio, o ile zmięcie nie było połączone z podarciem: na kartce obowiązuje ta sama geometria, co w płaszczyźnie; przez geodetyczny pomiar kartki nie jestem w stanie stwierdzić, że kartka jest pognięta.¹⁴

Jeśli np. będę uprawiał analogiczne pomiary na powierzchni kuli, to oczywiście otrzymam inną geometrię. Widzimy, że tyle mamy geometrii płaskich, ile jest getunków powierzchni przechodzących w siebie przez zwykłe wygięcie. W obszarze dostatecznie ograniczonym geometrie te różnią się od siebie na tyle mało, że wszystkie są zgodne z doświadczeniem.

Analogiczne rozumowanie możemy zastosować do przestrzeni trójwymiarowych, musimy jednak uciec się do pomocy formuł, bo czysta intuicja zawodzi tu najzupełniej. Moment ten uważam za decydujący. Okazuje się, że dotarcie do ogólnego pojęcia geometrii bez formuł jest niemożliwe. Jest jasne, że, idąc tą drogą, musimy dojść do unicestwienia geometrii jako nauki o idealnych utworach przestrzennych.

Jeszcze w wyższym stopniu występuje przewaga formuł, jeśli, idąc śladem Einsteina, zechcemy przejść do ogólnej koncepcji *czasoprzestrzeni*. Co to jest czasoprzestrzeń dwuwymiarowa, jest łatwo zrozumieć. Wystarczy przypatrzeć się diagramatowi barometru piszącego. Czasoprzestrzeń trójwymiarową możemy

¹⁴ Weyl: Raum, Zeit, Materie, I. c., p. 80.

objaśnić przy pomocy modelu przestrzennego, ale czasoprzestrzeń czterowymiarowa bez formuł byłaby niejasną fantasmagorią. Żeby mówić o różnych czterowymiarowych czasoprzestrzeniach, musimy się odwołać do czasoprzestrzeni pięciowymiarowej. Jest jasne, że wszystko to ma tyle sensu, ile zawierają go formuły matematyczne.

Choćbyśmy chcieli nawet budować aksjomatykę takich czasoprzestrzeni, to moglibyśmy to zrobić jedynie dzięki analizie wzorów, uzyskanych poprzednio.

6. Na dnie zagadnienia czasu jest tęsknota za przeszłością i obawa przed śmiercią. Sprawy te są nam naogół zbyt bliskie, żebyśmy mogli ograniczyć się w stosunku do nich do kryteriów zdrowego rozsądku. Ten moment występuje bardzo silnie w ciągu całej historii kultury ludzkiej aż do dnia dzisiejszego. W pierwotnym instynkcie czas przedstawia się jako byt samodzielny, podobny do płynącego potoku. Od najdawniejszych czasów uwidocznia się tendencja do wierzenia, że potok ten powrócić może do swego źródła. W tendencji tej jest wyraźne pragnienie przezwyciężenia śmierci. Z drugiej strony występuje koncepcja niezmiennej, nieruchomej wieczności, do której chciałoby się zaliczyć naszą duszę. Pozytywistycznie nastrojony filozof prof. Reichenbach pisze:

Przeżycie czasu pozostaje, jak się zdaje, w bliskim związku z przeżyciem jaźni; „ja jestem“ jest zawsze równoznaczne z „ja jestem teraz“; ale ja jestem w „wiecznym Teraz“ i czuję się niezmiennym w prądzie czasu.¹⁵

Jest to zaiste pobożne życzenie, albo jest to może raczej przywilej jednostek posiadających zdolność pośpiesznego przechodzenia do porządku nad jaskrawymi zmianami zachodzącymi w tem, co nazywają własnem *ja*. Należy przypuścić, że z tego poprzestawania na małym — o ile idzie o obserwację faktów — połączonego z nadmiernymi pretensjami do wiecznej szczęśliwości, zrodziły się mitologiczne marzenia Parmenidesa, Platona i św. Augustyna. Wszyscy ci myśliciele przeciwstawiają sobie potokowi czasu i w tym fackie, że mogą mówić o czasie, zdają się odnajdywać element niezależny od czasu. Nie baczą na to, że to mówienie musi być procesem odbywającym się w czasie,

¹⁵ Reichenbach: Philosophie der Raum-Zeitlehre. Berlin 1928, p. 13.

który może jest jakimś czasem wyższego rzędu, ale nigdy nie może być uważany za coś zasadniczo od czasu różnego.

Parmenides wyobrażał sobie byt jako nieruchomą kulę. Pitagorejczycy przypuszczali, że kula ta otoczona jest nieskończonością, z której czerpie eter. Czas stanowił pogranicze świata skończonego i nieskończoności.

Platon i Arystoteles zrobili z czasu przymiot rzeczy.

Obaj w tem zgadzają się — pisze Pawlicki — że czas przebywa w rzeczach, a przedewszystkiem w ich ruchu i zmianach, ale pierwszy większą wagę kładzie na ruch, drugi na jego miarę, zowiąc czas *liczbą ruchu według później i pierwszej*.¹⁶

Na dnie jest oczywista tendencja do przewyciężenia czasu. Tendencja ta dochodzi do najwyższego napięcia u św. Augustyna, którego borykanie się z zagadnieniem czasu wznosi się na patetyczne szczyty wielkiego dramatu.

Odpowiadając na pytanie, co Bóg robił przed stworzeniem świata, zauważył św. Augustyn, że pytanie to nie ma sensu, bo nie można mówić o działaniu, dopóki niema czasu.¹⁷

Odpowiedź ta jest wielkim krokiem naprzód z punktu widzenia metody, jest bowiem pierwszą bodaj krytyką zagadnienia w imię pojęcia sensu, występującą niezależnie od radykalnego sceptycyzmu. Niemniej odpowiedź św. Augustyna nie jest zadowalającą, bo przecież do tego, żeby stworzyć czas, potrzebny jest inny czas, w którym dokonywa się akt stworzenia. Św. Augustyn stwierdza, że istnieje tylko teraźniejszość. Niema przeszłości, ani przyszłości. Gdyby teraźniejszość trwała, byłaby wiecznością. Ponieważ jednak mija, dąży do tego, żeby nie być. O przeszłości, ani o przyszłości nie możemy mówić, że jest długa lub krótka, ale że taką była lub będzie.

A jednak, Panie, czujemy interwały czasu i porównujemy je z sobą, i nazywamy jedne dłuższymi, a drugie krótszemi. Mierzymy także, o ile jest krótszy albo dłuższy ten czas od innego, i odpowiadamy, że ten jest podwójny lub potrójny, a tamten pojedynczy, albo że ten jest tak długi, jak tamten. Ale mierzymy czasy przemijające, kiedy mierzymy czuciem; ale czasy minione, których już niema, albo przyszłe, których jeszcze niema, któż zmierzyć potrafi? Chyba, że może odważy się ktoś powiedzieć, że potrafi zmierzyć coś, czego niema.¹⁸

¹⁶ Pawlicki, l. c., p. 216.

¹⁷ Confessionum Liber XI, cap. 13.

¹⁸ L. c., cap. 17.

Drugą metodą przezwyciężenia czasu miała być idea wiecznego powrotu. Idea ta zrodziła się w szkole pitagorejskiej w związku z t. zw. rokiem gwiezdny.¹⁹

Idea ta przybrała osobliwie zajmującą postać w dziełach Origenesa, łącząc się z ideą postępu. Origenes pragnął pogodzić sprzeczność doktryny o wiecznym potępieniu z najwyższym miłosierdziem boskim. Sprzeczność tę pragnął usunąć przez koncepcję kolejnych quasi-powrotów światów, która umożliwia w świecie następnym odkupienie tych, którzy w świecie poprzednim skazani zostali na wieczne potępienie. Jeśli potępienie miało być wieczne, można przypuścić, że poszczególne światy trwały nieskończenie długo; jest jednak wątpliwe, czy Origenes tak właśnie pojmował tę sprawę. Jedno jest pewne, że Origenes pojmował światy następne jako doskonalsze od poprzednich, pisze bowiem wyraźnie:

Do jednego celu, mniemamy, dobroć Boga przez Chrystusa swego powoła całe stworzenie, pokonawszy i podporządkowawszy sobie nawet wrogów.²⁰

A potem wywodzi, że podporządkowanie sobie nie może w tym wypadku oznaczać nic innego, jak ten właśnie stosunek, w jakim pozostają do Boga apostołowie, święci i ci wszyscy, którzy poszli drogą wskazaną przez Chrystusa. Z tego wynika, że w ciągu następujących po sobie czasów będą zbawieni po kolei wszyscy, nie wyłączając szatanów:

Myślę, że koncepcja ta nie jest bynajmniej bardziej naiwna od elukubracji, jakie na ten temat panoszyły się w nowożytności. Przeciwnie, jest od nich bezporównania głębsza i konsekwentniejsza.

Jeśli zastanowimy się bliżej nad historią pojęcia czasu i zestawimy ją z historią pojęcia przestrzeni, musi uderzyć nas niezmierny kontrast. Z jednej strony idealna, doskonała konstrukcja Euklidesa, z drugiej strony od samego początku same nieeuklidesowości. W historii geometrii upłynęły wieki, zanim znalazł się Łobaczewski, w historii czasu trzeba było wieków, zanim spróbowano ująć czas w euklidesowy schemat.

Jest jasne, że z chwilą, kiedy to zostało dokonane, czas stał się czemś bezwzględem, podobnie jak przestrzeń. Mechanika

¹⁹ Por. Zawirski: *Wieczne powroty światów*. Kraków 1927.

²⁰ Peri Archon. Lib. I, Cap. 6.

zamieniła się rychło w naukę aprioryczną, podobnie jak geometria. Odtąd czas dzielił wspólne losy z przestrzenią. Razem z nią stał się pod wpływem Kanta aprioryczną formą czystego spostrzegania, wreszcie razem z nią musi dzisiaj rozpaść się na poszczególne czasowe doświadczenia, poza którymi jest tylko maszyna metamatematyczna, służąca do ich porządkowania.

Doświadczenie uczy nas, że pewne zdarzenia są wcześniejsze, a inne późniejsze tak, jak są zdarzenia bliższe i dalsze. Doświadczenie pozwala nam podporządkowywać zdarzenia czasowe pewnym liczbom. Wiemy, że dokonuje się tego przy pomocy zegarka. Zdarzenia nie są czymś ograniczonym i samodzielnym. Wyrzynamy je w sposób sztuczny z całości doświadczenia, która jest nieuchwytna.²¹

Proces ten możemy nazwać schematyzacją. Zdarzenie ujęte w schemat podporządkowujemy pewnej klasie liczb, którą możemy nazwać jego *obrazem przestrzennym* i jednej osobiwej liczbie, którą możemy nazwać jego *punktem czasowym*.

Oczywiście, nie może tu być mowy o jakimś katalogowaniu zdarzeń i opatrywaniu ich etykietami. Idzie jedynie o zbudowanie przyrządu, któryby pozwolił nam przewidywać wyniki doświadczeń, tak właśnie, jak to czyni arytmometr. Sam przyrząd nie jest podobny do tych zdarzeń, które ma przewidywać, tak jak sieć rybacka nie jest podobna do ryby, którą łowi, ani okręt do wybrzeża, do którego ma przybić. Tak jednak, jak sieć może wywołać obraz ryb, a okręt obraz wybrzeża, tak też i nasz system wywołuje pewne obrazy rzeczywistości. Trzeba jednak pamiętać, że obrazy te są nieuchwytne i mętne. Można posługiwać się nimi jako środkami pomocniczymi, ale nie wolno ufać im bezwzględnie. Cały zamęt pojęć fizyki bierze się stąd, że te obrazy bierze poważnie. Eddington odróżnia fizyczne pojęcie wektora od pojęcia matematycznego. Idzie o to, że w matematyce trójka liczb (X, Y, Z) charakteryzująca wektor w jakimś układzie współrzędnych jest różna od trójki (X', Y', Z') , którą otrzymamy przez zmianę układu. Eddington pisze:

Dopóki matematyczne pojęcie wektora wchodzi w grę, nie mogą być żadną miarą obiedwie wielkości (X, Y, Z) , (X', Y', Z') uważane za identyczne; ale w fizyce przyjmujemy, że wyrażają pewien warunek albo pewien związek zachodzący w świecie i że ten warunek

²¹ Por. A. N. Whitehead: *An Enquiry concerning the Principles of Natural Knowledge*. Cambridge 1925, § 16.

jest zupełnie ten sam, czy jest wyrażony przez (X, Y, Z) , czy przez (X', Y', Z') . Wektor fizyczny jest to coś, co tylko niejasno da się ująć, co jest niezależne od współrzędnych i czego należałoby szukać poza naszymi pomiarami siły.²²

Otóż, jeśli raz pozwolimy sobie na taki niejasny obraz tkwiący poza wynikami doświadczeń, to oczywiście musimy popaść w metafizykę bardzo niebezpieczną. Mamy tu jeszcze raz do czynienia z złudzeniem, że metafizyka jest smutną koniecznością, przed którą musimy uchylić czoła. Jest to wynik bardzo grubego nieporozumienia. Fizycy zdają się nie wiedzieć, że matematyka oddawna przestała być nauką o liczbach i że konstrukcja wyrażenia charakteryzującego to, co jest wspólne wszystkim trójkom liczb, jakie otrzymać możemy jedno z drugich przez transformację układu współrzędnych, jest dla niej dziecinną zabawką. W ten sposób dostarcza nam matematyka przedmiotów konkretnych, które czynią wszelkie metafizyczne obrazy zbytecznymi.

Do jakich nieporozumień prowadzi pojęcie *wielkości fizycznej*, można zobaczyć na następującym przykładzie. Prof. Schrödinger uważa szybkość $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ za wielkość fizyczną, a pochodną

$\frac{dx}{dt}$ za fikcję matematyczną wymyśloną przez Newtona,²³ sądzi bowiem, że „doprowadzenie” momentów t_2, t_1 do koincydencji w granicy nie mają odpowiednika fizycznego. Prof. Schrödinger zdaje się nie wiedzieć, że doprowadzenie dwu różnych momentów do koincydencji przez kolejne przejścia jest wogóle niemożliwe, bo do tego potrzebaby było nieskończenie długiego czasu. Wyznaczanie granic jest pewną operacją matematyczną, równie niepodobną do procesów fizycznych, jak dzielenie. Wielkość fizyczna $\frac{dx}{dt}$ jest niewątpliwie fikcją, bo niema jej w żadnym pro-

cesie fizycznym, ale taką samą fikcją, jak iloraz $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, bo przecież natura nie wykonuje działań arytmetycznych tak, jak nie wykonuje działań rachunku różniczkowego. Szybkość $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

²² A. S. Eddington: *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*. Berlin 1925, p. 63.

²³ Por. *Zagadnienia współczesnej nauki*, tłum. Poznańskiego. Warszawa 1933, p. 12—13.

jest wyrażeniem równie dobrem i równie złem, jak $\frac{dx}{dt}$. Idzie tylko o to, żeby umieć korzystać z jednego i drugiego. Gdybyśmy przypuścili, że zjawiska fizyczne łącznie z czasem są naprawdę nieciągłe, to i tak pochodna zachowałaby swoje znaczenie.

Pomysł, że czas doświadczalny jest nieciągły, jest bardzo stary. Spotykamy go już u mistyka aleksandryjskiego Jamblichosa.²⁴ Ernest Mach pisał, że *czas i przestrzeń z punktu widzenia fizjologii przedstawiają tylko pozorne kontinuum i z największym prawdopodobieństwem składają się z elementów nieciągłych, ale nie dających się ostro odróżnić*.²⁵ Mach wypowiadał tę myśl z wielką nieśmiałością, licząc się zapewne jeszcze ciągle z kantowską formą *a priori* czystego spostrzegania.

Jeśli się pomyśli, że pozornej ciągłości czasowej zdarzeń dostarczają nam dziś na każdym kroku kina, łatwo zrozumieć, że koncepcja Macha może wydać nam się zupełnie naturalną. W każdym razie niepodobna brać serjo ciągłości wrażeniowej, tem bardziej, że nawet nie wiemy, co to pojęcie ma oznaczać. Widzieliśmy, że ciągłość matematyczna nie ma z ciągłością wrażeniową nic wspólnego i jest poniekąd jej zaprzeczeniem, na co zresztą już oddawna zwrócił uwagę Bergson. Ale trzeba pamiętać, że rozważania tego rodzaju są typowem uprawianiem metafizyki. Pojęcie rzeczywistego czasu i rzeczywistej przestrzeni jest jednym opisem więcej wśród mętnych opisów rzeczywistości. W rzeczywistości mamy tylko zdarzenia przestrzenne, które konstatujemy wcześniej lub później, i na tem koniec.

Do tego stanu rzeczy fizycy żadną miarą przyzwyczaić się nie mogą. Jest doprawdy trudno zrozumieć, że fizycy, którzy z formuł matematycznych korzystać mogą tylko w bardzo małym zakresie, chcą koniecznie widzieć w nich obiektywne prawa przyrody. Skutkiem tego wszystko to, co w tych formułach wydaje im się balastem nie mającym odpowiednika w doświadczeniu, radziby z nich wyrzucić. Zapominają jednak, że kryteria tego, co jest potrzebne i co jest balastem, zaczerpnęli właśnie z tych formuł, o które idzie, i to w sposób dość powierzchowny. Idąc tą drogą, radziby przedstawiciele fizyki kwantowej wprowadzić kwant długości l_0 i kwant czasu t_0 w ten sposób, żeby

²⁴ Por. Pawlicki, l. c., p. 215.

²⁵ Mach: Erkenntnis u. Irrtum, p. 447.

było $\frac{l_0}{t_0} = c$, gdzie c oznacza szybkość światła.²⁶ Zapominają jednak o tem, że takie kwanty byłyby nowymi mitami, bo przecież nie byłyby to określone liczby, ani wyrażenia matematyczne, ani też nie mogłyby być obserwowane w doświadczeniu.

Nauka musi liczyć się z dwoma zasadniczymi postulatami:

Nie należy za żadną cenę brać poważnie obrazów niejasnych i nie należy uważać danych doświadczalnych dnia dzisiejszego za klasę zamkniętą.

Musimy wiedzieć, że obrazy fizyczne tyle są warte, ile jest w nich skrótu wyobraźniowego formuł matematycznych, a dane doświadczalne zdobyte dotychczas tyle są warte, ile jest w nich możliwości uzupełnień, których dostarczy nam przyszłość.

Dopóki fizycy nie zechcą liczyć się z temi postulatami, dopóty nie wybrną z metafizycznego chaosu.

Ważnym krokiem naprzód w kierunku ścisłej formalizacji fizyki jest świeżo ogłoszona praca prof. Borna i Dra Leopolda Infelda, docenta Uniwersytetu Jana Kazimierza p. t. *Foundations of the New Field Theory* (Proc. of the R. S. 1934).

7. Żeby zorjentować się na konkretnym przykładzie, na czem polega konstrukcja matematycznych obrazów rzeczywistości, zajmujemy się podstawami t. zw. *małej teorii Einsteina*. Autorytet tej teorii jest dziś ustalony, a konsekwencje jej wniknęły głęboko w fundamenty współczesnej fizyki. Teoria ta zrodziła się z przewyżczenia przesądu o bezwzględnej linii czasu, odziedziczonego po fizyce klasycznej.

Jest faktem, że współrzędna przestrzenna x i współrzędna czasowa t — ograniczam się tutaj do przestrzeni jednowymiarowej — są w równaniach fizyki najzupełniej równouprawnione. Jeśli chcemy od jednego układu czasoprzestrzennego (x, t) przejść do układu drugiego (x', t') w ten sposób, żeby równanie fali świetlnej nie uległo zmianie, musimy posłużyć się transformacjami:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x - vt)$$

²⁶ Por. L. Schames: Atomistische Auffassung von Raum u. Zeit. Zeitschrift für Physik 1933.

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(t - \frac{v}{c^2} x \right),$$

gdzie c oznacza szybkość światła, a v szybkość, z jaką oś x' porusza się względem osi x . Otóż, cała trudność polega na tem, że ten nowy czas t' zależy nie tylko od czasu t , ale także od spójrzędnej przestrzennej x , jest to zatem coś, co z tradycyjnym czasem nie ma nic wspólnego. Do tego, żeby funkcję t' uznać za spójrzędną czasową w nowym układzie, potrzebna była genialna intuicja i śmiałość intelektualna, na którą nie stać przeciętnego uczonego, a niekiedy nawet myślicieli najwyższej miary.

Słynny matematyk francuski Hadamard przyznaje się otwarcie, że nie miał odwagi przewyższenia wyjątkowej roli linii bezwzględnego czasu.

Czegoż chcecie? — pisze. — Jak wszyscy moi koledzy, podziwiałem dzieło fizyków, z każdym dniem obszerniejsze, a z tym podziwem łączył się respekt, który narzucała mi świadomość mojego braku kompetencji. Nie zrozumiałem dość wyraźnie, że Fizyka należy do tych osobistości, wobec których niekiedy nie należy mieć uszanowania.²⁷

Te słowa wybitnego matematyka są najlepszą miarą wielkości czynu Einsteina.

Niemniej koncepcja Einsteina nie jest wolna od pewnych naleciałości idealistycznych, które trzeba koniecznie z niej usunąć. Idzie o to, że dawna obiektywna przestrzeń pokutuje w tej teorii, jakkolwiek uzależniona jest od obserwatora. Wyobraźmy sobie dwu obserwatorów, znajdujących się względem siebie w pewnej odległości, która z biegiem czasu nie ulega zmianie. W takim razie istnieje układ przestrzenny, wspólny dla obu obserwatorów. Żadnego zdarzenia w punkcie tak wyznaczonej przestrzeni nie możemy zobaczyć w momencie, w którym ono się odbywa, z wyjątkiem zdarzenia w punkcie, w którym się znajdujemy. Zdarzenia odległe o x zobaczymy dopiero po upływie czasu $\frac{x}{c}$, a więc, jeśli są bardzo dalekie, po wiekach. Ale w żadnym momencie nie zobaczymy choćby najmniejszego zdarzenia dokonującego się w danym momencie w zbiorze punktów tej przestrzeni. Niemniej przestrzeń ta jest z nami w jakiś

²⁷ J. Hadamard: *Comment je n'ai pas trouvé la relativité*. Atti del V. Congresso internazionale di filosofia. Napoli 1924.

osobliwy sposób związana, jest bowiem naszym układem odniesienia. Jeśli zaczniemy się ruszać, to dla obserwatora nieruchomego przestrzeń ta zmienia się razem z naszą szybkością. Dwu obserwatorów znajdujących się w danym momencie w tym samym punkcie *ma* inny układ, poprostu tylko dlatego, że tego wymaga transformacja Einsteina.

Dwa zdarzenia odległe od siebie mogą być równoczesne z punktu widzenia jednego obserwatora, z punktu widzenia obserwatora drugiego jedno zdarzenie nastąpi po drugim po wiekach. Wszystko to jest niezmiernie dziwne. Ostatecznie można się do tego przyzwyczaić, tem bardziej, że nie idzie tu o rzeczy kolidujące z zwykłym doświadczeniem, ale ta niewidzialna przestrzeń, zmieniająca się razem z szybkością obserwatora, jest rodzajem legendy; na to niema rady.

Matematyk getyngeski *Minkowski* starał się trudność tę usunąć przez wprowadzenie pojęcia *czasoprzestrzennego* świata.²⁸ Dla Minkowskiego świat jest to klasa punktochwil, którym różni obserwatorowie podporządkowują pewne czwórki liczb, t. zw. spółrzędne czasoprzestrzenne. Jest jasne, że mamy tu do czynienia z idealizmem najskrajniejszego gatunku. Pomijając już fikcyjny charakter czasoprzestrzeni, trzeba jeszcze liczyć się z nieskończoną mnogością obserwatorów, bez których orientacja w tej czasoprzestrzeni jest niemożliwa. Trzeba jeszcze przypuścić, że obserwatorowie, znajdujący się względem siebie w spoczynku, posiadają usynchronizowane zegarki. Jeśli się zważy, że przecież idzie tu m. i. o zagadnienia astronomii, o odległości międzygwiazdne i o okresy wielu lat świetlnych, to trudno nie stwierdzić, że ci obserwatorowie, potrzebni koniecznie do zbudowania układów spółrzędnych czasoprzestrzennych, są naprawdę czemś takim, jak w dawnym teatrze był *deus ex machina*. Myślę, że jeśli w fizyce mówi się o obserwatorze, to można mieć na myśli jedynie samego siebie, lub swojego kolegę. Jeśli mówi się o nieskończonej liczbie obserwatorów rozsiadanych w czasoprzestrzeni, to wówczas przekracza się granice fizyki i wchodzi się na grząskie obszary metafizycznych fantazji.

Spróbuję tutaj przedstawić pewną interpretację koncepcji Einsteina, która wprowadzie pociągnąć może zmiany formalne dość daleko sięgające w konstrukcji systemu fizyki teoretycznej, ale która jest osobiście prosta i wolna od wszelkiego idealizmu.

²⁸ Minkowski: Raum u. Zeit. Wykład koloński 1908 r.

Idzie poprostu o to, żeby zamiast einsteinowskiego czasu t posługiwać się czasem:

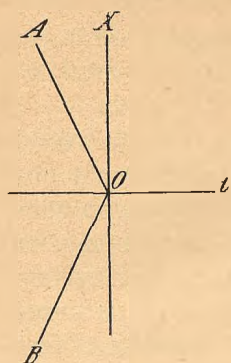


Fig. 14.

$$\tau = t + \frac{r}{c},$$

$$\text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Aby ocenić rolę tej transformacji, wystarczy zauważyć, że w czasoprzestrzeni dwuwymiarowej (x, t) miejsce geometryczne punktochwil, odpowiadających zdarzeniom widzianym przez obserwatora scharakteryzowanego punktochwilą $(0,0)$, jest wyznaczone równaniem

$$t + \frac{|x|}{c} = 0.$$

Jeśli więc lewa strona naszego równania jest to czas τ , widzimy, że przestrzeń odpowiadająca temu czasowi jest to poprostu t . zw. przestrzeń widzialna, a więc coś konkretnego, coś, na co mogę każdej chwili wskazać palcem.

Z tego punktu widzenia współrzędne przestrzenne są to poprostu te dane, jakimi rozporządza astronom. Astronom wyznacza położenie gwiazdy, odczytując na kątomierzach jej azymut i jej południk. Odległość jej od oka taksuje na podstawie danych teoretycznych. Geodeta posługuje się teodolitem, przyczem za podstawę pomiarów bierze pewną odległość wymierzoną zapomocą sztaby mierniczej.

Dane doświadczalne wyznaczone zapomocą tych środków w danym momencie stanowią jedyną prawdziwą przestrzeń doświadczalną. Jest to poprostu to, co widzimy na kliszy fotograficznej.

Interpretacja kliszy fotograficznej polegająca na tem, że pewne konfiguracje lokalizujemy w jednym momencie czasu, a inne w drugim, może być dokonana z sensem tylko pod tym warunkiem, że przyjmujemy istnienie jakiejś obiektywnej, idealnej przestrzeni. Jeśli nie chcemy zaczynać od takiej fikcji, musimy zdecydować się na to, że obraz na kliszy jest *prawdziwym* obrazem przestrzeni. W ten sposób mitologiczna czasoprzestrzeń Minkowskiego razem z jej nieskończenie wielu obserwatorami staje się zbyt ciężka. Zostaje tylko ta przestrzeń, którą widzę, i mój zegarek. Prócz tego mam oczywiście prawo wyobrazić sobie drugiego obserwatora, mającego dane tego samego gatunku, i mam prawo porównywać te jego dane z mojemu.

W dalszym ciągu ograniczam się do przestrzeni jednowymiarowej.

Wyobraźmy sobie teraz dwu obserwatorów, Ω , Ω' , których historia scharakteryzowana jest równaniami:

$$x = 0$$

$$x = x_0.$$

Mówimy, że w tym wypadku obaj obserwatorowie pozostają względem siebie w spoczynku. Oznaczmy przez (x, τ) , (x', τ') współrzędne czasoprzestrzenne w układach obu obserwatorów. Przypuszczam, że w momencie 0 obserwator Ω widzi w zwierciadle znajdującym się w miejscu obserwatora Ω' w chwili 0 na obrazie swego własnego zegarka czas τ_0 . Doświadczenie uczy, że wielkość $-2 \frac{x_0}{\tau_0}$ jest stała. Wielkość tę oznaczamy literą c i nazywamy *szybkością światła*. Widzimy, że tak zdefiniowana szybkość światła nie ma nic wspólnego z pojęciem *rzeczy podróży*, które to pojęcie zakwestjonował bardzo poważnie prof. Bridgman.²⁹ Nasza szybkość światła jest to poprostu liczba, charakteryzująca przestrzeń widzialną.

Formuły transformujące układ (x, τ) na (x', τ') są następujące: dla $x \geq x_0$

$$\tau' = \tau + \tau'_0,$$

gdzie τ'_0 oznacza czas, jaki obserwator Ω widzi na zegarku obserwatora Ω' w chwili 0.

Dla $x_0 \geq x \geq 0$

$$\tau' = \tau + \tau'_0 - \frac{2}{c}(x - x_0).$$

Dla $x \leq 0$

$$\tau' = \tau + \tau'_0 + \frac{2}{c}x_0.$$

Nadto mamy stale

$$x' = x - x_0.$$

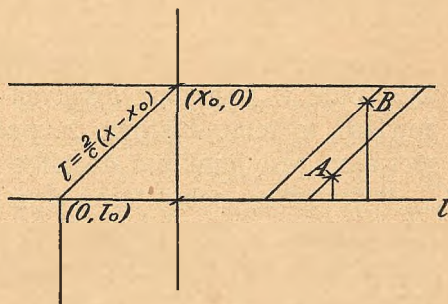


Fig. 15.

Widzimy, że linia przestrzeni obserwatora Ω' w chwili $\tau' = \tau'_0$ przebiega dla $x \geq 0$ wzdłuż przestrzeni obserwatora Ω , dla $x_0 \geq x \geq 0$ wzdłuż linii:

$$\tau = \frac{2}{c}(x - x_0),$$

²⁹ Por. The Logic of modern Physics. New York 1928, p. 101.

dla $x \leq 0$ wzdłuż linii:

$$\tau = \tau_0 = -\frac{2}{c} x_0.$$

Na figurze widzimy, że w obszarze $x_0 \geq x \geq 0$ występuje przemiana porządku czasowego dla punktochwil $A(x_1, \tau_1)$, $B(x_2, \tau_2)$, których spólrzędne spełniają warunek

$$\frac{x_2 - x_1}{\tau_2 - \tau_1} > \frac{c}{2}.$$

Widzimy dalej, że w układzie (x', τ') punktochwila B jest wcześniejsza od A , podczas gdy w układzie (x, τ) stosunek czasowy jest wcześniejszy.

Ten wynik wydaje mi się osobliwie ważny. Widzimy, że odwrócenie porządku czasowego traci tu najzupełniej swoją tajemniczość. Jest naturalne, że dwaj obserwatorowie pozostający w pewnej odległości widzą pewne zdarzenia w różnym porządku. Na tem koniec. Cała olbrzymia dyskusja prowadzona na temat odwracania porządku czasowego w związku z teorią Einsteina staje się bezcelową.

Jest dobrze zauważyć, że wszystkie cechy charakterystyczne czasoprzestrzeni występują już w tym najprostszym wypadku, kiedy obserwatorowie pozostają względem siebie w spoczynku. Wzajemny ruch obserwatorów nie daje nic radykalnie nowego. Linja przestrzeni nie zależy wcale od szybkości, tylko od położenia obserwatora. Widzimy więc, że do każdej punktochwili należy jej własna przestrzeń.

Przestrzeń jest w naszym wypadku linią łamaną. Załamanie występuje w punktach leżących na liniach obserwatorów. Odpowiada to temu faktowi, że punkt, w którym znajduje się obserwator, jest punktem osobliwym przestrzeni.

Wyobraźmy sobie teraz dwu obserwatorów Ω , Ω' , scharakteryzowanych punktochwilą $(0,0)$ i pozostających względem siebie w ruchu jednostajnym. Układ czasoprzestrzenny obserwatora Ω oznaczamy przez (x, τ) , układ obserwatora Ω' przez (x', τ') . Transformację jednego układu w drugi otrzymujemy z transformacji Einsteina, wprowadzając na miejsce t i t' zmienne τ i τ' przy pomocy równości:

$$t = \tau - \frac{|x|}{c}$$

$$t' = \tau' - \frac{|x|}{c}.$$

Wprowadzamy następujące skróty:

$$\begin{aligned} V &= \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \beta_1 &= \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}} + \frac{V}{c} \\ \beta_2 &= \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}} - \frac{V}{c} \\ w_1 &= V \cdot \beta_2 \\ w_2 &= V \cdot \beta_1. \end{aligned}$$

Prosty rachunek daje transformacje następujące:

$$\text{dla } x \geq 0 \quad x' = \beta_1 (x - w_1 \tau) \quad (1)$$

$$\text{dla } x \leq 0 \quad x' = \beta_2 (x - w_2 \tau)$$

$$\text{dla } x \geq 0, x' \geq 0 \quad \tau' = \beta_2 \tau$$

$$\text{dla } x \geq 0, x' \leq 0 \quad \tau' = \beta_1 \left(\tau - \frac{2}{c} x \right) \quad (2)$$

$$\text{dla } x \leq 0, x' \leq 0 \quad \tau' = \beta_1 \tau$$

$$\text{dla } x \leq 0, x' \geq 0 \quad \tau' = \beta_2 \left(\tau + \frac{2}{c} x \right).$$

Zajmujące są tutaj wielkości V , w_1 , w_2 .

Jeśli we wzorach (1) podstawimy 0 na miejsce x , otrzymamy:

$$\frac{x'}{\tau} = -V.$$

Zauważmy, że linia $x=0$ charakteryzuje historię obserwatora Ω . Liczba x' jest to napis na słupie kilometrowym, który widzi podróżnik Ω w momencie τ , podanym na jego zegarku. Widzimy, że V jest to poprostu ta szybkość, którą posługuje się w czasie podróży każdy automobilista. Wzmiankę o tej szybkości znalazłem w cytowanej wyżej książce prof. Bridgmana. Bridgman uważa tę szybkość za najnaturalniejszą.³⁰ Jest dobrze zauważyć, że wzory nasze posiadają sens dla dowolnych wartości szybkości V . W ten sposób legenda, według której nie ma szybkości większej od szybkości światła, jest przewyżczona. Wszystko zależy od tego, jaką definicję szybkości zdecydujemy się przyjąć.

³⁰ L. c., p. 98.

Jeśli we wzorach (1) uwzględnimy równanie:

$$\begin{aligned} & x' = 0, \\ \text{dostaniemy dla } x \geq 0 & \quad \frac{x}{\tau} = w_1 \\ \text{dla } x \leq 0 & \quad \frac{x}{\tau} = w_2. \end{aligned}$$

Widzimy, że w_1, w_2 są to szybkości, jakie uzyskuje obserwator Ω , wyznaczając na odległość położenie obserwatora Ω' i patrząc równocześnie na zegarek.

Widzimy, że w każdym wypadku obserwator wyznacza szybkość, korzystając jedynie z swego własnego zegarka.

Liczba v nie może być wyznaczona przy pomocy jednego zegarka, skutkiem czego z naszego punktu widzenia nie wchodzi w rachubę.

Inwarjantem naszej transformacji jest wyrażenie

$$c\tau(2|x| - c\tau).$$

Znaczy to, że jeśli w wyrażeniu tem podstawimy na miejsce spólrzędnych (x, τ) wyrażenia dane przez transformacje (1), (2), otrzymamy po przeliczeniu

$$c\tau'(2|x'| - c\tau').$$

8. Fizyka klasyczna opierała się na idealistycznym pojęciu rzeczywistości. Dla Kartezjusza rzeczywistość była tym właśnie światem, w którym miała do czynienia geometria grecka. Kartezjusz był zdania, że rzeczywistość poznajemy zapomocą idei wrodzonych, Locke uważał prawa przyrody za uogólnienia uzyskane przez doświadczenie, Kant powrócił do aprioryzmu, z tą tylko różnicą, że rzeczywistość pojmował jako świat fenomenów, a nie *rzecz samą w sobie*. W gruncie rzeczy było to wszystko jedno. Rzeczywistość była czemś doskonałym, czemś określonym przez prawa ściśle i niewzruszalne. Ta koncepcja rzeczywistości wywarła silny wpływ na fizykę i utrzymywała się w niej doniedawna. W podręcznikach fizyki i matematyki stosowanej przyjmowało się jako rzecz pewną, że odcinek rzeczywisty posiada długość x ściśle określoną, którą możemy wymierzyć z pewnym przybliżeniem. Długości rzeczywistej x przeciwstawiało się długości zamierzone $x_1, x_2 \dots$ i definiowało się błąd pomiaru jako liczbę:

$$|x - x_i| \quad i = 1, 2 \dots$$

Na tych założeniach zostały oparte zastosowania rachunku prawdopodobieństwa do fizyki, które *prawdzie*, odnoszącej się do rzeczywistości idealnej, przeciwstawiają *prawdopodobieństwo*, odnoszące się do danych doświadczalnych. Fizyka klasyczna była *deterministyczna*. Determinizm odnosił się oczywiście do rzeczywistości idealnej, rzeczywistość dostępna doświadczeniu była zdeterminowana tylko w przybliżeniu, przyczem jednak zakładało się, że przybliżenie to, w miarę rozwoju środków eksperymentalnych, będzie mogło być zwiększane w sposób systematyczny.

Przeciwieństwem tego determinizmu był *indeterminizm*, t. j. doktryna, według której takie systematyczne zwiększanie dokładności przybliżeń jest niemożliwe. Obiedwie te doktryny oparte były na metafizycznym poglądzie na rzeczywistość i skutkiem tego były w równym stopniu sprzeczne z zdrowym rozsądkiem. Z punktu widzenia nauki opartej na zdrowym rozsądku zagadnienie determinizmu i indeterminizmu musi być sformułowane zgoła inaczej. Musimy ująć je na podstawie następującego schematu: a) zagadnienie sensu, b) zagadnienie przewidywania, c) zagadnienie schematyzacji.

Zagadnieniami temi zajmujemy się w dalszym ciągu.

a) Zagadnienie sensu.

Jeśli chcemy utrzymać się w granicach zdrowego rozsądku, nie możemy zapuszczać się w mgliste tereny idealistycznej doktryny. Idąc drogą, wskazaną przez Hume'a i Macha, musimy powiedzieć: idealna długość odcinka nie istnieje, nie możemy więc o niej mówić z sensem. Możemy jedynie mówić o tych liczbach, które uzyskujemy z pomiaru. Ale pomiar jest czynnością jedynie zgrubsza określoną. Z punktu widzenia pomiaru różnice pomiędzy rezultatami dość mało różnymi od siebie zacierają się mniej więcej tak, jak z punktu widzenia semantyki zacierają się różnice pomiędzy różnymi egzemplarzami litery *a*. Idzie tam przecież o schematyzację pewnego obrazu. Niema dwu obrazów z sobą identycznych. Identyfikacja jest produktem kryterów, działających automatycznie. W tych warunkach jest jasne, że pomiar nie daje nam podstawy do ustanowienia odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej pomiędzy wynikami pomiaru a liczbą rzeczywistą. Możemy jedynie mówić o odpowiedniości jednowiełoznacznej, t. zn. że jednemu pomiarowi odpowiada wiele

liczb rzeczywistych, przyczem klasa tych liczb nie jest ściśle określona. Jedyne wyjście z sytuacji jest wyznaczenie granic pomiaru, t. zn. takich dwu liczb, pomiędzy którymi znajdzie się na pewno liczba, uzyskana przez pomiar.

Przypuśćmy, że takimi liczbami są a , b . W takim razie prawo fizyczne pomiaru da się ująć w podwójną nierówność:

$$a < x < b,$$

gdzie x jest zmienną, przedstawiającą dowolną liczbę, jaką możemy uzyskać przez pomiar.

Jest jasne, że nasze prawo pomiaru pozwala nam przewidywać wyniki pomiaru z równą ścisłością, jak twierdzenia arytmetyki pozwalają nam przewidywać wyniki działań rachunkowych.

Znaczy to, że za każdym razem nierówność nasza będzie spełniona przez liczbę uzyskaną przez pomiar. Niema tu mowy o żadnym przybliżeniu, ani o żadnym prawdopodobieństwie, bo niema tego, do czego należałoby się przybliżać, ani też tej prawdy, do której wyniki nasze miałyby być podobne. Jest tylko jedna prawda, a tą właśnie jest twierdzenie, że wyniki pomiarów muszą spełniać naszą podwójną nierówność.

Jeśli zrozumiemy do głębi istotę tego stanu rzeczy, będziemy mogli załatwić się radykalnie z indeterministycznymi pomysłami współczesnej fizyki.

Zobaczymy, że pojęcie indeterminizmu jest dla dzisiejszych fizyków jedynie środkiem do opisania tego faktu, że stara koncepcja determinizmu nie posiada sensu zgodnego z zdrowym rozsądkiem. Ale z tego nie wynika wcale, żeby nie było w fizyce miejsca na determinizm wolny od idealistycznych założeń.

Osobliwe wrażenie na umysłach fizyków wywarł następujący rezultat teoretyczny, uzyskany przez prof. Heisenberga. Oznaczmy przez Δx różnicę granic, w których zmieniać się może wynik pomiaru położenia elektronu. Oznaczmy przez Δp różnicę granic, w których zmieniać się może wynik pomiaru pędu elektronu, t. zn. szybkości pomnożonej przez masę. Heisenberg wykazał na podstawie rozważań teoretycznych, że

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h,$$

gdzie h jest liczbą stałą, t. zn. stałą Plancka.³¹ Wynik ten objaśniają Szczeniowski i Ziemecki następującymi słowami:

³¹ Por. Szczeniowski i Ziemecki: *Promieniowanie i materja*. Warszawa 1932, p. 157.

Przypuśćmy, że jakiś pomiar pozwolił nam dokładnie określić pęd elektronu. Dla uzupełnienia danych, wymaganych przez mechanikę klasyczną, musimy jeszcze wymierzyć położenie elektronu. Zobaczymy, że pomiar położenia daje nam, co prawda z pewnym stopniem nieokreśloności, położenie elektronu, ale zato niszczy częściowo, dzięki nieuniknionemu i niedającemu się określić co do wartości zakłóceniu, poprzedni nasz stan wiadomości co do pędu elektronu.³²

W dalszym ciągu dowiadujemy się, że dla oznaczenia położenia elektronu trzeba byłoby np. przepuścić go przez wąską szczelinę. Ale przy przejściu przez szczelinę droga elektronu zmienić może w pewnych granicach kierunek, skutkiem czego jego pęd staje się w pewnych granicach nieokreślony.

Teoria Heisenberga jest zajmująca z tego powodu, że wyznacza nam granice dokładności pomiarów, których przekroczyć nie możemy, i wiąże jedno z drugim (położenie z pędem) wbrew dotychczasowym poglądom. Ale z tego nie wynika bynajmniej, żeby teoria ta przynosiła coś istotnie nowego z punktu widzenia zagadnienia determinizmu. Jeśli raz stwierdziliśmy, że pojęcie idealnej długości nie ma sensu, a doświadczenie nie może dostarczać nam liczb określonych, ale klas liczb zamkniętych w pewnych granicach, to pojęcia takie jak *determinizm* i *indeterminizm* musimy przystosować do tego stanu rzeczy. Jeśli odwołamy się do konstrukcyj opartych na idealistycznej fizyce, to oczywiście będziemy mieli podstawę do mówienia o indeterminizmie, bo będziemy wierzyli, że istnieje jakieś położenie idealne elektronu i idealny pęd, którego nigdy nie poznamy. Ale właśnie o to idzie, że takie stanowisko jest błędne. Indeterminizm znaczyłby w tym wypadku, że w przebiegu zjawisk istnieje pewna dowolność. Tak właśnie zdaje się pojmować go prof. Schrödinger, który porównuje elektrony z jednostkami ludzkimi i stara się dzięki doktrynie indeterministycznej uchronić nas od *zbyt bezceremonialnego wkraczania w prywatne życie jednostki*³³. Warto dodać, że argument ten jest obosieczny, można bowiem zauważyć, że właśnie wtedy, gdy zdajemy sobie sprawę z tego, że nie znamy praw rządzących życiem jednostki, będziemy postępowali oględniej. Jeśli wierzyć będziemy, że praw takich nie ma, może zrodzić się w nas pokusa stworzenia ich w imię naszej własnej zachcianki.

³² L. c., p. 162.

³³ Por. Zagadnienia współczesnej nauki, l. c. p. 93.

Jeśli jednak stwierdzimy, że nie mamy niezależnych od siebie pojęć pędu i położenia, to wszelkim pytaniom, jaki jest rzeczywisty pęd elektronu, lub jego położenie, musimy odmówić naukowego sensu. Tem samym nie możemy mówić z sensem o swobodnym, niedostępnym naszemu poznaniu poruszaniu się elektronu.

Jest z tem podobnie, jak z sprawami życia codziennego. Nie mamy ściśle określonego pojęcia *uczciwości*. Zależnie od tego, jak je określimy, będziemy mogli lepiej lub gorzej orjentować się w doświadczeniu. Jeśli zechcemy dać folgę radykalnemu pogładowi na uczciwość, to okaże się, że nikt prawie nie będzie uczciwy i pojęcie nasze będzie nieużyteczne. Byłoby to coś podobnego, jak zbyt daleko posunięte żądanie sprecyzowania położenia elektronu. Jesteśmy skazani na to, żeby zakres pojęcia uczciwości ustalić w ten sposób, żeby dostatecznie liczna grupa ludzi została niem objęta. W fizyce musimy zgodzić się na pojęcie położenia na tyle szerokie, żeby pojęcie pędu było określone w dostatecznie ciasnych granicach. Ale tak, jak w pierwszym przypadku nie możemy twierdzić, że nasza rezygnacja z radykalizmu nie pozwala nam dowiedzieć się, kto jest *naprawdę* uczciwy, tak też i w drugim przypadku nie możemy ubolewać, że nie znamy *prawdziwego* położenia i pędu elektronu, poprostu dlatego, że te pojęcia nie mają sensu.

Nie pozostaje nam nic innego, jak skonstatować, że potrafimy przewidywać wypadki w tych granicach, jakie nasuwa nam nasz aparat pojęciowy. Żądanie przewidywania poza temi granicami jest czystą metafizyką, zgoła niezgodną z zdrowym rozsądkiem.

Prof. Heisenberg zwrócił uwagę na to, że mamy tu do czynienia z zmianą warunków doświadczenia wywołaną interwencją obserwatora. Uwaga ta jest słuszna, może jednak łatwo doprowadzić do nieporozumień. Jest z tem podobnie jak z argumentem o niemożliwości introspekcji. Mówi się, że introspekcja jest niemożliwa, bo zmienia przebieg zjawisk. W rzeczywistości introspekcja pozwala nam poznać te zjawiska, które są dostępne introspekcji, a te zjawiska, które nie są dostępne introspekcji, są poprostu mitem, pozostałym po teorii jedności świadomości. W naszym wypadku pęd elektronu połączony z położeniem poza granicami ustalonymi przez Heisenberga jest również mitem, nie możemy więc mniemać, że jest niepoznawalny.

Pojęcie niepoznawalności związane jest ściśle z założeniem istnienia niezależnego od możliwych doświadczeń. Jeśli założenia takiego przyjąć nie chcemy, musimy zrezygnować z pojęcia niepoznawalności.

Gdybyśmy liczyli się z tem, że może kiedyś potrafimy przekroczyć granice Heisenberga, to wtedy uzyskalibyśmy nowe pojęcia pędu i położenia, ale równocześnie mielibyśmy prawa determinujące wyniki odnośnych pomiarów. W tych warunkach nie mamy podstawy w żadnym wypadku do mówienia o indeterminizmie.

b) Zagadnienie przewidywania.

Poza dziedziną niejasnych sformułowań, w których dyskusja między determinizmem a indeterminizmem sprowadza się do zagadnienia rzeczywistości, istnieją zagadnienia konkretne, które nadają całej sprawie zupełnie inny charakter. Zwrócę uwagę na następujący argument prof. Pascual Jordana.³⁴

Jordan wskazuje na to, że promień spolaryzowany przepuszczony przez pryzmat Nicola, którego płaszczyzna polaryzacji tworzy z płaszczyzną polaryzacji pryzmatu kąt φ , przechodzi przez pryzmat tylko częściowo. Ułamek $\cos^2 \varphi$ natężenia światła przechodzi przez pryzmat, ułamek $\sin^2 \varphi$ zostaje odbity.

Jeśli ograniczymy się do poszczególnego kwantu świetlnego, to nie można przewidzieć, czy przejdzie przez pryzmat, czy będzie odbity. Idzie tu, rzecz jasna, o doświadczenie konkretne, niezależne od tego, czym jest kwant świetlny. Prostu nie wiemy, jaki będzie wynik doświadczenia. Teoria daje prawdopodobieństwo $\cos^2 \varphi$, że kwant przejdzie przez pryzmat, $\sin^2 \varphi$ — że nie przejdzie.

Jordan twierdzi, że z tej sytuacji niema wyjścia, bo trzeba by nieskończenie wiele właściwości fotonów z uwagi na nieskończoną ilość kątów φ . Otóż, tu mamy do czynienia z nieporozumieniem. Jest to zjawisko bardzo typowe dla dzisiejszych fizyków. Z jednej strony nieciągłość i skrajny finityzm, z drugiej strony niewolnicza zależność od matematycznego idealizmu. Ale przecież prawdopodobieństwa $\cos^2 \varphi$ i $\sin^2 \varphi$ nie posiadają znaczenia bezwzględnego, a poniżej pewnej granicy tracą wszelki

³⁴ Por. P. Jordan: *Quantenphysikalische Bemerkungen zur Biologie und Psychologie. Erkenntnis* 1934.

sens doświadczalny. A potem, nie możemy przecież naliczyć 10^{10} możliwych nastawień pryzmatu Nicola.

Uwaga ta nie jest oczywiście wyjaśnieniem zjawiska i nie ma do tego pretensji, jest tylko ostrzeżeniem przed zbytniem symplifikowaniem zagadnień. Przeżywamy dopiero pierwsze początki badań tego rodzaju i nie mamy obowiązku, ani też nie możemy mieć pretensji do odpowiadania na wszystkie pytania.

Myślę, że musimy raz wyraźnie powiedzieć, że niemożność przewidywania zjawisk określonych nie świadczy wcale o tem, iż zjawiska te nie są zdeterminowane.

W odczycie, wygłoszonym na zjeździe matematyków niemieckich w Królewcu, sformułował prof. Heisenberg doktrynę przewidywania w sposób następujący:

Jeśli obecny stan izolowanego systemu odnośnie do wszystkich decydujących składników jest dokładnie znany, to na tej podstawie możemy wyliczyć przyszły stan tego systemu³⁵.

Heisenberg odrzuca to sformułowanie z tego powodu, że poznanie wszystkich decydujących składników uważa za wykluczone. Ale widzieliśmy, że system metamatematyki racjonalnej pozwala nam poznać wszystkie reguły budowania twierdzeń arytmetyki, a tem samem daje nam do dyspozycji wszystkie decydujące składniki. Pomimo to nie możemy jednak, jak widzieliśmy, przewidzieć wszystkich możliwych wyników, do jakich doprowadzić nas może stosowanie naszych reguł. Niemniej system metamatematyki musimy uważać za pierwowzór systemu zdeterminowanego. W tych warunkach musimy dojść do wniosku, że przewidywanie nie jest tu momentem decydującym, ale chodzi jedynie o sam fakt istnienia sprecyzowanego systemu.

Przykład ten wydaje mi się osobliwie przekonujący, bo rzeczywiście mówić o indeterminizmie dodawania i mnożenia, byłby to oczywisty absurd. Ale nietrudno podać przykłady, zaczerpnięte z nauk przyrodniczych, które świadczą dobitnie, że w wielu wypadkach nie możemy marzyć o przewidywaniu zdarzeń, jakkolwiek ani na chwilę nie wątpimy, że są zdeterminowane. Twórca teorii kwantów, prof. Planck, cytuje zjawiska meteorologiczne³⁶. Wymienię jeszcze kartkę papieru, poruszającą się na wietrze.

³⁵ W. Heisenberg: Kausalgesetz u. Quantenmechanik. Erkenntnis 1931.

³⁶ Por. Zagadnienia współczesnej nauki, I. c., p. 30.

c) *Zagadnienie schematyzacji.*

Całe zagadnienie sprowadza się według mego przekonania do pytania, jak daleko można posunąć schematyzację rzeczywistości. Jest pewne, że schematyzacja taka nigdy nie będzie gotowa.

Gdybyśmy przypuszczali tak, jak to czyni Meyerson, że jest jakaś gotowa rzeczywistość, którą poznajemy krok po kroku, to musielibyśmy zgodzić się na to, że nasza schematyzacja pozostawi na dnie jakąś irracjonalną resztę, którą raczej resztką, albo odpadkiem nazwałoby należało. Rzeczywiście, nie miałyby ona nic wspólnego z tą *rzeczą dla nas*, o której pisał Engels, i nie mogłaby wpływać na nasze życie. Ale idzie o to, że ta reszta, czy resztką jest typową idealistyczną fikcją i nie da się żadną miarą pogodzić z kryteriami zdrowego rozsądku. Trzeba przecież pamiętać, że jeśli mówimy o rzeczywistości, to nie mamy na myśli jakiegoś idealnego obiektu, tylko te schematy, z jakimi w danym wypadku mamy do czynienia. Zagadnienie indeterminizmu i determinizmu może mieć sens wolny od metafizycznych naleciałości jedynie pod tym warunkiem, że pojęcia te zwiążemy z pojęciem schematyzacji rzeczywistości. Otóż fakt, że te schematy nigdy nie tworzą klasy zamkniętej, decyduje o tem, że będzie zawsze niewiara w możliwość dalszej schematyzacji, i zawsze krzawić się będzie wiara w taką możliwość. Nie mamy teoretycznego argumentu na to, żeby przekonać przeciwnika o nieograniczonych możliwościach rozwoju myśli ludzkiej, nie możemy więc dowieść, że determinizm jest doktryną prawdziwą, możemy jednak skutecznie walczyć z indeterministycznym irracjonalizmem. Taką walkę prowadzi właśnie współczesna fizyka, która schematyzację rzeczywistości posunęła niezwykle daleko. Z naszego punktu widzenia fizyka ta jest *par excellence* deterministyczna. Jeśli fizycy głoszą indeterminizm, to płynie to jedynie stąd, że nie liczą się z tradycyjną koncepcją indeterminizmu, myśląc jedynie o walce z naiwnym determinizmem fizyki klasycznej. Nie baczą jednak na to, że w ten sposób dają broń w rękę irracjonalnej reakcji, przyczyniając się pośrednio do umocnienia panującego chaosu.

9. Zdarzył mi się wypadek następujący: Uczeń, od którego zażądałem, aby podał przykład indukcji niezupełnej, odpowiedział bez wahania: Argentyna, Brazylja, Urugwaj są republikami, za-

tem każde państwo południowo-amerykańskie jest republiką. Zdziwiony tą zgruntu błędną odpowiedzią, zapytałem, skąd kandydat wziął ten przykład. Dowiedziałem się, że z *Elementów* prof. Kotarbińskiego. Zaciekawiony tą wiadomością przeszukałem *Elementy* i znalazłem źródło nieporozumienia. W *Elementach* jest zdanie następujące:

A oto przykłady indukcji niewyczerpującej: Argentyna jest republiką, Brazylija jest republiką, Urugwaj jest republiką; racja: każde państwo niepodległe południowo-amerykańskie jest republiką³⁷.

Okazuje się, że autor nie wnioskuje z poszczególnych przykładów, ale — przeciwnie — dedukuje je z ogólnej przesłanki. Ale w takim razie trudno dociec, co to ma wspólnego z indukcją. Jeśli znam prawo ogólne, to oczywiście mogę je stosować do szczegółów, ale właśnie idzie o to, co mam robić, jeśli prawa takiego nie znam. Muszę przecież zbudować je w jakiś sposób; gdybym zbudował je tak, jak to radzi Kotarbiński, to popełniłbym błąd metodologiczny, a gdybym rozumowanie takie przeprowadził za czasów cesarza brazylijskiego Dom Pedra, to doszedłbym do fałszywego poglądu na sprawę, od którego nie uchroniłby mnie formalistyczny wybieg Kotarbińskiego.

Kotarbiński tak jest zajęty poprawianiem języka polskiego przy pomocy swoich niezgrabnych schematów i tak jest zapatrzonny w Arystotelesa, że nie jest w stanie dostrzec grubych błędów, jakie popełnia.

Arystoteles sądził, że z tego, że człowiek jest długowieczny i koń jest długowieczny i muł jest długowieczny, wynika, że wszelkie stworzenie, pozbawione żółci, są długowieczne³⁸. Zdanie to budzi pewien niepokój w Kotarbińskim, bo po słowach *pozbawione żółci* umieścił w nawiasie wykrzyknik, ale niepokój ten nie jest na tyle silny, żeby nasunął mu wniosek, że cała ta doktryna jest zwykłym nieporozumieniem. Mamy tu przecież do czynienia z metodą zgoła fałszywą, która doprowadziła m. i. Księgi Starego Testamentu do zaliczenia zająca do zwierząt przeżuwających i zawikłała naukę średniowieczną w bezprzykładne zamieszanie pojęć. Trudno dociec, dlaczego w uniwersytetach polskich w wieku XX. młodzież musi borykać się z zagadnieniami, które były przestarzałe już za czasów Galileusza i Newtona.

³⁷ Por. Kotarbiński, *Elementy*, p. 278.

³⁸ Por. Kotarbiński, l. c.

Dr. Metallmann pochwała stanowisko Kotarbińskiego. Dr. Metallmann pisze wyraźnie:

Teza, że wyjaśnienia i metody indukcyjne wogóle polegają na wnioskowaniu od szczegółu do ogółu, nie jest zresztą poprawna³⁹.

Ale na innym miejscu formułuje dr Metallmann zasadę indukcji w słowach: *w przyrodzie niema unikatów*⁴⁰ i uzupełnia ją zasadą *częściowej tożsamości*, która powiada, że *jeżeli pewien element przyrody się powtarza, powtarza się zawsze jeszcze inny*⁴⁰.

W tych warunkach czytelnik jest w prawdziwym kłopotcie, bo przecież trudno dociec, jaki mógłby być cel powyższych zasad, jeśli nie jest nim przejście od szczegółu do ogółu.

Myślę, że formuły dra Metallmanna odpowiadają istotnym tendencjom myślenia przyrodniczego, posiadają jednak wartość drugorzędną ze względu na płynność takich pojęć, jak *unikat* i *powtarzanie się elementów przyrody*.

Zwróćmy uwagę na następujące przykłady.

Jeśli botanik, studjujący florę danej okolicy, spotka egzemplarz pewnego gatunku po raz drugi, to zdarzenie to będzie dla niego bez znaczenia. Jeśli jednak będzie mu szło o sporządzenie statystyki roślin badanej okolicy, to to samo zjawisko będzie dla niego bardzo ważne. Opieram się tutaj na argumencie Nicoda, wysuniętym w polemice z Keynesem.⁴¹

Można tutaj dodać, że wspomniany badacz musi baczyć, żeby tego samego egzemplarza nie zanotował dwa razy. Inaczej przedstawi się sprawa, jeśli będziemy chcieli zająć się badaniami doświadczalnymi nad psychologią obserwacji przyrodniczych. W takim razie każda poszczególna obserwacja stanie się dla nas faktem indywidualnym.

Dawniejsi filozofowie przyrody byli zdania, że fakty indywidualne nie należą do zakresu badań przyrodniczych. Poincaré pisał, że wyładowanie Jana Bez Ziemi w danym miejscu nie jest faktem przyrodniczym, bo fakt ten nigdy się nie powtórzy. Ale oderwanie się ziemi od słońca także nigdy się nie powtórzy, ani też nigdy już nie pojawi się kometa Orkisz. Można by wprowadzić być innego zdania w związku z powrotem światów, o którym była mowa poprzednio, ale wtedy należałoby również

³⁹ Por. J. Metallmann: *Determinizm nauk przyrodniczych*. Kraków 1934, p. 332.

⁴⁰ L. c., p. 392.

⁴¹ Por. J. Nicod: *Le problème logique de l'induction*. Paris 1924, p. 76.

liczyć się z powtórkiem wyładowaniem Jana Bez Ziemi w danym miejscu.

Rozważania te prowadzą do wniosku, że metoda indukcyjna w żaden sposób nie może być ujęta w ogólną formułę. W niektórych wypadkach mam prawo wyprowadzić ogólny wniosek z jednego zdarzenia. Jeśli udało mi się zbudować aparat radiowy dzisiaj, to z tego wnoszę, że umiem budować aparaty radiowe i wiem, że zbuduję go jutro, jeśli zechcę. Jeśli raz został stwierdzony jakiś nieoczekiwany efekt w laboratorium fizycznym, to czeka się co najwyżej, żeby udało się powtórzyć go w jakimś innym laboratorium, celem wyeliminowania trudnych do uwzględnienia warunków lokalnych lub ewentualnej autosugestji odkrywcy, ale jeśli powtórzenie takie wypadnie pomyślnie, sprawa jest definitywnie załatwiona i nikt nie będzie wątpił, że dany efekt będzie można uzyskać tyle razy, ile się zechce.

W innych wypadkach sprawa przedstawia się mniej pewnie. Z chwilą, kiedy będę miał na myśli ten właśnie eksperyment, który teraz mam wykonać, muszę odwołać się do prawdopodobieństwa, bo mogą zajść nieprzewidziane przeszkody, które pokrzyżują moje plany.

Istnieją jednak wypadki, kiedy nawet olbrzymia liczba faktów, nawet wszystkie fakty znane od początku świata nie dają mi nie tylko pewności, ale nawet cienia prawdopodobieństwa, że tak będzie w dalszym ciągu. Już John Stuart Mill zwracał uwagę na to, że z tego, że wszystkie znane łabędzie były białe, nie należało wnioskować, że niema łabędzi czarnych.

To samo jest z historją każdego wynalazku. Dopóki pierwszy aeroplan nie został zbudowany, a wszystkie próby latania, poczynawszy od Dedala i Ikara, a skończywszy na Leonardzie da Vinci, kończyły się klęską, nie było podstawy do przypuszczenia, że ludzie kiedykolwiek będą latali, jakkolwiek uczeni w Piśmie zapewniają, że prorok Daniel przepowiedział to wyraźnie. Niemniej, gdyby ktoś z ówczesnego stanu rzeczy chciał wyprowadzić wniosek indukcyjny, że ludzie nigdy nie będą latali, popełniłby gruby błąd metodologiczny.

Widzimy, że mamy tu do czynienia z bardzo zawilem zagadnieniem, w którym sprawa sensu pojęć wchodzących w grę, sprawa znajomości faktów i sprawa zmiany panujących stosunków wikłają się z sobą w sposób osobliwy.

Element zgadnięcia skrótu myślowego, podyktowanego wy-

czuciem, nie da się z rozumowania indukcyjnego żadną miarą wyeliminować.

Ernest Mach pisze:⁴²

Z chwilą, kiedy wzbudzi się w nas zainteresowanie dla jakiegoś nowego faktu z powodu jego bezpośredniej lub pośredniej biologicznej doniosłości, z powodu jego zgodności lub niezgodności z innymi faktami, to skupiamy naszą uwagę, dzięki samemu tylko psychicznemu mechanizmowi asocjacji, na dwa lub kilka elementów związanych z sobą w tym fakcie. Mimowoli występuje *abstrakcja*, pominięcie elementów uznanych za nieważne, przez co wypadek indywidualny nabiera charakteru wypadku ogólnego, reprezentującego wiele wypadków indywidualnych. Wystąpieniu tej sytuacji psychicznej sprzyja naturalnie nagromadzenie *wielu* jednakowych faktów, ale w związku z żywym zainteresowaniem sytuacja ta może być spowodowana *jednym* takim faktem.

Idzie tu o najprostszy, automatycznie dokonujący się proces schematyzacji rzeczywistości, ten właśnie, który sprawia, że dwa różne egzemplarze litery *a* identyfikujemy z sobą w granicach semantyki.

Widzimy, że cała sprawa sprowadza się do bezpośredniego działania kryterjów zdrowego rozsądku. Kryterja te nie mogą być ujęte w schemat i nie możemy wyznaczyć ściśle granic ich działania. Z jednej strony odgrywa tu rolę przyzwyczajenie i związana z niem wprawa, z drugiej strony konstrukcja coraz to doskonalszych aparatów obserwacji takich, jak lupa, mikroskop, teleskop, spektroskop, zdjęcie röntgenowskie i t. d. Wiemy, że dzięki takim aparatom to, co było wczoraj nieokreślone i tonęło w mglistych fantazjach, staje się dzisiaj czymś zupełnie jasnym, a nawet trywialnym. Wystarczy zwrócić uwagę na historię medycyny i rolę, jaką odegrał w niej mikroskop i promienie Röntgena. Nadto trzeba pamiętać, że prócz pogłębienia schematyzacji rzeczywistości dają nam nowe aparaty możliwość rozszerzenia zakresu doświadczeń ujętych w schemat oddawna, które w innych warunkach nie doszłoby do skutku poprostu dlatego, że nikomu nie przyszłoby do głowy przeprowadzać doświadczenia, które na podstawie pojęć, panujących w danym momencie, musiałyby być uznane za bezcelowe. Mam tu na myśli odkrycie izotopów ołowiu. W doskonałej książce Szczeniowskiego i Ziemeckiego czytamy:

⁴² Erkenntnis u. Irrtum, I. c., p. 315.

Przy zapoznaniu się ze zdumiewającymi rezultatami Astona, trudno się pozbyć niejakiego sceptycyzmu, niewiary. Metoda promieni kanałowych jest bądź co bądź tylko pośrednia. Pragnęlibyśmy mieć odmiany izotopowe w ilościach ważkich; pragnęlibyśmy móc zbadać metodami zwykłej chemii różnice w ciężarach atomowych, przekonać się zapomocą piknometru, że gęstości różnych odmian pierwiastków są różne. Okazało się to naprawdę możliwem. Najbardziej olśniewające wyniki otrzymano w przypadku ołowiu. Stwierdzono, że w różnych punktach kuli ziemskiej istnieją rudy, zawierające dwie odmiany ołowiu o ciężarach atomowych, różniących się prawie o 1%. Tak wielka stosunkowo różnica mogłaby być wykryta już przez studenta drugiego roku chemii.⁴³

Jeśli czyta się historję jakiegokolwiek wynalazku, to nawet wtedy, jeśli wchodzą w grę aparaty bardzo skomplikowane, przychodzi się ostatecznie do przekonania, że cała sprawa jest prosta i da się sformułować w sposób ścisły. Każdy aparat jest ostatecznie czemś podobnem do systemu metamatematyki racjonalnej. Jeśli jednak obudzi się w nas ambicja ujęcia w schemat pojęcia aparatu, to wtedy uderzamy czołem w próżnię. Wszystkie próby takiej schematyzacji, począwszy od ich wynalazcy, Bacona z Verulam, aż do naszych czasów, okazały się bezpłodne. Jedynie pouczająca jest historia wynalazków. Może być, że przeprowadzenie systematycznej ich klasyfikacji okazałoby się do pewnego stopnia korzystne dla dalszych badań. Musimy jednak stwierdzić, że to, co jest wspólne wszystkim aparatom, sprowadza się do działania określonego. To, co jest naprawdę ważne, są to cechy indywidualne poszczególnych typów aparatów. Jest z tem tak mniej więcej, jak z psychologją, z tą tylko różnicą, że świat aparatów przedstawia bezporównania większe bogactwo typów.

Zagadnienie indukcji komplikuje się niezmiernie z chwilą, kiedy wykraczamy poza granicę wypadków o charakterze ogólnym i zechcemy tworzyć szeregi wypadków indywidualnych. Mamy wówczas do czynienia z tem zjawiskiem, które występuje w t. zw. indukcji zupełnej. Z indukcją taką mamy do czynienia w naukach przyrodniczych wtedy, jeśli np. chcemy utworzyć szereg przodków danego organicznego indywiduum.

Wspomniałem wyżej, że gdybyśmy przyjęli zasadę, że matka człowieka jest człowiekiem, to musieliśmybyśmy przyjść do wniosku, że pewna kobieta (Ewa) nie miała matki, albo że ludzkość trwała

⁴³ L. c., p. 26.

wiecznie. Dowód ten byłby zupełnie ścisły. Opierałby się na indukcji zupełnej. Rola indukcji zupełnej jest tu negatywna, nie mniej jest, jak widzimy, niezmiernie doniosła. Schemat indukcji zupełnej, nadający się do zastosowań przyrodniczych, został stworzony przez Whiteheada i Russella (relacja ancestralna).

Pozytywne zastosowania indukcji zupełnej w naukach przyrodniczych natrafiają na trudności z tego powodu, że przejście od wypadku dowolnego do następnego, nie może być naogół z całą ścisłością stwierdzone. Tu jest ten moment, w którym do nauk przyrodniczych wkracza rachunek prawdopodobieństwa. Dopiero w tym punkcie stają się nauki przyrodnicze niezupełnie pewnymi i skazanymi na przybliżenia. Oczywiście, mówię tu o pewności ludzkiej, a nie Boskiej. Wiem przecież, że nie mamy absolutnej pewności, że jutro kamienie będą spadały na ziemię i że nie zamieniają się w rafałowskie aniołki. Wiem o tem, ale podkreśliłem to wyraźnie powyżej, że z taką pewnością wcale liczyć się nie zamierzam.

Prawo grawitacji jest w tym samym stopniu pewne jak to, że litera *a* nie zamieni się w literę *b*. Bez niezmiennych liter niema matematyki, a tem samem niema zgoła nic pewnego. To, co jest w tym samym stopniu pewne, jak to, że litery są między sobą różne, nie może być uważane za prawdopodobne; na to niema rady. Tylko pod warunkiem, że pamiętać będziemy o tym postulatcie, możemy liczyć, że ustrzeżemy się zamieszania pojęć, związanego z podstawami rachunku prawdopodobieństwa i statystycznych metod badania.

Rozdział IX.

Zagadnienie rzeczywistości.

1. Zagadnienie stworzenia ścisłego języka filozoficznego, wzorowanego na języku nauk ścisłych, niepokoiło logików od czasów najdawniejszych. Taką próbą była niewątpliwie sylogistyka Arystotelesa, taką próbą była *Ars Magna* Rajmunda Lulla, taką wreszcie próbą była *Characteristica generalis* Leibniza i *Ethica more geometrico demonstrata* Spinozy. Nie potrzeba tu dodawać, że próby te okazały się iluzoryczne, jakkolwiek ich autorowie przypisywali im bardzo wielkie znaczenie. Jak wiele spodziewał się Leibniz po swoim odkryciu, świadczą o tem następujące jego słowa, cytowane przez Sleszyńskiego:¹

...w osiemnastym roku życia, pisząc książkę: *De arte combinatoria*, którą wydałem w dwa lata później, natrafiłem na pewną myśl przewodnią, przedziwną tajemnicę prawdziwej analizy, której wynikiem jest język, czyli charakterystyka rozumowa. Nikt inny, myślę, tego nie spostrzegł, bo inaczej ten, kto to spostrzegł, porzuciłby wszystko, aby się tem zająć, bo nic większego nie jest w stanie człowiek dokonać.

Algebra i analiza stanowią tylko jej bardzo małą gałąź, ponieważ ona to daje językom — słowa, słowom — litery, arytmetyce — cyfry, muzyce — nuty; ona to nareszcie pozwala nam rozumować z małym wysiłkiem, kładąc symbole na miejsce rzeczy, aby wyprowadzić z kłopotu wyobraźnię.

Wiemy dziś, że ta myśl Leibniza posiada tylko teoretyczne znaczenie. System metamatematyki racjonalnej pozwala nam budować odpowiedniki schematycznych przedmiotów doświadczenia, takich właśnie, z jakimi mamy do czynienia w fizyce. Jest to zupełnie naturalne, bo przecież te przedmioty, na których system nasz się opiera, a mianowicie litery, są właśnie takimi schematycznymi przedmiotami. Nie należy zapominać, że cały szereg wła-

¹ Por. Sleszyński: Teoria dowodu, opracował S. K. Zaremba. T. II. Kraków 1929, p. 2.

ściwości liter pozostawiamy na boku. W szczególności nie mamy teoretycznego sposobu odróżniania poszczególnych ich egzemplarzy. Otóż, jest jasne, że w tych warunkach nie możemy oczekiwać, że metamatematyka racjonalna okaże się płodna tam, gdzie będzie szło o przedmioty doświadczenia jako takie, nie zaś o ich schematy. Tam, gdzie zaczyna się badanie indywidualnych przedmiotów, gdzie idzie o ten właśnie egzemplarz litery *a*, o ten właśnie samochód, o ten właśnie organizm ludzki, o to właśnie społeczeństwo, tam działanie naszego systemu urywa się automatycznie. Wnosić stąd, że rzeczywistość jest irracjonalna, a my możemy tylko częściowo ją racjonalizować, jak to uczynił Meyerson, do tego niema wcale podstawy. Nie mamy powodu sądzić, że rzeczywistość jest irracjonalna, ale poprostu musimy stwierdzić, że rzeczywistość nigdy nie jest nam dana jako coś gotowego, a to, z czym mamy do czynienia, są tylko schematy rzeczywistości. Do każdego schematu znajdziemy odpowiednik; im dalej będziemy posuwali się w procesie schematyzacji, tem bardziej będzie komplikował się nasz system, ale ostatecznie zawsze potrafimy przystosować go do nowych schematów. Idzie tylko o to, że ten proces nigdy nie będzie skończony.

Dopóki schematyzacja jest stosunkowo łatwa, tak, jak to jest w fizyce, dopóty system metamatematyki racjonalnej będzie użyteczny w sensie pozytywnym, t. zn., że zawsze będziemy szukali w nim odpowiedników schematów rzeczywistości.

Cała tajemniczość życia i cały jego pozorny irracjonalizm polega na tem, że schematyzacja rzeczywistości staje się od pewnego punktu niezmiernie trudna i nie może być dokonywana przez proste zastosowanie metody indukcyjnej. Wiadomo, że schematy rzeczywistości, jakimi posługuje się prawo, są grube i nieudolne, jak to wykazał ponad wszelką wątpliwość Petrażycki.²

W tych warunkach dążenie do konstrukcji systemów prawnych, zwanych kodeksami, musi być uważane za nieporozumienie. Wszystko, co robi się w tym kierunku, uznane być musi za smutną konieczność. Właściwem zadaniem prawa jest dyskusja takich schematów pojęciowych, jak zbrodnia, własność, odpowiedzialność i t. d. Wiemy, że dyskusja ta prowadzi do namiętnych sporów i że wplątane są w nią niskie tendencje i za-

² Por. L. Petrażycki: Wstęp do nauki prawa i moralności. Tłum. Landego. Warszawa 1930.

kamieniałe przesady. Otóż, sprawy te są oczywiście zupełnie niezależne od zagadnienia prawdy i fałszu. Związane są jedynie z zagadnieniem sensu pojęć, t. j. z pytaniem, czy schematyzacja rzeczywistości dokonana przy pomocy danego pojęcia jest wystarczająca.

Jeśli np. wieśniak, którego zakuto w kajdany za wywiezienie z lasu dąbczaka, twierdzi, że dąb nie jest niczyją własnością, bo posadził go Pan Bóg, to cała sprawa obraca się dokoła zagadnienia schematyzacji rzeczywistości przy pomocy tego lub innego pojęcia własności. W tych warunkach nie może być oczywiście mowy o naiwnym stosowaniu zasady sprzeczności. Nie możemy mówić, że dąbczak jest własnością dziedzica, albo nią nie jest. Jest nią w pojęciu dziedzica, nie jest nią w pojęciu chłopca. Mówić tak, jak tego żąda dialektyka, że jest nią i nie jest, jest to, jak już zauważyłem, za mało. Byłoby to tylko stwierdzenie, że pojęcie własności nie stosuje się do danego przypadku. Wtedy jednak omijamy ten niewątpliwy fakt, że mamy tu do czynienia z dwoma różnymi pojęciami, t. j. z użyciem wyrazu w dwu zasadniczo różnych znaczeniach.

Z chwilą, kiedy raz dopuścimy konieczność operowania różnymi znaczeniami tego samego wyrazu, t. j. różnymi schematami rzeczywistości, wówczas zadanie nasze komplikuje się niezmierznie, nie posiadamy bowiem dostatecznych kryteriów, które pozwoliłyby nam rozstrzygnąć, którego znaczenia należy użyć w danej chwili. Jeśli zdecydujemy się na jakąkolwiek konwencję, to ktoś inny będzie mógł wysunąć konwencję inną. W tym punkcie przekraczamy granice nauk ścisłych, tutaj też zaczyna się dziedzina indywidualnych rozstrzygnięć. Nie wynika z tego bynajmniej, żeby w tym punkcie występowała swoboda wyboru. Przeciwnie, tutaj właśnie spotykamy się z bardzo silnymi wewnętrznymi nakazami, wobec których jesteśmy bezradni. Zadaniem metanauki jest analiza i klasyfikacja tych nakazów.

Jako przykład charakterystyczny zagadnień metanauki zacytuję zjawisko *bezwładności* schematów rzeczywistości, t. j. dążenie ich do utrzymania się na powierzchni. To zjawisko zostało zanalizowane do głębi przez dialektykę materialistyczną i stanowiło jej tytuł do wyższości w stosunku do filozofii pozytywistycznej. Widzimy, że nasza metanauka chwyta je narówni z dialektyką materialistyczną. Pozwala ona nadto sięgnąć głębiej i znaleźć przyczyny oporu budzącego się przeciw panują-

cemu schematowi. Opór ten rodzi się z pogłębienia schematyzacji rzeczywistości. Poprostu ten fakt, że dany schemat utrwalił się od pewnego czasu, stwarza podstawę do dalszej schematyzacji, która z konieczności otwiera przed nami różne możliwości, prowadząc do różnych nowych systemów. Otóż z chwilą, kiedy raz mamy do dyspozycji doskonalsze systemy teoretyczne, jest naturalne, że przeciwstawiamy się schematyzacji życia, opartej na systemach starych.

Tak np. jeśli nauczymy się regulować płęć noworodków, jest jasne, że nasunie się konieczność nowej schematyzacji życia.³ Poprostu dlatego, że urzędnicy będą coraz to głębiej wnikali w szczegóły życia jednostki, ewentualna ich nieuczciwość, czy nieudolność będzie coraz to bardziej rażąca. Jest dobrze pamiętać, że obawa, jaką w nas budzi coraz to dalej posuwająca się schematyzacja życia, nie jest wywołana tem, co jest w niej przeprowadzone faktycznie, tylko tem właśnie, co powstało w stanie pierwotnego zamętu i co może wmieszać się w życie w sposób zgoła nieoczekiwany, tem głębiej, im bardziej jesteśmy uzależnieni od środowiska.

Metoda metanauki przewyrcieża raz na zawsze dylemat subiektywności i obiektywności. Podmiot, figurujący w systemach nauki, objętych metanauką jest zobiektywizowany, t. zn. jest takim samym przedmiotem doświadczenia, jak każdy inny. Podmiot aktualny, żywy, występuje tylko w chwili obecnej, teraz właśnie, kiedy piszę te słowa. Ale o tym podmiocie nie mogę mówić z sensem, bo mówić z sensem mogę tylko o przedmiotach. Już filozofja indyjska wiedziała, że o podmiocie żywym można tylko milczeć. System metanauki pozwala nam stworzyć odpowiednik tego stanu rzeczy przez wprowadzenie metanaukowej teorii typów, zupełnie podobnej do teorii typów metamatematycznej.

Jeśli mówię o moich myślach, jeśli, innemi słowami, zajmuję się pewnym systemem nauki, to uprawiam naukę wyższego typu. Ten fakt, że naukę tę uprawiam, nie może być przedmiotem badań nauki typu niższego. W ten sposób każdy poszczególny system nauki ma z konieczności zadanie ograniczone, wyznaczone danym typem schematyzacji.

Jeśli np. pytam, czy kryteria rzeczywistości, jakie ustawiłem,

³ Por. J. Huxley: Co śmiem myśleć, tłum. Czerniewskiego, wyd. Przeworskiego, p. 73.

chwytają ten fakt, że właśnie ustawiłem te kryteria, to odpowiedzieć trzeba, że tak żadną miarą być nie może, bo idzie o schematyzację wyższego typu. Natomiast kryteria moje powinny być zbudowane w ten sposób, żeby podnosiły się automatycznie do wyższego typu i żeby wówczas mogły uchwycić fakt wspomniany.

Dobrze jest zauważyć, że wszystkie paradoksy i wszystkie fałszywe dowody starej i nowej metafizyki tłumaczą się automatycznie przy pomocy tej teorii. W szczególności odnosi się to do krytyki teorii poznania podanej przez Nelsona.⁴

2. Praca schematyzacyjna potrzebna do budowania systemu metanauki jest oczywiście tak wielka, że trudno objąć ją myślą. Wiemy, że schematyzacja matematyki, którą przeprowadziliśmy zupełnie dokładnie, jest z punktu widzenia praktycznego i tak nie do strawienia, przynajmniej narazie. Niema mowy o tem, żebyśmy faktycznie przeprowadzali wszystkie rozumowania przy jej pomocy. Zaczynamy od wprowadzenia skrótów semantycznych. Z kolei wprowadzamy skróty rozumowania, wkońcu przedstawiamy na rozumowaniach intuicyjnych, w tem przekonaniu, że mogą być w danym wypadku przeprowadzone zupełnie ściśle. Z chwilą, kiedy mamy gotowy system wyrażań, możemy sobie na takie postępowanie pozwolić bez obawy zaplątania się w niejasności. Ale z chwilą kiedy mamy jeden system naukowy opracowany porządnie, możemy pozwolić sobie na operowanie intuicyjne pojęciem takiego systemu. Wówczas posuwamy się o krok dalej. Mówimy już nie o tem, że w danym systemie można przeprowadzić pewne rozumowanie, ale że pewne zagadnienia dadzą się sformułować w pewnym poprawnym systemie. Mając dany wzór, możemy mieć pretensję do tego, że wiemy, co to jest poprawny system. Możemy nawet pozwolić sobie na pewne licencje i mówić o systemie nie tak doskonałym, jak system metamatematyki racjonalnej, ale czyniącym zadość przynajmniej głównym postulatowi wydedukowanemu z doskonałego wzoru. W ten sposób odzyskujemy szeroki oddech, stłoczony zrazu nadmierną, do ostateczności doprowadzoną manją ścisłości. Powiadamy otwarcie: Nie chcemy być pedantami. Szło nam o to tylko, żeby tego, co jest mniej więcej, nie brać za ścisłość. Szło nam o to, że nie warto mozolić się nad ścisłymi dowodami tam, gdzie u podstawy jest bagno. Żeby załatwić się z tem groź-

⁴ Por. *Wielość rzeczywistości*, p. 38.

nem zagadnieniem, przedsięwzięliśmy trud przebudowania podstaw nauki od dna i ustalenia wzoru ścisłego formułowania. Z chwilą, kiedy raz wiemy, co to jest ścisłość, i gdy już znamy te przesmyki, któremi wtłacza się do naszej myśli idealistyczna ułuda, możemy pozwolić sobie na postępowanie swobodniejsze, tak właśnie, jak robotnik fabryczny lub funkcjonariusz kolejowy, który w miarę nabierania wprawy w pracy coraz mniej krępuje się pedantycznym regulaminem. Oczywiście zdajemy sobie sprawę, że jest to pewna konieczność podyktowana obecnymi warunkami życia. W danych warunkach życie jest szybsze niż myśl. Myśl jest leniwa i nieudolna i podąża za życiem z największą trudnością. Marzenie o przewidywaniu zdarzeń jest narazie bardzo nieaktualne. Wiemy, że fizycy, którzy ciągle mówią o przewidywaniu, nie mogą nadażyć mnożeniu się zasadniczych odkryć, zanim jeszcze zdołali oswoić się z odkryciami wczorajszymi. Cóż dopiero mówić o zagadnieniach ekonomicznych i społecznych.

W tych warunkach branie się serjo do formalizacji choćby częściowego systemu rzeczywistości jest bezcelowe. Próba konstrukcji podana przez prof. Carnapa⁵ byłaby scholastyczną zabawką, gdyby nie posiadała znaczenia polemicznego, polegającego na usprawiedliwieniu wrażeniowej koncepcji rzeczywistości. Myślę, że i tak posunięta jest zbyt daleko, bo z uwagi na to, że opiera się na przestarzałej, prostej teorii typów i musi być objaśniona przy pomocy całego mnóstwa zwykłych enuncjacji, zaczerpniętych z magazynu starego filozoficznego słownika, nie może być uważana za definitywną.

System, który potrzebuje objaśnień, jest fragmentem i nie może być punktem oparcia. Może być tylko środkiem pomocniczym. Na to niema rady.

W jednym z świeżo ogłoszonych artykułów⁶ stara się Carnap uzasadnić swoje stanowisko przy pomocy następującego argumentu Wittgensteina.⁷ Wittgenstein zgadza się z wstępem podanym w języku potocznym, ale zaznacza, że rola tego wstępu jest nieistotna. Twierdzenia wstępu nie muszą posiadać jasnego sensu, bo jedynym ich celem jest ułatwienie zrozumienia twier-

⁵ R. Carnap: *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin 1932.

⁶ R. Carnap: *On the Nature of Philosophic Problems* (*Philosophy of Science*. Vol. I, No 1).

⁷ *Tractatus logico philosophicus*.

dzeń systemu. Otóż ułatwić zrozumienie czegoś można przy pomocy środków, których nie rozumiemy. Z chwilą, kiedy te środki cel swój osiągną, możemy je odrzucić jako niepotrzebny rekwizyt.

Koncepcja ta jest bardzo dowcipna i oparta na godnych uwagi spostrzeżeniach. Objaśnienia, jakich udziela nam nauczyciel pływania, mogą być niezupełnie jasne, z chwilą jednak, kiedy nauczymy się pływać, nie będziemy trapić się tem, że język, któremu zawdzięczamy ten wynik, był daleki od poprawności.

Trzeba jednak pamiętać, że analogia ta byłaby wtedy zupełna, gdybyśmy rzeczywiście mogli zbudować zamknięty system metanauki. Ponieważ jednak jest to, jak widzieliśmy, niemożliwe, sytuacja jest taka, że właśnie to, co nie jest sformalizowane, narzuca nam się jako rzecz najważniejsza, a to, co jest gotowe, banalizuje się i schodzi na plan drugi. Stąd to pochodzi, że ostatecznie skazani jesteśmy na posługiwanie się językiem potocznym, a to, co jest sformalizowane, jest tylko środkiem kontroli i ostoją przed kaprysami tego języka i płynącymi z nich iluzjami.

Muszę się przyznać, że systemy logiki symbolicznej, opracowane z niezwykłą dokładnością, ale oparte na idealistycznych założeniach, są dla mnie bezporównania mniej jasne od trywialnych opisów opartych na języku potocznym. Trzeba pamiętać, że próba precyzowania jest bronią obosieczną. Odbiera nam zdolność automatycznej reakcji związaną z językiem potocznym, a nie zawsze daje nam na jej miejsce zrozumiałe ekwiwalenty.

Myślę, że jest tu decydujące następujące powiedzenie prof. Dupréela:

Formuły uczonego posiadają sens i budzą zainteresowanie jedynie w związku z pewnym pospolitem, gotowem przedstawieniem rzeczy, na którego miejsce podstawiają się w drodze konwencji.⁸

3. Wyeliminowanie podmiotu prowadzi nas do *materjalizmu*. Trzeba jednak pamiętać, że pojęcie materjalizmu jest tylko zgrubsza określone i kryje w sobie wielorakie możliwości. Idzie po prostu o to, że to, co radziłybyśmy nazwać przedmiotem doświadczenia, czyli materją, jest nieuchwytnie. Mamy do czynienia jedynie z narzucającymi się nam schematami, a schematy te mogą

⁸ Dupréel: *Traité de la morale*. Bruxelles 1932, p. 689.

różnić się od siebie zasadniczo. Raz mamy do czynienia z rzeczami i ich właściwościami, innym razem z właściwościami nieuchwytnego materialnego procesu, albo z tem, co nazywamy elementami wrażeniowemi (Mach), albo wreszcie z elementami wyobrażeniowemi, czyli *obrazami* (Bergson).

Wszystko to może narzucać nam się w danym momencie jako jedyna, prawdziwa rzeczywistość nato tylko, żeby w chwili następnej zamienić się w nieudolną fikcję i zostawić miejsce czemuś innemu. Wskazane przez Bergsona⁹ wyczuwanie jakiejś *prawdziwej* rzeczywistości, która przedstawia się nam na różne sposoby, musi prowadzić do idealistycznej fikcji i związanego z nią irracjonalizmu, a nie usuwa bynajmniej trudności, o której mowa. Prostu dlatego, że ta *prawdziwa* rzeczywistość będzie znowu jedną z możliwych rzeczywistości i rozplynie się w pewnej chwili w nicość, zostawiając miejsce czemuś, co miało być tylko jedną jej stroną.

W tych warunkach niema podstawy do mówienia o jednej *prawdziwej* rzeczywistości. Musimy stwierdzić, że istnieje wiele pojęć rzeczywistości i że raz jedno, innym razem drugie użyte być musi dla opisanego tego bezpośredniego doświadczenia, z którym mamy do czynienia, konstatując, że coś jest rzeczywiste. Doświadczenia takie nazwałem kiedyś *metafizycznymi*, pragnąc zaznaczyć, że prowadzą one do metafizycznej złudy. Są to doświadczenia *obiektywne*, są bowiem od nas niezależne i dostępne wszystkim ludziom, którzy zechcą zająć się temi sprawami z dostateczną pilnością. Równocześnie jednak posiadają te doświadczenia pewną cechę subiektywności, bo narzucają nam się jako prawda bezwzględna nawet wtedy, kiedy wiemy o tem doskonale, że po pewnym czasie mogą podstawić się na ich miejsce doświadczenia inne.

Z tego stanu rzeczy wynika, że kryterja rzeczywistości odgrywają w stosunku do kryterjów zdrowego rozsądku rolę drugorzędną. Jeśli przyjmujemy kryterja rzeczywistości jako podstawę naszego poglądu na świat, to wtedy czy prędzej czy później popadniemy w sprzeczność z samym sobą. Jeśli jednak oprzemy się na kryterjach zdrowego rozsądku i odwołamy się do opartej na nim metanauki, to wówczas będziemy mogli przewyciężyć piętrzące się trudności. Wówczas nie będziemy zmuszeni

⁹ Wstęp do metafizyki, art. 63.

odbierać sobie i innym tego, co jest dla nas wewnętrzną koniecznością, ale będziemy mogli ograniczyć siłę rodzącej się z tego stanu rzeczy iluzji.

Jest bowiem jasne, że nawet najskrajniejszy indywidualizm może być użyteczny, jeśli jest świadomy sam siebie i jeśli nie jest połączony z naiwną lub cyniczną pretensją do obiektywności.

4. Siła rzeczywistości naturalnej polega na tem, że kryteria zdrowego rozsądku, któremi się posługujemy, rozwinęły się razem z kryteriami tej rzeczywistości.

Naturalnego poglądu na świat nie można przewyciężyć w sposób radykalny. Działanie jego jest tak silne, że nikt nie może uchronić się od mniej lub więcej świadomego powrotu do niego w pewnych okresach życia. Jeśli nawet przeświadczyliśmy się o tem, że rzeczywistość naturalna jest pewnego rodzaju mitem, odziedziczonym po bezkrytycznym okresie wieków ubiegłych, nie możemy uchronić się od momentów narzucającej się pewności, że wszystko inne jest teorią wyprodukowaną w sposób sztuczny, a rzeczywistość jest jedna i taka właśnie, że osoby i rzeczy, z których się składa, posiadają właściwości barwne, dźwiękowe, smakowe i t. d., niezależne od nas i, co więcej, są same przez się przyjemne lub nieprzyjemne, dobre lub złe, piękne lub brzydkie.¹⁰

Nie pomoże teoria fal świetlnych, ani analiza gry barw i kształtów otaczającego nas świata. Wiemy, że ta suknia jest niebieska, że ten stół jest prostokątny, a wszystkie zmiany występujące w momencie obserwacji uważamy za sprawę drugorzędną. Nie pomoże uwaga, że, idąc dalej tą drogą, popadamy w wszystkie przesady popularnego poglądu na świat, które budzą w nas lekceważenie i pogardę. Działanie rzeczywistości naturalnej przewycięża wszystkie zapory, narzucając nam wewnętrzną konieczność identyfikowania jej kryterjów z kryterjami zdrowego rozsądku.

Słabym punktem rzeczywistości naturalnej są obrazy wizyjne. Obrazy te mogą, jak wiadomo, dojść do wielkiej wyrazistości, skutkiem czego nie różnią się w sposób zdecydowany od rzeczy

¹⁰ Por. W. Heinrich: *Teorje i wyniki badań psychologicznych*. Warszawa 1902, p. 4.

i osób. Bezkrytyczne poddanie się temu stanowi rzeczy prowadzi do niebezpiecznych konsekwencji.

Najgroźniejsze okazało się pomieszanie plotki opartej na wizji z rzeczywistością naturalną, takie właśnie, z jakim mamy do czynienia w każdej mitologii.

Zwróć uwagę na następujące przykłady:

W Konstantynopolu skazano na śmierć pewnego osobnika wraz z synem, ponieważ biskup miał objawienie, że ten człowiek przez sztuczki czarnoksiężskie sparaliżował działanie cudu.¹¹

Św. Tomasz z Aquino pisze:

I tak trzeba powiedzieć, że wszystkie przemiany rzeczy cielesnych, które mogą dokonać się przez jakieś właściwości naturalne, do których należą wspomniane nasiona, mogą dokonać się przez działanie demonów przy posłużeniu się takimi nasionami, tak jak niektóre rzeczy zamieniają się w węże lub żaby, które mogą zrodzić się z rozkładu.¹²

Oślawiony Sprenger, autor *Młota na czarownice*, wierzył, że djabeł może zmienić kobietę w kotkę na czas jakiś.¹³

Brat Ubaldo Stoiber ogłosił w r. 1726 w Augsburgu uczone dzieło p. t. *Armamentarium Ecclesiasticum*, w którym podaje nader ściśle wskazówki, w jaki sposób odróżnić diabła od anioła, od duszy czyścicowej i od zjawy magicznej. Między innymi zastanawia się poważnie nad tem, czy dusza czyścicowa może na siebie przyjąć kształt zwierzęcia, i przychodzi do przekonania, że to nie jest wykluczone, bo pewien mnich franciszkański widział nagą kobietę w towarzystwie dwu wilków. Okazało się, że kobieta owa była duszą pewnej rozpustnicy, a wilki duszami dwu proboszczów, którzy byli swojego czasu jej spowiednikami.¹⁴

Dzisiaj wiemy, że cały ten stek nonsensów zrodził się z po-bieżnej obserwacji takich zjawisk, jak złudzenia zmysłowe. Mówiąc ściśle, stało się poprostu to, że rzeczywistość obrazów, która podstawiała się na miejsce rzeczywistości naturalnej, interpretowano przy pomocy kryterjów naturalnych.

Rzeczywistość naturalna posiada wiele cech reakcyjnych. Właśnie dlatego, że uświęcona jest starą tradycją i skrytaliczowana w języku potocznym. I jeszcze dlatego, że to, do czegośmy

¹¹ Por. Montesquieu: De l'Esprit des Loix. XII, 5.

¹² Summa Theologiae. Paryż 1860. Tom I, p. 1528.

¹³ Por. Michelet: La sorcière, p. 189.

¹⁴ Pars II, p. 196. Prof. Podlacha zauważył, że cała ta wizja zaczerpnięta jest z starochrześcijańskiej ikonografii. (Legenda o enotliwej Zuzannie).

przywykli, jest inne od tego, co się dopiero tworzy. To, co się dopiero tworzy, jest zawsze niezupełnie jasne i zawsze jest niepewne.

Nie mamy podstawy do twierdzenia, że ktokolwiek potrafi uchronić się od powrotu do rzeczywistości naturalnej w pewnych momentach życia, zwłaszcza wtedy, kiedy życie staje się bardzo przyjemne, albo też bardzo ciężkie. Myślę jednak, że wystarczy uświadomić sobie tę możliwość, żeby uchronić się przed jej szkodliwymi konsekwencjami. Myślę, że dążenie do radykalnego przezwyciężenia rzeczywistości naturalnej prowadziłoby do zacieśnienia zakresu naszych doświadczeń. Powroty do rzeczywistości naturalnej mogą być nawet użyteczne, o ile potrafimy zachować dostateczną dawkę krytycyzmu. Idzie tylko o to, żeby to była *rzeczywistość typu wyższego*, utrzymująca się w danym momencie pomimo świadomości, że są inne rzeczywistości i że one z kolei wysunąć się mogą na plan pierwszy.

5. Zagłębienie się w studia przyrodnicze, wżycie się w świat teleskopowy i mikroskopowy i dążenie do znalezienia związków i praw rządzących temi światami może narzucić nam z równą siłą inną zupełnie rzeczywistość. To, że pojęcie materji ulega ciągłej ewolucji i jest dalekie od precyzyjnych i zgodnych z doświadczeniem określeń, jest sprawą drugorzędną. Wszystko jedno, czym jest materja i jakie działają na nią siły. Czy jest tak, czy inaczej, niepodobna obronić się przed absolutną pewnością, że tylko materja jest prawdziwą rzeczywistością, że życie psychiczne jest tylko właściwością procesów zachodzących w mózgu, a stany psychiczne są zjawiskami drugorzędnymi, nie wpływającymi na historję wszechświata. Rzeczywistość, z którą mamy w tym wypadku do czynienia, nazwałem rzeczywistością fizykalną. I ona, tak samo jak rzeczywistość naturalna, jest dla pewnych ludzi jedyną rzeczywistością i nikt nie może być pewny, że w danym momencie nie narzuci mu się jako jedyna rzeczywistość. I tu znowu nie pomoże świadomość, że przecież w innych momentach życia narzucają nam się z równą siłą inne rzeczywistości. Potęga sugestji jest zbyt wielka. W stosunku do tamtych nakazów wewnętrznych mamy tylko uśmiech politowania, bo przecież wiemy napewno, że prowadziły nas do złudy.

Ciekawy opis oscylacyj na pograniczu rzeczywistości naturalnej i fizykalnej podaje Eddington. Mówi on o dwu stołach,

o stole zwykłym i stole naukowym, t. j. o pewnym kompleksie atomów.¹⁵ Opis ten świadczy, że teoria wielości rzeczywistości, która 15 lat temu uchodziła w sferach filozofów zawodowych za absurd, zaczyna coraz głębiej przenikać do umysłów uczonych.

Rzeczywistość fizykalna zrodziła się w w. XVI. razem z rozwojem matematyki, nauk przyrodniczych i perspektywy (Leonardo da Vinci). Stanowi ona podstawę wielkich systemów filozoficznych XVII w. Zarówno Hobbes i Locke, jak Descartes, Spinoza i Leibniz opierają się na tej rzeczywistości, jakkolwiek rozmaicie pojmują stosunek jej do abstrakcyjnej koncepcji Boga i duszy. Jednych można uważać za materialistów, drugich za spirytualistów, ale to są sprawy teoretyczne, nie należące do kryteriów rzeczywistości, tylko do ich interpretacji.

We wszystkich wypadkach należy uważać za pewne, o ile w takich sprawach wogóle może być coś pewnego, że myśliciele ci przebywali w rzeczywistości procesów materialnych i praw rządzących nimi.

Najsilniej narzuca się ta sugestia w systemie Spinozy. Jego dowody geometryczne są paralogizmami, ale jego bezpośrednie wycucie samodzielnego bytu Natury-Boga narzuca się z niesamowitą siłą.

Absolutny determinizm przyrody i nikła rola człowieka w wszechświecie występują jako prawdy bezwzględne, w stosunku do których wszelka polemika jest iluzoryczna:

Rzecz, która jest zdeterminowana do działania czegoś, przez Boga z konieczności została tak zdeterminowana, a ta, której nie zdeterminował Bóg, nie może sama siebie zdeterminować do działania.

Rzecz, która jest zdeterminowana do działania czegoś przez Boga, nie może sama siebie uczynić niezdeterminowaną.¹⁶

Działać rozsądnie jest to poprostu wykonywać to, co wynika z konieczności naszej natury, rozważanej samej w sobie.¹⁷

Myśli te stały się zczasem prawdami elementarnymi, które podstawily się na miejsce popularnego poglądu na świat.

Wielka ich siła jest do dziś dnia aktualna.

Spinoza stał się ojcem współczesnego materializmu, który w istocie swej tem tylko różni się od spinozyzmu, że pojęcie Boga zastąpił pojęciem natury.

¹⁵ Por. Eddington: *The Nature of the physical World*. Cambridge 1933, XI.

¹⁶ *Ethica*, Pars I, prop. XXVI i XXVII.

¹⁷ *L. cit.*, Pars IV, prop. LIX (dowód).

Ważny krok naprzód w budowie pojęcia rzeczywistości fizycznej uczynił Lamettrie. Był on lekarzem. Obserwacje, jakie robił na sobie samym, będąc w stanie silnej gorączki, doprowadziły go do wniosku, że procesy psychiczne mogą być wyjaśnione przez odwołanie się do procesów fizjologicznych. Była to myśl genialna, która zadecydowała o rozwoju nauki o człowieku.

Koncepcje materialistyczne w. XVIII. rozbiły się o pojęcie podmiotu, z którym ubogie środki ówczesnej logiki nie mogły dać sobie rady. Rezultat był ten, że rzeczywistość fizyczna uciekała na czas długi w odmętach heglowskiego irracjonalizmu.

Warto znać przynajmniej jeden ustęp z dzieł Feuerbacha, materialisty, opierającego się na Heglu, żeby nabrać pojęcia o jego stylu. Jest on zaiste jawnem zaprzeczeniem zdrowego rozsądku.

Cytuję w przekładzie Trentowskiego:

Duch bezwzględny, który dopiero w *duchu człowieczeńskim* nabiera wiedzy o sobie, to *nic*, które dopiero w tobie lub we mnie staje się *bytem*. Duch człowieczeński przeto, robiący tu z *niczego coś*, jest *jego* stwórcą. Jakoż on sam i cała jego dziedzina spekulacyjna, poród głowy naszego Hegla! Zaczem nie *bezwzględny*, lecz *człowieczeński* duch, absolut i Bóg.¹⁸

Z koncepcji Hegla i Feuerbacha utrzymała się tylko ta idea, że rzeczywistość fizyczna nie da się opisać dokładnie przy pomocy pojęć, bo zmienia się nieustannie. Idea ta podjęta została przez Marxa, Engelsa, Lenina i ich następców. Idea ta została potwierdzona przez wyniki doświadczeń fizycznych. Wszystko zdaje się wskazywać na to, że pojęcia, jakimi operuje fizyka, są tylko bardzo pierwotnymi schematyzacjami rzeczywistości. Z tego nie wynika bynajmniej, żeby metoda dialektyczna dawała nam jakąś wiedzę dokładniejszą. O tem nie może być mowy. Niemniej wydobywa na wierzch ten fakt, że fizycy dają się stale unosić naiwnej nadziei, iż poznali już istotę materji, a kiedy ta nadzieja zawiedzie, wpadają w rozpacz i przenoszą się w inną rzeczywistość. Otóż jest jasne, że z tego, iż pewien obraz materji okazał się niedokładny, nie można wyprowadzać wniosku, że nie ma materji.

Rzeczywistość fizyczna jest wynikiem krytyki rzeczywistości

¹⁸ Trentowski: Panteon wiedzy ludzkiej. Poznań 1874, p. 119.

naturalnej. Jako taka jest rzeczywistością wyższego typu. Przeoczenie tego zjawiska prowadzi do bolesnych nieporozumień. Tak np. niektórzy filozofowie zapominają, że z tego, iż w rzeczywistości fizycznej czynny nasze są zdeterminowane przez procesy materialne, nie wynika bynajmniej, że nie ma wolnej woli w sensie pospolitym. Idzie o to, że posiadamy bezpośrednie kryteria czynności dobrowolnych i wymuszonych, które pozwalają nam orjentować się zgrubsza w życiu codziennym. Kryteria te zawodzą w wypadkach nieco bardziej skomplikowanych i przecenianie ich jest oczywistym błędem, ale niemniej błędne byłoby nieliczenie się z nimi. Z tego nieporozumienia zrodziło się zamieszanie pojęć, prowadzące do radykalnej negacji etyki.¹⁹ Otóż, zagadnienia etyki są niezależne od procesów materialnych decydujących o naszym życiu i nie mają nic wspólnego z t. zw. *odpowiedzialnością*. Możemy zgodzić się na to, że działanie nasze jest podyktowane najniższymi instynktami, możemy przyznać rację prof. Freudowi, że miłość matki do syna jest tylko pewną formą seksualnego egoizmu, ale i tak będziemy musieli odróżnić matki troszczące się o swoje dzieci od matek niedbających i nazwać pierwsze dobrymi, a drugie złymi. Rezygnacja z tej klasyfikacji byłaby bezpłodnym zubożeniem życia. Trzeba tylko pamiętać, że bezkrytyczne posługiwanie się tą klasyfikacją prowadzić może do zbrodni.

6. Podstawy rzeczywistości wrażeń zostały zbudowane przez Hume'a. Tym, który ostatecznie dotarł do jasnego jej sformułowania, był Ernest Mach. Obok niego należy wymienić Avenarius. Avenarius stworzył koncepcję czystego doświadczenia, t. j. takiego doświadczenia, z którego zostało wyeliminowane wszystko to, co jest domysłem, nawyczką i konwenansem. Doktrynę swoją nazwał *empirjokrytycyzmem*.

Pojęcie czystego doświadczenia nie jest dostatecznie jasne. Bezporównania jaśniejsze jest sformułowanie Macha. Mach pisze, co następuje:

Barwy, tony, ciepła, uciski, przestrzenie, czasy i t. d. są z sobą związane w wieloraki sposób, a z nimi związane są nastroje, uczucia i wole. Z tego splotu wysuwa się na pierwszy plan to, co jest stosunkowo mocniejsze i trwalsze, wrzyna się w naszą pamięć i wyraża się w mowie. Jako względnie trwalsze występują naprzód przestrze-

¹⁹ Por. Otto Neurath: *Soziologie im Physikalismus*; *Erkenntnis*. T. 2.

nie i czasowo związane kompleksy barw, dźwięków, ucisków i t. d., które z tego powodu otrzymują nazwy osobne i są nazywane ciałami...

Jako względnie trwałe występuje dalej kompleks wspomnień, nastrojów, uczuć, związany z pewnem osobliwem ciałem, który zostaje nazwany: *Ja*.²⁰

Wkońcu oddzielają się od ciał elementy wrażeniowe, takie jak: barwy, smaki, tony i t. d. Elementy te są najprostszymi składnikami rzeczywistości.²¹

Zważmy, że ta pierwotna koncepcja Macha nie ma nic wspólnego z idealizmem. Elementami rzeczywistości są wprawdzie wrażenia, ale wrażenia pojęte tu są niezależnie od koncepcji świata zewnętrznego i t. zw. *Ja*. Widzimy, że zarówno świat zewnętrzny jak i t. zw. *Ja* są to tylko pewne kompleksy wrażeń. Zamiast o wrażeniach możemy mówić o *elementach wrażeniowych*. W ten sposób podkreślamy dobitnie pojęciową niezależność rzeczywistości od podmiotu.

W rzeczywistości elementów wrażeniowych figurują osoby i rzeczy, ale są one czemś zasadniczo odmiennem od tego, za co je uważamy w rzeczywistości naturalnej. Słońce jest to koło świecące. Księżyc jest to przedmiot zmieniający swój kształt co tydzień. Raz jest okrągły, drugi raz ma kształt sierpa. Słońce i księżyc pojęte jako elipsoidalne masy materialne są tylko konwencjami stworzonymi dla orjentowania się w rzeczywistości wrażeń. To samo odnosi się do organizmu ludzkiego i dokonujących się w nim procesów fizjologicznych.

Zadaniem nauki jest poszukiwanie stałych związków pomiędzy temi konwencjonalnymi przedmiotami.

Zjawisko rozdwojenia się ołówka, obserwowanego zbliska, może zadecydować o narzuceniu nam się rzeczywistości wrażeń. Obydwa ołówki są najzupełniej równouprawnione. Rzecz nie mogła się rozdwoić. Zatem rzeczy pojmowanej w sensie naturalnym niema. Rzecz jest konwenansem. Ołówek jest tylko obrazem.

Oczywiście, możemy zlekceważyć to doświadczenie i położyć je na karb *anormalnych* warunków spostrzegania, ale wolno nam stwierdzić, że koncepcja normalnych warunków spostrzegania jest konwenansem dosyć mętnym i wolno nam nie chciałoby uważać jej za podstawowe kryterjum rzeczywistości.

²⁰ Mach: *Analyse der Empfindungen*. Jena 1903, p. 1—2.

²¹ Por. l. c.

Bertrand Russell objaśnia przejście do rzeczywistości wrażeń przy pomocy analizy stołu, analogicznej do tej, jaką spotkaliśmy u Eddingtona. Byłby to, mówiąc językiem Eddingtona, stół nr 3, który nie posiada własnego kształtu, ani własnej barwy naprawdę, ale jest poprostu kompleksem wrażeń, zmieniających się zależnie od punktu obserwacji, od oświetlenia i od dyspozycji naszych organów zmysłowych.²²

To, że pewne kompleksy wrażeń identyfikujemy z sobą, uważając je zawsze za ten sam stół, to jest tylko pewien konwenans. Zresztą z podobnym konwenansem mamy do czynienia w rzeczywistości fizycznej, gdzie przecież musimy liczyć się z nieustanną zmiennością kompleksów materialnych.

Rzeczywistość wrażeń wywarła kolosalny wpływ na rozwój fizyki współczesnej, przyczyniając się w wysokim stopniu do zaostrzenia krytycyzmu i przewyciężenia idealistycznych założeń. Niemniej tkwią w niej niemałe niebezpieczeństwa, płynące z tendencji do nieliczenia się z możliwością zasadniczego rozszerzenia zakresu naszego doświadczenia. Jest rzeczą godną uwagi, że tendencje te występują w czasach, kiedy ludzkość wyszła poza granice tradycyjnego doświadczenia o wiele dalej, niż tego mogli się spodziewać najśmielsi fanteści ubiegłego okresu. Idzie o to, że rozszerzenie granic doświadczenia nie może być nigdy dokonane przy pomocy istniejących schematów, liczenie się więc z tego rodzaju możliwością jest niewątpliwie fikcją. Ale fikcja nie jest synonimem nonsensu, jak tego chcieliby wyznawcy rzeczywistości wrażeń. Rzeczywistość wrażeń połączona z odrzuceniem fikcji skazuje nas na obracanie się w zamkniętym kole danych doświadczalnych i doprowadzić musi do niesłychanego ograniczenia naszych możliwości twórczych.

Taką postać przybiera ona w jednej z ostatnich enuncjacji cytowanego wyżej prof. Heisenberga.²³ Uczony ten jest zdania, że ambicja nieograniczonego rozszerzania zakresu doświadczenia jest równie płonna jak marzenie dawnych badaczy o odkryciu krańców ziemi. Myślę, że porównanie to nie jest szczęśliwe. Należałoby raczej powiedzieć, że wiara w granice doświadczenia jest zupełnie podobna do starej wiary w granice ziemi.

Rzeczywistość wrażeń doprowadza w życiu zbyt często do

²² Por. *The problems of philosophy*.

²³ Por. W. Heisenberg: *Wandlungen der Grundlagen der exakten Naturwissenschaft in jüngster Zeit*, *Die Naturwissenschaften*, rocznik 22, zeszyt 40.

cynicznego egoizmu w stylu Antistenesa, lub nawet do zimnego okrucieństwa. Nigdy prawie nie łączy się z instynktem społecznym i skłonnością do poświęcenia. Niebezpieczeństwa te wydobył na wierzch Lenin z niesłychaną bystrością.²⁴

Leninowi udało się przewyciężyć Macha, Avenariususa i pokrewnych im immanentnych filozofów, ale nie udało mu się przewyciężyć rzeczywistości elementów wrażeniowych. Nie udało się to także Emilowi Meyersonowi ani też jego duchowemu następcy d-rowi Metallmannowi.²⁵

Rzeczywistość elementów wrażeniowych przewyciężyć się nie da i byłby czas, żeby filozofowie pogodzili się z tym stanem rzeczy.

Osobliwie zjadliwą formą zniekształconej rzeczywistości wrażeń jest *behaviourizm*, odrzucający cudze stany psychiczne jako zasadniczo niepoznawalne. Ale nasze własne stany psychiczne przeszłe i przyszłe są przecież w równym stopniu niedostępne bezpośredniemu doświadczeniu, jak to słusznie zauważył prof. Łapszin.²⁶

Jeśli liczę się z swymi własnymi cierpieniami przeszłymi i przyszłymi, to nie mam prawa odrzucać cierpień cudzych.

Żeby scharakteryzować nastawienie podyktowane doktryną behaviourystyczną, której rozrost uważam za jedno z najgroźniejszych niebezpieczeństw naszych czasów, pozwolę sobie zacytować za Edgarem Quinet następujący ustęp, wyjęty z dzieła: *Święty arsenał, albo praktyka urzędu świętej Inkwizycji*, Rzym 1730, dedykowanego „sławnemu inkwizytorowi, Św. Piotrowi Męczennikowi“.

W dziele tem czytamy:

W tym wypadku panowie inkwizytorowie, spostrzegłszy opór oskarżonego, postanawiają, żeby został poddany torturze...

I zarządzają, żeby oskarżony został zaprowadzony na miejsce męki, żeby został rozebrany do naga, przywiązany, przymocowany do liny:

Tak prowadzony, podczas rozbierania, wiązania, przymocowania do liny, jest łagodnie napomniany, pouczony po ojcowsku (*benigne monitus, paterne exhortatus*) przez panów inkwizytorów, żeby powiedział prawdę i nie czekał, aż zostanie podniesiony zapomocą liny, jak rzeczywiście podniesiony będzie, jeśli nie ustąpi.

²⁴ Por. W. I. Lenin: *Materjalizm i Empirjokrytycyzm*, Moskwa 1933.

²⁵ Por. J. Metallmann: *Determinizm nauk przyrodniczych*, Kraków 1934.

²⁶ Por. I. I. Łapszin: *Oproverżenie solipsizmu*, Uczenia zapiski, Praga 1924, p. 18.

Wtedy panowie inkwizytorowie, zasiadłszy i widząc, że wymieniony oskarżony, obnażony, związany, przymocowany do liny, odmawia powiedzenia prawdy, zarządzają, żeby go powieszono.

Który tak podniesiony zaczyna krzyczeć, mówiąc: Ah! Ah! biada!... O najświętsza Marjo Panno etc. albo zachowuje milczenie.

Opis ten przypomina pod wieloma względami sprawozdania lekarskie z ćwiczeń dokonywanych na t. z. *materjale klinicznym*, t. zn. na ludziach biednych i bezbronnych. W tym samym stylu utrzymane są sprawozdania z wiwisekcji i doświadczeń psychologicznych robionych na zwierzętach.

Do tej samej grupy należy obrzydliwa ustawa sterylizacyjna, obowiązująca w Niemczech.

7. Rzeczywistość elementów wyobrażeniowych występuje w swojej pierwotnej postaci u dzieci i u ludów prymitywnych na tle pomieszania kryterjów snu i jawy. Widzimy, że rzeczywistość ta jest w wyższym stopniu bezpośrednia od rzeczywistości naturalnej. Rzeczywistość naturalna jest produktem użytym przez wielowiekową walkę kryterjów zdrowego rozsądku z kryterjami rzeczywistości wyobrażeniowej.

Analiza doświadczenia oparta na zdrowym rozsądku zmusiła nas poprostu do podzielenia otaczających nas przedmiotów na 2 kategorie zasadniczo odmienne. Do pierwszej zaliczyliśmy osoby i rzeczy i zdarzenia dokonujące się w świecie osób i rzeczy, do drugiej kategorii zaliczyliśmy marzenia senne i wizje.

Trzeba jednak pamiętać, że podział ten jest jednostronny. Marzenia senne i wizje są zdarzeniami, które przecież zdarzają się rzeczywiście, i musimy się z nimi liczyć. Narkoman, który popełnia zbrodnię, żeby tylko zdobyć upragniony specyfik, wizjoner, odrzucający wszystkie dobra materialne, żeby tylko móc oczekiwać w skupieniu pojawienia się upragnionego obrazu, wreszcie działacz społeczny, wódz, czy przemysłowiec, narażający na wielkie niebezpieczeństwa siebie i swoich towarzyszy, żeby tylko osiągnąć cel, który niejednokrotnie jest najzupełniejszą fikcją, każdy z nich ma po swojemu rację. Poprostu dlatego, że wizja, o którą im idzie, jest dla nich czemś bardziej rzeczywistym i czemś bardziej godnem pożądania, niż to wszystko, czego dostarczyć im mogą osoby i rzeczy.

Jeśli te oczywiste fakty nie są powszechnie uznane, to przyczyną tego jest pomieszanie kryterjów rzeczywistości z kryte-

riami użyteczności. Św. Augustyn był zdania, że potrawy widziane w śnie są mniej rzeczywiste niż te, z którymi spotykamy się na jawie, bo w przeciwieństwie do tych ostatnich nie są pożywne.²⁷ Zapomniał jednak, że w takim razie trucizna byłaby jeszcze mniej rzeczywista, bo nie tylko nie przedłuża życia, ale je skraca. Lekceważenie rzeczywistości wyobrażeń jest podyktowane tym faktem, że jedynie na tej drodze możemy uchronić się przed jej niebezpiecznym rozrostem. Sabat czarownic był zrazu rozrywką nieprzyzwoitą, ale zabawną i do tego taną. Prześladowania uczyniły z niego rozkosz niesamowitą, godną najwyższego pożądanja.²⁸ Zmiana warunków życia codziennego z jednej, a wzrost tolerancji z drugiej strony unicestwiły sabat w sposób radykalny. Coraz łatwiej było o miłość pospolitą, a o amory z diabłem było coraz trudniej. Podróże na łopacie wyszły z mody.²⁹

Walka z pierwotnymi formami rzeczywistości wyobrażeń jest koniecznością społeczną, podobnie jak walka z wszystkimi objawami przerostu indywidualności. Inaczej przedstawia się sprawa z chwilą, kiedy mamy do czynienia z rzeczywistością wyobrażeń typów wyższych, taką, do jakiej doprowadza nas zagłębienie się w zagadnienie rzeczywistości, posunięte do granic ostatecznych. Mam tu na myśli takie doświadczenie, o jakim pisze Kartezjusz na początku swoich *Medytacji*. Kartezjuszowi szło o to, że nie mamy podstawy do twierdzenia, że jawa różni się od snu w sposób radykalny. Kiedy uwaga ta nasunęła mu się jako nieunikniona konieczność, przeraził się i przyszedł do przekonania, że stan ten jest nie do zniesienia. Jedyny ratunek widział w Bogu i schronił się na Jego łonie, jak dziecko strwożone chroni się na łonie matki. Wydawało mu się, że gdyby naprawdę nie było pewne, że jawa jest czymś radykalnie różnym od snu, to nie moglibyśmy ufać naszemu rozsądkowi i bylibyśmy skazani na pogrążenie w wiecznych ciemnościach.

Kartezjusz zapomniał o tem, że jawa może różnić się od snu jedynie wyższym stopniem prawidłowości. Argument ten zawdzięczamy d'Alembert'owi.³⁰ Rozpatrywana z tego punktu wi-

²⁷ Por.: *Confessiones* III, 6.

²⁸ Por.: J. Michelet: *La sorcière*.

²⁹ Por.: Dr Erazm Majewski: O wpływie nauk przyrodniczych i lekarskich na pokonanie przesądów ciemnoty i zniknięcie chorób umysłowych, zwanych demonicznymi. Kraków 1882.

³⁰ Por.: Łapszin, I. c., p. 22.

dzenia filozofja Kanta może być pojęta jako system praw rzeczywistości wizyjnej. Taka interpretacja filozofji Kanta przekreśliła oczywiście *rzecz samą w sobie*. Ale kantowska rzecz sama w sobie *była od początku przepojona mrokiem*.³¹ Był to taki sam przedmiot sprzeczny, jak *cesarz polski*. Prostu z tego powodu, że jeśli coś oddziałuje na nas w znany nam sposób, przyczem działanie to może być przewidziane zgóry, to nie możemy twierdzić, że jest niepoznawalne (argument Plechanowa³²).

Jeśli odrzucimy rzecz samą w sobie, to wtedy wyobrażenia stają się jedyną rzeczywistością. Wtedy oczywiście i my sami stajemy się wyobrażeniem. To samo odnosi się do naszych wrażeń. Nie mamy przecież czystych wrażeń, jak to słusznie zauważył Bergson. Koncepcja wyobrażeń jako słabych refleksów elementów wrażeniowych, wprowadzona przez Hume'a, nie da się w żaden sposób utrzymać. Przeciwnie, wrażenia zależne są w wysokim stopniu od wyobrażeń i mogą być uważane za osobliwy gatunek wyobrażeń. Żeby się o tem przekonać, wystarczy zwrócić uwagę na stopniowy rozwój zdolności spostrzegania pod wpływem wykorzystania wspomnień i wskazówek udzielanych nam przez innych ludzi. Dość powiedzieć, że tam, gdzie idzie o zobaczenie czegoś nowego w warunkach, do których nie przywykliśmy, np. przez mikroskop, nie potrafimy dać sobie rady, dopóki nie będziemy wiedzieli, co mamy zobaczyć.³³

Rzeczywistość elementów wyobrazeniowych wyższych typów odgrywa rolę decydującą tam, gdzie idzie o twórczość w wielkim stylu. Właśnie dlatego słuszne jest powszechnie uznane zdanie, że granica między genjuszem a warjatą jest trudna do uchwycenia. Decydująca jest tu rola zdrowego rozsądku. Dopóki zdajemy sobie sprawę z tego, że kryteria rzeczywistości tracą wszelkie znaczenie z chwilą, kiedy wchodzą w kolizję z zdrowym rozsądkiem, dopóty rzeczywistość wyobrażeń jest *rzeczą dla nas*, że użyję pięknego powiedzenia Engelsa. Z chwilą jednak, kiedy nasze wyobrażenia usamodzielniają się na tyle, że zdrowy rozsądek ugina się pod ich naporem, wtedy zaczyna się rozkład i klęska. Do tego, żeby taki niepożądany przerost rzeczywisto-

³¹ Por.: Cassirer: *Kants Leben u. Lehre*. Berlin 1921, p. 231.

³² Por.: Deborin: *Wwedenje w filozofju dialektyczeskago materializma*. Moskwa 1931, p. 177.

³³ Por. zajmujący artykuł dra Flecka w czasopiśmie: *Die Naturwissenschaften*, rocznik 17, zeszyt 23.

ści wyobrażeń nie nastąpił, potrzebna jest wielka siła zdrowego rozsądku i wielka filozoficzna kultura. Żeby dać sobie radę z rzeczywistością wyobrażeń trzeba koniecznie przeżyć rzeczywistość wrażeń i rzeczywistość fizykalną i uświadomić sobie do głębi ten fakt, że niema jednej *prawdziwej* rzeczywistości. W przeciwnym razie zamieni się rzeczywistość wyobrażeń w idealistyczną fikcję, która doprowadzi nas czy prędzej czy później do kolizji z zdrowym rozsądkiem.

Idealizm jest zakłamaną rzeczywistością wyobrażeń. Rodzi się z przeoczenia tego faktu, że w rzeczywistości wyobrażeń prawda i fałsz są równouprawnione. Twierdzenia z gruntu fałszywe mogą fascynować nas przez całe życie narówni z twierdzeniami prawdziwymi i narzucać nam się jako nieubłagana konieczność. Dopóki nie zdajemy sobie sprawy, że kryteria prawdy i fałszu są niezależne od tego, w jakiej znajdujemy się rzeczywistości i od naszego przekonania, dotąd pogrążeni jesteśmy w idealistycznym oblędzie. Ale do tego, żeby dojść do tej świadomości, przydatne jest wżycie się w rzeczywistość wyobrażeń w wysokim stopniu, daje nam bowiem dostateczny materiał porównawczy. Walka z idealizmem prowadzona w imię rzeczywistości wyobrażeń podobna jest do tej walki, jaką Chrystus prowadził z faryzeuszami. Prostu jest tak, że pełnia nasyczonego krwią życia przeciwstawia się nadętej pustce.

8. Teoria wielu rzeczywistości jest doktryną relatywistyczną, nie ma jednak nic wspólnego z konwencjonalizmem. Skutkiem pomieszania tych dwu pojęć uważa się relatywizm za doktrynę społecznie niebezpieczną. Przeciwnie, *absolutna powinność, absolutne dobro i piękno i absolutne przepisy policyjne* uchodzą za podstawę mądrej organizacji społecznej!

Krytyce tego stanowiska poświęcę jeszcze słów parę.

Historja obyczajów wszystkich czasów i wszystkich krajów uczy, że absolutne kryteria bywają stosowane prawie zawsze do innych, a tylko bardzo rzadko do siebie samego. Myślę jednak, że właśnie ci ludzie, którzy stosują je konsekwentnie do samych siebie, są najniebezpieczniejsi, sądzą bowiem, że, będąc bez grzechu, mają prawo ciskać na drugih kamieniem.

Interpretowanie relatywizmu jako doktryny oportunistycznej, która pozwala nam przyjąć zawsze teorię korzystną w danej

chwili, polega na pomieszaniu pojęcia przekonania wewnętrznego z wypowiedzianym frazesem.

Z tego, że widzimy różne możliwości, nie wynika bynajmniej, żebyśmy mieli zbaczać z naszej własnej drogi. Grozi nam to raczej właśnie wówczas, jeśli naszą drogę uważamy za jedyną, bo każde zboczenie afirmujemy jako nieuniknioną konieczność.

Zdrowy rozsądek jest potrzebny właśnie na to, żeby demaskować argumenty zakłamane, które dyktuje nam tęsknota za poznaniem bezwzględnej prawdy. Jest dobrze dodać, że tęsknota ta rodzi się bardzo często z opieszałości w poznawaniu czegośkolwiek. Prostu nie poznajemy niczego, bo prawdy bezwzględnej poznać i tak nie można, a prawd względnych poznawać nie warto. System metanauki jest potrzebny do tego właśnie, żeby umocnić zdrowy rozsądek tam, gdzie bezpośrednio jego kryteria przestają działać. Zdrowy rozsądek jest zbyt nieśmiały i zbyt słabo odgraniczony od common sense'u, żeby dał sobie radę równocześnie z autorytetem, z idealistyczną logiką i z t. zw. opinią publiczną. Do tej walki potrzebna mu jest pomoc z zewnątrz, maszyna logiczna, która wprawdzie jest jego własnym produktem, ale funkcjonuje niezależnie od jego nastrojów. W chwili przemęczenia możemy stracić wiarę w kryteria zdrowego rozsądku. Wtedy pozostaje nam system metanauki funkcjonujący automatycznie. Nie jest to oczywiście ostateczne załatwienie sprawy, bo możemy zwątpić i w ten system, ale jest z tem tak, jak z browningiem i pięścią. Zawsze lepiej bronić się przy pomocy browninga, albo przynajmniej mieć go w rezerwie.

Ograniczenie życia codziennego od przeżyć wyjątkowych i zdarzeń niesamowitych nie da się ściśle przeprowadzić. Niema takiej dziedziny życia codziennego, w którą nie zakradłoby się niekiedy obłędne przerażenie, lub szal lekkoomyślny. Nawet tak proste zadanie, jak to, które ma przed sobą buchalter sumujący kolumny cyfr, może przybrać charakter demonicznej grozy i rozpasanego bezprawia. Dzieje się to wtedy, kiedy za każdym razem wypada co innego i na żaden sposób nie można rachunków uzgodnić. Może wówczas narzucić nam się wątpliwość, czy to wogóle jest możliwe, czy niema jakiejś tajemniczej siły, która miesza nam szyki, i wtedy przenosimy się w zupełnie inną rzeczywistość, w naiwną rzeczywistość przeżyć osobistych, wyobrażeń i wizyj, która wprowadza nas daleko poza życie codzienne.

Naogół nie pozostajemy długo poza codziennością. Odwołu-

jemy się do pomocy naszych znajomych i tak już jest, że ci umieją wyprowadzić nas z takich sytuacji. Jeśli im się to nie uda, uznają nas za obłąkanych i umieszczają nas w sanatoriach. Jest jasne, że w tym wypadku nie myślimy wcale o tem, że oni mają rację. Przeciwnie, przychodzimy do przekonania, że rzeczywistość, z którą się liczą, jest ochłapem niegodnym jednego spojrzenia. Na argument, że bez liczenia się z rzeczywistością codzienną nie potrafimy długo utrzymać się przy życiu, odpowiedź jest prosta: — Poco utrzymywać się przy życiu? Lepiej jest przeżyć naprawdę jeden dzień, niż oszukiwać się przez czas długi. Baty wymierzone pyrroniście molierowskiemu poskutkowały tylko dlatego, że był to poprostu blagier. W wypadku obłądu lub ekstatycznego natchnienia są, jak wiadomo, zupełnie bezskutecznie.

Jeśli nie mamy sposobu przekonania przemęczonego buchaltera o poprawności tabliczki mnożenia, to jednak niema powodu, dla którego mielibyśmy liczyć się z jego wątpliwościami.

Sprawy te byłyby niepokojące tylko w tym wypadku, gdybyśmy chcieli uważać kryterja zdrowego rozsądku za źródło prawdy absolutnej. Jeśli jednak zgodzimy się na to, że zdrowy rozsądek jest jedyną deską ratunku, na której możemy się schronić przed dowolnem tworzeniem fikcji pozującej na prawdę (the making of truth), to nie pozostaje nam nic innego, jak pocieszać się myślą, że po niesamowitej nocy przepełnionej obłądem i strachem nastąpi dzień, który przyniesie z sobą powrót zdrowego rozsądku. Jeśli ten powrót nigdy nie nastąpi i jeśli cała ludzkość znajdzie się w tem samym położeniu, to wtedy cały nasz dzisiejszy wysiłek będzie stracony. Ale to samo stanie się, jeśli np. nastąpi jakaś wielka katastrofa kosmiczna. Przeciwwstawić takim zdarzeniom wiarę w idealne istnienie idei i prawd idealnych, jest mniej więcej tak samo, jak śpiewać rozgrymaszonemu dziecku piosenki lub opowiadać bajeczki.

Można na to powiedzieć, że może właśnie takie piosenki i bajeczki są jedynem wyjściem z sytuacji, bo do takiego stanowiska sprowadza się właściwie teoria Jamesa i I. C. Schillera.

Można protestować głośno przeciw nudzie i nieznosnej niewoli narzuconej nam przez zdrowy rozsądek. Rudolf Eucken przeciwstawiając Arystotelesa Platonowi pisze:

Z tym zanikiem religii odpada serdeczność duszy i ponadśmiertelna wielkość ducha Platona. Życie otrzymuje węższe granice, a jego ton uczuciowy staje się trzeźwiejszy.³⁴

A przecież lektura Arystotelesa może być i tak uważana za rodzaj narkotyku w porównaniu z tem, czego dostarcza nam zdrowy rozsądek i logika na nim oparta.

Jeśli porównamy proste i naiwne nieraz prawdy zawarte w dziełach Hume'a lub Macha z wzlotami fantazji Platona, Plotina, Origenesa, Spinozy, Hegla, Schellinga, Schopenhauera, Nietzschego lub Lwa Szestowa, to wydawać nam się może, że zamiast katarynki podwórzowej grają srebrne trąby archaniołów i samo zestawienie tych dwu światów może nas pobudzić do śmiechu.

Ale wtedy nasunąć się może refleksja, czy nie lepszy jest nastrój zrodzony przez prawdziwą katarynkę od zakłamanego patosu statystów operowych przebranych za archaniołów. Kto daje nam gwarancję, że te właśnie wzloty fantazji genjuszów nie są czemś podobnem do przedstawienia *Pierścienia Nibelungów*, kiedy to zamiast prawdziwych bohaterów występują chuderlawe aktory, z przekrzyczanemi po części głosami, a papierowe drzewa zerkają ironicznie na rozbuchanego dyrygenta orkiestry? A jeszcze do tego cała potęga wagnerowskiej muzyki jest dla publiczności niezrozumiałym hałasem, a dla tych nielicznych, którzy ją rozumieją, jest już dzisiaj przeżytkiem i po części banałem. Przykład ten zaczerpnąłem od Lwa Tołstoja. Muszę wyznać, że do zrozumienia go potrzebowałem pracy długotrwałej, gdyż sugestia wysokiego patosu działała na mnie z wielką siłą. Sugestia artystyczna jest potęgą, która decyduje o atmosferze umysłowej społeczeństw. Posiada ona niewątpliwie wiele stron dodatnich, gdyż czyni życie zajmującym i pełnem uroku. Prowadzi jednak zbyt często do ciężkich zbrodni, a w chwili, kiedy działać przestanie, pozostawia niesmak i obrzydzenie.

Ten właśnie stan rzeczy pochodzi z czasów pierwotnych, kiedy to kryteria moralne i kryteria artystyczne mieszały się z kryterjami prawdy, produkując zawiły splót przekonań, który nazywamy common sense'm.

Na to można powiedzieć, że lepiej jest poddać się wzniosłym złudzeniom, choćby nawet miały nam grozić gorzkie zawody,

³⁴ Lebensanschauungen großer Denker. Leipzig 1907, p. 49.

niż od samego początku poprzestawać na małym i skazywać się w ten sposób na życie w ciasnym kole myśli prostych i banalnych. Po tem, co powiedzieliśmy wyżej, łatwo jest dać sobie radę z tą obiekcją.

Rzeczywistość, w której żyjemy, jest czemś zasadniczo różnem od prawdy. Bogactwo życia wewnętrznego nie wyklucza wcale prostych i skromnych kryterjów rozumowania. Z tego, że w budowie podstaw naszej nauki nie chcemy się liczyć wcale z interwencją Boga, nie wynika wcale, żebyśmy mieli rezygnować z tęsknoty za istotą wyższą od nas, która potrafi zrozumieć nas do głębi. Powinniśmy jednak zdawać sobie sprawę, że z tego faktu, iż odczuwamy taką tęsknotę, nie możemy wyprowadzić żadnych konsekwencji i że jest to tylko sprawa naszego przeżycia. Ograniczenie się do kryterjów zdrowego rozsądku nie jest wcale synonimem zrezygnowania z wizji i marzenia. Właśnie dzięki temu, że posiadamy jasne kryteria analizy, możemy zapuszczać się w świat najniebezpieczniejszych urojeń bez obawy wewnętrznego zamętu. Poprostu dlatego, że dzięki tym kryterjom nie będziemy chcieli wyciągać konsekwencji społecznych z tego, co dzieje się w marzeniu i wizji.

Jakkolwiek takie hipotezy, jak liczby nieskończenie małe, eter, lub nieskończona aktualność Cantora, zrodziły się z fantazji, przekraczającej granice zdrowego rozsądku, to jednak twórcza ich rola polegała właśnie na tem, że to, co w nich było istotnie wartościowe, dało się wciągnąć w system nauki oparty na zdrowym rozsądku.

O takiej mechanizacji nauki i życia, któraby przekreślała radykalnie fantazję twórczą i myśli nabrzmiałe przeczuciem ciemnym i niepokojącym, nikt serjo myśleć nie może, a obawy formułowane przez niektórych filozofów, są doprawdy politowania godne. Jeszcze zabawniejsza jest trwoga przed zanikiem przesądów i zupełnem odbarwieniem życia i zamienieniem go w nędną roślinność. Przesądów nigdy nie braknie, bo na trupach przesądów starych rodzą się w naszych czasach przesady o wiele groźniejsze a zarazem pełne podziwu godnej wzniosłości. Niema też obawy, żeby mechanizacja życia posunęła się kiedykolwiek zbyt daleko. Rzekoma mechanizacja życia za naszych czasów jest typowem perspektywicznym złudzeniem. Jestem pewny, że dzisiejszy urzędnik pocztowy w prowincjonalnej mieścinie ma życie bezporównania bardziej urozmaicone, niż dawny magnat, sie-

dzący kamieniem na swoim zamku. Co ciekawsze, w wielu wypadkach posiada o wiele większą bujność temperamentu i nieraz równie dziką namiętność. Najzabawniejsze jest to, że najgorętszymi obrońcami indywidualizmu są ludzie, o których można zgóry powiedzieć, co będą robili w ciągu dnia w okresie kilku najbliższych miesięcy. Takich przykładów możnaby wymienić bardzo wiele. Dodam tylko, że do tej samej kategorii należy obawa przed zanikiem pokarmów organicznych, występująca w okresie, kiedy te rzeczy niszczy się masowo, a olbrzymia większość ludzi przymiera głodem.

Całe to nieporozumienie wzięło się z braku radykalnej krytyki opartej na zdrowym rozsądku i jest podyktowane przez tę złośliwą potęgę, drzemającą na dnie organizmu ludzkiego, którą Nietzsche nazywał *duchem ciężkości*.

Jest pewne, że gdybyśmy np. wykastrowali całą ludzkość, jak tego zdają się pragnąć członkowie towarzystw eugenicznych, to wtedy mogłyby zajść zmiany naprawdę niepokojące. Ale trzeba powiedzieć wyraźnie, że wszystkie takie pomysły są produktem irracjonalnej metafizyki i braku krytycyzmu. Właśnie dlatego, żeby ochronić ludzkość od takich wybryków przerafinowanego intelektualizmu, potrzebna jest obrona zdrowego rozsądku i opartej na nim logiki. Właśnie dlatego potrzebna jest bezlitosna krytyka przesądów, prowadzona z konsekwentnym uporem przy pomocy tych wszystkich środków, jakimi rozporządzamy. Myślę, że wielkość celu zapłaci stokrotnie trud poniesiony.

Nie mogę tać, że trud ten jest bardzo wielki, a wyniki uzyskane wydają się w stosunku do niego zawsze i tak zbyt nikłe. Ale taki jest już los każdej pracy ludzkiej. Biada temu, kto nie zechce pogodzić się z tem wielkiem prawem życia.



Indeks nazwisk

- Abel 39
 Ackermann 60, 86, 166
 Ajdukiewicz 15
 Albert Wielki 78, 79
 Alcuin 32
 d'Alembert 39, 177, 197, 254
 Antistenes 252
 Archimedes 171, 172
 Arystoteles X, XI, 6—10, 13, 28, 34, 35, 78—81, 85, 101—103, 210, 230, 236, 258, 259
 Arystyp 21
 Aston 234
 Św. Augustyn 209, 210, 254
 Avenarius 249, 252

 Bacon 234
 Banach 184
 Barrow 173, 174
 Bartels 199
 Al Battani 37
 Beltrami 200
 Bentley 15, 144
 Bergson VIII, IX, XVI, XVII, 8, 26, 85, 167, 168, 214, 243, 255
 Berkeley 25, 191
 Bernays 60, 61, 99, 141, 166
 Bhaskara 34
 Al Biruni 37
 Black 19, 41, 57, 144
 Boecjusz 38
 Bolk VII
 J. Bolyai 194, 197—201, 205
 W. Bolyai 194, 197—199
 Bolzano 122
 Boole 81, 85, 113, 114
 Borgo 38
 Born 215
 Brianchon 194
 Bridgman 219, 221
 Brouwer XXIII, 56, 57, 108, 143
 Bucharin XI, 25, 27
 Burali Forti 128
 Bühler 17

 Cajori 38
 Cantor XXIII, 23, 54, 56, 115, 122—128, 138, 174, 190, 260
 M. Cantor 174
 Carmichael 8, 33
 Carnap 15, 110, 129, 131, 241
 Cassirer 255
 Carnot 197
 Cauchy 39, 177, 184
 Cavalieri 173
 Chrysippos 108
 Clavius 80
 Comte XII, XIII, 22, 23
 Condillac 24
 Couturat 42, 82, 83, 85, 86
 Czerniewski 239

 Dalagarnus 80
 Daniel 232
 le Dantec XXI
 Darwin IX, 18, 193
 Deborin 26, 255
 Dedekind 41, 50, 120
 Delacroix 10, 11
 Descartes (Kartezjusz) 24, 201, 222, 247, 254
 Dickson 31—33
 Diderot 25
 Drewnowski 62
 Driesch VII
 Duns Scotus 79
 Dupréel VIII, 242
 Durand de St. Porçain 20
 Düring 174

 Eddington VI, 212, 213, 246, 247, 251
 Einstein V, IX, XIII, XVII, 37, 193, 208, 215—217, 220
 Engel 199
 Engels 26, 229, 248, 255
 Enriques 80, 111, 122, 194
 Eubulides 12, 18, 19
 Eucken 258
 Eudoxos 34
 Euklides 12, 18, 37, 80, 138, 190—193, 195—197, 199, 200, 204, 205, 207, 211
 Euler 111, 112

 Fermat 165, 166, 173
 Feuerbach 248
 Feys 84

 Fibonacci 38
 Fleck 255
 Fourier 197
 Fraenkel 124, 125, 127, 129, 132, 138
 Frege 39, 40, 81, 82, 113, 128, 177
 Freud VII, 249

 Galenus 83
 Galileusz 230
 Gauss 197—199
 Gergonne 194
 Goblot 84
 Goldbach 165
 Gonseth 197
 Goursat 178
 Gödel 163, 164, 166
 Gregorius a Sto Vincen-
 tio 173
 Grelling 19
 Gutkowski 181

 Hadamard 216
 Hasse 33
 Hausdorff 131
 Heath 1
 Hegel III, VIII—XV, 8, 22, 25—28, 85, 248, 259
 Heidegger 15
 Heine 40
 Heinrich 244
 Heizenberg 224—228, 251
 Helmholtz 39
 Heraklit z Efezu IX, 20
 Herigone 38
 Herzberg 136, 142, 155
 Hetper 60, 71, 74, 136, 142, 149, 151, 155, 183
 Hibert XXIII, 40, 46, 47, 55, 59, 60, 76, 86, 87, 95, 99, 101, 140, 141, 143, 195, 196
 Hobbes 247
 l'Hopital 38
 Horwitz 42
 Hoüel 195
 Hölder 39, 80, 86
 Hume XII, XX, 21, 22, 191, 223, 249, 255, 259
 Huntington 115
 Husserl VII, XVI, XIX, XX, 14—17, 126
 Huxley 239

- Infeld 215
 Ingarden 16, 17
 Jamblichos 32, 214
 James XVII, XIX, 258
 Janiszewski 131
 Jevous 81, 83, 85, 86, 114
 Jordan 227
 Jungius 80
 Kant XIII, XIV, 22, 81, 85,
 192, 207, 212, 222, 255
 Karpiński 31—33, 35
 F. Kaufmann 162
 G. A. Kaufmann 200
 Kepler 172, 173
 Keynes 231
 Klein 201
 Kopernik XVII, 193, 198
 Korzybski 8
 Kotarbiński 11, 12, 103,
 230
 Krasnodebski 80
 Krassowski 175
 Kronecker 41, 125
 Kuratowski 118, 119, 132
 Lagrange 197
 Lamarck 193
 Lambert 80, 111
 Lamettrie (de la Mettrie)
 25, 248
 Lande 237
 Laplace 197
 Lebesgue 58
 Legendre 197
 Leibniz 38, 39, 80, 110, 111,
 114, 173—175, 177, 236,
 247
 Lenin 248, 252
 Leonardo da Vinci 232,
 247
 Leśniewski 103, 113, 114
 Levi ben Gerson 38
 Lewis 108
 Lipps 35
 Locke 24, 222, 247
 Loria 38
 Löwenheim 162
 Lullus 79, 236
 Łapszin 252, 254
 Łobaczewski 56, 193, 194,
 197—201, 205, 211
 Łukasiewicz 72, 78, 80, 86,
 99, 108—110
 Mac Coll 81, 114
 Mach VII, XIII, XVII, XXI,
 23, 197, 207, 214, 223,
 233, 243, 249, 250, 252,
 259
 Majewski 254
 Manning 205
 Marx XIII, 23, 25, 26, 248
 Mazurkiewicz 131
 Meinong 200
 Melamid 154
 Metallmann 231, 252
 Meyerson 229, 237, 252
 Michelet 245, 254
 Michelson IX
 Mill XXI, 81, 207, 232
 Minkowski 217, 218
 Monge 197
 Montesquieu XII, 245
 de Morgan 81, 85, 112, 114
 A. Müller 61
 J. Müller (Regiomontano)
 38
 Nasir Eddin 37, 196
 Natanson IV, VI, XXIV, 21
 Nelson 240
 Neugebauer 33
 v. Neumann 60, 141
 Neurath 249
 Newton XIII, XVII, 114,
 173—175, 177, 230
 Nicod 86, 95, 96, 149, 231
 Nicol 228
 Nietzsche IX, XII, XVI,
 259, 261
 Nikodym 48
 Nikomachos z Gerasy 31,
 32, 35
 Occam 20
 Origenes 211, 259
 Orkisz 231
 Oughtred 38
 Padoa 81, 111, 112, 114
 Parmenides 209, 210
 Pascal 173
 Pawlicki 12, 21, 30, 31,
 210, 214
 Peano XXII, 47, 75, 82, 83,
 110, 113
 Peirce 81, 85, 114
 Pepis 151, 155
 Petrzycki 237
 Petrus Aureolus 20
 Pitagoras 30, 35, 36
 Planck 224, 228
 Platon IX, X, XX, 4—6,
 34, 35, 134, 209, 210,
 258, 259
 Plechanow 7, 26, 255
 Plotin X, 259
 Plutarch XII
 Plücker 195
 Podlacha 245
 Poincaré XIII, XXI—XXIII,
 41, 42, 45—47, 54—56,
 82, 83, 85, 123, 134, 135,
 162, 206, 207, 231
 Poncelet 194
 Posidonios 196
 Prantl 78
 Protagoras IX, XVIII, 88
 Quinet 252
 Ramsey 129
 Reichenbach 209
 Reinach XXI
 Richard 53—55, 121, 123,
 130—135, 169, 170
 Riemann 206, 208
 Robbins 31, 32, 35
 Roscellinus 13, 20
 Rousseau XII
 Rozwadowski 11
 Russell XX—XXIII, XXVII,
 XXVIII, 18, 19, 47, 52,
 55, 82, 84, 86, 102, 103,
 115, 124, 125, 127—130,
 132—134, 141, 143, 167,
 168, 175, 235, 251
 Röntgen 22, 233
 Saccheri 197
 Saint-Simon XII
 de Saussure 17
 Schames 215
 Scheler VII
 Schelling 259
 F. C. Schiller XVII—XIX,
 85, 86, 258
 Schlick 24
 Schloesser 4
 Schmidt 197
 Scholz 33, 34, 36
 Schopenhauer XV, 259
 Schröder 81, 82, 113, 114
 Schrödinger IV, 37, 168,
 213, 225
 Scipio Ferreo 38
 Segner 80, 111
 Sheffer 86, 88, 149
 Sierpiński 122, 131
 Sigwart 81, 143
 Silberstein 35
 Sinko 8, 9
 Skarzewski 64
 Skiński XV
 Skolem 162, 166

Sleszyński 10, 36, 78, 81,
111, 168, 172—174, 236
Smith 38
Sokrates X, 4—6, 27, 78, 82
Spengler 36
Spinoza 191, 236, 247, 259
Sprenger 245
Stäckel 197, 198
Steinberg 143
Stifel 35
Stoiber 245
Szczeniowski 224, 233
Szetow (Chestov) X, 4, 6,
259
Tannery 54, 178
Tarski 108

Taurinus 198
Thalheimer 28, 85
Thomae 40
Tołstoj 259
św. Tomasz z Aquino 245
Trendelenbur 9
Trentowski 249
Twardowski 21
Vailati 80
Venn 107
Weyl V, 19, 55, 57, 58, 141,
161, 202, 208
Whitehead XXI—XXIII,
47, 52, 55, 82, 84—86,
115, 124, 125, 130, 134,
143, 212, 235

Wilkins 80
Wilkosz 130, 164, 181
Winawer IV
S. I. Wittkiewicz 194
Wittgenstein 241
Wundt 81
Young 34
Zaremba 47, 49
S. K. Zaremba 236
Zawirski 211
Zenon z Elei IX, XVI, 12,
167—170, 176
Zermelo XXIII, 61, 131,
136—139
Ziemecki 224, 233

Errata

- Str. XVI. nota zam. Memoire ma być Mémoire.*
Str. 28. w. 7. i 6. od dołu zam. Tahlheimer ma być Thalheimer
w. 9. i 8. od dołu zam. Tahlheimera ma być Thalheimera.
Str. 33. w. 14. od góry zam. $\frac{17}{15}$ ma być $\frac{17}{25}$.
Str. 40. w. 17. od góry zam. Tomae ma być Thomae.
w. 18. od dołu zam. Tomaego ma być Thomaego.
Str. 44. w. 8. od góry zam. n ma być $(n + 1)$.
*Str. 63. w. 2. od góry zam. **00 ma być **000.*
Str. 75. w. 4. od dołu zam. arytmetyke ma być arytmetykę.
Str. 96. w. 4. od dołu zam. $\sim \sim t/s$ ma być $\sim \sim ts$.
Str. 97. w. 14. od góry zam. (14) ma być (4).
w. 13. od dołu przed formułą ma być (3 a).
w. 9. od dołu zam. (1 a) ma być (3 a).
Str. 99. w. 14. od góry zam. przedostatnich ma być uzyskanych.
Str. 102. w. 12. od góry zam. iest ma być jest.
Str. 105. w. 4. od góry zam. $\succ MN$ ma być N .
Str. 108. nota zam. Untersuchungen ma być Untersuchungen.
Str. 110. w. 6. od dołu zam. B ma być A .
Str. 119. w. 12. i 13. od dołu zam. ΠK ma być $\Pi K F$.
Str. 133. w. 11. od góry zam. Πa ma być $\Pi \omega$.
-



ERRATA

- Str. 74. w. 12. od dołu zam. właściwe ma być stałe
- Str. 88. w. 2. od dołu zam. $q//pq$ ma być q/pq
- Str. 89 w. 12. od dołu, kolumna 4, zam. V ma być Δ
w. 11. od dołu, kolumna 4, zamiast Δ ma być V
- Str. 90. w. 14. i 15. od góry zam. $(EFOF)$ ma być $(EFOE)$
- Str. 93. w. 6. od dołu zam. $\sim$ ma być nie zachodzi:
- Str. 122. w. 16. od góry zam. klasie ma być na klasie
w. 11. od dołu zam. równoznaczna ma być równoliczna
- Str. 145. Nr. 2'43 i Str. 151 w. 10 od góry zam. $\sim$ ma być $\sim_L$
Nr. 2'403 zam. $\{EF\}[c]$ ma być $\vee = Fc \sim (EfcE)$
Nr. 2'73 kolumna skrótów, Nr. 2'75 kolumna skrótów i Nr. 2'76 zamiast $[L]$ ma być $[LM]$
Nr. 2'73 i Nr. 2'75 zam. O_L ma być M
- Str. 146. w. 9. od góry zam. $K[c]$ ma być $K[cc]$
reguła 4'4 zam. E ma być $\exists E[L]$
zam. F ma być $\exists F[L]$
zam. $*EF$ ma być $\exists *EF[L]$
zam. wyrażeniem ma być twierdzeniem
- Str. 147. w. 12. od góry zam. $K[L]$ ma być $K[LO_L]$
- Str. 147. w. 13. od dołu zam. jeśli ma być jeśli K jest wyrażeniem,
jeśli $\Delta \sim \{F * L * KL\} \Delta \vee = G * KL = G * * KL * * ILL$
- Str. 149. w. 22—25. od góry zam. O ma być c
- Str. 151. w. 12. od góry zam. identyczności ma być 2'75
- Str. 156. w. 17. od góry zam. podstawiania ma być podstawione.
- Str. 157. w. 10. od góry zam. $II L$ ma być II_L
- Str. 159 w. 18. od dołu zam. $\supset$ ma być $\supset_P$
- Str. 163. w. 9. od dołu zam. $-[M]$ ma być $\vdash [M]$
- Str. 171. w. 13. od góry zam. $1 + q^2$ ma być $1 + q + q^2$
- Str. 179. w. 5. od dołu zam. $>$ ma być $\geq$
- Str. 186. w. 17. od dołu zam. pnprostu ma być poprostu
- Str 201. w. 1. od dołu zam. $(y_1 - y_2)^3$ ma być $(y_1 - y_2)^2$
- Str. 204. w. 17. od góry zam. x_1 ma być x ,
- Str. 222. w. 15. od dołu zam. w którym ma być z którym
w. 2. od dołu zam. zamierzone ma być zmierzone
- Str. 227. w. 7. od dołu zam. właściwości ma być właściwości
- Indeks nazwisk zam. Durand de St. Porçain ma być Durand de
St. Pourçain
zam. Hibert ma być Hilbert
zam. Skarżewski ma być Skarżeński

ERRATA II

Str. 63. w. 2. od góry zam. $*00$ ma być $**000$

w. 5. od góry zam. 12 ma być 14

po w. 11. od góry dopisać: $*0**00*00$ $***00*000$

Str. 146. w. 9. od góry zam. Λx ma być $\Lambda \rangle = 0 * E F \Lambda = c E = c F A x$

w. 2. od dołu zam. $\Lambda \Xi H$ ma być ΞH

Str. 154. zam. $\}$ ma być $\}[c]$

Str. 157. w. 10. od góry dodać na początku $\Lambda \sim \{F\beta\}$



ŚWIAT I ŻYCIE

Zarys encyklopedyczny współczesnej wiedzy i kultury

Opracowany przy współudziale najwybitniejszych
uczonych i specjalistów polskich

Redaktor naczelny Dr Z. ŁEMPICKI, prof. Uniw. Warsz.

Redakcja: Dr A. CHOROWICZOWA

*

Najważniejsze problemy życia współczesnego
polityczne, społeczne, gospodarcze

Najgłówniejsze wyniki wiedzy i nauki
przyroda i technika

Najżywotniejsze prądy duchowe chwili bieżącej
w filozofii, nauce i literaturze

Najwybitniejsi przedstawiciele pióra
i życia umysłowego w Polsce

Najistotniejsze zagadnienia kultury powojennej
w przystępnym oświeceniu

zawierają
Tomy I–IV wydawnictwa

Zwięzłe informacje i krótkie wiadomości poda
Tom V wydawnictwa

*

Ilustracje — Plansze — Rysunki

*

Warunki prenumeraty:

Miesięcznie (1 zeszyt) zł 4·80, półrocznie (5 zeszytów) zł 23·30, rocznie
(10 zeszytów, 1 tom) zł 45·15, 1 tom oprawny (10 zeszytów) zł 51·15

Nakład INSTYTUTU WYDAWNICZEGO KSIĄŻNICA-ATLAS
LWÓW, ul. Czarnieckiego 12 — WARSZAWA, ul. Nowy Świat 59

5.1.73 - 217.02

Biblioteka Śląska

305153

II

F

INSTYTUT WYDAWNICZY

Lwów, ul. Czarnieckiego 12 — Wars

Kzg 1 2857/67 100 000

poleca wydawnictwa:

PLATON

DZIEŁA

W tłumaczeniu W. Witwickiego

- | | |
|--------|------------------|
| Tom I. | FAJDROS |
| „ II. | EUTYFRON |
| | OBRONA SOKRATESA |
| | KRITON |
| „ III. | HIPJASZ MNIEJSZY |
| | HIPJASZ WIĘKSZY |
| | IJON |
| „ IV. | GORGJASZ |
| „ V. | PROTAGORAS |
| „ VI. | UCZTA |
| „ VII. | FEDON |

Cena
każdego
tomu
zł 4.80

Wydawnictwo to jest jedynym polskim tłumaczeniem, stojącym na poziomie naukowym. Każde dzieło zawiera, obok przekładu, uwagi tłumacza, przedstawiające historję powstania dzieła na tle epoki, jego znaczenie w twórczości Platona, charakterystykę i wogóle wszystko to, co o niem powiedzieć można. Każdy tom ilustrowany.

J. M. HOENE-WROŃSKI

PROLEGOMENA DO MESJANIZMU

- | | | | |
|----------------|-------------------------|-----------------------------|---------------|
| Tom I. | Przełożył J. Jankowski. | Str. XII + 248 | zł 9.50 |
| „ II. | „ P. Chomicz. | Str. 4 nlb. + 220 | „ 6.— |
| „ III. | „ J. Jankowski. | Str. 4 nlb. + 160 | „ 4.80 |
| Komplet | | | „ 16.— |

Podstawowe dzieło wielkiego myśliciela polskiego, teoretyka mesjanizmu i krzewiciela nauki o posłannictwie narodu polskiego.