



Toruńska
Letnia Szkoła
Matematyki i Informatyki



24 - 28
sierpnia 2015

Konferencja dla młodych naukowców pt.

Toruńska Letnia Szkoła
Matematyki i Informatyki
„Topologia i geometria” oraz „Technologie webowe”
pod patronatem
Centrum Badań Nieliniowych im. J. P. Schaudera

24-28 sierpnia 2015

organizatorzy

Koło Naukowe Informatyków
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Koło Naukowe Matematyków
Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Wydziałowa Rada Samorządu Studenckiego
Wydziału Matematyki i Informatyki UMK



ELIPTYCZNE ARBELOS

Marcin Szweda

marcin.szweda1@wp.pl

Kiedy po raz pierwszy przeczytaliśmy artykuł Jonathana Sondowa (opublikowany w grudniu 2013 roku w Amerykańskim Miesięczniku Matematycznym) dotyczący pojęcia i własności parbelos, czyli parabolicznego odpowiednika arbelos – powszechnie znanej, klasycznej figury geometrycznej, byliśmy zaskoczeni!

Byliśmy zaskoczeni tym, że tak późno zajęto się tym „uogólnieniem” (ponad 2000 lat po Archimedesie) i zaczęliśmy się zastanawiać, co właściwie wiadomo o innych stożkowych analogonach arbelos? Już na poziomie eliptycznego arbelos – najbardziej naturalnego uogólnienia klasycznego arbelos – nie spotkaliśmy żadnych innych cytowań (poza wspomnianym wyżej artykułem Sondowa), żadnych informacji, czy wskazówek. Mimo tego, parafrazując samego Hilberta, chcieliśmy przyjrzeć się eliptycznemu arbelos, musieliśmy przyjrzeć się eliptycznemu arbelos. Jak się teraz okazuje – warto było przyjrzeć się temu pojęciu. Co prawda, jesteśmy dopiero na początku ścieżki badań, więc i nasze odkrycia bliskie są fazie koncepcji i prostych obserwacji, ale już nagradzają poświęcony przez nas czas i poniesiony trud badawczy. Naszymi skromnymi obserwacjami i odkryciami, jak również wątpliwościami, pytaniami, hipotezami na temat eliptycznego arbelos, chcieliśmy wreszcie podzielić się z większym gronem matematyków, zwłaszcza z miłośnikami geometrii.

PS. „Historia pojęcia arbelos ginie w mrokach dziejów” (R. P. Boas).

Archimedes poświęcił arbelos odrębną pracę – nie zachowała się jednak żadna kopia tej pracy.

Archimedesowi przypisuje się odkrycie w arbelos tak zwanych bliźniaczych okręgów Archimedesesa. Leon Bankoff (XX-wieczny amerykański znawca tematyki arbelos – z zamiłowania matematyk, z zawodu dentysta) w 1974 roku odkrył, że mamy trójacze okręgi Archimedesesa (-Bankoffa), a w cytowanej poniżej pracy panów D. S. W. Y. wyróżniono już 29 takich specjalnych okręgów i na dokładkę nieskończenie wiele w tzw. ciągu okręgów Petera Woo. Pappus z Aleksandrii jest odkrywcą (jak przyjmuje się obecnie) ciągu okręgów wpisanych w arbelos, zwanego łańcuchem Pappusa i interesującego twierdzenia o promieniach tych okręgów.

Jeszcze do niedawna arbelos nazywano zamiennie „nożem szewski” (ang. „shoemaker’s knife” – wyłącznie takim określeniem posługiwał się w swoich pracach Leon Bankoff), chociaż jak się wydaje nie jest to najlepsze określenie (zobacz odpowiednią argumentację w pracy R. P. Boasa), lepiej brzmi sformułowanie „koci pazur”?!

ELIPTYCZNE ARBELOS

Marcin Szweda, Jarosław Matlak, Mariusz Pleszczyński,
Michał Różański, Roman Wituła

Politechnika Śląska
Wydział Matematyki Stosowanej

27.08.2015

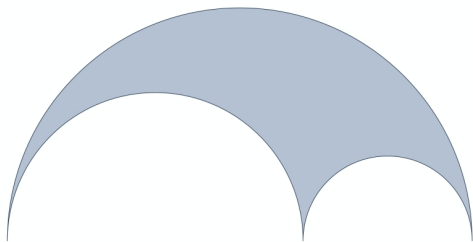
SPIS TREŚCI

- 1 KLASYCZNE ARBELOS
- 2 PARBELOS
- 3 ELIPTYCZNE ARBELOS
- 4 3D-ARBELOS ELIPTYCZNE
- 5 N-ELIPTYCZNE ARBELOS
- 6 3D-ARBELOS Z 4. SFERAMI
- 7 DODATKI

Arbelos

KLASYCZNE ARBELOS

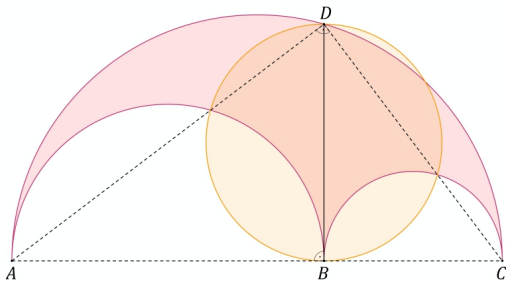
Arbelos (gr. $\alpha\rho\beta\upsilon\lambda\omicron\varsigma$ 'nóż szewski') to figura geometryczna, która powstaje przez ograniczenie płaszczyzny trzema wzajemnie stycznymi półkami leżącymi po tej samej stronie prostej zawierającej ich średnice. Pierwsza wzmianka o niej pojawia się w *Liber Assumptorum* (ang. *Book of Lemmas*) – łacińskim tłumaczeniu dzieła Archimedesesa, gdzie wśród piętnastu twierdzeń dotyczących okręgów zawarł trzy mówiące o własnościach arbelos.



RYSUNEK:
Arbelos.

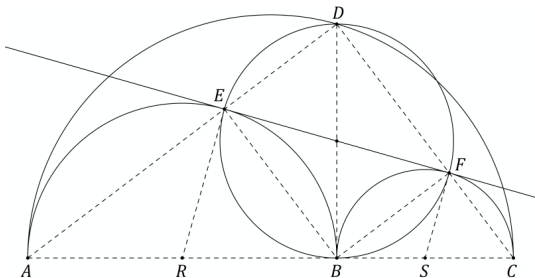
WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Górna i dolna krawędź arbelos mają taką samą długość,
Pole powierzchni arbelos jest równe polu koła o średnicy BD (jak na rysunku),



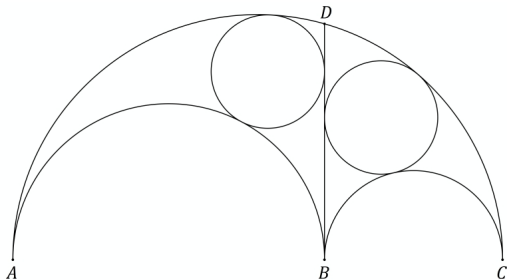
WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Niech l będzie wspólną styczną półokręgów \widehat{AB} i \widehat{BC} .
 Niech E będzie punktem styczności prostej l i półokręgu \widehat{AB} , natomiast F punktem styczności prostej l i półokręgu \widehat{BC} ($E \neq B$ i $F \neq B$). Wtedy punkty E i F leżą na odcinkach odpowiednio AD i CD . Należą one również do okręgu o średnicy BD , a odcinek EF też jest średnicą tego okręgu.



WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Niech Γ_1 i Γ_2 będą okręgami znajdującymi się po różnych stronach odcinka BD , stycznymi do tego odcinka oraz dolnej i górnej krawędzi arbelos. Okręgi te (nazywane **okręgami Archimedesesa**) mają te same średnice równe iloczynowi długości odcinków AB i BC podzielonemu przez długość odcinka AC .

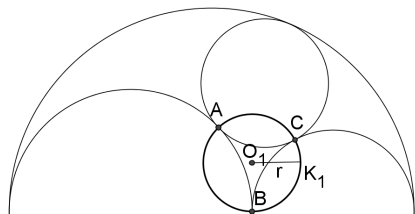


RYSUNEK:
Okręgi
Archimedesesa.

WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Okazuje się, że istnieje wiele szczególnych okręgów związanych z arbelos, które są przystające do okręgów Archimedesa¹. Oto przykłady kilku z nich:

Okrąg K_1 (zwany **trojaczym okręgiem Bankoffa**) jest okręgiem przechodzącym przez punkty A, B, C , gdzie A i C są punktami styczności mniejszych półokręgów tworzących arbelos z okręgiem wpisanym w arbelos, a punkt B jest punktem styczności mniejszych półokręgów tworzących arbelos.

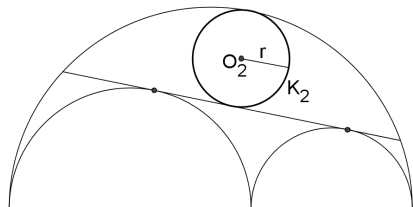


RYSUNEK: Okrąg K_1 – przystający do bliźniaczych okręgów Archimedesa.

¹ zob. C.W. Dodge, T. Schoch, P.Y. Woo, P. Yiu, Those *Ubiquitous Archimedean Circles*, Math. Magazine 72 No. 3 (1999), 202-213

WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

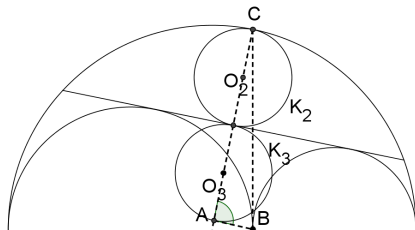
Okrąg K_2 (zwany **czworaczym okręgiem Bankoffa**) jest okręgiem o maksymalnym promieniu wpisanym w odcinek półokręgu, odcięty przez cięciwę styczną do mniejszych okręgów tworzących arbelos.



RYSUNEK: Okrąg K_2 – przystający do bliźniaczych okręgów Archimedesza.

WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Upřednio skonstruowany okrąg K_2 odbijmy symetrycznie względem cięciwy stycznej do mniejszych półokręgów i budujmy trójkąt ABC – jak na rysunku. Wówczas kąt CAB ma miarę 90° .

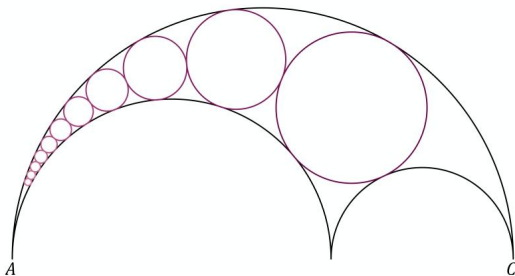


RYSUNEK: Trójkąt ABC jest prostokątny.

WŁASNOŚCI KLASYCZNEGO ARBELOS

Łańcuchem Pappusa nazywamy nieskończony ciąg okręgów wpisanych w arbelos jak na poniższym rysunku. Ma on następującą własność:

Odległość środka n -tego okręgu łańcucha Pappusa od odcinka AC jest równa n -krotnej długości średnicy tego okręgu.

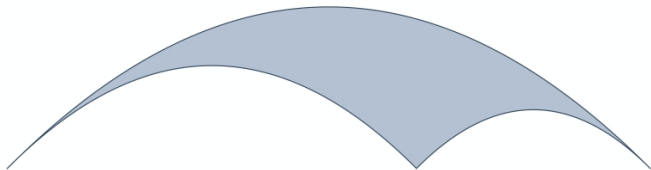


RYSUNEK:
Łańcuch
Pappusa.

Parbelos

PARBELOS

Parbelos jest parabolicznym odpowiednikiem arbelos, który powstaje przez zastąpienie półokręgów ograniczających arbelos odpowiednimi łukami parabol zwróconymi w tę samą stronę (odcinki łączące ogniska parabol z ich wierzchołkami są równoległe i zwrócone w tę samą stronę).

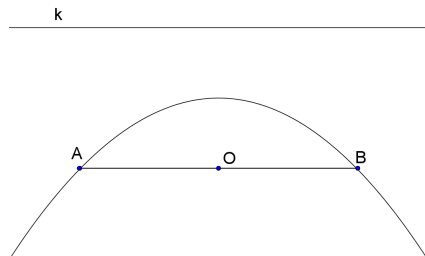


RYSUNEK: Parbelos.

PARBELOS

Odcinkiem charakterystycznym dla paraboli pełniącym tę samą rolę co średnica półokręgu jest odcinek nazywany **latus rectum**. Przechodzi on przez ognisko danej paraboli, jest równoległy do jej kierownicy i jego oba końce należą do paraboli.

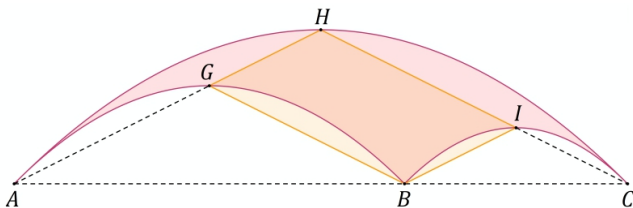
Każdy z dwóch dolnych łuków parbelos jest styczny do górnego, jednak w odróżnieniu od arbelos nie są one styczne wzajemnie.



RYSUNEK: AB – latus rectum.

WYBRANE WŁASNOŚCI PARBELOS

Górna i dolna krawędź parbelos mają taką samą długość
 Niech punkty G , H i I będą wierzchołkami parabol, których
 latus rectum są odcinki, odpowiednio, AB , AC i BC .
 Czworokąt $BIHG$ jest równoległobokiem, a pole
 powierzchni parbelos jest $\frac{4}{3}$ razy większe od pola
 powierzchni tego równoległoboku.



CIEKAWOSTKA!

Współczynnik $\frac{4}{3}$ pojawia się też w odkrytych przez samego Archimedesesa "stosunkach geometrycznych":

poła odcinka paraboli do pola odpowiedniego trójkąta wpisanego w ten odcinek,
we wzorze na objętość kuli.

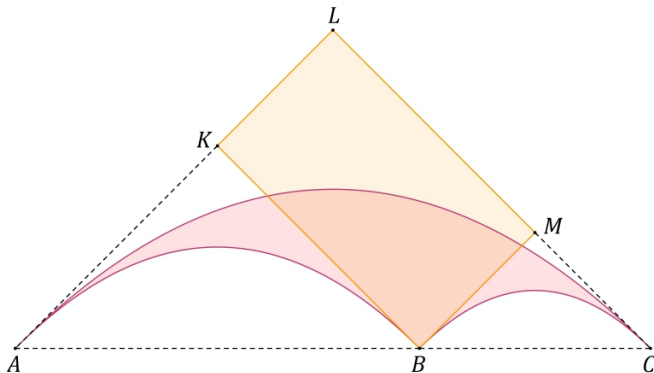
Michael Golomb oraz Hiroshi Haruki udowodnili², że jeśli odcinek paraboli zastąpimy odcinkiem elipsy, to stosunek pola tego odcinka do pola odpowiedniego trójkąta wpisanego w ten odcinek jest większy niż $\frac{4}{3}$, natomiast w przypadku odcinka dowolnej gałęzi hiperboli mamy, że analogiczny stosunek pól jest mniejszy niż $\frac{4}{3}$.³ Michael Golomb podał również uogólnienia n -wymiarowe tych faktów, m.in. dla kwadryk.

²M. Golomb, H. Haruki, *An Inequality for Elliptic and hyperbolic segments*, Mathematics Magazine, **46** No. 3 (1973), 152-155.

³Dowód podał O. Botemma w *Archimedes Revisited*, Mathematics Magazine, **57** No. 4 (1984), 224-225.

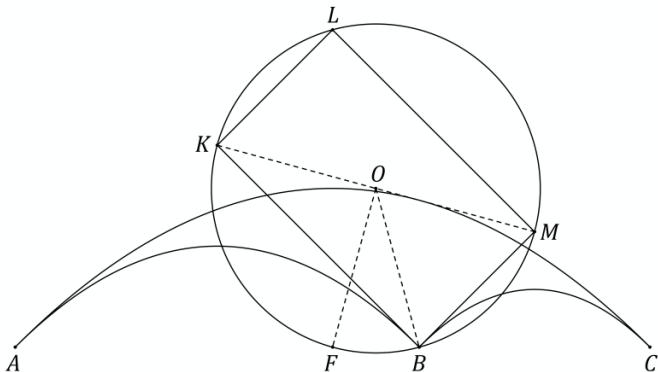
WYBRANE WŁASNOŚCI PARBELOS

Styczne do odpowiednich łuków parbelos w punktach A , B i C tworzą prostokąt nazywany **prostokątem stycznym** do danego parbelos. Pole parbelos jest równe $2/3$ pola tego prostokąta.



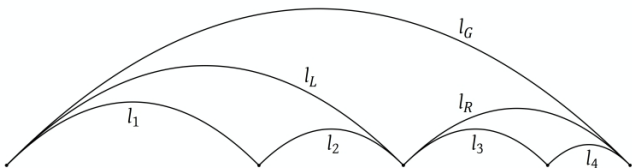
WYBRANE WŁASNOŚCI PARBELOS

Okrąg opisany na prostokącie stycznym do parbelos (zdefiniowanym w poprzedniej własności) przechodzi przez ognisko górnej paraboli (zobacz punkt F na rysunku poniżej).



WYBRANE WŁASNOŚCI PARBELOS

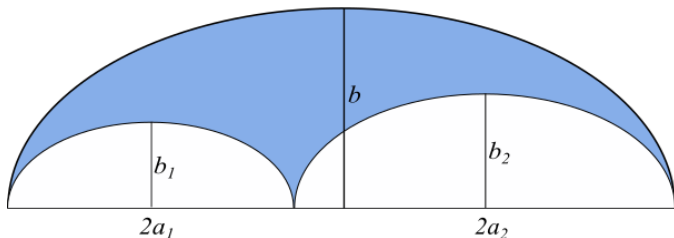
Pod każdym z dolnych łuków parbelos konstruujemy nowe parbelos, podobne do wyjściowego. Z tak powstałych czterech nowych łuków, dwa środkowe są przystające, a długość każdego z nich jest równa połowie średniej harmonicznej długości dolnych łuków wyjściowego parbelos.



Eliptyczne arbelos

ELIPTYCZNE ARBELOS

Rozważmy teraz **eliptyczne arbelos**, czyli obszar pomiędzy daną półelipsą, a wpisanymi w nią dwiema mniejszymi półelipsami, odpowiednio st stycznymi do siebie i do większej półelipsy.



RYSUNEK: Analogon arbelos dla elipsy.

ELIPTYCZNE ARBELOS

Dane są elipsy:

$$\frac{(x - a_1)^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1, \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{(a_1 + a_2)^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

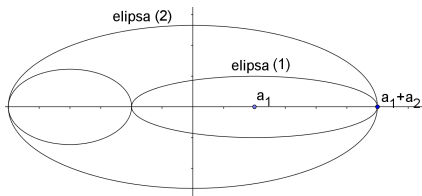
Chcemy, aby spełniony był warunek:

$$Y \geq y,$$

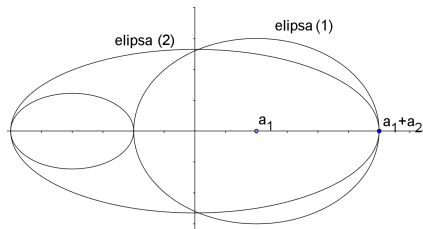
który gwarantuje, że elipsa opisana wzorem (1) mieści się wewnątrz elipsy opisanej wzorem (2).

Warunek wystarczający podamy w formie lematu.

ELIPTYCZNE ARBELOS



RYSUNEK: Przykład spełniający warunek $Y \geq y$.



RYSUNEK: Przykład, w którym $y > Y$.

ELIPTYCZNE ARBELOS

Pytamy się, przy jakim dodatkowym warunku na współczynniki a_1 , a_2 , b_2 i b , dla każdego $x \in [a_1, a_1 + a_2]$ wartości $y = y(x)$ i $Y = Y(x)$ wyznaczone z (1) i (2) spełniają nierówność $Y \geq y$? Innymi słowy, kiedy mniejsza elipsa opisana wzorem (1) mieści się w większej – opisanej wzorem (2). Odpowiedź na to pytanie podaje następujący lemat.

LEMAT (WARUNEK WYSTARCZAJĄCY NA $Y \geq y$)

Jeśli spełniony jest jeden z warunków:

$$\frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b}{a_1 + a_2} \quad \text{lub} \quad b = b_2 \sqrt{1 + \frac{a_1}{a_2}},$$

to zachodzi nierówność $Y \geq y$.

ELIPTYCZNE ARBELOS

Dowód: Rozważmy funkcję:

$$f(\varepsilon) = b^2 \left(1 - \frac{(a_1 + \varepsilon)^2}{(a_1 + a_2)^2} \right) - b_2^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{a_2^2} \right), \quad (3)$$

gdzie $\varepsilon \in [0, a_2]$. Mamy:

$$f'(\varepsilon) = -b^2 \frac{2(a_1 + \varepsilon)}{(a_1 + a_2)^2} + b_2^2 \frac{2\varepsilon}{a_2^2} = 2 \left(\frac{b_2^2}{a_2^2} - \frac{b^2}{(a_1 + a_2)^2} \right) \varepsilon - \frac{2a_1 b^2}{(a_1 + a_2)^2},$$

skąd łatwo wynika, że jeśli:

$$\frac{b_2}{a_2} \leq \frac{b}{a_1 + a_2}, \quad (4)$$

to $f(\varepsilon)$ jest malejąca w przedziale $\varepsilon \in [0, a_2]$. Ponieważ $f(a_2) = 0$, a przy warunku (4) mamy $f(0) > 0$, to $Y \geq y$ w zadanym przedziale.

ELIPTYCZNE ARBELOS

Przypuśćmy więc, że $\frac{b_2}{a_2} > \frac{b}{a_1+a_2}$. Mamy:

$$f(0) = \frac{a_2 b^2 (a_2 + 2a_1) - (b_2 (a_1 + a_2))^2}{(a_1 + a_2)^2},$$

oraz

$$\frac{1}{2} f'(a_2) = \frac{b_2^2 (a_1 + a_2) - a_2 b^2}{a_2 (a_1 + a_2)}.$$

Ponieważ $f(a_2) = 0$ oraz $f'(0) < 0$ i interesuje nas jedynie sytuacja, gdy $f(\varepsilon) \geq 0$ dla $\varepsilon \in [0, a_2]$, więc musi być $f'(a_2) = 0$ i $f(0) > 0$, czyli:

$$b = b_2 \sqrt{1 + \frac{a_1}{a_2}}, \quad (5)$$

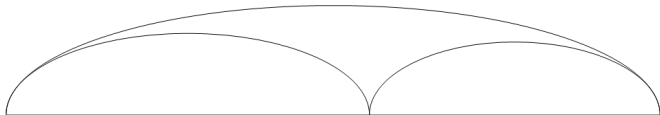
(wtedy $f(0) = \frac{b_2^2 a_2}{a_1 + a_2} > 0$ i $f'(\varepsilon) = -\frac{2a_1 b_2^2 (a_2 - \varepsilon)}{a_2^2 (a_1 + a_2)} \leq 0$).



ELIPTYCZNE ARBELOS – PRZYKŁAD

Uwaga:

Dwustronny warunek (5) z końca powyższego dowodu zilustrowany jest na poniższym rysunku. Tutaj zewnętrzna półelipsa posiada półosie $a_1 + a_2 = 9$, $b = 3$, a wewnętrzne półelipsy półosie: $a_1 = 5$, $b_1 = \sqrt{5}$, $a_2 = 4$, $b_2 = 2$. Zwiększenie wartości b_1 i b_2 wiązałoby się z wyjściem wewnętrznych elips poza zewnętrzną elipsę.



RYSUNEK: Arbelos eliptyczne odpowiadające optymalnemu doborowi wewnętrznych elips.

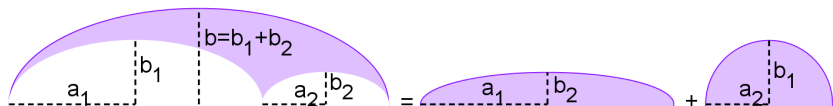
ELIPTYCZNE ARBELOS – WŁASNOŚCI

Pole eliptycznego arbelos jest równe:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(\pi(a_1 + a_2)b - \pi a_1 b_1 - \pi a_2 b_2) = \\ &= \frac{1}{2}(\pi(a_1 + a_2)(b - b_1 - b_2) + \pi a_1 b_2 + \pi a_2 b_1), \end{aligned}$$

czyli jest równe:

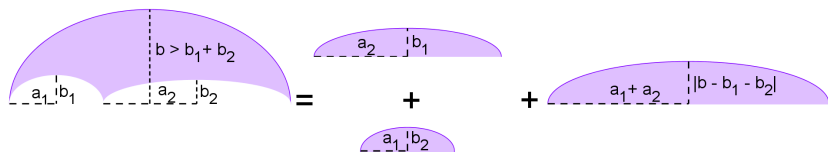
połowie sumy pól elips o półosiach a_1 i b_2 oraz a_2 i b_1 (zamienione są półosie mniejszych elips), jeśli tylko $b = b_1 + b_2$,



RYSUNEK: Interpretacja geometryczna otrzymanego wyniku.

ELIPTYCZNE ARBELOS – WŁASNOŚCI

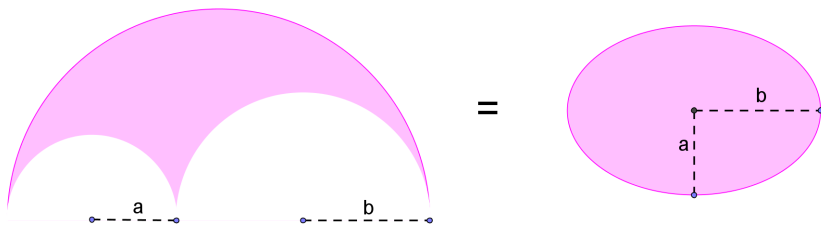
połowie sumy pól elips o półosiach a_1 i b_2 oraz a_2 i b_1 plus lub minus połowa pola elipsy o jednej półosi $a_1 + a_2$, tj. odpowiadającej półosi wyjściowej dużej elipsy i o półosi $|b - b_1 - b_2|$, wynikającej z niezbilansowanej półosi dużej elipsy przez sumę długości odpowiednich półosi mniejszych elips.



RYSUNEK: Interpretacja geometryczna otrzymanego wyniku.

ELIPTYCZNE ARBELOS – WŁASNOŚCI

W szczególności, jak widzimy, klasyczne arbelos (tj. arbelos kołowe) ma pole równe polu elipsy o półosiach równych promieniom dwóch mniejszych okręgów.



RYSUNEK: Równość pól arbelos i elipsy.

ELIPTYCZNE ARBELOS – WŁASNOŚCI

W przypadku, gdy mimośrodą wszystkich trzech elips tworzących dane arbelos eliptyczne mają identyczną wartość, co jak łatwo wynika z definicji mimośrodu oznacza, że:

$$\frac{b}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

wówczas zachodzi równość pomiędzy długością górnego i dolnego brzegu arbelos eliptycznego (przypomnijmy, że własność ta zachodzi też w parbelos i ma związek z uniwersalną stałą paraboliczną).

ELIPTYCZNE ARBELOS – WŁASNOŚCI

Uzasadnienie tego faktu wynika natychmiast z następującej zależności na obwód l elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b < a$, mianowicie:

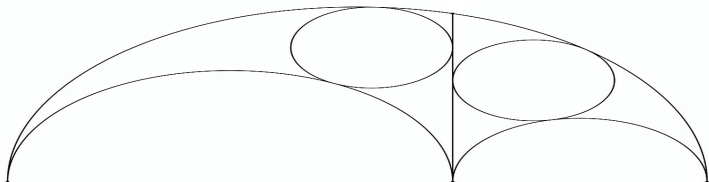
$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt =$$

$$= 2\pi a \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1} \right),$$

gdzie $\varepsilon := \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ jest mimośrodem elipsy. □

ELIPTYCZNE ARBELOS – PROBLEMY

Czy w dane eliptyczne arbelos, które tworzą półelipsy o jednakowym mimośrodku ε , można wpisać bliźniacze elipsy Archimedesesa (tj. elipsy przystające o tym samym mimośrodku ε) – jak na poniższym rysunku.



RYSUNEK: Bliźniacze elipsy Archimedesesa.

ELIPTYCZNE ARBELOS – PROBLEMY

Uzasadnienie (?):

W przypadku, gdy wszystkie trzy elipsy tworzące arbelos mają jednakowe mimośrodki odpowiedź wydaje się być twierdząca. Wynika to z uogólnienia zagadnienia bliźniaczych okręgów Archimedesesa. Uogólnienie to powstaje przez odpowiednie przeskalowanie osi OX lub OY . Wówczas okręgi przechodzą na elipsy (o tych samych mimośrodkach) i nadal pozostają odpowiednio styczne.

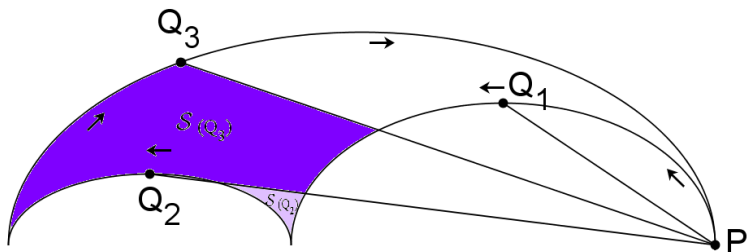
ELIPTYCZNE ARBELOS – PROBLEMY

Czy eliptyczne arbelos posiada własność Zarankiewicza⁴?
Innymi słowy, czy dla dowolnego punktu $P \in Fr(E)$ brzegu danego eliptycznego arbelos E istnieje punkt $Q \in Fr(E)$ taki, że odcinek PQ dzieli dane arbelos na dwie części o jednakowych polach?

⁴Zainteresowanych biografią i przede wszystkim osiągnięciami naukowymi Kazimierza Zarankiewicza – wybitnego polskiego topologa (i nie tylko, był również głównym inicjatorem powstania Polskiego Towarzystwa Astronautycznego, którego został też pierwszym prezesem) odsyłamy do pracy przeglądowej: S. Bergman, R. Duda, B. Knaster, J. Mycielski, A. Schinzel, *Kazimierz Zarankiewicz 2.V.1902-5.IX.1959*, Wiadomości Matematyczne tom 9, nr 2 (1967), 175-185.

ELIPTYCZNE ARBELOS – PROBLEMY

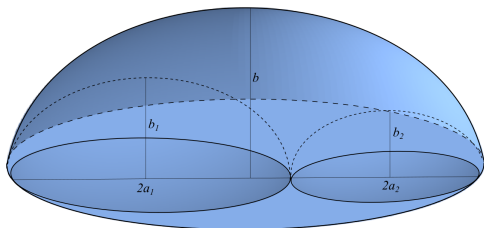
Rozwiązanie: Rozważmy odcinek "zaczepiony" w punkcie P . "Wędrując" drugim końcem odcinka po brzegu eliptycznego arbelos dostajemy podział tej figury na dwie części (które nie muszą być w "jednym kawałku"). Konstruując funkcję S , odmierzającą pole jednej z części tego podziału, zauważymy, że jest ona ciągła i przyjmuje wartości od 0 do wartości pola całej figury. Z własności Darboux przyjmuje więc wartość równą połowie pola eliptycznego arbelos.



3D-arbelos eliptyczne

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE

Rozważmy teraz "proste trójwymiarowe arbelos eliptyczne" (w skrócie "**3D-arbelos eliptyczne**"), określone jak na poniższym rysunku (rozważamy elipsoidy obrotowe otrzymane w wyniku obrotu odpowiednich trzech elips wokół osi OX , ponadto zakładamy, że $a_k > b_k$, $k = 1, 2$, $a > b$ oraz $b > \max \left\{ b_1 \left(1 + \frac{a_2}{a_1} \right), b_2 \left(1 + \frac{a_1}{a_2} \right) \right\}$ – warunek gwarantujący, że wewnętrzne elipsoidy nie będą "wychodzić" ponad zewnętrzną elipsoidę).



RYSUNEK:
3D-arbelos
eliptyczne.

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – WŁASNOŚCI

By uogólnić dyskusję do \mathbb{R}^3 , w naszym przypadku na elipsoidy obrotowe, posłużmy się następującym znanym faktem. Otóż, pole powierzchni elipsoidy obrotowej, otrzymanej w wyniku obrotu wokół osi OX elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdzie $a > b$ jest równe:

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon, \quad (6)$$

gdzie ε jest mimośrodem tej elipsy.

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – WŁASNOŚCI

Obliczamy różnicę P_1 pól powierzchni pomiędzy górnym i dolnym płatem określonego wcześniej 3D-arbelos eliptycznego. Na podstawie wzoru (6), znajdujemy:

$$P_1 = \left(\pi b^2 + \frac{\pi(a_1 + a_2)b}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right) - \left(\pi b_1^2 + \frac{\pi a_1 b_1}{\varepsilon_1} \arcsin \varepsilon_1 \right) - \left(\pi b_2^2 + \frac{\pi a_2 b_2}{\varepsilon_2} \arcsin \varepsilon_2 \right) - (\pi(a_1 + a_2)b - \pi a_1 b_1 - \pi a_2 b_2).$$

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – WŁASNOŚCI

W przypadku, gdy wszystkie trzy mimośrodory mają identyczną wartość, co jak łatwo wynika z definicji mimośrodu oznacza, że:

$$\frac{b}{a_1 + a_2} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad (7)$$

(co jest dopuszczalne wg wcześniej podanego warunku), czyli:

$$b = \left(1 + \frac{a_2}{a_1}\right) b_1 = \left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right) b_2.$$

Wówczas dostajemy:

$$b - b_1 - b_2 = b - \frac{a_1}{a_1 + a_2} b - \frac{a_2}{a_1 + a_2} b = 0,$$

$$b^2 - b_1^2 - b_2^2 = b^2 \frac{2a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2} = 2 \frac{a_1 b}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_2 b}{a_1 + a_2}. \quad (8)$$

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – WŁASNOŚCI

Stąd mamy:

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \pi(b^2 - b_1^2 - b_2^2) + \\
 &+ \pi \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right) ((a_1 + a_2)(b - b_1 - b_2) + a_1 b_2 + a_2 b_1) = \\
 &= 2\pi \frac{a_1 b}{a_1 + a_2} \cdot \frac{a_2 b}{a_1 + a_2} + \pi \left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} - 1 \right) (a_1 b_2 + a_2 b_1),
 \end{aligned}$$

gdzie $\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\arcsin \varepsilon}{\sin(\arcsin \varepsilon)} > 1$.

Gdy mamy do czynienia z kulami (wówczas $\varepsilon \rightarrow 0$, $\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow 1$, $b = a_1 + a_2$) dostajemy:

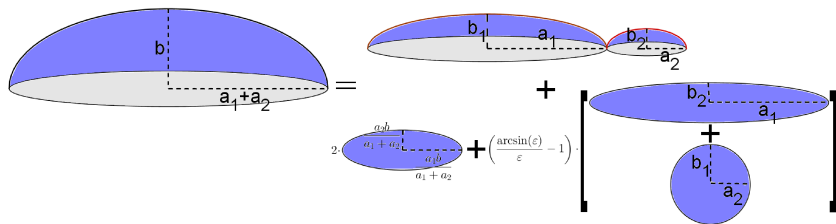
$$P_1 = 2\pi b_1 b_2 = 2\pi a_1 a_2.$$

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – WŁASNOŚCI

Zatem pole P_1 jest sumą podwojonego pola elipsy o półosiach

$$\frac{a_1 b}{a_1 + a_2} \quad \text{i} \quad \frac{a_2 b}{a_1 + a_2}$$

oraz pomnożonej przez wyrażenie $\left(\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon} - 1\right)$ sumy pól elips o półosiach a_1 i b_2 oraz a_2 i b_1 .



RYSUNEK: Interpretacja geometryczna otrzymanego wyniku.

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – OBJĘTOŚĆ

Najpierw przypomnijmy, że objętość elipsoidy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ jest równa $\frac{4}{3}\pi abc$. Stąd szukana objętość 3D-arbelos eliptycznego wynosi:

$$\begin{aligned}V_A &= \frac{2}{3}\pi(a_1 + a_2)b^2 - \frac{2}{3}\pi a_1 b_1^2 - \frac{2}{3}\pi a_2 b_2^2 = \\ &= \frac{2}{3}\pi a_1(b^2 - b_1^2) + \frac{2}{3}\pi a_2(b^2 - b_2^2).\end{aligned}$$

3D-ARBELOS ELIPTYCZNE – OBJĘTOŚĆ

W szczególności, gdy $b = b_1 + b_2$, co obejmuje też przypadek, gdy rozważane elipsoidy są kulami, to dostajemy:

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{2}{3}\pi (a_1 b_2^2 + a_2 b_1^2) + \frac{4}{3}\pi (a_1 b_1 b_2 + a_2 b_1 b_2) = \\ &= \frac{2}{3}\pi a_1 b_2 (b_2 + 2b_1) + \frac{2}{3}\pi a_2 b_1 (b_1 + 2b_2), \end{aligned}$$

czyli sumę objętości dwóch elipsoid o półosiach a_1, b_1, b_2 oraz a_2, b_1, b_2 i sumę objętości dwóch półelipsoid obrotowych o półosiach a_1, b_2, b_2 i a_2, b_1, b_1 lub, co jest równoważne, sumę objętości dwóch półelipsoid o półosiach a_1, b_2 i $b_2 + 2b_1$ oraz a_2, b_1 i $b_1 + 2b_2$.

Zauważmy, że gdy mamy do czynienia z kulami, to dwie pierwsze elipsoidy też są obrotowe.

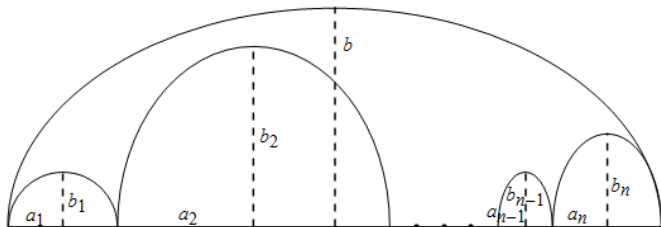
n-eliptyczne arbelos

N-ELIPTYCZNE ARBELOS

n-eliptycznym arbelos będziemy nazywać figurę (zbudowaną z elips) określoną na poniższym rysunku, taką że:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$\frac{b}{a} \geq \frac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$



RYSUNEK: *n*-eliptyczne arbelos.

N-ELIPTYCZNE ARBELOS

Podobnie jak to było w przypadku eliptycznego arbelos można pokazać, że warunek:

$$\frac{b}{a} \geq \frac{b_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

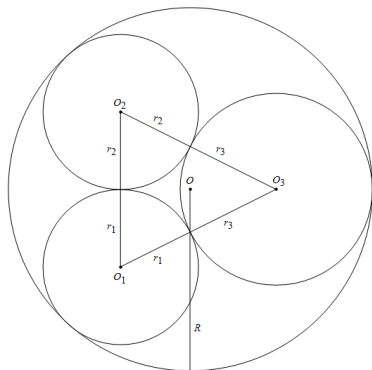
wystarczy, aby n -eliptyczne arbelos było dobrze zdefiniowane, tzn. aby dolne półelipsy nie "wychodziły" poza górną krawędź eliptycznego arbelos.

Łatwo można zauważyć, że jeśli wszystkie składowe półelipsy w n -eliptycznym arbelos mają takie same mimośrodki, to długość łuku górnej półelipsy jest równa długości dolnej krawędzi (czyli sumie długości łuków $n - 1$ dolnych półelips).

3D-arbelos z czterema sferami

3D-ARBELOS Z CZTEREMA SFERAMI

Zajmijmy się najpierw znalezieniem wzoru wiążącego promień R zewnętrznej półsfery z promieniami r_1 , r_2 , r_3 mniejszych półsfery. Dodatkowo założmy, że środek zewnętrznej sfery znajduje się w trójkącie, którego wierzchołkami są środki wewnętrznych półsfery – jak przedstawiono na rysunku.



RYSUNEK: Podstawa 3D-arbelos z czterema sferami.


3D-ARBELOS Z CZTEREMA SFERAMI

Wówczas ze wzoru Herona zastosowanego do trójkątów $O_1O_2O_3$, OO_1O_2 , OO_2O_3 , OO_1O_3 otrzymujemy wzór:

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3} = \sqrt{R(R - r_1 - r_2)r_1r_2} + \sqrt{R(R - r_1 - r_3)r_1r_3} + \sqrt{R(R - r_2 - r_3)r_2r_3}. \quad (9)$$

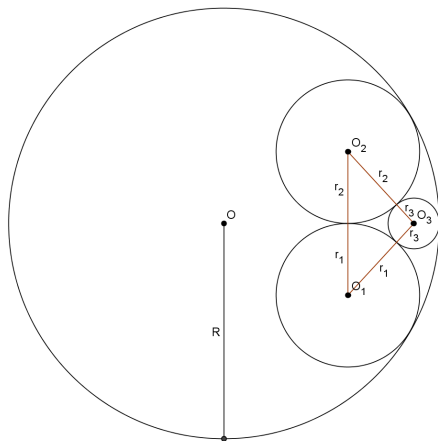
Wykonując przekształcenia algebraiczne⁵ potrafimy wyznaczyć następujący wzór:

$$R = \frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1r_2 - r_1r_3 - r_2r_3}. \quad (10)$$

⁵zob. J. Mellender, C. N. Mills, P. D. Thomas, C. F. Pinzka, *An Arbelos – solution of the problem 447*, Math. Magazine 35 No. 1 (1962), 57–58. 

3D-ARBELOS Z CZTEREMA SFERAMI

Teraz zajmijmy się przypadkiem, gdy środek O okręgu opisanego znajduje się poza trójkątem $O_1O_2O_3$ – jak przedstawiono na rysunku.



RYSUNEK: Podstawa 3D-arbelos z czterema sferami.

3D-ARBELOS Z CZTEREMA SFERAMI

W tym przypadku równanie generujące promień R (odpowiednik (9)) miałyby postać:

$$\sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)r_1r_2r_3} = \sqrt{R(R - r_1 - r_3)r_1r_3} + \sqrt{R(R - r_2 - r_3)r_2r_3} - \sqrt{R(R - r_1 - r_2)r_1r_2}. \quad (11)$$

Równanie to również implikuje wzór (10), czyli:

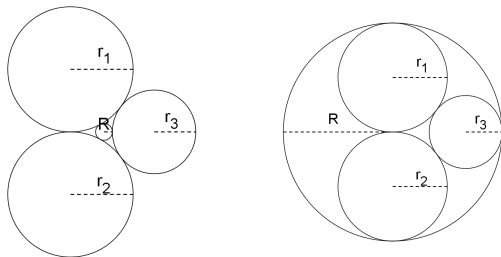
$$R = \frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} - r_1r_2 - r_1r_3 - r_2r_3}.$$

3D-ARBELOS Z CZTEREMA SFERAMI

Wzór wiążący promień R zewnętrznej półsfery z promieniami r_1, r_2, r_3 mniejszych półsfery można wyprowadzić także z następującego równania Kartezjusza dla wartości krzywizn c_1, c_2, c_3, c_R , czterech parami stycznych okręgów⁶:

$$(c_1 + c_2 + c_3 + c_R)^2 = 2(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_R^2),$$

gdzie $c_k = \frac{1}{r_k}$, $k = 1, 2, 3$ oraz $c_R = \frac{1}{R}$.



RYSUNEK: Sytuacja, którą opisuje równanie Kartezjusza.

⁶zob. A.A. Kirillov, *A Tale of Two Fractals*, Birkhäuser, New York 2013.

WNIOSKI

Uogólnienie pojęcia arbelos na elipsy wydaje się być naturalne. Otrzymane wyniki pokazują, że wiele własności zachodzących dla klasycznego arbelos można uogólnić na eliptyczne arbelos. Choć przedstawione właściwości są dość proste, pokazuje to jednak, że warto przyrzeć się bardziej szczegółowo temu uogólnieniu, pod kątem innych własności. Jednak ze względu na brak czasu nie udało nam się odpowiedzieć na więcej pytań dotyczących eliptycznego arbelos.

Dodatki

(Przedstawimy tutaj wyniki, które otrzymaliśmy przy okazji pracy nad arbelos. Nie są one bezpośrednio związane z omawianą tematyką, tym nie mniej jednak są warte uwagi.)

KONCENTRYCZNE RODZINY ELIPS

Rozważać będziemy zagadnienie, w którym dana jest rodzina elips współśrodkowych o tym samym mimośrodku ε . Okazuje się, że pomiędzy dowolne dwie elipsy należące do rozważanej rodziny można wpisać nową elipsę (o mimośrodku ε i odpowiednich długościach półosi).

Nie było by w tym nic dziwnego, gdyby nie fakt, że tę elipsę można "przesuwać" i nadal pozostanie styczna.

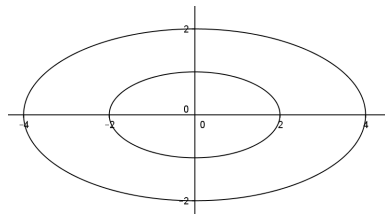
KONCENTRYCZNE RODZINY ELIPS

Niech dane będą dwie elipsy o jednakowym mimośrodku, których środek jest w tym samym punkcie. Bez zmniejszania ogólności przyjąć możemy, że elipsy te mają następujące równania:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 a_1^2} = 1, \quad (12)$$

$$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 a_2^2} = 1, \quad (13)$$

przy czym przyjmujemy
 $a_1 > a_2$.



RYSUNEK: Przykład rozważanego zagadnienia.

KONCENTRYCZNE RODZINY ELIPS

Rozważmy rodzinę elips:

$$\frac{(x - \xi)^2}{a_3^2} + \frac{(y - \eta)^2}{\alpha^2 a_3^2} = 1, \quad (14)$$

gdzie $a_3 = \frac{a_1 - a_2}{2}$.

Znajdziemy teraz parametry ξ i η , w taki sposób aby elipsa (14) była styczna do dwóch poprzednich (tzn. do elips (12) i (13)). W tym celu policzmy współczynnik kierunkowy stycznej do elipsy (14):

$$y' = -\alpha^2 \frac{x - \xi}{y - \eta}$$

oraz współczynnik kierunkowy stycznej do elipsy (13):

$$y' = -\alpha^2 \frac{x}{y}.$$

KONCENTRYCZNE RODZINY ELIPS

Porównując oba współczynniki kierunkowe i przechodząc na współrzędne eliptyczne, po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\eta = \xi \alpha \operatorname{tg} t.$$

Teraz skorzystamy z faktu, że elipsy muszą mieć punkty wspólne – punkty styczności (obliczenia prowadzimy dla elipsy (13) i (14)):

$$\frac{(a_2 \cos t - \xi)^2}{a_3^2} + \frac{(\alpha a_2 \sin t - \eta)^2}{\alpha^2 a_3^2} = 1,$$

Prowadząc dalsze obliczenia i korzystając z tego, że $\eta = \xi \alpha \operatorname{tg} t$ otrzymujemy:

$$\xi = \frac{2a_2 \cos t \pm 2a_3 |\cos t|}{2} = a_2 \cos t \pm a_3 \cos t = (a_2 \pm a_3) \cos t.$$

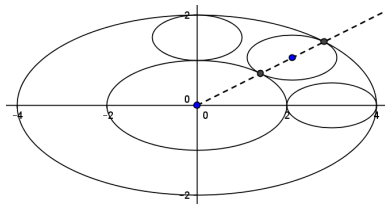
KONCENTRYCZNE RODZINY ELIPS

Wykonując analogiczne obliczenia dla elips (12) i (14) oraz wybierając wspólne rozwiązanie otrzymujemy:

$$\begin{cases} \xi = \frac{a_1+a_2}{2} \cos t \\ \eta = \frac{a_1+a_2}{2} \alpha \sin t \end{cases}$$

dla dowolnego $t \in [0, 2\pi]$.

Uwaga: środek rozważanej rodziny elips koncentrycznych, środek elipsy wpisanej oraz punkty styczności są współliniowe.



RYSUNEK: Przykład rozważanego zagadnienia.

**Dziękuję
za uwagę.**

LITERATURA

Archimedes, *Book of Lemmas*. The Works of Archimedes, Red. Thomas L. Heath, Cambridge University Press, 2009, 301-318.

https://www.stmarys-ca.edu/sites/default/files/attachments/files/Book_of_Lemmas.pdf.

L. Bankoff, *Are the twin circles of Archimedes really twins?*, Math. Magazine 47 No. 4 (1974), 214–218.

H. P. Boas, *Reflections on the arbelos*, Amer. Math. Monthly **113** No. 3 (2006), 236-249.

H. S. M. Coxeter, *Wstęp do Geometrii Dawnej i Nowej*, PWN, Warszawa 1967.

C. W. Dodge, T. Schoch, P. Y. Woo, P. Yiu, *Those ubiquitous Archimedean circles*, Math. Magazine 72 No. 3 (1999), 202–213.

H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics, Their History and Solution*, Dover, New York 1965.

LITERATURA

- A.A. Kirillov, *A Tale of Two Fractals*, Birkhäuser, New York 2013.
- S. Krantz, *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture Through Problem Solving*, Mathematical Association of America, 2010.
- F. Leja, *Geometria analityczna*, PWN, Warszawa 1966.
- J. Mellender, C. N. Mills, P. D. Thomas, C. F. Pinzka, *An Arbelos – solution of the problem 447*, Math. Magazine 35 No. 1 (1962), 57–58.
- R. B. Nelsen, *Proof without words: The area of an arbelos*, Math. Magazine 75 No. 2 (2002), 144.
- E. Niczyporowicz, *Krzywe płaskie*, PWN, Warszawa 1991.
- A. Ostermann, G. Wanner, *Geometry by Its History*, Springer, Berlin 2012.

LITERATURA

W.W. Prasłow, I.F. Szarygin, *Zadania ze stereometrii*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1989 (po rosyjsku).

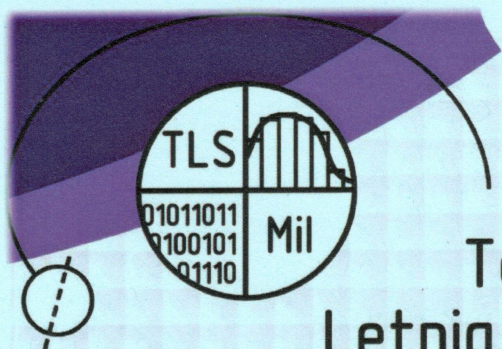
Z.A. Skopiec, *Conic sections*, 557–608 in *Encyclopedia of Elementary Mathematics*, Part V – Geometry, Nauka Publ., Moscow 1966.

J. Sondow, *The parbelos, a parabolic analog of the arbelos*, *Amer. Math. Monthly*, **120** No. 10 (2013), 929-935.

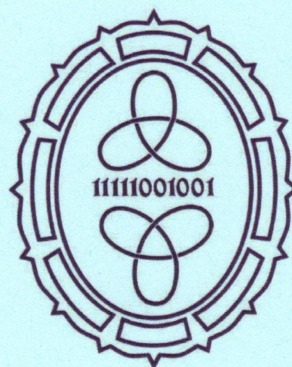
H. Walser, *99 Points of Intersection*, MAA, 2006.

E. W. Weisstein, *Arbelos* [online], MathWorld – A Wolfram Web Resource. Dostępny w Internecie:

<http://mathworld.wolfram.com/Arbelos.html>.
[dostęp 10 maja 2015].



Toruńska
Letnia Szkoła
Matematyki i Informatyki



Dyplom dla *Marcina Szwedy*

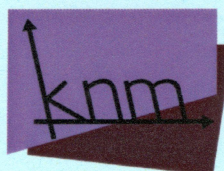
za zajęcie 1 miejsca
w konkursie referatów
Toruńskiej Letniej Szkoły
Matematyki i Informatyki 2015

S. Kępczyński

Dziekan
Wydziału Matematyki i Informatyki UMK

A. Bortnicka

Koło Naukowe Matematyków UMK



Toruń, 24-28.08.2015