Μεθοδικός Ὁδηγός

Λύσεων τῶν Ἀσκήσεων Θεωρητικῆς Γεωμετρίας

Ὑπό

Ἀθανασίου Κουζαΐδα

Mappe „Jura“ BIELLA Nr. 1788 (30,5×26 cm)

ΑΘΑΝ. ΚΟΥΚΛΑΔΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ-ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΜΕΘΟΔΙΚΟΣ ΟΔΗΓΟΣ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ο.Ε.Σ.Β.

ΜΕΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΤΩΝ ΑΝΑΠΟΔΕΙΚΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΛΗΘΟΣ ΟΔΗΓΙΩΝ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ - ΠΡΟΣΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΜΕΘΟΔΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ & ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑ
ΕΝ ΠΑΤΡΑΙΣ

ΑΘΑΝ. ΚΟΥΚΛΑΔΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ – ΦΡΟΝΤΙΣΤΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Ο.Ε.Σ.Β.

ΜΕΤΑ ΑΠΟΔΕΙΞΕΩΝ ΤΩΝ ΑΝΑΠΟΔΕΙΚΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΛΗΘΟΣ ΟΔΗΓΙΩΝ - ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ - ΠΡΟΣΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΑΛΛΩΝ ΜΕΘΟΔΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ & ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΩΝ

Τῷ [illegible] [illegible] ἐπὶ Δημ. Βιβλιοθήκης Πατρῶν
[illegible]
Αὔγουστος 191[illegible]

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ ΧΑΡΑΛ. ΚΑΓΙΑΦΑ
ΕΝ ΠΑΤΡΑΙΣ

«Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως».

Δι' οἱανδήποτε ἀπορίαν Σας, σχετικὴν μὲ τὰς λύσεις τῶν ἀσκήσεων, θὰ δύνασθε νὰ ἀπευθύνεσθε πρὸς τὸν Συγγραφέα, ὁδὸς Ὑψηλάντου 191 — ΠΑΤΡΑΙ.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μὲ τὴν ἔκδοσιν τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας τοῦ Ο.Ε.Σ.Β. δὲν ἐρχόμεθα νὰ πληρώσωμεν κενόν, καθ' ὅσον κυκλοφοροῦν πλεῖσται ὅσαι τοῦ εἴδους τούτου ἐκδόσεις, ἀλλὰ νὰ δώσωμεν μίαν μεθοδικὴν ἐργασίαν διὰ τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων, ὥστε νὰ δύναται νὰ ἐργασθῇ ἀπὸ τῶν πρώτων γνώσεών του ὁ μαθητὴς μὲ μέθοδον καὶ ἀκρίβειαν καὶ οὕτω νὰ ἀποκτήσῃ μίαν συνήθειαν ἀπαραίτητον διὰ τὰς περαιτέρω σπουδάς του.

Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων ἠκολουθήσαμεν πάντοτε τὴν ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν, νὰ στηριζώμεθα εἰς τὰ ἀμέσως προηγούμενα θεωρήματα. Ἐπίσης ἀποδεικνύομεν ὅλας τὰς ἀναποδείκτους προτάσεις καὶ πορίσματα.

Προσθέτομεν δὲ μεθ' ἑκάστην ὁμάδα λελυμένων ἀσκήσεων, μίαν μικρὰν πάντοτε σειρὰν ἀσκήσεων, μεθοδικῶν καὶ ἐκλεκτῶν, σημειοῦντες μόνον μίαν κεντρικὴν κατεύθυνσιν διὰ τὴν λύσιν.

Ἐπὶ τῶν ἀλύτων τούτων ἀσκήσεων θὰ δύνανται νὰ ἐξασκοῦνται ἐπὶ πλέον οἱ μαθηταί, ὥστε νὰ καταστῶσιν ἱκανοὶ νὰ λύωσιν ἀσκήσεις σπουδαιοτέρας καὶ ἔτι περισσότερον νὰ προσέρχωνται εἰς τὸ διαγώνισμα τῶν Μαθηματικῶν μὲ πεποίθησιν εἰς τὰς γνώσεις των καὶ τὴν ἐπιτυχίαν των.

Ἐπὶ ἐκείνων δὲ τῶν λελυμένων ἀσκήσεων ὡς καὶ τῶν πρὸς λύσιν ποὺ θὰ παρουσιάζουν τι τὸ ἀξιοσημείωτον καὶ τῶν ὁποίων γίνεται μεγαλυτέρα χρῆσις (θεωρουμένων ὡς θεωρημάτων) θὰ σημειοῦμεν ἀστερίσκον καὶ ἐνίοτε θὰ χρησιμοποιοῦμεν στοιχεῖα μαῦρα. Θὰ σημαίνῃ δὲ τοῦτο ὅτι θὰ πρέπῃ οἱ μαθηταί, ὅσον τοῖς εἶναι δυνατόν, νὰ διατηροῦν τὰς προτάσεις ταύτας ἀπὸ μνήμης.

Θεωροῦμεν ἐπίσης ἀναγκαῖον νὰ ἐπαναλάβωμεν καὶ τὰς προτάσεις τῶν λυομένων ἀσκήσεων, ὥστε τὸ βιβλίον μας νὰ ἀποτελέσῃ ἕνα πλήρη καὶ αὐτοτελῆ ὁδηγὸν εἰς τοὺς μαθητάς.

Ο ΣΥΓΓΡΑΦΕΥΣ

Καντζ

ΟΔΗΓΙΑΙ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΤΥΧΗ ΛΥΣΙΝ ΜΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

Θεωρῶ σκόπιμον νὰ προτάξω μερικὰς ὁδηγίας, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι πολὺ χρήσιμοι διὰ τοὺς μαθητάς, οἱ ὁποῖοι θὰ θέλουν μεθοδικὰ καὶ μὲ εὐχέρειαν νὰ ἐπιτύχουν τὴν λύσιν μιᾶς ἀσκήσεως τῆς Γεωμετρίας.

1. «Τὸ κυριώτερον μέλημά Σου εἶναι νὰ συγκεντρωθῇς ἀπόλυτα γύρω ἀπὸ τὴν ἄσκησίν Σου. Τότε νὰ εἶσαι βέβαιος ὅτι ἡ συγκέντρωσίς Σου αὐτὴ θὰ ἔχῃ ὡς ἀποτέλεσμα τὴν ἀπαραίτητον **ἔμπνευσιν** ποὺ λέγομεν ὅτι χρειάζεται συνήθως εἰς τὰ Μαθηματικά».

2. «Θὰ μελετήσῃς καλά, μὰ πολὺ καλά, τὴν ἄσκησίν Σου, ὥστε νὰ ξεκαθαρίσῃς καλὰ τὰ δεδομένα τῆς ἀσκήσεως (**τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὴν ὑπόθεσιν**), ἀπὸ τὰ ζητούμενα, (**τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν τὸ συμπέρασμα**). Ἰδιαιτέρως εἰς μίαν Γεωμετρικὴν ἄσκησιν ἀπαιτεῖται, ὅπως γράψῃς ἀμέσως, ὅλα τὰ ἐν τῇ ὑποθέσει, πλησίον τοῦ σχήματός Σου, ὡς ἐπίσης καὶ ὅλα τὰ ζητούμενα». Ὡς ἑξῆς :

	αὐτὴ		ἐκεῖνο . . . .
Ὑπόθεσις	αὐτὴ	Συμπέρασμα	ἐκεῖνο . . . .
	αὐτὴ		ἐκεῖνο . . . .

3. «Πρέπει νὰ γνωρίζῃς πολὺ καλὰ τοὺς ὁρισμούς, τὰ ἀξιώματα, τὰ αἰτήματα, τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ ἰδιαιτέρως ἐκείνας τὰς ἰδιότητας αἱ ὁποῖαι εἶναι **ἀξιοσημείωτοι,** δηλαδὴ ἐκείνας τῶν ὁποίων γίνεται περισσότερον χρῆσις».

4. «Ἀφοῦ γνωρίζῃς ὅλα ὅσα ἀνέφερον εἰς τὸ 3 προσπάθησε νὰ εὕρῃς πόσαι καὶ ποῖαι εἶναι αἱ προτάσεις ποὺ ἔχουν κάποιαν σχέσιν μὲ τὴν ἄσκησίν Σου, νὰ εἶσαι βέβαιος ὅτι μεταξὺ αὐτῶν θὰ ἔχῃς καὶ τὴν πρότασιν ἢ τὰς προτάσεις ποῦ θὰ Σοῦ χρειασθοῦν».

5. «Πρόσεχε τὸ σχῆμα Σου νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατὸν τελειότερον καὶ ἀρκετὰ μεγάλον. Ἕνα τέλειον σχῆμα εἶναι τὰς περισσοτέρας φορὰς **ὁ εἰδικώτερος ὁδηγὸς** διὰ τὴν λύσιν τῆς γεωμετρικῆς ἀσκήσεως.

Ἂν δέ, τὸ εὑρίσκῃς πολύπλοκον (δηλαδὴ ἔχει πολλὰς γραμμὰς) προσπάθησε νὰ τὸ χωρίσῃς εἰς ἄλλα μερικώτερα σχήματα καὶ νὰ ἐξετάσῃς ἑκάστην περίπτωσιν χωριστά».

6. «Μὴ σταματᾷς ἐμπρὸς εἰς τὸ σχῆμα Σου ἐκστατικὸς καὶ ἄνεργος.

Προσπάθησε νὰ σύρῃς γραμμάς, μὴ φοβεῖσαι πρὸς τοῦτο. Κατόπιν ὅμως ἐρεύνησε καὶ πάλιν τὶ σὲ ὠφέλησε ἡ γραμμὴ ποὺ ἔσυρες καὶ τὶ ἰδιότητας νέας ἀπεκόμισες».

7. «Ὅταν κατορθώσῃς καὶ ἀποδείξῃς μίαν πρότασιν ἢ ἄσκησιν, δὲν πρέπει νὰ σταματήσῃς ἕως ἐκεῖ, προσπάθησε νὰ ἐξετάσῃς ὅλας τὰς **δυνατὰς περιπτώσεις** ποὺ ἴσως Σοῦ παρουσιασθοῦν, διότι πολλὰς φορὰς μία πρότασις ἰσχύουσα διὰ μίαν περίπτωσιν δὲν ἰσχύει διὰ μίαν ἄλλην χωρὶς τροποποίησιν».

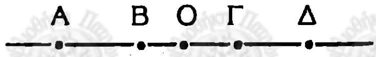
Θὰ εὕρωμεν κατὰ τὴν ἐργασίαν μας τοιαῦτα παραδείγματα ἀρκετά.

Ἐπίσης εἰς τὴν συνέχειαν τῶν κατὰ μέρος κεφαλαίων θὰ δίδωμεν σχετικὰς πάντοτε ὁδηγίας, ὥστε τὸ σύνολον νὰ ἀποτελέσῃ μίαν ἀρκούντως βοηθητικὴν μέθοδον ἐργασίας διὰ τὴν λύσιν προβλημάτων τῆς γεωμετρίας.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Ο. Ε. Σ. Β.

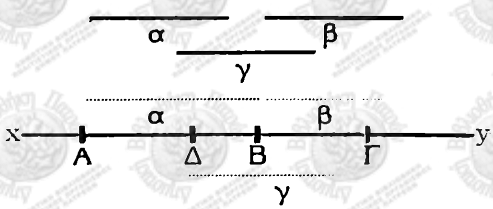
1.— Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, οὕτως ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ. Κατόπιν ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ, μετροῦμεν α) τὴν ΑΔ διὰ τῆς ΒΟ καὶ β) τὴν ΒΟ διὰ τῆς ΑΔ. Πόσον θὰ εἶναι τότε τὸ μῆκος α) τῆς ΒΟ καὶ β) τῆς ΑΔ;



Σχ. 1.

ΛΥΣΙΣ: (1) Ἀφοῦ τὸ Ο εἶναι μέσον τῆς ΒΓ, ἡ ΒΓ προφανῶς ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα ὡς τὸ ΒΟ δηλαδὴ εἶναι ΒΓ = 2. ΒΟ. (Σχ. 1). Ἀλλὰ ἐδόθη ΒΓ = ΑΒ = ΓΔ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ 2. ΒΟ, καὶ συνεπῶς ὁλόκληρος ἡ ΑΔ ἀποτελεῖται ἀπὸ 6. ΒΟ. Ἂν λοιπὸν ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ ΒΟ ἡ ΑΔ θὰ ἔχῃ μῆκος 6. Ἂν ὅμως ὡς μονὰς ληφθῇ τὸ ΑΔ τότε τὸ ΒΟ θὰ ἔχῃ μῆκος $\frac{1}{6}$.

2 — Λάβετε τρεῖς εὐθείας α, β, γ, κατασκευάσατε ἔπειτα τὰς εὐθείας $\alpha + \beta - \gamma$ καὶ $\alpha - \beta + \gamma$, τέλος ἐλέγξατε τὰς κατασκευὰς αὐτὰς διὰ μετρήσεως. Ἀλλὰ αἱ κατασκευαὶ αὐταὶ πότε θὰ εἶναι δυναταί;



Σχ. 2.

ΛΥΣΙΣ: Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (Σχ. 2.) α, β, γ. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν $\alpha + \beta - \gamma$ παρατηροῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὰς εὐθείας α καὶ β καὶ ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν γ. Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας xy, λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΑΒ=α, ἐν συνεχείᾳ δὲ τούτου τὸ ΒΓ=β, τότε ἡ εὐθεῖα ΑΓ θὰ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$. Ἤδη ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Γ λαμβάνομεν τμῆμα ΓΔ = γ ὅτε τὸ ὑπόλοιπον τμῆμα ΑΔ τῆς ΑΓ θὰ παριστᾷ τὴν διαφορὰν $(\alpha + \beta) - \gamma$. Εἶναι δὲ τώρα φανερὸν ὅτι διὰ νὰ ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὸ ΑΓ τὸ τμῆμα ΓΔ θὰ πρέπῃ τὸ $\alpha + \beta$ νὰ εἶναι μεγαλύτερον τῆς εὐθείας γ.

Ὁμοίως ἐντελῶς ἐργαζόμεθα διὰ νὰ κατασκευάσωμεν καὶ τὸ

---

(1) Δὲν σημειοῦμεν ὑπόθεσιν κλπ. διότι ὁ μαθητὴς δὲν ἐδιδάχθη ἀκόμη περὶ τούτου.

α—β+γ. Ἐδῶ δὲ θὰ πρέπῃ, διὰ νὰ εἶναι ἡ κατασκευὴ δυνατή, νὰ εἶναι α+γ>β.

3.—Ἐπὶ εὐθείας εἶναι κατὰ σειρὰν τοποθετημένα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Εὕρετε δύο ζεύγη εὐθειῶν μὲ ἄκρα τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν α) ἴσα ἀθροίσματα καὶ β) ἴσας διαφοράς.

ΛΥΣΙΣ.— α′) Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τμῆμα ΑΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ΑΓ καὶ ΓΔ διότι ΑΓ+ΓΔ=ΑΔ (Σχ. 3). Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα καὶ τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΔ διότι ΑΒ+ΒΔ=ΑΔ.

Ὥστε εὕρομεν δύο ζεύγη εὐθειῶν τὸ ἓν τὸ ΑΓ, ΓΔ καὶ τὸ ἄλλο τὸ ΑΒ, ΒΔ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ἀθροίσματα.

Σχ. 3.

β′) Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τμῆμα ΓΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ τῶν ΑΔ καὶ ΑΓ διότι ΑΔ—ΑΓ=ΓΔ.

Ἀλλ' ἐπίσης τοῦτο εἶναι διαφορὰ καὶ τῶν ΒΔ καὶ ΒΓ διότι πάλιν ΒΔ—ΒΓ=ΓΔ ἤτοι καὶ πάλιν εὕρομεν δύο ζεύγη τὸ ἓν τὸ ΑΔ καὶ ΑΓ καὶ τὸ ἄλλο τὸ ΒΔ, ΒΓ ποῦ ἔχουν ἴσας διαφοράς.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ κάμωμεν καὶ ἄλλους συνδυασμούς.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

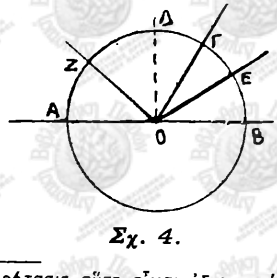
1* Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καὶ Μ τὸ μέσον του. Ἐὰν Ο τυχὸν σημεῖον ἐκτὸς τῆς ΑΒ, νὰ δειχθῇ ὅτι [1] $ΟΜ = \frac{ΟΑ+ΟΒ}{2}$

2.* Νὰ ἐξετασθῇ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ὅταν τὸ Ο κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε θὰ εἶναι $ΟΜ = \frac{ΟΑ-ΟΒ}{2}$

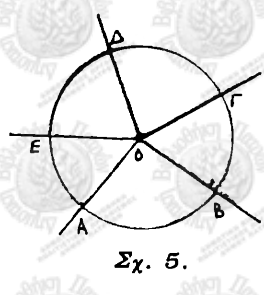
3.* Ἐπὶ μιᾶς τραπέζης θέτομεν ν βόλους ἀνὰ τρεῖς τῶν ὁποίων νὰ μὴ ὁρίζουν μίαν εὐθεῖαν. Νὰ εὑρεθῇ τώρα μὲ πόσας εὐθείας δυνάμεθα νὰ συνδέσωμεν τοὺς βόλους· $\left(\text{Ἀπ. } \frac{ν(ν-1)}{2}\right)$

Σελ. 25. § 66. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 1ον.

Ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα ΑΟΒ ὡς καὶ αἱ ΟΕ, ΟΓ, ΟΖ ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΟΒ. (Σχ. 4). Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γρά-



Σχ. 4.



Σχ. 5.

1. Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀξιοσημείωτος, γίνεται δὲ χρῆσις αὐτῆς πολὺ συχνὰ εἰς τὰ Μαθηματικὰ καὶ Φυσικήν. Ἐπὶ τοιούτων δὲ προτάσεων θὰ σημειοῦμεν ἀστερίσκον.

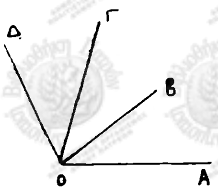
φομεν περιφέρειαν καθιστῶντες οὕτω τάς γωνίας ἐπικέντρους. Ἤδη ὅμως τά τόξα ἐφ' ὧν βαίνουν αὗται ἔχουν ἄθροισμα μίαν ἡμιπεριφέρειαν συμφώνως πρός τό θεώρημα τῆς § 65 ἤτοι 2 ὀρθάς.

§ 67. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 2ον.

Ἔστωσαν αἱ διαδοχικαί γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΑ ποῦ σχηματίζονται ἀπό εὐθείας ποῦ ἄγονται ἐξ ἑνός σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου πρός ἁπάσας τάς διευθύνσεις (Σχ. 5). Θά δείξωμεν ὅτι τό ἄθροισμά των εἶναι 4 ὀρθαί. Πρός τοῦτο γράφομεν μέ κέντρον τό Ο καί ἀκτῖνα τυχοῦσαν περιφέρειαν καθιστῶντες αὐτάς ἐπικέντρους. Ἤδη ὅμως τά τόξα ἐφ' ὧν βαίνουν αὗται ἔχουν ἄθροισμα μίαν περιφέρειαν, δηλαδή 4 ὀρθάς.

4. —Ἐκ σημείου Ο ἄγονται τέσσαρες εὐθεῖαι. Ἐκ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ποῖαι εἶναι ἐφεξῆς καὶ ποῖαι ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινήν, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἐφεξῆς [1] ;

ΛΥΣΙΣ. Ἔστωσαν αἱ διαδοχικαὶ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ ποῦ σχηματίζονται ἀπὸ τέσσαρας εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο (Σχ. 6). Ἐκ τούτων ἐφεξῆς εἶναι α) αἱ $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$, β) αἱ $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$, γ) αἱ $\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Delta}$, δ) αἱ $\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$. Ἐπίσης ἐκ τούτων μὴ ἐφεξῆς εἶναι, ἔχουσαι ὅμως μίαν πλευρὰν κοινήν, α) αἱ $\widehat{AOB}$, $\widehat{AO\Gamma}$, β) αἱ $\widehat{AOB}$, $\widehat{AO\Delta}$, γ) $\widehat{BO\Gamma}$, $\widehat{BO\Delta}$, καὶ δ) αἱ $\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{AO\Delta}$.



Σχ. 6.

5. Ἐκ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι 1) 35^0, 2) α^0, 3) $90^0-\alpha^0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα 90^0, ἔπεται ὅτι διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη τῶν γωνιῶν ὅταν δοθῇ ἡ μία, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα ἀπὸ τῶν 90^0. Ἤτοι 1) ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $90^0-35^0=55^0$, 2) ἡ ἄλλη εἶναι $90^0-\alpha^0$, 3) ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $90^0-(90^0-\alpha^0)=90^0-90^0+\alpha^0=\alpha^0$.

6 Ἐκ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἡ μία εἶναι 1) 45^0, 2) α^0, 3) $180^0-\alpha^0$, 4) $90^0+\alpha^0$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ ὅταν ἔχουν ἄθροισμα 180^0, ἔπεται ὅτι διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη ἐκ τῶν γωνιῶν, ὅταν δοθῇ ἡ μία, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα ἀπὸ τῶν 180^0. Ἤτοι θὰ ἔχωμεν:

1) ἡ ἄλλη εἶναι $180^0-45^0=135^0$.
2) ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $180^0-\alpha^0$.
3) ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $180^0-(180^0-\alpha^0)=180^0-180^0+\alpha^0=\alpha^0$.
4) ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $180^0-(90^0+\alpha^0)=180^0-90^0-\alpha^0=90^0-\alpha^0$.

---

1. Κατά τάς λύσεις τῶν ἀσκήσεων ὅπου ἡ ὑπόθεσις καί τό συμπέρασμα εἶναι ἁπλαῖ σκέψεις δέν θά γράφωνται.

7.— Ἐκ δύο γωνιῶν ἡ μία εἶναι 45^0 καὶ ἡ ἄλλη 18^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματικὴ καὶ ἡ παραπληρωματικὴ α) τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο γωνιῶν β) τῆς διαφορᾶς των.

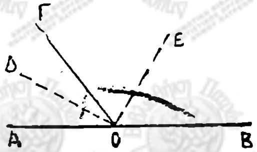
ΛΥΣΙΣ. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι $45^0+18^0=63^0$, ἡ δὲ διαφορά των εἶναι $45^0-18^0=27^0$.

Ἤδη α) ἡ συμπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος θὰ εἶναι $90^0-63^0=27^0$ ἡ δὲ παραπληρωματικὴ τοῦ ἀθροίσματος θὰ εἶναι $180^0-63^0=117^0$.

β) Ἡ συμπληρωματικὴ τῆς διαφορᾶς θὰ εἶναι $90^0-27^0=63^0$, ἡ δὲ παραπληρωματικὴ τῆς διαφορᾶς θὰ εἶναι $180^0-27^0=153^0$.

8.—Ἐκ τοῦ σημείου Ο εὐθείας ΑΒ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ἄγονται αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΓ, ΟΕ ἐκ τῶν ὁποίων αἱ ΟΔ, ΟΕ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΑΟΓ, ΓΟΒ ἀντιστοίχως. Ἐὰν δὲ $\widehat{ΑΟΓ}=30^0$ νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ γωνίαι ΓΟΒ, ΔΟΓ, ΓΟΕ καὶ ΔΟΕ. Αἱ τιμαὶ τῶν γωνιῶν αὐτῶν νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ ὡς μέρη ὀρθῆς.

ΛΥΣΙΣ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ εἶναι παραπληρωματικαὶ διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ἐφεξῆς, ἕπεται ὅτι διὰ νὰ εὑρεθῇ ἡ ΓΟΒ ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ ΑΟΓ ἀπὸ τῶν 180^0 ἤτοι ἡ γωνία ΓΟΒ$=180^0-30^0=150^0$. (Σχ. 7). Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ΟΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γων. ΑΟΓ ἕπεται ὅτι ἡ $\widehat{ΔΟΓ}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ΑΟΓ δηλαδὴ $\frac{30^0}{2}=15^0$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ΟΕ διχοτόμος τῆς γων ΓΟΒ ἕπεται ὅτι ἡ γων ΓΟΕ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γων. ΓΟΒ δηλαδὴ



Σχ. 7.

γων ΓΟΕ $=\frac{150^0}{2}=75^0$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γων. ΔΟΕ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΔΟΓ καὶ ΓΟΕ δηλ. γωνΔΟΕ$=15^0+75^0=90^0$.Παρατηροῦμεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅτι ἡ γωνία ποῦ σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι ὀρθή, ποὺ θὰ τὸ δείξωμεν γενικώτερα εὐθὺς κατωτέρω.

Αἱ τιμαὶ τώρα τῶν γωνιῶν εἰς μέρη ὀρθῆς θὰ εἶναι κατὰ σειράν:

$$\text{γων. ΓΟΒ} = 150^0 = \frac{150^0}{90^0} \text{ ὀρθῆς} = \frac{5}{3} \text{ ὀρθῆς}$$

$$\text{γων. ΔΟΓ} = 30^0 = \frac{30^0}{90^0} \text{ ὀρθῆς} = \frac{1}{3} \text{ ὀρθῆς}$$

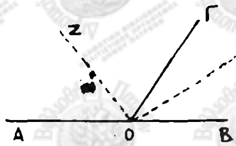
$$\text{γων. ΓΟΕ} = 75^0 = \frac{75^0}{90^0} \text{ ὀρθῆς} = \frac{5}{6} \text{ ὀρθῆς}$$

$$\text{γων. ΔΟΕ} = 90^0 = \frac{90^0}{90^0} \text{ ὀρθῆς} = 1 \text{ ὀρθή.}$$

Τὰ ἀμέσως ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ μὲ τὴν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν.

9. (1) **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διχοτομοῦσαι δύο ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικὰς γωνίας εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.**

Ὑπόθεσις	1) γωνΑΟΓ καὶ γωνΓΟΒ παραπληρ. ἤτοι γωνΑΟΓ + γωνΓΟΒ = 2 ὀρθ. 2) ΟΖ διχοτόμος τῆς γωνΑΟΓ ΟΕ διχοτόμος τῆς γωνΓΟΒ
Συμπέρασμα	ΟΖ κάθετος τῇ ΟΕ ἢ γων ΖΟΕ = 1 ὀρθή



Σχ. 8.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ ΟΖ διχοτόμος τῆς γων ΑΟΓ θὰ εἶναι γων ΖΟΓ $= \frac{1}{2}\cdot$ γων ΑΟΓ, ἐπίσης ἐπειδὴ ΟΕ διχοτόμος τῆς γων ΓΟΒ θὰ εἶναι γων ΓΟΕ $= \frac{1}{2}\cdot$ γων ΓΟΒ (Σχ. 8).

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ζητουμένη γωνία ΖΟΕ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΖΟΓ καὶ ΓΟΕ δηλαδὴ

γων ΖΟΕ = γων ΖΟΓ + γων ΓΟΕ $= \frac{1}{2}$ γων ΑΟΓ $+ \frac{1}{2}$ γωνΓΟΒ $=$
$= \frac{1}{2}$ (γωνΑΟΓ + γων ΓΟΒ) $= \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{2}{2} = 1$ ὀρθὴ διότι ἐξ ὑποθέσεως γωνΑΟΓ + γων ΓΟΒ = 2 ὀρθαί. Ἄρα ἀφοῦ αἱ ΖΟ καὶ ΟΕ σχηματίζουν ὀρθήν, ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

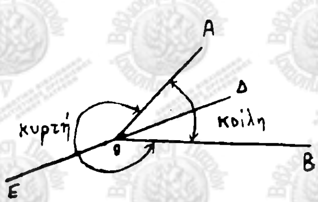
10 — Ἐκ τῶν 4 γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων ἡ μία 45^0. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη τῶν τριῶν ἄλλων ;

ΛΥΣΙΣ. Προφανῶς ἔχομεν δύο ζεύγη κατὰ κορυφὴν γωνιῶν. (Τὸ σχῆμα ὡς ἁπλοῦν παραλείπεται). Ἐπειδὴ ἡ μία τοῦ ἑνὸς ζεύγους εἶναι 45^0, καὶ ἡ κατὰ κορυφήν της θὰ εἶναι 45^0. Ἑκάστη τῶν ἄλλων τοῦ ἄλλου ζεύγους εἶναι ἐφεξῆς τῆς δοθείσης καὶ παραπληρωματική της, ἄρα θὰ εἶναι $180^0 - 45^0 = 135^0$. Ὥστε ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν εἶναι 45^0, 135^0, 135^0.

11.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς κοίλης γωνίας ΑΟΒ, προεκτεινομένη διχοτομεῖ καὶ τὴν κυρτὴν γωνίαν ΑΟΒ.

Ἔχομεν :

Ὑπόθεσις	ΕΟΔ εὐθεῖα, ΟΔ διχοτόμος τῆς γων ΑΟΒ (κοίλης) ἢ γωνΑΟΔ = γωνΔΟΒ
Συμπέρασμα	ΟΕ διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας ΑΟΒ ἢ γωνία ΑΟΕ = = γωνία ΕΟΒ.



Σχ. 9.

(1) Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, αἱ διὰ μαύρων στοιχείων σημειούμεναι ἀσκήσεις εἶναι ἀξιοσημείωτοι (ἰδὲ πρόλογον).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἔστω ἡ κοίλη γωνία ΑΟΒ (Σχ. 9) καὶ ἡ διχοτόμος αὐτῆς ΟΔ, ὅτε γωνΑΟΔ=γων ΔΟΒ. Προεκτείνομεν τὴν ΟΔ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο ὥστε νὰ διχοτομήσωμεν τὴν κυρτὴν γων ΑΟΒ ὅτε γων ΑΟΕ = γων ΕΟΒ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΟΕ εἶναι εὐθεῖα ἕκαστον τῶν ζευγῶν γων ΑΟΔ καὶ γωνΑΟΕ ὡς καὶ γων ΔΟΒ μὲ γωνΒΟΕ ἀποτελεῖ ζεῦγος παραπληρωματκῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ὅτε

γωνΑΟΔ + γωνΑΟΕ = 2 ὀρθ. (1)
γωνΔΟΒ + γωνΒΟΕ = 2 ὀρθ. (2)

Ἐπειδὴ ἤδη τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα ἴσα ἤτοι

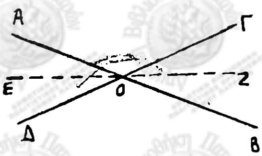
γωνΑΟΔ + γωνΑΟΕ = γωνΔΟΒ + γωνΒΟΕ

Ἀλλὰ δυνάμει τῆς ὑποθέσεως γων ΑΟΔ = γωνΔΟΒ ὅτε διαγράφοντες τὰ ἴσα λαμβάνομεν

γωνΑΟΕ = γωνΒΟΕ

Δηλαδὴ ἐδείχθη ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΕ καὶ ΒΟΕ εἶναι ἴσαι ἤτοι ἡ προέκτασις τῆς ΟΔ δηλαδὴ ἡ ΟΕ διχοτομεῖ τὴν κυρτὴν γωνίαν.

12. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. 10.

Ἔχομεν :

Ὑπόθεσις { γωνΑΟΔ=γωνΓΟΒ
ΕΟ διχοτόμος τῆς γωνΑΟΔ
ΟΖ διχοτόμος τῆς γων ΓΟΒ

Συμπέρασμα { ΕΟΖ εὐθεῖα.

Ἔστωσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι ΑΟΔ καὶ ΓΟΒ, αἱ ὁποῖαι ὡς γνωστὸν (§ 54) εἶναι ἴσαι καὶ ΕΟ καὶ ΟΖ αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ἀντιστοίχως. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΕΟΖ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ (Σχ. 10).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν ΕΟΑ, ΑΟΓ, ΓΟΖ εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθάς. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι γωνΑΟΕ = γωνΕΟΔ (λόγῳ τῆς διχοτόμου ΕΟ) καὶ γων ΓΟΖ = γων ΖΟΒ (λόγῳ τῆς διχοτόμου ΟΖ), ἀλλ' ἐπειδὴ εἶναι γωνΑΟΔ=γωνΓΟΒ ἐξ ὑποθέσεως ἕπεται ὅτι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα ἤτοι γωνΑΟΕ = γωνΕΟΔ =γωνΓΟΖ = γωνΖΟΒ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὑπὸ μελέτην ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΕΟΑ+ΑΟΓ+ΓΟΖ δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ ΖΟΒ+ΑΟΓ+ΓΟΖ =ΑΟΓ+ΓΟΒ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθὰς διότι ΑΟΒ εἶναι εὐθεῖα. Ἄρα καὶ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα ΕΟΑ+ΑΟΓ+ΓΟΖ=2 ὀρθ. ἤτοι ΕΟΖ εὐθεῖα γραμμή.

13. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ ἔχουν κοινὴν τὴν ΒΓ. Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ Α'Γ τέμνωνται νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΒ+Α'Γ>Α'Β+ΑΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ('Υπόθεσις καὶ συμπέρασμα ὁλοφάνερα). 'Από τὸ τρίγωνον Α'ΟΒ (Σχ. 11) λαμβάνομεν (§ 71) $A'O+OB>A'B$ (1)

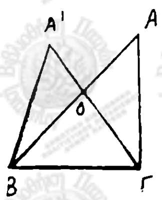
'Από δὲ τὸ ΑΟΓ λαμβάνομεν ὁμοίως $AO+O\Gamma>A\Gamma$ (2)

'Αθροίζοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

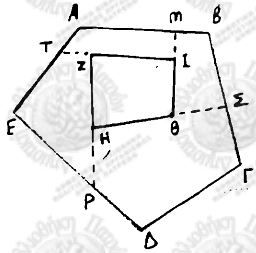
$$A'O+OB+AO+O\Gamma>A'B+A\Gamma \quad (3)$$

ἀλλὰ $A'O+O\Gamma=A'\Gamma$ καὶ $AO+OB=AB$ καὶ ἡ (3) διὰ ἀντικαταστάσεως εἰς τὸ α' μέλος της γίνεται

$$AB+A'\Gamma>A'B+A\Gamma \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$



Σχ. 11.



Σχ. 12.

14. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος εἶναι μικροτέρα πάσης τεθλασμένης γραμμῆς, ἡ ὁποία τὸ περικλείει.

"Εστω τὸ κυρτὸν σχῆμα ΖΗΘΙ καὶ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΔΓΒ ἥτις τὸ περικλείει. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ ΖΗΘΙ εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΕΔΓΒ (Σχ 12) ἤτοι

$$ZH+H\Theta+\Theta I+IZ<AE+E\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma B+BA.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς τοῦ ΖΗΘΙ κατά τινα φοράν. Αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τέμνουν τὴν περίμετρον τοῦ περιβάλλοντος σχήματος εἰς τὰ Τ, Ρ, Σ, Μ. Θὰ ἔχωμεν τώρα τὰς ἑξῆς ἀνισότητας μεταξὺ εὐθείας καὶ τεθλασμένης ἐχουσῶν τὰ αὐτὰ ἄκρα (§ 72 σημ.).

$$ZH+HP<ZT+TE+EP$$
$$H\Theta+\Theta\Sigma<HP+P\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma\Sigma$$
$$\Theta I+IM<\Theta\Sigma+\Sigma B+BM$$
$$IZ+ZT<MI+AM+AT$$

'Αθροίζομεν τώρα ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐξαλείφομεν ἀπὸ τῶν δύο μελῶν τὰ κοινὰ τμήματα ΗΡ, ΘΣ, ΜΙ, ΤΖ καὶ λαμβάνομεν

$$ZH+H\Theta+\Theta I+IZ<TE+EP+P\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma\Sigma+\Sigma B+BM+MA+AT$$

ἢ $ZH+H\Theta+\Theta I+IZ<E\Delta+\Delta\Gamma+\Gamma B+BA+AE.$

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.* Αἱ διχοτόμοι δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν ὀρθὴν καὶ ἀντιστρόφως.

5.* Αἱ διχοτόμοι τῶν τεσσάρων γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι, εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.

6. Ὀρθῆς γωνίας ΑΟΒ, ἡ μὲν πλευρὰ ΟΑ εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΓΟΔ, ἡ δὲ ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΕΟΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ΓΟΕ καὶ ΔΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί.

7.* Ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν σημεῖον Ρ. Νὰ δειχθῇ ἡ διπλῆ ἀνισότης

$$AB+B\Gamma+\Gamma A > PA+PB+P\Gamma > \frac{1}{2}\left(AB+B\Gamma+\Gamma A\right)$$

(τριπλῆ ἐφαρμογὴ τῆς § 71).

8. Εἰς πᾶν τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων του κεῖται μεταξὺ τῆς περιμέτρου καὶ τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τετραπλεύρου.

(Ὁμοίως δι' ἐφαρμογῆς § 71).

Σελὶς 32. § 74. **ΠΟΡΙΣΜΑ** : Ἔστω τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι ΑΒ=ΑΓ κατὰ τὸ θεώρημα (§ 73) θὰ εἶναι γωνΒ=γωνΓ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐπίσης εἶναι ΑΒ=ΒΓ θὰ εἶναι καὶ γωνΓ=γωνΑ. Ἄρα γων Α=γωνΒ=γωνΓ ἤτοι καὶ ἰσογώνιον.

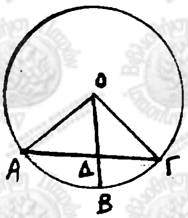
Σελὶς 33. § 76. **ΠΟΡΙΣΜΑ** : Ἔστω τὸ ἰσογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπειδὴ εἶναι γωνΑ= =γωνΒ θὰ εἶναι καὶ (§ 75) ΒΓ=ΑΓ. Ἐπίσης ἐπειδὴ εἶναι γων Α=γων Γ θὰ εἶναι καὶ ΒΓ=ΑΒ δηλαδὴ εἶναι ΑΒ=ΒΓ=ΑΓ ἤτοι καὶ ἰσόπλευρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15.— Αἱ προεκτάσεις τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως, σχηματίζουν μετ' αὐτῆς γωνίας ἴσας.

ΛΥΣΙΣ. Ἑκάστη τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν, μετὰ τῆς προσκειμένης ἐσωτερικῆς εἶναι γωνίαι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαὶ ὡς ἔχουσαι τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας. Δηλαδὴ ἕκαστον ζεῦγος ἔχει ἄθροισμα δύο ὀρθῶν. Ἂν ὅμως ἀφαιρέσωμεν ἐξ ἑκάστου τῶν ἴσων ζευγῶν τὰς ἴσας παρὰ τὴν βάσιν γωνίας τοῦ ἰσοσκελοῦς, τὰ ὑπόλοιπα θὰ εἶναι ἴσα. Ἤτοι αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι. (Τὸ σχῆμα ἁπλοῦν).

16.— Αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἐὰν δὲ αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶναι ἴσαι, ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΓ.



Σχ. 13.

Ἔχομεν :

Ὑπόθεσις $\begin{cases} OA = OB = O\Gamma \\ \text{γων } AOB = \text{γων } BO\Gamma \end{cases}$

Συμπέρασμα $\{$ ΟΔ κάθετος τῇ ΑΓ.

Ἔστωσαν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ τρεῖς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ γων ΑΟΒ=γων ΒΟΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ (Σχ. 13).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΓ τὸ τρίγωνον ΑΟΓ εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλ' ἔχομεν ἀκόμη ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΓ. Ἀλλὰ τότε γνωρίζομεν ὅτι εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ διχοτόμος εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ ὅτι διχοτομεῖ αὐτήν. Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι ἡ ΟΒ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς ΑΓ.

Σελ. 34. § 79 **ΠΟΡΙΣΜΑ** : Διότι ἔχουν καὶ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ὡς ὀρθήν.

Σελ. 34. § 81. **ΠΟΡΙΣΜΑ** : Διότι ἔχουν καὶ τὴν ἄλλην προσκειμένην, πρὸς τὴν ἴσην κάθετον πλευράν, γωνίαν ἴσην, (ὡς ὀρθήν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17.— Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἴσας καὶ τὴν μίαν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ ἤδη ἐδόθη ἡ ἰσότης τοῦ ἑνὸς ζεύγους τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν, ἕπεται ὅτι θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἡ ἰσότης τοῦ ἑτέρου ζεύγους τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως. Καὶ τὰ τρίγωνα ἤδη κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § ΕΟ θὰ εἶναι ἴσα.

18. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχομεν ΑΒ=ΑΔ καὶ ΓΒ=ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι γωνΑΔΓ=γωνΑΒΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΑΓ (τὸ σχῆμα ἁπλοῦν), καὶ συγκρίνομεν τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΑΔ καὶ ΒΓ=ΔΓ, ἔχουν δὲ τώρα καὶ τὴν ΑΓ κοινήν, δηλαδὴ τὰς πλευρὰς των ἀνὰ μίαν ἴσας, ὅτε θὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας τὰς κειμένας ἔναντι τῶν ἴσων πλευρῶν. Δηλαδὴ ἔναντι τῆς κοινῆς ΑΓ θὰ πρέπῃ νὰ κεῖνται αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἤτοι ἐδείχθη ὅτι γωνΑΒΓ=γωνΑΔΓ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν βλέπομεν εὐκόλως ὅτι διὰ νὰ ἀποφανθῶμεν περὶ τῆς ἰσότητος δύο στοιχείων δύο τριγώνων, θὰ πρέπῃ πρῶτον νὰ συγκριθῶσι τὰ τρίγωνα, νὰ εὑρεθῶσιν ἂν εἶναι ἴσα καὶ τότε νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἰσότης τῶν ὑπ' ὄψιν στοιχείων τῶν τριγώνων (§ 83).

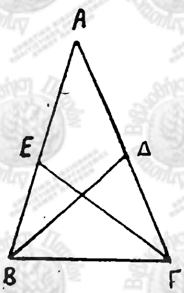
19. Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ, εἶναι ἴσαι.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 13) καὶ οἱ διάμεσοι αὐτοῦ ΒΔ καὶ ΓΕ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς ἴσας πλευρὰς του ἀντιστοίχως ΑΓ καὶ ΑΒ.

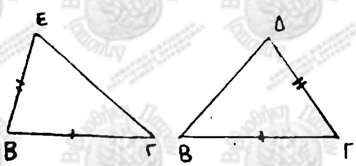
Ἔχομεν :

Ὑπόθεσις: ΑΒ = ΑΓ δηλαδὴ καὶ γωνΒ = γωνΓ
ΒΔ καὶ ΓΕ διάμεσοι δηλαδὴ ΑΔ=ΔΓ
ΑΕ = ΕΒ.

Συμπέρασμα: ΒΔ = ΓΕ.



Σχ. 14.



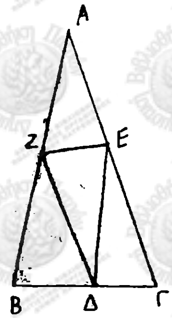
Σχ. 15.

Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ διάμεσοι αὐτοῦ ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΒΔΓ καὶ ΕΒΓ, τὰ ὁποῖα ἐπειδὴ ἔχουν κοινὸν μέρος, τὰ χωρίζομεν εἰς ἰδιαίτερα σχήματα (Σχ. 15) διὰ νὰ τὰ μελετήσωμεν ἀνετώτερα. Ταῦτα ἔχουν κοινὴν τὴν ΒΓ ἤτοι εἶναι ΒΓ=ΒΓ. Ἐπίσης γωνΒ=γωνΓ ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς ΑΒΓ, ὡς ἐπίσης καὶ ΒΕ = ΔΓ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς. Δηλαδὴ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην (ὡς φαίνεται καθαρῶς εἰς τὰ σχήματα 15) ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὴν ΕΓ = ΔΒ ὡς κειμένας ἔναντι ἴσων γωνιῶν εἰς ἴσα τρίγωνα.

20.— *Τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἰσοσκελές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. (Γράψατε ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμο). Ἐξ ἑνὸς καλοῦ σχήματος φαίνεται εὐκόλως ὅτι πρέπει νὰ περιστραφῶ περὶ τὴν ἐξέτασιν τῆς ἰσότητος ΖΔ καὶ ΔΕ. Παρατηρῶ ὅτι αἱ πλευραὶ αὐταὶ ἀνήκουν εἰς δύο τρίγωνα τὸ ΒΔΖ καὶ ΔΓΕ (Σχ. 16). Ἐξετάζω ταῦτα μήπως εἶναι ἴσα.

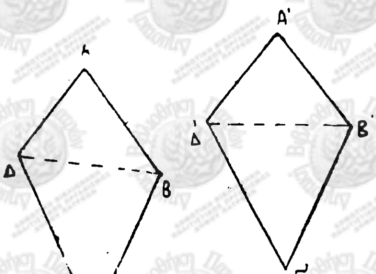


Σχ. 16.

Παρατηρῶ ὅτι ἔχουν ΒΔ = ΔΓ, διότι Δ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἐπίσης ΒΖ = ΓΕ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς, ἐπειδὴ Ζ καὶ Ε καθ' ὑπόθεσιν μέσα. Ἐπίσης εἶναι γων Β = γων Γ ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς. Ἐξ ὅλων τούτων παρατηρῶ ὅτι τὰ ὑπὸ ἐξέτασιν τρίγωνα ἔχουν τὰ ἀπαιτούμενα στοιχεῖα διὰ νὰ εἶναι ἴσα. Δηλαδὴ δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην ἴσην. Ἄρα εὐκόλως συμπεραίνω ὅτι θὰ εἶναι ΔΖ = ΕΔ δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΖΔΕ μὲ κορυφὴν τὸ Δ εἶναι ἰσοσκελές.

21.— *Δύο τετράπλευρα ἔχοντα τὰς τέσσαρας πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ μίαν γωνίαν σχηματιζομένην ὑπὸ ἴσων πλευρῶν ἴσην, εἶναι ἴσα.*

Ἔστωσαν τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀνὰ μίαν ἴσας ἤτοι ΑΒ=Α'Β', ΒΓ=Β'Γ', ΓΔ=Γ'Δ', ΔΑ==Δ'Α' ὡς καὶ τὴν γωνΑ=γωνΑ'. Θὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα (Σχ.17).



Σχ. 17

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σύρομεν τὰς βοηθητικὰς γραμμὰς ΔΒ, Δ'Β' αἱ ὁποῖαι εἶναι διαγώνιοι τῶν τετραπλεύρων καὶ δὲν διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν τῶν ἴσων δοθεισῶν γωνιῶν. Μὲ τοῦτο προσπαθοῦμεν νὰ συγκρίνωμεν τὰ σχήματα κατὰ μέρη. Πράγματι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ Α'Δ'Β' εἶναι ἴσα διότι ἔχουν ΑΔ = Α'Δ' ΑΒ=Α'Β' καὶ γωνΑ=γωνΑ'. Δηλαδὴ δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, ὅτε καὶ ΔΒ = Δ'Β'. Ἤδη τὰ τρίγωνα ΔΒΓ καὶ Δ'Β'Γ' ἔχουν ΔΓ==Δ'Γ',ΓΒ=Γ'Β', ΔΒ=Δ'Β' ἤτοι τὰς πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας ἄρα ἴσα, ὅτε καὶ αἱ γωνίαι των ἴσαι ἀνὰ μία ἤτοι γωνΓ=γωνΓ', γωνΓΔΒ=γωνΓ'Δ'Β', γων ΒΓΔ=γων Γ'Β'Δ'. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν προηγουμένων τριγώνων εἶναι γωνΑΔΒ=γων Α'Δ'Β' καὶ γωνΑΒΔ=γωνΑ'Β'Δ' θὰ εἶναι καὶ ὁλόκληρος ἡ γωνία ΑΔΓ=γωνΑ'Δ'Γ' καὶ ἡ γων ΑΒΓ= γων Α'Β'Γ'. Ἤτοι τὰ τετράπλευρα ἔχουν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἀνὰ ἓν ἴσα ἤτοι εἶναι ἐφαρμόσιμα, δηλαδὴ ἴσα.

22. ΛΥΣΙΣ. – Εἰς τὸ σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου φαίνεται εὐκόλως ὅτι πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὰς ΑΓ καὶ ΒΓ, ὥστε ΑΓ=ΓΔ καὶ ΒΓ=ΓΕ. Σύρομεν τώρα τὴν ΕΔ. Τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΓΕΔ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΕΔ=ΑΒ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἀπόστασιν ΕΔ τῶν προσιτῶν σημείων Ε καὶ Δ ὅτε τότε θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι εἰς τὸ σχῆμα 2 εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν σημείων Α, Β εὑρίσκεται ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν προσιτῶν σημείων Α, Β.

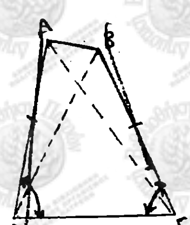
23. ΛΥΣΙΣ. Εἰς τὸ σχῆμα 3 τοῦ βιβλίου ἔχει δοθῆ τὸ μῆκος ΑΒ τῶν δύο προσιτῶν σημείων Α καὶ Β ὡς καὶ αἱ γωνίαι x καὶ y ὑπὸ τὰς ὁποίας βλέπομεν ἐκ τῶν Α καὶ Β τὸν σημαντῆρα Σ. (Μετροῦνται μὲ γωνιόμετρα). Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὰς ἀποστάσεις ΑΣ καὶ ΒΣ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ ἕτερον μέρος ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, δύο γωνίας ἴσας πρὸς τὰς x καὶ y ἀντιστοίχως, ὅτε αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων τέμνονται εἰς τὸ Γ. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΓΑΒ ἔχουν μίαν πλευρὰν κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας, εἶναι ἴσα. Ἐὰν ἤδη εὕρωμεν τὰς ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ θὰ γνωρίζωμεν τότε καὶ τὰς ἴσας πρὸς αὐτὰς ΣΑ καὶ ΣΒ.

24. ΛΥΣΙΣ. — Καθορίζομεν ἐπὶ τῆς ἀπέναντι ὄχθης τοῦ ποταμοῦ ἓν σταθερὸν σημεῖον π. χ. ἓν δένδρον καὶ κατόπιν τακτοποιούμεθα ἐπὶ τῆς ὄχθης εἰς τὴν ὁποίαν εὑρισκόμεθα οὕτως ὥστε νὰ βλέπωμεν τὸν ποταμὸν νὰ ἔχῃ διεύθυνσιν ὅσον τὸ δυνατὸν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις μᾶς συνδέει μὲ τὸ δένδρον. Ἔστω τώρα Α ἡ θέσις τοῦ δένδρου, Β δὲ ἡ ἰδική μας θέσις. Κατόπιν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ σημείου Β προχωροῦμεν κατὰ μῆκος τῆς ὄχθης εἴς τινα ἀπόστασιν ΒΓ καὶ σημειοῦμεν τοῦτο ἔστω δι' ἑνὸς κοντοῦ. Προχωροῦμεν κατόπιν πέραν τοῦ Γ μέχρι τοῦ Δ ὥστε ΓΔ = ΒΓ, καὶ ἐκεῖθεν προχωροῦμεν καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν ΒΔ μέχρι σημείου Ε ὥστε ἡ ΔΕ νὰ ἔχῃ φορὰν ἀντίθετον τῆς ΑΒ. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον θὰ σταματήσωμεν πρέπει νὰ εἶναι τοιοῦτον ὥστε τὰ Ε, Γ, Α νὰ εὑρίσκωνται εἰς εὐθεῖαν γραμμήν, τὸ ὁποῖον ἐπιτυγχάνομεν διὰ σκοπεύσεως. Συγκρίνοντες ἤδη τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα νοοῦμεν εὐκόλως ὅτι εἶναι ἴσα, ὅτε τὸ πλάτος τοῦ ποταμοῦ ΑΒ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως ΔΕ ἣν εὐκόλως δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν.

25.— Αἱ γωνίαι αἱ παρὰ τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι :

ΛΥΣΙΣ.— Διότι ἂν μία τῶν γωνιῶν τούτων ἦτο ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα, τότε ἡ τρίτη γωνία ἡ κειμένη ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς θὰ ἦτο κατὰ μείζονα λόγον μεγαλυτέρα ὀρθῆς ἢ ἀμβλείας, ἄρα τὸ τρίγωνον θὰ εἶχε περισσοτέρας τῆς μιᾶς ὀρθὰς ἢ ἀμβλείας ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὰ συμπεράσματα τῆς §85.

26.— Εἰς τὸ κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΔ = ΒΓ καὶ γων. ΑΔΓ > γων. ΒΓΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΓ > ΒΔ.

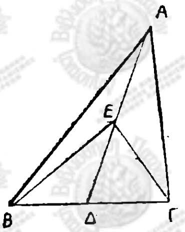


Σχ. 18.

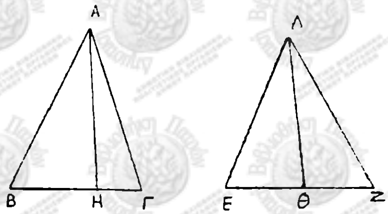
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Συγκρίνομεν πρὸς τοῦτο τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΓ. Ταῦτα ἔχουν ΑΔ = ΒΓ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν ΔΓ κοινὴν ὡς ἐπίσης καὶ γωνΑΔΓ>γωνΒΓΔ ἐξ ὑποθέσεως (Σχ. 18). Δηλαδὴ (§ 88) ἔχουν δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον ὅτε ἔναντι τῶν ἀνίσων γωνιῶν θὰ κεῖνται ἄνισοι πλευραὶ καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας, ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ ἤτοι ΑΓ > ΒΔ. (Πολὺ καλύτερον θὰ ἐξαχθῶσι τὰ συμπεράσματα ἂν συγκρίνωμεν τὰ τρίγωνα εἰς σχήματα χωριστὰ ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 19 ἐπράξαμεν).

27.—Ἐὰν ἡ διάμεσος τριγώνου περιέχηται μεταξὺ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος σημείου αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα ἡ πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν π.χ. ὅτι ΑΒ>ΑΓ (Σχ. 19), καὶ ὅτι ΑΔ διάμεσος αὐτοῦ. Ἂν Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΔ, θὰ δείξωμεν ὅτι ΕΒ>ΕΓ.



Σχ. 19.



Σχ. 20.

Δηλαδὴ ἔχομεν :

Ὑπόθεσις	ΑΒ>ΑΓ ΑΔ διάμεσος ἤτοι ΒΔ=ΔΓ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΔ.	Συμπέρασμα	ΕΒ>ΕΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐξετάζομεν τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν ΑΔ κοινήν, τὴν ΒΔ=ΔΓ καὶ ΑΒ>ΑΓ ὅτε θὰ πρέπῃ (§ 89) γωνΑΔΒ>γωνΑΔΓ. Ἤδη ἐξετάζομεν τὰ τρίγωνα ΕΔΒ καὶ ΕΔΓ. Ταῦτα ἔχουν ΕΔ κοινήν, ΒΔ=ΔΓ καὶ γωνίαν ΕΔΒ>γωνΕΔΓ ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΕΒ>ΕΓ.

28.— Ἐὰν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, τὰ ὕψη ἐπὶ τῶν ἴσων βάσεων ΒΓ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσα.

Ἔστωσαν τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἔχοντα δηλαδὴ τὰς πλευρὰς των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ ἐπὶ τὰς ἴσας βάσεις ΒΓ καὶ ΕΖ ἀγόμενα ὕψη ΑΗ καὶ ΔΘ εἶναι ἴσα (Σχ. 20).

Δηλαδὴ ἔχομεν :

Ὑπόθεσις	ΑΒ=ΔΕ ΑΓ=ΔΖ ΒΓ=ΕΖ Α=Δ, Β=Ε, Γ=Ζ,	Συμπέρασμα	ΑΗ=ΔΘ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Συγκρίνομεν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΔΕΘ. Ταῦτα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΑΒ = ΔΕ ἐξ ὑποθέσεως, καὶ Β = Ε ἐξ ὑποθέσεως, ἄρα ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην, ὅτε θὰ ἔχουν καὶ ΑΗ = ΔΘ ὡς κειμένας ἔναντι ἴσων πλευρῶν εἰς ἴσα τρίγωνα.

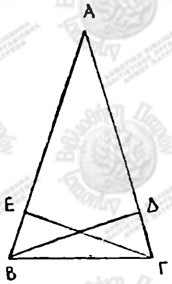
29.— Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευράς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ ἀγόμενα ὕψη ἤτοι ΒΔ, ΓΕ. (Σχ. 21). Θὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα:

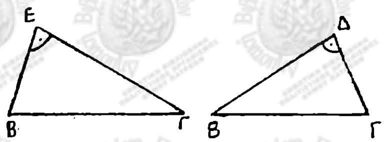
Δηλαδὴ ἔχομεν:

Ὑπόθεσις { ΑΒ=ΑΓ
γων Β = γων Γ
Ε ὀρθή, Δ ὀρθή.

Συμπέρασμα { ὕψος ΓΕ = ὕψος ΒΔ.



Σχ. 21.



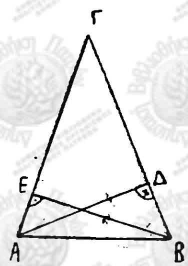
Σχ. 22.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ — Συγκρίνομεν πρὸς τοῦτο τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΒΓΔ τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια ἐξ ὑποθέσεως (τὰ ἔχομεν χωριστὰ εἰς τὸ Σχ. 22) καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ΒΓ κοινὴν καὶ γων. Β = γων. Γ ἐξ ὑποθέσεως. Ἤτοι ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν ἴσην ἄρα εἶναι ἴσα, ὅτε θὰ εἶναι καὶ ΕΓ = ΔΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν ἂν συγκρίνωμεν τὰ τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΑΒΔ.

30.— Ἐὰν αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Β τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς εἶναι ἴσαι, αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Ἔστω τρίγωνον ΓΑΒ καὶ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ΓΑ καὶ ΓΒ ἀντιστοίχως αἱ ΕΒ καὶ ΑΔ. Ἂν αὗται εἶναι ἴσαι ἤτοι ΕΒ = ΑΔ, θὰ δείξωμεν ὅτι καὶ ΓΑ=ΓΒ ἤτοι ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. (Σχ. 23).



Σχ. 23.

Δηλαδὴ ἔχομεν:

Ὑπόθεσις { ΑΔ = ΕΒ
Ε=ὀρθὴ
Β=ὀρθὴ

Συμπέρασμα { ΓΑ=ΓΒ

Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΔΒ. (Δύνασθε νὰ τὰ χωρίσετε ὡς προηγουμένως).Ταῦτα εἶναι ὀρθογώνια διότι Ε=Β==1 ὀρθὴ καὶ ἔχουν ΑΔ=ΕΒ ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ ΑΒ κοινήν, ἄρα εἶναι ἴσα, (ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας καὶ μίαν τῶν καθέτων ἴσην). Ἄρα καὶ γωνΑ=γωνΒ ὅτε καὶ πλευρὰ ΓΑ=ΓΒ ἤτοι ἰσοσκελές.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9*. Ἐὰν α, β, γ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου θὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις :

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma \qquad (\S\ 71)$$

10*. Αἱ διχοτόμοι τῶν ἴσων γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

11*. Δύο κορυφαὶ τριγώνου ἀπέχουν ἰσάκις ἀπὸ τῆς διαμέσου τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς τρίτης κορυφῆς.

12. Ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 4μ ἡ δὲ ἄλλη 9μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς.

13*. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ κατὰ μῆκος ΔΕ ἴσον πρὸς ΑΔ καὶ φέρωμεν τὴν ΕΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΒ=ΓΕ καὶ ὅτι γωνΑΕΓ=γωνΒΑΔ.

14*. Ἑκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι τὴν περιέχουν.

15. Τὰ ὕψη τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι πάντα ἴσα μεταξύ των.

16. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεμένην διάμεσον ἴσην, θὰ εἶναι ἴσα.

Σελὶς 41. Τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων τῆς § 94.

Τὸ β). Διότι ἂν οἱ πόδες τῶν πλαγιῶν ἀπεῖχον ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, τότε (§ 93 γ) κατὰ τὸ εὐθὺ θὰ ἦσαν καὶ αἱ πλάγιαι ἄνισοι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας ἥτις δίδει, ὅτι εἶναι ἴσαι. Ἄρα δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἀπέχουν ἴσον.

Τὸ γ). Διότι ἂν οἱ πόδες τῶν πλαγιῶν ἀπεῖχον ἴσον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, τότε (§ 93 β) κατὰ τὸ εὐθὺ θὰ ἦσαν καὶ αἱ πλάγιαι ἴσαι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἥτις δίδει, ὅτι εἶναι ἄνισοι. Ὥστε οἱ πόδες ἀνίσων πλαγιῶν ἀπέχουν ἄνισον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου. Ἤδη ὁ ποὺς τῆς μεγαλυτέρας ἀπέχει καὶ περισσότερον τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου, διότι ἂν ἀπεῖχε ὀλιγώτερον, τότε κατὰ τὸ εὐθὺ (§ 93γ), ἔπρεπε ἡ πλαγία αὕτη νὰ εἶναι καὶ ἡ μικροτέρα τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας ὅτι εἶναι ἡ μεγαλυτέρα.

Σελὶς 41. Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως τῆς § 97.

Διότι ἂν δεχθῶμεν ὅτι εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα, τότε θὰ ἠδυνάμεθα νὰ σύρωμεν ἐκ τοῦ κέντρου τρεῖς εὐθείας ἴσας (ὡς ἀκτῖνας) πρὸς τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας. Ἄρα θὰ εἴχομεν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας τρεῖς πλαγίας ἴσας πρὸς τὴν εὐθεῖαν ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν πρότασιν τῆς § 96.

Σελὶς 43. Αἱ προτάσεις τῆς § 104,

1ον) Διότι ἂν ἔκειτο ἐπὶ τῆς διχοτόμου κατὰ τὴν πρότασιν § 102 θὰ ἀπεῖχε ἴσον τῶν πλευρῶν, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι ἀπέχει ἄνισον. Ἄρα κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτόμου.

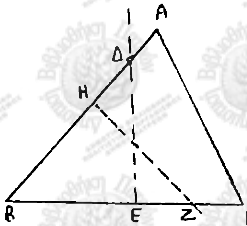
2ον) Διότι ἂν ἀπεῖχε ἴσον τῶν πλευρῶν θὰ ἔκειτο ἐπὶ τῆς διχοτόμου κατὰ τὴν πρότασιν τῆς § 103, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν ὅτι κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτόμου. Ἄρα ἀπέχει ἄνισον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31.— Ἔχομεν τρίγωνον ΑΒΓ. Ποῖον σημεῖον τῆς γραμμῆς ΒΑΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΒΓ; Καὶ ποῖον σημεῖον τῆς γραμμῆς ΑΓΒ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ;

ΛΥΣΙΣ — Γνωρίζομεν ὅτι σημεῖα ἀπέχοντα ἰσάκις ἐκ τῶν ἄκρων εὐθείας ΒΓ εἶναι τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ μόνον αὐτά. Ἂν λοιπὸν εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ (Σχ. 24) ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΕΔ, αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν γραμμὴν ΒΑΓ εἴς τι σημεῖον Δ τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἀφ' ἑνὸς μὲν κεῖται ἐπὶ τῆς γραμμῆς ΒΑΓ, ἀφ' ἑτέρου ὅμως ὡς κείμενον συγχρόνως καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΕΔ εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων τῆς ΒΓ.

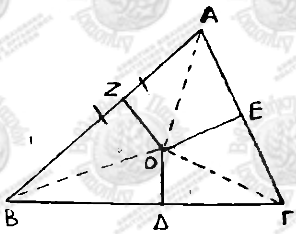
Ὁμοίως φέροντες τὴν κάθετον ΗΖ εἰς τὸ μέσον Η τῆς ΑΒ, εὑρίσκομεν τὸ Ζ ὡς σημεῖον τῆς γραμμῆς ΑΓΒ ἰσαπέχον τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ.



Σχ. 24.

32.— Ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου αἱ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΒΓ διέρχονται διὰ τῶν μέσων των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι α') τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου καὶ β') τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ·

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— α') Ἐπειδὴ ἡ ΟΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ ἔπεται ὅτι ΟΑ=ΟΒ (Σχ. 25). Ἐπίσης ἐπειδὴ ΟΔ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ, ἔπεται ὅτι ΟΒ=ΟΓ ἄρα βάσει καὶ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ΟΑ=ΟΒ ἔπεται ὅτι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Δηλαδὴ τὸ Ο ἰσαπέχει τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου.

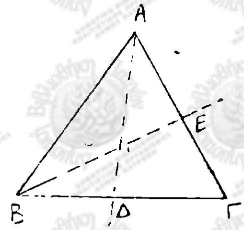


Σχ. 25

β') Ἐπειδὴ τὸ Ο ἐδείχθη ὅτι ἀπέχει ἰσάκις καὶ τῶν ἄκρων Α καὶ Γ τῆς ΑΓ ἔπεται ὅτι τοῦτο ὀφείλει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΒ, (§ 100 1ον).

33.— Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ποῖον σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν; Καὶ ποῖον σημεῖον τῆς ΓΑ ἀπέχει ἐπίσης ἴσον ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν;

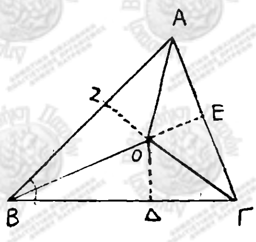
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἵνα σημεῖόν τι ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας. Ἄρα (Σχ. 26) διὰ νὰ εὕρωμεν σημεῖόν τι ἀπέ-



Σχ. 26.

χον ἴσον τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀρκεῖ νὰ σύρωμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α. Αὔτη θὰ τμήσῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι τοῦτο ἀφ' ἑνὸς κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὡς θέλομεν, ἀφ' ἑτέρου κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΔ τῆς γων Α καὶ συνεπῶς ἀπέχει ἴσον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν. Ὁμοίως σύροντες τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β, εὑρίσκομεν τὸ Ε μὲ τὴν αὐτὴν ἰδιότητα.

34.— Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ ὑπάρχει σημεῖον Ο, ἐκ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ διχοτομοῦν τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ α') τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ β') τὸ σημεῖον Ο κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.



Σχ. 27.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. α') Ἐπειδὴ ΟΒ διχοτόμος τῆς γωνίας Β ἔπεται ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ τῆς γωνίας θὰ εἶναι ἴσαι δηλαδὴ ΟΖ=ΟΔ (Σχ. 27). Ἐπίσης ἐπειδὴ ΟΓ διχοτόμος τῆς γων Γ ἔπεται ὁμοίως ὅτι ΟΔ=ΟΕ καὶ συνεπῶς ἐπειδὴ καὶ ΟΖ=ΟΔ θὰ εἶναι ΟΖ=ΟΔ=ΟΕ. Δηλαδὴ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

β') Ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι ΟΖ=ΟΕ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς γωνίας Α ἄρα ἔπεται ὅτι τοῦτο θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α (§ 104 1ον):

Σελἱς 46. § 110. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 1ον.

Διότι ἄν δὲν συνήντα τὴν ἄλλην ἐκ τῶν παραλλήλων, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς αὐτήν. Θὰ εἴχομεν δὲ τότε ἀπὸ τοῦ σημείου συναντήσεως τῆς πρώτης, δύο παραλλήλους πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ Εὐκλείδειον Αἴτημα (§ 109).

Σελἱς 47. § 115. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 114 εὑρίσκομεν ὅτι γωνΕΘΔ=γωνΓΘΗ ὡς κατὰ κορυφήν, ἐπίσης εἶναι γωνΓΘΗ=γωνΘΗΒ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Συγκρίνοντες τὰς δύο ἰσότητας εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι γων ΕΘΔ=γωνΘΗΒ.

Ἐπίσης ἐπειδὴ γωνΔΘΗ+γωνΗΘΓ=2ὀρθ (1) διότι εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας καὶ ἐπειδὴ γωνΓΘΗ=γωνΘΗΒ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ, ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (1) ἀντὶ γων ΗΘΓ τὴν ἴσην της γωνΘΗΒ λαμβάνομεν γωνΔΘΗ+γωνΘΗΒ = 2 ὀρθαί.

Σελ. 48. § 117. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 1ον.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 116 παρατηροῦμεν ὅτι γωνΖΘΔ=γωνΘΗΒ ἐξ ὑποθέσεως. Ἀλλὰ γωνΖΘΔ=γωνΓΘΗ ὡς κατὰ κορυφήν, ὅτε διὰ συγκρίσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων εὑρίσκομεν ὅτι γωνΓΘΗ=γωνΘΗΒ καὶ συνεπῶς ἀναγόμεθα εἰς τὸ θεώρημα § 116, ὅτε αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἐπίσης δίδεται ἐξ ὑποθέσεως γωνΔΘΗ+ +γωνΘΗΒ=2 ὀρθ. (1). Ἀλλ' ἐπίσης εἶναι γωνΔΘΗ+γωνΓΘΗ=2 ὀρθ. (2) ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Συγκρίνοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν τὰ δεύτερα μέλη ἴσα, ὅτε θὰ ἔχουν καὶ τὰ πρῶτα, ἀφαιροῦντες δὲ ἀπὸ τῶν ἴσων ἤδη μελῶν τὴν αὐτὴν γωνίαν ΔΘΗ εὑρίσκομεν ὅτι γωνΓΘΗ=γωνΘΗΒ ὅτε ἀναγόμεθα καὶ πάλιν εἰς τὸ θεώρημα § 116 καὶ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35.—Ἐκ τῶν ὀκτὼ γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν καὶ τῆς τεμνούσης αὐτάς, ἡ μία εἶναι 1) 52^0, 2) $1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς 3) α^0. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἄλλων γωνιῶν.

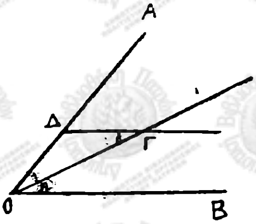
ΛΥΣΙΣ—Ἀφοῦ ἡ μία γωνία εἶναι 52^0, τότε καὶ ἡ κατὰ κορυφήν της θὰ εἶναι 52^0. Ἐπίσης 52^0 θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς ἐναλλὰξ μιᾶς τούτων ὡς καὶ ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἄρα αἱ τέσσαρες γωνίαι θὰ εἶναι 52^0. Αἱ λοιπαὶ τέσσαρες γωνίαι θὰ εἶναι ἑκάστη $180^0-52^0=128^0$ ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἀνωτέρω.

2) Εὑρίσκομεν ὡς προηγουμένως ὅτι τέσσαρες εἶναι ἴσαι πρὸς $1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, αἱ δὲ λοιπαὶ πρὸς $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

3) Ὁμοίως τέσσαρες θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς α^0, αἱ δὲ λοιπαὶ ἴσαι πρὸς $180^0-\alpha^0$.

36.— Ἐὰν ἀπὸ σημείου διχοτόμου γωνίας φέρωμεν παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν αὐτῆς, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω γωνία ΑΟΒ καὶ ΟΓ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. Ἀπὸ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν ΓΔ παράλληλον τῆς ΟΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (Σχ. 28). (Τὸ ὅτι ἡ ΓΔ τέμνει τὴν ΟΑ, εἶναι φανερὸν ἀφοῦ καὶ ἡ πρὸς αὐτὴν παράλληλος ΟΒ τέμνει ἐξ ὑποθέσεως τὴν ΟΑ).

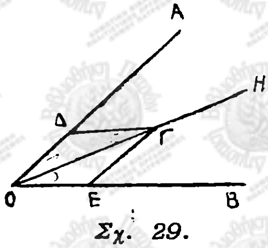


Σχ. 28.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι γων ΔΓΟ = γων ΔΟΓ. Πράγματι γων ΔΓΟ = = γωνΓΟΒ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΔΓ καὶ ΟΒ μὲ τέμνουσαν τὴν ΟΓ. Ἐπίσης γωνΓΟΒ=γωνΔΟΓ λόγῳ τῆς διχοτόμου. Συγκρίνοντες ἤδη τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας συνάγομεν ὅτι γωνΔΟΓ=γωνΔΓΟ δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΟΔΓ εἶναι ἰσοσκελές.

37.—Ἐὰν ἀπὸ σημείου διχοτόμου γωνίας φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς δύο πλευρὰς αὐτῆς, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Ἔστω γωνία ΑΟΒ καὶ ΟΗ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ τῆς διχοτόμου φέρομεν τὰς ΓΔ καὶ ΓΕ ἀντιστοίχως παραλλήλως πρὸς τὰς ΟΒ καὶ ΟΑ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΕΓ εἶναι ἴσα (Σχ. 29)

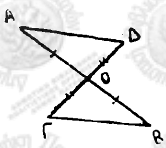


Σχ. 29.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Τὰ τρίγωνα ΟΔΓ καὶ ΟΓΕ ἰσοσκελῆ, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν ΟΓ κοινὴν καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, γωνΔΓΟ = γωνΓΟΕ καὶ γωνΔΟΓ=γωνΟΓΕ διότι ἀμφότερα τὰ ζεύγη εἶναι ζεύγη ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν.

38.— Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐὰν δὲ εἶναι ΟΑ=ΟΒ καὶ ΟΓ=ΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ εἶναι παράλληλοι.

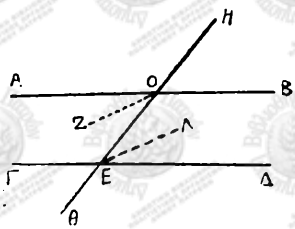
Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο ὥστε ΟΑ=ΟΒ καὶ ΟΓ=ΟΔ (Σχ. 30). Σύρομεν τὰς ΑΔ καὶ ΓΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 30.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Συγκρίνοντες τὰ τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΒΟΓ παρατηροῦμεν εὐκόλως ὅτι ἔχουν δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην ἴσην (ὡς κατὰ κορυφὴν) ὅτε θὰ εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς καὶ γωνΔΑΟ=γωνΟΒΓ ὡς κείμεναι ἔναντι ἴσων γωνιῶν εἰς ἴσα τρίγωνα. Ἀλλὰ τότε αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ πρέπει νὰ εἶναι παράλληλοι διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης τῆς ΑΒ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ΔΑΟ καὶ ΟΒΓ ἴσας.

39.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, τεμνομένων ὑπὸ τρίτης, εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 31.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι καὶ ἡ τέμνουσα αὐτὰς ΗΘ εἰς τὰ Ο καὶ Ε. Ἔστωσαν ἐπίσης καὶ αἱ διχοτόμοι ΟΖ καὶ ΕΛ τῶν ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνιῶν ΑΟΕ καὶ ΟΕΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΟΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΕΛ (Σχ. 31).

Δηλαδὴ ἔχομεν :

Ὑπόθεσις: ΑΒ ∥ ΓΔ (1)
ΟΖ διχοτόμος τῆς γωνΑΟΕ
ΕΛ διχοτόμος τῆς γωνΟΕΔ

Συμπέρασμα: ΟΖ ∥ ΕΛ

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι θὰ εἶναι γωνΑΟΕ=γωνΟΕΔ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ΟΖ καὶ ΕΛ εἶναι διχοτόμοι αὐτῶν ἀντιστοίχως, καὶ αἱ ἡμίσεις γωνίαι ΖΟΕ καὶ ΟΕΛ θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ τότε ἕπεται ὅτι ΟΖ ∥ ΕΛ διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΟΕ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας (δηλ. γωνΖΟΕ=γωνΟΕΛ).

(1) Μὲ τὸ σύμβολον ∥ δηλοῦμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Σελίς 50. § 120. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 1ον.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 119, παρατηροῦμεν ὅτι γωνΑΓΕ=γωνΒΑΓ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ κα ΓΕ μὲ τέμνουσαν τὴν ΑΓ. Ὁμοίως γωνΕΓΔ=γων ΑΒΓ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΕ μὲ τέμνουσαν τὴν ΒΓΔ. Ἀθροίζοντες τὰς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν γωνΑΓΔ=γωνΒΑΓ+γων ΑΒΓ.

Σελὶς 50. § 121. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 2ον.

Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθάς. Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία γωνία εἶναι ὀρθή, συνεπῶς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ ἰσοῦται πάλιν μὲ 1 ὀρθήν.

Σελὶς 50. § 122. **ΠΟΡΙΣΜΑ** 3ον.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ αβγ (Σχηματίσατε μόνοι Σας τὰ σχήματα) ἔχοντα δύο γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας ἤτοι Α=α καὶ Β=β. Θὰ δείξωμεν ὅτι θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην ἤτοι Γ=γ. Πράγματι, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα Α+Β+Γ τῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθ. ὡς ἐπίσης καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ δευτέρου α+β+γ= = 2 ὀρθ. ἕπεται ὅτι τὰ δύο ἀθροίσματα θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα ἤτοι Α+Β+Γ= = α+β+γ. Ἀφαιροῦντες ἤδη ἀπὸ τῶν ἴσων μελῶν τῆς ἄνω ἰσότητος τὰς ἴσας ἑκατέρωθεν γωνίας Α=α καὶ Β=β λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα Γ=γ. Ἤτοι θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην ἴσην.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

40. — Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ ὅταν εἶναι 1) $B=32^{\circ}\ 45'$. $\Gamma=82^{\circ}\ 40'$, 2) $B=101^{\circ}\ 29'$, $\Gamma=45^{\circ}\ 57'$, 3) $B=60^{\circ}\ 30'\ 40''$, $\Gamma=78^{\circ}\ 42'\ 55''$ (1).

ΛΥΣΙΣ. — 1) Ἐπειδὴ πρέπει $A+B+\Gamma=2$ ὀρθ. ἢ 180°. ἐδόθησαν δὲ αἱ δύο γωνίαι Β καὶ Γ, ἵνα εὕρωμεν τὴν Α ἀρκεῖ ἀπὸ τῶν 180° νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ἔχομεν λοιπὸν $B+\Gamma= =32^{\circ}\ 45'+82^{\circ}\ 40'=115^{\circ}\ 25'$ καὶ $A=180^{\circ}-115^{\circ}\ 25'=64^{\circ}\ 35'$.

2) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $A=180^{\circ}-(101^{\circ}\ 29'+45^{\circ}\ 57')=32^{\circ}\ 34'$.

3) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $A=180^{\circ}-(60^{\circ}\ 30'\ 40''+78^{\circ}\ 42'\ 55'')= =40^{\circ}\ 46'\ 25''$.

41 — Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ὅταν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι 1) 45°, 2) $67^{\circ}\ 45'$, 3) $\frac{4}{9}$ ὀρθῆς.

ΛΥΣΙΣ. — 1) Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον αἱ δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι ἂν ὀνομάσωμεν αὐτὰς Β καὶ Γ καὶ μὲ Α ὀνομάσωμεν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς, θὰ πρέπῃ $A+B+\Gamma=180^{\circ}$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $B=\Gamma$, ἡ προηγουμένη ἰσότης θὰ γίνῃ $A+B+B=180^{\circ}$ ἢ $A+2B=180^{\circ}$ ἀλλὰ $A=45^{\circ}$ ὅτε $45^{\circ}+2B=180^{\circ}$ ἢ $2B=180^{\circ}-45^{\circ}$ ἢ $2B=135^{\circ}$ ὥστε ἑκάστη θὰ εἶναι $B=135^{\circ}:2=67^{\circ}\ 30'$, ἤτοι $B=\Gamma=67^{\circ}\ 30'$.

2) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $2B=180^{\circ}-67^{\circ}\ 45'=112^{\circ}\ 15'$ ἤτοι:
$B=112^{\circ}\ 15':2=56^{\circ}\ 7'\ 30''$.

3) Ὁμοίως $2B=2\text{ὀρ}-\frac{4}{9}=\frac{14}{9}$ ἢ $B=\frac{7}{9}$ ὀρθῆς.

---

1. Παρακαλεῖται ὁ μαθητὴς πρὶν ἢ προβῇ εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀσκήσεων αὐτῶν, νὰ ἐπαναλάβῃ τὰς ἐπὶ τῶν συμμιγῶν πράξεις ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς.

42.— Πρὸς πόσας μοίρας ἢ πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἰσοπλεύρου τριγώνου ;

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον αἱ τρεῖς γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἕπεται ὅτι τὸ μέγεθος ἑκάστης θὰ ἰσοῦται εἰς μοίρας μὲν $180^0 : 3 = 60^0$, εἰς ὀρθὰς δὲ 2 ὀρθαί : $3 = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς

43.— Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ἐξωτερικὴ γωνία Α ἰσοῦται πρὸς 1) 100^0. 2) $110^0\ 40'$. 3) $86^0\ 50'\ 20''$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Β ἂν εἶναι $\Gamma = 40^0$.

ΛΥΣΙΣ.—1) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα ἐξωτ. γωνΑ=ἐσωτ.γωνΒ+ἐσωτ. γωνΓ ἀλλὰ ἐδόθη ἐξωτ. γων Α $= 100^0$ καὶ γων Γ $= 40^0$ ὅτε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται 100^0=ἐσωτ.γωνΒ$+40^0$ ἢ ἐσωτ.γωνΒ$=100^0-40^0=60^0$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ἡ ἐσωτ. γωνΑ καὶ ἡ ἐξωτ. γων Α ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι ἐφεξῆς θὰ ἔχωμεν ἐσωτ. γωνΑ+ἐξωτ. γωνΑ$=180^0$, ἀλλὰ ἐξωτ. γωνΑ$=100^0$ ὅτε ἡ ἰσότης γίνεται ἐσωτ. γων Α$+100^0=180^0$ ἢ ἐσωτ. γωνΑ$=180^0-100^0=80^0$.

2) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐσωτ. γωνΒ$=110^0\ 40'-40^0 = 70^0\ 40'$, καὶ ἐσωτ. γων Α$=180^0-110^0\ 40'=69^0\ 20'$.

3) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐσωτ. γωνΒ$=86^0\ 50'\ 20''-40^0=46^0\ 50'\ 20''$ καὶ ἐσωτ. γων Α$=180^0-86^0\ 50'\ 20''=93^0\ 9'\ 40''$.

44 — Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν τρίτην, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ἔστω ὅτι ἡ γωνία Α ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἤτοι ὅτι γωνΑ=γωνΒ+γωνΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὴν γωνίαν Α (Προφανῶς εἰς τὴν Α διότι αὕτη ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, εἶναι καὶ μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἄλλων καὶ συνεπῶς μόνον αὐτὴ δύναται νὰ εἶναι ὀρθή).

Δηλαδὴ ἔχομεν :

Ὑπόθεσις $\{$ Α=Β+Γ

Συμπέρασμα $\{$ Α=ὀρθή.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι Α+Β+Γ=2ορθ. λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας ὅτι Α=Β+Γ θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἀντικαθιστῶντες τὸ Β+Γ διὰ τοῦ Α, Α+Α=2 ὀρθ. ἢ 2Α= =2 ὀρθ. ἤτοι Α=1 ὀρθή.

45.— Ἐὰν ἡ μία γωνία ἐκ τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, τὸ τρίγωνον ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι Α>Β+Γ. Ἐπειδὴ Α+Β+Γ=2 ὀρθ. διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἰς τὴν προηγουμένην ἀνισότητα, προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη της τὸ Α ὅτε 2Α>Α+Β+Γ ἢ 2Α>2 ὀρθ. ἢ Α>1 ὀρθ. ἤτοι ἡ Α ἀμβλεῖα.

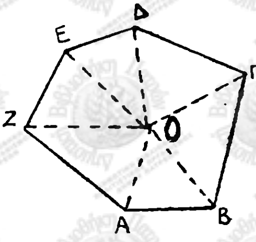
46. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία 2α τοῦ τριγώνου ΦΑΒ θὰ πρέπῃ νὰ ἰσοῦται μὲ Φ+α ἤτοι Φ+α=2α ἢ Φ=α. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΦΒ εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα ἡ ἀπόστασις ΦΒ προσδιορίζεται ὡς ἴση πρὸς τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, ἡ ὁποία μετρᾶται εὐκόλως διότι τοῦ πλοίου θεωρεῖται γνωστὴ ἡ ταχύτης, ὡς ἐπίσης, καὶ ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος ἐμεσολάβησεν ἀφ' ἧς στιγμῆς ὁ φάρος Φ ἐφαίνετο ὑπὸ γωνίαν α μέχρι τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἐφαίνετο ὑπὸ γωνίαν 2α μὲ τὴν διεύθυνσιν τοῦ πλοίου θεωρουμένην σταθεράν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47.—Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ 1η.—Εἴδομεν εἰς τὸ θεώρημα § 123 ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαί, ὅσον εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 2 ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 2. Δηλαδὴ ἂν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν εἶναι μ θὰ ἔχωμεν 2 (μ—2)=2μ—— 4 ὀρθαί.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ 2α.— Ἔστω τυχὸν πολύγωνον π. χ. ἓν ἑξάγωνον (Σχ. 32). Λαμβάνομεν ἓν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ Ο καὶ συνδέομεν τοῦτο μὲ ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου. Παρατηροῦμεν ὅτι σχηματίζονται τότε ἓξ τρίγωνα δηλαδὴ ὅσον τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν. Ἀλλ' ἑκάστου τριγώνου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθάς. Φανερὸν δὲ ὅτι τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἀπὸ τοῦ ὁποίου δέον νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ σύνολον τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν. Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν ἔχει ὡς ἄθροισμα 4 ὀρθὰς τὸ δὲ σύνολον τῶν γωνιῶν ὅλων τῶν τριγώνων ἔχει ὡς ἄθροισμα 2.6 ὀρθάς. Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι 2.6—4 ὀρθὰς=8 ὀρθάς. (Θέσατε εἰς τὸ Σχῆμα τὸ Ο).



Σχ. 32.

ΓΕΝΙΚΕΥΣΙΣ.— Ἂν τὸ πολύγωνον εἶχε **μ** πλευράς, θὰ εἴχομεν **μ** τρίγωνα, ὧν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν των θὰ ἦτο **2μ** ὀρθαί. Ἀλλὰ αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι θὰ εἶχον ἄθροισμα καὶ πάλιν 4 ὀρθάς. Ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma=2\mu-4$ ἔνθα Σ τὸ ζητούμενον ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἰς ὀρθάς.

Ἐὰν θέλωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο νὰ τὸ λάβωμεν εἰς μοίρας θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον $\Sigma=(2\mu-4).90^0$.

48.—Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄγνωστοι γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ὅταν γνωρίζωμεν ὅτι εἶναι 1) $A=65^0$, $B=75^0$, $\Gamma=90^0$, 2) $A=B=120^0$ καὶ $\Gamma=\Delta$. 3) $A=68^0$, $A=\Gamma$, $B=\Delta$. 4) $A+B=180^0$, $A=\Gamma$, $B=45^0$.

ΛΥΣΙΣ.— Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου συμφώνως πρὸς τὸν εὑρεθέντα τύπον θὰ εἶναι $2.4-4=8-4=4$ ὀρθαὶ ἢ $4.90^0=360^0$.

Ἔχομεν ὅμως :

1) $A=65^0$, $B=75^0$, $\Gamma=90^0$ ὅτε ἄν Δ ἡ τετάρτη γωνία θὰ πρέπῃ $A+B+\Gamma+\Delta=360^0$ ἢ $65^0+75^0+90^0+\Delta=360^0$ ἤτοι $\Delta=130^0$.

2) Ὁμοίως $120^0+120^0+\Gamma+\Delta=360^0$ ἀλλὰ $\Gamma=\Delta$ ὅτε $120^0+120^0+\Gamma+\Gamma=$ $=360^0$ ἢ $2\Gamma=360^0-240^0$ ἢ $2\Gamma=120^0$ ἄρα $\Gamma=60^0$ ὅτε καὶ $\Delta=60^0$.

3) Ἀφοῦ $A=\Gamma$ καὶ $A=68^0$ θὰ εἶναι καὶ $\Gamma=68^0$ ὅτε θὰ ἔχωμεν 68^0+ $+68^0+B+\Delta=360^0$ ἀλλὰ $B=\Delta$ ὅτε $68^0+68^0+2\Delta=360^0$ ἢ $2\Delta=360^0-136^0=$ ἢ $\Delta=112^0$ ἄρα καὶ $B=112^0$.

4) Ἀφοῦ $A+B=180^0$ καὶ $B=45^0$ ἄρα $A=180^0-45^0=135^0$. Ἐπειδὴ δὲ $A=\Gamma$ θὰ εἶναι καὶ $\Gamma=135^0$. ἄρα $135^0+135^0+45^0+\Delta=360^0$ ἢ $\Delta=45^0$.

49.— Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, δεκαγώνου, δεκαπενταγώνου ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν εὑρεθέντα εἰς τὴν ἄσκησιν 47 τύπον $\Sigma=2\mu-4$ εὑρίσκομεν

Διὰ τὸ πεντάγωνον	$2.5-4=6$ ὀρθαί
Διὰ τὸ ἑξάγωνον	$2.6-4=8$ ὀρθαί
Διὰ τὸ δεκάγωνον	$2.10-4=16$ ὀρθαί
Διὰ τὸ δεκαπεντάγωνον	$2.15-4=26$ ὀρθαί.

50.— **Ἐὰν κυρτὸν πολύγωνον μὲ μ πλευρὰς ἔχῃ ὅλας τὰς γωνίας ἴσας, πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἢ πρὸς πόσας μοίρας ἰσοῦται ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου τούτου ;** (Ἐφαρμογὴ ὅταν $\mu=5, 8, 20$).

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου ἔχοντος μ πλευρὰς δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\Sigma=2\mu-4$ ὀρθαὶ ἢ $(2\mu-4)\,90^0$ μοῖραι. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως πᾶσαι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι, συνεπῶς τὸ μέγεθος ἑκάστης θὰ εἶναι $\frac{2\mu-4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς ἢ $\frac{(2\mu-4)\,90^0}{\mu}$ μοῖραι.

Τοὺς ἄνω τύπους θὰ τοὺς μεταχειριζώμεθα ἐνίοτε καὶ ὑπὸ τὴν μορφὴν $2-\frac{4}{\mu}$ καὶ $\left(2-\frac{4}{\mu}\right)90^0$

οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἂν χωρίσωμεν ἕκαστον τῶν ἄνω κλασμάτων εἰς ἄλλα μὲ τὸν αὐτὸν παρονομαστήν. Ἐφαρμογή : Διὰ $\mu=5$ λαμβάνομεν

$2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$ ὀρθῆς ἢ $\frac{6}{5}\times 90^0=108^0$ δηλαδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ἑνὸς ἰσογωνίου πενταγώνου εἶναι $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς ἢ 108^0.

Ὁμοίως διὰ $\mu=8$ εὑρίσκομεν $2-\frac{4}{8}=1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς$=135^0$ καὶ διὰ $\mu=20$ εὑρίσκομεν $2-\frac{4}{20}=1\frac{4}{5}$ὀρθῆς$=162^0$.

51.— Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν κυρτοῦ πολυγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 1) 10 ὀρθαί, 2) 16 ὀρθαί, 3) 540^0, 4) 720^0.

ΛΥΣΙΣ.— 1) Ἂν καλέσωμεν μ τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του θὰ εἶναι $2\mu-4$. Ἀλλ' ἐδῶ ἐδόθη ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 10 ὀρθαί, ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $2\mu-4=10$ ἢ $2\mu=10+4$ ἢ $2\mu=14$ ὅτε $\mu=7$ ἤτοι τοῦτο εἶναι τὸ ἑπτάγωνον.

2) Ὁμοίως ἔχομεν $2\mu-4=16$ ἢ $2\mu=20$ ἢ $\mu=10$

3) Ὁμοίως ἔχομεν διὰ ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου μὲ μοίρας $(2\mu-4)90^0=540^0$ ἢ $2\mu-4=6$ ἢ $2\mu=10$ καὶ $\mu=5$.

4) Ὁμοίως $(2\mu-4)\,90^0=720^0$ ἢ $2\mu-4=8$ ἢ $2\mu=12$ ἢ $\mu=6$.

52—Ὑπάρχει κυρτὸν πολύγωνον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 9, 11, $2\nu+1$ ὀρθαί; (δηλαδὴ περιττὸς ἀριθμὸς ὀρθῶν);

ΛΥΣΙΣ.—Θὰ πρέπῃ συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $2\mu-4=9$ ἢ $2\mu=13$ ἢ $\mu=6{,}5$ δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν κλασματικός, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄτοπον καθ' ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν πολυγώνου εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

2) Ὁμοίως $2\mu-4=11$ ἢ $2\mu=15$ ἢ $\mu=7{,}5$ ὅπερ ὡς ἄνω ἄτοπον.

3) **Γενικῶς:** Εἶναι ἀδύνατον νὰ εἶναι $2\,(\mu-4)=2\nu+1$ καὶ ἐπειδὴ μ καὶ ν δέον νὰ εἶναι ἀκέραιοι ὁ 2 διαιρῶν τὸ α΄ μέλος ὡς πολλαπλάσιόν του θὰ διήρει καὶ τὸ β΄ ὅπερ ἄτοπον διότι $2\nu+1$ περιττός.

Συμπέρασμα: Δὲν ὑπάρχει πολύγωνον τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του νὰ ἐκφράζεται εἰς ὀρθὰς γωνίας μὲ περιττὸν ἀριθμόν.

53.— Ἐὰν αἱ πλευραὶ κυρτοῦ πολυγώνου προεκταθοῦν ὅλαι κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι τέσσαρες ὀρθαί (ἡ φορὰ ἐνταῦθα νοεῖται κυκλική).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ 1η—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου, λαμβάνομεν ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου καὶ φέρομεν δι' αὐτοῦ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου. Ἐξετάζοντες τὰς γωνίας 1, 2, 3, 4, 5 τὰς περὶ τὸ σημεῖον, εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς 1, 2, 3, 4, 5 ἐξωτερικὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου. Ἀλλὰ αἱ περὶ τὸ σημεῖον σχηματιζόμεναι γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθῶν. Ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ἰσοῦται πρὸς 4 ὀρθάς.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ 2α.— Ὡς καλυτέραν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης θεωροῦμεν τὴν κατωτέρω καὶ μὲ τὸ πλεονέκτημα τῆς γενικεύσεως.

Ἂν τὸ πολύγωνον ὑποτεθῇ ἔχον μ πλευρὰς τότε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του θὰ εἶναι 2μ—4 ὀρθαί. Ἀλλὰ περὶ ἑκάστην κορυφὴν ὑπάρχει μιὰ ἐσωτερικὴ γωνία καὶ μιὰ ἐξωτερική, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται πρὸς 2 ὀρθὰς (ἐφεξῆς μὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας) ὅτε τὸ σύνολον τῶν ὅλων ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ 2μ ὀρθάς. Ἤτοι ἐσωτ. γωνίαι+ἐξωτ. γωνίαι = 2 μ ὀρθαί, ἀλλὰ ἐσωτ. γωνίαι=2μ—4 ὀρθαί, ὅτε θὰ ἔχωμεν 2μ—4+ἐξωτ. γωνίαι=2μ καὶ συνεπῶς ἐξωτ. γωνίαι=2μ—2μ+4=4 ὀρθαί.

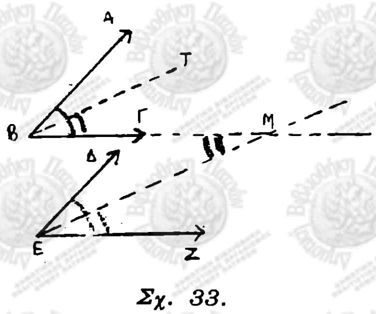
54.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 2 τοῦ βιβλίου παρατηροῦμεν ὅτι αἱ γωνίαι α+α'= =2 ὀρθαὶ διότι εἶναι δύο γωνίαι τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του εἶναι ἐπίσης 2 ὀρθαὶ λόγῳ τῶν καθέτων. Ἐπίσης ἐκ τῶν ὑπολοίπων δύο τετραπλεύρων λαμβάνομεν ὁμοίως β+β'=2 ὀρθ. καὶ γ+γ'=2 ὀρθ. ἄρα α+β+γ+α'+β'+γ'= =6 ὀρθαί. Ἀλλὰ α'+β'+γ'=4 ὀρθαὶ (§ 67), ὅτε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α, β, γ θὰ εἶναι 2 ὀρθαί.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ σχήματος 3 τοῦ βιβλίου λαμβάνομεν ὅτι α+Α=1 ὀρθ. καὶ β+Β =1 ὀρθ. ὅτε α+β+Α+Β=4 ὀρθαί, ἀλλὰ αἱ γωνίαι α καὶ β ἔχουν ἄθροισμα τὴν γωνίαν τὴν ἀπέναντι τῆς ΑΒ λόγῳ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (ἐστιγμένων εἰς τὸ σχῆμα), ἄρα αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55.—Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι: Ἵνα αἱ γωνίαι αὗται εἶναι καὶ ἴσαι θὰ πρέπῃ αἱ πλευραί των νὰ εἶναι ἢ ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι. Ἡμεῖς θὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν τῶν ὁμορρόπων (Σχ. 33), διότι ἡ περίπτωσις τῶν ἀντιρρόπων ἀνάγεται εὐκόλως εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὁμορρόπων διὰ τῆς προεκτάσεως τῶν πλευρῶν μιᾶς τῶν γωνιῶν.



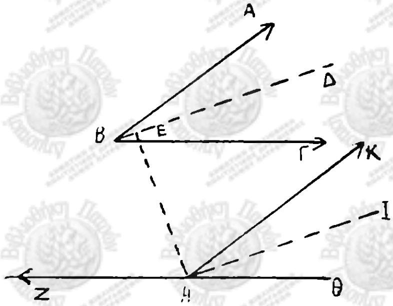
Σχ. 33.

Ἔστωσαν ἀκόμη ΒΤ καὶ ΕΜ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— (Γράψατε τὴν ὑπόθεσιν καὶ τὸ συμπέρασμα). Προεκτείνομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΔΕΖ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς ΒΓ τῆς ἄλλης γωνίας ΑΒΓ. Θὰ τμήσῃ ταύτην, διότι ἡ ΕΜ τέμνει καὶ τὴν παράλληλόν της ΕΖ, ἀφοῦ ἄγεται διὰ σημείου Ε αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα ἤτοι γωνΤΒΜ=γωνΜΕΖ. Ἀλλὰ γωνΜΕΖ=γωνΒΜΕ ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ. Συγκρίνοντες ἤδη τὰς ἄνω ἰσότητας λαμβάνομεν γωνΤΒΜ=γωνΒΜΕ ἄρα αἱ ΒΤ καὶ ΜΕ παράλληλοι διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΒΜ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας.

56.— *Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΖΗΚ μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ παραπληρωματικαί. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐτῶν ΒΔ καὶ ΕΗ εἶναι κάθετοι (Σχ. 34).

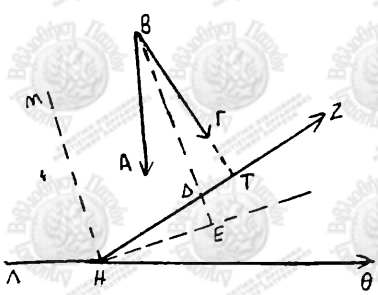


Σχ. 34.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — Προεκτείνομεν τὴν ΖΗ ἀντιρρόπως, ὅτε σχηματίζεται μετὰ τῆς ΗΚ ἡ γωνΚΗΘ ἥτις ἔχει τὰς πλευρὰς της παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς τῆς γωνΑΒΓ. Ἀλλὰ τότε ἐδείχθη προηγουμένως ὅτι ἡ διχοτόμος αὐτῆς ΗΙ καὶ ἡ διχοτόμος ΒΔ τῆς ΑΒΓ εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ ὅμως ΕΗ καὶ ΗΙ εἶναι διχοτόμοι ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν (βλέπε ἀξιοσημείωτον ἄσκησιν 9) εἶναι κάθετοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΕΗ οὖσα κάθετος τῇ ΗΙ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΒΔ.

57.— *Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῆς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι κάθετοι.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι (Σχ. 35) ἤτοι ΒΑ ⊥ ΗΘ καὶ ΒΓ ⊥ ΗΖ [1]. Θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ διχοτόμοι αὐτῶν ΒΔ καὶ ΗΕ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας.



Σχ. 35.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Προεκτείνομεν τὴν ΒΓ μέχρις ὅτου τμήσῃ (προφανῶς καθέτως) τὴν ΗΖ, εἰς τὸ Τ, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ΒΔ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν ΗΕ ἔστω εἰς τὸ Ε. Ἐξετάζοντες τὰ τρίγωνα ΒΔΤ καὶ ΗΔΕ, παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν τὴν γωνΗΔΕ=γωνΒΔΤ (ὡς κατὰ κορυφὴν) καὶ τὴν γων ΕΒΓ=γων ΔΗΕ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ καὶ ΖΗΘ. Δηλαδὴ ἔχουν δύο γωνίας ἀνὰ μίαν ἴσας ὅτε θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτην (§ 122) ἤτοι γων ΔΕΗ=γωνΒΤΔ

---

1. Μὲ τὸ σύμβολον ⊥ παριστῶμεν ἐνίοτε τὴν καθετότητα δύο εὐθειῶν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ἀλλὰ γωνΒΤΔ=1 ὀρθὴ ὅτε καὶ γων ΔΕΗ=1 ὀρθή. Συνεπῶς αἱ διχοτόμοι τέμνονται καθέτως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.— Εἰς τὰ ἀνωτέρω θεωρήσαμεν τὴν περίπτωσιν ὀξειῶν γωνιῶν μὲ πλευρὰς καθέτους. Ἀλλὰ εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα φθάνομεν εὐκόλως ἂν θεωρήσωμεν τὴν περίπτωσιν ἀμβλειῶν γωνιῶν μὲ πλευρὰς καθέτους. Τότε ἀρκεῖ εἰς τὸ σχῆμα μας νὰ προεκτείνωμεν τὰς ΗΘ καὶ ΒΓ ἀντιρρόπως τῆς διευθύνσεώς των καὶ νὰ διχοτομήσωμεν τὰς σχηματιζομένας ἀμβλείας γωνίας αἱ ὁποῖαι εἶναι παραπληρωματικαὶ τῶν δοθεισῶν. Τοιαύτη διχοτόμος εἶναι π. χ. ἡ ΗΜ.

58.— **Ἂν δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς ἄλλης, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Θεωροῦμεν τὰς γωνίας ΑΒΓ καὶ ΛΗΖ τοῦ προηγουμένου σχήμ. 35. Αἱ διχοτόμοι αὐτῶν εἶναι οἱ ΗΜ καὶ ΒΔ αἱ ὁποῖαι θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι παράλληλοι. Ἐδείχθη προηγουμένως ὅτι ΒΔ $\perp$ ΗΕ, ἀλλὰ εἶναι ἐπίσης ΗΜ $\perp$ ΗΕ ὡς διχοτόμοι ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν. Ὅτε αἱ ΒΔ καὶ ΗΜ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΗΕ εἶναι παράλληλοι.

59.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 5 τοῦ βιβλίου νοοῦμεν ὅτι ὁ δείκτης Δ ὁ κινούμενος πρὸ τοῦ βαθμολογημένου τόξου θὰ σχηματίζῃ πάντοτε μὲ τὴν κατακόρυφον ἥτις φαίνεται ἐν τῷ σχήματι εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τόξου, γωνίαν ἴσην μὲ ἐκείνην ἥν θὰ σχηματίζῃ ἡ ὁριζοντία διεύθυνσις τῆς φάλαγγος τοῦ ζυγοῦ (ἐστιγμένη) μετὰ τῶν ἑκάστοτε διευθύνσεων τῆς φάλαγγος ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν τῶν βαρῶν, διότι θὰ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους.

Ἂν λοιπὸν ἡ βαθμολογία ἔγινε προηγουμένως μὲ βάρη 1, 2, 3... τεθέντα ἐπὶ τοῦ δίσκου τοῦ ζυγοῦ, ὁ δείκτης Δ ἔλαβε διαφόρους θέσεις πρὸ τοῦ τόξου ἔνθα ἐσημειώθησαν οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3... (τῶν ἀντιστοίχων βαρῶν). Ἂν λοιπὸν τώρα τεθῇ ἐπὶ τοῦ δίσκου τοῦ ζυγοῦ ἓν βάρος π. χ. 2 ἐπειδὴ ἡ ἐνέργειά του ἐπὶ τῆς φάλλαγος τοῦ ζυγοῦ θὰ πραγματοποιήσῃ τὴν αὐτὴν γωνίαν, ἣν ἐσχημάτισε καὶ κατὰ τὴν βαθμολογίαν, ὁ δείκτης Δ θὰ σχηματίσῃ καὶ αὐτὸς τὴν αὐτὴν γωνίαν ὡς κατὰ τὴν βαθμολογίαν, (ἐπειδὴ ἐδείχθη ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν των εἰς τὴν ἀρχήν), ἤτοι θὰ σταματήσῃ πρὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2 τοῦ τόξου. Ἡ τοιαύτη βαθμολογία τῶν ὀργάνων καλεῖται ἐμπειρική

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

17.— Εἰς ποῖον πολύγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ ;

18.*— Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν τριγώνου μετὰ τῆς πλευρᾶς τὴν ὁποίαν συναντᾷ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

19.*— Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διχοτόμων δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου,

20.*— Ἡ ὀξεῖα γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν διχοτόμων δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου, ἰσοῦται μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

21*.— Ἐὰν διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν τριγώνου ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν πλευράν, τῆς ὁποίας αἱ διχοτομούμεναι γωνίαι εἶναι προσκείμεναι, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου περιεχόμενον τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων τῶν πλευρῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν παραλλήλων.

22*.— Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ διχοτόμος κεῖται μεταξὺ τοῦ ὕψους καὶ τῆς διαμέσου τὰ ὁποῖα ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς μετὰ τῆς διχοτόμου κορυφῆς.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ἐν γένει ΑΒ>ΑΓ (Σχηματίσατε μόνοι Σας τὸ σχῆμα). Σύρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΕ. Ἀπὸ τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΔ λαμβάνομεν ὅτι γωνΔΑΒ>γωνΔΑΓ.Πράγματι ταῦτα ἔχουν τὰς περὶ τὸ Δ ἴσας ὡς ὀρθὰς καὶ τὴν γων Γ>γωνΒ ὡς κειμένην ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑκάστου τριγώνου εἶναι 2 ὀρθαί, ἕπεται ὅτι καὶ αἱ τρίται γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἄνισοι καὶ συνεπῶς γων ΔΑΒ>γωνΔΑΓ. Ἀλλὰ ἡ διχοτόμος τῆς Α σχηματίζει μετὰ τῶν ἑκατέρωθεν πλευρῶν γωνίας ἴσας, ἄρα τὸ ὕψος εὑρίσκεται πλησιέστερον πρὸς τὴν μικροτέραν πλευρὰν ἐν σχέσει πρὸς τὴν διχοτόμον. Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὴν σχέσιν τῶν θέσεων τῆς διαμέσου καὶ τῆς διχοτόμου, προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΖ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Ζ ὥστε ΖΗ=ΑΖ καὶ σύρομεν τὴν ΒΗ. Τὰ τρίγωνα ἤδη ΑΖΓ καὶ ΒΖΗ εἶναι ἴσα, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, ὅτε γων Η=γων ΖΑΓ, καὶ ΒΗ=ΑΓ. Ἀλλὰ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΗ εἶναι ΑΒ>ΒΗ διότι ΒΗ=ΑΓ ὅτε καὶ ἡ γων Η>γων ΒΑΖ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ γων Η=γων ΖΑΓ θὰ εἶναι γωνΖ ΑΓ> γωνΒΑΖ, δηλαδὴ ἡ διάμεσος κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὴν μεγαλυτέραν πλευρὰν ἐν σχέσει πρὸς τὴν διχοτόμον, ἀφοῦ σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΒ μικροτέραν γωνίαν ἢ μετὰ τῆς ΑΓ, ἐνῷ ἡ διχοτόμος σχηματίζει γωνίας ἴσας. Ὥστε ἐδείχθη ὅτι ἡ διχοτόμος κεῖται μεταξὺ ὕψους καὶ διαμέσου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ἐκ τῆς κορυφῆς ἀγόμενα μεγέθη, ὕψος, διχοτόμος καὶ διάμεσος συμπίπτουν ὡς μᾶς εἶναι γνωστόν. Ἐνῷ τὰ ἐκ τῶν ἄλλων κορυφῶν ἀκολουθοῦν τὴν προαποδειχθεῖσαν πρότασιν. Εἰς τὸ ἰσόπλευρον προφανῶς συμπίπτουν ἐξ οἱασδήποτε κορυφῆς καὶ ἂν ἀχθοῦν.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ :

Ὁ τρόπος ἀποδείξεως διὰ διπλασιασμοῦ τῆς διαμέσου, εἰς τὰ προβλήματα,εἰς τὰ ὁποῖα μετέχει καὶ ἡ διάμεσος εἶναι πολὺ συνήθης εἰς τὰς ἀσκήσεις, γίνεται δὲ τούτου χρῆσις καὶ εἰς πολλὰς περιπτώσεις γεωμετρικῶν κατασκευῶν περὶ ὧν θὰ ὁμιλήσωμεν περαιτέρω.

Σελὶς 57. § 131.— Διότι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλοι δὲ μεταξὺ παραλλήλων σχηματίζουν παραλληλόγραμμον καὶ ἄρα εἶναι ἴσαι.

Σελὶς 58. § 136.—Ἰσότης παραλληλογράμμων.

Σχηματίζομεν δύο παραλληλόγραμμα τὸ ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ὥστε νὰ ἔχουν ΑΒ=Α'Β' καὶ ΒΓ=Β'Γ' καὶ γων Β=γων Β'. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ Β μὲ τὴν προσκειμένην της γωνίαν Α εἶναι παραπληρωματικαὶ (ὡς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) θὰ ἔχωμεν Β+Α==2ὀρθ. καὶ ὁμοίως Β'+Α'= 2 ὀρθ. ἀλλὰ ἐπειδὴ Β=Β' θὰ εἶναι Α=Α'. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι καὶ Γ = Γ', εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι Δ = Δ'. Ἐὰν τώρα ἐπιθέσωμεν τὰ παραλληλόγραμμα ὥστε ἡ Β νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της Β', τότε ἡ ΒΑ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τῆς Β'Α' καὶ ὡς ἴση πρὸς αὐτὴν ἐξ ὑποθέσεως, τὸ Α θὰ λάβῃ τὴν θέσιν τοῦ Α' καὶ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΒΓ τὴν θέσιν τῆς Β'Γ' καὶ τὸ Γ τὴν θέσιν τοῦ Γ'. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐδείχθη ὅτι ἡ Α = Α' καὶ ἡ Γ =Γ', αἱ ΑΔ καὶ ΓΔ θὰ λάβουν τὰς θέσεις τῶν Α'Δ' καὶ Γ'Δ' ἀντιστοίχως καὶ ὡς ἴσαι πρὸς αὐτὰς θὰ ἐφαρμόσουν καὶ τὸ Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ' ἤτοι τὰ παραλληλόγραμμα ἐφήρμοσαν κατὰ πάντα τὰ μέρη αὐτῶν ἄρα εἶναι ἴσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

60.—Εἰς παραλληλόγραμμον μία γωνία εἶναι 1) 72^o, 2) 135^o, 3) 90^o, 4) α^o. Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ τρεῖς γωνίαι αὐτοῦ ;

ΛΥΣΙΣ.—1) Εἰς τὸ παραλληλόγραμμον γνωρίζομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, αἱ δὲ προσκείμεναι παραπληρωματικαί. Συνεπῶς ἡ ἀπέναντι τῆς τῶν 72^o θὰ εἶναι ἐπίσης 72^o. Ἑκάστη δὲ τῶν ἄλλων $180^o-72^o=108^o$.

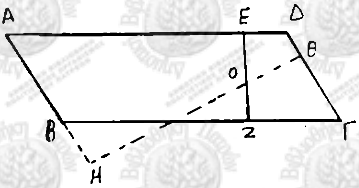
2) Ὁμοίως ἡ ἀπέναντι θὰ εἶναι 135^0 ἑκάστη δὲ τῶν ἄλλων $180^0 - 135^0 = 45^0$.

3) Ἡ ἀπέναντι 90^0, ἑκάστη δὲ τῶν ἄλλων ἐπίσης ἀπὸ 90^0 ἤτοι εἶναι ὀρθογώνιον ἢ τετράγωνον.

4) Ἡ ἀπέναντι θὰ εἶναι ἐπίσης α^0, ἑκάστη δὲ τῶν λοιπῶν $180^0 - \alpha^0$.

61.— Ὑπὸ ποίαν γωνίαν τέμνονται τὰ δύο ὕψη παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου ἡ μία γωνία εἶναι 1) 140^0, 2) α^0, 3) $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς;

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 36) τοῦ ὁποίου τὰ δύο ὕψη ΕΖ καὶ ΗΘ τέμνονται εἰς τὸ Ο. Ζητεῖται μία τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν. (Διότι γνωστῆς οὔσης τῆς μιᾶς εἶναι γνωσταὶ καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαί).



Σχ. 36.

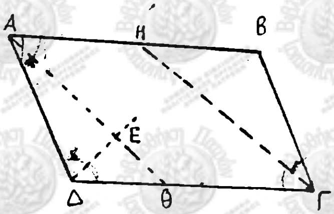
1) Ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ μία γωνία 140^0 θεωροῦμεν ὡς τοιαύτην τὴν Δ (ἐπειδὴ ἐν τῷ σχήματι ἡ Δ φαίνεται ἀμβλεῖα). Εἰς τὸ τετράπλευρον τώρα ΕΟΘΔ αἱ δύο γωνίαι Ε καὶ Θ εἶναι ὀρθαὶ λόγῳ τῶν ὑψῶν ἄρα θὰ πρέπῃ καὶ γων$\text{ΕΟΘ} +$ γων$\Delta = 180^0$ ἢ γων $\text{ΕΟΘ} + 140^0 = 180^0$ ἄρα γων$\text{ΕΟΘ} = 40^0$.

2) Ἂν $\Delta = \alpha^0$ τότε γων$\text{ΕΟΘ} = 180^0 - \alpha^0$.

3) Ἂν ἤδη $\Gamma = \frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς (διὰ νὰ συμφωνοῦν τὰ δεδομένα πρὸς τὸ σχῆμα) τότε γων $\Theta\text{ΟΖ} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ ὀρθῆς καὶ ἄρα γων $\text{ΕΟΘ} = 2$ ὀρθ. $- \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς.

62.—Αἱ διχοτόμοι τῶν μὲν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, τῶν δὲ γωνιῶν τῶν προσκειμένων πρὸς τὴν αὐτὴν πλευρὰν εἶναι κάθετοι.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ αἱ διχοτόμοι ΑΘ καὶ ΓΗ τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του Α καὶ Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΑΘ ∥ ΗΓ. (Σχ. 37).



Σχ. 37.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — Ἐπειδὴ τὸ σχῆμα ΑΘΓΗ ἔχει τὰς δύο πλευράς του ΑΗ καὶ ΘΓ παραλλήλους, ἂν δειχθῇ ὅτι ἔχει ταύτας καὶ ἴσας, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον ὅτε ΑΘ ∥ ΓΗ. Πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΑΘΔ καὶ ΗΒΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ΑΔ=ΒΓ ὡς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, ἐπίσης γωνΔ=γωνΒ καὶ γωνΔΑΘ=γωνΗΓΒ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Γ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ (ἤτοι ἔχουν μίαν πλευρὰν καὶ τὰς προσκειμένας) ἄρα εἶναι ἴσα. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι καὶ ΗΒ=ΔΘ, ἀλλ' ἐπειδὴ ΗΒ καὶ ΔΘ εἶναι δύο ἴσα μέρη δύο ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ παραλληλογράμμου, ἕπεται ὅτι τὰ ὑπόλοιπα μέρη αὐτῶν ΑΗ καὶ ΘΓ θὰ εἶναι ἴσα. Ὥστε ἐδείχθη ἡ ἰσότης τῶν ΑΗ καὶ ΘΓ καὶ συνεπῶς τὸ ΑΗΓΘ εἶναι παραλληλόγραμμον ὅτε ΑΘ=ΗΓ.

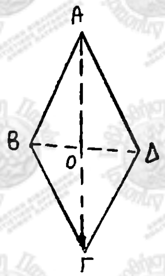
Διὰ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεώς μας παρατηροῦμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι ΑΘ καὶ ΔΕ τῶν προσκειμένων γωνιῶν Α καὶ Δ τοῦ παραλληλογράμμου σχηματίζουν το τρίγωνον ΑΕΔ, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι ΔΑΕ καὶ ΑΔΕ ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν, ἐπειδὴ εἶναι ἡμίση δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν. Ἀλλὰ τότε θὰ πρέπῃ καὶ ἡ τρίτη γωνΕ τοῦ τριγώνου ΑΔΕ νὰ εἶναι ὀρθὴ ἤτοι αἱ διχοτόμοι ΑΘ καὶ ΔΕ τέμνονται καθέτως.

63.— **Τὰ ἄκρα δύο διαμέτρων κύκλου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διάμετροι τοῦ κύκλου διχοτομοῦν ἀλλήλας. Ἄρα τὸ σχῆμα τὸ ἔχον διαγωνίους ταύτας εἶναι παραλληλόγραμμον (§ 129). Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ ἴσαι αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου τούτου, ἕπεται ὅτι εἶναι ὀρθογώνιον (§ 133).

64. — **Ἑκάστη διαγώνιος ρόμβου διχοτομεῖ τὰς γωνίας αὐτοῦ.**

Ἔστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ (Σχ. 38) καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι διχοτομοῦν τὰς γωνίας αὐτοῦ.



Σχ. 38.

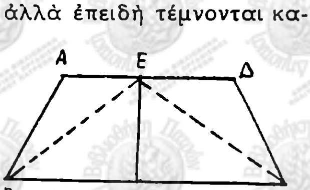
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν τὰς ἑξῆς ἰδιότητας τοῦ ρόμβου: Αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως καὶ διχοτομοῦνται.

Ἂν λοιπὸν θεωρήσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ ΑΒ = ΑΔ, ἡ δὲ ΑΟ εἶναι ὕψος αὐτοῦ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὕψος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ΟΓ διχοτομεῖ τὴν Γ ἡ δὲ ΒΔ τὰς Β καὶ Δ.

65.— **Ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τέμνωνται δὲ καθέτως, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, γνωρίζομεν ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον, ἀλλὰ ἐπειδὴ τέμνονται καθέτως πρέπει νὰ εἶναι καὶ ρόμβος. Ἀλλὰ ὀρθογώνιον καὶ συγχρόνως ρόμβος εἶναι μόνον τὸ τετράγωνον.

66.— **Ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας.**



Σχ. 39.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ ΕΖ ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΔ καὶ ΒΓ. (Σχ. 39).

Ἤτοι ἔχομεν :

Ὑπόθεσις	ΑΔ ∥ ΒΓ ΑΒ = ΔΓ, γων Α = γων Δ, γων Β = γων Γ Ε καὶ Ζ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως
Συμπέρασμα	ΕΖ ⊥ τῇ ΑΔ καὶ τῇ ΒΓ

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σύρομεν βοηθητικῶς τὰς ΕΒ καὶ ΕΓ μὲ τὸν σκοπὸν νὰ δημιουργήσωμεν ἰσόσκελὲς τρίγωνον, ἀφοῦ θὰ πρόκηται νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Πράγματι τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι συγκρίνοντες τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ εὑρίσκομεν ὅτι ΕΒ=ΕΓ.Εἶναι δὲ τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΔΕΓ ἴσα, διότι ἔχουν ΑΒ = ΔΓ, ΑΕ = ΕΔ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων Α = γων Δ ἤτοι δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἴσην. Ἐκ τοῦ ὅτι λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ δὲ ΕΖ συνδέει τὸ μέσον τῆς βάσεώς του μὲ τὴν κορυφήν, ἔπεται ὅτι ἡ ΕΖ θὰ εἶναι καὶ κάθετος τῇ ΒΓ, ὥστε καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΒΓ ἤτοι ἐπὶ τὴν ΑΔ.

67.— Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἥτις συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς ταύτας, τὸ τετράπλευρον εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ (Σχ. 39), ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ ταύτας. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

Ὑπόθεσις	ΕΖ ⊥ τῇ ΑΔ καὶ ΒΓ Ε καὶ Ζ μέσα τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ ἀντιστοίχως
Συμπέρασμα	Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ τραπέζιον ἰσοσκελὲς ἤτοι ΑΔ ∥ ΒΓ καὶ ΑΒ=ΔΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — Ἐν πρώτοις θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον. Πράγματι αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΕΖ, ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον. Ἤδη θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι ἰσοσκελές. Φέρομεν τὰς ΕΒ καὶ ΕΓ. Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΒΓ τὸ τρίγωνον ΕΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ὅτε ΒΕ=ΕΓ καὶ γωνΖΕΒ=γωνΖΕΓ (διότι ἡ ΕΖ θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος). Ἐπειδὴ ὅμως γωνΖΕΑ=γωνΖΕΔ= 1 ὀρθὴ ἔπεται ὅτι γωνΒΕΑ=γωνΓΕΔ ὡς συμπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν ΖΕΒ, ΖΕΓ, ἀντιστοίχως. Συγκρίνομεν τώρα τὰ τρίγωνα ΒΕΑ καὶ ΓΕΔ ταῦτα ἔχουν ΑΕ=ΕΔ (Ε μέσον), ΕΒ=ΕΓ (ὡς ἐδείχθη) καὶ γων ΒΕΑ = γων ΓΕΔ (ὡς ἐδείχθη), ἄρα εἶναι ἴσα ὅτε καὶ ΑΒ=ΔΓ καὶ τὸ τραπέζιον συνεπῶς εἶναι ἰσοσκελές.

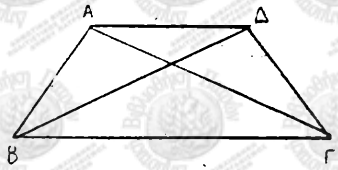
68.— Αἱ διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι ἴσαι:

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι (Σχ. 40).

Ὑπόθεσις: ΑΔ ∥ ΒΓ
ΑΒ = ΔΓ
γων Α = γων Δ καὶ γων Β = γων Γ.

Συμπέρασμα: ΑΓ = ΒΔ

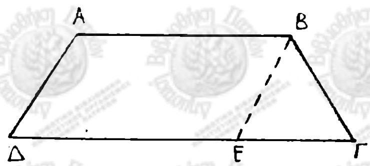
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Συγκρίνομεν πρὸς τοῦτο δύο τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ μετέχουν αἱ διαγώνιοι. Ἔστωσαν πρὸς τοῦτο τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ (χωρίσατε εἰς δύο σχήματα), ταῦτα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΒΓ κοινήν, ΑΒ = ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γων Β = γων Γ ἐξ ὑποθέσεως (ἤτοι δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην) Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ἴσα ἤτοι ΑΓ = ΒΔ (ὡς πλευρὰς ἴσων τριγώνων κειμένας ἔναντι ἴσων γωνιῶν).



Σχ. 40.

69.— Ἐὰν τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι, ὡς καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Δ, τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἰς τὸ ὁποῖον γωνΑ = γων Β καὶ γων Δ = γων Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι τραπέζιον ἰσοσκελές. (Σχ. 41).



Σχ. 41.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ Α+Β+Γ+Δ=4 ὀρθαί, εἶναι δὲ ἐξ ὑποθέσεων Α=Β καὶ Γ=Δ, θὰ ἔχωμεν Α+Α+Δ+Δ = 4 ὀρθαὶ ἢ 2Α+2Δ= = 4 ὀρθαὶ ἢ Α+Δ=2 ὀρθαί. Δηλαδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς τρίτης ΑΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη παραπληρωματικάς, ἄρα αὗται εἶναι παράλληλοι. Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιον.

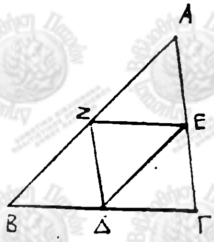
Ἤδη θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι ἰσοσκελές. Πρὸς τοῦτο σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΒΕ ∥ τῆς ΑΔ. Τότε σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΒΕΓ καὶ τὸ παραλληλόγραμον ΑΒΕΔ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ καὶ ἡ γωνία ΒΕΓ εἶναι ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΕ μὲ τέμνουσαν τὴν ΔΕ, θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως γωνΔ = γωνΓ, ἄρα γωνΒΕΓ = γωνΓ, ὅτε τὸ τρίγωνον ΒΕΓ ἰσοσκελές, δηλαδὴ ΒΓ = ΒΕ. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ εἶναι ΒΕ = ΑΔ, ὅτε θὰ εἶναι καὶ ΑΔ = ΒΓ ἤτοι τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

70.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα τοῦ βιβλίου, φέρομεν ἐπὶ τὴν νοητὴν εὐθεῖαν τῶν ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β τὰς καθέτους ΒΔ καὶ ΑΓ ἐπ' αὐτήν. Λαμβάνομεν δὲ ΒΔ = ΑΓ καὶ σύρομεν τὴν ΓΔ. Τὸ σχῆμα ΑΒΔΓ εἶναι προφανῶς ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς ἡ ΑΒ = ΓΔ. Μετροῦμεν λοιπὸν τὴν ΓΔ καὶ τὸ μῆκος αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν ἀπροσίτων σημείων Α καὶ Β.

71. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα 2 τοῦ βιβλίου, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΖΕΔ εἶναι κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὰς ΖΗ, ΕΘ καὶ ΑΒ, καὶ συνεπῶς αὗται εἶναι παράλληλοι. Ἐπειδὴ θέλομεν ἡ ΗΘ προεκτεινομένη νὰ συναντᾷ καθέτως τὴν ΑΒ θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΖΕΔ ἥτις συναντᾷ καθέτως τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ τότε τὸ σχῆμα ΗΖΕΘ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον ὅτε ΗΖ = ΘΕ. Ἐπειδὴ δὲ ἀκόμη θέλομεν ἡ ΘΗ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Γ θὰ πρέπῃ καὶ ΔΓ = ΘΕ.

72.— Αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διαιροῦν αὐτὸ εἰς τέσσαρα τρίγωνα ἴσα μεταξύ των.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΖΔ, ΓΔΕ, ΖΔΕ εἶναι ἴσα. (Σχ. 42).



Σχ. 42.

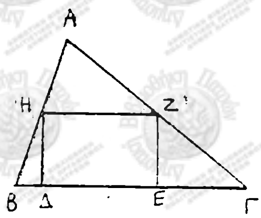
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ἓν τῶν τριγώνων ΑΖΕ, ΒΔΖ, ΓΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κεντρικὸν τρίγωνον ΖΔΕ. Πράγματι τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἡ ΖΔ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Ζ καὶ Δ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΓ (§ 139), ὁμοίως καὶ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἀλλὰ ἀφοῦ τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον ἡ διαγώνιος αὐτοῦ ΖΕ τὸ χωρίζει εἰς δύο τρίγωνα ἴσα ἤτοι τρίγωνον ΑΖΕ ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΔΕ.

Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΖΔ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΔΕ ὡς καὶ τὸ τρίγωνον ΓΔΕ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τρίγωνον ΖΔΕ ἄρα καὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα εἶναι ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.— Τὸ τρίγωνον ΖΔΕ καλεῖται συνήθως μεσικὸν τρίγωνον.

73.— *Αἱ κάθετοι ἐκ τῶν μέσων δύο πλευρῶν τριγώνου ἐπὶ τὴν τρίτην πλευρὰν εἶναι ἴσαι.*

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Η, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἀντιστοίχως, ὡς καὶ ΗΔ καὶ ΖΕ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν σημείων τούτων ἐπὶ τὴν ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΗΔ = ΖΕ (Σχ. 43).



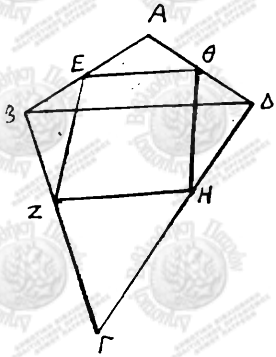
Σχ. 43.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΗΖ. Τότε αὕτη ὡς συνδέουσα τὰ μέσα Η, Ζ τῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, ἀφ' ἑτέρου αἱ ΗΔ καὶ ΖΕ ὡς κάθετοι τῇ ΒΓ εἶναι παράλληλοι, ὅτε τὸ σχῆμα ΗΖΕΔ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συνεπῶς ΗΔ = ΖΕ (ὡς ἔναντι πλευραί).

74.— Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 44) καὶ Ε, Θ, Η, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Συνδέομεν τὰ σημεῖα ταῦτα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου καὶ λαμβάνομεν ἕν νέον τετράπλευρον τὸ ΕΘΗΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐξετάζομεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου ΕΘΗΖ, π. χ. τὰς ΕΘ καὶ ΖΗ. Σύρομεν πρὸς τοῦτο βοηθητικῶς τὴν διαγώνιον ΒΔ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Σχηματίζονται δύο τρίγωνα τὸ ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ. Ἡ εὐθεῖα ΕΘ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ τοῦ τριγ.ΑΒΔ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ. Ὁμοίως ἡ ΖΗ ὡς συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΓΒ καὶ ΓΔ τοῦ τριγ. ΓΒΔ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ. Ἤτοι αἱ ΕΘ καὶ ΖΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἄρα τὸ σχῆμα ΕΘΗΖ ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶναι παραλληλόγραμμον.

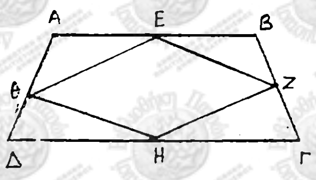


Σχ. 44.

75.— Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου.

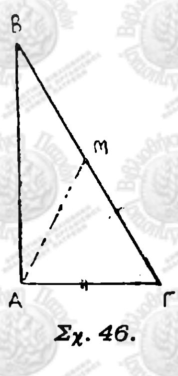
Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Θ, Η, Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΘΗΖ, εἶναι ῥόμβος (Σχ. 45)

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐδείχθη προηγουμένως ὅτι τὸ ΕΘΗΖ εἶναι παραλληλόγραμμον. Διὰ νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι τοῦτο εἶναι καὶ ῥόμβος, ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του. Πρὸς τοῦτο ἂς ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ΔΘΗ καὶ ΗΓΖ. Ταῦτα ἔχουν ΔΗ = ΗΓ (Η μέσον), ΔΘ = ΓΖ (ὡς ἡμίση ἴσων πλευρῶν) καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν Δ ἴσην πρὸς τὴν Γ (ὡς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τραπεζίου) ὅτε εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς ΘΗ=ΗΖ (κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν εἰς ἴσα τρίγωνα).



Σχ. 45.

76.— Ἐὰν μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης, ἡ ὀξεῖα γωνία, ἡ ὁποία πρόσκειται εἰς αὐτὴν εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας, καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 46.

Τὸ εὐθύ.—Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον ΑΒΓ (Σχ. 46) εἰς τὸ ὁποῖον ὑποτίθεται ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία ἡ προσκειμένη τῇ πλευρᾷ ΑΓ δηλαδὴ ἡ γων Γ εἶναι διπλασία τῆς ὀξείας γωνίας Β.

Δηλαδή :

Ὑπόθεσις $\left\{ \begin{array}{l} Α = \text{ὀρθή} \\ ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} \end{array} \right.$ Συμπέρασμα $\left|\ \text{γων } Γ = 2\,\text{γων } Β \right.$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εὑρίσκομεν τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ καὶ σύρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ. Τότε θὰ εἶναι $ΑΓ = \dfrac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΒΜ$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ διάμεσος ἡ ἀντιστοιχοῦσα τῇ ὑποτεινούσῃ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης (§ 132), δηλαδὴ ΑΜ = ΜΓ, ἀλλ' ἐπειδὴ ΜΓ = ΑΓ ἕπεται ὅτι ΑΜ = ΜΓ = ΑΓ ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΜΓ εἶναι ἰσόπλευρον ἄρα καὶ ἰσογώνιον καὶ συνεπῶς ἡ γωνία $Γ = 60^0$. Ἀλλὰ τότε, ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ἡ γωνία $Β = 30^0$. Δηλαδὴ εἶναι γων Γ = 2. γων Β.

Τὸ ἀντίστροφον.— Διατύπωσις τοῦ ἀντιστρόφου :

«Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ὀξείας γωνίας, τότε ἡ κάθετος πλευρὰ ἡ προσκειμένη τῇ πρώτῃ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης» (Σχ. 46).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω ὅτι γων Γ = 2. γων Β, ἀλλὰ ἐπὶ πλέον γων Γ + γων Β = 90^0, ὅτε 2 γων Β + γων Β = 90^0 ἢ γων Β = 30^0 καὶ συνεπῶς γων Γ = 60^0. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ τὸ ὁποῖον ἔχει ΑΜ = ΜΓ (ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω) ἔχομεν γωνίαν Γ = 60^0 ἄρα καὶ γων ΓΑΜ = 60^0 ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ΑΜΓ θὰ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι θὰ ἔχῃ καὶ γων ΑΜΓ = 60^0. Ἀφοῦ εἶναι ἰσόπλευρον ἕπεται ὅτι ΑΓ = ΜΓ ἀλλὰ ΜΓ = ΒΓ : 2 ἤτοι ΑΓ = ΒΓ : 2 δηλαδὴ ἡ πλευρὰ ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

77.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα τοῦ βιβλίου λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ Α, τὰ διαδοχικὰ τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ ἴσα πρὸς ἄλληλα ἐπὶ τυχούσης εὐθείας ΑΖ ἀχθείσης ἐκ τοῦ Α. (Θέσατε εἰς τὸ σχῆμα τὰ σημεῖα). Φέρομεν τώρα καὶ τὴν ΒΚ παράλληλον τῆς ΑΖ καὶ ἀντιρρόπως ἐκείνης καὶ λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Β τὰ τμήματα ΒΗ, ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ ἴσα πρὸς τὰ προηγούμενα. Σύροντες ἤδη τὰς ΑΚ, ΓΙ, ΔΘ, ΕΗ, ΖΒ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΓΙΚ, ΓΔΘΙ, ΔΕΗΘ, ΕΖΒΗ (§ 130). Αἱ ἀχθεῖσαι ὅμως εὐθεῖαι ΓΙ, ΔΘ, ΕΗ τέμνουν τὴν ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς Ν, Μ, Λ καὶ σχηματίζουν τὰ τρίγωνα ΑΖΒ κλπ. Εἰς τὸ τρίγωνον ὅμως ΑΖΒ ἡ ΔΜ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΖ τέμνει καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Μ. Ὁμοίως ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΔΜ δεικνύομεν ὅτι τὸ Ν εἶναι μέσον τῆς ΑΜ, ἀπὸ δὲ τὸ τρίγωνον ΒΜΘ δεικνύομεν ὅτι τὸ Λ εἶναι μέσον τῆς ΒΜ. Ὥστε ἡ ΑΒ ἔχει διαιρεθῆ εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23.—Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, αἱ συνδέουσαι εὐθεῖαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσαι.

24.—Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου μετὰ τῶν ἀντικειμένων κορυφῶν, διαιροῦν τὴν ἄλλην διαγώνιον εἰς τρία ἴσα μέρη.

25*.—Ἡ διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ όποία σχηματίζεται ύπό τοῦ ὕψους καί τῆς διαμέσου τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τήν ὑποτείνουσαν.

26*.— Ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπό τοῦ ὕψους καί τῆς διχοτόμου γωνίας τριγώνου ἀγομένων ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς, ἰσοῦται μέ τήν ἡμιδιαφοράν τῶν παρά τήν βάσιν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. [Ἡ πρότασις αὕτη καλεῖται θεώρημα τοῦ NAGEL καί χρησιμεύει πολύ εἰς τά προβλήματα τῶν γεωμ. κατασκευῶν καί τῶν γεωμ. τόπων. Ἀποδεικνύεται δέ εὐκόλως].

27.— Ἄν, ἀπό σημεῖον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου, φέρωμεν παραλλήλους πρός τάς ἄλλας πλευράς, τό σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον σταθεράν.

28*.—Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν ἔναντι πλευρῶν τοῦ ρόμβου εἶναι ἴσαι.

29*.— Ἡ διάμεσος τραπεζίου εἶναι παράλληλος πρός τάς βάσεις καί ἴση πρός τό ἡμιάθροισμα αὐτῶν.

[Σύρομεν μίαν διαγώνιον καί κατόπιν ἐκ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρός τάς βάσεις, δεικνύομεν δέ ὅτι αὕτη εἶναι ἀναγκαίως ἡ διάμεσος.

30*.—Τό εὐθύγραμμον τμῆμα, ὅπερ ὁρίζουν τά μέσα τῶν διαγωνίων τραπεζίου, εἶναι παράλληλον πρός τάς βάσεις καί ἴσον πρός τήν ἡμιδιαφοράν αὐτῶν.
[Δεικνύομεν ὅτι τό τμῆμα τοῦτο εἶναι μέρος τῆς διαμέσου τοῦ τραπεζίου].

31.—Πεντάγωνον ἔχει τάς πλευράς του ἴσας καί τάς γωνίας του ἴσας, νά δειχθῇ ὅτι καί αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

32.— Ἐάν ΒΕ εἶναι κάθετος ἐπί τήν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί Ζ τό μέσον τῆς ΒΓ, τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ εἶναι παράλληλον τῇ ΑΓ καί ἴσον πρός τήν ἡμιδιαφοράν τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ.

Σελίς 61 § 140. **ΘΕΩΡΗΜΑ** 1ον.
Διότι, ἀφοῦ ἡ περιφέρεια καί ἡ εὐθεῖα δέν ἔχουν οὐδέν κοινόν σημεῖον, ὁ ποῦς Δ τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ κέντρου ἐπί τήν εὐθεῖαν θά κεῖται ἐκτός τῆς περιφερείας. Ἀλλά ἡ κάθετος εἶναι ἡ μικροτέρα ἐξ ὅλων τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου πρός τήν εὐθεῖαν, συνεπῶς ἡ ΚΔ θά πρέπῃ νά εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἀφοῦ τό σημεῖον Δ αὐτῆς κεῖται ἐκτός τῆς περιφερείας.

Σελίς 62. § 140. **ΑΝΑΠΟΔΕΙΚΤΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.**

ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ : «Ἐάν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τινος εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια οὐδέν ἔχουσι κοινόν σημεῖον».
Ἐπειδή ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τῆς εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, ὁ ποῦς τῆς καθέτου ταύτης θά κεῖται ἐκτός τῆς περιφερείας. Ἀλλά ὁ ποῦς εἶναι τό σημεῖον τό ἀπέχον ὀλιγώτερον τοῦ κέντρου, ἄρα ἀφοῦ τοῦτο κεῖται ἐκτός τῆς περιφερείας κατά μείζονα λόγον τό λοιπά σημεῖα τῆς εὐθείας θά κεῖνται ἐκτός τῆς περιφερείας. Ἄρα ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια οὐδέν ἔχουσι κοινόν σημεῖον.

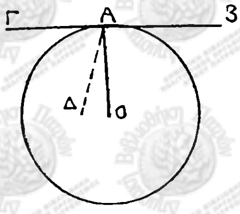
ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ : «Ἐάν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τινος εὐθείας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, τότε ἡ εὐθεῖα καί ἡ περιφέρεια ἔχουσι δύο κοινά σημεῖα».
Ἐπειδή ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τῆς εὐθείας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος, ἕπεται ὅτι ὁ ποῦς τῆς καθέτου ταύτης θά εἶναι σημεῖον, κείμενον ἐντός τῆς περιφερείας ἤτοι ἡ εὐθεῖα ἔχει μέρος κείμενον ἐντός τῆς περιφερείας, ἀλλά τότε ἡ εὐθεῖα εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας καί ἔχει μετ' αὐτῆς δυό κοινά σημεῖα (§ 97).
Τά ἀνωτέρω ἀντίστροφα ἀποδεικνύονται εὐκόλως καί διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Σελίς 62. § 143. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**
Διότι εἰς ἕκαστον σημεῖον περιφερείας ἀντιστοιχεῖ μία ἀκτίς καί ἐπί μίαν ἀκτῖνα εἰς τό ἄκρον αὐτῆς μία καί μόνον κάθετος. Ἄρα μία καί μόνη ἐφαπτομένη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

78.—**Ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.**

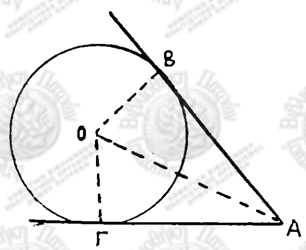
Ἔστω περιφέρεια Ο καὶ ἐφαπτομένη αὐτῆς ΓΑΒ εἴς τι σημεῖον Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον ἀφῆς Α ἐπὶ τὴν ΓΑΒ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιφερίας (Σχ. 47).



Σχ. 47.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. Ἂν λοιπὸν ὑποθέσωμεν ὅτι φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ εἰς τὸ Α ἐπὶ τὴν ΓΑΒ καὶ ὅτι αὐτη δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, τότε θὰ ἔχωμεν δύο καθέτους ἐπὶ τὴν ΓΑΒ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἄρα ἡ κάθετος εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου.

79*.— **Αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας κύκλου ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.**



Σχ. 48.

Ἔστω κύκλος Ο καὶ δύο ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ ΑΒ, ΑΓ, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ σημείου Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι. Δηλαδὴ ἔχομεν (Σχ. 48).

Ὑπόθεσις	ΑΒ καὶ ΑΓ ἐφαπτόμεναι δηλαδὴ κάθετοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.
Συμπέρασμα	ΑΒ=ΑΓ

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΒ, ΟΓ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Β καὶ Γ, ὡς ἐπίσης καὶ τὴν ΟΑ. Σχηματίζομεν οὕτω δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ΟΒΑ καὶ ΟΓΑ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ καὶ ἴσας τὰς καθέτους πλευρὰς ΟΒ καὶ ΟΓ ὡς ἀκτῖνας. Ἄρα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὅτε καὶ ΑΒ=ΑΓ, δηλαδὴ αἱ δύο ἐφαπτόμεναι εἶναι ἴσαι.

80.— Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου κύκλου εἶναι παράλληλοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Διότι θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Σελὶς 63. § 145. **ΤΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΝ.**

«Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς τὴν μεγαλυτέραν χορδὴν ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον τόξον καὶ εἰς τὴν μικροτέραν τὸ μικρότερον, τὰ δὲ τόξα νοοῦνται μικρότερα ἡμιπεριφερείας».

Θὰ τὸ ἀποδείξωμεν μὲ τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Πράγματι ἂν τὰ ἀντίστοιχα τόξα ἦσαν ἴσα καὶ αἱ χορδαὶ θὰ ἦσαν ἴσαι, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, διότι αἱ χορδαὶ ἐδόθησαν ἄνισοι. Ἄρα τὰ τόξα εἶναι ἄνισα. Εἰς τὴν μεγαλυτέραν δὲ χορδὴν ἀντιστοιχεῖ τὸ μεγαλύτερον τόξον, διότι ἂν ἀντεστοίχει τὸ μικρότερον θὰ ἔπρεπε κατὰ τὸ εὐθὺ τοῦ θεωρήματος, ἡ χορδὴ αὕτη νὰ εἶναι καὶ ἡ μικροτέρα, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν καθ' ἣν ἐδέχθημεν ταύτην ὡς τὴν μεγαλυτέραν.

Σελὶς 64. § 148. **ΑΝΑΠΟΔΕΙΚΤΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.**

Διότι ἂν δὲν διήρχετο διὰ τοῦ κέντρου, τότε θὰ εἴχομεν εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς δύο καθέτους ἐπ' αὐτὴν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, μίαν ἐκείνην ἣν θὰ φέρωμεν καὶ μίαν ἐκείνην ἥτις συνδέει τὸ μέσον τῆς χορδῆς μὲ τὸ κέντρον καὶ ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν κατὰ τὸ θεώρημα (§ 147).

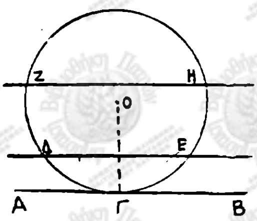
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

81.—**Ἐὰν ἐφαπτομένη περιφερείας καὶ χορδὴ τόξου αὐτῆς εἶναι παράλληλοι, τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ αὐτῶν εἶναι ἴσα, ὅπως ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο χορδῶν παραλλήλων.**

Ἔστω ἡ περιφέρεια Ο, μία ἐφαπτομένη αὐτῆς ΑΓΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ (Σχ. 49), καὶ δύο χορδαὶ αὐτῆς αἱ ΔΕ καὶ ΖΗ παράλληλοι τῇ ΑΓΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι α) τὰ τόξα ΔΓ καὶ ΕΓ εἶναι ἴσα καὶ β) τὰ τόξα ΖΔ καὶ ΗΕ ὅτι ἐπίσης εἶναι ἴσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— (Γράψατε ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα).

α) Ἐπειδὴ αἱ ΑΓΒ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι, ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἁφῆς, αὕτη θὰ εἶναι κάθετος τῇ ἐφαπτομένῃ, ὥστε καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΔΕ. Ἀλλὰ τότε τὸ τόξον ΔΓ = τόξον ΕΓ κατὰ τὸ θεώρημα § 146.



Σχ. 49.

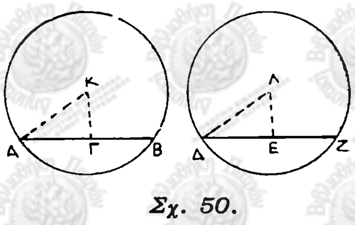
β) Ἐδείχθη εἰς τὸ α' μέρος ὅτι τόξ ΔΓ = τόξ ΕΓ, ὁμοίως δὲ θὰ εἶναι καὶ τόξ ΖΓ = τόξ ΗΓ. Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης, τὰ μέλη τῆς πρώτης εὑρίσκομεν τόξ ΖΔ = τόξ ΗΕ.

82.—**Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ ἀντιστρόφως.**

Τὸ εὐθύ. Ἔστωσαν δύο ἴσοι κύκλοι οἱ Κ καὶ Λ καὶ δύο χορδαὶ αὐτῶν ΑΒ καὶ ΔΖ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι (Σχ. 50). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἀπέχουν ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου· ἤτοι ὅτι ΚΓ = ΛΕ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— (Γράψατε ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα).

Σύρομεν βοηθητικῶς τὰς ἀκτῖνας ΚΑ καὶ ΛΔ. Σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΑΓ καὶ ΛΔΕ. Ταῦτα εἶναι ἴσα ἐπειδὴ ἔχουν τὰς ὑπο-



Σχ. 50.

τεινούσας των ἴσας ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων, καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς ΑΓ καὶ ΔΕ ἴσας ὡς ἡμίση τῶν ἴσων καθ' ὑπόθεσιν χορδῶν (διότι Γ, Ε μέσα τῶν χορδῶν) Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς ἄλλας καθέτους πλευρὰς ἴσας ἤτοι ΚΓ=ΛΕ.

Τό ἀντίστροφον. «Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους χορδαὶ ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου εἶναι ἴσαι».

Διὰ συγκρίσεως τῶν αὐτῶν τριγώνων ἔχομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα ὡς ἔχοντα ΚΑ=ΛΔ καὶ ΚΓ=ΛΕ (ἐξ ὑποθέσεως). Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΑΓ=ΔΕ, ἀλλὰ τὰ ΑΓ καὶ ΔΕ εἶναι τὰ ἡμίση τῶν χορδῶν, συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ χορδὴ ΑΒ=χορδὴν ΔΖ.

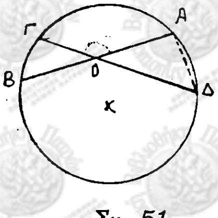
Σελὶς 65. § 152. **ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ.**

1ον. Διότι ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον καὶ ἑκάστη ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς κοινῆς ἐπικέντρου.

2ον. Ἀφοῦ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων, αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ ἴσα αὐτὰ τόξα θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη ἐγγεγραμμένη εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου, ἔπεται ὅτι αἱ ἐγγεγραμμέναι θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

3ον. Διότι ὡς ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίκεντρος δύναται νὰ θεωρηθῇ ἡ γωνία ἡ ὁποία ἔχει τὰς μὴ κοινὰς πλευράς της ἐπ' εὐθείας (δηλαδὴ ἐπὶ διαμέτρου) καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ ἰδίου τόξου. Ἀλλὰ μία τοιαύτη ἐπίκεντρος θὰ εἶναι 2 ὀρθαὶ καὶ συνεπῶς ἡ ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον γωνία εἶναι μία ὀρθή. Συνεπῶς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἔχει τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ διάμετρον τοῦ κύκλου. Ἐάν δὲ ἔχωμεν πολλὰ ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν κοινὴν ὑποτείνουσαν αἱ κορυφαὶ των θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, διότι ἂν ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀχθῇ ἡ διάμεσος πρὸς τὴν κοινὴν ὑποτείνουσαν αὕτη θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης καὶ συνεπῶς ἡ μὲ κέντρον τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης καὶ ἀκτῖνα τὸ ἥμισυ ταύτης γραφομένη περιφέρεια θὰ διέρχεται δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν.

4ον. Ἂν δὲ μία ἐγγεγραμμένη βαίνῃ ἐπὶ τόξου μικροτέρου ἡμιπεριφερείας θὰ εἶναι ὀξεῖα διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος θὰ εἶναι μικροτέρα τῶν 2 ὀρθῶν. Ἂν δὲ μία γωνία ἐγγεγραμμένη βαίνῃ ἐπὶ τόξου μεγαλυτέρου ἡμιπεριφερείας θὰ εἶναι ἀμβλεῖα διότι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 2 ὀρθῶν (λαμβάνομεν ὡς τόξον, τὸ τόξον τῆς κοίλης γωνίας).



Σχ. 51.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

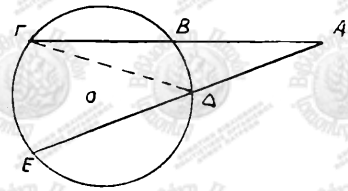
83.— Δύο χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΟΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΒ, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ.

Ἔστωσαν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο. Σύρομεν τὴν ΑΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γων ΑΟΓ=γωνΔ+γωνΑ ἐξ ὧν, ἡ γων Δ βαίνει εἰς τὸ τόξον ΑΓ, ἡ δὲ γωνΑ εἰς τὸ τόξον ΒΔ (Σχ. 51).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Πράγματι ἡ γωνία ΑΟΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ σχηματισθέντος τριγώνου ΑΟΔ, ὅτε ὡς γνωστὸν θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου ἤτοι γωνΑΟΓ = γωνΔ + γων Α. Ἀλλὰ ἡ γωνία Δ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει εἰς τὸ τόξον ΑΓ, ἡ δὲ γωνία Α εἶναι ἐπίσης ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει εἰς τὸ τόξον ΒΔ.

84(1).— Ἐκ τοῦ σημείου Α ἐκτὸς περιφερείας φέρομεν τὰς τεμνούσας ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων ΓΕ καὶ ΒΔ.

Ἔστω κύκλος Ο καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς τεμνούσας ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ (Σχ. 52). Σύρομεν τὴν ΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνΑ=γωνΓΔΕ—γωνΒΓΔ, ἐξ ὧν ἡ μὲν γωνΓΔΕ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΕ, ἡ δὲ γωνΒΓΔ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ.



Σχ. 52.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—(Γράψατε ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα). Ἡ γωνία ΓΔΕ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΓΔ καὶ ἄρα θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ ΒΓΔ. Ἤτοι γωνΓΔΕ=γωνΑ+γωνΒΓΔ ἢ λύοντες ὡς πρὸς τὴν γωνΑ λαμβάνομεν γωνΑ=γωνΓΔΕ—γωνΒΓΔ. Ἀλλὰ ἡ γωνΓΔΕ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΕ, ἡ δὲ γωνΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΔ.

Σελὶς 69. § 158. **Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ § 156, § 157, § 158.

ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ τῆς § 156 : «Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον ἤτοι θὰ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ ἐντὸς ἀλλήλων».

Διότι ἂν εἶχον ἓν κοινὸν σημεῖον (ἐφήπτοντο), ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων θὰ ἦτο ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἥτις λέγει ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ τῆς § 157 : «Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ἢ τὴν διαφορὰν αὐτῶν τότε αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ ἐντός».

Διότι ἂν εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα ἡ διάκεντρος θὰ ἦτο μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐπίσης ἂν δὲν εἶχον κοινὸν σημεῖον ἡ διάκεντρος θὰ ἦτο μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ὅπερ καὶ πάλιν ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ἄρα αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ ἐντός.

ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ τῆς § 158. «Ἐὰν ἡ διάκεντρος δύο περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν αἱ περιφέρειαι ἔχουσι δύο κοινὰ σημεῖα».

Διότι ἂν εἶχον ἓν κοινὸν σημεῖον ἡ διάκεντρος θὰ ἦτο ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων (ἐπαφὴ ἐκτὸς ἢ ἐντὸς) ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν δὲ δὲν εἶχον οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἡ διάκεντρος αὐτῶν θὰ ἦτο μεγαλυτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἢ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν (ἐκτὸς ἀλλήλων ἢ ἐντὸς) ὅπερ καὶ πάλιν ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ἄρα αἱ περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

---

(1) Αἱ ἀνωτέρω δύο ἀσκήσεις χρησιμοποιοῦνται πολὺ εἰς τὰς κατασκευὰς καὶ ἰδιαίτερα εἰς τοὺς γεωμ. τόπους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

85.—Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταὶ θέσεις δύο ἴσων περιφερειῶν;

ΛΥΣΙΣ.—Εἰς δύο ἴσας περιφερείας αἱ ἀκτῖνες εἶναι ἴσαι ἤτοι ἄν καλέσωμεν τὰς ἀκτῖνας ρ_1, ρ_2 θὰ εἶναι $\rho_1=\rho_2$. Ἄν δὲ ἡ διάκεντρος αὐτῶν κληθῇ δ θὰ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς μόνον συνθήκας οἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ πληροῦνται.

1) $\delta>\rho_1+\rho_2$ ἢ $\delta>2\rho_1$ τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων.

2) $\delta<\rho_1+\rho_2$ ἢ $\delta<2\rho_1$ τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ τέμνωνται, πληροῦται δὲ καὶ ἡ συνθήκη $\delta>\rho_1-\rho_2$ ἢ $\delta>0$.

3) $\delta=\rho_1+\rho_2$ τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ ἐφάπτωνται ἐκτός.

4) Ἐνῷ ἡ συνθήκη ἡ ὁποία δίδει τὴν ἐπαφὴν ἐντὸς δὲν πληροῦται διότι θὰ πρέπῃ $\delta=\rho_1-\rho_2=0$ ὅπερ εἶναι ἄτοπον (δηλαδὴ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην αἱ περιφέρειαι ἐφαρμόζουν ἀποτελοῦσαι μίαν μόνον περιφέρειαν).

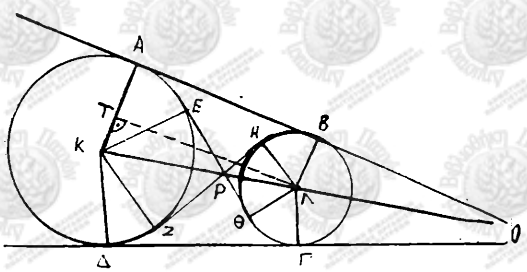
5) Ἐπίσης ἡ συνθήκη $\delta<\rho_1-\rho_2$ ἢ $\delta<0$ δὲν εἶναι δυνατή, δηλαδὴ αἱ περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ εἶναι μία ἐντὸς τῆς ἄλλης. Ὥστε αἱ δυναταὶ θέσεις δύο ἴσων περιφερειῶν εἶναι αἱ ἑξῆς: Ἢ αἱ περιφέρειαι τέμνονται ἢ ἐφάπτονται ἐκτὸς ἢ ἡ μία κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

86.—Αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν εἶναι ἴσαι.

α) Περίπτωσις ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι Κ καὶ Λ καὶ ΑΒ, ΔΓ αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν (Σχ. 53). Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι ἴσαι ἤτοι ΑΒ=ΔΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—(Γράψατε ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα). Προεκτείνομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΔΓ αἱ ὁποῖαι ἔστω ὅτι συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Ο. Φέρομεν καὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν ΚΛ ἥτις θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Ο, διότι ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι συνδέομεν τὸ Ο μὲ τὸ Λ καὶ τὸ Ο μὲ τὸ Κ, ἑκάστη τῶν ΟΛ καὶ ΟΚ ὀφείλει νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΟΓ, συνεπῶς ἀμφότεραι αὗται συμπίπτουν μὲ τὴν διάκεντρον ΚΛΟ



Σχ. 53

Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ΟΑ=ΟΔ ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου Ο πρὸς τὴν περιφέρειαν Κ (ἄσκ. 79). Ὁμοίως εἶναι ΟΒ=ΟΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα ἄν ἀπὸ τῶν ἴσων ΟΑ=ΟΔ ἀφαιρέσωμεν τὰ ἴσα ΟΒ=ΟΓ θὰ προκύψουν καὶ πάλιν ἴσα ἤτοι ΑΒ=ΔΓ.

β) Περίπτωσις ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων.

Ἔστωσαν ἤδη αἱ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι ΕΘ καὶ ΗΖ τῶν αὐτῶν περιφερειῶν. Διὰ τὸν αὐτὸν ὡς ἀνωτέρω λόγον ἡ διάκεντρος ΚΛ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ρ τούτων καὶ εἶναι ΡΕ=ΡΖ καὶ ΡΘ=ΡΗ ὅτε ἀθροίζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΡΕ+ΡΘ=ΡΖ+ΡΗ ἢ ΕΘ=ΗΖ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις συναντᾶται πολὺ συχνὰ καὶ δέον νὰ ἀποδοθῇ εἰς αὐτὴν ἰδιαιτέρα προσοχή.

87.—Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ἀνίσων περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ — Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ (Σχ. 53) μεταφέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ πλησίον τῆς διακέντρου ΚΛ διὰ νὰ τὴν συγκρίνωμεν πρὸς αὐτήν. Πρὸς τοῦτο σύρομεν ἐκ τοῦ Λ παράλληλον ΛΤ τῇ ΑΒ Τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΚΤΛ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὴν γωνΤ διότι ἡ ΛΤ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ ὡς παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα. Ἀλλὰ τώρα ἡ ΚΛ εἶναι ὑποτείνουσα, ὅτε εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθέτου ΛΤ ἤτοι καὶ τῆς ΑΒ καὶ ἐπειδὴ ΑΒ=ΔΓ ἕπεται ὅτι ΚΛ μεγαλυτέρα καὶ τῆς ΔΓ.

Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι ἡ διάκεντρος ΚΛ εἶναι μεγαλυτέρα καὶ ἑκάστης τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων. Πράγματι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΡΖ ἔχομεν ΚΡ>ΡΖ, ἐκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΛΡΗ ἔχομεν ΡΛ>ΡΗ. Ἀθροίζοντες ἤδη τὰς ἀνισότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΚΡ+ΡΛ>ΡΖ+ΡΗ ἢ ΚΛ>ΖΗ, ἐπειδὴ δὲ ΕΘ = ΗΖ θὰ εἶναι καὶ ΚΛ>ΕΘ.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33.— Ἐὰν διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν ἀχθῇ κοινὴ αὐτῶν τέμνουσα αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν τούτων εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀχθείσης τεμνούσης εἶναι παράλληλοι. (Σύρατε τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην καὶ ἐφαρμόσατε τὸ θεώρημα § 153).

34 *.— Πᾶν τραπέζιον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον εἶναι ἰσοσκελὲς (βοηθεία ἀσκήσ. 81).

35.— Ἂν δύο περιφέρειαι τέμνωνται, ἓν τῶν κοινῶν των σημείων καὶ τὰ ἄκρα τῶν διαμέτρων αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ ἄλλου κοινοῦ σημείου κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

36 *.— Ἂν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται καὶ ἀχθῶσι διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς των δύο τέμνουσαι, αἱ τὰ ἄκρα τούτων συνδέουσαι χορδαὶ εἶναι παράλληλοι (βοηθεία ἀσκήσ. 81).

37.— Δύο κύκλοι ἔχουσιν ἀκτῖνας ρ καὶ 3ρ καὶ ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτὸς εἰς τὸ Α. Ἂν ΒΓ κοινὴ ἐξωτερικὴ αὐτῶν ἐφαπτομένη, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΓΟ'Ο ἰσοῦται μὲ 60^0, ἔνθα Ο καὶ Ο' τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν. (Σύρατε βοηθητικῶς τὴν παράλληλον ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἐφαρμόσατε ἄσκησιν 76).

38.— Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐκ τῶν ἄκρων διαμέτρου κύκλου ἀγόμεναι παράλληλοι χορδαὶ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τὰ ἄλλα ἄκρα αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ ἄλλης διαμέτρου τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

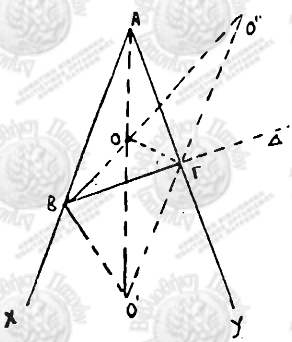
ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

Θεωρῶ πολὺ ἐνδιαφέρον καὶ ἀρκετὰ χρήσιμον ὅπως οἱ μαθηταὶ ἐπαναλάβωσι τὰς ἰδιότητας τοῦ πρώτου βιβλίου, τὸ ὁποῖον καὶ ἐτελειώσαμεν μὲ τὴν ἄσκησιν 87. Παραλλήλως πρὸς τὴν τοιαύτην γενικὴν ἐπανάληψιν ἂς ἔχωσιν ὑπ' ὄψιν τὰς ὑπὸ τοῦ βιβλίου ἀναφερομένας γενικὰς παρατηρήσεις τῆς σελίδος 69. Εἰς τὰς παρατηρήσεις αὐτὰς αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν μίαν γενικὴν ἀνασκόπησιν τῶν μεμαθημένων, θὰ κατωρθώσωσι νὰ ἔχωσι μίαν περίληψιν τῶν σπουδαιοτέρων ἰδιοτήτων αἱ ὁποῖαι θὰ χρησιμεύσωσι διὰ τὰ περαιτέρω ὡς καὶ διὰ τὴν λύσιν ἀσκήσεων δυσκολωτέρων. Καλὸν ἐπίσης θὰ εἶναι νὰ γίνῃ μία ἀνασκόπησις τῶν ἀσκήσεων τῆς συλλογῆς αἱ ὁποῖαι ἔχουσι ἀναγραφῇ διὰ μαύρων στοιχείων.

Ἡ τοιαύτη ἐπανάληψις θὰ σᾶς διευκολύνῃ πολὺ διὰ τὴν λύσιν τῶν γενικῶν ἀσκήσεων τοῦ α' βιβλίου.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ Α' ΒΙΒΛΙΟΥ

88 (1).— **Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρθ $+\frac{A}{2}$, ἐνῷ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρθ $-\frac{A}{2}$. Τέλος ἡ γωνία τῆς διχοτόμου τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β καὶ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ, ἰσοῦται μὲ $\frac{A}{2}$.**



Σχ. 54

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΟ, ΓΟ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο (Σχ. 54). Ἐπίσης ΒΟ' καὶ ΓΟ' αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο'. Τέλος δὲ ἔστω Ο'' ἡ τομὴ τῆς διχοτόμου τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἐξωτερικῆς γων Γ. Θὰ δείξωμεν ὅτι

1) ἡ γωνία ΒΟΓ$=1$ ὀρθ$+\frac{A}{2}$

2) ἡ γωνία ΒΟ'Γ$=1$ ὀρθ$-\frac{A}{2}$

3) ἡ γωνία Ο''$=\frac{1}{2}$γων Α.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Αἱ διχοτόμοι ΒΟ καὶ ΓΟ τέμνονται εἰς τὸ Ο διότι αἱ γωνίαι ΟΒΓ καὶ ΟΓΒ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (§ 118) (ἐπειδὴ εἶναι τὰ ἡμίση δύο γωνιῶν τριγώνου). Ἐπειδὴ εἶναι γωνΟΒΓ $=\frac{B}{2}$ καὶ γωνΟΓΒ$=\frac{\Gamma}{2}$, καλοῦντες τὴν γωνίαν ΒΟΓ$=x$, λαμ-

(1) Ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις χρησιμοποιεῖται πολὺ εἰς τὰς γεωμ. κατασκευὰς καὶ τοὺς γεωμ. τόπους.

βάνομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ, $x+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=2$ ὀρθ. (1). Ἀφ' ἑτέρου γνωρίζομεν ὅτι 2 ὀρθ$=A+B+\Gamma$ (2) (γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΒΓ) ὅτε ἐξισοῦντες τὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$x+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=A+B+\Gamma$$

$$\text{ἢ } x+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}+1 \text{ ὀρθ.}$$

$\left(\text{διότι } \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=1 \text{ ὀρθ.}\right)$

Ἀφαιροῦντες ἤδη ἀπὸ ἀμφότερα τὰ μέλη τὰ κοινὰ $\frac{B}{2}$, $\frac{\Gamma}{2}$ λαμβάνομεν

$$x=1 \text{ ὀρθ}+\frac{A}{2}.$$

2) Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας ἤτοι γων ΟΒΟ'$=1$ορθ καὶ ΟΓΟ'$=1$ορθ. ἄρα αἱ γωνίαι ΓΒΟ' καὶ ΒΓΟ' ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν 2 ὀρθ. ὅτε αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι ΒΟ' καὶ ΓΟ' τέμνονται.

Ἤδη εἰς τὸ τετράπλευρον ΟΒΟ'Γ παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει γωνΒΟ'Γ+γωνΟ'ΒΟ+γωνΒΟΓ+γωνΟΓΟ'$=4$ὀρθαὶ (1). Ἀλλὰ γωνΟ'ΒΟ$=$ $=$γωνΟΓΟ'$=1$ὀρθ καὶ γωνΒΟΓ$=1$ὀρθ$+\frac{A}{2}$ (ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν) ὅτε ἡ (1) γίνεται

γων ΒΟ'Γ$+1$ ὀρθ$+1$ ὀρθ. $+\frac{A}{2}+1$ ορθ$=4$ὀρθ. ἢ γων ΒΟ'Γ$=1$ορθ$-\frac{A}{2}$

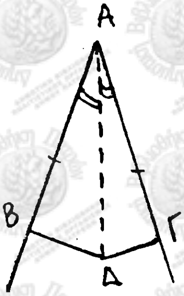
3) Θὰ δείξωμεν πρῶτον ὅτι αἱ διχοτόμοι Ο'Β καὶ Ο''Γ τέμνονται εἰς τὸ Ο''. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι γων Ο''ΒΟ' +γων Ο''Ο'Β <2 ὀρθ. Πράγματι εἶναι, διότι γων Ο''ΒΟ'$=1$ὀρθ καὶ γωνΟ''Ο'Β$=1$ ὀρθ.γων$-\frac{A}{2}$ ὅτε τὸ ἄθροισμα εἶναι 2 ὀρθ.$-\frac{A}{2}$ ἤτοι $<$ τῶν 2 ὀρθ.

Ἤδη θὰ δείξωμεν ὅτι γων Ο''$=\frac{A}{2}$. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον Ο''ΒΟ' ἔχομεν γων Ο''+ γων Ο''ΒΟ'+ γωνΒΟ'Ο''$=2$ ὀρθ ἢ γωνΟ''$+1$ ὀρθ$+1$ ὀρθ$-$ $-\frac{A}{2}=2$ ὀρθ ἤτοι γων Ο''$=\frac{A}{2}$.

89. **Αἱ κάθετοι ἐπὶ τῶν δύο πλευρῶν γωνίας εἰς σημεῖα αὐτῶν ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου αὐτῆς.**

Ἔστω γωνία ΒΑΓ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τὰ ἴσα τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ, καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΔ καὶ ΓΔ εἰς τὰ

Β καὶ Γ ἐπὶ τὰς πλευρὰς (Σχ. 55). Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ.



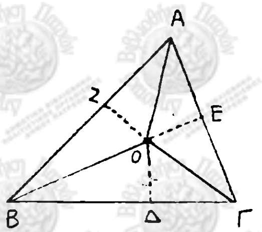
Σχ. 55.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Αἱ κάθετοι ΒΔ καὶ ΓΔ τέμνονται, διότι ἂν σύρωμεν νοερῶς τὴν ΒΓ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΒΓΔ καὶ ΓΒΔ εἶναι μικρότερον τῶν 2 ὀρθ. Ἤδη ἵνα δείξωμεν ὅτι τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου; σύρομεν τὴν ΑΔ καὶ δεικνύομεν ὅτι αὐτὴ εἶναι διχοτόμος. Εἰς τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχομεν ΑΒ = ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ ΑΔ κοινήν, ὅτε ταῦτα εἶναι ἴσα καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ γωνΒΑΔ = = γωνΓΑΔ ἤτοι ΑΔ διχοτόμος.

90.— Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ΟΒ, ΟΑ, ΟΓ. (Σχ. 56). Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται διέρχονται διὰ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Φέρομεν πρῶτον τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Αὗται τέμνονται διότι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τούτων καὶ τῆς ΒΓ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (βλέπε ἀρχὴν ἀσκήσεως 88).



Σχ. 56.

Ἤδη τὸ σημεῖον Ο ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΒ τῆς γων Β ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν αὐτῆς ἤτοι ΟΔ = ΟΖ, ὡς κείμενον δὲ καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΓ τῆς γωνίας Γ ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ταύτης ἤτοι ΟΔ = ΟΕ. Συνεπῶς ΟΖ = ΟΔ = ΟΕ. Ἀλλὰ ἀφοῦ εἶναι ΟΖ = ΟΕ, τὸ Ο ἔχει ὡς ἐκ τούτου τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α, θὰ πρέπῃ λοιπὸν νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης, ἤτοι ἡ διχοτόμος τῆς Α διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

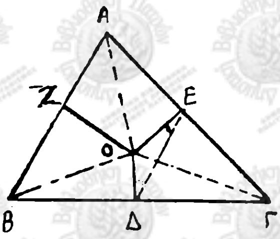
Ἐδείχθη οὕτω ἀφ' ἑνὸς μὲν ὅτι αἱ τρεῖς διχοτόμοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ἤτοι ΟΔ = ΟΖ = ΟΕ. Τὸ τελευταῖον τοῦτο τῆς ἰσότητος τῶν ἀποστάσεων τοῦ Ο ἀπὸ τῶν πλευρῶν μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τὴν ἁπλῆν παρατήρησιν ὅτι ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΟΔ, ΟΖ, ΟΕ γράψωμεν περιφέρειαν αὕτη θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἰς τὰ Ζ, Δ, Ε, διότι ἑκάστη πλευρὰ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἑκάστης τῶν ἀκτίνων ΟΔ, ΟΖ, ΟΕ.

Ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ς κ ύ κ λ ο ς τοῦ τριγώνου τὸ δὲ σημεῖον Ο κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

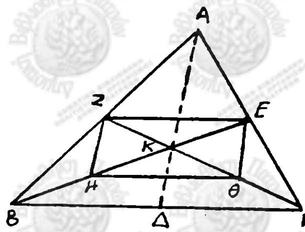
91.—Αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἀπέχον ἰσάκις τῶν κορυφῶν του.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 57) καὶ αἱ κάθετοι [1] (εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του) ΟΔ, ΟΖ, ΟΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκις ἐκ τῶν κορυφῶν ἤτοι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Φέρομεν πρῶτον τὰς καθέτους ΟΔ καὶ ΟΕ εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ. Αὗται τέμνονται εἴς τι σημεῖον Ο, διότι ἂν ἀχθῇ ἡ ΔΕ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΟΔΕ καὶ ΟΕΔ εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι μέρος ὀρθῆς γωνίας. Ἤδη τὸ σημεῖον Ο ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΔ ἥτις ἤχθη εἰς τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ θὰ πρέπῃ νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων Β καὶ Γ ἤτοι ΟΒ=ΟΓ. Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ Ο κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΕ εἰς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ θὰ εἶναι ΟΓ=ΟΑ ἤτοι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἀλλὰ ἀφοῦ ΟΑ=ΟΒ τὸ σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων Α καὶ Β τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἄρα θὰ πρέπῃ νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου ΟΖ εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΒ. Δηλαδὴ ἐδείχθη ὅτι ἀφ' ἑνὸς μὲν αἱ κάθετοι διέρχονται διὰ τοῦ



Σχ. 57.



Σχ. 58.

αὐτοῦ σημείου Ο, ἀφ' ἑτέρου ὅτι τοῦτο ἀπέχει ἰσάκις τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἤτοι ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ.

Τὸ τελευταῖον τοῦτο τῆς ἰσότητος τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ μᾶς δηλοῖ ὅτι ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέλθῃ δι' ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, τὸ δὲ τρίγωνον θὰ εἶναι ἐγγεγραμμένον.

Ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται π ε ρ ι γ ε γ ρ α μ μ έ ν ο ς κ ύ κ λ ο ς τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ, τὸ δὲ Ο εἶναι τὸ κέντρον αὐτοῦ.

Τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν αἱ μεσοκάθετοι τέμνονται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ἀφήνομεν ὡς ἄσκησιν.

92.—Αἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ ἑκάστης κορυφῆς ἴσην πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία διέρχεται δι' αὐτῆς.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 58) καὶ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ καὶ ΓΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου, ἡ ὁποία διέρχεται δι' αὐτῆς.

---

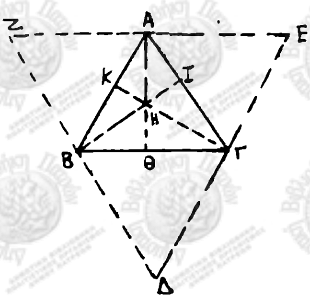
(1) Καλοῦνται συνήθως καὶ μεσοκάθετοι τοῦ τριγώνου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Σύρομεν κατ' ἀρχὰς τὰς δύο διαμέσους ΒΕ καὶ ΓΖ, αἱ ὁποῖαι προφανῶς τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον Κ (ἐντὸς τοῦ τριγώνου). Εὑρίσκομεν ἔπειτα τὰ μέσα Η καὶ Θ τῶν ΒΚ καὶ ΓΚ ἀντιστοίχως, καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΖΕ καὶ ΗΘ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς (συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ § 139). Ὁμοίως ἡ ΘΗ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΚΒ καὶ ΚΓ τοῦ τριγώνου ΚΒΓ θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ. Ἀλλὰ τότε ἂν ἀχθοῦν αἱ ΖΗ καὶ ΘΕ τὸ σχῆμα ΖΕΘΗ θὰ εἶναι παραλληλόγραμμον ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΖΕ καὶ ΘΗ ἴσας καὶ παραλλήλους, ὅτε αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΖΘ καὶ ΕΗ θὰ πρέπῃ νὰ διχοτομοῦνται εἰς τὸ Κ ἤτοι ΖΚ=ΚΘ, ἀλλὰ Θ μέσον τῆς ΓΚ (τὸ ἐλάβομεν ἀρχικῶς) ὅτε ΚΘ=ΘΓ ἄρα ΖΚ=ΚΘ= = ΘΓ δηλ. τὸ ΚΓ ἰσοῦται μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ΖΓ. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ΒΗ=ΚΗ=ΚΕ ἤτοι ΒΚ= $\frac{2}{3}$ ΒΕ.

Εὕρομεν λοιπὸν ὅτι αἱ δύο διάμεσοι ΒΕ καὶ ΓΖ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ Κ, ὥστε τὸ Κ νὰ ἀπέχῃ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους τῆς διαμέσου, τῆς ἀγομένης ἐκ τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς.

Ἐὰν ἤδη ἐργασθῶμεν ὁμοίως μεταξὺ τῶν διαμέσων ΓΖ καὶ ΑΔ εὑρίσκομεν καὶ πάλιν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν δύο τούτων διαμέσων διαιρεῖ ταύτας εἰς δύο μέρη ὧν τὸ μεγαλύτερον ἀπέχει ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὅλαι αἱ διάμεσοι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ ἀπέχοντος ἐξ ἑκάστης κορυφῆς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου.

Τὸ σημεῖον τοῦτο τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου καλεῖται κέντρον τοῦ βάρους διότι ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τὴν φυσικήν, ἂν ἐξαρτηθῇ τὸ τρίγωνον διὰ τοῦ σημείου τούτου, ἰσορροπεῖ ὁριζοντίως.



Σχ. 59.

93.— Τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 59) καὶ ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ τὰ τρία ὕψη αὐτοῦ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Η.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς. Αἱ παράλληλοι αὗται θὰ τέμνωνται εἰς τὰ Δ, Ε, Ζ (διότι τέμνονται καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τριγώνου). Ὁρίζομεν οὕτω τὸ περιγεγραμμένον τρίγωνον ΔΕΖ. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΖΒΓ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐπειδὴ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του παραλλήλους ἐκ κατασκευῆς, ἄρα θὰ εἶναι ΖΑ = ΒΓ. Ἐπίσης ὅμως καὶ τὸ ΑΕΓΒ εἶναι παραλληλόγραμμον (διὰ τὸν αὐτὸν λόγον) ὅτε ΑΕ = ΒΓ. Συνεπῶς ΖΑ καὶ ΑΕ ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὸ ΒΓ, δηλαδὴ τὸ Α εἶναι μέσον. Ὁμοίως διὰ συνδυασμοῦ τῶν παραλληλογράμμων ΑΖΒΓ, ΑΒΔΓ, ΑΒΓΕ εὑρίσκομεν ὅτι τὰ Β καὶ Γ εἶναι μέσα τῶν ΖΔ καὶ ΕΔ. Ἐπειδὴ τώρα ἡ ΑΘ εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ (ὡς ὕψος) θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον τῆς ΒΓ τὴν ΖΕ καὶ μάλιστα εἰς τὸ μέσον αὐτῆς Α. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΒΙ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον Β τῆς ΖΔ καὶ ἡ ΓΚ κάθετος εἰς τὸ μέσον Γ τῆς ΕΔ. Ἀλλ' ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 91 ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤτοι αἱ ΑΘ, ΒΙ, ΓΚ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἀλλὰ αὐταὶ εἶναι συγχρόνως τὰ ὕψη τοῦ δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ. Ἄρα τὰ ὕψη παντὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Ἀφήνομεν ὡς ἄσκησιν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ ὕψη θὰ τέμνωνται ἐκτὸς (ἀμβλυγώνιον).

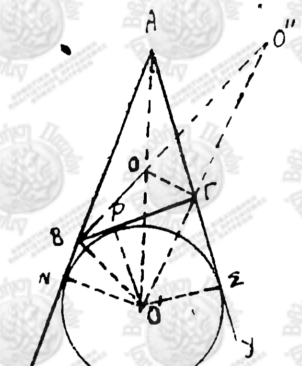
Ἡ ἀνωτέρω κομψοτάτη ἀπόδειξις ἀνήκει εἰς τὸν μέγαν γερμανὸν μαθηματικὸν GAUSS.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.— Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου καλεῖται συνήθως ὀ ρ θ ό κ ε ν τ ρ ο ν τοῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ. Τοῦτο εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ σχήματος, εἰς ἀμβλυγώνιον ἐκτὸς τοῦ σχήματος καὶ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον συμπίπτει μὲ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας.

2.— Ἂν συνδέσωμεν τοὺς πόδας Κ, Ι, Θ τῶν ὑψῶν ἑνὸς τριγώνου τὸ προκύπτον τρίγωνον ΚΙΘ καλεῖται συνήθως ὀ ρ θ ι κ ὸ ν τ ρ ί γ ω ν ο ν ἢ ὀρθοκεντρικόν.

94.— Αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας αὐτοῦ, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἐφεξῆς μὲ καμμίαν ἐκ τῶν δύο ὡς ἄνω ἐξωτερικῶν γωνιῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 60

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΟ΄, ΓΟ΄ αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν αὐτοῦ, ὡς καὶ ΑΟ΄ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης ἐσωτερικῆς γωνίας Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι πᾶσαι αὐταὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο΄ (Σχ. 60).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Εἴδομεν ὅτι αἱ διχοτόμοι ΒΟ΄ καὶ ΓΟ΄ τέμνονται (ἄσκ. 88). Τὸ σημεῖον Ο΄ ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΒΟ΄ θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς Βx καὶ ΒΓ τῆς γωνίας xΒΓ ἤτοι Ο΄Ν = = Ο΄Ρ, ὁμοίως τὸ Ο΄ ὡς κείμενον ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΓΟ΄ τῆς γωνίας ΒΓy θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν αὐτῆς ΒΓ καὶ

Γy ἤτοι Ο'Ρ=Ο'Σ.Συνεπῶς τὸ Ο' ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς Ax καὶ Ay καὶ ὡς ἐκ τούτου θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΟ' τῆς γωνίας Α. Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς τρίτης ἐσωτερικῆς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.— Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Ο' ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν Bx, ΒΓ, Γy ἕπεται ὅτι ἂν μὲ κέντρον τοῦτο καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἀποστάσεων Ο'Ν, Ο'Ρ, Ο'Σ γραφῇ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτεται αὐτῶν, δηλαδὴ μιᾶς πλευρᾶς (τῆς ΒΓ) καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο ἄλλων.

2.— Ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου, (ἐπειδὴ περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γων Α).

3.— Ἐπειδὴ τὸ αὐτὸ θὰ συμβῇ ἂν λάβωμεν δύο διχοτόμους δύο ἄλλων ἐξωτερικῶν γωνιῶν καὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς τρίτης θὰ ἔχωμεν καὶ δύο ἄλλους παρεγγεγραμμένους κύκλους εἰς τὴν γωνίαν Β ὁ εἷς, καὶ εἰς τὴν γωνίαν Γ ὁ ἄλλος.

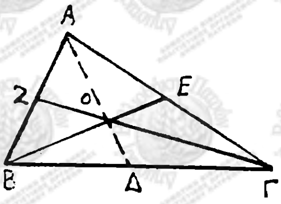
4.— Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΟ' περιέχει καὶ τὸ Ο δηλαδὴ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου .Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη κορυφὴ τοῦ τριγώνου θὰ κεῖται πάντοτε ἐπ' εὐθείας μετὰ δύο κέντρων παρεγγεγραμμένων κύκλων.

5.— Ἐπειδὴ ἡ γωνία ΟΒΟ' εἶναι ὀρθὴ ὡς καὶ ἡ ΟΓΟ' (διότι σχηματίζονται ὑπὸ διχοτόμων δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν), ἕπεται ὅτι ἂν μὲ κέντρον τὸ μέσον τῆς ΟΟ' καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΟΟ' γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέρχεται διὰ τῶν δύο πλησιεστέρων κορυφῶν Β καὶ Γ. Δηλαδὴ τὸ σχῆμα ΟΒΟ'Γ εἶναι τετράπλευρον πάντοτε ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

95.—Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι, εἰς τὴν μικροτέραν ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα διάμεσος.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ΑΓ>ΑΒ (Σχ. 61). Ἔστωσαν δὲ καὶ αἱ διάμεσοι αὐτοῦ ΒΕ, ΓΖ, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς ταύτας. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΓΖ>ΒΕ δηλαδὴ ὅτι εἰς τὴν μικροτέραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ ἡ μεγαλυτέρα διάμεσος.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Βοηθούμεθα πρὸς τοῦτο σύροντες καὶ τὴν τρίτην διάμεσον ΑΔ ἥτις ὡς γνωστὸν θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου τομῆς Ο τῶν δύο πρώτων. Ἐξετάζομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ΑΔ κοινήν, τὴν ΒΔ=ΔΓ καὶ τὰς τρίτας πλευράς των ΑΓ καὶ ΑΒ ἀνίσους ἐξ ὑποθέσεως, ὅτε ἐπειδὴ ΑΓ>ΑΒ θὰ εἶναι καὶ γων ΑΔΓ>γωνΑΔΒ. Ἀλλὰ τώρα ἐξετάζοντες τὰ τρίγωνα ΟΒΔ καὶ ΟΓΔ εὑρίσκομεν ὅτι ἔχουν τὴν ΟΔ κοινήν, ΒΔ=ΔΓ καὶ γωνΟΔΓ>γωνΟΔΒ (ὡς ἐδείχθη εὐθὺς ἀνωτέρω), ὅτε θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι ΟΓ>ΟΒ. Ἀλλὰ ΟΓ καὶ ΟΒ εἶνε τμήματα τῶν δύο διαμέσων ΓΖ καὶ ΒΕ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μάλιστα ἴσα πρὸς τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους τῶν διαμέσων.



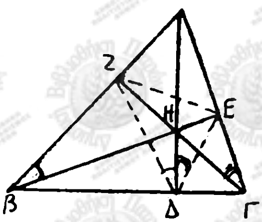
Σχ. 61

Ἐπειδὴ λοιπὸν εὑρέθη ὅτι ΟΓ > ΟΒ θὰ εἶναι καὶ ΓΖ > ΒΕ διότι τὰ ΓΖ καὶ ΒΕ προκύπτουν ἐκ τῶν ΟΓ καὶ ΟΒ μὲ πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ $\frac{3}{2}$.

96.— Τὰ ὕψη ἑνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν τοῦ δοθέντος.

Ἔστω τριγ ΑΒΓ καὶ Δ, Ε, Ζ οἱ πόδες τῶν ὑψῶν του ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (δηλαδὴ τὸ ὀ ρ θ ι κ ό ν). Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ ὕψη διχοτομοῦν τὰς γωνίας τοῦ ὀρθικοῦ. Π.χ. τὸ ὕψος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΖΔΕ (Σχ. 62).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Διὰ νὰ δείξωμεν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΖΔΗ καὶ ΗΔΕ προσπαθοῦμεν νὰ μεταφέρωμεν ταύτας εἰς ἄλλας γωνίας πρὸς τὰς ὁποίας αὗται νὰ εἶναι ἴσαι: Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΗΖΒΔ ἔχει δύο ἀπέναντι γωνίας ὀρθὰς τὴν ΗΔΒ καὶ ΗΖΒ (λόγῳ τῶν ὑψῶν) Ἀλλὰ τότε δυνάμεθα νὰ γράψωμεν περιφέρειαν μὲ διάμετρον τὴν ΗΒ ὅτε ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τῶν σημείων Ζ καὶ Δ. (§ 152 πορίσματα). Ὥστε τὸ ΗΖΒΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον αἱ δὲ γωνίαι ΖΒΗ καὶ ΖΔΗ θὰ εἶναι ἴσαι ἐπειδὴ θὰ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΖΗ τοῦ κύκλου τούτου. Διὰ τὸν αὐτὸν



Σχ. 62.

λόγον ἡ μὲ διάμετρον τὴν ΗΓ γραφομένη περιφέρεια θὰ διέλθῃ διὰ τῶν κορυφῶν Δ καὶ Ε, τὸ δὲ τετράπλευρον ΗΔΓΕ εἶναι συνεπῶς ἐγγράψιμον, ὅτε ἡ γων ΗΔΕ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν γων ΗΓΕ, διότι θὰ βαίνουν εἰς εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ΗΕ. Ὥστε αἱ περὶ τὸ Δ ὑπὸ ἐξέτασιν γωνίαι μετεφέρθησαν εἰς ἄλλας θέσεις. Ἂν δὲ εἰς τὰς θέσεις ταύτας εἶναι ἴσαι, τότε θὰ εἶναι ἡ ΑΔ διχοτόμος τῆς γωνίας ΖΔΕ. Ἀλλὰ εἶναι εἰς τὰς νέας των θέσεις αἱ γωνίαι ΖΒΗ καὶ ΖΓΕ ἴσαι ἐπειδὴ εἶναι ὀξεῖαι καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους ἐκ κατασκευῆς. Ἄρα καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἴσαι γωνίαι ΖΔΗ καὶ ΗΔΕ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἄρα τὸ ὕψος ΑΔ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΖΔΕ τοῦ ὀρθικοῦ. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι καὶ τὰ δύο ἄλλα ὕψη ἔχουν τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἤτοι τὸ ΒΕ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν ΔΕΖ καὶ τὸ ΓΖ τὴν γωνίαν ΕΖΔ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.— Ἐξετάζοντες τὴν περίπτωσιν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀρθικὸν αὐτοῦ ἐκφυλίζεται εἰς εὐθεῖαν γραμμὴν καὶ συνεπῶς ἡ πρότασις δὲν ἀληθεύει ἐκτὸς ἂν δεχθῶμεν ὅτι αἱ γωνίαι ἑνὸς τοιούτου ὀρθικοῦ τριγώνου εἶναι μηδενικαί.

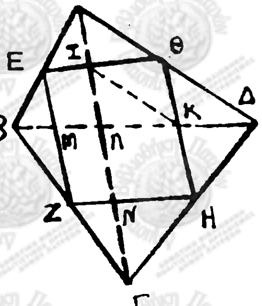
2.— Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀμβλυγωνίου τριγώνου τὸ ὀρθικὸν ἔχει μέρος καὶ ἐκτὸς τοῦ σχήματος, ἐπειδὴ τὸ ὀρθόκεντρον εἶναι ἐκτὸς τοῦ σχήματος. Ἡ πρότασις τότε ἀποδεικνυομένη μᾶς δίδει ὅτι ἓν τῶν ὑψῶν (τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἀμβλείας γωνίας) διχοτομεῖ μίαν ἐσωτερικὴν γωνίαν τοῦ ὀρθικοῦ, τὰ δὲ δύο ἄλλα ὕψη διχοτομοῦν ἐξωτερικὰς γωνίας τοῦ ὀρθικοῦ.

3.— Ἐδείχθη ὅτι τὰ τετράπλευρα ΖΒΔΗ, ΗΔΓΕ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον. Ἀλλὰ εὐκόλως δεικνύεται ὅτι καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΖΗΕ εἶναι ἐγγράψιμον μὲ διάμετρον τὴν ΑΗ. Ὁμοίως καὶ τὸ ΒΖΕΓ μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ, τὸ ΑΖΔΓ μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ καὶ τὸ ΑΕΔΒ μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸ ἑξῆς σπουδαῖον συμπέρασμα διὰ τὸ τρίγωνον.

«Οἱονδήποτε τῶν τετραπλεύρων τῶν σχηματιζομένων τῇ βοηθείᾳ τῶν ὑψῶν τριγώνου εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον».

97.—Τὸ παραλληλόγραμμον ὅπερ σχηματίζεται ὅταν ἑνοῦμεν δι' εὐθειῶν τὰ μέσα τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (Σχ. 63).



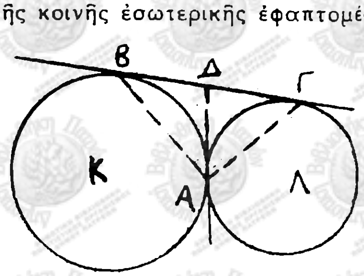
Σχ. 63.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐνθυμούμεθα ὅτι (ἄσκ. 74) τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι κατ' ἀπέναντι ζεύγη παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου. Ὥστε ἡ ΕΘ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ, ἀγομένη δὲ ἐκ τοῦ μέσου Θ τῆς πλευρᾶς ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΔΛ θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ΑΛ, δηλαδὴ τὸ Ι μέσον τῆς ΑΛ. Ὁμοίως ἐπειδὴ ΘΚ ∥ ΑΛ θὰ εἶναι Κ μέσον τῆς ΛΔ. Ἄρα ἂν σύρωμεν βοηθητικῶς τὴν ΙΚ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΙΘΚ ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΛΔ, ὅτε (κατὰ τὴν ἄσκ. 72) τοῦτο θὰ εἶναι τὸ $^1/_4$ τοῦ τριγώνου ΑΛΔ. Ἀλλὰ τότε ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΙΛΚ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ΙΘΚ, τὸ παραλληλόγραμμον ΙΛΚΘ θὰ εἶναι τὸ $^1/_2$ τοῦ τριγώνου ΑΔΛ. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΙΕΜΛ εἶναι τὸ $^1/_2$ τοῦ τριγώνου ΑΒΛ, τὸ ΜΖΝΛ τὸ $^1/_2$ τοῦ τριγώνου ΒΛΓ καὶ τὸ ΝΗΚΛ τὸ $^1/_2$ τοῦ τριγ. ΓΛΔ. Ἄρα τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

98.—Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ἀχθῇ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη εἰς τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἔστωσαν αἱ περιφέρειαι Κ, Λ (Σχ. 64) ἐφαπτόμεναι ἀλλήλων ἐκτὸς εἰς τὸ Α. Ἔστω ἀκόμη ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἂν ἀχθοῦν αἱ ΒΑ καὶ ΓΑ ἡ σχηματιζομένη γωνία ΒΑΓ=1 ὀρθ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Βοηθούμεθα διὰ τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης ΑΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι ΔΑ==ΔΒ, διότι εἶναι ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου ἐκτὸς πρὸς τὴν περιφέρειαν Κ, ὁμοίως εἶναι ΔΑ = ΔΓ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ πρὸς τὴν περιφέρειαν Λ. Συνεπῶς ἔχομεν ὅτι ΔΒ==ΔΓ=ΔΑ. Δηλαδὴ τὸ Δ μέσον τῆς ΒΓ καὶ ἡ ΑΔ διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 133) τότε ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΑΓ θὰ πρέ-



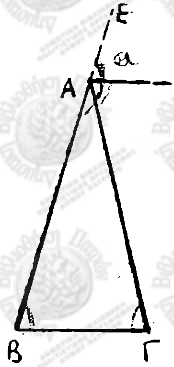
Σχ. 64.

πη νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὴν γωνίαν Α, ἐπειδὴ ἡ ἐξ αὐτῆς ἀγομένη νη διάμεσος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Εὐκόλως φαίνεται ὅτι ἡ μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γραφομένη περιφέρεια διέρχεται διὰ τοῦ Α.

99.— Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 65.

1) **Εὐθύ.** Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 65) εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας ΕΑΓ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνΒ=γωνΓ.

Ἀλλὰ γων Β=γων ΕΑΔ ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ μὲ τέμνουσαν τὴν ΕΑΒ. Ὁμοίως γων Γ = =γων ΔΑΓ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν αὐτῶν παραλλήλων μὲ τέμνουσαν τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ ΑΔ διχοτόμος τῆς γωνΕΑΓ θὰ εἶναι γωνΕΑΔ=γωνΔΑΓ, ὅτε καὶ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων θὰ εἶναι ἴσα ἤτοι γωνΒ=γωνΓ καὶ τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

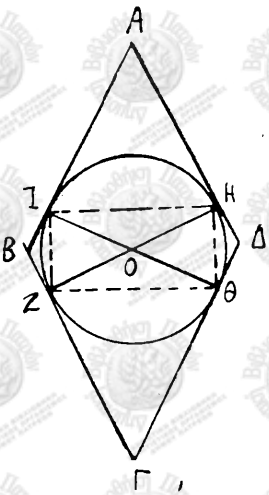
2) **Ἀντίστροφον.** «Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τῆς κορυφῆς εἶναι παράλληλος τῇ βάσει».

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι γων Γ=γων ΔΑΓ. Πράγματι ἔχομεν γωνΒ=γωνΓ ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς ΑΒΓ, ἀλλὰ καὶ γων ΕΑΔ=γωνΔΑΓ λόγῳ τῆς διχοτόμου. Ἀλλὰ ἡ ἐξωτερικὴ γωνΕΑΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ (§ 120) ἤτοι ἐξωτερικὴ γωνΕΑΓ=γωνΒ+γωνΓ ἢ 2 γωνΔΑΓ=2γωνΓ (δυνάμει τῶν ἄνω ἰσοτήτων) ἤτοι γωνΔΑΓ=γωνΓ ὅτε αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ παράλληλοι.

100.— **Πᾶν εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένον παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ πᾶν εἰς κύκλον περιγεγραμμένον εἶναι ρόμβος.**

1) Ἔστω κύκλος Ο καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτὸν παραλληλόγραμμον ΖΘΗΙ (Σχ. 66). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς. Πράγματι τὸ ζεῦγος τῶν γωνιῶν ΗΙΖ καὶ ΗΘΖ εἶναι ζεῦγος παραπληρωματικῶν γωνιῶν ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΖΘΗΙ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (§ 151). Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι καὶ ἴσαι ἐπειδὴ τὸ σχῆμά μας εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παραλληλόγραμμον.



Σχ. 66.

Δηλαδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΗΙΖ, ΖΘΗ εἶναι ὀρθή. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων γωνιῶν ΙΖΘ καὶ ΙΗΘ εἶναι ὀρθὴ καὶ συνεπῶς τὸ ΖΘΗΙ εἶναι ὀρθογώνιον.

2) Ἔστω ἤδη τὸ περιγεγραμμένον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ρόμβος.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας.

Γνωρίζομεν ὅτι ΑΙ = ΑΗ ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου ἐκτὸς πρὸς περιφέρειαν. Ἀλλὰ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ εἶναι καὶ ΒΙ = ΒΖ, ΔΘ = ΔΗ, ΓΘ = ΓΖ. Ἀθροίζοντες ὅλας τὰς ἄνω ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν.

ΑΙ + ΒΙ + ΔΘ + ΓΘ = ΑΗ + ΒΖ + ΔΗ + ΓΖ

ἢ ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ (1)

ἀλλὰ λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον ἔχομεν ΑΒ = ΓΔ, καὶ ΑΔ = ΒΓ ὅτε ἡ ἰσότης (1) γίνεται

2 ΑΒ = 2 ΑΔ ἢ ΑΒ = ΑΔ.

Δηλαδὴ τὸ παραλληλογράμμον ΑΒΓΔ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, ἄρα εἶναι ρόμβος, καθ' ὅτι θὰ ἔχῃ πάσας ἴσας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ :

1.— Δυνατὸν τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον νὰ εἶναι καὶ τετράγωνον, ὡς καὶ ὁ περιγεγραμμένος ρόμβος δυνατὸν νὰ εἶναι τετράγωνον.

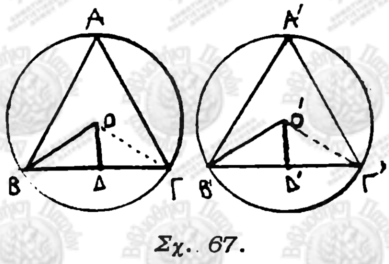
2.— Ἐδείχθη εἰς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἡ σχέσις (1) ἥτις εἶναι λίαν χρήσιμος καὶ διατυπώνει τὴν ἑξῆς πρότασιν: «Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων».

Διὰ αὐτὴν θὰ ὁμιλήσωμεν καὶ πάλιν κατωτέρω.

101.—Ἐὰν εἰς δύο περιφερείας ὑπάρχουν δύο ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα, αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ἴσαι.

Ἔστωσαν δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' εἰς τὰς ὁποίας εἶναι ἐγγεγραμμένα ἀντιστοίχως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (Σχ. 67). Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχουν ἴσας ἀκτίνας. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΔ καὶ Ο'Δ' πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ Β'Γ'. Αὗται ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ μέσα τούτων Δ καὶ Δ'. Σύρομεν τὰς ἀκτίνας ΟΒ καὶ Ο'Β' καὶ συγκρίνομεν τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΔ, Ο'Β'Δ'. Ταῦτα ἔχουν ΒΔ=Β'Δ' ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ἐξ ὑποθέσεως πλευρῶν ΒΓ καὶ Β'Γ'.

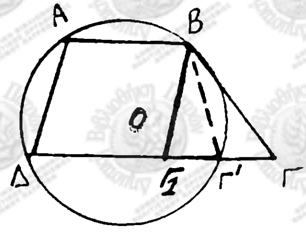


Σχ. 67.

'Επίσης ἔχουν γωνΒΟΔ = γων Β'Ο'Δ' διότι εἶναι ἡμίση τῶν ἴσων ἐπικέντρων γωνιῶν ΒΟΓ καὶ Β'Ο'Γ'. Εἶναι δὲ αἱ ἐπίκεντροι ΒΟΓ καὶ Β'Ο'Γ' ἴσαι, διότι εἶναι διπλάσιαι τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων ἐγγεγραμμένων γωνιῶν Α καὶ Α'. Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ἴσα, ὅτε καὶ ΟΒ=Ο'Β'. Δηλαδὴ οἱ κύκλοι ἔχοντες τὰς ἀκτίνας αὐτῶν ἴσας εἶναι ἴσοι.

102.—**'Εὰν τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον.**

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου δύο ἀπέναντι γωνίαι αἱ Α καὶ Γ ἔστω ὅτι εἶναι παραπληρωματικαὶ (Σχ. 68). Θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ τετραπλεύρου διέρχεται περιφέρεια κύκλου ἢ ἐν ἄλλοις λόγοις τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.



Σχ. 68.

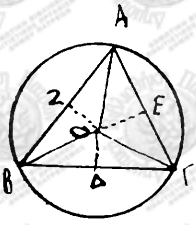
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Θὰ δείξωμεν τοῦτο διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τριῶν σημείων μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας διέρχεται περιφέρεια κύκλου. (Τοῦτο γίνεται εὐκόλως διότι τὰ τρία σημεῖα ὁρίζουν τρίγωνον, ὅτε ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 91). Θεωροῦμεν πρὸς τοῦτο ὅτι ἐγράφη ἡ περιφέρεια Ο ἡ διερχομένη διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Δ, καὶ ἔστω ὅτι αὕτη δὲν διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Γ. Εἶναι φανερὸν τότε ὅτι ἡ περιφέρεια θὰ τμήσῃ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς σημεῖόν τι Γ', τὸ ὁποῖον θὰ κεῖται μεταξὺ Δ καὶ Γ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΔΓ ἂν τὸ Γ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας, ὡς δεικνύει τὸ σχῆμα, εἰς τὴν θέσιν $Γ_1$. Σύρομεν τότε τὴν ΒΓ' ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως συμπληρώνει τὸ τετράπλευρον ΑΒΓ'Δ τὸ ὁποῖον ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο θὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι γωνίας παραπληρωματικὰς (§ 151) ἤτοι γωνΑ + γων ΒΓ'Δ=2 ὀρθ. 'Αλλὰ ἐδόθη ἐξ ὑποθέσεως ὅτι γων Α + γων Γ = 2 ὀρθ. Συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας λαμβάνομεν εὐκόλως γωνΒΓ'Δ=γωνΓ. 'Αλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον διότι ἡ γωνΒΓ'Δ ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΒΓ'Γ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνΓ. Εἰς τὸ ἄτοπον κατελήξαμεν δεχθέντες ὅτι ἡ περιφέρεια δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Γ ἢ $Γ_1$, ἄρα δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ περιφέρεια διέρχεται διὰ τῶν Γ ἢ $Γ_1$ καὶ συνεπῶς ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ—Τῆς προτάσεως ταύτης θὰ δώσωμεν συμπληρωματικά τινα περαιτέρω.

103.—'Εὰν ἐκ σημείου τινὸς ἄγωνται εἰς περιφέρειαν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον τῆς περιφερείας.

Ἔστω περιφέρεια Ο καὶ ὅτι ἐκ τοῦ σημείου Ο ἄγονται τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἴσαι (Σχ. 69). Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κέντρον τῆς περιφερείας.

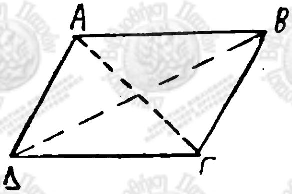
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 'Επειδὴ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι χορδαὶ τοῦ κύκλου. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἂν εἰς τὰ μέσα τῶν βάσεών των ἀχθοῦν αἱ κάθετοι ΖΟ, ΔΟ, ΕΟ ἀντιστοίχως, αὐταὶ ὀφείλουν νὰ διέλθουν διὰ τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων ἤτοι διὰ τοῦ Ο. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ βάσεις εἶναι καὶ χορδαί, αἱ κάθετοι αὗται (§ 148) ὀφείλουν νὰ διέλθουν καὶ διὰ τοῦ κέντρου. Ἀλλὰ διὰ νὰ συμφωνήσουν ἀμφότερα τὰ ἀνωτέρω δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τὸ ὁποῖον δηλαδὴ συμπίπτει μὲ τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν τριγώνων.



Σχ. 69.

104.— Ἐκ τῶν δύο διαγωνίων παντὸς παραλληλογράμμου, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν αὐτοῦ.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 70) καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΒΔ καὶ ΑΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διαγώνιος ΒΔ ἡ συνδέουσα τὰς κορυφὰς τῶν μικροτέρων γωνιῶν εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἤτοι ὅτι ΒΔ>ΑΓ.



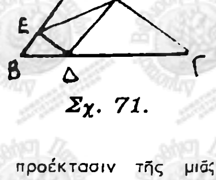
Σχ. 70.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Πρὸς τοῦτο συγκρίνομεν τὰ τρίγωνα ΒΓΔ καὶ ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ΔΓ κοινήν, τὴν ΑΔ=ΒΓ (ὡς ἀπέναντι πλευρὰς) καὶ τὴν γων ΒΓΔ> γωνΑΔΓ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα τότε θὰ πρέπῃ καὶ ΒΔ>ΑΓ (κείμεναι ἀπέναντι ἀνίσων γωνιῶν εἰς τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας ἀνίσους).

105.—Πᾶσα πλευρὰ τοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος σημείου αὐτῆς ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ σημεῖόν τι τῆς πλευρᾶς ΒΓ (Σχ. 71). Φέρομεν ἐκ τοῦ Δ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς καὶ συνδέομεν τοὺς πόδας τούτων διὰ τῆς ΕΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΒΓ>ΕΖ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Παρατηροῦμεν ὅτι ΒΔ>ΕΔ διότι ἡ ΒΔ εἶναι ὑποτείνουσα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΕΔ, ὁμοίως ΔΓ>ΔΖ διότι εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΖΓ. Προσθέτοντες τὰς ἀνισότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΒΔ+ΔΓ>ΔΕ+ΔΖ ἢ ΒΓ>ΔΕ+ΔΖ. Ἀλλὰ ΔΕ+ΔΖ>ΕΖ διότι εἶναι σχέσις τεθλασμένης μὲ εὐθεῖαν ἥτις ἔχει τὰ αὐτὰ πέρατα. Ἀφοῦ λοιπὸν ΒΓ>ΔΕ+ΔΖ εἶναι δὲ ΔΕ+ΔΖ>ΕΖ θὰ εἶναι κατὰ μείζονα λόγον ΒΓ>ΕΖ.



Σχ. 71.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ὅταν ἡ μία τῶν καθέτων συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς μιᾶς πλευρᾶς.

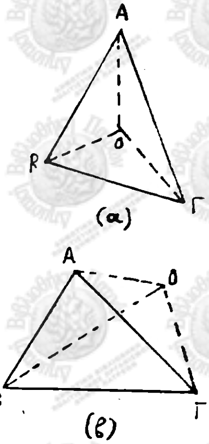
106.—Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἀγομένων ἔκ τινος σημείου ἐντὸς τριγώνου μέχρι τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 72) καὶ σημεῖον Ο ἐντὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ πρὸς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

Θὰ δείξωμεν ὅτι :

1) $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$ καὶ ὅτι

2) $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ>\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ}{2}$.



Σχ. 72.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — 1) Αἱ τεθλασμέναι γραμμαὶ ΒΑΓ καὶ ΒΟΓ ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα ὅτε

$$ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΑΓ$$

Ὁμοίως $ΟΒ+ΟΑ<ΑΓ+ΓΒ$

$$ΟΑ+ΟΓ<ΑΒ+ΒΓ$$

ἀθροίζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$2.ΟΑ+2.ΟΒ+2.ΟΓ<2.ΑΒ+2.ΒΓ+2.ΓΑ$$

ἢ ἁπλοποιοῦντες διὰ 2 λαμβάνομεν

$$ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$$

2) Ἡ ΒΟΓ εἶναι τεθλασμένη καὶ ἐξεταζομένη μὲ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ δίδει

$$ΟΒ+ΟΓ>ΒΓ$$

ὁμοίως δὲ $ΟΑ+ΟΒ>ΑΒ$

$$ΟΑ+ΟΓ>ΑΓ$$

ἢ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$2.ΟΑ+2.ΟΒ+2.ΟΓ>ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$$

ἢ $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ>\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ}{2}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἂν τὸ σημεῖον Ο ληφθῇ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ὡς εἰς τὸ σχῆμα 72 β θὰ ἔχωμεν μόνον $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ>\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ}{2}$ ὡς εὐκόλως δεικνύεται.

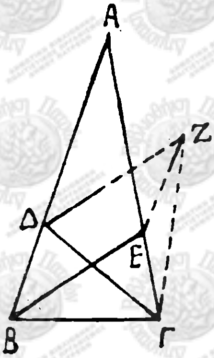
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Α'.

Ἐὰν δύο διχοτόμοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ δύο διχοτόμοι ΒΕ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι (Σχ. 73). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, ἤτοι γωνΒ=γωνΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— (Μὲ τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς). Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι γωνΒ>γωνΓ, ἀλλὰ τότε καὶ τὰ ἡμίση αὐτῶν θὰ εἶναι ἄνισα ἤτοι γωνΕΒΓ>γωνΔΓΒ. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔχουν δύο πλευρὰς ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον (δηλ. ΒΓ κοινήν, ΒΕ=ΔΓ ἐξ ὑποθέσεως καὶ γωνΕΒΓ>γωνΔΓΒ), ὅτε θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας πλευρὰς ἀνίσους ἤτοι (α) ΕΓ>ΔΒ. Τούτου τεθέντος φέρομεν ἐκ τοῦ Δ τὴν ΔΖ παράλληλον τῇ ΒΕ καὶ τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΒΔ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΒΕΖΔ, εἰς τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ΕΒ=ΔΖ καὶ γωνΔΒΕ=γωνΔΖΕ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔΖΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ΔΖ=ΔΓ=ΒΕ, ὅτε γων ΔΖΓ=γων ΔΓΖ (1). Ἀλλὰ ἐπειδὴ εἶναι γωνΔΖΕ>γωνΔΓΕ διὰ νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἰσότης (1) θὰ πρέπῃ γωνΕΖΓ<γωνΕΓΖ, ὅτε ἐκ τοῦ τριγώνου ΕΖΓ ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι ΕΖ>ΕΓ ἢ ΔΒ>ΕΓ. Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἀντιβαίνει εἰς τὴν ἀνισότητα (α). Εἰς τὰ ἀσυμβίβαστα ταῦτα συμπεράσματα ἐφθάσαμεν δεχθέντες τὸ ἄνισον τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Ὁμοίως φθάνομεν ἂν δεχθῶμεν γωνΓ>γωνΒ. Ἄρα δέον νὰ εἶναι γωνΒ=γωνΓ.



Σχ. 73.

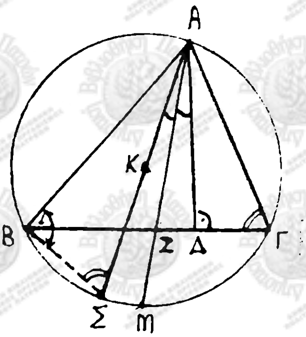
Ἡ ἀπόδειξις αὕτη ἀνήκει εἰς τὸν μηχανικὸν DESCULE (Γάλλον), δημοσιευθεῖσα εἰς τὸ J. M. E. 1880 σελ. 538). Ὑπάρχουν σήμερον παρὰ πολλαὶ ἀποδείξεις τῆς αὐτῆς προτάσεως, μιὰ τῶν ὁποίων λίαν ἐνδιαφέρουσα (καὶ οὐχὶ διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς) εἶναι ἡ τοῦ THEBAULT.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Β'.

Ἡ διχοτόμος γωνίας τριγώνου εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Σχ. 74). Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΖΜ ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΜΓ, τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμετρον ΑΚΣ. Θὰ δείξωμεν ὅτι γων ΔΑΖ= =γων ΜΑΣ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. —Ἐδείξαμεν (εἰς τὴν 22 συμπλ. ἄσκησιν) ὅτι ἡ διχοτόμος εὑρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς ἐν σχέσει πρὸς τὸ ὕψος. Ἔχει ὅμως θέσιν πρὸς τὸ μέρος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς ἐν σχέσει πρὸς τὴν διάμετρον ΑΣ. Πράγματι ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου ΑΓ, τὸ δὲ τόξον ΒΜ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ τόξον ΜΓ, ἡ διάμετρος ΑΚΣ, ὁρίζουσα ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἴσα τόξα (ἡμιπεριφερείας), θὰ τμήσῃ τὸ τόξον ΒΓ μεταξὺ Β καὶ Μ. Δηλαδὴ ἡ διχοτόμος κεῖται μεταξὺ ὕψους καὶ διαμέτρου. Σύρομεν τώρα



Σχ. 74.

τὴν ΒΣ καὶ συγκρίνομεν τὰς γωνίας τῶν τριγώνων ΑΔΓ καὶ ΑΒΣ. Ταῦτα ἔχουν τὴν γων Δ = 1 ὀρ = γων ΑΒΣ (ὡς ἐγγεγρ. εἰς ἡμικύκλιον). Ἐπίσης γων Γ = γων Σ (ἐπειδὴ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ). Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας γωνίας αὐτῶν ἴσας ἤτοι γων ΒΑΣ = γων ΔΑΓ. Ἀλλὰ γων ΜΑΒ = γων ΜΑΓ (λόγῳ τῆς διχοτόμου) ὅτε γων ΜΑΔ = = γων ΜΑΣ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.— Τὸ μέγεθος ἑκάστης τῆν γωνιῶν τούτων ΜΑΔ καὶ ΜΑΣ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων ἤτοι $\frac{\Gamma - B}{2}$ (ἀσκ. 26 συμπλ). Ὅτε ἡ γωνία ΣΑΔ = γων Γ — γων Β.

2.— Αἱ εὐθεῖαι ΑΣ καὶ ΑΔ καλοῦνται συνήθως ἰσογώνιοι εὐθεῖαι.

3.— Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γων Α σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὸ ὕψος καὶ τὴν διάμετρον.

4.—Τὸ θεώρημα τοῦτο καλεῖται θεώρημα τῶν ἰσογωνίων εὐθειῶν.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Γ'.

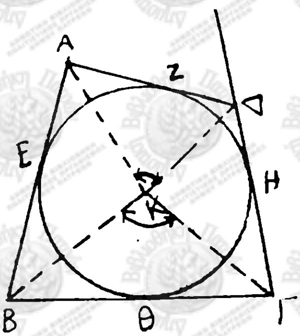
Εἰς πᾶν τετράπλευρον περιγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων :

Καὶ ἀντιστρόφως :

Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, τὸ τετράπλευρον δύναται νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον. (Θεώρημα τοῦ **ΡΙΤΟΤ**).

Τὸ εὐθύ. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 75) περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Κ. Θὰ δείξωμεν ὅτι

ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.



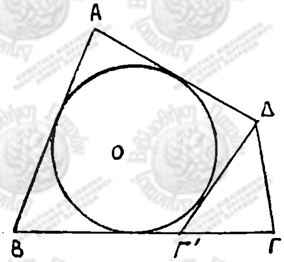
Σχ. 75.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔχομεν τὰς ἑξῆς προφανεῖς ἰσότητας ΑΖ = ΑΕ, ΔΖ = ΔΗ, ΓΘ = = ΓΗ, ΒΘ = ΒΕ, τὰς ὁποίας ἀθροίζοντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν ΑΖ + ΔΖ + ΓΘ + ΒΘ = = ΑΕ + ΔΗ + ΓΗ + ΒΕ ἢ ΑΔ + ΒΓ = ΑΒ + ΔΓ.

Τὸ ἀντίστροφον.— Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι (1), ΑΔ + ΒΓ = ΑΒ + ΔΓ (Σχ. 76). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο δύναται νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— (Διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὑπάρχει κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν πλευρῶν ΑΔ, ΑΒ, ΒΓ. Τούτου τὸ κέντρον Ο' κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Β. Ἔστω δὲ ὅτι ἡ τετάρτη πλευρὰ ΔΓ δὲν ἐφάπτεται τούτου. Σύρομεν τότε τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ' ἥτις ἀποτελεῖ τὸ νέον τετράπλευρον ΑΔΓ'Β. Δυνάμει τοῦ εὐθέως θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν ΑΔ + ΒΓ' = ΑΒ + ΔΓ'. Ἀφαιροῦντες ἤδη τὰ μέλη ταύτης ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (1) λαμβάνομεν ΒΓ — ΒΓ΄ = ΔΓ — ΔΓ΄ ἢ ΓΓ΄= ΔΓ — ΔΓ΄. Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης εἶναι ψευδής, διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΓΓ΄ δὲν δύναται νὰ εἶναι ΓΓ΄= ΔΓ — ΔΓ΄ διότι γνωρίζομεν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ΓΓ΄>ΔΓ—ΔΓ΄ (§ 71). Εἰς τὸ ἄτοπον τοῦτο κατελήξαμεν δεχθέντες ὅτι ὁ κύκλος Ο δὲν ἐφάπτεται τῆς τετάρτης πλευρᾶς ΔΓ. Ἄρα δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἐφάπτεται ταύτης καὶ ὅτι τὸ τετράπλευρον δύναται νὰ περιγραφῇ περὶ κύκλον.



Σχ. 76.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

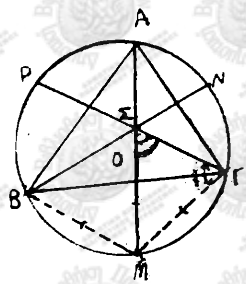
1.— Ἡ πρότασις αὕτη τοῦ ἀντιστρόφου δεικνύεται καὶ χωρὶς τὴν μέθοδον τῆς πλαγίας ἀποδείξεως (ἀτόπου ἀπαγωγῆς). [Οἱ βουλόμενοι εὑρίσκουν τοῦτο εἰς τὸ Exercices de Géométrie par F. G. M. σελὶς 317 ἔκδοσις 7η καὶ ἀνήκει εἰς τὸν FRICKE καὶ ἄλλη εἰς τὸν L. GÉRARD].

2.— Εἰς τὸ (σχ. 75) τοῦ εὐθέως θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ γωνίαι ΑΚΔ καὶ ΒΚΓ εἶναι παραπληρωματικαί. Πράγματι γων ΑΚΔ + γων $\frac{Α}{2}$ + γων $\frac{Δ}{2}$ = 2 ὀρ. (τρίγωνον ΑΚΔ). καὶ γων ΒΚΓ + γων $\frac{Β}{2}$ + γων $\frac{Γ}{2}$ = 2ὀρθ. (τριγ. ΒΚΓ). Ἀθροίζοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας καὶ παρατηροῦντες ὅτι γων $\frac{Α}{2}$ + γων $\frac{Β}{2}$ + γων $\frac{Γ}{2}$ + γων $\frac{Δ}{2}$ = =2ὀρθ. εὑρίσκομεν εὐκόλως τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Δ΄.

Ἐὰν τρίγωνόν τι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ μέσον τοῦ τυχόντος ἐκ τῶν τριῶν τόξων, εἰς τὰ ὁποῖα ὁ κύκλος διαιρεῖται ὑπὸ τῶν πλευρῶν, ἀπέχει ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ ἐκ τῶν δύο παρακειμένων κορυφῶν.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο (Σχ. 77) καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ. Γνωστὸν ὅτι τὸ Σ θὰ εἶναι τότε τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΓ ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ, ὡς καὶ ἐκ τοῦ σημείου Σ.



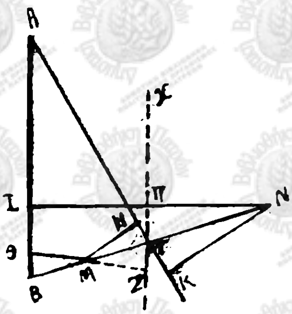
Σχ. 77.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐπειδὴ Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΓ, ἕπεται ὅτι τόξΜΒ=τόξΜΓ ὅτε καὶ χορδὴ ΜΒ=χορδὴν ΜΓ. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ τώρα ὅτι π. χ. ΜΣ=ΜΓ. Πρὸς τοῦτο ἐξετάζομεν τὰς δύο γωνίας τοῦ τριγώνου ΜΣΓ τὰς κειμένας ἔναντι τῶν ὑπὸ ἐξέτασιν πλευρῶν. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἡ γωνία ΡΓΜ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὰ τόξα ΡΒ καὶ ΒΜ. Ἐπίσης καὶ ἡ γωνία ΜΣΓ ἔχει τὴν κορυφήν της ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ ὡς γνωστὸν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἐγγεγραμμένων γωνιῶν, ἐξ ὧν ἡ μία βαίνει εἰς τὸ τόξον ΡΑ ἡ δὲ εἰς τὸ τόξον ΓΜ (ἄσκησις 83). Ἀλλὰ τόξον ΡΒ=τόξΡΑ (διότι Ρ μέσον λόγῳ τῆς διχοτόμου) καὶ τόξον ΒΜ = τόξ ΜΓ. Ὥστε αἱ γωνίαι ΜΓΣ καὶ ΜΣΓ εἶναι ἴσαι. Ὅτε θὰ εἶναι καὶ ΜΓ = ΜΣ. Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι τὸ Μ ἰσαπέχει τῶν Β, Γ, Σ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ε'.

Ἐὰν ἐκ σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς αὐτοῦ, τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τούτων εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τῆς βάσεως. Ἐὰν δὲ τὸ σημεῖον ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐξ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς θὰ εἶναι ἐπίσης σταθερά.

α') Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ σημεῖον Μ κείμενον ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ ΒΓ. Φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τὰς καθέτους ΜΘ καὶ ΜΗ ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ (Σχ. 78) Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΘ + ΜΗ εἶναι σταθερὸν διὰ πᾶσαν θέσιν τοῦ Μ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ. (Λέγοντες ὅτι ἕν ἄθροισμα ἢ μία διαφορὰ κλπ. δύο ἢ περισσοτέρων τμημάτων εἶναι σταθερά, ἐννοοῦμεν ὅτι διὰ πᾶσαν μεταβολὴν τῶν τμημάτων τούτων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά των κλπ. θὰ παραμένῃ σταθερῶς ἴση πρὸς ἕν ἢ καὶ περισσότερα στοιχεῖα τοῦ σχήματος τὰ ὁποῖα θεωροῦνται δεδομένα καὶ συνεπῶς σταθερά). Εἰς τὴν περίπτωσίν μας π.χ. θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα ΜΘ + ΜΗ ἰσοῦται μὲ ἓν τῶν ἴσων ὑψῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.



Σχ. 78.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Σύρομεν διὰ τοῦ Γ, τὴν εὐθεῖαν x παραλλήλως τῇ ΑΒ, προεκτείνομεν ἔπειτα τὴν ΜΘ, μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν x εἰς τὸ Ζ. Ἂν δειχθῇ ὅτι ΜΖ = ΜΗ τότε τὸ ἄθροισμα ΜΘ + ΜΗ ἀντικαθίσταται μὲ τὸ ἄθροισμα ΜΘ + ΜΖ τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι σταθερὸν διότι περιέχεται μεταξὺ τῶν παραλλήλων x καὶ ΑΒ καὶ συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΑΒ. Συγκρίνομεν πρὸς τοῦτο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΖΓ καὶ ΜΗΓ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΜΓ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας ΗΓΜ καὶ ΖΓΜ ἴσας, διότι γων ΖΓΜ = γων ΑΒΜ (ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ) ἀλλὰ γων ΑΒΜ = γων ΑΓΜ (ὡς παρὰ τὴν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς) ἄρα γων ΖΓΜ = γων ΗΓΜ. Ἐδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΜΗΓ καὶ ΜΖΓ, ἄρα καὶ ἡ ἰσότης τῶν ΜΖ καὶ ΜΗ.

β') Ἂν τὸ σημεῖον τοῦτο ληφθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΓ π. χ. τὸ Ν, τότε θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν καθέτων ΝΙ καὶ ΝΚ εἶναι σταθερά. Πράγματι ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΝΠΓ καὶ ΝΚΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ὡς εὐκόλως δεικνύεται, λαμβάνομεν ΝΠ = ΝΚ. Ἄρα ἡ διαφορὰ ΝΙ — ΝΚ ἀντικαθίσταται μὲ τὴν διαφορὰν ΝΙ — ΝΠ ἤτοι μὲ ΙΠ. Ἀλλὰ ΙΠ καὶ πάλιν ἰσοῦται μὲ τὸ ὕψος ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ ΣΤ'.

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

1. «Εἰς πᾶν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθάς.

2 Μία ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴν γωνίαν

3. Ἑκάστη δὲ πλευρὰ αὐτοῦ, φαίνεται ἐκ τῶν ἔναντι κορυφῶν ὑπὸ ἴσας γωνίας.

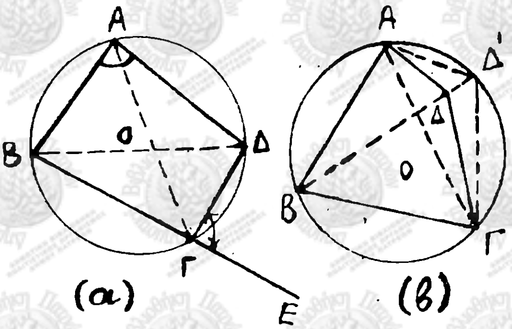
Ἀντιστρόφως :

1. Ἂν τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθάς.

2. Ἂν μία ἐξωτερικὴ γωνία αὐτοῦ, ἰσοῦται μὲ μίαν ἐσωτερικὴν καὶ ἀπέναντι.

3. Ἂν μία πλευρὰ φαίνεται ἐκ τῶν ἔναντι κορυφῶν ὑπὸ ἴσας γωνίας.

Τότε τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον».



Σχ. 79.

Τὸ εὐθύ. Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 79α) ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι

1) γωνΒΑΔ+γων ΒΓΔ = = 2 ὀρθ.

2) ἡ ἐξωτ. γων ΔΓΕ = γωνΒΑΔ.

3) ὅτι γωνΒΑΓ=γωνΒΔΓ (δηλαδὴ ἡ πλευρὰ ΒΓ φαίνεται ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Δ ὑπὸ ἴσας γωνίας).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Τοῦτο ἐδείχθη ὡς θεωρία § 151.

2) Ἐπειδὴ γωνΒΓΔ+γωνΔΓΕ=2 ὀρθ. (ἐφεξῆς μὲ μὴ κοινὰς πλευρὰς ἐπ' εὐθείας) καὶ ἐπειδὴ δυνάμει τοῦ πρώτου, γωνΒΑΔ+γωνΒΓΔ=2 ὀρθ., συγκρίνοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας, λαμβάνομεν γῶνΔΓΕ=γωνΒΑΔ.

3) Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΔΓ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσαι ἤτοι ἡ ΒΓ φαίνεται ἐκ τῶν κορυφῶν Α καὶ Δ ὑπὸ ἴσας γωνίας.

(Εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν φαίνεται ἐκ τῶν ἔναντι αὐτῆς κορυφῶν ὑπὸ ἴσας γωνίας).

Τὸ ἀντίστροφον. 1) Τοῦτο ἐδείχθη εἰς τὴν ἄσκησιν 102.

2) Ἔστω ὅτι ἡ γωνΔΓΕ = γων ΒΑΔ. Ἀλλ' ἐπειδὴ προφανῶς εἶναι γωνΔΓΕ+γωνΒΓΔ=2 ὀρθ., φέροντες εἰς τὴν ἰσότητα ταύτην ἀντὶ τῆς γωνΔΓΕ τὴν ἴσην της γωνΒΑΔ, λαμβάνομεν γωνΒΓΔ+γωνΒΑΔ=2 ὀρθ. καὶ ἄρα ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ 1 τοῦ ἀντιστρόφου.

3) Ἔστω τώρα ὅτι ἡ ΒΓ (Σχ. 79β) φαίνεται ἐκ τῶν ἔναντι κορυφῶν ὑπὸ ἴσας γωνίας ἤτοι ὅτι γωνΒΑΓ=γωνΒΔΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι διὰ τῶν Β,Α,Δ,Γ διέρχεται περιφέρεια. Διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, διέρχεται περιφέρεια, ἥτις ἔστω ὅτι δὲν διέρχεται διὰ τῆς τετάρτης κορυφῆς Δ. Προεκτείνομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ΄, καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ΄, τὸ ὁποῖον εἶναι πλέον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, ὅτε θὰ πρέπῃ κατὰ τὸ 3 τοῦ εὐθέως νὰ εἶναι γων ΒΑΓ=γων ΒΔ΄Γ. Ἀλλὰ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως γωνΒΑΓ= =γων ΒΔΓ ὅτε συγκρίνοντες τὰς δύο τελευταίας ταύτας ἰσότητας λαμβάνομεν γων ΒΔΓ=γωνΒΔ΄Γ. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ γωνΒΔΓ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΔΓΔ΄ καὶ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι γωνΒΔΓ>γωνΒΔ΄Γ. Ὥστε ἡ παραδοχὴ ὅτι ἡ περιφέρεια Ο δὲν διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Δ ὁδηγεῖ εἰς ἄτοπον. Ἄρα δέον νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου ἀποτελεῖ τὸ σπουδαιότερον τῶν θεωρημάτων τοῦ α΄ βιβλίου τῆς Γεωμετρίας, διότι ἀποτελεῖ τὴν βάσιν, ἐφ' ἧς ἔχει δημιουργηθῆ μία ὑπέροχος σειρὰ προτάσεων, ὅλως ἐξαιρέτων, σπουδαιοτάτων καὶ λίαν χρησίμων ἐφ'ὅλων τῶν τῆς γεωμετρίας βιβλίων.

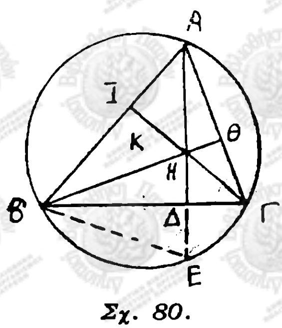
Κατωτέρω δίδομεν μίαν μικρὰν σειρὰν τοιούτων προτάσεων, αἱ ὁποῖαι θὰ μᾶς εἶναι πολὺ χρήσιμοι εἰς τὴν περαιτέρω ἐργασίαν μας.

Οἱ θέλοντες δὲ νὰ συμπληρώσωσι τὰς γνώσεις των ἐπὶ τῶν τοιούτων, ἂς βοηθηθῶσι ἀπὸ τὸ ὑπέροχον σύγγραμμα Exercices de Géométrie par F. G. M.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ζ΄.

«Τὰ συμμετρικὰ (1) τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τριγώνου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας τοῦ τριγώνου».

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ, Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ (Σχ. 80), Ε δὲ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Η ὡς τὴν πλευρὰν ΒΓ ἤτοι ΗΔ=ΔΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ.



Σχ. 80.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Σύρομεν πρὸς τοῦτο βοηθητικῶς τὴν ΒΕ, (δεχόμενοι ὅτι τὸ Ε δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας). Ἐπειδὴ εἶναι ΗΔ= =ΔΕ εἶναι δὲ ἡ ΒΔ κάθετος τῇ ΗΕ, τὸ τρίγωνον ΗΒΕ εἶναι ἰσοσκελές, ὅτε γων ΒΕΔ= =γων ΒΗΔ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΒΗΔ εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τετραπλεύρου ΗΔΓΘ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγράψιμον διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του ΗΘΓ καὶ ΗΔΓ παραπληρωματικὰς ὡς ὀρθάς, ὅτε κατὰ τὸ 2, τοῦ εὐθέως τοῦ Πτολεμαίου, θὰ πρέπῃ γων ΒΗΔ=γων ΘΓΔ. Ἀλλὰ τότε καὶ γων ΒΕΔ= =γων ΘΓΔ. Ἀλλὰ ἡ γωνία ΔΓΘ εἶναι ἐγγεγραμμένη βαίνουσα ἐπὶ

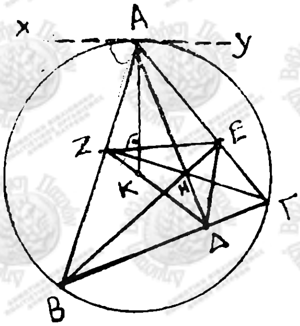
(1) Δύο σημεῖα λέγονται συμμετρικὰ ὡς πρὸς εὐθεῖαν, ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος τοῦ συνδέοντος τὰ σημεῖα.

τοῦ τόξου ΑΒ, ὅτε ἐπειδὴ καὶ ἡ γων ΒΕΑ εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΒΓΑ καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ ἐγγεγραμμένη. Ἄρα τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Η'.

«Αἱ ἀκτῖνες αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰς κορυφὰς τριγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθικοῦ».

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ (Σχ. 81) καὶ ΔΕΖ τὸ ὀρθικὸν αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν εἰς τὴν κορυφὴν Α ἀντιστοιχοῦσαν ἀκτῖνα ΚΑ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὐτη εἶναι κάθετος τῇ ΖΕ.



Σχ. 81.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. Σύρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ἐφαπτομένην xy εἰς το Α. Ἂν τώρα δείξωμεν ὅτι ἡ xy εἶναι παράλληλος τῇ ΖΕ, τότε ἡ ΚΑ θὰ εἶναι κάθετος καὶ τῇ ΖΕ. Πράγματι ἡ γωνία xΑΒ (ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης) ἰσοῦται μὲ τὴν γων ΑΓΒ (ἐγγεγρ βαίνουσαν εἰς τὸ τόξον ΒΑ). Ἀλλὰ καὶ γων ΑΖΕ= γων ΕΓΒ (ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τετραπλεύρου ΖΕΓΒ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγράψιμον, (διότι ὅλα τὰ διὰ τῶν ὑψῶν ὁριζόμενα τετράπλευρα εἶναι ἐγγράψιμα). Ἄρα γων xΑΒ = γωνΑΖΕ, ὅτε xy καὶ ΖΕ παράλληλοι.

Ἡ πρότασις αὕτη καλεῖται θεώρημα τοῦ NAGEL.

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Θ'.

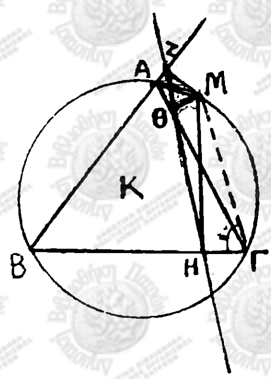
ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ SIMSON ἢ WALLACE.

«Ἐὰν ἐκ σημείου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τρίγωνον περιφερείας ἀχθοῦν κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἀντιστρόφως».

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Κ, Μ δὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν ἐκ τούτου τὰς καθέτους ΜΖ, ΜΘ, ΜΗ ἐπὶ τὰς πλευράς του (Σχ. 82). Θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ πόδες Ζ, Θ, Η κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Πρὸς τοῦτο σύρομεν τὰς ΖΘ καὶ ΘΗ. Ἂν δειχθῇ ὅτι γωνΖΘΜ+γωνΜΘΗ= 2 ὀρθ. τότε φανερὸν ὅτι ἡ ΖΘΗ θὰ εἶναι εὐθεῖα.

Προσπαθοῦμεν ἤδη νὰ μεταφέρωμεν τὰς γωνίας ταύτας εἰς ἄλλας θέσεις καὶ ἐκεῖ νὰ σπουδάσωμεν αὐτάς. Οὕτω τὴν γωνίαν ΖΘΜ μεταφέρομεν εἰς τὴν θέσιν τῆς γωνΖΑΜ, διότι αἱ γωνίαι αὗται ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΖΜ ἐν τῷ ἐγγραψίμῳ τετραπλεύρῳ ΑΖΜΘ εἶναι ἴσαι. Εἶναι δὲ τὸ ΑΖΜΘ ἐγγράψιμον ὡς ἔχον τὰς γωνίας ΑΖΜ καὶ ΑΘΜ παραπληρωματικὰς ὡς ὀρθὰς λόγῳ τῶν καθέτων ΜΖ καὶ ΜΘ. Ἀλλὰ ἤδη ή γωνΖΑΜ μεταφέρεται είς τὴν θέσιν τῆς γωνΜΓΒ, διότι ἀχθείσης βοηθητικῶς τῆς ΜΓ, τὸ τετράπλευρον ΑΜΓΒ, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Κ, θὰ ἔχῃ γωνΖΑΜ=γωνΜΓΒ (ἐξωτερική = μὲ ἀπέναντι ἐσωτερικήν). Ἤδη ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι γων ΜΓΗ + γων ΜΘΗ= = 2 ὀρθ. Ἀλλὰ διὰ νὰ ἀληθεύῃ τοῦτο, θὰ πρέπῃ τὸ τετράπλευρον ΜΘΗΓ νὰ εἶναι ἐγγράψιμον Πράγματι τοῦτο εἶναι ἐγγράψιμον, διότι ἡ ΜΓ φαίνεται ἐκ τῶν ἔναντι αὐτῆς κορυφῶν Θ καὶ Η ὑπὸ γωνίας ἴσας, ἐπειδὴ γωνΜΘΓ=γωνΜΗΓ=1 ὀρθή.



Σχ. 82.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι γωνΜΘΗ+γωνΜΓΗ= =2 ὀρθ. Ἐπειδὴ δὲ γωνΜΓΗ = γωνΜΘΖ (ὡς ἐδείχθη), ἕπεται ὅτι γων ΜΘΗ + γων ΜΘΖ = = 2 ὀρθ Ἄρα ἡ ΖΘΗ εἶναι γραμμὴ εὐθεῖα.

Ἡ εὐθεῖα ΖΘΗ καλεῖται συνήθως εὐθεῖα τοῦ SIMSON.

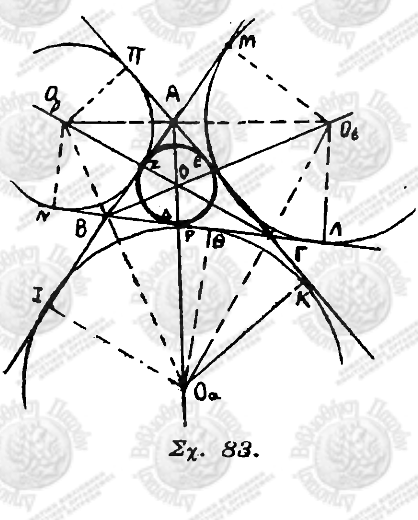
Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ἀποδεικνυομένη ἀμέσως τῇ βοηθείᾳ τῶν ἰδίων ὡς ἄνω ἐγγραψίμων τετραπλεύρων, ἀφίεται ὡς ἄσκησις εἰς τοὺς μελετητὰς τοῦ παρόντος : Διατυποῦμεν ὅμως αὐτήν .

«Ἐὰν οἱ πόδες τῶν ἐκ τυχόντος σημείου ἀγομένων καθέτων ἐπὶ τὰς πλευρὰς τριγώνου κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον περιφερείας».

ΠΡΟΤΑΣΙΣ Ι'.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

«Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ πλευρῶν α, β, γ, φέρομεν τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον καὶ τοὺς τρεῖς παρεγγεγραμμένους. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου πᾶσαι αἱ μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν κύκλων τούτων ἀποστάσεις».



Σχ. 83.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο, O_α, O_β, O_γ οἱ τέσσαρες κύκλοι, ὁ ἐγγεγραμμένος καὶ οἱ τρεῖς παρεγγεγραμμένοι. Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς μεταξὺ τῶν σημείων ἐπαφῆς ἀποστάσεις, συναρτήσει τῶν πλευρῶν α, β, γ τοῦ τριγώνου (Σχ. 83).

ΛΥΣΙΣ. — Καλοῦμεν τὴν περίμετρον τοῦ τριγώνου ἤτοι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ (1). Γνωρίζομεν ὅτι

(1) Ὁ συμβολισμὸς τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma$ διὰ 2τ διευκολύνει τὴν ἁπλούστευσιν τοῦ τύπου τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν, ὡς θὰ ἴδωμεν, κατωτέρω.

ΑΖ=ΑΕ καὶ ΑΙ = ΑΚ (διότι εἶναι ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου ἐκτὸς πρὸς περιφέρειαν). Ἐκ τῆς ἰσότητος ΑΙ = ΑΚ λαμβάνομεν

$$ΑΖ + ΒΖ + ΒΙ = ΑΕ + ΓΕ + ΓΚ$$

ἢ ἐπειδὴ $\quad ΑΖ = ΑΕ,\ ΒΖ = ΒΔ,\ ΒΙ = ΒΘ,\ ΓΕ = ΓΔ,\ ΓΚ = ΓΘ$

θὰ ἔχωμεν:

$$ΒΔ + ΒΘ = ΓΔ + ΓΘ$$

ἢ $\quad ΒΔ + ΒΔ + ΔΘ = ΓΘ + ΔΘ + ΓΘ$

ἢ $\quad 2ΒΔ = 2ΓΘ \quad$ ἢ $ΒΔ = ΓΘ$

Ὥστε ἐδείχθη ὅτι $\quad ΒΔ = ΒΖ = ΓΘ = ΓΚ \qquad (1)$

Ἄρα καὶ $\quad ΒΘ = ΓΔ = ΒΙ = ΓΕ \qquad (2)$

Ἀλλὰ $\quad ΑΙ = ΑΖ + ΒΖ + ΒΙ = \dfrac{2\ ΑΖ + 2\ ΒΖ + 2\ ΒΙ}{2} =$

$$= \frac{ΑΖ + ΑΕ + ΒΖ + ΒΔ + ΒΙ + ΒΘ}{2}$$

ἢ δυνάμει τῶν (1) καὶ (2) θὰ ἔχωμεν:

$$ΑΙ = \frac{ΑΖ + ΑΕ + ΒΖ + ΒΔ + ΓΔ + ΓΕ}{2} = \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ}{2} =$$

$$= \frac{α + β + γ}{2} = \frac{2\,τ}{2} = τ \quad \text{ἤτοι} \quad ΑΙ = ΑΚ = τ. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\quad ΙΖ = ΒΖ + ΒΙ = ΒΔ + ΒΘ = ΒΔ + ΓΔ = ΒΓ = α,$

ἔπεται ὅτι $\quad ΖΙ = ΕΚ = ΒΓ = α.$

Ἤδη τὸ $\quad$ τμῆμα $ΑΖ = ΑΙ - ΖΙ = τ - α$

ἄρα $\quad ΑΖ = ΑΕ = τ - α.$

Ὁμοίως τὸ τμῆμα $\quad ΒΙ = ΑΙ - ΑΒ = τ - γ$

ἄρα $\quad ΒΙ = ΒΘ = ΓΔ = ΓΕ = τ - γ.$

Ὁμοίως τὸ τμῆμα $\quad ΓΚ = ΑΚ - ΑΓ = τ - β$

ἄρα $\quad ΓΚ = ΓΘ = ΒΖ = ΒΔ = τ - β.$

Τὸ δὲ τμῆμα $ΔΘ = ΒΘ - ΒΔ = (τ - γ) - (τ - β) = β - γ.$

Ἂν Ρ τὸ μέσον τῆς ΒΓ ἐπειδὴ θὰ εἶναι ΡΒ = ΡΓ καὶ ΒΔ = ΓΘ ἔπεται ὅτι ΡΔ = ΡΘ, ἤτοι τὸ μέσον ἑκάστης πλευρᾶς ἰσαπέχει τῶν σημείων ἐπαφῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.— Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐλάβομεν ὡς βάσιν τὸν παρεγγεγραμμένον κύκλον $Ο_α$ εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τοὺς δύο ἄλλους παρεγγεγραμμένους κύκλους.

Ἐπίσης ἐλάβομεν κατὰ τὴν λύσιν (ΒΓ) = α, (ΓΑ) = β, (ΑΒ) = γ δηλαδὴ ἔναντι τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ θεωροῦμεν κειμένας τὰς πλευρὰς α, β, γ ἀντιστοίχως. Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη τηρεῖται σχεδὸν πάντοτε εἰς ὅλα τὰ προβλήματα τῶν Μαθηματικῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Θεωροῦντες τὸ τρίγωνον $Ο_α Ο_β Ο_γ$ παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι $Ο_α Α$, $Ο_β Β$, $Ο_γ Γ$ εἶναι ὕψη αὐτοῦ (διότι γων $Ο_β Α Ο_α = 1$ ὀρθ., διότι $Ο_α Α$, $Ο_β Α$ διχοτόμοι ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν).

2. Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι συνεπῶς τὸ ὀρθικὸν τοῦ $Ο_α Ο_β Ο_γ$.

3. Τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο εἶναι τώρα ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $Ο_α Ο_β Ο_γ$.

Συμπληρωματικῶς τῶν ἀνωτέρω ὑπάρχουν πλεῖσται ὅσαι προτάσεις λίαν ἐνδιαφέρουσαι, ἀλλὰ ἡ ἀνάπτυξις καὶ ἡ ἐπεξεργασία αὐτῶν ἐκφεύγωσι τὰ ὅρια τοῦ παρόντος βιβλίου καὶ τὸν σκοπὸν αὐτοῦ.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39*.— Ἐκ σημείου Ο ἄγονται αἱ ἡμιευθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ὥστε γων ΑΟΒ = γωνΒΟΓ=60°. Λαμβάνομεν σημεῖον Ρ ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΡΗ, ΡΘ, ΡΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΡΖ = ΡΘ + ΡΗ.

40*.— Ἐκ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν χυ. Κατόπιν δὲ φέρομεν τὰς καθέτους ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν των κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς χυ ἰσοῦται μὲ τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐκ τῆς ἄλλης κορυφῆς.

41.— Ἂν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνωνται καθέτως, αἱ εἰς τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν τούτων ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι σχηματίζουν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

42*.— Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι σταθερόν.— (Νὰ ἐξετασθῇ καὶ ἡ περίπτωσις καθ' ἣν τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἰσοπλεύρου).

43*.— Δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς τρίτης εἶναι ἴσαι.

44.— Ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τοῦ τόξου ΒΓ φέρομεν τὰς ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΡΑ = ΡΒ + ΡΓ.

45.— Ἐκ σημείου Α ἐκτὸς κύκλου Ο κειμένου, φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΓΒ, ὥστε τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τμῆμα αὐτῆς ΑΓ νὰ ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι, ὡς καὶ τὴν τέμνουσαν ΑΟΔ. Νὰ δειχθῇ ὅτι γων ΒΟΔ = 3. γων ΓΟΑ.

46*.— Τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν ὑποτείνουσαν σὺν τῇ διαμέτρῳ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

47.— Ἐὰν ἐκ σημείου φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς καὶ τὴν διχοτόμον γωνίας ὁ ποὺς τῆς τελευταίας ταύτης ἰσαπέχει τῶν ποδῶν τῶν δύο ἄλλων καθέτων.

48.— Ἐὰν ἡ μικροτέρα βάσις τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτομοῦσαι τὰς παρὰ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν γωνίας, τέμνονται ἐπὶ τῆς μικροτέρας βάσεως.

49.— Ἐὰν αἱ δύο βάσεις τραπεζίου εἶναι κάθετοι ἐπὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ (δισορθογώνιον τραπέζιον), ἡ δὲ ἄλλη ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων, τότε ἡ μὲ διάμετρον ταύτην γραφομένη περιφέρεια, ἐφάπτεται τῆς ἄλλης μὴ παραλλήλου πλευρᾶς.

50.— Ἂν διά τινος τῶν κοινῶν σημείων δύο τεμνομένων περιφερειῶν ἀχθῇ τυχοῦσα τέμνουσα αὐτῶν, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τῆς τεμνούσης ταύτης τέμνονται ὑπὸ γωνίαν σταθεράν, (δηλαδὴ ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς τεμνούσης).

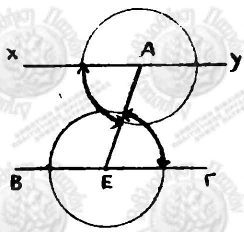
51.— Αἱ περιφέρειαι αἱ ἔχουσαι χορδάς, τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου ὁρίζουν τεμνόμεναι, τὰς κορυφὰς ἑτέρου τετραπλεύρου ἐγγραψίμου.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΛΥΟΜΕΝΑ ΤΗι ΒΟΗΘΕΙΑι ΤΩΝ ΟΡΓΑΝΩΝ ΚΑΝΟΝΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΒΗΤΟΥ

Σελὶς 74. § 161. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω εὐθεῖα ΒΓ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτῆς. Θέλομεν διὰ τοῦ Α νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΓ (Σχ. 84). Πρὸς τοῦτο σύρομεν διὰ τοῦ Α τυχοῦσαν τέμνουσαν τῆς ΒΓ π.χ. τὴν ΑΕ. Αὕτη τέμνουσα τὴν ΒΓ ὁρίζει τὴν γωνίαν ΑΕΓ ὡς καὶ τὴν ΑΕΒ. Ἂν ἤδη συμφώνως μὲ τὸ πρόβλημα τῆς § 160 κατασκευάσωμεν μὲ κορυφὴν τὴν Α καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὴν ΑΕ γων ΕΑx ἴσην πρὸς τὴν γων ΑΕΓ, τότε ἡ xA θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Πρὸς τοῦτο καθιστῶμεν τὴν γων ΑΕΓ ἐπίκεντρον κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτῖνα τυχοῦσαν. Μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα καὶ μὲ κέντρον τὸ Α γράφομεν ἑτέραν περιφέρειαν τέμνουσαν τὴν ΑΕ εἴς τι σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀρχόμενοι λαμβάνομεν τόξον κλπ. (ὡς δεικνύουν τὰ παχέα τόξα τοῦ σχήματος).



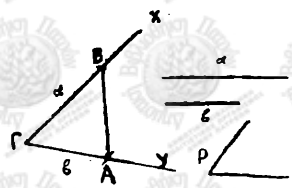
Σχ. 84.

Σελὶς 75. § 163. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 162 τοῦ βιβλίου παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ληφθῇ ΑΛ = ΛΚ = ΚΙ κλπ. τότε τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων ΔΛ, ΕΚ, ΖΙ, . . . κείμενα τμήματα ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, . . . τῆς εὐθείας ΑΓ θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσα. Πράγματι ἂν ἀχθοῦν αἱ ΛΜ, ΚΝ, . . . τότε τὰ τρίγωνα ΑΔΛ, ΛΜΚ, ΚΝΙ . . . εἶναι ἴσα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα, ὅτε ΑΔ = ΛΜ = ΚΝ, = . . . ὅτε ἐπειδὴ ΕΔ = ΛΜ, ΕΖ = ΚΝ, . . . θὰ εἶναι καὶ ΑΔ = ΔΕ = ΕΖ = . . .

Σελὶς 75. § 164. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστωσαν α, β, τὰ δεδομένα μήκη τὰ ὁποῖα ἀντιπροσωπεύουν τὰς πλευράς, καὶ Ρ ἡ γωνία ἥτις θὰ εἶναι περιεχομένη των. Κατασκευάζομεν γων Γ ἴσην πρὸς Ρ (§ 160) καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς Γx, Γy (Σχ. 85) λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΓΒ = α καὶ ΓΑ = β ἀντιστοίχως. Συνδέοντες τὰ Β καὶ Α, ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον ἐπειδὴ ἔχει τὰ δεδομένα στοιχεῖα.



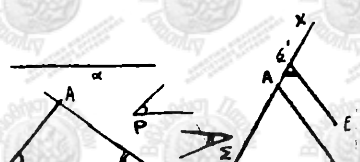
Σχ. 85.

Εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ἡ τοιαύτη κατασκευὴ εἶναι πάντοτε δυνατή, τὰ δὲ διὰ τῶν αὐτῶν στοιχείων κατασκευαζόμενα τρίγωνα εἶναι πάντα ἴσα πρὸς ἄλληλα (ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς καὶ τὴν περιεχομένην). Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ πρόβλημά μας ἔχει πάντοτε μίαν μόνον λύσιν.

Σελὶς 75. § 165. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

ΛΥΣΙΣ. — 1) Ἔστωσαν αἱ γωνίαι Ρ καὶ Σ καὶ α τὸ μῆκος τῆς δοθείσης πλευρᾶς.

Περιορισμός: $Ρ + Σ < 2$ ὀρθ. Ζητοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν ἐκ τούτων τρίγωνον, εἰς τὸ ὁποῖον ἔστω πρῶτον ὅτι αἱ γωνίαι Ρ καὶ Σ θὰ εἶναι προσκείμεναι τῇ πλευρᾷ α. (Σχ. 86). Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν



Σχ. 86.

εὐθύγραμμον τμῆμα ΒΓ = α καὶ μὲ κορυφὰς τὰ Β καὶ Γ κατασκευάζομεν γωνίας προσκειμένας αὐτῇ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας Ρ καὶ Σ. Ἐπειδὴ δὲ $Ρ + Σ < 2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι αἱ δεύτεραι πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων θὰ τέμνωνται ἔστω εἰς τὸ Α καὶ οὕτω ὁρίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον, ὡς ἔχον τὰ δεδομένα στοιχεῖα Πάντα δὲ τὰ τρίγωνα τὰ διὰ τῶν αὐτῶν στοιχείων κατασκευαζόμενα εἶναι ἴσα (ὡς ἔχοντα μίαν πλευρὰν καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας).

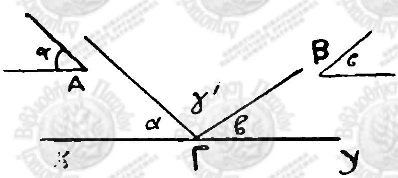
2) Ἐὰν ἡ μία τῶν γωνιῶν εἶναι ἀντικειμένη ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Λαμβάνομεν πάλιν ΒΓ = α (Σχ. 86, 2) καὶ κατασκευάζομεν εἰς τὸ Β γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν Ρ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Bx τῆς γωνίας Β λαμβάνομεν σημεῖόν τι Σ' καὶ κατασκευάζομεν μὲ κορυφὴν τὸ Σ' καὶ μίαν πλευρὰν τὴν Σ'Β, γωνίαν ΒΣ'Ε ἴσην πρὸς τὴν γων Σ. Σύροντες ἤδη διὰ τοῦ Γ τὴν ΓΑ παράλληλον τῇ Σ'Ε ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γων ΒΑΓ = γων ΒΣ'Ε = γων Σ (ὡς ἐντὸς ἐκτός) καὶ συνεπῶς εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107.—Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.

ΛΥΣΙΣ. — Ἔστωσαν αἱ γωνίαι Α καὶ Β (Σχ. 87) αἱ ὁποῖαι ἔστω ὅτι εἶναι δύο γωνίαι τριγώνου.

Περιορισμός: $Α + Β < 2$ ὀρθ. Ζητοῦμεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου. Γνωρίζομεν ὅτι ἂν γ κληθῇ ἡ τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου θὰ πρέπῃ $Α + Β + γ = 2$ ὀρθ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας xy τυχὸν σημεῖον Γ καὶ μὲ κορυφὴν τοῦτο καὶ μίαν πλευρὰν τὴν Γx καὶ Γy κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy τὰς γωνίας α καὶ β ἀντιστοίχως ἴσας πρὸς τὰς Α καὶ Β. Ἐπειδὴ δὲ $α + β + γ' = 2$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι ἡ γ' ἀντιπροσωπεύει τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου δηλαδὴ $γ = γ'$.



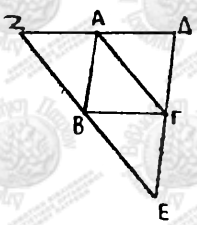
Σχ. 87.

108.—Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ὅταν δίδωνται τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα, τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται ὅτι θὰ εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ζητουμένου τριγώνου (Σχ. 88).

Περιορισμός: Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ δέον νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

ΛΥΣΙΣ.— Συνδέομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Γνωρίζομεν ὅτι ἂν ἀχθοῦν διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΔΕΖ, θὰ ἔχῃ ὡς μέσα τὰ σημεῖα Α, Β, Γ (βλέπε σχετικῶς ἄσκ. 93). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

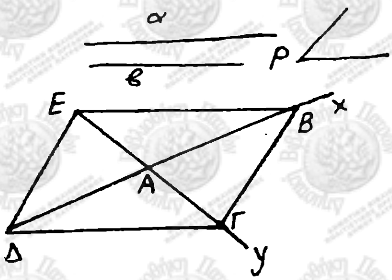


Σχ. 88.

109.— Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν.

Ἔστωσαν α, β, Ρ αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ γωνία αὐτῶν, τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται διὰ τοῦ σημείου τομῆς των. Ὅτε κατασκευάζομεν γωνίαν xAy ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν (Σχ. 89). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ax καὶ ἀπὸ τοῦ σημείου A, λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν δύο τμήματα AB, καὶ AΔ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς διαγωνίου π. χ. τῆς α. Ὁμοίως ἐπὶ τῆς ἄλλης Ay λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ A δύο τμήματα AΓ καὶ AE ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου β. Συνδέοντες ἤδη τὰ σημεῖα E, Δ, Γ, B δι' εὐθειῶν λαμβάνομεν τὸ τετράπλευρον EBΓΔ ὅπερ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται, ἐκ κατασκευῆς. Εἶναι δὲ τοῦτο τὸ ζητούμενον ὡς ἔχον τὰς διαγωνίους του καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα στοιχεῖα.



Σχ. 89.

Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν, διότι πᾶσαι αἱ χρησιμοποιηθεῖσαι κατασκευαὶ εἶναι δυναταί.

110.— Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα ἴση πρὸς τὰ $\frac{5}{3}$ δοθείσης εὐθείας.

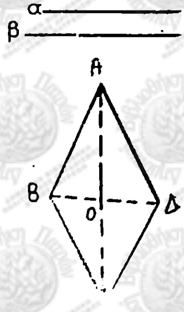
ΛΥΣΙΣ.— Διαιροῦμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν κατὰ τὸ πρόβλημα § 162 εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ τὸ ἓν τῶν ἴσων τούτων μερῶν τὸ λαμβάνομεν ἐν συνεχείᾳ (διαδοχικὰ) ἐπὶ ἄλλης εὐθείας πέντε φοράς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

111.— Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ διαγωνίους ἴσας **πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.**

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστωσαν α, β τὰ μήκη τῶν δοθεισῶν διαγωνίων τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν ρόμβου (Σχ. 90). Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως. Βάσει τῆς ἰδιότητος ταύτης συνάγομεν τὴν ἀκόλουθον κατασκευήν.

Λαμβάνομεν τὴν εὐθεῖαν BΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον α. Εἰς τὸ μέσον αὐτῆς φέρομεν κάθετον (§ 166) τὴν AOΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς καθέτου ταύτης καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ O τὰ τμήματα OA, OΓ ἴσα πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης δοθείσης διαγωνίου β. Συνδέοντες τὰ ἄκρα δι' εὐθειῶν ἔχομεν τὸ τετράπλευρον ABΓΔ, ὅπερ ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ διχοτομοῦνται καὶ τέμνονται καθέτως (ἐκ κατασκευῆς), θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος. Ἡ τοιαύτη κατασκευὴ εἶναι πάντοτε δυνατὴ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.



Σχ. 90.

112.— Νὰ διαιρεθῇ περιφέρεια εἰς 4, 8, 16 ἴσα μέρη.

ΛΥΣΙΣ.— Διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο διαμέτρους καθέτους ἐπ' ἀλλήλας. Ἕκαστον τώρα τῶν τεσσάρων ἴσων τόξων, τὸ διχοτομοῦμεν βοηθείᾳ τοῦ γνωστοῦ προβλήματος § 167 καὶ τὰ οὕτω προκύπτοντα 8 ἴσα μέρη, τὰ διχοτομοῦμεν βοηθείᾳ τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

113. — Νὰ κατασκευασθῇ γωνία ἴση πρὸς τὸ $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς ἢ ἴση πρὸς 60°, 30°.

ΛΥΣΙΣ.—α) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην πρὸς $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς ἀρκεῖ νὰ διχοτομήσωμεν μίαν ὀρθὴν (§ 167).

β) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν ἴσην πρὸς $1\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, λαμβάνομεν μίαν εὐθεῖαν καὶ φέρομεν ἐπ' αὐτὴν μίαν κάθετον. Κατόπιν διχοτομοῦμεν μίαν τῶν σχηματισθεισῶν ὀρθῶν γωνιῶν, ὅτε τὸ ἓν τῶν μερῶν ἐκ τῆς διχοτομηθείσης ὀρθῆς καὶ ἡ ἐφεξῆς ὀρθὴ ἀποτελοῦν τὴν ζητουμένην γωνίαν.

γ) Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν γωνίαν 60°, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον μὲ πλευρὰν τυχοῦσαν εὐθεῖαν συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα § 170. Εἰς τὴν κατασκευὴν θὰ προσέξωμεν νὰ γραφοῦν αἱ περιφέρειαι μὲ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν. Τότε μία τῶν γωνιῶν τοῦ κατασκευασθησομένου ἰσοπλεύρου θὰ εἶνε 60°.

δ) Διχοτομοῦντες μίαν τῶν γωνιῶν τοῦ προηγουμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχομεν τὴν γωνίαν τῶν 30°.

114.—Ἐπὶ μιᾶς **πλευρᾶς τοῦ δοθέντος** τριγώνου νὰ εὑρεθῇ **σημεῖον** *ἀπέχον* ἴσον *ἀπὸ* τῶν **δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.**

ΛΥΣΙΣ.— Διχοτομοῦμεν μίαν τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου κατὰ τὸ πρόβλημα τῆς § 167, τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, (τὸ ἰσάκις ἀπέχον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν). (Βλέπε σχετικῶς ἄσκ. 33).

115.—Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλόγραμμον, οὗ δίδεται μία πλευρὰ καὶ αἱ διαγώνιοι.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 89 κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΕΑΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν ὅτι ἡ ΕΔ εἶναι ἡ δοθεῖσα πλευρά, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ΕΑ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν διαγωνίων. Ἀφοῦ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ κατὰ τὸ πρόβλημα (§ 170) προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΕΑ καὶ ΔΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α κατὰ μήκη ἴσα πρὸς ἑαυτάς. Τότε τὸ τετράπλευρον τῶν ἄκρων Ε, Δ, Γ, Β εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τὰς διαγωνίους του καὶ τὴν πλευρὰν ΕΔ ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν ὅταν ἡ δοθεῖσα πλευρὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡμίσεων τῶν δοθεισῶν διαγωνίων καὶ μεγαλυτέρα τῆς ἡμιδιαφορᾶς των.

116 — Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη εἰς δοθὲν σημεῖον περιφερείας.

ΛΥΣΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ταύτην καὶ εἰς τὸ ἄκρον της τὴν κάθετον. Ἡ κάθετος αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.

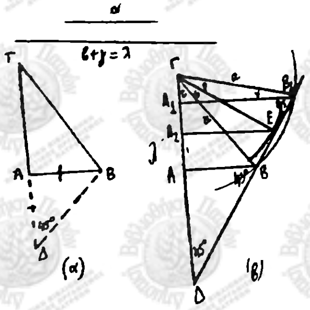
117.—Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα καὶ μία τῶν ἄλλων πλευρῶν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἡ λύσις εἰς τὸ βιλίον § 171.

118.—Ἡ κατασκευὴ τῶν σχημάτων ἔχει σκοπὸν τὴν ἐξάσκησιν τοῦ μαθητοῦ εἰς τὴν εὐχερῆ χρῆσιν τῶν ὀργάνων κανόνος καὶ διαβήτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

119.— Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἔχον δοθεῖσαν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.



Σχ. 91.

Ἔστωσαν α, λ τὸ μῆκος τῆς δοθείσης ὑποτεινούσης καὶ τὸ μῆκος τοῦ ἀθροίσματος τῶν καθέτων πλευρῶν (θέτομεν $\beta+\gamma=\lambda$). Ζητοῦμεν ἐκ τῶν δύο στοιχείων τούτων νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον.

Περιορισμός: Πρέπει $\lambda>\alpha$; Θὰ ἀκολουθήσωμεν τὴν γενικὴν ἐργασίαν τῆς λύσεως.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—Ἔστω ὅτι κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον τρίγωνον καὶ ὅτι εἶναι τὸ ΑΒΓ (Σχ. 91 α). Εἰς τοῦτο ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι $\Gamma B=\alpha$ καὶ $\Gamma A+AB=\lambda$. Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν τεθλασμένην $\Gamma A+AB$ ἐπ' εὐθείας, προεκτείνομεν τὴν ΓΑ κατὰ μῆκος ΑΔ ἴσον πρὸς τὸ ΑΒ ὅτε $\Gamma A+A\Delta=\Gamma A+AB=\lambda$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐλήφθη $A\Delta=AB$ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς ἄρα γων $\Delta=45^{o}$. Ἤδη εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΒ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $\Gamma B=\alpha$, $\Gamma\Delta=\lambda$ καὶ τὴν γωνίαν $\Delta=45^{o}$. Κατωρθώσαμεν λοιπὸν νὰ ἀναγάγωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ ΓΔΒ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὸν τρόπον κατασκευῆς του ὡς εἰς τὴν § 172.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.—Κατασκευάζομεν γωνίαν $\Gamma\Delta B=45^{o}$ (Σχ. 91 β) καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΓΔ λαμβάνομεν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Δ τμῆμα $\Delta\Gamma=\lambda$. Μὲ κέντρον ἤδη τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης α γράφομεν περιφέρειαν ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν ΔΒ τῆς γωνίας Δ εἰς τὰ Β καὶ B_1. Ἐκ τῶν Β καὶ B_1 σύρομεν τὰς καθέτους ΒΑ καὶ B_1A_1 ἐπὶ τὴν ΓΔ. Τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΓΑΒ καὶ $ΓB_1A_1$, εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ ζητουμένου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐξετάζομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΓΑΒ. Τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον δυνάμει τῆς αχθείσης καθέτου ΒΑ ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ ΓΒ = α (ὡς ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν α) Ἐπὶ πλέον ἐπειδὴ γωνΓΔΒ = 45°, ἐκ κατασκευῆς, τὸ τρίγωνον ΑΔΒ ὂν ὀρθογώνιον, θὰ ἔχῃ καὶ τὴν γωνΑΒΔ = 45° καὶ συνεπῶς εἶναι ἰσοσκελές. Ἀλλὰ τότε ΑΒ=ΑΔ. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς εἶναι ΓΑ+ΑΔ=λ, ἕπεται ὅτι καὶ ΓΑ+ΑΒ=λ, ἤτοι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΑΒ εἶναι ἴσον πρὸς λ. — Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον $ΓA_1B_1$, πληροῖ τοὺς τεθέντας ὅρους.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν διερεύνησιν τοῦ προβλήματος τῆς § 172, νοοῦμεν εὐκόλως ὅτι ἡ μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α γραφομένη περιφέρεια θὰ τμήσῃ τὴν πλευρὰν ΔΒ τῆς γων Δ, εἰς δύο σημεῖα Β καὶ B_1, ἐφ' ὅσον θὰ εἶναι α>ΓΕ (δηλαδὴ τῆς καθέτου τῆς ἐκ τοῦ Γ πρὸς τὴν ΔΒ). Φαίνεται λοιπὸν ὅτι τὸ πρόβλημα παρουσιάζει δύο λύσεις τὰς ΓΑΒ καὶ $ΓA_1B_1$. Ἀλλὰ τὰ δύο ὀρθογώνια ταῦτα τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν $ΓB=ΓB_1=α$. Ἐπίσης τ+φ=45° (ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΕΔ τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελὲς ἀφοῦ γων Δ = 45°). Ἀλλὰ καὶ ρ+ν+45°=90° (ἐκ τοῦ ὀρθογ. τριγ. $ΓEB_1$) ὅτε ρ+ν=45° ἄρα τ+φ=ρ+ν. Ἐπειδὴ ὅμως ΓΕ διχοτόμος εἰς τὸ τριγωνον $ΓBB_1$ θὰ εἶναι φ=ρ; ὅτε τ=ν.

Δηλαδὴ τὰ τρίγωνα ΓΑΒ καὶ $ΓA_1B_1$, ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας ($ΓB=ΓB_1$) καὶ μίαν τῶν ὀξειῶν ἴσην (τ=ν). Ἀφοῦ λοιπὸν ταῦτα εἶναι ἴσα τὸ πρόβλημα ἔχει οὐσιαστικῶς μίαν λύσιν, μὲ μόνον δύο διαφόρους θέσεις τοῦ αὐτοῦ τριγώνου. Ἂν ὅμως εἶναι ἡ α=ΓΕ, τότε ἡ μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α γραφομένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτεται τῆς ΔΒ καὶ τὸ προκύπτον τρίγωνον $ΓEA_2$ θὰ ἀποτελῇ λύσιν τοῦ προβλήματος, εἶναι δὲ τοῦτο ἰσοσκελές.

Ἂν δὲ τέλος ἡ α<ΓΕ, τότε ἡ μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα α γραφομένη περιφέρεια δὲν θὰ τέμνῃ τὴν ΔΒ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Συμπέρασμα: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν ἢ οὐδεμίαν λύσιν, ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ὁ περιορισμὸς λ>α.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι διὰ προεκτάσεως τῆς ΓΑ κατὰ μῆκος ΑΔ=ΑΒ ἐθέσαμεν τὴν τεθλασμένην ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως δὲ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις εἰς ἃς θὰ δίδεται τὸ ἄθροισμα δύο ἢ τριῶν πλευρῶν ἢ ἡ διαφορὰ δύο πλευρῶν θὰ θέτωμεν τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἐπ' εὐθείας ἢ ἂν πρόκειται περὶ διαφορᾶς θὰ λαμβάνωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τμῆμα ὅσον εἶναι ἡ ἄλλη, ὥστε τὸ ὑπόλοιπον νὰ παριστᾷ τὴν δοθεῖσαν διαφοράν.

2. Ἐπίσης κατὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς οἱουδήποτε εὐθυγράμμου σχήματος θὰ ἀκολουθῶμεν τὴν ὡς ἄνω σειρὰν ἐργασίας. Δηλαδὴ ἀνάλυσιν, σύνθεσιν, ἀπόδειξιν, διερεύνησιν.

3. Πολλάκις ἐπειδὴ ἡ ἀνάλυσις θὰ εἶναι πολὺ ἁπλῆ θὰ δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν τὴν σύνθεσιν εὐθὺς ἀμέσως, ὡς ἐπράξαμεν εἰς τὰ προηγούμενα τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ἐνῷ ἡ ἀπόδειξις καὶ ἡ διερεύνησις θὰ εἶναι πάντοτε ἀπαραίτητα κατὰ τὴν λύσιν.

4. Πρέπει νὰ προσέχωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν δεδομένων στοιχείων, ἐὰν οὗτος ἀρκεῖ διὰ τὴν κατασκευὴν ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος. Ἐὰν πρόκειται περὶ τριγώνου, ὁ ἀριθμὸς οὗτος πρέπει νὰ εἶναι τρία, ἐκτὸς ἂν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰδιαζούσης μορφῆς ὅτε ὁ ἀριθμὸς οὗτος τῶν ἀπαραιτήτων στοιχείων ἐλαττοῦται. Ὡς π. χ. εἰς τὸ ἄνω πρόβλημα ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον ἐδόθησαν μόνον δύο στοιχεῖα ἡ ὑποτείνουσα α καὶ τὸ ἄθροισμα λ τῶν καθέτων πλευρῶν. Δι' ἓν πολύγωνον γενικῶς ἀπαιτοῦνται $2\nu-3$ στοιχεῖα ἔνθα ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν σχήματος. Πράγματι ἓν πολύγωνον διὰ τῶν διαγωνίων αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἔκ τινος κορυφῆς του χωρίζεται εἰς $\nu-2$ τρίγωνα. Διὰ τὸ πρῶτον τῶν τριγώνων τούτων χρειάζονται 3 στοιχεῖα, δι' ἕκαστον δὲ τῶν λοιπῶν 2 (διότι θὰ ὑπάρχῃ μία πλευρὰ κοινή) ἄρα ἐπειδὴ τὰ λοιπὰ τρίγωνα θὰ εἶναι $\nu-3$ καὶ δι' ἕκαστον χρειάζονται 2 στοιχεῖα, δι' ὅλα θὰ χρειάζωνται $2(\nu-3)$ στοιχεῖα σὺν τὰ 3 στοιχεῖα τοῦ πρώτου τριγώνου ἤτοι σύνολον $2(\nu-3)+3=2\nu-3$. Καὶ ἐδῶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐλαττοῦται ἂν τὸ πολύγωνον εἶναι καὶ πάλιν ἰδιαζούσης μορφῆς. Π.χ. διὰ τοῦ τύπου $2\nu-3$ εὑρίσκομεν ὅτι δι' ἓν τετράπλευρον χρειάζονται $2.4-3=5$ στοιχεῖα. Ἀλλὰ ἂν τοῦτο εἶναι τραπέζιον χρειάζονται μόνον τέσσαρα, ἂν εἶναι παραλληλόγραμμον μόνον τρία κ.ο.κ.

120.— Νὰ κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον δοθὲν ὕψος.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἐξ ἧς ἄγεται, ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἑκάστη ἴση πρὸς 60°. Βάσει τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον σύνθεσιν. (Τὸ σχῆμα ἁπλοῦν).

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.— Κατασκευάζομεν γωνίαν 60° (ἄσκ. 113) καὶ διχοτομοῦμεν αὐτὴν κατὰ γνωστὸν πρόβλημα, ἐπὶ δὲ τῆς διχοτόμου ταύτης λαμβάνομεν τμῆμα ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν ὕψος ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς κορυφῆς. Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὕψους τούτου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦτο μέχρις ὅτου τμήσῃ τὰς πλευρὰς τῆς κατασκευασθείσης γωνίας. Τὸ οὕτω ὁριζόμενον τρίγωνον εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ ἄνω κατασκευαὶ εἶναι πάντοτε δυναταὶ τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

121.— Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἔναντι κορυφῆς καὶ ἡ γωνία αὐτῆς.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς εἶναι καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου. Βάσει τούτων προβαίνομεν εἰς την ἀκόλουθον σύνθεσιν (τὸ σχῆμα ἁπλοῦν).

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.— Κατασκευάζομεν γωνίαν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Κατόπιν διχοτομοῦμεν αὐτὴν καὶ ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς κορυφῆς λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς διχοτόμου ταύτης τμῆμα ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν κάθετον (ὕψος). Εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον τοῦ ὕψους τούτου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τοῦτο, ὅτε αἱ τομαὶ τῆς καθέτου ταύτης μετὰ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας θὰ ὁρίσουν τὸ ζητούμενον τρίγωνον.

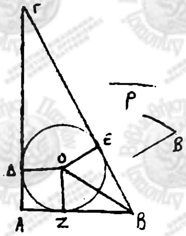
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.– Τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὸ ὕψος ἴσον πρὸς τὸ δοθέν, τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐκ κατασκευῆς, ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦτο ἤχθη καὶ ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἕπεται ὅτι εἶναι ἰσοσκελές.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.– Ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω κατασκευαὶ εἶναι δυναταί, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν.

122 —**Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἐκ μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.**

Ἔστωσαν ρ καὶ Β ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία Β τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 92).

Π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ό ς : Θὰ πρέπῃ $B < 90^{o}$.



Σχ. 92.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν ὀξεῖαν γωνίαν Β ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου Ο ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν. Ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΒ αὕτη θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς ὀξείας γωνίας Β καὶ τὸ τρίγωνον ΟΖΒ ὀρθογώνιον εἰς τὴν γων Ζ κατασκευάζεται διότι γνωρίζομεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $OBZ = \frac{B}{2}$ καὶ τὴν κάθετον ΟΖ = ρ. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΑΓ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΖ, ἡ δὲ ΟΔ παράλληλος τῇ ΑΒ. Βάσει τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον σύνθεσιν.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.– Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν ΟΖΒ. Ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς ΟΖ λαμβάνομεν τμῆμα ΟΖ = Ρ, καὶ μὲ πλευρὰν τὴν ΟΖ καὶ κορυφὴν τὸ Ο κατασκευάζομεν τὴν γων ΖΟΒ ἴσην πρὸς τὴν συμπληρωματικὴν τῆς γων $\frac{B}{2}$. Εἶναι φανερὸν ἐκ τούτων ὅτι ὁρίζεται πλέον τὸ τρίγωνον ΟΖΒ. Ὁρισθέντος ἤδη τοῦ τριγώνου ΟΖΒ, μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΖ = ρ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, πρὸς τὴν ὁποίαν φέρομεν ἐκ τοῦ Β τὴν ἐφαπτομένην ΒΕΓ. Κατόπιν ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὴν ΟΔ παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Δ τὴν ἐφαπτομένην ΑΓ παράλληλον τῆς ΟΖ. Τὸ προκύπτον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐν πρώτοις εἶναι ὀρθογώνιον εἰς Α, διότι αἱ ΑΔ καὶ ΑΒ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρὸς τὰς ΟΖ καὶ ΟΔ, αἱ ὁποῖαι ἐκ κατασκευῆς τέμνονται καθέτως περὶ τὸ Ο. Ἐπὶ πλέον ἔχει τὴν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἴσην πρὸς ρ ἐκ κατασκευῆς, τὴν δὲ γωνιαν Β ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν, διότι, ἀφοῦ ἡ γων ΖΟΒ κατεσκευάσθη ἴση πρὸς τὴν συμπληρωματικὴν τῆς $\frac{B}{2}$, ἡ γωνία ΟΒΖ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{B}{2}$ καὶ συνεπῶς ἡ γων ΑΒΓ θὰ ἰσοῦται μὲ Β.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.— Ἐπειδὴ πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω κατασκευαὶ εἶναι δυναταί, τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν.

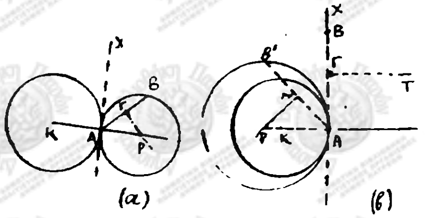
123.— Κύκλος ἐφαπτόμενος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων (κύκλοι παρεγγεγραμμένοι).

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύκλος οὗτος (Σχ. 60) ὁ ἐφαπτόμενος μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον του Ο′ ἐπὶ τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων ΒΟ′ καὶ ΓΟ′ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ὡς καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΑΟ′ τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Α.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.— Φέρομεν τὰς διχοτόμους ΒΟ′ καὶ ΓΟ′ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τῶν τριγώνων ΑΒΓ. Αὗται τέμνονται ὡς γνωστὸν (ἄσκ. 88) εἰς τὸ Ο′, ὅπερ ἀπέχει ἰσάκις τῶν πλευρῶν Βx, Γy καὶ τῆς ΒΓ. Ἄρα ἂν μὲ κέντρον τὸ Ο′ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν Ο′Ν, Ο′Ρ, Ο′Σ γραφῇ περιφέρεια αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

124.— Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β.



Σχ. 93.

Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ σημεῖον Α ἐπ' αὐτῆς καὶ σημεῖον Β (Σχ. 93 α). Θέλομεν νὰ γράψωμεν περιφέρειαν ἥτις νὰ ἐφάπτεται τῆς Κ εἰς τὸ Α καὶ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Β.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.- Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον ἤτοι ὅτι ἐγράφη ἡ ἐν λόγῳ περιφέρεια ἥτις ἔστω ὅτι εἶναι ἡ Ρ ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ Α τῆς περιφερειας Κ καὶ διερχομένη διὰ τοῦ Β. Προφανὲς εἶναι ὅτι ἀρκεῖ ν' ὁρισθῇ τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται, ἡ διάκεντρος αὐτῶν ΚΡ θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐπαφῆς Α, τὸ κέντρον συνεπῶς Ρ τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ ἔχῃ ὡς ἕνα γεωμετρικὸν τόπον τὴν προέκτασιν τῆς ΚΑ.

Ἀφ' ἑτέρου ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια θὰ διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β τὸ κέντρον ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, δηλαδὴ θὰ ἔχῃ ὡς δεύτερον γεωμ. τόπον τὴν κάθετον ΓΡ. Συνεπῶς τὸ κέντρον θὰ ὁρισθῇ ὡς τομὴ τῶν δύο τούτων γεωμ. τόπων.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ — Σύρομεν τὴν ΚΑ καὶ προεκτείνομεν αὐτήν, ἔχομεν οὕτω τὸν ἕνα τόπον τοῦ ἀγνώστου κέντρου. Κατόπιν φέρομεν τὴν ΑΒ καὶ τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς ΓΡ, ὁρίζομεν οὕτω καὶ τὸν δεύτερον γεωμ. τόπον τοῦ κέντρου. Ἡ τομὴ Ρ τῶν δύο τούτων γεωμ. τόπων ὁρίζει τὸ ἄγνωστον κέντρον. Ὁρισθέντος τοῦ κέντρου Ρ, γράφομεν περιφέρειαν ἔχουσαν κέντρον τὸ Ρ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ΡΑ ἢ ΡΒ. Λέγομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐν πρώτοις ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται διὰ τῶν Α καὶ Β διότι ἐγράφη μὲ κέντρον Ρ καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἴσων ΡΑ καὶ ΡΒ. Ἀφ' ἑτέρου αὕτη ἐφάπτεται τῆς Κ εἰς τὸ Α, διότι ἡ διάκεντρος αὐτῶν ΚΡ περιέχει τὸ Ρ καὶ συνεπῶς ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΡΑ.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.—Τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ λύσιν ἐφ' ὅσον οἱ δύο γεωμετρικοὶ τόποι θὰ τέμνωνται.

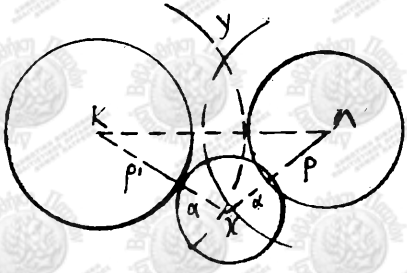
Θὰ ὑπάρχῃ δὲ τομὴ ἐφ' ὅσον τὸ Β ἔχει θέσιν δεξιὰ τῆς κοινῆς ἐσωτερικῆς ἐφαπτομένης Αx ὡς εἰς τὸ (Σχ.93α), ἡ δὲ ἐπαφὴ θὰ εἶναι ἐξωτερική.

Ἂν ὅμως τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Αx ὡς εἰς τὸ (Σχ. 93β) τότε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον Γ ἤτοι ἡ ΓΤ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΚΑ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν. (Ἢ χάριν τῆς γενικότητος ἔχει λύσιν μὲ κέντρον εἰς ἄπειρον).

Ἂν ἤδη τὸ Β ἔχῃ τὴν θέσιν Β′ ἀριστερὰ τῆς Αx ἡ κάθετος Γ′Ρ θὰ τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΚΑ ἀριστερὰ τοῦ Κ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, μὲ τὴν ζητουμένην περιφέρειαν ἐφαπτομένην ἐσωτερικῶς τῆς δοθείσης Κ καὶ περιέχουσαν ταύτην.

Ἂν τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τότε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ κέντρου Κ καὶ συνεπῶς ἡ ζητουμένη συμπίπτει μὲ τὴν δοθεῖσαν. Ἂν τέλος τὸ Β κεῖται ἐντὸς τῆς Κ, ἡ τομὴ θὰ γίνῃ μεταξὺ Κ καὶ Α, καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν μὲ τὴν ζητουμένην ἐντὸς τῆς δοθείσης, ἐφαπτομένης ταύτης ἐσωτερικῶς.

125.— Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν α.



Σχ. 94.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. — Ὑποθέτομεν τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω x ἡ ζητουμένη περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα α καὶ ἐφαπτομένη τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν Κ καὶ Λ ἐκτὸς (Σχ. 94). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄγνωστον κέντρον x, ἀπέχει τοῦ κέντρου Κ ἀπόστασιν Κx ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν γνωστῶν ἀκτίνων ρ′ καὶ α, ἄρα ἔχει ὡς ἕνα γεωμ. τόπον τὴν περιφέρειαν κέντρου Κ καὶ ἀκτῖνος ρ′+α. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ ἔχῃ ὡς ἕνα δεύτερον γεωμ. τόπον τὴν περιφέρειαν κέντρου Λ καὶ ἀκτῖνος ρ+α. Ἄρα τοῦτο θὰ ὁρισθῇ ὡς τομὴ τῶν δύο τούτων γεωμ. τόπων.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.— Γράφομεν τοὺς δύο γεωμ. τόπους, δηλαδὴ τὰς περιφερείας κέντρων Κ καὶ Λ καὶ ἀκτίνων ἀντιστοίχως ρ′+α καὶ ρ+α. Ἡ τομὴ τούτων θὰ ὁρίσῃ τὸ ἄγνωστον κέντρον. Ἔστω ἓν τῶν σημείων τομῆς αὐτῶν x. Μὲ κέντρον ἤδη τὸ x καὶ ἀκτῖνα ρ γράφομεν περιφέρειαν ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Πράγματι ἐπειδὴ ἡ διάκεντρος Κx τῶν περιφερειῶν Κ καὶ x ἰσοῦται μὲ τό ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων $\rho'+\alpha$, ἕπεται ὅτι αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐκτός. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ περιφέρεια x ἐφάπτεται ἐκτὸς καὶ τῆς περιφερείας Λ.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.—Αἱ περιφέρειαι κέντρων Κ, Λ καὶ ἀκτίνων $\rho'+\alpha$, $\rho+\alpha$ ἀντιστοίχως, δύνανται νὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα x, y, ὅτε τό πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις ἢ εἰς ἕν, ὅτε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν ἢ νὰ μὴ τέμνωνται ὅτε τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Αἱ συνθῆκαι ἵνα τό πρόβλημα ἔχῃ δύο λύσεις εἶναι ὅπως ἡ διάκεντρος αὐτῶν ΚΛ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων ἤτοι

$$ΚΛ<\rho+\alpha+\rho'+\alpha=2\alpha+\rho+\rho'$$

Ἵνα ὑπάρχῃ μία λύσις θὰ πρέπῃ

$$ΚΛ=\rho+\alpha+\rho'+\alpha=2\alpha+\rho+\rho'.$$

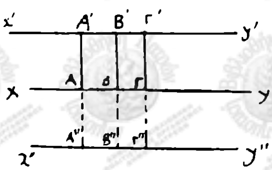
Ἂν ὅμως $ΚΛ>2\alpha+\rho+\rho'$ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ Β' ΒΙΒΛΙΟΥ

126.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Τὸ εὐθύ.— Ἔστω εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα Α', Β' κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς ἤτοι ΑΑ' = =ΒΒ' (Σχ. 95).

Σύρομεν βοηθητικῶς τὴν Α'Β'. Ἐπειδὴ ΑΑ' καὶ ΒΒ' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι τὸ σχῆμα ΑΒΒ'Α' εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον. Ἀλλὰ τότε ἡ Α'Β' θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ. Λέγομεν ὅτι ἡ παράλληλος αὕτη ἤτοι ἡ x'y' εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν τῆς xy.



Σχ. 95.

Τὸ ἀντίστροφον.—Θὰ δείξωμεν ἤδη ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχει τὴν ἰδιότητα ἤτοι ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς x'y' ἀπέχει τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν τῆς xy. Ἔστω πρὸς τοῦτο τὸ σημεῖον Γ' τῆς x'y'. Φέρομεν τὴν κάθετον Γ'Γ ἐπὶ τῆς xy, ὅτε σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον π.χ. ΒΓΓ'Β', ὅπερ δίδει ὅτι ΓΓ'=ΒΒ', ἤτοι ἡ ἀπόστασις οἱουδήποτε σημείου τῆς x'y' παραμένει σταθερῶς ἴση πρὸς τὴν ΒΒ'.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.—Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς x'y' (θεωρουμένης μετὰ τῆς xy ἐπ' ἄπειρον προεκτεινομένης) ἔχουν τὴν ἰδιότητα. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἔχομεν ὡς ἕνα δεύτερον γεωμ. τόπον τὴν x''y'' τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα Α'', Β'' ἀπέχουν ἀπὸ τῆς xy ἀποστάσεις Α''Α, Β''Β, ἴσας πρὸς ΑΑ'.

Συμπέρασμα.— Ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας $x'y'$, $x''y''$ αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν xy καὶ ἄγονται εἰς τὴν αὐτὴν ἀπὸ τῆς xy ἀπόστασιν.

ΟΔΗΓΙΑΙ

Κατὰ τὴν λύσιν τοῦ ἀνωτέρου προβλήματος ἐπὶ ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου, εὐκόλως θὰ παρατηρήσῃ τις ὅτι ἀκολουθεῖται ἡ ἑξῆς σειρὰ ἐργασίας.

Ἐν πρώτοις προσπαθοῦμεν νὰ καθορίσωμεν ποῖος εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος. Πρὸς τοῦτο δεχόμεθα ὅτι ἔχομεν ἕν σημεῖον ἢ καὶ περισσότερα τοῦ τόπου μὲ τὴν ἰδιότητά των, καθοριζομένην ἑκάστοτε ἐν τῇ ἐκφωνήσει. Κατόπιν προσπαθοῦμεν νὰ ἀνεύρωμεν ἰδιότητάς τινας τοῦ σημείου τούτου, συνδέοντες τοῦτο συνηθέστερον μὲ σταθερὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα θὰ ἔχωμεν εἰς τὸ πρόβλημα καὶ ἐξετάζοντες τὰς τοιαύτας ἀποστάσεις ἂν εἶναι σταθεραὶ ἢ ἔχουν διεύθυνσιν σταθερὰν κλπ.

Ὅλη ἡ τοιαύτη ἐργασία ἡ προϋποθέτουσα τὴν εὕρεσιν τοῦ τόπου ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον **εὐθὺ** τοῦ τόπου.

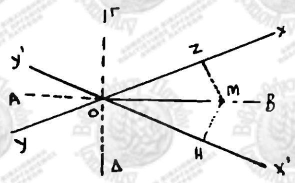
Ἂν δὲ κατορθώσωμεν καὶ ἀνεύρωμεν τὸν τόπον, πρέπει νὰ ἐπαληθεύσωμεν αὐτὸν ἤτοι νὰ ἐξετάσωμεν ἂν ἕν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχῃ τὴν ἐν τῇ ἐκφωνήσει ἀναγραφομένην ἰδιότητα. Τοῦτο ἀποτελεῖ τὸ καλούμενον **ἀντίστροφον** τοῦ τόπου.

Τέλος ἕκαστον πρόβλημα γεωμ. τόπου, θὰ πρέπῃ καὶ νὰ διερευνηθῇ ἤτοι νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὅλης τῆς γραμμῆς τῆς ἀποτελούσης τὸν τόπον τὰ σημεῖα ἔχουν τὴν ἰδιότητα ἢ μερικὰ μόνον.

Γενικὰ δὲν δυνάμεθα νὰ καθορίσωμεν ἕνα γενικὸν τρόπον ἐργασίας διὰ τὴν ἀνεύρεσιν τῶν γεωμ. τόπων, τοῦτο κυρίως εἶναι ἀποτέλεσμα πλήρους γνώσεως τῶν προτάσεων καὶ ἀρκετῆς ἐξασκήσεως ἐπὶ πολλῶν προβλημάτων τοῦ εἴδους τούτου.

127.—**Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.**

Τὸ εὐθύ.—Ἔστωσαν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι xOy καὶ $x'Oy'$ (σχ. 96). Ἔστω δὲ καὶ σημεῖόν τι Μ ἔχον τὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου τῶν τεμνομένων εὐθειῶν xOy καὶ $x'Oy'$, ἤτοι ΜΖ= =ΜΗ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἵνα σημεῖόν τι ἀπέχῃ ἴσον τῶν πλευρῶν γωνίας δέον νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας. Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος εἶναι ἡ διχοτόμος ΑΟΒ τῆς γωνίας xOx'. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ἀκόμη ὅτι ἡ προέκτασις τῆς ΟΒ ἤτοι ἡ ΟΑ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $y'Oy$. Ἐπίσης δὲ ὅτι ἡ ΓΟΔ κάθετος τῆς ΑΟΒ θὰ εἶναι διχοτόμος τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν $y'Ox$ καὶ yOx'. Ἐπειδὴ δὲ ὅ,τι ἰσχύει διὰ τὴν ΟΒ, θὰ ἰσχύσῃ καὶ διὰ τὰς λοιπὰς διχοτόμους, ἔπεται ὅτι τῶν εὐθειῶν ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου τῶν εὐθειῶν xOy καὶ καὶ $x'Oy'$ καὶ συνεπῶς αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ ἀποτελοῦν τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον.

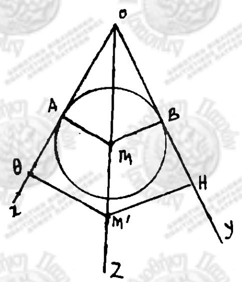


Σχ. 96.

Τὸ ἀντίστροφον.— Εὐκόλως δεικνύομεν ὅτι πᾶν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν εὐθειῶν xOy καὶ $x'Oy'$.

128.— **Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται δοθείσης γωνίας.**

Τὸ εὐθύ.—Ἔστω γωνία xOy καὶ κύκλος Μ ἐφαπτόμενος τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας (Σχ. 97). Ζητοῦμεν τὸν γεωμ. τόπον τοῦ Μ. Ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ΜΑ καὶ ΜΒ, αὗται εἶναι ἴσαι ὡς ἀκτῖνες. Ἀπέχει ἄρα τὸ Μ ἐξ ἴσου τῶν πλευρῶν τῆς γων xOy, καὶ συνεπῶς ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης. Ἤτοι ὁ γ. τόπος τοῦ Μ εἶναι ἡ διχοτόμος ΟΖ τῆς δοθείσης γωνίας.

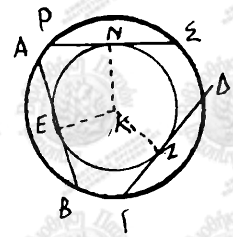


Σχ. 97.

Τὸ ἀντίστροφον.—Ἔστω ἤδη ἓν σημεῖον Μ′ τῆς διχοτόμου ταύτης. Ἂν ἀχθοῦν αἱ κάθετοι Μ′Η καὶ Μ′Θ αὗται ὡς γνωστὸν θὰ εἶναι ἴσαι. Τοῦτο σημαίνει ὅτι δύναται νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Μ′ καὶ ἀκτῖνα τὴν Μ′Θ. Ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ ἐφάπτεται τότε τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας xOy. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι καὶ πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΟΖ ἔχει τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι κέντρον κύκλου ἐφαπτομένου τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας.

129.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

Τὸ εὐθύ.— Ἔστω κύκλος Κ καὶ δύο ἴσαι χορδαὶ αὐτοῦ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 98). Ζητοῦμεν τὸν γ. τόπον τῶν μέσων τῶν ἴσων χορδῶν. Γνωρίζομεν ἰδιότητα τῶν ἴσων χορδῶν, νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου τοῦ κέντρου ἤτοι ἂν ἀχθοῦν ἐκ τοῦ κέντρου Κ αἱ εὐθεῖαι ΚΕ καὶ ΚΖ εἰς τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν χορδῶν, αὗται ὀφείλουν νὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς χορδὰς (§ 147) καὶ συγχρόνως ἴσαι ἤτοι ΚΕ=ΚΖ. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὰ μέσα τῶν ἴσων χορδῶν ἀπέχουν ἴσον ἐκ τοῦ κέντρου. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ μέσα ταῦτα εἶναι τὰ σημεῖα μιᾶς περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ μὲ ἀκτῖνα μίαν τῶν ἴσων ἀποστάσεων ΚΕ ἢ ΚΖ.



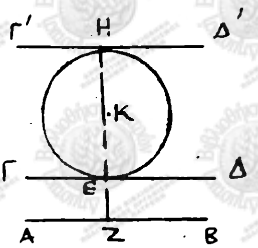
Σχ. 98.

Τὸ ἀντίστροφον.— Θεωρήσωμεν ἤδη ἓν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης ἔστω τὸ Ν. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΚΝ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Ν, ὥστε νὰ σχηματίσωμεν τὴν χορδὴν ΡΝΣ. Θὰ πρέπῃ αὕτη νὰ εἶναι ἴση μὲ μίαν τῶν ἄλλων χορδῶν ΑΒ ἢ ΓΔ. Πράγματι ἐπειδὴ εἶναι ΚΝ==ΚΕ ὡς ἀκτῖνες τοῦ ὁμοκέντρου κύκλου, ἕπεται ὅτι αἱ χορδαὶ ΡΣ καὶ ΑΒ, ἴσον ἀπέχουσαι τοῦ κέντρου, εἶναι ἴσαι. Ἀφ' ἑτέρου τὸ Ν εἶναι μέσον τῆς ΡΣ, διότι ἡ ΚΝ ἄγεται καθέτως ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς αὐτήν. Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς ὁμοκέντρου ταύτης περιφερείας εἶναι μέσον χορδῆς ἴσης πρὸς μίαν τῶν ΑΒ ἢ ΓΔ.

130.—Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ἡ περιφέρεια Κ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ. Θέλομεν νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας καὶ παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ (Σχ. 99).

Πρὸς τοῦτο φέρομεν ἐκ τοῦ Κ τὴν κάθετον ΚΖ ἐπὶ τὴν ΑΒ ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Ε καὶ Η. Ἂν ἤδη ἀχθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ Ε καὶ Η τῆς περιφερείας δηλαδὴ αἱ ΓΔ καὶ Γ΄Δ΄ αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ, ἀφοῦ πᾶσαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΗΚΕΖ.

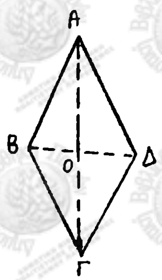


Σχ. 99.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.— Τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἐλύσαμεν ἀμέσως συνθετικῶς. Εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα θὰ ἀκολουθῶμεν τὴν αὐτὴν ὁδὸν ἐκτὸς ἂν τὸ πρόβλημα παρουσιάζει σχετικήν τινα δυσκολίαν. Οἱ μαθηταὶ ὅμως θὰ εἶναι πολὺ καλὸν νὰ ἀκολουθοῦν κατὰ τὴν λύσιν τὰ ὅσα προείπομεν δηλαδὴ ἀνάλυσιν—σύνθεσιν—ἀπόδειξιν—διερεύνησιν.

131.—Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος **ἔχων** δοθεῖσαν γωνίαν καὶ τὴν διαγώνιον, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς **δοθείσης γωνίας**.

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ, οὗ δίδεται ἡ γωνία Α καὶ ἡ διαγώνιος ΑΓ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς δοθείσης γωνίας Α (Σχ. 100). Γνωρίζομεν τὴν ἰδιότητα τῶν διαγωνίων τοῦ ῥόμβου, νὰ διχοτομοῦν τὰς γωνίας αὐτοῦ καὶ νὰ τέμνωνται καθέτως.

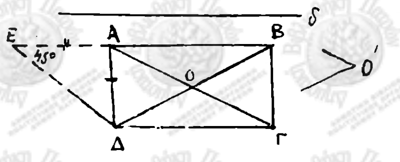


Σχ. 100

Κατασκευάζομεν, βάσει τῶν ἀνωτέρω, γωνίαν ΒΑΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ διχοτομοῦμεν αὐτὴν διὰ τῆς ΑΟΓ. Κατόπιν ἐπὶ τῆς διχοτόμου ταύτης λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν διαγώνιον. Τέλος ἐκ τοῦ ἄκρου Γ σύρομεν τὰς ΓΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΑΒ. Τὸ προκύπτον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ῥόμβος. Διότι ἔχει ἀφ' ἑνὸς τὰ δεδομένα στοιχεῖα, ἀφ' ἑτέρου ἡ μία διαγώνιος αὐτοῦ ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας αὐτοῦ Α. (Δηλαδὴ ἂν μία διαγώνιος παρ)μου εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν του, τοῦτο εἶναι ῥόμβος).

132.—Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου **δίδεται** ἡ περίμετρος καὶ ἡ γωνία τῶν διαγωνίων του.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐλύθη τὸ πρόβλημα καὶ ἔστω ΑΒΓΔ (Σχ. 101) **τὸ** ζητούμενον ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν περίμετρόν του ἴσην πρὸς **τὴν** δοθεῖσαν δ καὶ τὴν γωνίαν π. χ. ΑΟΔ ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν Ο'.



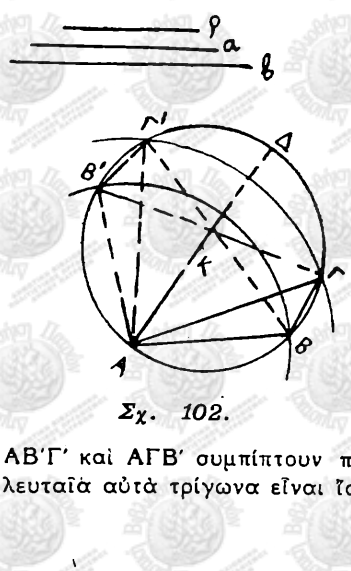
Σχ. 101.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο διαδοχικῶν πλευρῶν αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης περιμέτρου ἤτοι μὲ $\frac{\delta}{2}$. Ἐπὶ πλέον ἐ-

'πειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (διότι αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου διχοτομοῦνται καὶ εἶναι ἴσαι), ἡ γωνία ΑΟΔ=γωνΑΒΟ+γων ΒΑΟ= $=2$ γωνΑΒΟ ἤτοι γωνΑΒΟ$=\frac{1}{2}$ γωνΑΟΔ$=\frac{1}{2}$ γωνΟ΄. Δηλαδὴ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ τὸ ὁποῖον εἶναι ὀρθογώνιον γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του ΑΒ+ΑΔ$=\frac{\delta}{2}$ καὶ τὴν ὀξεῖαν γων ΑΒΔ $=$ $=\frac{1}{2}$ γων Ο΄ Τοῦτο ὅμως δύναται νὰ κατασκευασθῇ, διότι ἂν προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ καὶ λάβωμεν ΑΕ=ΑΔ, τὸ τρίγωνον ΕΔΒ κατασκευάζεται, διότι θὰ εἶναι ΑΒ + ΑΕ = ΑΒ + ΑΔ $=\frac{\delta}{2}$, καὶ γων Ε $= 45^0$ (διότι τὸ ΕΑΔ εἶναι ὀρθογώνιον ἰσοσκελές).

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.— Κατασκευάζομεν τρίγωνον ΔΕΒ ἔχον τὴν ΕΒ ἴσην πρὸς $\frac{\delta}{2}$ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας δοθείσας ἤτοι γων Ε $= 45^0$ καὶ γων ΕΒΔ $=\frac{1}{2}$ γων Ο΄. Κατασκευασθέντος τούτου φέρομεν ἐκ τοῦ Δ τὴν ΔΑ κάθετον τῇ ΕΒ καὶ προσδιορίζομεν τὸ τρίγωνον ΔΑΒ τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ΔΑ + ΑΒ = ΕΑ + ΑΒ $=\frac{\delta}{2}$. Ἂν ἤδη σύρωμεν ἐκ τοῦ Δ τὴν ΔΓ παράλληλον τῆς ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΓ παράλληλον τῇ ΑΔ ὁρίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. (Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἁπλῆ).

133.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο πλευραὶ καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.



Σχ. 102.

ΛΥΣΙΣ.— Μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Κ καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ρ γράφομεν περιφέρειαν (Σχ. 102). Κατόπιν λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας ταύτης τυχὸν σημεῖον Α καὶ μὲ ἀκτῖνας διαδοχικῶς τὰς δύο δοθείσας πλευρὰς γράφομεν τόξα τέμνοντα τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Β,Β΄ καὶ Γ,Γ΄ ἀντιστοίχως.

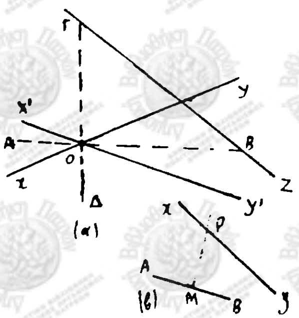
Σύρομεν κατόπιν τὴν ΓΒ καὶ ἔχομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον. Ἐπειδὴ ἔχομεν δύο σημεῖα τομῆς συμμετρικῶς τῆς διαμέτρου ΑΚΔ τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ Α, δι' ἕκαστον τῶν δύο γραφέντων τόξων, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχωμεν καὶ ἄλλην λύσιν, ἥτις δίδει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ΄. Αἱ λύσεις ΑΒ΄Γ΄ καὶ ΑΓΒ΄ συμπίπτουν πρὸς τὰς προηγουμένας, διότι τὰ δύο τελευταῖα αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ΄.

('Αποδεικνύεται ἂν ἀχθοῦν αἱ ΒΒ', ΓΓ' καὶ ἡ διάμετρος ΑΚΔ, ἥτις εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτάς). Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν θὰ πρέπῃ νὰ ἰσχύῃ ὁ ἑξῆς περιορισμός. Ἑκάστη τῶν πλευρῶν α, β πρέπει νὰ εἶναι μικροτέρα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου Κ ἤτοι $α<2ρ$ καὶ $β\leqslant 2ρ$ ἢ $α\leqslant 2ρ$ καὶ $β<ρ$.

134.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

ΛΥΣΙΣ.— Αἱ εὐθεῖαι ὑποτίθενται τεμνόμεναι. Τὸ κέντρον λοιπὸν τοῦ κύκλου θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς τομῆς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία ἄγεται παραλλήλως πρὸς μίαν τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι τότε ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν θὰ πρέπῃ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο εὐθειῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου.

135.— Ἐπὶ δεδομένης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ δύο δεδομένας εὐθείας ἢ ἀπὸ δύο δεδομένα σημεῖα.



Σχ. 103.

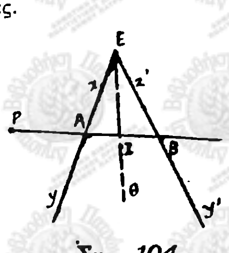
ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν (ἄσκ. 127), ὅτι τὰ σημεῖα τὰ ἰσάκις ἀπέχοντα ἀπὸ δύο εὐθειῶν (αἱ ὁποῖαι γενικῶς θεωροῦνται τεμνόμεναι) κεῖνται ἐπὶ τοῦ σταυροῦ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν δεδομένων εὐθειῶν. Ἐὰν λοιπὸν αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνουν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ζ, αἱ τομαὶ θὰ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα, ὡς εἰς τὸ Σχ. 103 α, τοιαῦτα σημεῖα εἶναι τὰ Β καὶ Γ.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν διχοτόμων. Τέλος δὲ ἔχει ἀπείρους λύσεις ἂν αὐτη συμπίπτῃ μὲ μίαν διχοτόμον.

Ὡς πρὸς τὸ δεύτερον μέρος τοῦ προβλήματος παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εἶναι ἡ τομὴ τῆς δοθείσης εὐθείας xy (Σχ. 103 β) καὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, δηλαδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ Ρ. Τὸ πρόβλημα δὲν θὰ ἔχῃ λύσιν ἂν ἡ εὐθεῖα xy εἶναι κάθετος τῇ ΑΒ ὅτε ἡ κάθετος ΜΡ δὲν θὰ τὴν συναντήσῃ ποτέ.

136.— Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζεται τρίγωνον ἰσοσκελές.

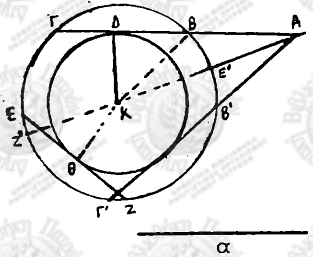
ΛΥΣΙΣ.— Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι xy καὶ x'y' αἱ ὁποῖαι ἔστω ὅτι τέμνονται εἰς τὸ Ε. Ἔστω δὲ ἀκόμη Ρ τὸ δοθὲν σημεῖον. Ζητοῦμεν νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖαν τέμνουσαν τὰς πλευρὰς yE καὶ y'E τῆς γωνίας yEy' ὥστε νὰ σχηματίζεται τρίγωνον ἰσοσκελὲς (Σχ. 104). Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν διχοτόμον ΕΙΘ τῆς γωνίας yEy' καὶ ἐκ τοῦ Ρ κάθετον ἐπ' αὐτήν. Τότε τὸ ἀποτεμνόμενον τρίγωνον εἶναι



Σχ. 104.

ἰσοσκελές. Πράγματι δὲ τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν του. Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Ρ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, (ἐκτὸς ἂν τὸ Ρ συμπίπτῃ μὲ τὴν κορυφὴν Ε).

137.—Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου κείμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.



Σχ. 105

Ἔστω κύκλος Κ καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Θέλομεν νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α εὐθεῖαν ΑΒΓ τέμνουσαν τὸν κύκλον, ὥστε τὸ ἐντὸς τοῦ κύκλου τμῆμα τῆς τεμνούσης, δηλαδὴ τὸ ΒΓ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ δοθὲν μῆκος α (Σχ. 105).

ΑΝΑΛΥΣΙΣ.—Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ἄχθῇ ἡ ΚΔ κάθετος τῇ ΒΓ, ὡς καὶ ἡ ΚΒ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΔΒ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΚΒ ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τὴν ΔΒ ἴσην πρὸς $\frac{\alpha}{2}$ (ἀφοῦ ΒΓ=α). Ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΔΒ κατασκευάζεται καὶ συνεπῶς ἡ ἀπόστασις ΚΔ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ΑΒΓ εἶναι ἐφαπτομένη ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.—Εἰσάγομεν εἰς τὸν κύκλον Κ χορδὴν ΕΖ ἴσην πρὸς α. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ τυχὸν σημεῖον Ε τῆς περιφερείας καὶ ἀκτῖνα α γράφομεν τόξον κύκλου τέμνον τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ Ζ. Ἡ χορδὴ ΕΖ θὰ ἰσοῦται τότε προφανῶς πρὸς α. Φέρομεν ἔπειτα τὴν κάθετον ΚΘ ἐπὶ τὴν χορδὴν ταύτην καὶ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ὡρισμένην ταύτην ΚΘ = ΚΔ γράφομεν ὁμόκεντρον περιφέρειαν κύκλου, πρὸς τὴν ὁποίαν φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὰς ἐφαπτομένας ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ′ (§ 130).

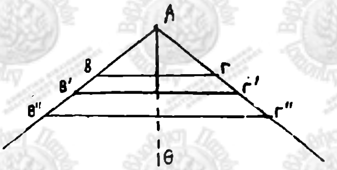
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ δύο μέρη ΒΓ καὶ Β′Γ′ τῶν τεμνουσῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒ′Γ′ εἶναι ἴσα πρὸς α.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.— Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν θὰ πρέπῃ τὸ τμῆμα α νὰ δύναται νὰ εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου Κ. Θὰ πρέπῃ συνεπῶς τὸ α νὰ εἶναι μικρότερον τῆς διαμέτρου. Ἂν ἰσοῦται πρὸς τὴν διάμετρον τότε ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΚ, ὅτε ἡ Ε′Ζ′ θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη χορδή.

Τέλος, ὁμοίως ἐντελῶς ἐργαζόμεθα ἂν τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἂν κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Κ. Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Κ θὰ πρέπῃ νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τῆς ὁμοκέντρου περιφερείας, ὅτε τὸ πρόβλημα δὲν θὰ ἔχῃ λύσιν. Ἂν κεῖται ἐπὶ τῆς ὁμοκέντρου περιφερείας τότε θὰ ἔχωμεν μίαν λύσιν.

138.—Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, οὗτινος ἡ γωνία τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι τετραπλασία ἑκατέρας τῶν δύο γωνιῶν τῆς βάσεως.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν κληθῇ x ἡ μία τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως, τότε ἡ γωνία τῆς κορυφῆς θὰ εἶναι $4x$. Θὰ ἔχωμεν συνεπῶς τὴν ἰσότητα $4x+x+x=$ $=180^0$ ἢ $6x=180^0$ ἢ $x=30^0$. Ἄρα ἡ γωνία τῆς κορυφῆς θὰ εἶναι $4.30^0=120^0$ καὶ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν βάσιν 30^0. Κατασκευάζομεν συνεπῶς μίαν γωνίαν $A=120^0$ καὶ φέρομεν τὴν διχοτόμον αὐτῆς ΑΘ (Σχ. 106). Πᾶσα κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον ταύτην ὡς ἡ ΒΓ, ἢ ἡ Β΄Γ΄, ἢ ἡ Β″Γ″ κλπ. θὰ ὁρίζῃ τρίγωνον ἰσοσκελὲς μὲ τὴν ἐν τῇ ἐκφωνήσει καθοριζομένην ἰδιότητα. Τὸ πρόβλημα συνεπῶς ἔχει ἀπείρους λύσεις.



Σχ. 106

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Β΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

52.— Διὰ σημείου κειμένου ἐκτὸς γωνίας, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ὥστε τὸ ἐντὸς τῆς γωνίας μέρος τῆς τεμνούσης νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐκτός.

53.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου καὶ τῶν γωνιῶν του.

54.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ δύο πλευρῶν καὶ μιᾶς διαμέσου (2 περιπτώσεις).

55.— Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐκ τοῦ ἀθροίσματος μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς διαγωνίου του.

56.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, μιᾶς τῶν προσκειμένων αὐτῇ γωνιῶν καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

57.— Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη δύο περιφερειῶν.

58.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ἐκ μιᾶς πλευρᾶς, τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

59. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου ἐξ ὧν ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο δοθείσας περιφερείας, αἵτινες εἶναι ἴσαι.

60.— Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας.

61.— Ὁμοίως νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου.

62.— Ὁμοίως νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα δοθεῖσαν ἀκτῖνα, ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου.

63.— Ὁμοίως νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας καὶ περιφερείας.

64.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἑκάστη τούτων τέμνει κατὰ διάμετρον δοθεῖσαν περιφέρειαν.

65.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ ἐξ ἑνὸς ὕψους του.

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Σελίς 90 § 187 **Η ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.**

Θέλομεν νά δείξωμεν ὅτι $M\,(\alpha+\beta) = (M\,.\,\alpha) + (M\,.\,\beta)$ ἔνθα Μ ἓν μέγεθος καὶ α, β δύο ἀριθμοί.

Ἐπειδὴ $\alpha+\beta$ παριστᾷ ἐπίσης ἕνα ἀριθμόν, τὸ $M.\,(\alpha+\beta)$ σημαίνει, νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ Μ, $\alpha+\beta$ φορὰς ἤτοι:

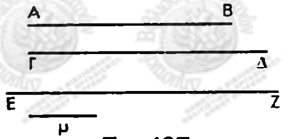
$$\underbrace{M+M+M+\ldots+M}_{\alpha+\beta \text{ φοράς}}$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον θὰ φθάσωμεν ἂν ἐπαναλάβωμεν τὸ Μ πρῶτον α φορὰς καὶ κατόπιν τὸ Μ ἐπίσης β φορὰς προσθέσωμεν δὲ τὰ δύο προκύπτοντα μεγέθη.

Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι $(M+M').\,\alpha = (M\,.\,\alpha) + (M'.\,\alpha)$ καὶ $(M\,.\,\alpha)\,.\,\beta = M\,.\,(\alpha\,.\,\beta)$.

Σελὶς 91 § 189. **ΘΕΩΡΗΜΑ.**

1) Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν τὰς δύο συμμέτρους εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ ἂς ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν εὐθειῶν (Σχ. 107). Ἔστω δὲ ἀκόμη μ τὸ κοινὸν



Σχ. 107

μέτρον τῶν εὐθειῶν τούτων (ἔχουν κοινὸν μέτρον διότι ὑπετέθησαν σύμμετροι), τὸ ὁποῖον ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δι' ἐπανήψεώς του 3 φορὰς δίδει τὴν ΑΒ καὶ διὰ ἐπαναλήψεώς του 5 φορὰς δίδει τὴν ΓΔ. Ἤτοι ἡ ΓΔ γίνεται ἀπὸ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ΑΒ ἐπαναληφθὲν πεντάκις δηλαδὴ ἡ ΓΔ γίνεται ἀπὸ

$$\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3}+\frac{AB}{3} = AB\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = AB.\,\frac{5}{3}.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐλήφθη ὡς μονὰς ἕπεται ὅτι ἡ ΓΔ παρίσταται μὲ τὸν ἀριθμὸν $\frac{5}{3}$

Ἂν τώρα ἡ ΓΔ ἐγίνετο ἐκ τοῦ $\frac{AB}{3}$ δι' ἐπαναλήψεως αὐτοῦ 6 φοράς, τότε ὡς ἄνω, ἡ ΓΔ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ ἀκεραίου 2.

Ὥστε ἐδείξαμεν ὅτι αἱ σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα ΑΒ εὐθεῖαι, ὡς ἡ ΓΔ, παρίστανται ὑπὸ ἀριθμῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν (καὶ λέγονται ὡς ἐκ τούτου σύμμετροι).

Ἀντιστρόφως: Ἔστω ὅτι μία εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ π. χ. ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 4.

Ἀλλὰ αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη προέκυψε ἀπὸ τὴν μονάδα μετρήσεως ἐπαναληφθεῖσαν 4 φοράς. Ἐὰν δὲ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{3}{5}$, τὸ ὁποῖον γράφεται καὶ $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ εὐθεῖα αὕτη προέκυψε ἀπὸ μέρος τῆς μονάδος, τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς, ἀφοῦ τοῦτο ἐπανελήφθη 3 φοράς. Ἐὰν δὲ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς μονάδος, τὸ ἐπαναλάβωμεν 5 φοράς, τότε θὰ προκύψῃ αὐτὴ αὕτη ἡ μονάς. Δηλαδὴ ὑπάρχει κοινόν τι μέρος $\left(\text{τὸ } \frac{1}{5} \text{ τῆς μονάδος}\right)$ διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ ὁποίου δύναται νὰ γίνῃ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα καὶ ἡ μονάς. Δηλαδὴ ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ μονὰς ἔχουν κοινὸν μέτρον καὶ ἄρα ἡ εὐθεῖα εἶναι σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

2) Ἄς λάβωμεν τώρα τὴν εὐθεῖαν ΕΖ (Σχ. 107) ἡ ὁποία ἂς ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν καὶ πάλιν ὡς μονάδα μετρήσεως.

Διά νά μετρήσωμεν τήν ΕΖ διά τῆς μονάδος ΑΒ, τήν συγκρίνομεν πρὸς τήν μονάδα ΑΒ καὶ ἔστω ὅτι ἡ σύγκρισις αὐτή ἔδωσε ὡς ἀποτέλεσμα ὅτι, ἡ ΕΖ ἀποτελεῖται ἀπὸ τήν ΑΒ πεντάκις καὶ ἀπὸ ἕνα ὑπόλοιπον P_1, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος ΑΒ. Τώρα διαιροῦμεν τήν μονάδα ΑΒ εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ εὑρίσκομεν ἀπὸ πόσα μέρη $\frac{AB}{10}$ ἀποτελεῖται τὸ μεῖναν ἀνωτέρω ὑπόλοιπον P_1. Ἔστω ὅτι ἡ δευτέρα αὐτή σύγκρισις ἔδωσε ὡς ἀποτέλεσμα, τὸ ὅτι τὸ P_1 ἀποτελεῖται ἀπὸ 3 μέρη ὡς τὸ $\frac{AB}{10}$ καὶ ὅτι ἔδωσε ἕν νέον ὑπόλοιπον ἔστω τὸ P_2, ὅπερ θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{AB}{10}$. (Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ τοῦ εἴδους τούτου μετρήσεις θὰ πρέπῃ νὰ ἀφήνουν ὑπόλοιπον, διότι ἄλλως ἡ ΕΖ ἐκφραζομένη μὲ ἕνα ἀριθμὸν ἀκέραιον ἢ κλασματικὸν συγκρινομένη πρός τήν ΑΒ, θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι σύμμετρος πρὸς τήν μονάδα ΑΒ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τήν ὑπόθεσίν μας ὅτι ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι ἀσύμμετροι). Κατόπιν διαιροῦμεν τὸ $\frac{AB}{10}$ εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ προκύπτει μία νέα μονὰς ἡ $\frac{AB}{100}$, πρὸς τήν ὁποίαν συγκρινόμενον τὸ P_2 ἔστω ὅτι δίδει ὡς ἀποτέλεσμα τὸν ἀριθμὸν 5 καὶ ἀφήνει καὶ ἕν νέον ὑπόλοιπον τὸ P_3 κ. ο. κ.

Εὑρίσκομεν λοιπὸν ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἑξῆς μέρη τῆς ΑΒ, τὰ 5. (ΑΒ), $3 \cdot \frac{AB}{10}$, $5 \cdot \frac{AB}{100}$, σὺν μέρος τι ἤτοι $EZ = AB \cdot 5 + AB \cdot \frac{3}{10} + AB \cdot \frac{5}{100} + \ldots$

ἢ $EZ = AB\left(5 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \ldots\right)$

καὶ ἐπειδή ἡ ΑΒ εἶναι μονὰς μετρήσεως ἕπεται ὅτι ἡ ΕΖ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὡς ὁ $5 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \ldots$ ὅστις θὰ ἔχῃ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ἀσύμμετρος.

Ἀντιστρόφως δὲ ἂν εὐθεῖα τις παρίσταται ὑπὸ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ, αὕτη ὀφείλει νὰ εἶναι ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα. Διότι ἂν ἦτο σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα τότε κατὰ τὸ (1) θὰ παρίστατο δι' ἀριθμοῦ συμμέτρου, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας ἥτις δίδει ὅτι παρίσταται ὑπὸ ἀριθμοῦ ἀσυμμέτρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

139.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι 1) 17,5 μ., 12,7 μ. 2) 0,3 μ., 0,04. 3) 0,25 μ., 0,035 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 191 εὑρίσκομεν

1) $E = 17{,}5 \cdot 12{,}7 = 222{,}25$ τ. μ. (τετραγ. μέτρα),

2) $E = 0{,}3 \cdot 0{,}04 = 0{,}0120$ τ. μ.

3) $E = 0{,}25 \cdot 0{,}35 = 0{,}008750$ τ. μ.

ἔνθα Ε παριστᾷ τὸ ἐμβαδόν.

140.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 1) 17 μ., 2) $3\frac{1}{4}$ μ. 3) 0,45 μ· ἢ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 1) 19 μ. 2) 3,04 μ. 3) 0,81 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα § 192 εὑρίσκομεν

1) $E = 17^2 = 289$ τ. μ.

2) $E = \left(3\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 = \frac{169}{16} = 10\frac{9}{16}$ τ. μ.

3) $E = (0{,}45)^2 = 0{,}2025$ τ. μ.

Ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι τὸ τέταρτον τῆς περιμέτρου, ἄρα τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι.

1) $E=\left(\frac{19}{4}\right)^2=\frac{361}{16}=22\frac{9}{16}$ τ. μ.

2) $E=\left(\frac{3,04}{4}\right)^2=(0,76)^2=0,5776$ τ. μ.

3) $E=\left(\frac{0,81}{4}\right)^2=(0,2025)^2=0,04100625$ τ. μ.

141.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἀντιστοίχως.

1) 19,3 μ., 96,5 τ. μ. 2) 8 μ., 3,60 τ. μ.
3) 0,45 μ , 0,0135 τ. μ.

ΛΥΣΙΣ.—Διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν διὰ τῆς βάσεως: Ἤτοι θὰ ἔχωμεν

1) $υ=96,5 : 19,3=5$ μ. 2) $υ=3,60 : 8=0,45$ μ.
3) $υ=0,0135 : 0,45=0,03$ μ.

142.—Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 1) 12321 τ.μ., 2) 62,41 τ μ., 3) 1,1416 τ.μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν σημείωσιν τῆς § 192 εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν ἂν εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ ἤτοι

1) $α = \sqrt{12321} = 111$μ.
2) $α = \sqrt{62,41} = 7,9$ μ. (κατὰ προσέγγισιν 0,1).
3) $α = \sqrt{1,1416} = 1,068$μ. (κατὰ προσέγγισιν 0,001)

ἔνθα α ἡ πλευρά.

Σελὶς 93. § 194. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον**
Διότι ἀμφότερα ταῦτα δύνανται νὰ μετασχηματισθῶσι εἰς ὀρθογώνια, ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, ἀλλὰ τὰ ὀρθογώνια θὰ εἶναι ἐφαρμόσιμα, ἄρα τὰ παραλληλόγραμμα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των, ὡς ἰσοδύναμα πρὸς τὰ ἴσα ὀρθογώνια.

Σελὶς 93. § 195. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον**
α') Διότι ἂν β καὶ υ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἑνός, β δὲ καὶ υ' ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἄλλου θὰ ἔχωμεν

$E = β . υ$ (διὰ τὸ πρῶτον παραλληλόγραμμον)
$E' = β . υ'$ (διὰ τὸ δεύτερον παραλληλόγραμμον).

Διαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\frac{E}{E'}=\frac{β . υ}{β . υ'}=\frac{υ}{υ'}$

Ἂν ὅμως ἔχουν ἴσα ὕψη θὰ εἶναι

$E = β . υ$, $E' = β' υ$ ἢ $\frac{E}{E'}=\frac{β . υ}{β' . υ}=\frac{β}{β'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

143.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος 1) 142 μ., 14,9μ., 2) 13,2μ., 0,64μ., 3) 0,009μ., 1,06μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 193 λαμβάνομεν

1) $E=142.14,9=2115,8$ τ.μ. 2) $E=13,2.0,64=8,5080$ τ.μ.
3) $E=0,009.1,06=0,009540$.

144.—Παραλληλογράμμου δύο προκείμεναι πλευραὶ εἶναι 9μ. καὶ 4 μ., ἡ δὲ κάθετος ἡ μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 2,5μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς καθέτου μεταξὺ τῶν μικροτέρων πλευρῶν αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἱανδήποτε τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ὡς βάσιν, τὸ ἐμβαδόν του ὁρίζεται κατὰ δύο τρόπους. Ἤτοι ἀφ' ἑνὸς μὲν ὡς γινόμενον τοῦ 9 ἐπὶ τὸ ὕψος 2,5 ἀφ' ἑτέρου ὡς γινόμενον τοῦ 4 ἐπὶ τὸ ἄγνωστον ὕψος x. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $4.x=9.2,5$.

Λύοντες δὲ ὡς πρὸς x λαμβάνομεν $x = 5{,}625$μ., τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὴν ἀπόστασιν τῶν μικροτέρων πλευρῶν του.

145.—Παραλληλογράμμου τινὸς ἡ περίμετρος εἶναι 44 μ. καὶ ἡ μία πλευρά του 8 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν μεγαλυτέρων πλευρῶν αὐτοῦ εἶναι 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ παραλληλογράμμου x, τότε ἡ περίμετρός του θὰ εἶναι $8+8+x+x$ ἤτοι $16+2x$, ἀλλὰ ἐδόθη ὅτι ἡ περίμετρος εἶναι 44 μ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$16+2x=44$ ἢ $2x = 44 - 16$ καὶ $x = 14$μ., ἄρα ἡ μεγαλυτέρα πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 14μ., συνεπῶς τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $E=14.6=84$ τ.μ.

146.—Ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν. Ποῖος εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπέναντι τῆς βάσεως ;

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ τὰ παραλληλόγραμμα αὐτὰ θὰ εἶναι ὅλα ἰσοδύναμα, ἔχουν δὲ τὴν αὐτὴν βάσιν, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι αἱ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφαὶ θὰ ἀπέχουν πάντοτε ἀπ' αὐτῆς, τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν. Ἀλλὰ τότε ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν ἄσκησιν 126, εἰς τὴν ὁποίαν εἴδομεν ὅτι ὁ γ. τόπος εἶναι δύο παράλληλοι, ἑκατέρωθεν τῆς βάσεως εὐθεῖαι ἀπέχουσαι ταύτης σταθερὰν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν παραλληλογράμμων.

Σελὶς 95. § 197 **ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον**

• Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 196 τοῦ βιβλίου, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἐξ οὗ προέκυψε διὰ μετασχηματισμοῦ. Ἀφ' ἑτέρου τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ διὰ τῶν καθέτων ἐκ τῶν Α καὶ Ε ἐπὶ τὴν ΒΓ δύναται νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον. Δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μετασχηματίζεται εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν π. χ. τὴν ΑΕ καὶ ὕψος τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ ἡ μὲν βάσις $AE = \frac{B\Gamma}{2}$ τὸ δὲ ὕψος ΑΖ εἶναι τὸ αὐτό.

Σελὶς 95. § 198. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον**

Δύο τοιαῦτα τρίγωνα μετασχηματιζόμενα εἰς ὀρθογώνια (ὡς ἄνω), δίδουν ἴσα ὀρθογώνια. Ἄρα ἐφαρμόζουσι ἀφοῦ διαιρεθοῦν εἰς μέρη, καὶ συνεπῶς εἶναι ἰσοδύναμα.

Σελὶς 95. § 199. **ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον**

1) Ἂν β ἡ ἴση βάσις των καὶ υ, υ' τὰ ὕψη των θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} \quad \text{καὶ} \quad E' = \frac{\beta \cdot \upsilon'}{2}$$

Διαιροῦντες ἤδη ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$\frac{E}{E'}=\frac{\frac{\beta\,.\,\upsilon}{2}}{\frac{\beta\,.\,\upsilon'}{2}}=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{\beta\,.\,\upsilon'}=\frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

2) Ἂν δὲ υ τὸ ἴσον ὕψος των καὶ β, β' αἱ βάσεις των θὰ ἔχωμεν

$$E=\frac{\beta\,.\,\upsilon}{2} \quad \text{καὶ} \quad E'=\frac{\beta'.\upsilon}{2}$$

ὅτε διαιροῦντες πάλιν κατὰ μέλη ἔχομεν $\frac{E}{E'}=\frac{\beta}{\beta'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

147.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος εἶναι 1) 34 μ., 13,7 μ., 2) 0,28 μ, 0,4 μ., 3) $3\frac{1}{2}$ μ., 0,03 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 196 λαμβάνομεν.

$$1)\quad E=\frac{34\;13,7}{2}=232,9 \text{ τ. μ.}$$

$$2)\quad E=\frac{0,28.0,4}{2}=0,056 \text{ τ. μ.}$$

$$3)\quad E=\frac{3,5.0,03}{2}=0,0525 \text{ τ. μ.}$$

148.—Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου εἶναι 18,4 μ. καὶ 6 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, ὅταν αἱ διαγώνιοι εἶναι α μ. καὶ β μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ὁ ρόμβος διὰ τῶν διαγωνίων του διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια δυνάμει τῆς γνωστῆς ἰδιότητος τῶν διαγωνίων του. Ἕκαστον ὅμως τῶν τριγώνων τούτων ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς διαγωνίου, ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης. Ἂν λοιπὸν εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, τετραπλασιάζοντες αὐτὸ θὰ ἔχωμεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου. Ἔστω λοιπὸν Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $E=\frac{18,4}{2}\cdot\frac{6}{2}:2=9,2.3:2=\frac{9,2.3}{2}=4,6.3=13,8$ τ.μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ρόμβου 13,8.4=55,2.

Γενικῶς: Ἂν α ἡ μία διαγώνιος καὶ β ἡ ἄλλη θὰ ἔχωμεν καλοῦντες Ε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων

$$E=\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\beta}{2}:2=\frac{\alpha\,.\,\beta}{4}:2=\frac{\alpha\,.\,\beta}{8}$$

τοῦ δὲ ρόμβου θὰ εἶναι $\frac{\alpha\,.\,\beta}{8}\times4=\frac{\alpha\,.\,\beta}{2}$

ΚΑΝΩΝ: Τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.

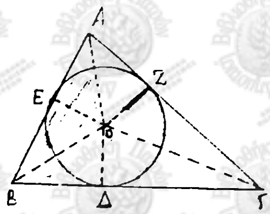
149.— Τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 15,8 μ. τὸ δὲ ἐμβαδὸν 72,68 τ. μ. Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ἀπέναντι τῆς βάσεως ἀπὸ ταύτης;

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, καλοῦντες τοῦτο x θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{15{,}8 \cdot x}{2} = 72{,}68 \text{ ἐξ ἧς } x = 9{,}2 \text{ μ.}$$

150 — Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Ο ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος (Σχ. 108). Φέρομεν τὰς ἀκτίνας ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ τὰς ὁποίας παριστῶμεν χάριν συντομίας διὰ τοῦ ρ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $Ε = Π \frac{ρ}{2}$ ἔνθα Π ἡ περίμετρος.



Σχ. 108

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σύρομεν βοηθητικῶς τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ σχηματίζομεν τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ὧν τὸ ἄθροισμα ἀποτελεῖ τὸ δεδομένον τρίγωνον. Ἀλλὰ ἕκαστον τῶν τριγώνων τούτων ἔχει ὡς βάσιν μὲν μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ κοινὸν καὶ ἴσον πρὸς τὴν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα

$$(ΑΒΓ) = (ΟΑΒ) + (ΟΒΓ) + ΟΓΑ) =$$

$$\frac{(ΑΒ) \cdot (ΟΕ)}{2} + \frac{(ΒΓ) \cdot (ΟΔ)}{2} + \frac{(ΑΓ) \cdot (ΟΖ)}{2} =$$

$$= \frac{(ΑΒ) \cdot ρ}{2} + \frac{(ΒΓ) \cdot ρ}{2} + \frac{(ΑΓ) \cdot ρ}{2}$$

$$= \Big[(ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΑΓ) \Big] \cdot \frac{ρ}{2}$$

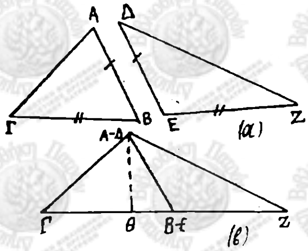
ἢ τελικῶς $Ε = Π \cdot \frac{ρ}{2}$ ἔνθα (ΑΒ) + (ΒΓ) + (ΑΓ) ἐτέθη συντόμως ἴσον πρὸς Π.

Σημείωσις.— Παριστῶντες τὴν περίμετρον διὰ τοῦ 2τ (ὡς εἰς τὸ ἀξιοσημ. πρόβλημα σελ. 69) θὰ ἔχωμεν $Ε = 2\ τ. \frac{ρ}{2} = τ. ρ$ ἤτοι Ε = τρ. Ὁ τύπος οὗτος εἶναι λίαν χρήσιμος καὶ ἐν τῇ τριγωνομετρίᾳ.

151.— Δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν, τὰς δὲ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας παραπληρωματικάς, εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 109 α) ἔχοντα τὰς πλευρὰς ΑΒ = ΔΕ, ΓΒ = ΕΖ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας Β καὶ Ε παραπληρωματικάς. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν τὸ ἕν τρίγωνον παρὰ τὸ ἄλλο ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ (ὡς εἰς τὸ σχημ. 109 β). Τότε ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Ε εἶναι παραπληρωματικαὶ αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ θὰ τεθοῦν ἐπ' εὐθείας γραμμῆς. Ἤδη ὅμως τὰ τρίγωνα ταῦτα ὡς ἔχουν εἰς τὰς νέας των θέσεις εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των ΓΒ = ΕΖ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (κοινὸν) τὸ ΑΘ (§ 198).



Σχ. 109

152.— Ποῖος εἶναι ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν;

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ ὅλα αὐτὰ τὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Δηλαδὴ καὶ πάλιν ἐπανερχόμεθα εἰς τὸν γ. τόπον (ἄσκησ. 126) εἰς τὸν ὁποῖον προσδιωρίσαμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων (ἐδῶ τῶν κορυφῶν τῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων) εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ βάσει, ἑκατέρωθεν ταύτης καὶ ἀγόμεναι εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν βάσιν ἴσην πρὸς τὸ ὕψος ἑνὸς ἐκ τῶν ἰσοδυνάμων τριγώνων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

153.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 9 μ. αἱ δὲ βάσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ μὲν 24,15 μ., ἡ δὲ 10,8 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῆς § 200 λαμβάνομεν εὐκόλως.

$$E = \frac{24{,}15 + 10{,}8}{2} \cdot 9 = 157{,}275 \text{ τ. μ.}$$

154.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος εἶναι 13,8 μ. τὸ δὲ ὕψος 3,75 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν ἄλλον κανόνα τῆς § 201 λαμβάνομεν

$$E = 13{,}8 \cdot 3{,}75 = 51{,}75 \text{ τ. μ.}$$

155.— Τραπέζιον ἔχει βάσεις 7,4 μ. καὶ 3,6 μ. καὶ ἐμβαδὸν 20,90 τ. μ. Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος του;

ΛΥΣΙΣ.— Καλοῦντες x τὸ ἄγνωστον ὕψος τοῦ τραπεζίου καὶ ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot \upsilon$ (ἔνθα Β, β αἱ βάσεις καὶ υ τὸ ὕψος) λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{(7,4+3,6)}{2} \cdot x = 20,90$

ἣν λύοντες εὑρίσκομεν $5,5\,x = 20,90$ ἢ $x = 3,8$ μ.

156.— Τραπέζιον ἔχει ἐμβαδὸν 42 τ. μ., ὕψος 5,5 μ καὶ τὴν μίαν τῶν βάσεών του 8,7. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη βάσις:

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες καὶ πάλιν τὸν ἀνωτέρω τύπον $E = \frac{B+\beta}{2} \cdot \upsilon$,

καὶ καλοῦντες x τὴν ἄγνωστον βάσιν, λαμβάνομεν $\frac{8,7+x}{2} \cdot 5,5 = 42$

ἢ $(8,7 + x)\,5,5 = 42 \cdot 2$ ἢ $5,5\,x + 47,85 = 84$

ἢ $5,5\,x = 36,15$ $x = 6,57$ μ.

Σελὶς 97. § 204. **ΠΟΡΙΣΜΑ**

Τοῦ δοθέντος πολυγώνου δυνάμεθα νὰ ἀποκόψωμεν μίαν πλευρὰν (§ 203), ὁμοίως ἐκ τοῦ νέου προκύψαντος πάλιν μίαν πλευρὰν κ. ο. κ. προχωροῦντες δυνάμεθα νὰ φθάσωμεν εἰς ἰσοδύναμον πολύγωνον ἔχον μόνον 3 πλευρὰς ἤτοι τρίγωνον.— Ἀλλὰ ἐκ τοῦ τριγώνου ἤδη εὐκόλως φθάνομεν εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον (§196—197).

157.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου (σελὶς 98) παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ νὰ μετρηθῇ ἡ ἀπροσπέλαστος ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ, ἀρκεῖ νὰ σχηματισθῇ περὶ αὐτὴν ἓν εὐθύγραμμον σχῆμα τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὴν ἀπροσπέλαστον αὐτὴν ἐπιφάνειαν. Συνήθως τοῦτο γίνεται ὀρθογώνιον ὡς τὸ σχῆμα δεικνύει. Ἀφοῦ λοιπὸν περιβάλλομεν τὴν ἀπροσπέλαστον ἐπιφάνειαν δι' ὀρθογωνίου, φέρομεν κατόπιν ἐκ τῶν κορυφῶν τῆς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου. Θὰ σχηματισθοῦν τότε περὶ ταύτην τραπέζια (ἂν αἱ πλευραὶ τῆς ἀπροσπελάστου ἐπιφανείας εἶναι εὐθεῖαι ὡς εἰς τὸ σχῆμα), τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὁποίων, ἂν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου, θὰ δώσῃ ὡς ὑπόλοιπον τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἀπροσπελάστου ἐπιφανείας.

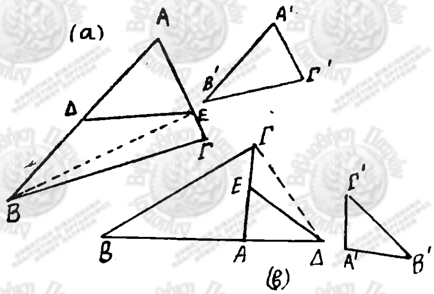
158.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα 2 τοῦ βιβλίου (σελὶς 98), παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΖΗ, ἀπὸ τοῦ ὁποίου θὰ ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν περιβαλλόντων τὸ ΑΒΓΔ σχημάτων ἤτοι τῶν ΑΕΒ (τριγώνου), ΒΓΖ (τριγώνου), ΑΔΤ (τριγώνου), ΔΓΘ (τριγώνου) καὶ ΤΔΘΗ (ὀρθογωνίου). [Θέσατε Τ καὶ Θ εἰς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἐκ τοῦ Δ καθέτων ἐπὶ τὰς ΑΗ καὶ ΗΓ). Ἔχομεν δὲ $(ΑΕΖΗ) = 22 \cdot 14 = 308$ τ. μ. $(ΑΕΒ) = \frac{22 \cdot 6}{2} = 66$ τ. μ., $(ΒΖΓ) = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48$ τ. μ. $(ΑΔΤ) = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$τ. μ. [διότι $ΑΤ = ΑΗ - ΤΗ = 14 - 11 = 3$], $(ΔΓΘ) = \frac{11 \cdot 6}{2} = 33$ τ. μ. [διότι $ΘΓ = ΗΓ - ΗΘ = 10 - 4 = 6$] καὶ $(ΔΤΗΘ) = 4 \cdot 11 = 44$ τ. μ.

Ἄρα $(ΑΒΓΔ) = 308 - 66 - 48 - 6 - 33 - 44 = 111$ τ. μ.

Ἡ κατωτέρω πρότασις εἶναι λίαν ἀξιοσημείωτος ἐπὶ τῶν ἐμβαδικῶν σχέσεων καὶ διὰ τοῦτο κρίνομεν ἀναγκαῖον νὰ τὴν σημειώσωμεν περαίνοντες τὰ περὶ ἐμβαδῶν.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ

«Ἐὰν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι ἴση ἢ παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας Α' ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ', τότε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν τῶν περιεχουσῶν τὰς γωνίας ταύτας».



Σχ. 110.

1) Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἄλλο Α΄Β΄Γ΄ (Σχ. 110α) ἔχοντα τὴν γωνΑ=γωνΑ΄. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{(Α'Β'Γ')}{(ΑΒΓ)}=\frac{(Α'Β')(Α'Γ')}{(ΑΒ)\ (ΑΓ)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ ὥστε ἡ γωνΑ΄ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης γωνΑ.

Τότε τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΑΔΕ. Σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΕΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΕΒ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Ε, τὰς δὲ βάσεις αὐτῶν ΑΔ καὶ ΑΒ ἐπ' εὐθείας, ὅτε ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των (ἰσοϋψῆ τρίγωνα) ἤτοι $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΕΒ)}=\frac{(ΑΔ)}{(ΑΒ)}$ (1). Ἐπίσης τὰ τρίγωνα ΑΕΒ καὶ ΑΒΓ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Β καὶ τὰς βάσεις των ΑΕ καὶ ΑΓ ἐπ' εὐθείας, ὅτε θὰ εἶναι ὁμοίως

$\frac{(ΑΕΒ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}$ (2). Πολλαπλασιάζοντες τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΔ)\ (ΑΕ)}{(ΑΒ)\ (ΑΓ)}$. Ἀλλὰ (ΑΔΕ)=(Α΄Β΄Γ΄), (ΑΔ)=(Α΄Β΄) καὶ (ΑΕ)= =(Α΄Γ΄), ὅτε ἡ ἄνω σχέσις γίνεται $\frac{(Α'Β'Γ')}{(ΑΒΓ)}=\frac{(Α'Β')(Α'Γ')}{(ΑΒ)\ (ΑΓ)}$.

2) Ἔστω ἤδη ὅτι γωνΑ+γωνΑ΄ = 2 ὀρθ. (Σχ. 110 β). Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ παρὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὥστε νὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΕΑΔ. Τότε ἡ ΒΑΔ θὰ εἶναι προφανῶς εὐθεῖα.

Σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΓΔ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΓΑΔ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Δ καὶ τὰς βάσεις των ΕΑ καὶ ΓΑ ἐπ' εὐθείας ὅτε θὰ πρέπῃ $\frac{(ΔΑΕ)}{(ΔΑΓ)}=\frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}$ (1)

Ὁμοίως δὲ τὰ τρίγωνα ΓΑΔ καὶ ΓΑΒ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Γ καὶ τὰς βάσεις των ΑΔ καὶ ΑΒ ἐπ' εὐθείας ὅτε $\frac{(ΔΑΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΔ)}{(ΑΒ)}$ (2)

Πολλαπλασιάζοντες ἤδη τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$\frac{(ΔΑΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΕ)\ (ΑΔ)}{(ΑΓ)\ (ΑΒ)}$.

Ἀλλὰ (ΔΑΕ) = (Α΄Β΄Γ΄), (ΑΕ) = (Α΄Γ΄) καὶ (ΑΔ) = (Α΄Β΄) ὅτε ἡ ἄνω σχέσις γίνεται $\frac{(Α'Β'Γ')}{(ΑΒΓ)}=\frac{(Α'Γ')(Α'Β')}{(ΑΓ)\ (ΑΒ)}$ καὶ συνεπῶς ἡ πρότασις ἐδείχθη καὶ εἰς ἣν περίπτωσιν αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ εἶναι παραπληρωματικαί.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66 *.— Νά ὁρισθῇ ἐντὸς τριγώνου σημεῖόν τι, ὥστε αἱ ἀγόμεναι ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι πρὸς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου, νὰ διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα. (Ἐργαζόμενοι ἀναλυτικῶς εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου).

67 *.— Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

68.— Ἐὰν τὰς πλευρὰς τριγώνου προεκτείνωμεν κατὰ τὴν αὐτὴν κυκλικὴν φορὰν κατὰ μήκη ἴσα πρὸς ἑαυτάς, συνδέσωμεν δὲ δι' εὐθειῶν τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων τούτων σχηματίζομεν τρίγωνον ἑπταπλάσιον τοῦ δοθέντος.

69.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἰσοσκελὲς ἰσοδύναμον πρὸς δεδομένον τρίγωνον καὶ ἔχον μετὰ τοῦ δοθέντος κοινὴν τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς (θὰ γίνῃ χρῆσις τῆς προηγουμένης ἀξιοσημειώτου προτάσεως).

70.— Διαιρέσατε παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ μίαν κορυφὴν αὐτοῦ.

71.— Ἐὰν συνδέσωμεν σημεῖόν τι μιᾶς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου μὲ τὰς δύο κορυφὰς αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἄλλην διαγώνιον, διαιροῦμεν τὸ σχῆμα εἰς τέσσαρα μέρη ἀνὰ δύο ἰσοδύναμα.

159.—Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ συνιστοῦν ἀναλογίαν τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων καὶ ἀντιστρόφως.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Τὸ εὐθύ : Ἔστω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι Α, Β, Γ, Δ, συνιστοῦν τὴν ἀναλογίαν $\frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη ἀναλογία μεγεθῶν τρέπεται καὶ εἰς ἀναλογίαν μέτρων (ἀρκεῖ τὰ ὁμοειδῆ μεγέθη νὰ μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

Ἄρα θὰ ἔχωμεν $\frac{(Α)}{(Β)} = \frac{(Γ)}{(Δ)}$ καὶ συνεπῶς τώρα δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ συμπεράσματα τῆς § 207 ἤτοι (Α) . (Δ) = (Β) . (Γ).

Ἀλὰ τὸ γινόμενον (Α) . (Δ) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν εὐθεῖαν Α καὶ ὕψος τὴν εὐθεῖαν Δ. Ὁμοίως καὶ τὸ γινόμενον (Β) . (Γ) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν εὐθεῖαν Β καὶ ὕψος τὴν εὐθεῖαν Γ.

Τὸ ἀντίστροφον.—Ἐὰν ἤδη γνωρίζωμεν ὅτι (Α) . (Δ) = (Β) . (Γ), θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς

$$\frac{(Α) . (Δ)}{(Β) . (Δ)} = \frac{(Β) . (Γ)}{(Β) . (Δ)} \quad ἢ \quad \frac{(Α)}{(Β)} = \frac{(Γ)}{(Δ)} \quad ἢ \quad \frac{Α}{Β} = \frac{Γ}{Δ}$$

διότι καὶ ἑκάστη ἀναλογία μέτρων δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἀναλογίαν μεγεθῶν (ἂν ταῦτα εἶναι ὁμοειδῆ § 205).

Σελίς 101. § 212. **Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ**

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι α καὶ α' εἶναι δύο τιμαὶ τυχοῦσαι ἑνὸς ποσοῦ καὶ β καὶ β' αἱ τιμαὶ αἱ ἀντίστοιχοι ἑνὸς ἄλλου ποσοῦ ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται τὸ προηγούμενον. Ἔστω δὲ ὅτι εἶναι $\frac{α}{α'} = \frac{β}{β'} = ρ$ (ἔνθα ρ ὁ σταθερός των λόγος).

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος ἕπονται αἱ ἰσότητες $α = α'ρ$ καὶ $β = β'ρ$. Ἀλλὰ τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ ποσὰ αὐτὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως (§ 210) διότι πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς α' τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἐπὶ τυχόντα ἀριθμὸν τὸν ρ, παρατηροῦμεν ὅτι καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ β' τοῦ ἄλλου ποσοῦ ἔχει πολλαπλασιασθῆ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ.

Σελὶς 102. § 213. **Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ**

Ἂς καλέσωμεν α, α', α'',... τὰς τιμὰς ἑνὸς ποσοῦ καὶ β, β' β''... τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ἑνὸς ἄλλου ποσοῦ ὁμοειδοῦς πρὸς τὸ πρῶτον. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι εἶναι

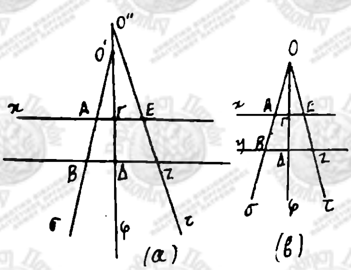
$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\dots=\rho.$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}$ ἢ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ὁμοειδῆ δι' ἀλλαγῆς τῶν ἄκρων θὰ ἔχωμεν (1) $\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}$. Ἐπίσης δὲ ἕπεται ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha''}{\beta''}$, ὅτε καὶ $\frac{\alpha''}{\alpha}=\frac{\beta''}{\beta}$ (2).

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) εὐκόλως ἤδη φαίνεται ὅτι τὰ ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως (βλέπε προηγουμένην ἀντίστροφον πρότασιν).

Σελὶς 106. § 220. **Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.**

Μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι δύο παραλλήλους εἰς μέρη ἀνάλογα, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (1).



Σχ. 111.

Ἔστωσαν αἱ μὴ παράλληλοι εὐθεῖαι σ, φ, τ τέμνουσαι τὰς παραλλήλους x, y εις μέρη ἀνάλογα (Σχ. 111α) ἤτοι οὕτως ὥστε

(α) $\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{\Gamma E}{\Delta Z}$ (μὲ λόγον διάφορον τῆς 1). Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ σ, φ, τ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὡς εἰς τὸ Σχ. 111β.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω ὅτι αἱ σ καὶ τ προεκτεινόμεναι τέμνουσι τὴν φ εἰς τὰ διάφορα σημεῖα Ο' καὶ Ο''.

Ἀπὸ τὰ τρίγωνα Ο'ΑΓ καὶ Ο'ΒΔ ἔχοντα τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ παραλλήλους λαμβάνομεν (§ 218)

$$\frac{O'A}{O'B}=\frac{O'\Gamma}{O'\Delta}=\frac{A\Gamma}{B\Delta} \qquad (1)$$

Ἀπὸ δὲ τὰ τρίγωνα Ο''ΓΕ καὶ Ο''ΔΖ λαμβάνομεν ὁμοίως

$$\frac{O''E}{O''Z}=\frac{O''\Gamma}{O''\Delta}=\frac{\Gamma E}{\Delta Z} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ οἱ τελευταῖοι λόγοι τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσοι ἐξ ὑποθέσεως (ἰσότης α), ἄρα καὶ οἱ μεσαῖοι λόγοι θὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι $\frac{O'\Gamma}{O'\Delta}=\frac{O''\Gamma}{O''\Delta}$

Ἀφαιροῦντες τώρα τοὺς ἡγουμένους ἀπὸ τοὺς ἑπομένους τῆς τελευταίας ταύτης ἀναλογίας λαμβάνομεν

---

(1) Ἡ ἀνωτέρω ἀντίστροφος πρότασις εἶναι λίαν ἀξιοσημείωτος καὶ δέον νὰ ἀποδοθῇ ἰδιαιτέρα προσοχὴ εἰς αὐτήν.

$$\frac{O'\Gamma}{O'\Delta - O'\Gamma} = \frac{O''\Gamma}{O''\Delta - O''\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{O'\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{O''\Gamma}{\Gamma\Delta} \quad \text{ἢ} \quad O'\Gamma = O''\Gamma.$$

Τὸ τελευταῖον τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα Ο' καὶ Ο'' συμπίπτουν εἰς ἓν σημεῖον Ο ὡς εἰς τὸ σχῆμα 111β. Ἄρα αἱ σ, φ, τ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Σελὶς 107. § 223. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

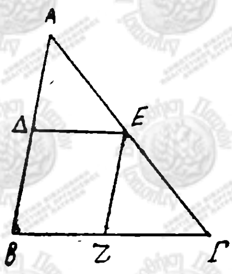
Διότι ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν Γ ἐπὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν Α καὶ Β ἐπίσης δοθειοῶν, σημαίνει ὅτι θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν $\Gamma \cdot \frac{(A)}{(B)}$. Τοῦτο παριστᾷ τὴν τετάρτην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν Γ, Α, Β, ἥτις ἂν κληθῇ x, δυνάμεθα νὰ τὴν εὕρωμεν (§ 222) θέτοντες $\frac{B}{A} = \frac{\Gamma}{x}$ ἢ $x = \Gamma \cdot \frac{(A)}{(B)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

160.— Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν καὶ δύο τμήματα τῆς μιᾶς ἔχουν λόγον 3 : 4 νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Τοῦτο εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ (§ 215).

161.— Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ τέμνει τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Δ καὶ Ε, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ ΑΒ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς ~~τὸ~~ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΔ) : (ΒΔ) = (ΒΖ) : (ΓΖ).



Σχ. 112.

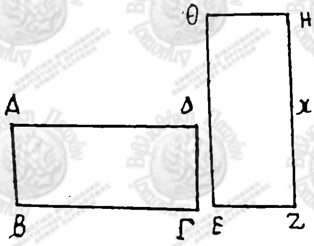
Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ, ΔΕ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἐκ δὲ τοῦ Ε ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ ΑΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{(A\Delta)}{(B\Delta)} = \frac{(BZ)}{(\Gamma Z)}$ (Σχ. 112).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ ΔΕ ∥ ΒΓ θὰ ἔχωμεν ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ἤτοι $\frac{(A\Delta)}{(\Delta B)} = \frac{(AE)}{(E\Gamma)}$. Ἐπίσης ἐπειδὴ ΕΖ ∥ ΑΒ θὰ ἔχωμεν ὁμοίως $\frac{(BZ)}{(Z\Gamma)} = \frac{(AE)}{(E\Gamma)}$. Ἀλλὰ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων εἶναι ἴσα ἄρα θὰ εἶναι καὶ τὰ πρῶτα ἴσα ἤτοι $\frac{(A\Delta)}{(\Delta B)} = \frac{(BZ)}{(Z\Gamma)}$.

162.— Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἐπὶ δοθείσης βάσεως ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον (πρβλ. § 222).

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον καὶ ΕΖ ἡ δοθεῖσα βάσις. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ (Σχ. 113).

ΛΥΣΙΣ.—Ἂς καλέσωμεν x τὸ ἄγνωστον ὕψος τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ. Τότε θὰ πρέπῃ (ΑΒΓΔ) = (ΕΖΗΘ) ἢ (ΒΓ) . (ΑΒ) = = (ΕΖ) . x ἢ ἂν γράψωμεν τοῦτο ὑπὸ μορφὴν ἀναλογίας (βλέπε καὶ ἄσκ. 159) θὰ ἔχωμεν $\frac{(EZ)}{(AB)} = \frac{(B\Gamma)}{x}$ δηλαδὴ τὸ x θὰ εὑρεθῇ ἂν κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν ΕΖ, ΑΒ, ΒΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι γνωστὰ (ὡς δεδομένα) Κατασκευασθέντος τοῦ x, ἐπὶ τῆς βάσεως ΕΖ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΖΗ ἴσην πρὸς x καὶ σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ καὶ ἄρα τὸ ζητούμενον.



Σχ. 113.

Σελὶς 108. § 228. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

Ἔστωσαν δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ', καὶ ΑΔ, Α'Δ' τὰ ὁμόλογα αὐτῶν ὕψη. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$. (Τὸ σχῆμα εἶναι ἁπλοῦν). Ἐξετάζομεν πρὸς τοῦτο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, Α'Β'Δ'. Ταῦτα ἐκτὸς τῆς ὀρθῆς ἔχουν καὶ τὴν γων Β = γωνΒ' (λόγῳ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΑΒΓ, Α'Β'Γ'). Ἄρα ταῦτα εἶναι ὅμοια ὅτε θὰ ἔχουν $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'}$ = μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος.

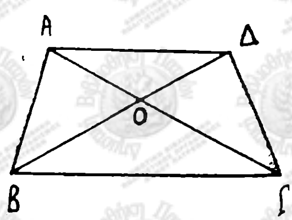
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

163.—Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχοντα τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς ἴσην εἶναι ὅμοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστωσαν δύο ὅμοια ἰσοσκελῆ τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς των ἴσας ἤτοι γωνΑ = γωνΔ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ 2 ὀρθὰς ὅτε Α+Β+Γ=Δ+Ε+Ζ (ὡς ἴσα ἕκαστον πρὸς 2 ὀρθάς). Ἀφαιροῦντες ἤδη ἀπὸ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης τὸ Α καὶ Δ (ὡς ἴσα), μένει Β+Γ=Ε+Ζ (1). Ἀλλὰ Β=Γ καὶ Ε=Ζ (ὡς παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελῶν τριγώνων) ὅτε ἡ (1) γίνεται 2Β=2Ε ἢ Β = Ε. Δηλαδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας εἶναι ὅμοια.

164.—Ἐὰν ἡ μία τῶν βάσεων τραπεζίου εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἓν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

Ἔστω τραπέζιον ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο. Ἔστω δὲ ὅτι (ΒΓ)=2 . (ΑΔ) ἢ $\frac{(B\Gamma)}{(A\Delta)} = 2$. Θὰ δείξωμεν ὅτι (ΟΓ)=2 (ΟΑ) καὶ (ΟΒ)=2 (ΟΔ) (Σχ. 114).



Σχ. 114.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐξετάζοντες τὰ τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΓ (εἰς τὰ ὁποῖα μετέχουν τὰ ἐν λόγῳ τμήματα), εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς περὶ τὸ Ο γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ γωνΔΑΟ=γωνΟΓΒ (ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ). Ἄρα θὰ πρέπῃ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν νὰ κεῖνται αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ἤτοι $\frac{(ΒΓ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΓΟ)}{(ΟΑ)} = \frac{(ΟΒ)}{(ΟΔ)}$,

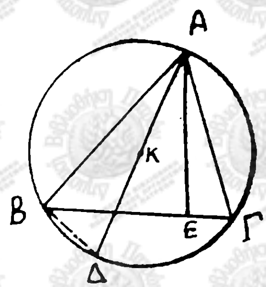
Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\frac{(ΒΓ)}{(ΑΔ)} = 2$ ὅτε καὶ ἄλλοι λόγοι θὰ πρέπῃ νὰ ἰσοῦνται μὲ 2. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν $\frac{(ΓΟ)}{(ΟΑ)} = 2$ καὶ $\frac{(ΟΒ)}{(ΟΔ)} = 2$ ἢ (ΓΟ)=2(ΟΑ) καὶ (ΟΒ)=2(ΟΔ).

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ὅταν, κατὰ τὴν σύγκρισιν δύο τριγώνων ὁμοίων, θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τοὺς λόγους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, θὰ πρέπῃ ἀμέσως νὰ γράψωμεν ὡς ἀριθμητὰς τὰς πλευρὰς τοῦ ἑνὸς τριγώνου καὶ παρονομαστὰς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου προσέχοντες ὥστε οἱ ὅροι ἑνὸς λόγου νὰ εἶναι πλευραὶ κείμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν.

165.— Ἐὰν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἀχθοῦν ἡ διάμετρος ΑΔ καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΕ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι (ΑΒ) : (ΑΔ)=(ΑΕ) : (ΑΓ).

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ (Σχ. 115). Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὸ ὕψος ΑΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}$



Σχ. 115

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ δυνηθῶμεν νὰ εὕρωμεν σχέσιν συνδέουσαν τὰ ΑΒ, ΑΔ; ΑΕ, ΑΓ, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δυὸ τρίγωνα ὅμοια, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ μετέχουν τὰ ἐν λόγῳ τμήματα. Πρὸς τοῦτο σύρομεν βοηθητικῶς τὴν ΒΔ καὶ ἐξετάζομεν τὰ τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΕΓ, εἰς τὰ ὁποῖα μετέχουν τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΓ. Ταῦτα εἶναι ὅμοια, διότι γων ΑΕΓ==γωνΑΒΔ=1 ὀρθὴ (ὡς ἐγγεγρ. εἰς ἡμικύκλιον) καὶ γωνΔ=γωνΓ (ἐπειδὴ εἶναι ἐγγεγρ. βαίνουσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος ταύτης ἕπεται (ἰδὲ προηγουμένην παρατήρησιν)

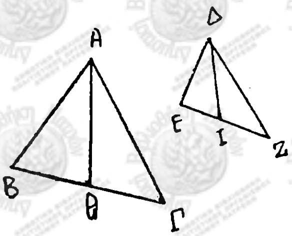
$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΕ)} = \frac{(ΑΔ)}{(ΑΓ)} = \frac{(ΒΔ)}{(ΕΓ)}$. Ἐκ τῶν λόγων τούτων διατηροῦμεν μόνον τοὺς δύο πρώτους ἤτοι $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΕ)} = \frac{(ΑΔ)}{(ΑΓ)}$ ἢ ἀλλάσσοντες τοὺς μέσους ἔχομεν $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΕ)}{(ΑΓ)}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

166.— Δύο ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἰσοσκελῆ, ἂν σχηματίσωμεν τὸν λόγον τῶν καθέτων των πλευρῶν, οἱ λόγοι οὗτοι θὰ εἶναι ἴσοι, ὡς λόγοι οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσους ἀριθμητὰς καὶ ἴσους παρονομαστάς. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ τῶν ἴσων τούτων λόγων περιεχομένη γωνία εἶναι ἴση, ὡς ὀρθή. Ἄρα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

167.—Αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι δύο ὁμοίων τριγώνων σχηματίζουν μετὰ τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν γωνίας ἴσας καὶ ἔχουν τὸν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν.



Σχ. 116.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ὅμοια, ὡς ἐπίσης καὶ αἱ ὁμόλογοι διάμεσοι αὐτῶν ΑΘ καὶ ΔΙ (Σχ. 116). Θὰ δείξωμεν ὅτι γωνΑΘΒ=γωνΔΙΕ καὶ γωνΑΘΓ=γωνΔΙΖ καὶ ὅτι $\frac{ΑΘ}{ΔΙ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\dots$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὅμοια θὰ ἔχωμεν $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΓ}{ΕΖ}$, Ἀλλὰ ΒΓ=2 . ΒΘ καὶ ΕΖ=2 . ΕΙ ὅτε $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{2.ΒΘ}{2.ΕΙ}$ ἢ $\frac{ΑΒ}{ΔΕ}=\frac{ΒΘ}{ΕΙ}$ (1). Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΘ καὶ ΔΕΙ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνΒ=γωνΕ (ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ) καὶ τὰς περιεχούσας τὰς γωνίας ταύτας πλευρὰς ἀναλόγους δυνάμει τῆς (1). Ἄρα θὰ ἔχωμεν ὅτι γωνΑΘΒ=γωνΔΙΕ (ὡς κείμεναι ἔναντι ὁμολόγων πλευρῶν εἰς ὅμοια τρίγωνα) καὶ $\frac{ΑΘ}{ΔΙ}=\frac{ΑΒ}{ΔΕ}$. Εὐκόλως δὲ φαίνεται ὅτι καὶ γωνΑΘΓ=γωνΔΙΖ.

168.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ Σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου (σελ. 110), ἐὰν μετρήσωμεν τὰς ΑΓ, ΓΔ, ΕΔ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μῆκος τῆς λίμνης διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΔΕ εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα τὰς περὶ τὸ Γ ὀξείας γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν. Ὅτε $\frac{ΑΒ}{ΕΔ}=\frac{ΑΓ}{ΓΔ}$ καὶ $(ΑΒ)=(ΕΔ).\frac{(ΑΓ)}{(ΓΔ)}$, ἀλλὰ τὰ ΕΔ, ΑΓ, ΓΔ εἶναι γνωστά, ὅτε καὶ ΑΒ γνωστόν.

169.—Ὁμοίως ἐκ τοῦ σχήματος 2 τοῦ βιβλίου (σελ. 110) εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦ δένδρου ἐκ τῆς σκιᾶς του ὡς ἑξῆς :

Ἡ αβ παριστᾷ μίαν ῥάβδον γνωστοῦ μήκους, ἡ ὁποία ἔχει ἐμπηχθῆ εἰς τὸ ἔδαφος κατακόρυφος. Προφανῶς καὶ αὐτὴ θὰ ρίπτῃ σκιάν, ἥτις ἔστω ὅτι εἶναι ἡ βγ, (ἧς τὸ μῆκος δύναται ἐπίσης εὐκόλως νὰ μετρηθῇ). Ἀλλ' ἐπειδὴ αἱ αγ καὶ ΑΓ εἶναι παράλληλοι (διότι παριστοῦν τὰς ἡλιακὰς ἀκτῖνας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς κορυφὰς α, Α καὶ αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται σχεδὸν παράλληλοι λόγῳ τῆς ἀπείρου ἀποστάσεως τοῦ ἡλίου ἀφ' ἡμῶν), τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα αβγ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὅτε $\frac{(ΑΒ)}{(αβ)}=\frac{(ΒΓ)}{(βγ)}$ ἢ $(ΑΒ)=(αβ).\frac{(ΒΓ)}{(βγ)}$ δηλαδὴ (ΑΒ) γνωστὸν ἀφοῦ ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι γνωστὰ μεγέθη.

170.— Ὁμοίως βάσει τοῦ σχήματος 3 τοῦ βιβλίου (σελὶς 110) δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ ὕψος βουνοῦ ὡς ἑξῆς :

Τὰ σημεῖα Α καὶ Β δίδονται ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους εἰς γνωστὴν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν. Κατόπιν τῇ βοηθείᾳ γωνιομετρικῶν ὀργάνων σκοπεύομεν τὴν κορυφὴν Κ καὶ προσδιορίζομεν τὰς γωνίας ΚΑΒ καὶ ΚΒΑ. Λαμβάνομεν τότε φύλλον χάρτου καὶ σχεδιάζομεν ἐπὶ τούτου τρίγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ ΚΑΒ, ἀλλὰ ὑπὸ κλίμακα π.χ. 1 πρὸς

1000, δηλαδὴ σχεδιάζομεν τὴν ΑΒ χιλίας φορὰς μικροτέραν τῆς πραγματικῆς καὶ παρ' αὐτὴν σχηματίζομεν γωνίας ἴσας πρὸς τὰς διὰ τῶν γωνιομέτρων εὑρεθείσας. Ἂν εἰς τὸ τρίγωνον τοῦ σχεδίου φέρωμεν τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν τῇ ΑΒ, τοῦτο (§ 228) θὰ εἶναι ὁμόλογον τοῦ πραγματικοῦ ΚΛ. Μετροῦντες ἤδη τὸ ἐν τῷ σχεδίῳ ὕψος καὶ πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῆς κλίμακος, θὰ εὕρωμεν τὸ πραγματικὸν ὕψος τοῦ βουνοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171.—Δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι 5 μ. καὶ 3 μ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι 75 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου.

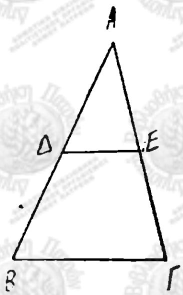
ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δευτέρου τριγώνου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{E}{75}=\frac{3^2}{5^2} \quad \text{ἢ} \quad E=\frac{9}{25}\cdot 75 = 27 \text{ τ. μ.}$$

172.—Ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ, ἡ ΔΕ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ, τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 5. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΕ ἡ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον 3 : 5 ἤτοι $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{3}{5}$. Ζητοῦμεν τὸν λόγον $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=$; (Σχ. 117).

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ βάσει, τὰ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, ὅτε ὁ λόγος $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(ΑΔ)^2}{(ΑΒ)^2}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$. Ἀλλὰ ἔχομεν $\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{3}{5}$ ἢ $\frac{ΑΔ}{ΑΔ+ΔΒ}=$



Σχ. 117.

$=\frac{3}{3+5}$ ἢ $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{3}{8}$. Συνεπῶς $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{3^2}{8^2}=\frac{9}{64}$.

173.—Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 6, 7, 8μ. Ποῖαι αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου τριγώνου καὶ διπλασίαν ἔχοντος ἐπιφάνειαν.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἔχοντος πλευρὰς 6, 7, 8, τοῦ ὁμοίου του ἡ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι 2Ε. Ἂν δὲ τούτου αἱ πλευραὶ κληθῶσι x, y, ω θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$\frac{E}{2E}=\frac{6^2}{x^2}=\frac{7^2}{\psi^2}=\frac{8^2}{\omega^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{2}=\frac{6^2}{x^2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{7^2}{y^2} \qquad \frac{1}{2}=\frac{8^2}{\omega^2}$$

$$\text{ἢ} \quad x^2=6^2\cdot 2 \qquad y^2=7^2\cdot 2 \qquad \omega^2=8^2\cdot 2$$

$$\text{ἢ} \quad x=6\sqrt{2}\text{ μ.} \qquad y=7\sqrt{2}\text{ μ.} \qquad \omega=8\sqrt{2}\text{ μ.}$$

Σελὶς 114. § 242. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

Ἂν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τῶν δοθέντων τετραγώνων β, γ, τὰ ἐμβαδά των θὰ εἶναι β^2 καὶ γ^2. Ἐὰν δὲ κληθῇ x ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2. Θὰ πρέπῃ δὲ νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $x^2 = \beta^2 + \gamma^2$ Ἐκ τούτου ὁδηγούμεθα εἰς τὸ νὰ λάβωμεν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων αὐτῆς πλευρῶν δύο τμήματα ἴσα πρὸς β καὶ γ ἀντιστοίχως ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς.

Ἐὰν τώρα συνδέσωμεν τὰ πέρατα τῶν τμημάτων τούτων θὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον οὗ ἡ ὑποτείνουσα θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ x.— Διότι θὰ πληροῦται πλέον ἡ ἰσότης $x^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

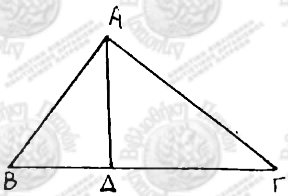
Σελὶς 114. § 243. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

Ἂν καλέσωμεν τὰς πλευρὰς τῶν δοθέντων τετραγώνων β, γ, τὰ ἐμβαδά των θὰ εἶναι β^2 καὶ γ^2. Ἐὰν δὲ x κληθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2. Θὰ πρέπῃ δὲ νὰ ἔχωμεν τὴν ἰσότητα $x^2 = \beta^2 - \gamma^2$ (δεχόμενοι ὅτι $\beta > \gamma$).

Ἐκ τούτου ὁρμώμεθα νὰ κατασκευάσωμεν καὶ πάλιν ὀρθὴν γωνίαν. Ἐπὶ μιᾶς τῶν καθέτων αὐτῆς πλευρῶν καὶ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς ἀρχόμενοι, λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμῆμα ἴσον πρὸς γ. Κατόπιν μὲ κέντρον τὸ ἄκρον τοῦ τμήματος καὶ ἀκτῖνα ἴσην πρὸς β γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τμήσῃ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν εἴς τι σημεῖον (καθότι $\beta > \gamma$) ὁριζομένης οὕτω τῆς ζητουμένης πλευρᾶς x, διότι θὰ εἶναι $x^2 = \beta^2 - \gamma^2$. (§ 240).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

174.— Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι 5 μ. καὶ 4 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα, ὡς καὶ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.



Σχ. 118.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Α ὀρθὴ) καὶ ΒΔ καὶ ΔΓ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (Σχ. 118). Δίδονται δὲ ΑΒ = 4 μ. καὶ ΑΓ = 5 μ. καὶ ζητοῦνται αἱ ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ. Ἡ ΒΓ ὑπολογίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος καὶ εἶναι $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41$ ἄρα $(ΒΓ) = \sqrt{41}$ μ. Αἱ δὲ προβολαὶ ΒΔ καὶ ΓΔ βάσει τοῦ πορίσματος τῆς § 238 καὶ εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΒΓ)$ καὶ $(ΑΓ)^2 = (ΔΓ)\,(ΒΓ)$. Φέροντες δὲ τὰς τιμάς των λαμβάνομεν $4^2 = (ΒΔ).\ \sqrt{41}$ ἢ $(ΒΔ) = \dfrac{16}{\sqrt{41}} = \dfrac{16\sqrt{41}}{41}$ μ.

καὶ $5^2 = (ΔΓ) \cdot \sqrt{41}$ ἢ $(ΔΓ) = \dfrac{25}{\sqrt{41}} = \dfrac{25\sqrt{41}}{41}$ μ.

175.—Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 13 μ. καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 12 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη πλευρά ὡς καὶ αἱ προβολαὶ τῶν καθέτων πλευρῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

ΛΥΣΙΣ.—Βάσει τοῦ προηγουμένου σχήματος, ἂν θέσωμεν (ΒΓ)=13μ. (ΑΓ)=12μ. ζητοῦμεν τὰ ΑΒ, ΒΔ, ΔΓ. Ἔχομεν διὰ τὴν ΑΒ ὅτι $(ΑΒ)^2 =$

$= (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$ ἄρα $(ΑΒ) = \sqrt{25} = 5$μ.
Ἤδη τὰ ΒΔ, ΔΓ τὰ ὑπολογίζομεν πάλιν ὡς ἀνωτέρω ἤτοι

$(ΑΒ)^2 = (ΒΔ).(ΒΓ)$ ἢ $5^2 = (ΒΔ).13$ ἢ $(ΒΔ) = \frac{25}{13}$ μ.

καὶ $(ΑΓ)^2 = (ΔΓ).(ΒΓ)$ ἢ $12^2 = (ΔΓ).13$ ἢ $(ΔΓ) = \frac{144}{13}$ μ.

176.—Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν x τὴν μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς θὰ ἔχωμεν $x^2 + x^2 = 5^2$ ἢ $2x^2 = 5^2$ ἢ $x^2 = \frac{5^2}{2}$

ἢ $x = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5.\sqrt{2}}{2}$ μ. Ὥστε ἑκάστη τῶν ἄλλων πλευρῶν

εἶναι $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ μ.

Τὸ δὲ ἐμβαδόν του θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν καθέτων πλευρῶν του ἤτοι

$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25.2}{4} = \frac{25}{4}$ τ. μ.

177.—Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραί του εἶναι 5 μ., 5 μ. καὶ 7 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐπὶ τὴν βάσιν 7 ἀγόμενον ὕψος. Τοῦτο προφανῶς ἄγεται εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως καὶ σχηματίζει δυὸ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα. Ἂν λοιπὸν τὸ ὕψος τοῦτο κληθῇ x, ἐξ ἑνὸς τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων, λαμβάνομεν $x^2 = 5^2 - 3{,}5^2$ ἢ $x^2 = 12{,}75$
ἢ $x = \sqrt{12{,}75} = 3{,}57$ μ.

Τὸ ἐμβαδόν του λοιπὸν θὰ εἶναι $E = \frac{7 \cdot 3{,}57}{2} = 12{,}495$τ.μ.

178.—Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 1) 3 μ. 2) α μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ΛΥΣΙΣ.— 1) Προσδιορίζομεν τὸ ὕψος ὡς ἀνωτέρω, καλοῦντες δὲ τοῦτο x ἔχομεν $x^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$

ἢ $x = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{\sqrt{3\,9}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ μ.

Τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι τώρα

$E = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3^2 . \sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} = 3{,}85$ τ.μ.

2) **Γενικῶς.**— Τὸ ὕψος x θὰ εἶναι $x^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$

ἢ $x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Καὶ τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$.

Τὰ δύο ἄνω ἐξαγόμενα καλὸν θὰ εἶναι νὰ ἐνθυμούμεθα ἀπὸ μνήμης (διότι θὰ τὰ συναντῶμεν συχνά). Ἤτοι

Τύποι ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α.

Ὕψος $= \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$	**Ἐμβαδὸν** $= \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

179.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν δύο τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ ὑπὸ τοῦ ὕψους.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 118) καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $(ΑΓ)^2 - (ΑΒ)^2 = (ΔΓ)^2 - (ΒΔ)^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Διὰ τοῦ ὕψους ΑΔ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ.

Ἐκ τοῦ πρώτου λαμβάνομεν $(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΒ)^2$.

Ἀφαιροῦντες τώρα τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν

$$(ΑΓ)^2 - (ΑΒ)^2 = (ΔΓ)^2 - (ΔΒ)^2.$$

180.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 118) ὀρθογώνιον εἰς τὴν γωνίαν Α καὶ ΒΔ καὶ ΔΓ αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2} = \frac{(ΒΔ)}{(ΔΓ)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸ πόρισμα τῆς § 238 λαμβάνομεν

$(ΑΒ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΒΓ)$ καὶ $(ΑΓ)^2 = (ΔΓ) \cdot (ΒΓ)$.

Διαιροῦντες ἤδη τὰς δύο ταύτας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν ἀποδεικτέαν σχέσιν ἤτοι $\frac{(ΑΒ)^2}{(ΑΓ)^2} = \frac{(ΒΔ)}{(ΔΓ)}$.

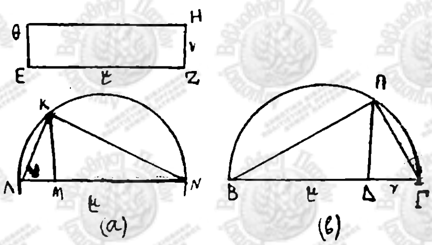
181.—Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τριῶν δοθέντων τετραγώνων.

ΛΥΣΙΣ.—Κατασκευάζομεν συμφώνως μὲ τὸ πόρισμα τῆς 242 τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθέντων τετραγώνων. Κατόπιν δὲ κατασκευάζομεν διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἄλλο τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ κατασκευασθέντος τετραγώνου καὶ τοῦ τρίτου δοθέντος.

Σελὶς 115. § 245. **ΠΡΟΒΛΗΜΑ.**

Ἔστω τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον ΕΖΗΘ ἔχον διαστάσεις ΕΖ=μ καὶ ΖΗ=ν (Σχ. 119). Ζητοῦμεν νὰ κατασκευάσωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ὁρισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Θὰ στηριχθῶμεν ἐπὶ τοῦ πορίσματος τῆς § 238 καὶ τοῦ θεωρήματος τῆς § 244.



Σχ. 119.

α) Τρόπος. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ΛΝ=μ καὶ ἐπὶ ταύτης τμῆμα ΛΜ=ν (Σχ. 119α). Μὲ διάμετρον τὴν ΛΝ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ εἰς τὸ σημεῖον Μ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΜΚ ἐπὶ τὴν ΛΝ τέμνουσαν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Κ. Σύρομεν τὴν ΚΛ καὶ ΚΝ. Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΚΛΝ εἶναι ὀρθογώνιον (ἐγγεγρ. εἰς ἡμικύκλιον) θὰ ἔχωμεν (§ 238) ὅτι $(ΚΛ)^2 = (ΛΝ)\ (ΛΜ)$ ἢ $(ΚΛ)^2 = μ.ν.$ Ἤτοι ἡ (ΚΛ) παριστᾷ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον (ΕΖΗΘ)=μ.ν.

β) Τρόπος. Λαμβάνομεν ἐπ' εὐθείας τμῆμα ΒΔ=μ καὶ ἐν συνεχείᾳ τούτου ἄλλο ΔΓ=ν (Σχ. 119 β). Κατόπιν μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καὶ ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΔΑ εἰς τὸ Δ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Α. Σύρομεν κατόπιν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν (§ 244) $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ).(ΔΓ)$ ἢ $(ΑΔ)^2 = μ.ν.$ Ἤτοι ἡ (ΑΔ) εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Σελὶς 115 § 246. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

Ἐκ τοῦ δοθέντος εὐθυγράμμου σχήματος βάσει τοῦ προβλήματος 203—204 δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἰσοδύναμον τρίγωνον, ἐκεῖθεν ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον καὶ τέλος ἰσοδύναμον τετράγωνον βάσει τοῦ ἀμέσως ἀνωτέρω προβλήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

182.— Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους, εἶναι τὸ μὲν 6,4 μ. τὸ δὲ ἄλλο 3,6 μ. Ζητοῦνται: τὸ ὕψος, αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἀναφερόμενοι καὶ πάλιν εἰς τὸ Σχ. 118 καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῆς § 244 λαμβάνομεν $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)(ΔΓ) = 3,6\,.\,6,4$ ἢ $(ΑΔ) = 0,8 \cdot 0,6 = 4,8$ μ. Ἡ (ΑΒ) εὑρίσκεται (§ 238) ἀπὸ τὴν σχέσιν $(ΑΒ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΒΓ) = 3,6 \cdot 10 = 36$ ἢ $(ΑΒ) = 6$ μ. καὶ ὁμοίως $(ΑΓ)^2 = (ΔΓ) \cdot (ΒΓ) = 6,4 \cdot 10 = 64$ ἢ $(ΑΓ) = 8$ μ.

Τὸ δὲ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιγινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν

ἤτοι $E = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \cdot$ τ. μ.

183.— Ὀρθογωνίου τριγώνου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 6 μ. καὶ 8 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ πάλιν τὸ σχῆμα 118 εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ἤτοι $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$ ὅτε $(ΒΓ) = 10$ μ. Ἤδη ὁρίζομεν τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ ὡς ἑξῆς: Εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΒΓ)$ ἢ $6^2 = (ΒΔ) \cdot 10$ ἢ $(ΒΔ) = \frac{36}{10} = 3{,}6$ καὶ ὁμοίως $(ΑΓ)^2 = (ΔΓ) \cdot (ΒΓ)$ ἢ $8^2 = (ΔΓ) \cdot 10$ ἢ $(ΔΓ) = \frac{64}{10} = 6{,}4$ ὅτε ἐπειδὴ $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ) \cdot (ΔΓ)$ θὰ ἔχωμεν $(ΑΔ)^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4$ ἢ $(ΑΔ) = 4{,}8$. Τὸ ὕψος εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ὕψος δίδει τὸ διπλάσιον ἐμβαδόν, ὡς ἐπίσης καὶ τὸ γινόμενον τῶν καθέτων πλευρῶν δίδει τὸ διπλάσιον ἐμβαδόν, θὰ πρέπῃ τὰ δύο αὐτὰ γινόμενα νὰ εἶναι ἴσα. Ἤτοι ἂν καλέσωμεν x τὸ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος θὰ ἔχωμεν

$$10 \cdot x = 6 \cdot 8 \quad ἢ \quad x = 4{,}6.$$

184.—Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐμάθομεν εἰς τὴν παράγραφον 197 νὰ κατασκευάζωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Ἀλλὰ ἐμάθομεν ἐπίσης εἰς τὸ πρόβλημα (§ 245), νὰ κατασκευάζωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

185.—Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων ὀρθογωνίων.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐμάθομεν εἰς τὸ πρόβλημα § 245 νὰ κατασκευάζωμεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν δύο τετράγωνα ἀντιστοίχως ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα ὀρθογώνια.

Κατόπιν κατασκευάζομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων συμφώνως πρὸς τὸ πρόβλημα (§ 252).

Σελὶς 117 § 251. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**

α) Τρόπος. (Μὲ τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ὃ εἶναι $(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2$ (Σχ. 120α). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ γωνία Δ εἶναι ὀρθή. Ἔστω ὅτι αὕτη εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Τότε ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον ἐκ τοῦ Γ, ἡ κάθετος αὕτη θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΓΖ ἢ ΓΗ καθ' ὅσον Γ εἶναι ἀμβλεῖα ἢ ὀξεῖα. Ἐφαρμόζοντες ἤδη τὰς προτάσεις τῆς § 250 λαμβάνομεν

$$(ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 + 2(ΑΒ)\ (ΑΖ)$$

$$ἢ \quad (ΒΓ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 - 2\,(ΑΒ) \cdot (ΑΗ).$$

'Αλλά εἶναι ἐξ ὑποθέσεως $(ΑΓ)^2 + (ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2$ ὅτε αἱ ἄνω σχέσεις γίνονται

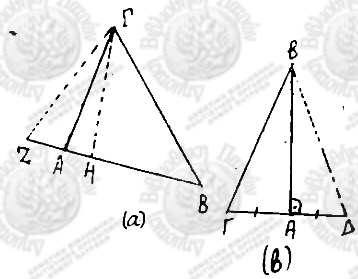
$$(ΒΓ)^2 = (ΒΓ)^2 + 2\,(ΑΒ)\cdot(ΑΖ)$$
$$(ΒΓ)^2 = (ΒΓ)^2 - 2\,(ΑΒ)\cdot(ΑΗ)$$

ἤ $\quad 2\,(ΑΒ)\cdot(ΑΖ) = 0 \quad$ καὶ $\quad -2\,(ΑΒ)\,(ΑΗ) = 0$

καὶ ἐπειδὴ $(ΑΒ) \neq 0$ (ὡς μῆκος πλευρᾶς) ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι $(ΑΖ) = 0$ ἤ καὶ $(ΑΗ) = 0$ ἤτοι τὸ Ζ ἤ Η συμπίπτει μὲ τὸ Α, δηλαδὴ ἡ γωνία δέον νὰ εἶναι ὀρθή.

β') Τρόπος. (Χωρὶς τὴν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς). Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ (1) (Σχ. 120 β). Φέρομεν τώρα τὴν ΔΑ κάθετον τῇ ΑΒ, ὥστε ΔΑ = ΑΓ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ θὰ ἔχωμεν $(ΒΔ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΔ)^2$.

'Αλλὰ ἐπειδὴ ΑΔ = ΑΓ ἔχομεν $(ΒΔ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$ Συγκρίνοντες ταύτην καὶ τὴν (1) λαμβάνομεν $(ΒΔ)^2 = (ΒΓ)^2$ ἤ $(ΒΔ) = (ΒΓ)$.



Σχ. 120.

Δηλαδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀνὰ μίαν ἴσας, ἄρα εἶναι ἴσα, ὅτε ἡ γωνία ΒΑΓ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΒΑΔ ἤτοι ἴση μὲ 1 ὀρθήν.

γ') Τρόπος. Εἰς τὸ σχῆμα 118 ἔστω ὅτι ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐφαρμόζομεν τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἰς τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ, καὶ λαμβάνομεν $(ΑΒ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2$ $(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ ἤ ἀθροίζοντες κατὰ μέλη $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = 2\,(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2$ (1)

'Αλλὰ $(ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2$ ἐξ ὑποθέσεως, ὅτε ἡ (1) γίνεται

$$(ΒΓ)^2 = 2\,(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2$$

ἤ $\quad \left[(ΒΔ) + (ΔΓ)\right]^2 = 2\,(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2$

ἤ $\quad (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2 + 2\,(ΒΔ)\,(ΔΓ) = 2\,(ΑΔ)^2 + (ΒΔ)^2 + (ΔΓ)^2$

ἤ $\quad (ΒΔ)\,(ΔΓ) = (ΑΔ)^2$ ἤ $\dfrac{(ΑΔ)}{(ΒΔ)} = \dfrac{(ΔΓ)}{(ΑΔ)}$. $\quad$ (2)

Τὰ τρίγωνα συνεπῶς ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γων ΑΔΒ = γωνΑΔΓ (ὡς ὀρθὴν) καὶ τὰς περιεχούσας πλευρὰς ἀναλόγους δυνάμει τῆς (2). Ἄρα ἔναντι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν θὰ κεῖνται ἴσαι γωνίαι ἤτοι γων ΒΑΓ = γων Γ καὶ γων ΓΑΔ = γων Β δηλαδὴ ἡ γωνία Α ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν Β καὶ Γ, θὰ πρέπῃ συνεπῶς νὰ ἰσοῦται μὲ 1 ὀρθήν. (βλέπε ἀσκ. 44).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

186.— Ἐκ τῶν τριγώνων τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς 1) 0,3 μ., 0,4 μ., 0,06 μ., 2) 1,3 μ., 0,9 μ., 1,2 μ. καὶ 3) 12 μ., 35 μ., 37 μ. Ποῖον εἶναι ὀξυγώνιον ποῖον ἀμβλυγώνιον καὶ ποῖον ὀρθογώνιον.

ΛΥΣΙΣ.— Διὰ νὰ ἐξετάσωμεν ἄν τρίγωνόν τι τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ εἶναι ὀξυγώνιον, ἀμβλυγώνιον ἢ ὀρθογώνιον, λαμβάνομεν τὴν μεγαλυτέραν πλευράν του. Σχηματίζομεν κατόπιν τὸ τετράγωνον αὐτῆς καὶ τὸ συγκρίνομεν μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων. Ἄν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων τότε τοῦτο εἶναι ὀξυγώνιον. [Διότι θὰ χρειασθῇ μεῖόν τι διὰ νὰ ἐπέλθῃ ἰσότης (ἀλλὰ τὸ μεῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ὀξυγώνιον), ἐφ' ὅσον δὲ ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς κειμένη γωνία εἶναι ὀξεῖα, αἱ ἄλλαι ἐξυπακούεται ὅτι θὰ εἶναι ἀναγκαίως ὀξεῖαι].

Ἐὰν τὸ τετράγωνον τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶναι ἀμβλυγώνιον.

Ἐὰν δὲ τέλος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύ ἄλλων θὰ εἶναι ὀρθογώνιον (§ 251)·

Εἰς τὸ πρόβλημά μας ἔχομεν

1) $0,6^2>0,3^2+0,4^2$ τότε θὰ εἶναι ἀμβλυγώνιον.

2) $1,3^2<0,9^2+1,2^2$ ὅτε εἶναι ὀξυγώνιον.

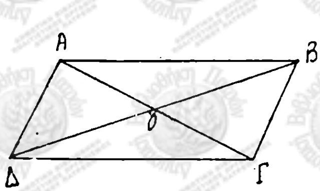
3) $37^2=35^2+12^2$ ὅτε εἶναι ὀρθογώνιον.

187.—Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶναι 2, 3, 4 μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διάμεσοι αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν x, y, ω τὰς διαμέσους, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς 2, 3, 4 ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου (§ 252) λαμβάνομεν

$$4^2+3^2=2x^2+2\cdot 1^2 \quad \text{ἢ} \quad x=\sqrt{11,5}\ \mu.$$
$$2^2+4^2=2y^2+2\cdot 1,5^2 \quad \text{ἢ} \quad y=\sqrt{9,75}\ \mu.$$
$$2^2+3^2=2\omega^2+2\cdot 2^2 \quad \text{ἢ} \quad \omega=\sqrt{2,5}\ \mu.$$

188.— Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.



Σχ. 121.

Ἔστω παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο (Σχ. 121).

Θὰ δείξωμεν ὅτι

$(AB)^2+(B\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta A)^2=(A\Gamma)^2+(B\Delta)^2.$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ μὲ διάμεσον τὴν ΒΟ καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ μὲ διάμεσον τὴν ΔΟ καὶ ἔχομεν

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2=2(BO)^2+2(AO)^2$$
$$(A\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=2(\Delta O)^2+2(AO)^2$$

ἢ $(AB)^2+(B\Gamma)^2+(A\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=2(BO)^2+2(\Delta O)^2+4(AO)^2$

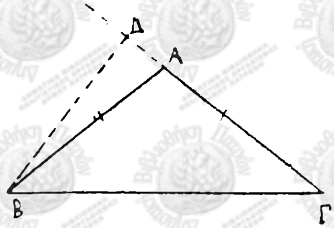
ἀλλὰ $(BO)=(\Delta O)$ ὅτε ἔχομεν

$$(AB)^2+(B\Gamma)^2+(A\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=4(BO)^2+4(AO)^2=$$
$$=\left[2(BO)\right]^2+\left[2(AO)\right]^2=(B\Delta)^2+(A\Gamma)^2.$$

Συμπληρωματικῶς τῶν ἀνωτέρω σημειοῦμεν τὰ κάτωθι ἐνδιαφέροντα κατὰ σειρὰν θέματα :

189.—Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Β κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ τέμνει αὐτὴν προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΓΒ)^2=2\,(ΓΑ)\,.\,(ΓΔ)$.

Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ὃ ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεῖα, Δ δὲ ἡ προβολὴ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΓΑ (ἥτις εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ διότι ἡ Α ἀμβλεῖα) (Σχ. 122). Θὰ δείξωμεν ὅτι $(ΒΓ)^2=2(ΓΑ)(ΓΔ)$.



Σχ. 122.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ Πυθαγορείου (§ 250) καὶ λαμβάνομεν

$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2\,(ΑΓ)\,.\,(ΑΔ)$ καὶ ἐπειδὴ $(ΑΒ)=(ΑΓ)$ ἔχομεν

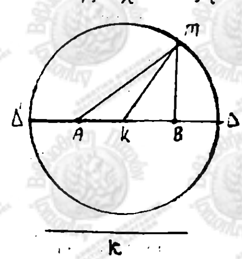
$$(ΒΓ)^2=(ΑΓ)^2+(ΑΓ)^2+2\,(ΑΓ)\,.\,(ΑΔ)=$$
$$=2\,(ΑΓ)^2+2\,(ΑΓ)\,.\,(ΑΔ)=$$
$$=2\,(ΑΓ)\,[(ΑΓ)+(ΑΔ)]=2\,(ΑΓ)\,(ΓΔ).$$

Συμπληρωματικῶς τῶν ἀνωτέρω σημειοῦμεν τὰ κάτωθι ἐνδιαφέροντα κατὰ σειρὰν θέματα :

Α΄ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΓΕΩΜ. ΤΟΠΟΣ ΤΟΥ Γ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

«Ἐν ἐπιπέδῳ δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β ὥστε $(ΑΒ)=2α$ (α δεδομένον εὐθύγραμμον τμῆμα), ὡς ἐπίσης καὶ ἕτερον εὐθύγραμμον τμῆμα k. Ζητοῦμεν τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα ἔχομεν $(ΜΑ)^2+(ΜΒ)^2=k^2$».

Τὸ εὐθύ.— Ἔστω σημεῖόν τι Μ τοῦ τόπου διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $(ΜΑ)^2+(ΜΒ)^2=k^2$ (Σχ. 123). Τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης σχέσεως μᾶς ἐνθυμίζει τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου καὶ φέρομεν ὡς ἐκ τούτου τὴν διάμεσον ΜΚ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ. Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε $(ΜΑ)^2+(ΜΒ)^2=$ $=2(ΜΚ)^2+2\,(ΑΚ)^2$. (1)



Σχ. 123.

Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἰσοῦται μὲ k^2 ἤτοι εἶναι $2(ΜΚ)^2+2(ΑΚ)^2=k^2$ καὶ ἐπειδὴ $(ΑΒ)=2α$, τὸ $(ΑΚ)=α$ καὶ ἄρα $2(ΜΚ)^2+2α^2=k^2$

ἢ $2(ΜΚ)^2=k^2-2α^2$ ἢ $(ΜΚ)^2=\frac{k^2}{2}-\frac{2α^2}{2}$

ἢ $(ΜΚ)=\sqrt{\frac{k^2}{2}-α^2}$.

Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι τὸ Μ ἀπέχει τοῦ σταθεροῦ σημείου Κ σταθερὰν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς $\sqrt{\frac{k^2}{2}-α^2}$. Ἄρα τὸ Μ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἔχοντος κέντρον τὸ μέσον τοῦ τμήματος AB καὶ ἀκτῖνα τὴν $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\alpha^2}$.

Τὸ ἀντίστροφον.—Θὰ δείξωμεν τώρα ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχει τὴν ἰδιότητα. Ἔστω πρὸς τοῦτο τὸ σημεῖον M τοῦ τόπου ἤτοι κείμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας κέντρου K καὶ ἀκτῖνος $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\alpha^2}$.
Φέρομεν τὰς MA καὶ MB καὶ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τῆς διαμέσου, ὅτε θὰ ἔχωμεν $(MA)^2+(MB)^2=2(MK)^2+2(AK)^2=$

$$=2\left(\sqrt{\frac{k^2}{2}-\alpha^2}\right)^2+2\alpha^2=2\left(\frac{k^2}{2}-\alpha^2\right)+2\alpha^2=$$

$=k^2-2\alpha^2+2\alpha^2=k^2$. Ἄρα εἶναι τὸ M σημεῖον τοῦ τόπου.

Κατασκευὴ τῆς ἀκτῖνος.—Διὰ νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια τοῦ τόπου πρέπει νὰ κατασκευασθῇ ἡ ἀκτίς της ἤτοι ἡ $\sqrt{\frac{k^2}{2}-\alpha^2}$. Πρὸς τοῦτο μετασχηματίζομεν τὸν τύπον τοῦτον ὡς ἑξῆς $\sqrt{\left(\frac{k\sqrt{2}}{2}\right)^2-\alpha^2}$. Ἀλλὰ τώρα φαίνεται εὐκόλως ὅτι ἡ ζητουμένη ἀκτὶς θὰ εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν $\frac{k\sqrt{2}}{2}$ καὶ τὴν ἄλλην κάθετον ἴσην πρὸς α.

Σημείωσις.— Εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' τὰ ὁποῖα εἶναι κοινὰ τῆς εὐθείας AB καὶ τῆς περιφερείας K δὲν ἀντιστοιχεῖ τρίγωνον. Ἀλλὰ εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ ταῦτα εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου. Π. χ. διὰ τὸ Δ ἔχομεν

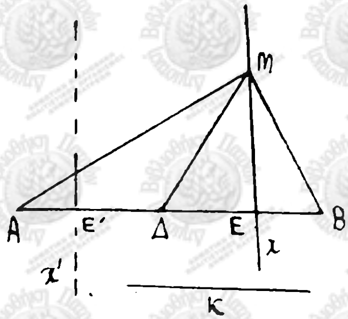
$$(A\Delta)^2+(\Delta B)^2=(\Delta K+KA)^2+(\Delta K-KB)^2$$
$$=(\Delta K)^2+(KA)^2+2(\Delta K)(KA)+(\Delta K)^2+(KB)^2-2(\Delta K)(KB)=$$
$$=2(\Delta K)^2+2\alpha^2=2\left(\sqrt{\frac{k^2}{2}-\alpha^2}\right)^2+2\alpha^2=k^2.$$

Β' ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΤΟΠΟΣ

«Δίδονται ἐν ἐπιπέδῳ δύο σημεῖα A καὶ B ὥστε (AB)=α καὶ εὐθύγραμμον τμῆμα k. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου διὰ τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι $(MA)^2-(MB)^2=k^2$.

Τὸ εὐθύ: Ἔστωσαν A καὶ B δύο σημεῖα τοιαῦτα ὥστε (AB) = α καὶ M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου ὥστε νὰ εἶναι $(MA)^2-(MB)^2=k^2$

(Σχ. 124). Φέρομεν τὴν κάθετον ΜΕ ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ὡς καὶ τὴν διάμεσον ΜΔ. Ἐπειδὴ εἶναι (ΜΑ)>(ΜΒ), ὡς φαίνεται ἐκ τῆς σχέσεως $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=k^2$, τὰ τρίγωνα ΜΑΔ καὶ ΜΔΒ εἶναι τὸ μὲν ἀμβλυγώνιον, τὸ δὲ ὀξυγώνιον. Ἐφαρμόζοντες ἐπὶ τούτων τὴν ἐπέκτασιν τῆς Πυθαγορείου λαμβάνομεν τὰς σχέσεις



Σχ. 124.

$$(ΜΑ)^2=(ΜΔ)^2+(ΑΔ)^2+2\,(ΑΔ)\,(ΔΕ)$$
$$(ΜΒ)^2=(ΜΔ)^2+(ΔΒ)^2-2\,(ΔΒ)\,(ΔΕ)$$

Ἀφαιροῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι (ΑΔ)=(ΔΒ) ἔχομεν

$$(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=4\,(ΑΔ)\,(ΔΕ)=$$
$$=2\,.\,(ΑΒ)\,.\,(ΔΕ) \quad 2α\,.\,(ΔΕ).$$ Καὶ ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου ἐξ ὑποθέσεως θὰ εἶναι $k^2=2α\,.\,(ΔΕ)$ ἢ $(ΔΕ)=\dfrac{k^2}{2α}$.

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος καθίσταται φανερὸν ὅτι τὸ Ε εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένον, δεδομένου ὅτι ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ὡρισμένου μέσου τῆς ΑΒ, ἐντελῶς ὡρισμένην ἀπόστασιν τὴν $\dfrac{k^2}{2α}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν (ΜΑ)>(ΜΒ) τὸ Ε κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β. Συνεπῶς ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ εἶναι ἡ κάθετος (ἀπεριόριστος) x ἡ ἀγομένη εἰς τὸ ὡρισμένον σημεῖον Ε τῆς (ΑΒ).

Τὸ ἀντίστροφον : Ἂν ἤδη ἐπὶ τῆς εὐθείας x ληφθῇ σημεῖόν τι ἔστω τὸ Μ θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι $(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=k^2$. Πράγματι σύροντες τὰς ΜΑ, ΜΒ καὶ ΜΔ καὶ ἐφαρμόζοντες ὅσα εἰς τὸ εὐθύ, λαμβάνομεν :

$$(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=2\,(ΑΒ)\,.\,(ΔΕ)=2\,.\,α.\frac{k^2}{2α}=k^2.$$

Ἄρα τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Κατασκευὴ τῆς ΔΕ : Διὰ νὰ γραφῇ ὁ τόπος δέον νὰ ὁριοθῇ ἡ ΔΕ. Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν σχέσιν

$(ΔΕ)=\dfrac{k^2}{2α}$ ἔχομεν $\dfrac{(ΔΕ)}{k}=\dfrac{k}{2α}$ ἢ $\dfrac{2α}{k}=\dfrac{k}{(ΔΕ)}$ δηλαδὴ ἡ (ΔΕ) ὁρίζεται ὡς τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν μεγεθῶν 2α, k, k.

Σημείωσις.— Ἐὰν δοθῇ ὡς ὑπόθεσις $(ΜΒ)^2-(ΜΑ)^2=k^2$ τότε ὁ τόπος θὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν x' ἥτις εἶναι συμμετρικὴ τῆς x ὡς πρὸς τὸ Δ.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72*.— Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἀληθεύει ἡ σχέσις $\dfrac{1}{β^2}+\dfrac{1}{γ^2}=\dfrac{1}{υ^2}$ ἔνθα β, γ τὰ μήκη τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν καὶ υ τὸ ὕψος τὸ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

73.— Ἀπὸ τοῦ μέσου μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἄγεται κάθετος τῇ ὑποτεινούσῃ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων εἰς ἃ διῃρέθη ἡ ὑποτείνουσα ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.

74.— Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου Ρ τῆς περιφερείας κύκλου Κ ἀπὸ τῶν ἄκρων χορδῆς ἀγομένης παραλλήλως πρὸς τὴν ΚΡ εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

75.*— Πρότασις τοῦ Euler: Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν τετραπλεύρου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ηὐξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας ἥτις συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του. [Ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τριπλῆς ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τῆς διαμέσου].

76*.— Ἡ πρότασις τοῦ Stewart: Ἂν ΑΔ εἶναι τυχοῦσα τέμνουσα τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΒ)^2(ΔΓ)+(ΑΓ)^2(ΒΔ)-(ΑΔ)^2(ΒΓ)=(ΒΔ)(ΔΓ)(ΒΓ)$.
[Ἐφαρμόζομεν τὰ θεωρήματα τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ Πυθαγορείου πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῶν δύο ἰσοτήτων ἀντιστοίχως ἐπὶ ΔΓ καὶ ΒΔ].

77.— Ἐὰν α, β, γ, δ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τούτων τὸ μῆκος τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰ μέσα τῶν βάσεών του.

78.— Εἰς πᾶν τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεων.

79.— Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν. (Booth).

80.— Διὰ πᾶν σημεῖον κείμενον ἐντὸς ὀρθογωνίου, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ δύο ἀντικειμένας κορυφὰς ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας.

81.— Αἱ κάθετοι αἱ ἀγόμεναι ἐκ σημείου ἐντὸς τριγώνου ἐπὶ τὰς πλευράς του, ὁρίζουν ἓξ τμήματα τοιαῦτα ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν μὴ διαδοχικῶν ἐκ τούτων, νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἄλλων, καὶ ἀντιστρόφως (Carnot).

82.— Ἐὰν ΔΕ εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσα τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ Δ καὶ Ε θὰ εἶναι $(ΒΕ)^2=(ΕΓ)^2+(ΒΓ)(ΔΕ)$.

83.— Ἐὰν α, β, γ παριστοῦν τρία εὐθύγραμμα τμήματα, νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα x τοιοῦτον ὥστε $x=\sqrt{α^2+β^2-γ^2}$

84.— Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν διαστάσεών του νὰ εἶναι δοθὲν β.

85.— Ἂν εὐθεῖά τις εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάμεσον ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνουσα τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Η νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{ΑΗ}{ΑΝ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

86.— Δίδεται περιφέρεια ἀκτῖνος ρ καὶ ὁρίζομεν ἐπ' αὐτῆς τεταρτημόριον ΑΒ. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας ἓν σημεῖον Μ ὥστε νὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν
$(ΜΑ)^2-(ΜΒ)^2=\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^2$.

87.— Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ ἔχουν κοινὴν τὴν βάσιν ΒΓ καὶ εἶναι ἰσοϋψῆ ἀχθῇ δὲ εὐθεῖά τις παράλληλος τῇ ΒΓ, νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου περιεχόμενα τμήματα τῆς παραλλήλου ταύτης εἶναι ἴσα.

88.— Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ, ἐκ δὲ τοῦ Δ τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΕΖ.

89.—Ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος πρὸς ἄλλην πλευρὰν αὐτοῦ νὰ ἀποχωρίζῃ τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ δοθέντος.

90.— Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον οὗ τὸ ἐμβαδὸν πρὸς τὸ ἐμβαδὸν δοθέντος τετραγώνου πλευρᾶς α νὰ ἔχῃ λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων μ καὶ ν.

(Ἂν x ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου θὰ ἔχωμεν $\frac{x^2}{\alpha^2}=\frac{\mu}{\nu}$ ἢ $x^2=\frac{\alpha\mu}{\nu}\cdot\alpha$ ἢ ἂν $\frac{\alpha\mu}{\nu}=\gamma$ τότε $x^2=\gamma\alpha$ κλπ).

91.— Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ, Η δὲ τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι (ΑΔ) (ΔΗ) = (ΒΔ) (ΔΓ).

92.— Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ μήκους α. Νὰ ὁρισθῇ ἐπὶ ταύτης σημεῖον Μ ὥστε $(\text{ΜΑ})^2-(\text{ΜΒ})^2=k^2$ ἔνθα k δοθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα.

93.—Ἀπὸ τυχόντος σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον τῇ ΒΓ ἥτις τέμνει τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ Ζ καὶ Η, τὴν δὲ περιγεγραμμένην περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Δείξατε ὅτι $(\text{ΔΕ})^2=(\text{ΔΖ})(\text{ΔΗ})$. (Σχ. Εὐελπ. 1945).

94.—Τραπέζιον ἰσοσκελὲς εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον. Δείξατε ὅτι ἡ διάμετρος αὐτοῦ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεών του.

95.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν α, β, γ καὶ α', β', γ' αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων (ἔνθα α, α' αἱ ὑποτείνουσαι) θὰ εἶναι αα'=ββ'+γγ'.

Σελὶς 119. § 254. **Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.**

Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διέρχεται περιφέρεια, ἥτις ἔστω ὅτι δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Δ ἀλλὰ τέμνει τὴν ΕΓΔ εἰς τὸ Δ'. Θὰ ἔχωμεν τότε λόγῳ τῶν τεμνουσῶν ΕΓΔ', ΕΑΒ τὴν σχέσιν (ΕΓ) (ΕΔ') = (ΕΑ) (ΕΒ). Ἀλλὰ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως (ΕΓ) (ΕΔ) = =(ΕΑ) (ΕΒ). Ὅτε ἐκ συγκρίσεως τούτων λαμβάνομεν (ΕΓ) (ΕΔ')=(ΕΓ) (ΕΔ) ἢ (ΕΔ')=(ΕΔ). Δηλαδὴ τὰ Δ καὶ Δ' συμπίπτουν.

Σελὶς 119 § 255.— **Η ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.**

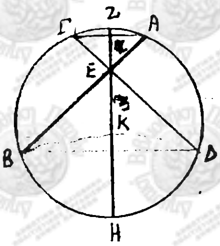
Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ, διέρχεται προφανῶς περιφέρεια, ἥτις δὲν γνωρίζομεν ἂν ἐφάπτεται εἰς τὸ Γ τῆς ΕΓ. Τότε θὰ ὑπάρχῃ ἐκ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τις τῆς περιφερείας ἔστω ἡ ΕΓ'. Θὰ πρέπῃ δὲ τότε $(\text{ΕΓ'})^2=(\text{ΕΑ})(\text{ΕΒ})$. Ἀλλὰ ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $(\text{ΕΓ})^2=(\text{ΕΑ})(\text{ΕΒ})$. Διὰ συγκρίσεως ταύτης καὶ τῆς προηγουμένης ἰσότητος ἔχομεν $(\text{ΕΓ})^2=(\text{ΕΓ'})^2$ ἢ (ΕΓ)=(ΕΓ') ἤτοι αἱ εὐθεῖαι αὗται συμπίπτουν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

190.—Χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντὸς αὐτοῦ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ε. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ὁριζομένων ὑπὸ τῶν δύο τμημάτων ἑκάστης χορδῆς, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 5 μ., ἡ δὲ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶναι 3 μ.

Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο χορδαὶ τοῦ κύκλου Κ ἀκτῖνος 5μ. (Σχ. 125) τεμνόμεναι εἰς τὸ Ε ὥστε (ΕΚ) = 3 μ. Ζητοῦμεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων διαστάσεις τὰς ΕΓ, ΕΔ ἢ ΕΑ, ΕΒ, δηλαδὴ μὲ τί ἰσοῦται ἕκαστον γινόμενον (ΕΓ) (ΕΔ) καὶ (ΕΑ) (ΕΒ)

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι (§ 253) (ΕΓ) (ΕΔ)=(ΕΑ) (ΕΒ). Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν δὲ ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων σύρομεν βοηθητικῶς καὶ τὴν ΕΚ, ἣν καὶ καθιστῶμεν διάμετρον τοῦ κύκλου, μὲ τομὰς τὰ Ζ καὶ Η. Θὰ ἔχωμεν τότε βάσει τῆς ἰδίας προτάσεως ὅτε



Σχ. 125.

$$(ΕΓ)\,(ΕΔ) = (ΕΑ)\,(ΕΒ) = (ΕΖ)\,(ΕΗ) \qquad (1)$$

Ἀλλὰ $(ΕΖ) = (ΚΖ) - (ΕΚ) = 5-3=2$ μ.
καὶ $(ΕΗ) = (ΕΚ)+(ΚΗ)=5+3=8$ μ.
ὥστε ἡ (1) γίνεται

$$(ΕΓ)\,(ΕΔ) = (ΕΑ)\,(ΕΒ) = 2\,.\,8 = 16 \text{ τ.μ.}$$

191.—Δύο τέμνουσαι κύκλου ἄγονται ἐκ σημείου ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ δὲ περιφέρεια τέμνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἰς δύο τμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἐκτὸς εἶναι 3 μ. καὶ τὸ ἐντὸς 9 μ., ἐνῷ τὴν ἄλλην τέμνουσαν τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἄλλης.

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ μία τέμνουσα ἔχει μῆκος $3+9=12$ μ., ἡ δὲ ἄλλη θὰ ἔχῃ μῆκος $x+x=2x$ (καλοῦμεν x τὸ ἓν τῶν ἴσων μερῶν της). Ἀλλὰ τότε θὰ πρέπῃ (§ 254)

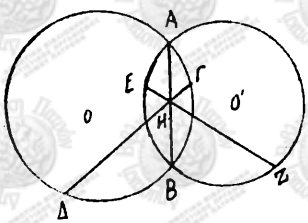
$$x\,.\,2x = 3\,.\,12 \quad ἤ \quad 2x^2=36 \quad ἤ \quad x^2=18.$$

καὶ $x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ μ.

Ἄρα ὁλόκληρος ἡ ἄλλη εἶναι $\quad 2\,.\,3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. μ.

192.—Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ εἶναι (ΑΒ) = 0,5 μ. καὶ (ΒΓ)=0,4μ. Ἐπὶ δὲ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου γράφομεν περιφέρειαν. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτὴν ἀπὸ τοῦ Γ.

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν (§ 255) ὅτι ἂν κληθῇ x τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης θὰ πρέπῃ $x^2=(ΓΒ)\,(ΓΑ)=0{,}4\,.\,(0{,}5+0{,}4)=0{,}4\,.\,0{,}9=0{,}36$ ἢ $x=0{,}6$.



Σχ. 126.

193.—Ἐκ σημείου Η τῆς κοινῆς χορδῆς, δύο τεμνομένων κύκλων ἄγονται δύο εὐθεῖαι ἐξ ὧν ἡ μὲν τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ ἑνὸς κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, ἡ δὲ τέμνει τὴν τοῦ ἄλλου εἰς τὰ Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Γ, Ε, Δ, Ζ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

Ἔστωσαν δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' τεμνόμενοι εἰς τὰ Α καὶ Β (Σχ. 126), ὅτε ΑΒ θὰ εἶναι ἡ κοινὴ χορδή των. Ἔστω δὲ Η σημεῖόν τι τῆς κοινῆς χορδῆς, ἐξ ἧς ἄγονται αἱ τέμνουσαι ΓΗΔ καὶ ΕΗΖ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ Ε, Δ, Ζ, Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐκ τῶν τεμνομένων χορδῶν ΕΗΖ, ΓΗΔ καθίσταται φανερὸν ὅτι ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι (ΕΗ) (ΗΖ) = (ΗΓ) (ΗΔ). Πράγματι ἐπειδὴ ΑΒ καὶ ΕΖ εἶναι χορδαὶ τεμνόμεναι ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο', θὰ εἶναι (ΗΑ) (ΗΒ) = (ΗΕ) (ΗΖ). Ἀλλ' ἐπίσης ἐπειδὴ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι χορδαὶ τεμνόμεναι ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο θὰ εἶναι (ΗΑ) (ΗΒ) = (ΗΓ) (ΗΔ). Διὰ συγκρίσεως τῶν ὁποίων λαμβάνομεν (ΗΕ) (ΗΖ) = (ΗΓ) (ΗΔ). Ἄρα (§ 253 ἀντίστροφον) τὰ σημεῖα Δ, Ζ, Γ, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Συμπληρωματικῶς τῶν ἀνωτέρω θὰ εἴπωμεν σχετικά τινα περὶ δυνάμεως σημείου πρὸς κύκλον καὶ περὶ ὀρθογωνίως τεμνομένων περιφερειῶν.

ΔΥΝΑΜΙΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

Εἴδομεν εἰς τὸ θεώρημα τῶν τεμνομένων χορδῶν ἐντὸς κύκλου καὶ εἰς τὰ σχετικὰ μετὰ αὐτοῦ θεωρήματα τῆς § 253 - 254—255 ὅτι διὰ τυχὸν σημεῖον Ε ἐντὸς κύκλου δοθέντος Κ καὶ διὰ τυχοῦσαν τέμνουσαν ΑΕΒ διερχομένων διὰ τοῦ Ε τὸ γινόμενον (ΕΑ) (ΕΒ) εἶναι τὸ αὐτὸ (Σχ. 125) ἀνεξάρτητον τοῦ προσανατολισμοῦ τῆς τεμνούσης ταύτης.

Πράγματι (ΕΑ) (ΕΒ)=(ΕΖ) (ΕΗ)=(ρ—ΕΚ) (ρ+ΕΚ)=ρ^2—$(ΕΚ)^2$ ἂν ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ δοθέντος κύκλου. Καὶ ἐπειδὴ (ΕΚ)= σταθερὸν ἔστω δ, θὰ ἔχωμεν ὅτι (ΕΑ) (ΕΒ)=$\rho^2-\delta^2$ δηλαδὴ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι σταθερὸν ἀφοῦ ἰσοῦται πρὸς σταθερὰν ποσότητα. Τὸ σταθερὸν τοῦτο γινόμενον καλεῖται **δ ύ ν α μ ι ς** τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ Ε π ρ ὸ ς τ ὸ ν κ ύ κ λ ο ν Κ.

Ἂν τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ΕΒΓ εἶναι μία τέμνουσα αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν, ὁμοίως ἐργαζόμενοι, ὅτι (ΕΒ) (ΕΓ) = $\delta^2-\rho^2$ ἔνθα δ ἡ ἀπόστασις τοῦ Ε ἀπὸ τοῦ κέντρου. Δηλαδὴ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων (τοῦ ἐκτὸς καὶ τοῦ ὅλου) τῆς τεμνούσης παραμένει σταθερόν.

Ἂν δὲ τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας θὰ εἶναι (ΕΒ) (ΕΓ) = 0 διότι ὁ εἷς παράγων θὰ εἶναι μηδὲν ἢ διότι δ = ρ καὶ ἄρα (ΕΒ) . (ΕΓ)= = $\rho^2-\rho^2=0$.

Συμπέρασμα.—Ἡ δύναμις σημείου Ε ὡς πρὸς δοθέντα κύκλον Κ εἶναι ἴση μὲν πρὸς $\rho^2-\delta^2$ ἂν τὸ Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἴση πρὸς $\delta^2-\rho^2$ ἂν τὸ Ε κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἴση πρὸς 0 ἂν τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

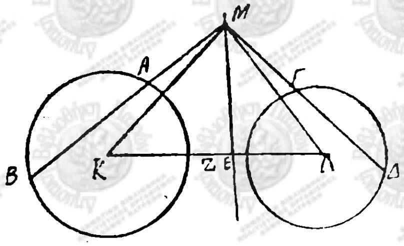
«Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς δύο κύκλους τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου».

Τὸ εὐθύ : Ἔστωσαν οἱ κύκλοι Κ καὶ Λ ἀκτίνων ρ_1 καὶ ρ_2 ἀντιστοίχως καὶ σημεῖον Μ τοῦ τόπου ἔχον τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο κύκλους ἤτοι (ΜΑ) (ΜΒ)=(ΜΓ) (ΜΔ) (Σχ. 127).

Ἐπειδὴ (ΜΑ) (ΜΒ) = $(ΜΚ)^2-\rho_1^2$ καὶ (ΜΓ) (ΜΔ)=$(ΜΛ)^2-\rho_2^2$ δυνάμει τῆς ὑποθέσεώς μας θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν

$$(ΜΚ)^2-\rho_1^2 = (ΜΛ)^2-\rho_2^2 \quad ἢ \quad (ΜΚ)^2-(ΜΛ)^2=\rho_1^2-\rho_2^2.$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ ἀπόστασις (ΚΛ) τῶν κύκλων Κ καὶ Λ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη ἔστω δ, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ β' ἀξιοσημείωτον τόπον τῆς σελίδος 114 διότι παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα Κ καὶ Λ εἶναι δεδομένη καὶ ἴση πρὸς $\rho_1^2-\rho_2^2$ (δηλαδὴ ἴση πρὸς δοθὲν τετράγωνον k^2 διότι δύναται νὰ τεθῇ $\rho_1^2-\rho_2^2=k^2$). Εὕρομεν δὲ ἐκεῖ ὅτι ὁ τόπος τοῦ Μ θὰ εἶναι μία κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΛ καὶ εἰς ἀπόστασιν ΖΕ ἀπὸ τοῦ μέσου Ζ αὐτῆς ἴσην πρὸς $ZE=\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2\,(K\Lambda)}$



Σχ. 127.

Ὥστε ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς δύο δοθέντας κύκλους Κ καὶ Λ εἶναι ἡ κάθετος ΜΕ εἰς τὸ Ε καὶ εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ μέσου Ζ τῆς ΚΛ ἴσην πρὸς $\dfrac{\rho_1^2-\rho_2^2}{2\,(K\Lambda)}$.

Τὸ ἀντίστροφον : Εὐκόλως δεικνύομεν, ὡς καὶ εἰς τὸν τόπον ἐκεῖνον, ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχει τὴν ἰδιότητα δηλαδὴ νὰ ἔχῃ ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς δύο κύκλους. ('Ακολουθοῦμεν πορείαν ἐντελῶς ἀντίστροφον).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1.— Ἡ κάθετος ΜΕ καλεῖται συνήθως ριζικὸς ἄξων τῶν δύο κύκλων (κληθεὶς οὕτω ὑπὸ τοῦ Gaultier 1813).

2.—Ἐάν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι ριζικός των ἄξων αὐτῶν δὲν ὑπάρχει ἢ ἀκριβέστερον ἀφανίζεται εἰς ἄπειρον.

3.—Ἐάν οἱ δύο κύκλοι τέμνωνται ὁ ριζικὸς ἄξων αὐτῶν εἶναι ἡ κοινὴ χορδή των.

4.— Ἐάν οἱ δύο κύκλοι εἶναι ἐφαπτόμενοι ὁ ριζικὸς ἄξων εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη των εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς των.

5.—Ἐάν οἱ κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων ὁ ριζικὸς ἄξων κεῖται μεταξύ των οὐδὲν ἔχων κοινὸν μετ' αὐτῶν σημεῖον.

6.—Ἐάν οἱ κύκλοι κεῖνται ἐντὸς ἀλλήλων ὁ ριζικός των ἄξων κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν.

7.—Ἐάν τὰ κέντρα τριῶν κύκλων δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον καλεῖται ριζικὸν κέντρον τῶν κύκλων τούτων.

8.—Ἐάν τὰ τρία κέντρα τῶν κύκλων κεῖνται ἐπ' εὐθείας οἱ ριζικοὶ ἄξονες αὐτῶν εἶναι διάφοροι ἀλλήλων καὶ παράλληλοι (Ριζικὸν κέντρον εἰς ἄπειρον).

[Διὰ περισσότερα καὶ λεπτομερέστερα ἐπὶ τῶν δυνάμεων καὶ ἐπὶ τῶν ριζικῶν ἀξόνων δύναταί τις νὰ μελετήσῃ ἐπὶ οἱασδήποτε μεγάλης γεωμετρίας].

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω παρατηρήσεις εὐκόλως δύνανται νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ διερευνηθῶσι.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΙ ΤΕΜΝΟΜΕΝΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΣ

Δύο περιφέρειαι Κ, Λ (Σχ. 128) λέγομεν ὅτι τέμνονται ὀρθογωνίως, ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ἓν τῶν κοινῶν των σημείων σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν.

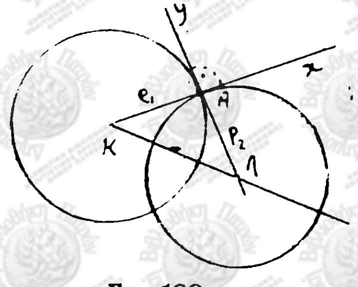
Δηλαδὴ αἱ Κ, Λ τέμνονται ὀρθογωνίως διότι αἱ ἐφαπτόμεναι Αx καὶ Αy σχηματίζουν τὴν ὀρθὴν γωνίαν xΑy.

Ἐπὶ τῶν ὀρθογωνίως τεμνομένων περιφερειῶν εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἑξῆς βασικαὶ προτάσεις.

1) Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς ἓν τῶν κοινῶν σημείων διέρχονται διὰ τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν καὶ ἀντιστρόφως.

2) Διὰ δύο περιφερείας τεμνομένας ὀρθογωνίως ἀκτίνων ϱ_1, ϱ_2 ἰσχύει ἡ σχέσις $\delta^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2$ καὶ ἀντιστρόφως (δ=διάκεντρος).

3) Ἀπὸ τὴν πρότασιν 2 εὐκόλως ἕπεται ὅτι ἵνα δύο περιφέρειαι τέμνωνται ὀρθογωνίως πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς μιᾶς νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν δύναμιν τοῦ κέντρου της πρὸς τὸν ἄλλον κύκλον.



Σχ. 128.

Σελὶς 122. § 260. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**

Ἐὰν αἱ πλευραὶ τοῦ τυχόντος πολυγώνου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ρ, αἱ γωνίαι ὅμως αὐτοῦ μείνουν ἀμετάβλητοι, τότε τὸ νέον πολύγωνον θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἀρχικόν, ἐπειδὴ ἀμφότερα ἔχουν ἴσας τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν καὶ τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους μὲ λόγον ρ. Ἀλλὰ τότε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ ἰσοῦται μὲ ρ^2. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου εἶναι ρ^2 φορὰς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἀρχικοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

194 — Δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν μήκη ἡ μὲν 2 μ., ἡ δὲ 5 μ. Ἐὰν δὲ ἡ περίμετρος τοῦ πρώτου εἶναι 24 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ δευτέρου ;

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων πολυγώνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητός των ἤτοι ἂν καλέσωμεν Π καὶ Π′ τὰς περιμέτρους των θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{2}{5} \quad \text{ἢ} \quad \frac{24}{\Pi'} = \frac{2}{5} \quad \text{ἢ } 2 \cdot \Pi' = 5 \cdot 24 \quad \text{ἢ} \quad \Pi' = 60 \text{ μ.}$$

195.—Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν μήκη ἡ μία 25 μ. καὶ ἡ ἄλλη 40 μ. Μία δὲ πλευρὰ τοῦ πρώτου εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς ὁμολόγου πλευρᾶς τοῦ δευτέρου πολυγώνου.

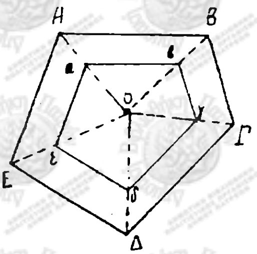
ΛΥΣΙΣ.—Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω θὰ λάβωμεν

$$\frac{25}{40} = \frac{5}{x} \quad \text{ἤτοι } 25 \cdot x = 5 \cdot 40 \quad \text{ἢ} \quad x = 8 \text{ μ,}$$

196.—Ἡ περίμετρος πολυγώνου εἶναι τετραπλασία τῆς περιμέτρου ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου. Πόσας φορὰς μεγαλυτέρα εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρώτου ἀπὸ τὴν τοῦ δευτέρου ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ ἡ περίμετρος τοῦ ἑνὸς εἶναι τετραπλασία τῆς περιμέτρου τοῦ ἄλλου, ἕπεται ὅτι ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των εἶναι 4. Ἀλλὰ τότε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι $4^2=16$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ἑνὸς εἶναι 16 φορὰς μεγαλυτέρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ ἄλλου.

197.—Δίδεται πολύγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐντὸς τοῦ πολυγώνου τούτου λαμβάνομεν ἓν σημεῖον Ο καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδε εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ. Κατόπιν δὲ νὰ εἴπητε, πῶς δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.



Σχ. 129.

Ἔστω πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ Ο σημεῖόν τι ἐντὸς αὐτοῦ (Σχ. 129). Φέρομεν τὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ καὶ εὑρίσκομεν τὰ μέσα αὐτῶν α, β, γ, δ, ε. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ αβγδε εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔΕ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ α, β, μέσα τῶν ΟΑ καὶ ΟΒ θὰ ἔχωμεν $\frac{ΟΑ}{Οα}=\frac{ΟΒ}{Οβ}=2$. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ Οαβ ὡς ἔχοντα τὴν γωνίαν ΑΟΒ κοινὴν καὶ τὰς περιεχούσας ταύτην πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια, ὅτε θὰ πρέπῃ καὶ $\frac{ΑΒ}{αβ}=2$ καὶ συγχρόνως ἡ ΑΒ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ αβ. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ βγ θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ κ. ο. κ. κυκλικῶς, θὰ ἔχωμεν ὅτι $\frac{ΒΓ}{βγ}=2$, κ.λ.π. ἤτοι (1) $\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΓ}{βγ}=\frac{ΓΔ}{γδ}=\frac{ΔΕ}{δε}=\frac{ΕΑ}{εα}=2$. Ἐπίσης ἡ γωνία αβγ ἰσοῦται μὲ τὴν γωνίαν ΑΒΓ, ἐπειδὴ αὗται ἔχουν πλευρὰς παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους κ.ο.κ. ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ αβγδε εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔΕ. Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους δυνάμει τῆς (1), ὥστε ταῦτα εἶναι ὅμοια.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι εὐκόλως δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς δοθέν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐντὸς τοῦ δοθέντος σημεῖόν τι καὶ ἐπὶ τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ σημεῖον μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου νὰ λάβωμεν ἀνὰ ἓν σημεῖον τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν ταύτην εἰς τυχόντα λόγον. Συνδέοντες τότε τὰ σημεῖα ταῦτα, θὰ ἔχωμεν πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

198.—Πόσαι μοῖραι ἢ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι αἱ γωνίαι τριγώνου, ὅταν αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3 ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν παραστήσωμεν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου διὰ τῶν x, y, ω θὰ πρέπῃ ἐν πρώτοις νὰ εἶναι $x+y+ω=180^0$ ἢ $x+y+ω=2$ ὀρθ. Κατὰ δὲ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{ω}{3}$

Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{3} = \frac{x+y+\omega}{1+2+3} = \frac{180^0}{6}$ ἢ $= \frac{2 \text{ ὀρθ}}{6}$

ὥστε $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{3} = 30^0$ ἢ $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{3} = \frac{1}{3}$ ὀρθῆς

καὶ $x = 30^0$ $y = 60^0$ $\omega = 90^0$ ἢ $x = \frac{1}{3}$ ὀρθ. $y = \frac{2}{3}$ ὀρθ $\omega = 1$ ὀρ.

199.— Πόσαι μοῖραι ἢ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι αἱ γωνίαι κυρτοῦ τετραπλεύρου, ὅταν αὗται εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5 καὶ 7;

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν x, y, ω, φ αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου θὰ ἔχωμεν

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{\omega}{5} = \frac{\varphi}{7} = \frac{x+y+\omega+\varphi}{1+3+5+7} = \frac{360^0}{16} \text{ ἢ } \frac{4}{16} \text{ ὀρθῆς}$$

ἄρα $x = 22^0\ 30'$ $x = \frac{1}{4}$ ὀρθ.

$y = 67^0\ 30'$ ἢ $y = \frac{3}{4}$ ὀρθ.

$\omega = 112^0\ 30'$ $\omega = \frac{5}{4}$ ὀρθ.

$\varphi = 157^0\ 30'$ $\varphi = \frac{7}{4}$ ὀρθ.

200.— Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν κληθῇ x ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου καὶ β καὶ υ ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ δοθέντος τριγώνου θὰ πρέπῃ $x^2 = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{\beta}{2} \cdot \upsilon$. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου θὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τοῦ ἡμίσεως τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ δοθέντος τριγώνου. Καὶ συνεπῶς κατασκευάζεται βάσει μιᾶς τῶν γνωστῶν μεθόδων (§ 256).

201.—Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον τριπλάσιον, τετραπλάσιον, πενταπλάσιον κλπ. δοθέντος τετραγώνου.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν

1) $x^2 = 3\alpha^2$, 2) $x^2 = 4\alpha^2$, 3) $x^2 = 5\alpha^2$ κλπ.

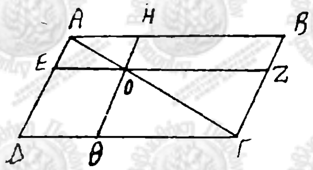
Ἐν πρώτοις εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν x τετραγώνου διπλασίου τοῦ δοθέντος. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς πλευρᾶς α, ὅτε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$. Κατόπιν κατασκευάζομεν ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ $\alpha\sqrt{2}$. Κατόπιν κατασκευάζομεν ἄλλο ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ $\alpha\sqrt{2}$. Τότε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου τοῦ τριπλασίου τοῦ δοθέντος καὶ ἴση πρὸς $\alpha\sqrt{3}$. Ἐκ τρίτου κατασκευάζομεν πάλιν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς α καὶ $\alpha\sqrt{3}$ ὅτε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ τετραπλασίου τοῦ δοθέντος καὶ ἴση πρὸς 2α. Τὸ σχῆμα 1 τοῦ βιβλίου δεικνύει τὸν τρόπον εὑρέσεως τῶν πλευρῶν τῶν ἐν λόγῳ τετραγώνων.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Γ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

202.—Ἡ μία πλευρὰ ὀρθογωνίου εἶναι τετραπλασία τῆς προσκειμένης της καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 23,04 τ.μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ἡ ἄλλη θὰ εἶναι $4x$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶναι $4x \cdot x = 23{,}04$ ἢ $4x^2 = 23{,}04$ ἢ $x^2 = 5{,}76$ ἢ $x = \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$ μ. Ἄρα αἱ πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι ἡ μὲν 2,4 μ., ἡ δὲ $4 \cdot 2{,}4 = 9{,}6$ μ.

203—Διὰ σημείου μιᾶς τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἐκ τῶν σχηματισθέντων παραλληλογράμμων εἶναι ἰσοδύναμα.



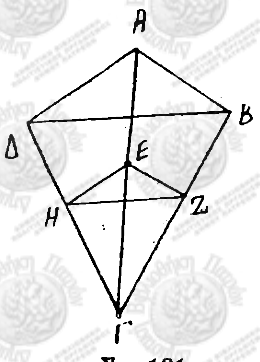
Σχ. 130.

Ἔστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖόν τι Ο τῆς διαγωνίου ΑΓ (Σχ. 130). Φέρομεν ἐκ τοῦ Ο τὰς παραλλήλους ΕΖ καὶ ΗΘ ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευράς του ΔΓ καὶ ΑΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι δύο ἐκ τῶν σχηματιζομένων παραλληλογράμων εἶναι ἰσοδύναμα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος ΑΓ χωρίζει τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ἴσα θὰ ἔχωμεν (1) (ΑΒΓ)=(ΑΔΓ) Ἀλλὰ εἶναι προφανὲς ὅτι ἕκαστον τῶν τετραπλεύρων ΑΕΟΗ καὶ ΟΘΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς. Ἀλλὰ ΑΟ καὶ ΟΓ εἶναι διαγώνιοι αὐτῶν, ὅτε θὰ ἔχωμεν (ΑΕΟ) = (ΑΗΟ) καὶ (ΟΘΓ)=(ΟΓΖ). Ἂν ἀθροίσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν (ΑΕΟ) + (ΟΘΓ) = (ΑΗΟ) + (ΟΓΖ).

Ἂν δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὰ μέλη τῆς (1) λαμβάνομεν (ΕΔΘΟ) = (ΗΟΖΒ) ἤτοι τὰ δύο ταῦτα παραλληλόγραμμα εἶναι ἰσοδύναμα.

204.— Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ε τῆς διαγωνίου ΑΓ κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΒΓ καὶ ΔΓ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Ζ καὶ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ΗΖ καὶ ΔΒ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 131.

Ἔστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ε τυχὸν σημεῖον τῆς διαγωνίου του ΑΓ (Σχ. 131). Φέρομεν ἐκ τοῦ Ε τὰς ΕΗ καὶ ΕΖ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΔ καὶ ΑΒ. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΗΖ ∥ ΔΒ.

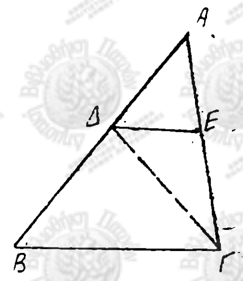
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ ΕΗ ∥ ΑΔ τὰ τρίγωνα ΓΕΗ καὶ ΓΑΔ εἶναι ὅμοια, ὅτε θὰ ἔχωμεν $\frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΓΗ}{ΓΔ}$. Ὁμοίως ἐπειδὴ ΕΖ ∥ ΑΒ τὰ τρίγωνα ΓΕΖ καὶ ΓΑΒ εἶναι όμοια ότε $\frac{ΓΕ}{ΓΑ} = \frac{ΓΖ}{ΓΒ}$.

Συγκρίνοντες τὰς δύο ἀνωτέρω ἰσότητας παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη αὐτῶν ἴσα, ἄρα θὰ εἶναι καὶ (1) $\frac{ΓΗ}{ΓΔ} = \frac{ΓΖ}{ΓΒ}$.

Ἂν ἤδη σύρωμεν τὰς ΕΖ καὶ ΔΒ εἰς τὸ τρίγωνον ΓΔΒ ἡ ΗΖ τέμνει τὰς πλευρὰς ΓΒ καὶ ΓΔ αὐτοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα δυνάμει τῆς (1) ἄρα κατὰ γνωστὴν πρότασιν, πρέπει νὰ εἶναι παράλληλος τῇ ἄλλῃ πλευρᾷ, ἤτοι ΗΖ || ΔΒ.

205.—Ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ **τέμνουμνουσαν** τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Νὰ **ἀποδειχθῇ** ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ δοθέντος τριγώνου **καὶ τοῦ** ΑΕΔ.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΔΕ παράλληλος τῇ βάσει ΒΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΔΕ ἤτοι $(ΑΔΓ)^2 = (ΑΒΓ)(ΑΔΕ)$ (Σχ. 132).



Σχ. 132.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν Δ τὰς δὲ βάσεις αὐτῶν ΑΓ καὶ ΑΕ ἐπ' εὐθείας δηλαδὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ὅτε ἔχουν λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεών των ἤτοι

$$\frac{(ΑΔΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΕ)}. \quad (1)$$

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Γ τὰς δὲ βάσεις των ΑΒ καὶ ΑΔ ἐπ' εὐθείας ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)} = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} \quad (2).$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ θὰ ἔχωμεν $\frac{(ΑΒ)}{(ΑΔ)} = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΕ)}$. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, ὅτε θὰ εἶναι καὶ $\frac{(ΑΔΓ)}{(ΑΔΕ)} = \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΔΓ)}$ ἢ $(ΑΔΓ)^2 = (ΑΒΓ)(ΑΔΕ)$.

206.—Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου (α = ὑποτείνουσα) καὶ α', β', γ' αἱ ἀντίστοιχοι πλευραὶ τοῦ ἄλλου. Ἔχομεν ἐξ ὑποθέσεως $\frac{α}{α'} = \frac{β}{β'}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ταῦτα εἶναι ὅμοια.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐκ τῆς δοθείσης ἰσότητος ἔπεται ὅτι

$$\frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha'^2 - \beta'^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2}$$

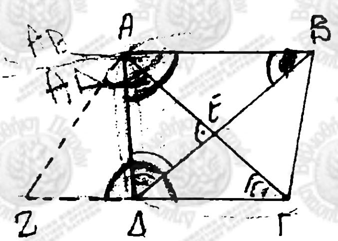
Ἀλλὰ $\alpha^2 - \beta^2 = \gamma^2$ $\alpha'^2 - \beta'^2 = \gamma'^2$. ὅτε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\gamma^2}{\gamma'^2} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{\beta^2}{\beta'^2} \quad \text{ἢ καὶ} \quad \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \quad \frac{\beta}{\beta'}$$

δηλαδὴ τὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς των ἀναλόγους καὶ συνεπῶς εἶναι ὅμοια.

Σημείωσις. Ἡ ἄσκησις λύεται καὶ δι' ἐπιθέσεως τῶν σχημάτων.

207.—**Εἰς τραπέζιον ΑΒΓΔ αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, αἱ δὲ διαγώνιοι αὐτοῦ τέμνονται καθέτως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι (ΑΔ)²=(ΑΒ) (ΔΓ).**



Σχ. 133.

Ἔστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχον τὰς Α καὶ Δ ὀρθὰς (δισορθογώνιον τραπέζιον) καὶ τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ τεμνομένας καθέτους εἰς τὸ Ε (Σχ. 133). Θὰ δείξωμεν ὅτι (ΑΔ)²=(ΑΒ) (ΔΓ).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.--Φέρομεν ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΖ παράλληλον τῆς ΒΔ μέχρις ὅτου τμήσῃ τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ Ζ. Τότε τὸ σχῆμα ΑΒΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐκ κατασκευῆς. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ ΒΔ εἶναι κάθετος τῇ ΑΓ, ἔπεται ὅτι καὶ ἡ παράλληλος αὐτῆς ΑΖ θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΑΓ ἤτοι ἡ γωνία ΖΑΓ ὀρθή. Ἀλλὰ τότε γνωρίζομεν ὅτι (ΑΔ)²=(ΖΔ) . (ΔΓ), ἐπειδὴ δὲ (ΖΔ) = (ΑΒ), ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι (ΑΔ)² = (ΑΒ) . (ΔΓ).

Σημείωσις: Ἡ ἄσκησις λύεται καὶ τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ.

208.—**Ἐὰν τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ φέρωμεν τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, τὰ ὀρθογώνια τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ὑπὸ τῶν τμημάτων ἑκάστης διαγωνίου εἶναι ἰσοδύναμα.**

ΛΥΣΙΣ.—Ἀφοῦ τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγεγραμμένον αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ θὰ εἶναι δύο χορδαὶ τεμνόμεναι ἐντὸς τοῦ κύκλου, ὅτε εὐκόλως ἔπεται ἡ πρότασις.

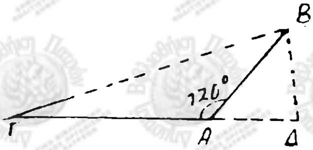
209.—**Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ ὕψους ἐπ' αὐτῆς.**

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων θὰ παριστᾷ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, συνεπῶς τὰ δύο ταῦτα γινόμενα εἶναι ἴσα.

Σημείωσις: Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ἡ πρότασις καὶ διὰ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ (Σχ. 118).

210.— Ἐὰν ἐν τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΒΓ κεῖται ἔναντι γωνίας 120°, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+ΑΒ)(ΑΓ)$.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ εἰς ὃ ἡ γωνΑ$=120^\circ$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $(ΒΓ)^2=$ $=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+(ΑΒ)(ΑΓ)$.



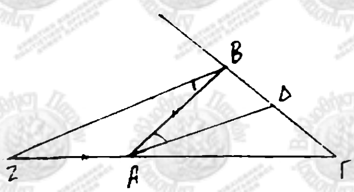
Σχ. 134.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸ θεώρημα τῆς ἐπεκτάσεως τοῦ Πυθαγορείου λαμβάνομεν (Σχ. 134).

$(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2(ΑΓ)\,.\,(ΑΔ)$ (1)

Ἀλλὰ εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΑΔ ἡ γωνία ΒΑΔ$=60^\circ$ ὅτε ἡ γων ΑΒΔ$=30^\circ$ καὶ συνεπῶς ἡ πλευρὰ ΑΔ ὀφείλει νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΑΒ (ἄσκ.76) ἤτοι $(ΑΔ)=\frac{(ΑΒ)}{2}$. Ἄρα ἡ σχέσις (1) γίνεται $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+2\,(ΑΓ)\,.\,\frac{(ΑΒ)}{2}=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2+$ $+(ΑΓ)(ΑΒ)$.

211.—Ἐὰν ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

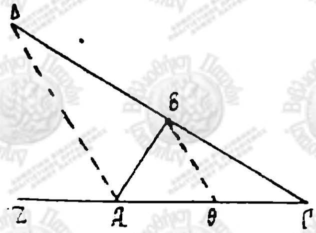


Σχ. 135.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α (Σχ. 135). Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τὴν ΒΖ παράλληλον τῇ διχοτόμῳ ΑΔ, τέμνουσαν τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΒΖ, ἐπειδὴ ἡ ΑΔ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΖ καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς του, θὰ τέμνῃ αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα ἤτοι $\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΖΑ}{ΑΓ}$. Ἐκ ταύτης φαίνεται ὅτι ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΑΒ)=$ $=(ΑΖ)$. Πράγματι ἐπειδὴ ΒΖ ∥ ΑΔ θὰ εἶναι γων ΖΒΑ $=$ γων ΒΑΔ καὶ γων ΒΖΑ$=$γωνΔΑΓ, ἀλλὰ γων ΒΑΔ$=$γωνΔΑΓ (λόγῳ τῆς διχοτόμου) ὅτε γων ΖΒΑ$=$γωνΒΖΑ καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνον ΑΒΖ εἶναι ἰσοσκελὲς ὅτε $(ΑΒ)=(ΑΖ)$, καὶ ἡ προηγουμένη ἀναλογία γίνεται $\frac{ΒΔ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.



Σχ. 136.

212.—Ἡ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν ΒΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς του γωνίας ΒΑΖ (Σχ. 136). Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}=\frac{ΔΒ}{ΔΓ}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Φέρομεν ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΘ, βοηθητικῶς, παράλληλον τῆς ΑΔ. Θὰ ἔχωμεν τότε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΘ}{ΑΓ}$. Ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ ὅτι ΑΒ = ΑΘ. Πράγματι γων ΒΘΑ = γωνΔΑΖ καὶ γωνΑΒΘ = γωνΔΑΒ. Ἀλλὰ γωνΔΑΖ=γωνΔΑΒ (λόγῳ τῆς διχοτόμου ΑΔ) ὅτε θὰ εἶναι καὶ γωνΑΒΘ=γωνΑΘΒ. Δηλαδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἰσοσκελὲς ἤτοι ΑΒ=ΑΘ.

Συνεπῶς ἡ προηγουμένη ἀναλογία γίνεται $\frac{ΔΒ}{ΔΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

213.—Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πλευρῶν του, τὸ ὁποῖον διῃρέθη διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

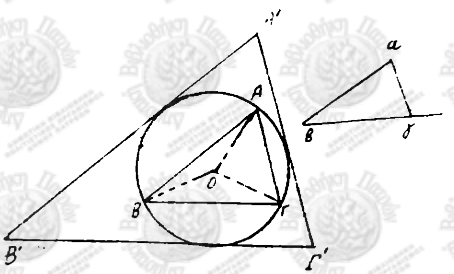
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπανερχόμεθα εἰς τὸ Σχῆμα 74 τῆς ἀξιοσημειώτου προτάσεως Β.

Ἐκεῖ εἴδομεν ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΣ καὶ ΑΔΓ ἔχουν τὰς γωνίας των ἀνὰ μίαν ἴσας. Ἄρα ταῦτα εἶναι ὅμοια ὅτε

$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ} = \frac{ΑΣ}{ΑΓ} \quad ἤ \quad (ΑΒ)\,(ΑΓ)=(ΑΔ)\,(ΑΣ).$$

Πολλαπλασιάζομεν ἤδη τὰ μέλη ταύτης ἐπὶ (ΒΓ) καὶ λαμβάνομεν (ΑΒ) (ΑΓ) (ΒΓ) = (ΒΓ) (ΑΔ) (ΑΣ). Ἀλλὰ (ΒΓ) . (ΑΔ) = 2 (ΑΒΓ), ὅτε ἔχομεν (ΑΒ) (ΑΓ) (ΒΓ)= 2 (ΑΒΓ) (ΑΣ) ἤ $(ΑΒΓ)= \frac{(ΑΒ)\ (ΑΓ)\ (ΒΓ)}{2\ (ΑΣ)}$

214. — Νὰ ἐγγραφῇ καὶ νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον τρίγωνον ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.



Σχ. 137.

1) **ΑΝΑΛΥΣΙΣ.**—Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐνεγράφη εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Ο τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅμοιον πρὸς τὸ αβγ (Σχ 137). Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἰς τὰς κορυφάς. Τότε γων ΑΟΓ = =2γωνΒ=2 γων β, γωνΒΟΓ= = 2 γων Α = 2 γων α καὶ γωνΑΟΒ=2γωνΓ=2γων γ. Ἐκ τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον σύνθεσιν.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ.—Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον Ο, σύρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΓ, ὥστε γων ΑΟΓ = 2γωνβ, καὶ ὁμοίως καὶ τὴν ΟΒ ὥστε γωνΒΟΓ=2γωνγ. Συνδέοντες τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Πράγματι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ἑκάστην τῶν γωνιῶν του διπλασίαν τῆς ἀντιστοίχου ἐγγεγραμμένης. Ἀλλὰ ἑκάστη ἐγγεγραμμένη κατεσκευάσθη ἴση πρὸς τὸ διπλάσιον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τοῦ αβγ. Ἄρα αἱ γωνίαι τοῦ ΑΒΓ καὶ αἱ τοῦ αβγ εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὅμοια.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ.—Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε λύσιν.

2) Διὰ νὰ περιγράψωμεν τρίγωνον περὶ τὸν δοθέντα κύκλον ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐγγράφομεν πρῶτον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν αβγ (ὡς εἴδομεν προηγουμένως (Σχ. 137). Κατόπιν εἰς τὰ μέσα τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ φέρομεν ἐφαπτομένας παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ΑΒΓ. Σχηματίζομεν οὕτω τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, οὗ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τοῦ ΑΒΓ (πλευραὶ παράλληλοι) καὶ συνεπῶς εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ καὶ ἄρα καὶ πρὸς τὸ αβγ.

215. – Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν.

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ λύσις αὐτῆς εὑρίσκεται εἰς τὸ βιβλίον, ὁ δὲ τύπος εἶναι

$$Ε = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$$

ἔνθα $τ =$ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου ἤτοι $\frac{α+β+γ}{2}$

Ἐ φ α ρ μ ο γ ή: Ἂν $α=7,4$ $β=9,45$ $γ=15,05$ θὰ εἶναι

$α+β+γ=7,4+9,45+15,05=31,90μ.$ ἢ $τ = \frac{α+β+γ}{2} = \frac{31,90}{2} = 15,95$

Ἤδη $τ-α=15,95-7,4=8,55$ $τ-β=15,95-9,45=6,50$

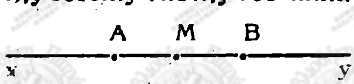
$τ-γ=15,95-15,05=0,90$

ἄρα $Ε = \sqrt{15,95 \,.\, 8,55 \,.\, 6,50 \,.\, 0,90} = 28,25$ τ.μ.

Ἓν ἀπὸ τὰ πλέον ἐνδιαφέροντα θέματα τῆς γεωμετρίας εἶναι τὸ κεφάλαιον τὸ περὶ ἁρμονικῆς διαιρέσεως εὐθείας, ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ εἴπωμεν ὀλίγα.

ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— **«Ἐπὶ εὐθείας ἀπεριορίστου δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης δύο ἄλλα σημεῖα καὶ μόνον δύο, τοιαῦτα ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα νὰ εἶναι δοθεὶς καὶ ἴσος πρὸς ρ (ρ>ο). Κεῖνται δὲ τὰ δύο ταῦτα σημεῖα τὸ ἓν μεταξὺ Α καὶ Β, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς του».**



Σχ. 138.

Ἔστω ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα xy καὶ ἐπὶ ταύτης τὰ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β. Ἔστω δὲ ἀκόμη ρ ὁ δοθεὶς λόγος.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις καθ' ὅσον $ρ<1$ ἢ $ρ>1$.

Ἔστω δὲ πρῶτον ὅτι: $ρ<1$.

1) Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ Α καὶ Β σημεῖόν τι Μ (Σχ. 138) ὥστε ὁ λόγος $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}$ νὰ ἰσοῦται πρὸς ρ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Πράγματι ἐὰν εἶναι $\frac{MA}{MB} = \rho$

θὰ εἶναι καὶ $\frac{MA}{MB} = \frac{\rho}{1}$ ἢ $\frac{MA}{\rho} = \frac{MB}{1} = \frac{MA+MB}{\rho+1} =$

$= \frac{AB}{\rho+1}$ ἤτοι $(MA) = (AB)\frac{\rho}{\rho+1}$ καὶ ἐπειδὴ $\rho+1>\rho$ ἔπεται ὅτι τὸ MA εἶναι μέρος τοῦ AB καὶ συνεπῶς ὑπάρχει σημεῖόν τι M ὥστε νὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις $\frac{MA}{MB} = \rho$. Δὲν ὑπάρχει ἄλλο τοιοῦτον σημεῖον μεταξὺ A καὶ B. Διότι ἂν δεχθῶμεν ἓν ἄλλο τὸ M_1 ὥστε νὰ εἶναι $\frac{M_1A}{M_1B} = \rho$, θὰ εἴχομεν τότε, ὡς ἄνω· $(M_1A) =$

$= (AB)\frac{\rho}{\rho+1}$, ὅτε $(M_1A) = (MA)$ δηλαδὴ τὰ M καὶ M_1 συμπίπτουν.

2) Θὰ ἀποδείξωμεν τώρα ὅτι καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB ὑπάρχει σημεῖόν τι M' τοιοῦτον ὥστε $\frac{M'A}{M'B} = \rho$ ἔνθα $\rho < 1$.

Σχ. 139.

(Σχ. 139). Ἐπειδὴ $\rho < 1$ ἔπεται ὅτι θὰ πρέπῃ $M'A < M'B$ ἤτοι τὸ M' θὰ κεῖται πλησιέστερον τοῦ A ἢ τοῦ B δηλαδὴ τὸ M' θὰ κεῖται (ἂν ὑπάρχῃ) ἀριστερὰ τοῦ A· Ἤδη ὁ δοθεὶς λόγος γράφεται:

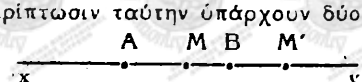
$$\frac{M'A}{M'B} = \frac{\rho}{1} \text{ ἢ } \frac{M'A}{\rho} = \frac{M'B}{1} = \frac{M'B-M'A}{1-\rho} = \frac{AB}{1-\rho}$$

ἐξ ὧν ἔπεται ὅτι $(M'A) = (AB)\frac{\rho}{1-\rho}$, ἀλλ᾽ ἐπειδὴ εἶναι $\rho > 1-\rho$ ἔπεται ὅτι τὸ $M'A$ εἶναι μεῖζον τοῦ AB δηλαδὴ τὸ $M'A$ θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ AB. Ἤτοι ὑπάρχει καὶ πάλιν σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB ὥστε νὰ πληροῦται ἡ σχέσις $\frac{M'A}{M'B} = \rho$.

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως (ὡς εἰς τὸ 1) ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον ἐκτὸς τοῦ M'.

Ἔστω δεύτερον ὅτι $\rho > 1$.

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχουν δύο σημεῖα τὸ ἓν M μεταξὺ A καὶ B, τὸ δὲ M' ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB καὶ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ B (Σχ. 140).



Σχ. 140.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Ἔχομεν $\frac{MA}{MB} = \frac{\rho}{1}$ ἢ $\frac{MA}{\rho} = \frac{MB}{1} =$

$$= \frac{MA+MB}{\rho+1} = \frac{AB}{\rho+1} \text{ ἢ } (MA) = (AB)\cdot\frac{\rho}{\rho+1}$$

ἤτοι καὶ πάλιν τὸ (MA) εἶναι μέρος τοῦ (AB) ὥστε τὸ M κεῖται μεταξὺ A καὶ B καὶ δύναται νὰ ἐπαληθεύσῃ τὸν λόγον $\frac{MA}{MB} = \rho$.

2) Διά τὸ Μ′ ἔχομεν $\frac{M'A}{M'B} = \rho$ καὶ ἐπειδὴ $\rho>1$ ἄν ὑπάρχῃ σημεῖον Μ′ τοῦτο θὰ πρέπῃ νὰ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τὸ δεξιὰ τοῦ ΑΒ διότι $M'A>M'B$. Πράγματι ἔχομεν $\frac{M'A}{M'B} = \frac{\rho}{1}$ ἢ $\frac{M'A}{\rho} = \frac{M'B}{1} =$

$$\frac{M'A-M'B}{\rho-1} = \frac{AB}{\rho-1} \quad \text{ἢ} \quad (M'A) = (AB)\frac{\rho}{\rho-1}$$

ἀλλ' ἐπειδὴ $\rho>\rho-1$ ἔπεται ὅτι τὸ (Μ′Α) εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΑΒ ἤτοι δύναται νὰ ὑπάρχῃ σημεῖόν τι πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Β ὥστε νὰ εἶναι $\frac{M'A}{M'B} = \rho>1$. Εἰς ἀμφοτέρας δὲ τὰς περιπτώσεις (1) καὶ (2) εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἐκτὸς τῶν Μ καὶ Μ′ δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον.

Συμπέρασμα.—Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β ἐπὶ ἀπεριορίστου εὐθείας xy ὑπάρχει πάντοτε μεταξὺ τῶν Α καὶ Β ἓν σημεῖον καὶ ἓν μόνον ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεών του νὰ εἶναι δοθεὶς καὶ ἴσος πρὸς ρ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ θετικοῦ ρ. Ἂν $\rho=1$ τὸ σημεῖον εἶναι τὸ μέσον τοῦ ΑΒ.

Ἐπίσης ὅτι ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ΑΒ καὶ πρὸς τὸ μέρος Αx (ἀριστερὰ τοῦ Α) ἂν ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καὶ ἓν μόνον σημεῖον πρὸς τὸ μέρος Βy (δεξιὰ τοῦ Β) ἂν ὁ λόγος εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐὰν εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας ὁ λόγος $\rho=1$, τότε τὸ σημεῖον τοῦτο ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον δεξιὰ ἢ ἀριστερά, (διότι εἰς τὰς περιπτώσεις ταύτας καθ' ἃς τὸ Μ′ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἄπειρον τὰ Μ′Α καὶ Μ′Β καθίστανται αἰσθητῶς ἴσα).

Ἁρμονικὴ διαίρεσις εὐθείας : Ἐπειδὴ εἶναι δυνατόν, δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β, νὰ εὑρεθοῦν δύο ἄλλα Γ καὶ Δ, τὸ ἓν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β, τὸ δὲ ἐκτὸς τοῦ ΑΒ, ὥστε νὰ ἰσχύῃ σχέσις $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$, (1)

διὰ τοῦτο τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ λέγομεν ὅτι διαιροῦν τὸ τμῆμα ΑΒ ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ἢ ἁπλούστερον ὅτι διαιροῦν αὐτὸ **ἁρμονικῶς**. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ λέγονται **συζυγῆ ἁρμονικὰ** πρὸς τὰ Α καὶ Β.

Ἐπειδὴ ἡ σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{B\Gamma}{B\Delta}$$

δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι καὶ τὰ Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Γ καὶ Δ. Δηλαδὴ ἂν δύο σημεῖα εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς δύο ἄλλα καὶ τὰ δύο ἄλλα εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν πρώτων.

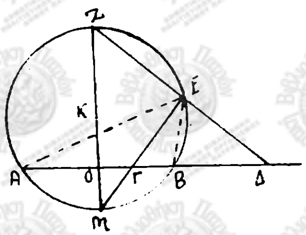
Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ λέγομεν τότε ὅτι ἀποτελοῦν **ἁρμονικὴν σημειοσειράν.**

Εἴδομεν εἰς τὴν ἄσκησιν 211 καὶ 212 ὅτι ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν παρακειμένων πλευρῶν ἤτοι ὅτι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}$ (1). Ἐπίσης δὲ ὅτι καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ΄ ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα ἤτοι

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} \quad (2).$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma}$ ἤτοι τὰ Δ καὶ Δ΄ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Β καὶ Γ.

Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν δοθέντος σημείου Γ πρὸς τὰ δύο, δοθέντα ἐπίσης, σημεῖα Α καὶ Β ὡς ἑξῆς.

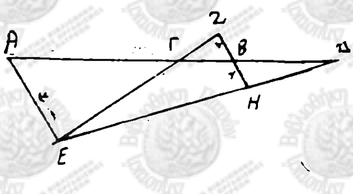


Σχ. 141.

Γράφομεν περιφέρειαν Κ διερχομένην διὰ τῶν Α καὶ Β. (Σχ. 141) καὶ φέρομεν τὴν κάθετον ΚΟ ἐπὶ τὴν ΑΒ τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ Ζ καὶ Μ. Σύρομεν κατόπιν τὴν ΜΓ, ἥτις τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Ἂν ἤδη ἀχθῇ ἡ ΖΕ αὕτη προεκτεινομένη θὰ τμήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Γ. Πράγματι ἐπειδὴ Μ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ ἡ ΕΓ θὰ εἶναι ἐσωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τριγώνου ΑΕΒ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΖΕΔ εἶναι κάθετος τῇ ΕΓ θὰ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Ε τοῦ αὐτοῦ τριγώνου ΑΕΒ. Ἤτοι τὸ Δ εἶναι τὸ συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Γ, διότι θὰ εἶναι $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$.

Εὑρίσκομεν τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β πρὸς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ ὡς ἑξῆς:

Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΕ καὶ ΒΖ παραλλήλως ἀντιρρόπως καὶ ἴσας πρὸς μ καὶ ν ἀντιστοίχως. (Σχ. 142)



Σχ. 142.

Ἂν ἀχθῇ ἡ ΖΕ αὕτη θὰ τμήσῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ θὰ εἶναι δὲ λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΕ καὶ ΓΒΖ,

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Κατόπιν ἀντιρρόπως τῇ ΒΖ λαμβάνομεν ΒΗ = ν καὶ φέρομεν ΕΗ ἥτις τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τὸ Δ. Λόγῳ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΔΒΗ καὶ ΔΑΕ εἶναι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}. \quad \text{Ἄρα} \quad \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

ἤτοι τὰ Γ καὶ Δ εἶναι τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Α καὶ Β πρὸς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

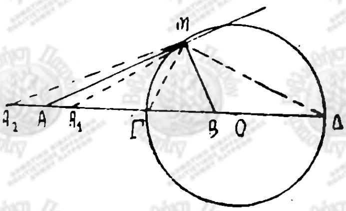
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΤΟΠΟΣ

ΑΠΟΛΛΩΝΕΙΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ζητεῖται νὰ ὁρισθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ ἔνθα μ, ν δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα ($\mu \neq \nu$).

Τὸ εὐθύ.— Ἔστωσαν τὰ σημεῖα Α καὶ Β (Σχ. 143) καὶ σημεῖον Μ τοῦ τόπου τριοῦτον ὥστε

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}.$$



Σχ. 143.

Σύρομεν τὰς διχοτόμους ΜΓ καὶ ΜΔ τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΜΑ. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὁ λόγος $\frac{MA}{MB}$ μεταφέρεται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Πράγματι ἔχομεν

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \text{ καὶ } \frac{MA}{MB} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \text{ ἢ } \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐκ τούτου καθίσταται φανερὸν ὅτι τὰ Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Α καὶ Β μὲ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Εἶναι λοιπὸν ὡς ἐκ τούτου ἐντελῶς ὡρισμένα (βλέπε προηγουμένην κατασκευήν). Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΓΜΔ εἶναι ὀρθὴ (διχοτόμος παραπληρ. ἐφεξῆς) ἕπεται ὅτι τὸ Μ θὰ κεῖται ἐπὶ περιφερείας ἥτις γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΓΔ.

Τὸ ἀντίστροφον.— Θὰ δείξωμεν ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχει τὴν ἰδιότητα: Ἔστω πρὸς τοῦτο τὸ σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Φέρομεν τὰς ΜΓ, ΜΔ, ΜΑ, ΜΒ. Ἂν ἡ ΜΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΜΒ ἡ πρότασις εἶναι φανερά. Ἂν ὅμως ἡ ΜΓ δὲν εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ταύτης τότε θὰ εἶναι διχοτόμος π. χ. τῆς γωνίας BMA_1 ἢ BMA_2. Ἐπειδὴ δὲ ΜΔ κάθετος τῇ ΜΓ ἡ ΜΔ θὰ εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος τῆς αὐτῆς γωνίας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι θὰ πρέπῃ

$$\frac{MA_1}{MB} = \frac{\Gamma A_1}{\Gamma B} \text{ καὶ } \frac{MA_1}{MB} = \frac{\Delta A_1}{\Delta B} \text{ ἢ } \frac{\Gamma A_1}{\Gamma B} = \frac{\Delta A_1}{\Delta B}$$

$$\text{ἢ } \frac{\Gamma A_1}{\Delta A_1} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} \quad (1).$$

Ἔχομεν ὅμως ἐξ ὑποθέσεως ὅτι

$$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma A}{\Delta A} = \frac{\Gamma B}{\Delta B} \quad (2).$$

Συγκρίνοντες τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν

$$\frac{\Gamma A_1}{\Delta A_1} = \frac{\Gamma A}{\Delta A} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Gamma A_1}{\Delta A_1 - \Gamma A_1} = \frac{\Gamma A}{\Delta A - \Gamma A}$$

ἢ $\frac{\Gamma A_1}{\Delta\Gamma} = \frac{\Gamma A}{\Delta\Gamma}$ ἤτοι $\Gamma A_1 = \Gamma A$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον ἐκτὸς ἂν τὸ A_1 συμπίπτει πρὸς τὸ Α. (Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ μὲ τὸ A_2).

Ἐξ ὅλων λοιπὸν τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ΜΓ εἶναι πράγματι διχοτόμος τῆς γωνΑΜΓ ἡ δὲ ΜΔ τῆς ἐξωτερικῆς τῆς γωνίας ΑΜΓ τοῦ τριγώνου ΑΜΓ. Ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἂν $\mu = \nu$ Τότε ὁ τόπος εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἐπὶ τῶν συζυγῶν ἁρμονικῶν δυνάμεθα νὰ δείξωμεν εὐκόλως τὰς κάτωθι παρατηρήσεις.

1.—Τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ Γ, Δ πρὸς τὰ Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ο τοῦ ΑΒ.

2.—Τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ Γ καὶ Δ πρὸς τὰ Α καὶ Β εἶναι τοιαῦτα ὥστε τὸ Γ νὰ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β, τὸ δὲ Δ ἐκτὸς τοῦ ΑΒ.

3.—Ἂν Ο τὸ μέσον τοῦ ΑΒ καὶ Γ καὶ Δ τὰ συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ Α καὶ Β θὰ εἶναι

α) $(OA)^2 = (O\Gamma)(O\Delta)$ (λίαν ἀξιοσημείωτον).

β) $\frac{1}{(A\Gamma)} + \frac{1}{(A\Delta)} = \frac{2}{(AB)}$ (ἁρμονικὴ ἰσότης)

4.—Τὸ ἁρμονικὸν συζυγὲς τοῦ μέσου Ο τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ κεῖται εἰς ἄπειρον.

5.—Ἂν α τὸ μῆκος τῆς ΑΒ καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ ὁ λόγος $\frac{MA}{MB}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἀφ' ἑνὸς μὲν ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας τοῦ Ἀπολλωνίου ὡς ἐπίσης καὶ αἱ ἀποστάσεις τοῦ κέντρου αὐτῆς ἐξ ἑκάστου τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ ΕΝ ΤΩ, Γ' ΒΙΒΛΙΩ,

«Εἰς πᾶν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἔναντι πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του».

Ἔστω τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο (Σχ. 144). Θὰ δείξωμεν ὅτι $(AB)(\Gamma\Delta)+(A\Delta)(B\Gamma)=(A\Gamma)(B\Delta)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Κατασκευάζομεν τὴν γωνΒΑΕ ἴσην πρὸς τὴν ΔΑΓ. Τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν γωνB_1=γωνΓ_1

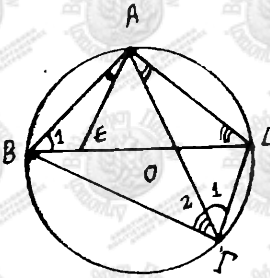
καὶ γωνΒΑΕ=γωνΔΑΓ (ἐκ κατασκευῆς), ἄρα

$$\frac{(AB)}{(A\Gamma)}=\frac{(BE)}{(\Delta\Gamma)}$$

ἢ (ΑΒ) (ΔΓ)=(ΑΓ) (ΒΕ) (1)

Ὁμοίως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν γων ΒΑΓ=γων ΕΑΔ (ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἑκάστην τῶν ἴσων καὶ τὴν κοινὴν γωνΕΑΓ), καὶ τὴν γωνΓ_2=γωνΑΔΒ, ὅτε $\frac{(B\Gamma)}{(E\Delta)}=\frac{(A\Gamma)}{(A\Delta)}$ ἢ (ΒΓ) (ΑΔ)= =(ΕΔ) (ΑΓ) (2). Προσθέτοντες τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη λαμβάνομεν

(ΑΒ)(ΔΓ)+(ΒΓ)(ΑΔ)=(ΑΓ) (ΒΕ)+(ΑΓ)(ΕΔ)= =(ΑΓ) [(ΒΕ)+(ΕΔ)] = (ΑΓ) . (ΒΔ).



Σχ. 144.

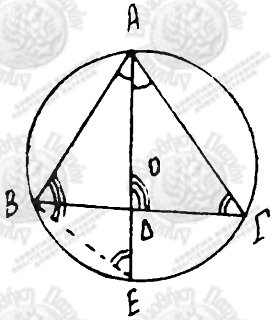
Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ πρὸς τοῦτο μὲ πλευρὰν τὴν ΑΒ καὶ κορυφὴν τὸ Β γωνία ἴση πρὸς Γ_1, ἧς ἡ πλευρὰ θὰ τμήσῃ τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε'. Δεικνύομεν δὲ τότε ὅτι τὸ Ε' κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΔ.

Ἐπίσης δεικνύομεν βάσει τῆς ἀσκήσεως 213 ὅτι

$$\frac{(A\Gamma)}{(B\Delta)}=\frac{(A\Delta)\ (AB)+(\Gamma\Delta)\ (\Gamma B)}{(BA)\ (B\Gamma)+(\Delta A)\ (\Delta\Gamma)}$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΩΝ ΔΙΧΟΤΟΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

«Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς περιεχομένης διχοτόμου σὺν τῷ γινομένῳ τῶν δύο τμημάτων τὰ ὁποῖα αὕτη ὁρίζει ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς».



Σχ. 145.

Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α αὐτοῦ (Σχ. 145). Θὰ δείξωμεν ὅτι (ΑΒ) (ΑΓ)=$(A\Delta)^2$+(ΒΔ) (ΔΓ).

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. — Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον κύκλον καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΔ νὰ τμήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Ε. Σύρομεν δὲ βοηθητικῶς καὶ τὴν ΒΕ. Ἀπὸ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, λαμβάνομεν $\frac{(AB)}{(A\Delta)}=\frac{(AE)}{(A\Gamma)}$

ἢ (ΑΒ) (ΑΓ)=(ΑΔ) (ΑΕ)=(ΑΔ) [(ΑΔ)+(ΔΕ)]= = $(A\Delta)^2$+(ΑΔ) (ΔΕ).

Ἀλλὰ λόγῳ τῶν τεμνομένων χορδῶν ΑΕ καὶ ΒΓ θὰ ἔχωμεν (ΑΔ) (ΔΕ)=(ΒΔ) (ΔΓ), ἡ δὲ προηγουμένη ἰσότης γίνεται (ΑΒ) (ΑΓ)=$(A\Delta)^2$+(ΒΔ) (ΔΓ). (1)

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὁρίζομεν τὸ μῆκος τῆς διχοτόμου ΑΔ συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ὡς ἑξῆς:

Προσδιορίζομεν τὰ τμήματα ΒΔ καὶ ΔΓ ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως (ἄσκ. 218) $\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ} = \dfrac{ΒΔ}{ΔΓ}$

ἤτοι $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{ΒΔ}{ΔΓ}$ ἢ $\dfrac{ΔΓ}{\beta} = \dfrac{ΒΔ}{\gamma} = \dfrac{ΔΓ+ΒΔ}{\beta+\gamma}$

$= \dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$, ὅτε $(ΔΓ) = \dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$, $(ΒΔ) = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$

Καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνωτέρω σχέσιν (1) ὅτε λαμβάνομεν

$$\beta\gamma = (ΑΔ)^2 + \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}\,\frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$$

$$\text{ἢ } (ΑΔ)^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\left[(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2\right] =$$

$$= \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha) = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2}\cdot 2\tau\, 2(\tau-\alpha)$$

$$\text{ἤτοι } (ΑΔ) = \frac{2}{\beta+\gamma}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)\beta\gamma}$$

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν τοὺς τύπους οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τὰ μήκη καὶ τῶν ἄλλων διχοτόμων.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

96*.— Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας. (Ἀπολλωνίου 1ον Πρόβλημα).

97.— Δι' ἑνὸς τῶν σημείων τομῆς δύο τεμνομένων περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τοιαύτη ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο ἀποτεμνομένων ἀπ' αὐτῆς χορδῶν νὰ εἶναι ἴσος πρὸς $\dfrac{\mu}{\nu}$ (μ, ν δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα).

98.— Εἰς παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ εὐθεῖαν ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε, τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Η. Νὰ δειχθῇ ὅτι $(ΔΕ)^2 = (ΕΖ)\,(ΕΗ)$.

99.— Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων δύο χορδῶν καθέτως τεμνομένων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

100.— Ἐὰν Μ σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ἰσοσκελοῦς θὰ εἶναι $(ΑΒ)^2 - (ΑΜ)^2 = (ΜΒ)\,(ΜΓ)$.

101.— Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ (Α ἀμβλεῖα) σημεῖον Δ τοιοῦτον ὥστε $(ΑΔ)^2 = (ΒΔ)\,(ΔΓ)$.

102.— Διὰ σημείου Ρ ἐκτὸς δοθέντος κύκλου νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ τὸ ἐντὸς τῆς περιφερείας νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἐφαπτομένην τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Ρ πρὸς τὴν περιφέρειαν.

103.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφερείας.

104.— Ἀπὸ σημείου Ρ ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας κειμένου, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΡΑΒ ὥστε νὰ εἶναι $(ΑΒ)^2 = (ΡΑ)\cdot(ΡΒ)$.

105.— Ἂν ΑΔ εἶναι διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ καὶ ἀχθοῦν αἱ διχοτόμοι ΔΕ καὶ ΔΖ τῶν γωνιῶν ΑΔΒ, ΑΔΓ νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΓ.

106.— Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον οὗ δίδεται ἡ βάσις, ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ τὸ ὕψος τὸ ἀντιστοιχοῦν τῇ δοθείσῃ βάσει.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

216.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγεθος εἰς μοίρας καὶ ὀρθὰς γωνίας ἑκάστης τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν κανονικοῦ πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου.

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι τὸ μέγεθος ἑκάστης τῶν γωνιῶν κανονικοῦ πολυγώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $2-\frac{4}{\mu}$ εἰς ὀρθὰς γωνίας καὶ $\left(2-\frac{4}{\mu}\right).90^0$ εἰς μοίρας.

Εἰς τὴν περίπτωσίν μας θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν

1) Διὰ τὸ πεντάγωνον $2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}$ ὀρθ. $=108^0$.

2) Διὰ τὸ ἑξάγωνον $2-\frac{4}{6}=\frac{8}{6}$ ὀρθ. $=120^0$.

3) Διὰ ὀκτάγωνον $2-\frac{4}{8}=\frac{12}{8}$ ὀρθ. $=135^0$.

4) Διὰ τὸ δωδεκάγωνον $2-\frac{4}{12}=\frac{20}{12}$ ὀρθ. $=150^0$.

Ἑκάστη δὲ ἐξωτερική, ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ἐσωτερικῆς θὰ εἶναι

διὰ τὸ 1) $2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$ ὀρθ. $=72^0$

διὰ τὸ 2) $2-\frac{8}{6}=\frac{4}{6}$ ὀρθ. $=60^0$

διὰ τὸ 3) $2-\frac{12}{8}=\frac{4}{8}$ ὀρθ. $=45^0$

διὰ τὸ 4) $2-\frac{20}{12}=\frac{4}{12}$ ὀρθ. $=30^0$

Καὶ γενικῶς ἡ ἐξωτερικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι

$$\frac{4}{\mu} \text{ ὀρθ. ἢ } \frac{360^0}{\mu}.$$

217.—Τίνος κανονικοῦ πολυγώνου ἑκάστη μὲν γωνία εἶναι 150^0 ἑκάστη δὲ τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν 60^0 ;

ΛΥΣΙΣ.— α) Ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $\left(2-\frac{4}{\mu}\right)90^0=150^0$

ἢ λύοντες ὡς πρὸς μ εὑρίσκομεν $\mu = 12$ (δωδεκάγωνον).

β) Ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $\dfrac{360^0}{\mu} = 60^0$ ἢ $\mu = 6$ (ἑξάγωνον).

218.—Νὰ εὑρεθῇ ἡ κεντρικὴ γωνία κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 5, 6, 8, μ πλευράς· καὶ ἀντιστρόφως νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ὅταν ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι 90°, 45°, 22° 30′.

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κεντρικὴ γωνία θὰ εἶναι

$$\frac{4}{\mu} \text{ ὀρθ. ἢ } \frac{360^0}{\mu} \text{ εἰς μοίρας.}$$

Ἤτοι ἔχομεν α) $\dfrac{4}{5}$ ὀρθ. $= 72^0$ β) $\dfrac{4}{6}$ ὀρθ. $= 60^0$,

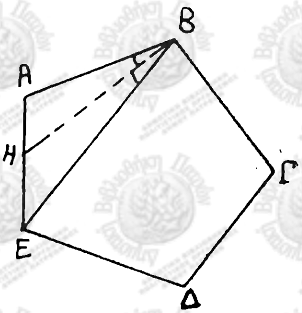
γ) $\dfrac{4}{8}$ ὀρθ. $= 45^0$, καὶ γενικῶς $\dfrac{4}{\mu}$ ὀρθ. $\dfrac{360^0}{\mu}$.

Ἀντιστρόφως: α) Θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι $\dfrac{360^0}{\mu} = 90^0$ ἢ $\mu = 4$ (τετράγωνον) β) $\dfrac{360^0}{\mu} = 45^0$ ἢ $\mu = 8$ (ὀκτάγωνον) γ) $\dfrac{360^0}{\mu}$ $22^0\ 30'$

ἢ $\dfrac{360}{\mu} = 22\dfrac{1}{2}$ ἢ $\mu = 16$ (δεκαεξάγωνον).

219.— Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΕ κανονικοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι κάθετος τῇ πλευρᾷ ΒΓ.

Εἰς τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 146) ἔστω ΒΗ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΒΕ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ.



Σχ. 146.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΕ = ΑΒ) καὶ ἡ γωνία $\hat{A} = \dfrac{6}{5}$ ὀρθ. ἕπεται ὅτι ἡ γωνία ΑΒΕ θὰ ἰσοῦται μὲ $\dfrac{2}{5}$ ὀρθῆς, ὅτε ἡ γωνΕΒΓ $= \dfrac{6}{5} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{5}$ ὀρθῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΗ εἶναι διχοτόμος τῆς γων ΑΒΕ, ἡ γων ΗΒΕ $= \dfrac{1}{5}$ ὀρθ.

Ἄρα ἡ γων ΗΒΓ $= \dfrac{1}{5} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$ ὀρθ. ἤτοι ΒΗ $\perp$ ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

220.— Πολύγωνον ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς δύο κύκλους ὁμοκέντρους εἶναι κανονικόν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι χορδαὶ τοῦ μεγάλου κύκλου ἀπέχουσαι ἰσάκις τοῦ κέντρου, ὡς ἐφαπτομέναι τοῦ μικροῦ κύκλου ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι, ἤτοι τὸ πολύγωνον εἶναι κανονικόν.

221.— Ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι $\frac{3}{4}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων καὶ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὰ θεωρήματα § 267 καὶ § 259 εὑρίσκομεν ὅτι ὁ λόγος τῶν περιμέτρων θὰ εἶναι ἐπίσης $\frac{3}{4}$, ὁ δὲ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν $\frac{9}{16}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

222.— Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφοῦν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 8, 16, 12, 24 πλευράς.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐγγράφομεν κατ' ἀρχὰς τετράγωνον καὶ κατόπιν διχοτομοῦμεν τὰ τόξα του. Συνδέοντες τὰ σημεῖα διαιρέσεως ἔχομεν ἓν κανονικὸν ὀκτάγωνον (§266). Διχοτομοῦντες ἤδη καὶ τὰ τόξα τοῦ ὀκταγώνου ἔχομεν ἓν κανονικὸν δεκαεξάγωνον.

Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὸν δωδεκάγωνον, ἐγγράφομεν πρῶτον ἓν κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ διχοτομοῦμεν τὰ τόξα αὐτοῦ. Διχοτομοῦντες δὲ καὶ τὰ τόξα τοῦ κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἔχομεν τὸ κανονικὸν εἰκοσιτετράγωνον.

223.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο τετραγώνων, ἐξ ὧν τὸ ἓν εἶναι περιγεγραμμένον, τὸ δὲ ἄλλο ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, τότε ἡ μὲν πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου θὰ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$, ἡ δὲ τοῦ περιγεγραμμένου ἴση πρὸς μίαν διάμετρον ἤτοι 2α.

Τὰ ἐμβαδὰ δὲ αὐτῶν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $(\alpha\sqrt{2})^2 = 2\alpha^2$ καὶ $(2\alpha)^2 = 4\alpha^2$ καὶ ὁ λόγος των $\frac{2\alpha^2}{4\alpha^2} = \frac{1}{2}$.

224.— Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἀπόστημα ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐγγεγραμ. εἰς κύκλον εἶναι $\frac{\alpha}{2}$, ἂν α ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α εἶναι $\alpha\sqrt{3}$. Τότε τὸ ἀπόστημά του θὰ εἶναι :

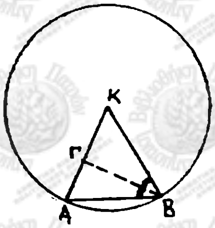
$$\sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\alpha}{2}$$

225.— Κατασκευὴ σχημάτων περιεχόντων κανονικὰ πολύγωνα.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ

«Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον κανονικὸν δεκάγωνον».

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω κύκλος Κ (Σχ. 147) καὶ ΑΒ ἡ πλευρὰ τοῦ δεκαγώνου. Φέρομεν τὰς ΚΑ, ΚΒ ἀκτῖνας, ὅτε γωνΚ= $\frac{1}{10}$ περιφερ. = = 36°. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνΒ διὰ τῆς ΒΓ. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν γωνιῶν Α καὶ Β τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΚΑΒ εἶναι γνωστὴ καὶ ἴση πρὸς 72°, ἔπεται ὅτι διὰ τῆς διχοτόμου ΒΓ, ἡ γωνΒ διηρέθη εἰς δύο γωνίας, ὧν ἑκάστη εἶναι 36°. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΚΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἄρα ΓΚ=ΓΒ. Ὁμοίως καὶ τὸ τρίγωνον ΓΒΑ εἶναι ἰσοσκελές, διότι γωνΒΓΑ=γωνΑ=72°, ἤτοι ΑΒ=ΓΒ. Ἄρα ΑΒ=ΒΓ=ΚΓ. Ἐπειδὴ ὅμως ΒΓ διχοτόμος, θὰ τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν παρακειμένων πλευρῶν ἤτοι $\frac{(AB)}{(KB)} = \frac{(A\Gamma)}{(K\Gamma)}$.



Σχ. 147.

Ἀλλὰ (ΚΒ)=(ΚΑ), (ΑΒ)=(ΚΓ) ὅτε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται $\frac{(K\Gamma)}{(KA)} = \frac{(A\Gamma)}{(K\Gamma)}$ (1) ἢ $(K\Gamma)^2 = (A\Gamma)\,(KA)$, τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ΚΓ καὶ διὰ αὐτοῦ καὶ τὸ ἴσον του ΑΒ, ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἰς τὸ μέσον καὶ ἄκρον λόγον (χρυσῆ τομή). Ὥστε διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν κανονικοῦ δεκαγώνου ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ νὰ λάβωμεν τὸ μεγαλύτερον τῶν δύο μερῶν.

Ὁ ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς (ΑΒ), συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R, γίνεται ὡς ἑξῆς :

Θέτομεν εἰς τὴν (1) ἀντὶ (ΚΑ) = R καὶ (ΑΓ) = R — (ΚΓ) ὅτε λαμβάνομεν $(K\Gamma)^2 = R\,(R - K\Gamma)$ ἢ $(K\Gamma)^2 + R\,(K\Gamma) - R^2 = 0$.

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον αὐτὴν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς (ΚΓ) λαμβάνομεν (ἀπορρίπτοντες τὴν ἀρνητικὴν τιμὴν) $(K\Gamma) = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$

Σελὶς 136. **ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β'**

Τὴν ἀπόδειξιν τῶν προτάσεων τῶν σχετικῶν μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ὁρίων δύναταί τις νὰ εὕρῃ εἰς οἱονδήποτε σύγγραμμα ἀλγέβρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

226.— Ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶναι 1) 10 μ. 2) 0,6 μ. 3) 0,08 μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του. Καὶ ἀντιστρόφως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του, ὅταν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του εἶναι : 1) 31,416 μ. 2) 15,708 μ. 3) 1,2566 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τὸν δίδοντα τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου ἤτοι $\Gamma = 2\pi\alpha$ ἔνθα ὁ π θὰ λαμβάνεται ἴσος πρὸς 3,1416 καὶ λαμβάνομεν

1) $\Gamma = 2 \cdot 3{,}1416 \cdot 10 = 6{,}2832$
2) $\Gamma = 2 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}6 = 3{,}76992$
3) $\Gamma = 2 \cdot 3{,}1416 \cdot 0{,}08 = 0{,}502656$

Ἀντιστρόφως.— Γνωστοῦ ὄντος τοῦ Γ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ α λύοντες ὡς πρὸς αὐτὸ ἤτοι $\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi}$

1) $\alpha = \frac{31{,}416}{2 \cdot 3{,}1416} = 5\mu.$ 2) $\alpha = \frac{15{,}708}{2 \cdot 3{,}1416} = 2{,}5$

3) $\alpha = \frac{1{,}2566}{2 \cdot 3{,}1416} = 0{,}2$

227.— Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων εἶναι 1,12 μ καὶ 0,8 μ. Ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ πρῶτον πολύγωνον εἶναι 2,4 μ. Πόση εἶναι ἡ περιφέρεια ἡ περιγεγραμμένη περὶ τὸ ἄλλο πολύγωνον;

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι (§ 276) ὁ λόγος τῶν περιφερειῶν δύο κύκλων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, ἀλλὰ ὅτι καὶ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν περιμέτρων τῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τούτους.

Ἂν λοιπὸν κληθῇ Γ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ ἔχωμεν

$$\frac{1,12}{0,8} = \frac{2,4}{Γ} \quad ἢ \quad Γ = 1,7 \text{ μ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

228.— Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου ὅταν εἶναι 1) α = 6 μ. μ = 52°, 2) α = 5 μ. μ = 22° 30′ 3) α = 1 μ. μ = 50° 20′ 40″

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\frac{πα μ}{180°}$ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν 1) $\frac{3,1416 \,.\, 6 \,.\, 52}{180} = 3,44544$ μ.

2) $\frac{3.1416 \,.\, 5 \,.\, 22,5}{180} = 7,854$ μ. 3) $\frac{3,1416 \,.\, 1 \,.\, 50,344}{180} = 0,88$ μ.

229.—Τὸ μῆκος τόξου 45° εἶναι 7,854 μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας του.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν αὐτὸν ὡς ἄνω τύπον λαμβάνομεν $7,854 = \frac{3.1416 \,.\, α \,.\, 45°}{180°}$ Λύοντες δὲ ὡς πρὸς α εὑρίσκομεν α=10μ.

Σελὶς 141. § 284.—**ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**

Ἂν καλέσωμεν $Κ_1$, $Κ_2$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κύκλων καὶ $α_1$, καὶ $α_2$ τὰς ἀκτῖνας των θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας $Κ_1 = πα_1^2$ καὶ $Κ_2 = πα_2^2$. Διαιροῦντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\frac{Κ_1}{Κ_2} = \frac{πα_1^2}{πα_2^2}$ ἢ $\frac{Κ_1}{Κ_2} = \frac{α_1^2}{α_2^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

230.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶναι 1) 3 μ. 2) 0,3 μ. 3) 0,21 μ. ἢ τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 25,1328 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $Κ = πα^2$ λαμβάνομεν

1) $Κ = 3,1416 \,.\, 3^2 = 28,2744$ τ.μ. 2) $Κ = 3,1416 \,.\, 0,3^2 = 0,282744$ τ.μ.

3) $Κ = 3,1416 \,.\, 0,21^2 = 0,13854456$ τ.μ. Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιφερείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος του ἤτοι $Κ = 25,1328 \,.\, \frac{α}{2}$ ἔνθα α ἡ ἀκτίς, ἥτις εἰς τὸ πρόβλημα δὲν ἐδόθη καὶ ἥτις εἶναι $\frac{25,1328}{2.3,1416} = 4$ ἄρα $Κ = 25,1328 \,.\, \frac{4}{2} =$
$= 50,2656$ τ.μ.

231 — Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τινὸς εἶναι 90 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔχομεν $\pi\alpha^2 = 90$ ἢ $\alpha^2 = \frac{90}{3,1416}$ ἢ $\alpha = \sqrt{\frac{90}{3,1416}} = 5,3$ μ.

232.— Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἔχων ἐπιφάνειαν ἴσην πρὸς τὴν διαφορὰν ἢ πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων κύκλων.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐὰν καλέσωμεν α καὶ β τὰς ἀκτῖνας τῶν δοθέντων κύκλων καὶ καλέσωμεν x τὴν ἀκτῖνα τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν $\pi x^2 = \pi\alpha^2 - \pi\beta^2$ (ὑποτίθεται $\alpha > \beta$).

Ἢ ἁπλοποιοῦντες διὰ π θὰ ἔχωμεν $x^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο μᾶς δεικνύει ὅτι ἡ ἀκτὶς x τοῦ ζητουμένου κύκλου θὰ εἶναι ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογώγου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα α καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ἴσην πρὸς τὴν ἀκτῖνα β.

Διὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ ἔχωμεν $\pi x^2 = \pi\alpha^2 + \pi\beta^2$ ἢ $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$ δηλαδὴ ἡ x εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου καθέτων πλευρῶν α καὶ β.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

233.—Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 10μ. πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶναι 10^0;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\frac{\pi\alpha^2\mu}{360}$ λαμβάνομεν

$$\frac{3,1416 \cdot 10^2 \cdot 10}{360} = 8,72 \text{ τ. μ.}$$

234.—Κυκλικοῦ τομέως 36^0 τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 3,853750 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, εἰς ὃν ἀνήκει.

ΛΥΣΙΣ.— Θὰ ἔχωμεν $\frac{\pi \cdot \alpha^2 \cdot 36}{360} = 3,853750$

$$\text{ἢ } \alpha^2 = \frac{3,853750 \cdot 360}{3,1416 \cdot 36} = \frac{3,85375 \cdot 10}{3,1416} = 12,26$$

καὶ ἄρα $\alpha = \sqrt{12,26} = 3,5$ μ.

235.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος 2 μ ὅταν τὸ τόξον τοῦ τμήματος εἶναι 60^0.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ τὸ τόξον τοῦ τμήματος εἶναι 60^0, ἡ χορδὴ τοῦ τμήματος θὰ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα ἤτοι 2 μ. Διὰ νὰ εὕρωμεν λοιπὸν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν κυκλικὸν τομέα ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον τοῦ τμήματος καὶ ἀπ' αὐτοῦ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 2 μ ὅπερ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος καὶ τὰς παρακειμένας ἀκτῖνας. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν·

$$\text{Ἐμβ. κυκλ. τομέως} = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 60}{360} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \text{ τ. μ.}$$

Ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου $= \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ τ. μ.

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τμήματος εἶναι $\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{3}$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Δ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

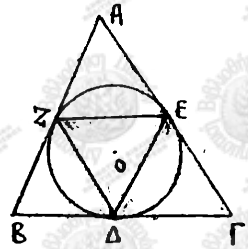
236.— Ἐὰν μία κορυφὴ κανονικοῦ πενταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον συμπίπτει μετὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, πόσων μοιρῶν εἶναι τὸ τόξον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἀμέσως ἑπομένων κορυφῶν;

ΛΥΣΙΣ.— Ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι $A_1 A_5$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου καὶ $A_1 A_6$ ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου, τότε $A_6 A_5$ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον τόξον. Ἀλλὰ $A_6 A_5 = A_1 A_5 - A_1 A_6 = 72^0 - 60^0 = 12^0$ (Διότι ἡ πλευρὰ τοῦ πενταγώνου ἀντιστοιχεῖ εἰς τόξον 72^0 καὶ ἡ τοῦ ἑξαγώνου εἰς τόξον 60^0)

237.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιμέτρου ἰσοπλεύρου τριγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ ἰσόπλευρον περιγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΔΕΖ τὸ ἀντίστοιχον ἐγγεγραμμένον ἰσόπλευρον. (Σχ. 148).

Ἐπειδὴ γωνία $A = 60^0$, εἶναι δὲ $AZ = AE$ (ὡς ἐφαπτόμεναι ἐκ σημείου πρὸς περιφέρειαν) ἕπεται ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΖΕ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐπειδὴ δε ἰσόπλευρα εἶναι καὶ τὰ λοιπὰ τρίγωνα ΒΖΔ, ΓΔΕ ἕπεται ὅτι ἡ πλευρὰ $AB = 2 . \Delta E$ ἤτοι αἱ πλευραὶ τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι διπλάσιαι τῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ συνεπῶς καὶ λόγος τῶν περιμέτρων θὰ εἶναι 2.



Σχ. 148.

238.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς περιφερείας κύκλου πρὸς τὴν περίμετρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτόν.

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτῖνα. Ἄρα ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 6α (α = ἀκτίς). Ἀφ' ἑτέρου τὸ μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι 2πα. Συνεπῶς ὁ λόγος εἶναι $\frac{2\pi\alpha}{6\alpha} = \frac{\pi}{3}$.

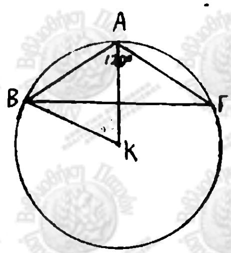
239.—Δύο τόξα ἔχουν ἴσα μήκη. Τὸ πρῶτον εἶναι $12^0\ 30'$ καὶ τὸ δεύτερον $2^0\ 30'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ δευτέρου, ὅταν ἡ τοῦ πρώτου εἶναι 2,5 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν x τὴν ἀκτῖνα τοῦ δευτέρου κύκλου τότε τὰ μήκη τῶν τόξων θὰ εἶναι ἀντιστοίχως τοῦπρώτου $\frac{\pi . 2{,}5 . 12^0\ 30'}{180^0}$ τοῦ δευτέρου $\frac{\pi . x . 2^0\ 30'}{180^0}$. Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως τὰ μήκη τῶν τόξων εἶναι ἴσα, ἄρα

$$\frac{\pi \cdot x \cdot 2^0\ 30'}{180^0} = \frac{\pi \cdot 2{,}5 \cdot 12^0 30'}{180^0} \quad \text{ἢ} \quad x = 12{,}5\ \mu.$$

240.—Ἐὰν ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 120^0, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι ἴση πρὸς μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ καὶ οὗ ἡ γωνΒΑΓ $= 120^0$. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΚΒ=ΑΒ (Σχ. 149).



Σχ. 149.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Φέρομεν τὴν ΚΑ ἥτις θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ. Ἀλλὰ τότε γωνΚΑΒ $= 60^0$. Ἄρα τότε καὶ γωνΚ $= 60^0$ ἤτοι τὸ τρίγωνον ΚΑΒ εἶναι ἰσόπλευρον ὅτε ΚΒ=ΑΒ.

241.— Τὸ ἔδαφος δωματίου ἐστρώθη διὰ πλακῶν ἐχουσῶν σχήματα κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶναι κ, λ, ρ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}$.

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ γωνία πολυγώνου κανονικοῦ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου. $2 - \frac{4}{\mu}$ (μ = ἀριθμὸς πλευρῶν). Εἰς τὴν περίπτωσιν μας αἱ γωνίαι τῶν πολυγώνων τῶν ἐχόντων πλευρὰς κ, λ, ρ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως $2 - \frac{4}{\kappa}$, $2 - \frac{4}{\lambda}$, $2 - \frac{4}{\rho}$. Ἐπειδὴ δὲ διὰ τῶν γωνιῶν τούτων καλύπτεται πλήρως ἡ περί τι σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἐπιφάνεια θὰ πρέπῃ

$$2 - \frac{4}{\varkappa} + 2 - \frac{4}{\lambda} + 2 - \frac{4}{\varrho} = 4 \text{ ὀρθ.}$$

$$\text{ἢ} - \frac{4}{\varkappa} - \frac{4}{\lambda} - \frac{4}{\varrho} = -2 \text{ ἢ } \frac{4}{\varkappa} + \frac{4}{\lambda} + \frac{4}{\varrho} = 2$$

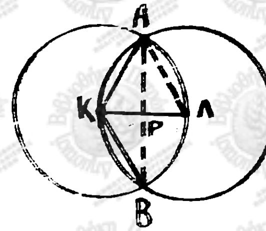
διαιροῦντες δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 4 λαμβάνομεν $\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}$.

242. ΛΥΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τοῦ βιβλίου παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν τεθῇ ΑΒ $= 2\alpha$ τότε γραμμὴ ΑΒΔ $= \pi\alpha + \pi \cdot 2\alpha = 3\pi\alpha$, γραμμὴ ΑΓΔ $= \pi \cdot 2\alpha + \pi\alpha = 3\pi\alpha$, γραμμὴ ΑΕΔ $= \pi \cdot 3\alpha$.

243. ΛΥΣΙΣ.— Τὸ τόξον τοῦ λευκοῦ μέρους τὸ σημειούμενον διὰ ἐστιγμένης εἶναι τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $\frac{2\pi \cdot 2}{6} = \frac{2\pi}{3}$ μ. Ὅλα δὲ τὰ ἄλλα τόξα τὰ περικλείοντα λευκὰ μέρη εἶναι ἡμιπεριφέρειαι γραφεῖσαι μὲ διαμέτρους ἀκτῖνας τοῦ κύκλου ἄρα ἓν τούτων θὰ εἶναι $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 1 = \pi$, δύο δὲ τοιαῦτα θὰ εἶναι 2π. Ἄρα τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου ἑνὸς λευκοῦ θὰ εἶναι $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$ μ.

244.—Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο ἴσων κύκλων ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα των. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν κύκλων τούτων.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστωσαν οἱ ἴσοι κύκλοι Κ καὶ Λ διὰ τοὺς ὁποίους δίδεται ὅτι, ἡ διάκεντρος των ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀκτῖνα, ἤτοι ἡ περιφέρεια τοῦ ἑνὸς διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἑτέρου (Σχ. 150). Ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους ΑΚΒΛΑ (καμπυλόγράμμου). Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ΑΒ, ἥτις εἶναι κάθετος τῇ διακέντρῳ ΚΛ. Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ χορδὴ δύο ἴσων κύκλων ἕπεται ὅτι τὰ δύο κυκλικὰ τμήματα ΑΡΒΛ καὶ ΑΡΒΚ εἶναι ἴσα. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν. Σύρομεν τότε τὰς ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τμῆμα ΑΡΒΛ εἶναι διαφορὰ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΚΑΛΒ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΚΒ.



Σχ. 150.

Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομεως ΚΑΛΒ=

$= \frac{\pi\alpha^2 \cdot 120^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi\alpha^2}{3}$ (ἂν α = ἀκτίς), [διότι γων ΑΚΒ = 120° ὡς διπλασία τῆς γων ΑΚΛ = 60° ἕνεκα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΚΛ (αἱ πλευραὶ ἴσαι ὡς ἀκτῖνες)]. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΚΑΒ =

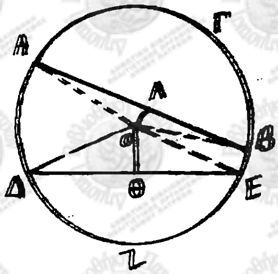
$= \frac{1}{2} \cdot \alpha\sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ (διότι ΑΒ = πλευρὰ ἰσοπλεύρου ἐγγεγραμμένου ἀφοῦ γωνΑΚΒ=120°, καὶ ΚΡ=ἀπόστημα).

Συνεπῶς ἐμβ. κυκλ. τμημ ΑΡΒΛ= $\frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$

Ἄρα ἐμβ. ΑΚΒΛΑ=2 . $\frac{\alpha^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{12} = \frac{\alpha^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$

245 — Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τμήματος κύκλου ἀκτῖνος α ὅταν ἡ χορδή του εἶναι 1) πλευρὰ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ 2) πλευρὰ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

ΛΥΣΙΣ.—Ἕκαστον τμῆμα εἶναι διαφορὰ τοῦ ἀντιστοίχου κυκλικοῦ τομέως καὶ τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος. Ἄρα θὰ ἔχωμεν. Διὰ τὸ πρῶτον. (Σχ. 151). Ἂν καλέσωμεν Ο τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ΑΒ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου τότε ἐμβ. κυκλ. τμήμ. ΑΛΒΓ= =ἐμβ. κυκλ. τομ. ΟΑΓΒ— ἐμβ. τριγ. ΟΑΒ=



Σχ. 151.

$= \frac{\pi \cdot \alpha^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \alpha\sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ [διότι ((ΑΒ)) = $\alpha\sqrt{3}$ καὶ ((ΟΛ)) = $\frac{\alpha}{2}$].

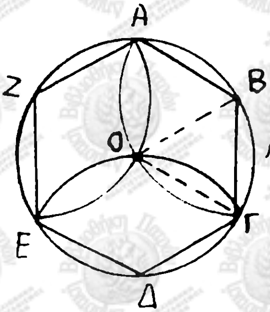
Διὰ τὸ δεύτερον : Ἂν ΔΕ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου θὰ εἶναι ἐμβ. κυκλ. τμήμ. ΔΘΕΖ = ἐμβ. κυκλ. τομ. ΟΔΖΕ — ἐμβ. τριγ. ΟΔΕ =

$$=\frac{\pi\alpha^2}{4}-\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}\,\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi\alpha^2}{4}-\frac{2\alpha^2}{4}=\frac{\pi\alpha^2-2\alpha^2}{4}$$

246.— Μὲ κέντρα τὰς ἀρτίας (ἢ τὰς περιττὰς) κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α γράφομεν τρία τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου κείμενα καὶ περατούμενα εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν οὕτω σχηματιζομένων τριῶν φύλλων.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ ὅλοι οἱ γραφέντες κύκλοι εἶναι ἴσοι, ἕπεται ὅτι τὰ τρία φύλλα ἀποτελοῦνται ἀπὸ 6 κυκλικὰ τμήματα, ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΒΓΝ (σχ.152). Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ κυκλ. τμῆμα ΒΝΓ καὶ νὰ τὸ ἐπαναλάβωμεν ἑξάκις.

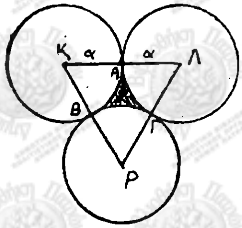
Τοῦτο ὅμως εἶναι διαφορὰ τοῦ κυκλικοῦ τομέως ΟΒΝΓ καὶ τοῦ τριγώνου ΟΒΓ ἤτοι μὲ $\frac{\pi\alpha^2}{6}-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν φύλλων εἶναι $6\left(\frac{\pi\alpha^2}{6}-\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\right)$.



Σχ. 152.

247.— Τρεῖς κύκλοι ἀκτῖνος α ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀνὰ δύο. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιέχεται μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων τούτων.

ΛΥΣΙΣ.— Ἑνοῦμεν τὰ κέντρα τῶν ἴσων κύκλων (Σχ 153) καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΚΛΡ, ἑκάστη πλευρὰ τοῦ ὁποίου θὰ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἁφῆς (ὡς διάκεντρος κύκλων ἐφαπτομένων). Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν λοιπὸν τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΓ τὴν περιεχομένην μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τούτων ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τούτου τοὺς τρεῖς κυκλικοὺς τομεῖς. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΚΛΡ εἶναι ἰσόπλευρον πλευρᾶς 2α, οἱ δὲ κυκλικοὶ τομεῖς εἶναι προφανῶς ἴσοι.



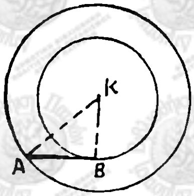
Σχ. 153.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐμβαδὸν καμπυλ.-τριγώνου ΑΒΓ = ἐμβ. τριγ.ΚΛΡ—

— 3 ἐμβαδ. κυκλ. τομ. ΑΚΒ $=\frac{(2\alpha)^2\sqrt{3}}{4}-3\,\frac{\pi\alpha^2}{6}=\alpha^2\sqrt{3}-\frac{\pi\alpha^2}{2}$.

248.—Ἡ ἐπιφάνεια ἡ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων περιλαμβανομένη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἄλλης.

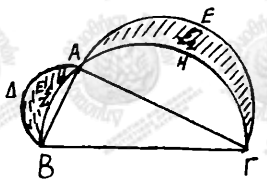
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἂν φέρωμεν τὰς ΚΑ καὶ ΚΒ καὶ καλέσωμεν (ΚΑ)=Α καὶ (ΚΒ)=α τὰς ἀκτῖνας τῶν κύκλων (Σχ. 154), ἡ μεταξὺ τῶν ἐπιφάνεια θὰ εἶναι $\pi A^2 - \pi \alpha^2 = \pi (A^2 - \alpha^2)$. Ἀλλὰ $A^2 - \alpha^2 = (AB)^2$ (λόγῳ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΒΑ), ὅτε ἡ μεταξύ των ἐπιφάνεια θὰ εἶναι $\pi (AB)^2$ δηλαδὴ ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου τοῦ ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ.



Σχ. 154.

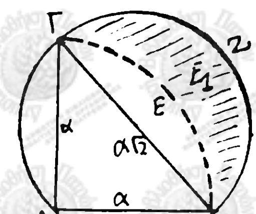
249.—Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου, γραφῇ ἡμικύκλιον περιέχον αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη τῶν ἡμικυκλίων τούτων τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται ***μηνίσκοι τοῦ Ἱπποκράτους***) ἔχουν ἄθροισμα τὸ τρίγωνον.

ΛΥΣΙΣ.— Ὁ μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν γραφόμενος κύκλος ἔχει ἐμβαδὸν $\pi \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi (B\Gamma)^2}{4}$ (Σχ. 155). Οἱ δὲ μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς γραφόμενοι κύκλοι ἔχουν ἐμβαδὰ ἀντιστοίχως $\pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \pi \frac{(AB)^2}{4}$, $\pi \left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 = \pi \frac{(A\Gamma)^2}{4}$.



Σχ. 155.

Ἀλλὰ εἶναι γνωστὸν ὅτι $(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2$ ἢ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ $\frac{\pi}{4}$ λαμβάνομεν $\frac{\pi (B\Gamma)^2}{4} = \frac{\pi (AB)^2}{4} + \frac{\pi (A\Gamma)^2}{4}$.
Συνεπῶς καὶ τὸ ἡμικύκλιον ΒΖΑΗΓ = μὲ ἡμικ. ΒΔΑ + ἡμικ. ΑΕΓ.
Ἢ τριγΑΒΓ + κυκλ. τμ. ΒΖΑ + κυκλ.τμ.ΑΗΓ = = μηνισ. E_1 + κυκλ.τμ.ΒΖΑ + μηνισ.E_2 + κυκλ.τμ ΑΗΓ. Διαγράφοντες δὲ ἀπὸ τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος τὰ ἴσα λαμβάνομεν τριγΑΒΓ = μηνισ.E_1 + μηνισ E_2.



Σχ. 156.

250.—Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιγραφῇ κύκλος καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν, γραφῇ ἄλλος κύκλος, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον.

ΛΥΣΙΣ.—Ἐὰν καλέσωμεν α τὴν μίαν τῶν ἴσων καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 156), ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως ΑΓΕΒ ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου ἀκτῖνος α ἤτοι $\frac{\pi\alpha^2}{4}$. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἡμικυκλίου ΓΒΖ εἶναι $\frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi \, (\alpha\sqrt{2})^2}{8} =$

$= \frac{\pi\alpha^2}{4}$. Συνεπῶς παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κυκλ. τομεὺς ΑΓΕΒ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμικύκλιον ΓΖΒ. Ἀλλὰ ὁ μὲν τομεὺς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ κυκλ. τμημ. ΓΕΒ, τὸ δὲ ἡμικύκλιον ἀπὸ τὸν μηνίσκον E_1 καὶ τὸ κυκλ. τμῆμα ΓΕΒ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ = μηνισ. E_1.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΥΘΕΙΩΝ & ΕΠΙΠΕΔΩΝ

Σελὶς 146. § 289. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**—Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶναι τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τριῶν σημείων, ὧν τὸ ἓν εἶναι ἡ τομὴ Α τῶν εὐθειῶν, τὰ δὲ δύο ἄλλα εἶναι τὰ Β καὶ Γ, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ἀντιστοίχως. Ἄρα διὰ δύο εὐθειῶν τεμνομένων διέρχεται ἓν ἐπίπεδον ἀφοῦ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων ὡς ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

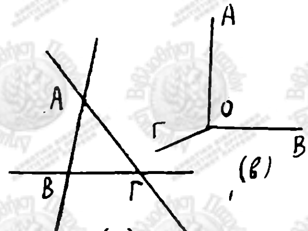
Σελὶς 146. § 290. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**— Γνωρίζομεν ὅτι δύο εὐθεῖαι διὰ νὰ εἶναι παράλληλοι πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀπαντήσωμεν ἀμέσως· ἐξ ὁρισμοῦ. Δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν ἰδίων παραλλήλων, διότι τότε τὰ δύο ἐπίπεδα θὰ εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὸ ἓν ἐπὶ τῆς μιᾶς καὶ τὰ δύο ἐπὶ τῆς ἄλλης τῶν παραλλήλων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. **251.**— Εὐθεῖα κινουμένη καὶ ἡ ὁποία διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Α καὶ τέμνει εὐθεῖαν μὴ περιέχουσαν τὸ Α γράφει ἐπιφάνειαν ἐπιπέδου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ μὴ περιέχουσα τὸ Α ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Εἰς ἑκάστην θέσιν ἡ κινουμένη εὐθεῖα ὡς ἔχουσα πάντοτε δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖται ἐπ' αὐτοῦ.

252.— Ποίαν ἐπιφάνειαν γράφει εὐθεῖα γραμμὴ κινουμένη οὕτως ὥστε νὰ τέμνῃ περιφέρειαν **κύκλου**.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ κύκλος εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ σχῆμα ἐπίπεδον, ἡ κινουμένη λοιπὸν εὐθεῖα τέμνουσα πάντοτε τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς δύο σημεῖα θὰ κεῖται πάντοτε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ συνεπῶς κινουμένη γράφει τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

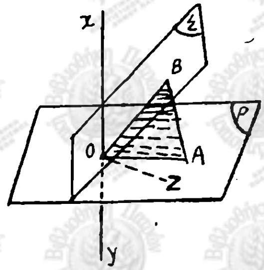


Σχ. 157.

253.— Τρεῖς εὐθεῖαι γραμμαί, ἐκ τῶν ὁποίων ἑκάστη συναντᾷ τὰς ἄλλας δύο, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἢ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

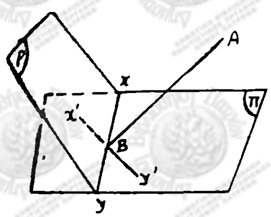
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ (Σχ. 157α) τεμνόμεναι ἀνὰ δύο ὁρίζουν τρία σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας ὁρίζουν ὡς γνωστὸν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου. Ἑκάστη δὲ τῶν εὐθειῶν κεῖται ἐπ' αὐτοῦ ὡς ἔχουσα δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. Ἂν δὲ αἱ εὐθεῖαι ἔχουν κοινὸν σημεῖον π. χ. τὸ Ο ὡς εἰς τὸ (Σχ. 157β) τότε θὰ ὑπάρχουν τρία ἐπίπεδα τὰ ΟΑΒ, ΟΑΓ, ΟΒΓ. (Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι δύνανται νὰ κεῖνται καὶ ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ νὰ διέρχωνται διὰ τοῦ Ο).

Σελὶς 148. § 295.—**ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**— Ἔστω εὐθεῖα xy καὶ σημεῖον Ο κείμενον ἐπ' αὐτῆς (Σχ. 158). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἄγεται εἰς τὸ Ο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τῆς xy καὶ ἓν μόνον. Πρὸς τοῦτο φέρομεν εἰς τὸ Ο τὰς καθέτους ΟΑ καὶ ΟΖ ἐπὶ τῆς xy καὶ πρὸς τυχούσας διευθύνσεις. Αὗται τεμνόμεναι περὶ τὸ Ο ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Ἐπειδὴ δὲ ἡ xy εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένας εὐθείας αὐτοῦ καὶ εἰς τὴν τομὴν των θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Ρ. Ὥστε ἤχθη εἰς τὸ Ο καὶ ἐπὶ τῆς xy κάθετον ἐπίπεδον. Δὲν ὑπάρχει ἄλλο κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τῆς xy καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο, διότι ἂν δεχθῶμεν ὡς τοιοῦτον καὶ τὸΣ, τότε τὸ ὑπὸ τῆς xy καὶ τῆς ΟΑ ὁριζόμενον ἐπίπεδον xΟΑ θὰ τμήσῃ τὸ νέον ἐπίπεδον Σ κατὰ τὴν ΟΒ, ἐφ' ἣν ἡ xy θὰ εἶναι κάθετος, διότι ἡ ΟΒ διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου xy ἐπὶ τὸ **Σ**. Ἀλλὰ τότε αἱ ΟΑ καὶ ΟΒ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy καὶ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, ὅπερ εἶναι ἄτοπον. Ἄρα ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον ἄγεται κάθετον τῇ xy εἰς τὸ Ο.



Σχ. 158.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ — **254.**— Πᾶσα πλαγία εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον εἶναι κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένην καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της, μία δὲ καὶ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει:



Σχ. 159.

Ἔστω εὐθεῖα ΑΒ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 159). Θὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π εὐθεῖα, ἐφ' ἧς ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος καὶ ὅτι τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει μία μόνον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι, ἂν ὑπάρχῃ μία τοιαύτη εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β καὶ κειμένη ἐπὶ τοῦ Π, θὰ πρέπῃ αὕτη νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἄγεται κάθετον τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β δηλ. ἐπὶ τοῦ Ρ. Φέρομεν λοιπὸν τὸ ἐπίπεδον Ρ κάθετον τῇ ΑΒ εἰς τὸ Β (§ 295), ὅπερ ὡς ἔχον ἓν κοινὸν σημεῖον μὲ τὸ Π θὰ τέμνῃ τὸ Π κατά τινα εὐθεῖαν xy. Ἐπὶ ταύτην ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος, ἀφ' οὗ ἡ xy εἶναι εὐθεῖα τοῦ Ρ ἐπὶ τοῦ ὁποίου ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος. Δὲν ὑπάρχει ἄλλη εὐθεῖα x'y' τοῦ Π ἐφ' ἣν ἡ ΑΒ νὰ εἶναι κάθετος, διότι ἂν ἦτο αὕτη κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς δύο, θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, ὅπερ ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἐπειδὴ ἡ ΑΒ ἐδόθη πλαγία πρὸς τὸ Π.

255.—Τρεῖς εὐθεῖαι ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον καὶ κάθετοι ἀνὰ δύο δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχῆμα 157β παρατηροῦμεν ὅτι ἂν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο, ὑποτεθῇ δὲ ὅτι ἡ ΟΑ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ ΟΒ καὶ ΟΓ, τότε θὰ εἴχομεν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τῆς ΟΓ δύο καθέτους ἐπ' αὐτὴν τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὰ ἤδη γνωστὰ ἐν τῇ ἐπιπεδομετρίᾳ. Ἄρα αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ κεῖνται ἀνὰ δύο εἰς διάφορα ἐπίπεδα. Εἶναι δὲ ἑκάστη τούτων κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ δύο ἄλλαι διότι εἶναι κάθετος ἐπὶ ἑκάστης τούτων (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ εἰς τὴν τομήν των.

Σελὶς 151. § 302. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**—Διότι ἂν ὑποθέσωμεν ὅτι ἤγοντο δύο κάθετοι ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, αὗται θὰ ἦσαν παράλληλοι, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας ἥτις δίδει ὅτι ἄγονται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Σελὶς 151. § 303. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 300 τοῦ βιβλίου παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ ἐὰν ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (ΜΝ), ἡ δὲ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου, τότε καὶ ἡ ΑΔ θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ. Πράγματι ἂν διὰ τοῦ ποδὸς Ε τῆς καθέτου ΑΕ ἀχθῇ ἡ ΗΖ παράλληλος τῇ ΒΓ τότε αὕτη θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΕ καὶ τὴν ΕΔ, εὐθείας τοῦ τριγώνου ΑΕΔ, ἄρα καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΔ. Τότε ὅμως καὶ ἡ παράλληλος τῇ ΑΕ, ἡ ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ αὐτὴ κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΑΔΕ καὶ συνεπῶς καὶ ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν αὐτοῦ διερχομένην διὰ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου ταύτης. Μία ὅμως τοιαύτη εὐθεῖα εἶναι ἡ ΑΔ. Ἄρα ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος τῇ ΒΓ. Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι : «Ἂν ἡ ΑΕ κάθετος ἐπὶ τοῦ ΜΝ καὶ ΑΔ κάθετος τῇ ΒΓ θὰ εἶναι καὶ ΕΔ κάθετος τῇ ΒΓ». Καὶ ὅτι : «Ἂν ΑΔ κάθετος τῇ ΒΓ καὶ ΕΔ κάθετος τῇ ΒΓ, κεῖται δὲ ἡ ΒΓ καὶ ΕΔ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τότε ἡ ΑΕ θὰ εἶναι κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ».

Τὰ ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τὸ καλούμενον θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων.

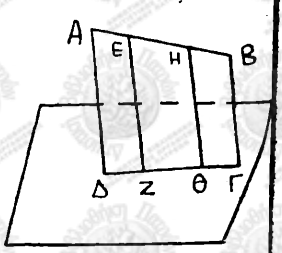
Σελὶς 152. § 304. **ΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ.**— 1) Διότι ἂν ἦτο μία ἄλλη μικροτέρα, τότε θὰ ἦτο ἡ πλαγία μικροτέρα τῆς καθέτου. 2) Διότι ἂν ἀπεῖχον ἄνισον καὶ αἱ πλάγιοι θὰ ἦσαν ἄνισοι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν, ἥτις δίδει ὅτι εἶναι ἴσαι. 3) Οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον, διότι ἂν ἀπεῖχον ἴσον καὶ αἱ πλάγιαι θὰ ἦσαν ἴσαι, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ὁ ποὺς δὲ τῆς μεγαλυτέρας ἀπέχει περισσότερον, διότι ἂν ἀπεῖχε ὀλιγώτερον θὰ ἦτο ἡ πλαγία αὕτη καὶ ἡ μικροτέρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **256.**— Ἐὰν εὐθεῖα στρέφεται περὶ ἄξονα μένουσα παράλληλος πρὸς αὐτόν, δύο οἱαιδήποτε θέσεις τῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Διότι αἱ δύο διάφοροι θέσεις τῆς εὐθείας θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα καὶ συνεπῶς καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

257.— Ἐκ τῶν σημείων τῆς εὐθείας ΑΒ ἄγονται κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Τί εἶναι μεταξύ των αἱ κάθετοι αὗται ; καὶ ἐπὶ ποίας ἐπιφανείας κεῖνται;

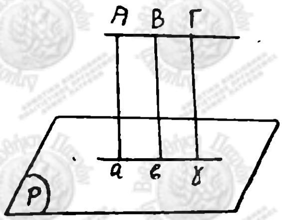
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Αἱ κάθετοι ΑΔ, ΕΖ, ΗΘ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι παράλληλοι (Σχ. 160). Κεῖνται δὲ πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζει ἡ ΑΒ καὶ μία τῶν καθέτων π. χ. ἡ ΑΔ. Πράγματι ἑκάστη τῶν καθέτων τούτων, ἡ ἀγομένη ἐκ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ καὶ συνεπῶς θὰ πρέπῃ νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ, διότι ἂν δὲν ἔκειτο, π. χ. ἡ ΕΖ, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, τότε ἡ ΕΖ καὶ ΑΔ ὡς παράλληλοι θὰ ὥριζον τὴν θέσιν ἑνὸς ἄλλου ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου θὰ ἔκειτο ἡ ΑΔ καὶ ἡ ΑΕ (δηλαδὴ ἡ ΑΒ), ἄρα ταῦτα θὰ συνέπιπτον.



Σχ. 160

258.—Ὅταν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου. Τί λέγεται λοιπὸν ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ ἐπιπέδου, πρὸς τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλος ;

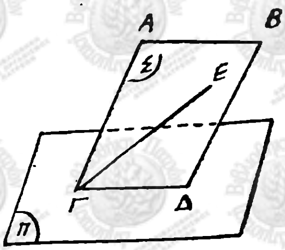
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔστω εὐθεῖα ΑΒΓ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ (Σχ. 161) καὶ Αα, Ββ, Γγ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ. Ἐδείχθη προηγουμένως ὅτι αἱ κάθετοι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ΑΓγα. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὸ Ρ κατὰ τὴν εὐθεῖαν αγ πρὸς τὴν ὁποίαν ἡ ΑΓ θὰ εἶναι παράλληλος, διότι ἂν εἶχον κοινὸν σημεῖον, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των, τοῦτο ὡς ἀνῆκον εἰς τὴν αγ, ἥτις κεῖται συγχρόνως καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ θὰ ἦτο κοινὸν τῆς ΑΓ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ὅπερ ἄτοπον διότι ἡ ΑΓ ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὸ Ρ. Ἀφοῦ λοιπὸν ΑΓ παράλληλος τῇ αγ ἔπεται ὅτι τὰ σχήματα ΑΒβα, ΑΓγα εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ συνεπῶς εἶναι Αα = Ββ = Γγ. Βάσει τούτου καλοῦμεν ἀπόστασιν εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον, τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 161.

Σελὶς 153 § 307.— **ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τοῦ βιβλίου § 306 παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὴν ΓΔ τότε ἡ τομὴ αὐτὴ θὰ ἐγίνετο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ (διότι ἡ ΓΔ θὰ κεῖται ὅσον καὶ ἂν προεκταθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου), ἤτοι ἡ ΑΒ θὰ ἔτεμνε τὸ ΜΝ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν, καθ' ἣν ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ΜΝ.

Σελὶς 153 § 308.— **ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**— Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΓΕ ἀγομένη ἐκ σημείου Γ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ παράλληλος τῇ ΑΒ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π (Σχ. 162). Τότε ἐπειδὴ ΑΒ καὶ ΓΕ παράλληλοι, ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Σ, ὅπερ θὰ τμήσῃ τὸ Π κατὰ τὴν ΓΔ παράλληλον τῆς ΑΒ (§ 307). Ἀλλὰ τότε πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΕ, ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ Γ δύο παραλλήλους, τὴν ΓΕ καὶ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ Εὐκλείδειον αἴτημα.



Σχ. 162.

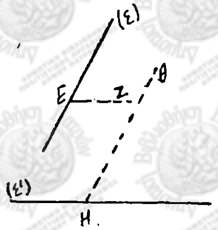
Σελὶς 156 § 315.— **ΠΟΡΙΣΜΑ.**— Διότι αἱ κάθετοι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι, ὡς παράλληλοι δὲ μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων θὰ εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**259.** Διὰ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον α) πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ β) πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας, αἱ ὁποῖαι οὔτε τέμνονται, οὔτε εἶναι παράλληλοι.(Καὶ ὁποῖαι καλοῦνται ἀσύμβατοι).

ΛΥΣΙΣ.— α) Πρὸς τοῦτο φέρομεν διὰ τοῦ δοθέντος σημείου εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Τότε πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας ταύτης θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπειδὴ αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου. β) Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου φέρομεν δύο εὐθείας παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δύο δοθείσας εὐθείας. Αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὡς ἔχουσαι ἓν κοινὸν σημεῖον, δηλαδὴ τὸ σημεῖον ἐξ οὗ ἄγονται, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς ἀμφοτέρας τὰς δοθείσας εὐθείας.

260.—Δι' ἑκάστης ἐκ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην.

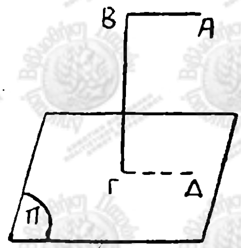
ΛΥΣΙΣ.—Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (ε), (ε΄) (Σχ. 163), αἱ ὁποῖαι ὑποτίθενται ὅτι οὔτε τέμνονται οὔτε εἶναι παράλληλοι. Διὰ νὰ φέρωμεν διὰ τῆς (ε) ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν (ε΄), σύρομεν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς (ε) π.χ. τὸ Ε τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ (ε΄). Τότε αἱ (ε) καὶ ΕΖ τεμνόμεναι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἡ (ε΄) εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτό, ὡς παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν αὐτοῦ τὴν ΕΖ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἂν θέλωμεν νὰ φέρωμεν διὰ τῆς (ε΄) ἐπίπεδον παράλληλον τῇ (ε). Σύρομεν τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ (ε) κλπ.



Σχ. 163

261.—Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, εἶναι μεταξύ των παράλληλα.

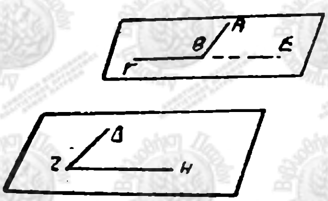
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π κάθετα ἀμφότερα τῇ εὐθείᾳ ΒΓ (Σχ. 164). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΒ καὶ τὸ Π εἶναι παράλληλα. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΑΒ καὶ ΒΓ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου τὸ ὁποῖον θὰ τμήσῃ τὸ δοθὲν Π κατά τινα εὐθεῖαν π. χ. τὴν ΓΔ. Ἀλλὰ τότε ἐπειδὴ ἡ ΒΓ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετος τῷ Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν ΓΔ, ἐπειδὴ δὲ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ εἶναι κάθετοι τῇ ΒΓ θὰ εἶναι παράλληλοι, ἤτοι ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου Π, συνεπῶς θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Ἐδείχθη οὕτω ὅτι ἡ ΑΒ καὶ τὸ Π εἶναι παράλληλα.



Σχ. 164.

262.— Ἐὰν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν δύο μὲν πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους, τὰς δὲ δύο ἄλλας παραλλήλους καὶ ἀντιρρόπους, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ ΔΖΗ (Σχ. 165), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τὰς μὲν ΑΒ καὶ ΔΖ ὁμορρόπους τὰς δὲ ΒΓ καὶ ΖΗ ἀντιρρόπους. Θὰ δείξωμεν ὅτι εἶναι παραπληρωματικαὶ ἤτοι γων$ΑΒΓ+$γων$ΔΖΗ=2$ὀρθ.



Σχ. 165.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Προεκτείνομεν τὴν ΓΒ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Β καὶ σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΒΕ, ἥτις θὰ ἔχῃ πλέον τὰς πλευρὰς της παραλλήλους καὶ ὁμορρόπους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΔΖΗ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὗται κατὰ τὸ θεώρημα (§ 317) εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα ἐφ' ὧν κεῖνται εἶναι παράλληλα. Ἐπειδὴ ὅμως γων$ΑΒΓ+$γων$ΑΒΕ=2$ὀρθ. ἕπεται ὅτι καὶ γων$ΑΒΓ+$γων$ΔΖΗ=2$ὀρθ.

263.—Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ τὰ τμήματα τῆς μιᾶς τὰ περιεχόμενα μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τούτων εἶναι ἴσα μεταξύ των, θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα καὶ θεώρημα τῆς § 318 παρατηροῦμεν ὅτι ἄν τῆς ἀναλογίας $\frac{BE}{EA}=\frac{\Delta H}{H\Gamma}$ οἱ ὅροι τοῦ α' λόγου εἶναι ἴσοι ἤτοι ΒΕ=ΕΑ τότε θὰ πρέπῃ καὶ οἱ ὅροι τοῦ β' λόγου νὰ εἶναι ἴσοι ἤτοι ΔΗ=ΗΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**264.** Πότε ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον δὲν εἶναι εὐθεῖα;

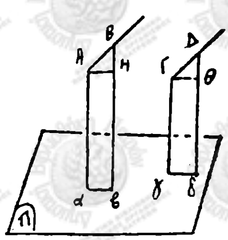
ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.—Ὅταν ἡ εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ὅτε ἡ προβολὴ αὐτῆς εἶναι σημεῖον.

265.—Ἡ εὐθεῖα ἡ παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον καὶ ἡ προβολή της ἐπ' αὐτὸ εἶναι ἴσαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὴν ἄσκησιν 258 παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σχῆμα ὅπερ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς εὐθείας, τῆς προβολῆς καὶ τῶν καθέτων ἐκ τῶν ἄκρων τῆς δοθείσης εὐθείας εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς ἡ προβολὴ ἰσοῦται μὲ τὴν εὐθεῖαν.

266.—Αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν δύο πρώτων εὐθειῶν.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 166), αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ αβ, γδ αἱ προβολαὶ αὐτῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ αβ καὶ γδ εἶναι παράλληλοι καὶ ὅτι $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 166.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ Αα καὶ Γγ εἶναι παράλληλοι ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως καὶ ΑΒ ∥ ΓΔ ἔπεται ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς γωνΒΑα καὶ ΔΓγ εἶναι παράλληλοι, ἄρα αἱ γωνίαι αὐταὶ πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδων παραλλήλων. Συνεπῶς τεμνόμενα τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΑΒβα καὶ ΓΔδγ ὑπὸ τρίτου, δηλαδὴ τοῦ δοθέντος Π, θὰ τέμνωνται κατ' εὐθείας παραλλήλους ἤτοι αἱ αβ καὶ γδ, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ τομαί, θὰ εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι. Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ δευτέρου μέρους τῆς προτάσεώς μας φέρομεν ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων ΑΒβα, ΓΔδγ τὰς ΑΗ καὶ ΓΘ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς αβ καὶ γδ. Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΗ καὶ ΓΔΘ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν γωνΒΑΗ=γωνΔΓΘ ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων εἶναι παράλληλοι. Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἔπεται ὅτι

$\frac{AH}{\Gamma\Theta}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$ ἀλλὰ ΑΗ=αβ καὶ ΓΘ=γδ, ὅτε θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}=\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

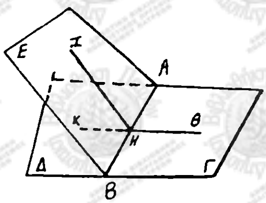
Σελὶς 161 § 325.—**ΠΟΡΙΣΜΑ.**— Σχηματίζομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους τῶν διέδρων τούτων. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφὴν ἄρα καὶ αἱ ἀντίστοιχοι δίεδροι εἶναι ἴσαι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **267.** Τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, εἶναι δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σχηματίζομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους τῶν διέδρων. Αἱ ἀντίστοιχοι αὐταὶ ἐπίπεδοι εἶναι ἐφεξῆς μὲ τὰς μὴ κοινὰς πλευρὰς των ἐπ' εὐθείας καὶ συνεπῶς εἶναι παραπληρωματικαί. Ἀλλὰ τότε καὶ ἀντίστοιχοι διέδροι θὰ εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ συνεπῶς ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν (§ 326).

268.— Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ διέδροι γωνίαι, αἱ μὴ κοιναὶ ἕδραι αὐτῶν κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ἔστωσαν αἱ ἐφεξῆς διέδροι ΕΑΒΓ καὶ ΕΑΒΔ (Σχ. 167) ἔχουσαι ἄθροισμα δύο ὀρθῶν διέδρων ἤτοι διεδ.γωνΕΑΒΓ$+$διεδ.γωνΕΑΒΔ$=$ 2ὀρθ. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ μὴ κοινοὶ ἕδραι ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

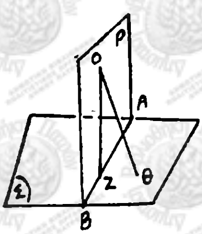


Σχ. 167.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σχηματίζομεν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους των ἤτοι τὴν γωνΙΗΘ καὶ ΙΗΚ. Ἀλλὰ τότε ἐπειδὴ αἱ ΙΗ, ΗΘ, ΚΗ εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ΑΒ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειδὴ ὅμως αἱ διέδροι εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παραπληρωματικαί, θὰ εἶναι γωνΙΗΘ$+$γωνΙΗΚ$=$2ὀρθ. καὶ συνεπῶς αἱ ΚΗ καὶ ΗΘ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Δηλαδὴ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν κοινὰς τὰς τεμνομένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΚΘ, συνεπῶς συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον.

269. Ἐὰν δι' εὐθείας ἐπὶ ἐπιπέδου φέρωμεν ἐπίπεδον πρὸς τὸ **αὐτὸ** μέρος τοῦ πρώτου ἐπιπέδου, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διέδρων γωνιῶν εἶναι δύο ὀρθαὶ διέδροι γωνίαι.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων ΙΗΘ καὶ ΙΗΚ θὰ ἰσοῦται πρὸς δύο ὀρθάς, ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο σχηματιζομένων διέδρων θὰ εἶναι ἴσον πρὸς δύο ὀρθὰς διέδρους γωνίας.



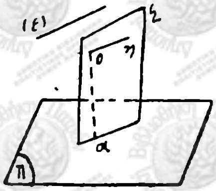
Σχ. 168.

Σελὶς 162 § 330.— **ΠΟΡΙΣΜΑ.—** Ἔστω ὅτι ἡ κάθετος ΟΘ' ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ. Φέρομεν ἐκ τοῦ Ο καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ τὴν ΟΖ κάθετον τῇ τομῇ ΑΒ τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ (Σχ. 168). Ἀλλὰ τότε κατὰ τὴν πρότασιν (§ 329) ἡ ΟΖ ὀφείλει νὰ εἶναι κάθετος τῷ Σ. Ἄρα ἐκ τοῦ Ο θὰ ἔχωμεν δύο καθέτους πρὸς τὸ ἐπίπεδον (Σ) ὅπερ ἄτοπον. Δέον ἄρα νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ ΟΘ κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**270.** Δι' ἑκάστης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ΑΒ ἡ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Σ. Σύρομεν τὴν κάθετον ΖΟ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Σ καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου Ζ τῆς ΑΒ (Σχ.168). Τότε τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΟΖ εἶναι τὸ ζητούμενον ἤτοι τὸ Ρ. Πράγματι τοῦτο ὡς περιέχον τὴν κάθετον ΟΖ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Σ. Δὲν ἄγεται δὲ ἄλλο ἐπίπεδον διὰ τῆς ΑΒ κάθετον τῷ Σ. Διότι ἄν ὑπῆρχε καὶ δεύτερον τοιοῦτον, τοῦτο θὰ ἐτέμνετο μετὰ τοῦ Ρ κατὰ τὴν ΑΒ (διότι ἀμφότερα ἄγονται διὰ τῆς ΑΒ). Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἀμφότερα ταῦτα ὑποτίθενται κάθετα τῷ Σ καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΒ θὰ ἦτο κάθετος τῷ Σ, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἡ ΑΒ κεῖται ἐπὶ τοῦ Σ.

271.—*Διὰ δοθέντος σημείου ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ ἕν μόνον.*

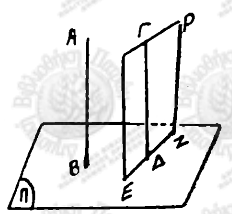


Σχ. 169.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω Ο τὸ δοθὲν σημεῖον καὶ (ε) ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα (Σχ. 169). Διὰ τοῦ Ο φέρομεν τὴν Οη παράλληλον τῆς δοθείσης (ε) καὶ τὴν τὴν Οα κάθετον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ Π. Αἱ δύο εὐθεῖαι Οη καὶ Οα τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Σ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Πράγματι τοῦτο εἶναι κάθετον τῷ Π, ὡς περιέχον τὴν κάθετον Οα καὶ παράλληλον τῇ (ε) ὡς περιέχον τὴν Οη ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ (ε). Δὲν ἄγεται δὲ ἄλλο· διότι διὰ τοῦ Ο μία κάθετος ἄγεται ἐπὶ τὸ Π καὶ μία παράλληλος πρὸς τὴν (ε).

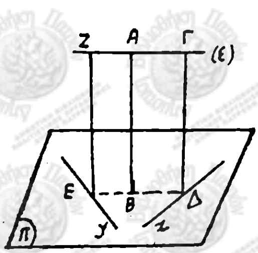
272.—*Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶναι κάθετα πρὸς ἄλλο ἐπίπεδον, εἶναι πρὸς ἄλληλα παράλληλα.*

Ἔστωσαν ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ ἀμφότερα κάθετα τῷ Π (Σχ. 170). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΑΒ καὶ τὸ Ρ εἶναι παράλληλα.



Σχ. 170.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Ρ σύρομεν τὴν ΓΔ κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν ΕΖ τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Π. Ἀλλὰ τότε ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ Π. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ Π, θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΑΒ οὖσα παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν τοῦ Ρ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Ρ. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ΑΒ καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.



Σχ. 171.

273.— *Ἡ ἀπόστασις εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον ἀπὸ οἱασδήποτε εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν πρώτην εἶναι ἡ αὐτὴ πάντοτε.*

Ἔστω εὐθεῖα (ε) παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου, ἡ (x), μὴ παράλληλος τῇ (ε) (Σχ. 171). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς (ε) καὶ (x) εἶναι πάντοτε ἡ αὐτὴ οἱαδήποτε καὶ ἄν εἶναι ἡ θέσις τῆς (x) ἐν τῷ Π.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν (ε) καὶ (x) (§ 333) φέρομεν ἐκ τυχόντος σημείου Α τῆς (ε) τὴν ΑΒ κάθετον τῷ Π καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΔ παράλληλον τῆς (ε), ἥτις τέμνει τὴν (x) εἰς τὸ Δ.

Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν τὴν ΔΓ παράλληλον τῆς ΑΒ, ἥτις θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν (x) καὶ (ε). Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἡ ἀπόστασις αὐτὴ ΓΔ τῶν (ε) καὶ (x) ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, ἥτις εἶναι σταθερά, ὡς ἀπόστασις εὐθείας παραλλήλου πρὸς ἐπίπεδον. Δηλαδὴ παρατηροῦμεν ὅτι ἂν ἡ (x) λάβῃ τὴν θέσιν τῆς (y) καὶ πάλιν ἡ ἀπόστασις ΖΕ τῆς (ε) καὶ (y) θὰ ἰσοῦται πρὸς τὴν ΑΒ. Ἄρα ἐδείχθη ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς (ε) ἀπὸ πάσης εὐθείας τοῦ Π μὴ παράλληλον πρὸς ταύτην εἶναι ἡ αὐτή.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Ε΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

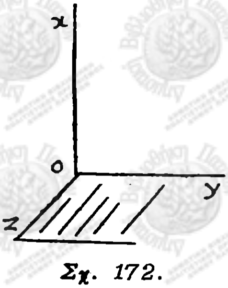
274.—Τρεῖς εὐθεῖαι γραμμαί, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ τέμνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καὶ τέμνουν μίαν εὐθεῖαν (ε) (τὸ σχῆμα ἁπλοῦν). Αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ ὁρίζουν τεμνόμεναι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ ἡ (ε) ὡς ἔχουσα μετ' αὐτῶν, δύο κοινὰ σημεῖα, τὰ Α καὶ Β. Ἀλλὰ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖται καὶ ἡ ΟΓ, ὡς ἔχουσα κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τὸ Ο καὶ Γ [διότι τὸ Γ ἀνήκει εἰς τὴν (ε) ἐπειδὴ ἡ ΟΓ τέμνει τὴν (ε)].

275.— **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι μεταξύ** των παράλληλοι, πᾶν ἐπίπεδον **παράλληλον πρὸς τὴν Β καὶ διερχόμενον** διὰ σημείου τινὸς τῆς Α, θὰ διέρχεται δι' ὁλοκλήρου τῆς εὐθείας Α.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ τινος σημείου Γ τῆς Α παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν Β, εἶναι τὸ (Ρ), καὶ μὴ περιέχον τὴν Α. Ἂν ἤδη ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ τῆς Α ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν Β κατὰ τὸ πόρισμα τῆς (§ 308) αὐτὴ ὀφείλει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως αἱ εὐθεῖαι Α καὶ Β εἶναι παράλληλοι: ὥστε θὰ ἤγοντο διὰ τοῦ Γ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τῇ Β, ὅπερ ἄτοπον, ἄρα τὸ (Ρ) περιέχει τὴν Α.

276.— **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι μεταξύ των κάθετοι, δι' ἑκάστης ἐξ αὐτῶν διέρχεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην καὶ ἓν μόνον.**



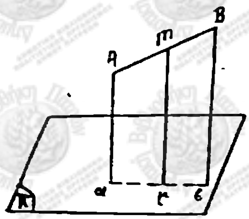
Σχ. 172.

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι Οx, Οy κάθετοι μεταξύ των (Σχ. 172). Θὰ δείξωμεν ὅτι ἄγεται διὰ τῆς Οy ἐπίπεδον κάθετον τῇ Οx.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εἰς τὸ Ο καὶ ἐπὶ τὴν Οx φέρομεν τὴν Οz κάθετον. Τότε αἱ Οy, Οz τεμνόμεναι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον τῇ Οx, διότι ἡ Οx εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας αὐτοῦ τὰς Οx (ἐξ ὑποθέσεως) καὶ Οz (ἐκ κατασκευῆς) καὶ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν Ο. Ὁμοίως ἐργαζόμενοι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς Οx καὶ κάθετον τῇ Οy. Δὲν δύναται δὲ διὰ τῆς Οx νὰ ἀχθῇ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον τῇ Οx, διότι θὰ εἴχομεν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο τῆς Οx δύο ἐπίπεδα κάθετα ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὴν πρότασιν τῆς § 295.

277.—Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων δύο σημείων ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ δύο ταῦτα σημεῖα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἔστωσαν Α καὶ Β τὰ δοθέντα σημεῖα, Μ τὸ μέσον τῆς ἑνούσης ταῦτα εὐθείας καὶ Αα, Ββ, Μμ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου Π (Σχ. 173). Δὰ δείξωμεν ὅτι Αα+Ββ=2Μμ.

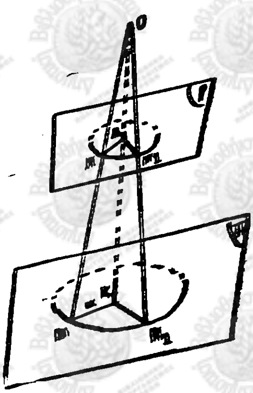


Σχ. 173.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα αβ, ἡ δὲ προβολὴ τοῦ μέσου Μ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ μέσον μ τῆς αβ. Πράγματι αἱ Αα, Ββ, Μμ ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ Π εἶναι παράλληλοι καὶ συνεπῶς τὸ σχῆμα ΑαβΒ εἶναι τραπέζιον, ὅτε ἡ Μμ ἀγομένη ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ θὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου μ τῆς αβ. Ἀλλὰ τότε ἡ Μμ ὡς διάμεσος τοῦ τραπεζίου ΑΒβα θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο παραλλήλων βάσεων (§ 201) ἄρα 2Μμ= = Αα+Ββ.

278.—Ἐὰν Μ εἶναι σημεῖόν τι δοθείσης περιφερείας Ο εἶναι σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τὸ Ν διαιρῇ τὴν εὐθεῖαν ΟΜ κατὰ δοθέντα λόγον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ Μ ὁ τόπος τοῦ Ν εἶναι περιφέρεια κύκλου.

Τὸ εὐθύ.—Ἔστω τὸ ἐπίπεδον Π ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ δοθεῖσα περιφέρεια, ἧς τὸ κέντρον ἔστω Κ καὶ Ο δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ Π. Ἂς ὑποθέσωμεν δε ὅτι Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ ταύτης τὸ σημεῖον Ν τοιοῦτον ὥστε $\frac{ON}{NM} = \lambda$ (ἔνθα λ ὁ δοθεὶς λόγος). Ζητοῦμεν τὸν γ. τόπον τοῦ Ν ὅταν ἡ ΟΜ στρέφεται περὶ τὸ Ο ὥστε τὸ Μ νὰ κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὴν ΟΚ, ἥτις εἶναι σταθερὰ θέσει καὶ μεγέθει, καὶ ὁρίζομεν ἐπὶ ταύτης σημεῖον Λ ὥστε $\frac{O\Lambda}{\Lambda K} = \lambda$. Σύρομεν τώρα τὴν ΛΝ καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΜ (ἧς τὸ μῆκος ἔστω ρ). Πράγματι ἐπειδὴ ἐν τῷ τριγΟΚΜ εἶναι $\frac{ON}{NM} = \frac{O\Lambda}{\Lambda K} = \lambda$, ἕπεται ὅτι ἡ ΛΝ εἶναι παράλληλος τῇ ΚΜ. Ἐκ τοῦ δοθέντος λόγου $\frac{ON}{NK} = \lambda$ ἕπεται ὅτι $\frac{ON}{NK} = \frac{\lambda}{1}$ ἢ $\frac{ON}{ON+NK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἢ $\frac{ON}{OM} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$



Σχ. 174

ἄρα καὶ $\frac{O\Lambda}{OK} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

Ἤδη ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΟΛΝ καὶ ΟΚΜ ἔχομεν $\frac{ΟΛ}{ΟΚ} = \frac{ΛΝ}{ΚΜ} = \frac{ΟΝ}{ΟΜ} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἢ $\frac{ΛΝ}{\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἢ $ΛΝ = \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}$. Ἐκ τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ν ἀπὸ τοῦ ὡρισμένου καὶ σταθεροῦ σημείου Λ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $\frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}$. Ἂν ἤδη τὸ Μ λάβῃ τὴν θέσιν $Μ_1$, τότε τὸ Ν θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $Ν_1$ καὶ συνεπῶς διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου εὑρίσκομεν ὅτι $ΛΝ_1 = \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}$, θὰ εἶναι δὲ $ΛΝ_1$ παράλληλος τῇ $ΚΜ_1$. Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ ΛΝ στρεφομένη περὶ τὸ Λ παραμένει παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, ἄρα κινουμένη θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ τοῦ παραλλήλου πρὸς τὸ Π καὶ ἀγομένου διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου Λ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα ΛΝ κινουμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου διατηρεῖ σταθερὸν μῆκος ἕπεται ὅτι τὸ Ν γράφει περιφέρειαν κύκλου κειμένου ἐπὶ τοῦ Ρ ἔχουσαν κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα $\frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}$.

Τὸ ἀντίστροφον: Ἔστω ἤδη τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου π. χ. τὸ $Ν_1$. Φέρομεν τὴν $ΟΝ_1$, τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν μέχρις ὅτου τμήσῃ τὸ ἐπίπεδον Π εἴς τι σημεῖον π. χ. τὸ $Μ_1'$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ $Μ_1'$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Κ, καὶ ὅτι $\frac{ΟΝ_1}{Ν_1 Μ'_1} = \lambda$ (δηλαδὴ τὸ $Μ'_1$ συμπίπτει πρὸς τὸ $Μ_1$). Πράγματι ἂν ἀχθῇ ἡ $ΚΜ'_1$ θὰ εἶναι $\frac{ΟΝ_1}{ΟΜ'_1} = \frac{ΛΝ_1}{ΚΜ'_1} = \frac{ΟΛ}{ΟΚ} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἄρα $\frac{ΛΝ_1}{ΚΜ'_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἢ $ΚΜ'_1 = \frac{(\lambda+1)\, ΛΝ_1}{\lambda} = \frac{\lambda+1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1} = \alpha$ $\left(\text{διότι } ΛΝ_1 = \frac{\alpha\lambda}{\lambda+1}\right)$ Ἄρα τὸ $Μ_1'$ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ συμπίπτει πρὸς τὸ $Μ_1$. Ἄρα $\frac{ΟΝ_1}{ΟΜ_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ ἢ $\frac{ΟΝ_1}{ΟΜ_1 - ΟΝ_1} = \frac{\lambda}{\lambda+1-\lambda}$ ἢ $\frac{ΟΝ_1}{Ν_1 Μ_1} = \lambda$.

279.—**Ἐὰν ἔχωμεν δύο εὐθείας καὶ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν διὰ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι μεταξύ των κάθετοι.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχ. 172 ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι Οx καὶ Οy εἶναι αἱ δύο δοθεῖσαι εὐθεῖαι καὶ ὅτι ἤχθη διὰ τῆς Οy ἐπίπεδον κάθετον τῇ Οx. Ἀλλὰ τότε ἡ Οx οὖσα κάθετος τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν Οy ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ ποδὸς τῆς Οx. Ἄρα αἱ Οx καὶ Οy εἶναι κάθετοι.

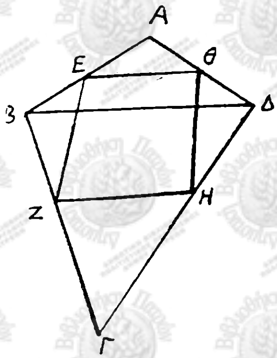
280.—**Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα δύο κατὰ κορυφὴν διέδρους γωνίας κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν πρὸς τοῦτο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν δοθεισῶν κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν. Λαμβάνομεν συνεπῶς τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους τῶν διέδρων, κειμένας προφανῶς ἐπ' αὐτοῦ. Ἀλλὰ αἱ ἀντίστοιχοι αὗται γωνίαι εἶναι ἴσαι ὡς κατὰ κορυφήν. Ἐὰν τώρα διχοτομήσωμεν τὰς διέδρους ταύτας, οἱ διχοτόμοι τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων των θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἄρα τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς κατὰ κορυφὴν διέδρους ἔχοντα κοινὴν τὴν ἀκμὴν καὶ διερχόμενα καὶ διὰ τῆς εὐθείας διχοτόμου τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιπέδων γωνιῶν συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν ἓν μόνον ἐπίπεδον.

281.— Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς διέδρους γωνίας εἶναι μεταξύ των κάθετα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν διέδρων γωνιῶν καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους των. Ἐπειδὴ αἱ δοθεῖσαι δίεδροι γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς καὶ παραπληρωματικαί, αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι θὰ εἶναι ἐπίσης παραπληρωματικαί, αἱ δὲ διχοτόμοι των θὰ εἶναι κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας. Ἂν λοιπὸν φέρωμεν τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς διέδρους ταύτας γωνίας ταῦτα ὡς ἔχοντα τὴν ἀντίστοιχον αὐτῶν ἐπίπεδον ὀρθὴν θὰ εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα, διότι ταῦτα θὰ περιέχουν τὰς διχοτόμους τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων.

282.— Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (στρεβλὸν τετράπλευρον), εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.



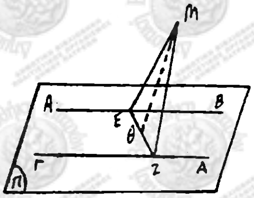
Σχ. 175.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω τὸ στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ε,Ζ,Η,Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του (Σχ. 175) Σύρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σημεῖα Α, Β, Δ ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου τριγώνου ΑΒΔ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ΕΘ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του ἄρα θὰ εἶναι ἡ ΕΘ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ΒΔ καὶ παράλληλος αὐτῇ. Ὁμοίως τὰ Γ, Β, Δ ὁρίζουν τὸ τρίγωνον ΓΒΔ εἰς ὃ ἡ ΖΗ ἡ συνδέουσα τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του θὰ εἶναι παράλληλος τῇ ΒΔ καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Συνεπῶς τὸ τετράπλευρον ΕΘΗΖ ὡς ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλως ἕπεται ὅτι εἶναι ἐπίπεδον παραλληλόγραμμον.

283.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν παραλλήλων.

Τὸ εὐθύ : Ἔστωσαν ΑΒ καὶ ΓΔ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι καὶ Π τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν (Σχ. 176). Ἔστω δὲ ΕΖ κοινὴ αὐτῶν κάθετος. Ἓν σημεῖον τοῦ τόπου εἶναι προφανῶς τὸ μέσον Θ τῆς ΕΖ. Ἂν ὑψώσωμεν τὴν κάθετον ΘΜ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τότε πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου ταύτης ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν παραλλήλων. Ἂν λοιπὸν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΖ τὸ διερχόμενον διὰ τῆς ΜΘ τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ Π. Λέγομεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἀποτελεῖ τὸν ζητούμενον γεωμ. τόπον.

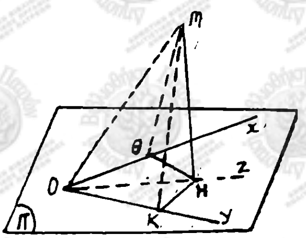
Τὸ ἀντίστροφον.—Πράγματι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τούτου ἔστω τὸ Μ ἀπέχει ἴσον ἐκ τῶν δύο παραλλήλων. Διότι ἄν ἀχθῇ ἡ κάθετος ΜΘ ἐκ τοῦ Μ ἐπὶ τὸ Π αὕτη θὰ κεῖται συγχρόνως καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόπου. Ἂν τώρα διὰ τοῦ ποδὸς Θ φέρωμεν τὴν κάθετον ΕΘΖ ἐπὶ τὰς παραλλήλους καὶ συνδέσωμεν τὸ Μ μὲ τὰ Ε καὶ Ζ τότε αἱ ΜΕ καὶ ΜΖ θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων. Ἀπὸ δε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΘΕ, ΜΘΖ εὐκόλως ἕπεται ὅτι ΜΕ=ΜΖ.



Σχ. 176.

284.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων.

Τὸ εὐθύ.— Ἔστωσαν Οx, Οy αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι αἱ ὁρίζουσαι τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Π. (Σχ. 177). Ἔστω δὲ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου καὶ ΜΘ, ΜΚ αἱ ἀποστάσεις αὐτοῦ ἀπὸ τῶν εὐθειων Οx, Οy δι' ἃς εἶναι ΜΘ = ΜΚ. Φέρομεν τὴν ΜΗ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ὡς καὶ τὰς ΗΘ καὶ ΗΚ. Τότε κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων αἱ ΗΘ καὶ ΗΚ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως κάθετοι ἐπὶ τὰς Οx, Οy Συγκρίνομεν τώρα τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΗΘ καὶ ΜΗΚ. Ταῦτα ἔχουν τὴν ΜΗ κοινὴν καὶ τὴν ΜΘ=ΜΚ, ἐπειδὴ τὸ Μ ἐδέχθημεν ὅτι εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΗΘ=ΗΚ, ὅτε τὸ Η θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γωνίας xΟy. Ἀλλὰ διὰ τῆς ΜΗ καὶ ΟΖ ὁρίζεται ἡ θέσις ἐπιπέδου, ὅπερ ὡς διερχόμενον διὰ τῆς ΜΗ θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π. Ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ἄγεται διὰ τῆς διχοτόμου ΟΖ τῆς γων xΟy καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π.



Σχ. 177.

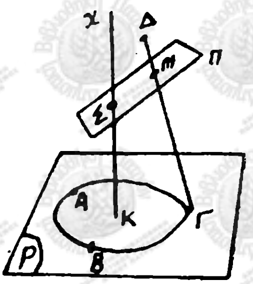
Τὸ ἀντίστροφον: Ἔστω ἤδη σημεῖόν τι Μ τοῦ τόπου. Φέρομεν ἐκ τοῦ Μ τὴν κάθετον ΜΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἥτις θὰ κεῖται εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τόπου, ἄρα θὰ τέμνῃ τὴν διχοτόμον ΟΖ εἰς τὸ σημεῖον Η. Φέρομεν ἐκ τοῦ Η τὰς καθέτους ΗΘ καὶ ΗΚ ἐπὶ τὰς Οx, Οy, αἵτινες θὰ εἶναι ἴσαι. Ἂν ἤδη ἀχθοῦν αἱ ΜΘ καὶ ΜΚ αὐταί, κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς Οx, Οy καὶ συγχρόνως ἴσαι, διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΗΘ, ΜΗΚ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΜΗ κοινὴν καὶ ΗΘ=ΗΚ. Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ τόπου ἔχει τὴν ἰδιότητα.

285.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

ΛΥΣΙΣ.—Πολὺ εὔκολα εὑρίσκομεν ὅτι ὁ τόπος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ παράλληλον πρὸς αὐτὰ καὶ ἀγόμενον ἐκ τοῦ μέσου τῆς ἀποστάσεώς των.

286.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τεσσάρων σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ἓν σημεῖον).

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστωσαν Α, Β, Γ, Δ τὰ τέσσαρα σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. (Σχ. 178). Ἐκ τούτων τὰ τρία Α, Β, Γ ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι ἡ κάθετος Κx εἰς τὸ κέντρον Κ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον τῶν σημείων Α, Β, Γ. Ἐπειδὴ ἤδη θέλομεν τὰ σημεῖα τῆς Κx νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου καὶ ἀπὸ τὸ Δ, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὸ μέσον Μ τῆς ΓΔ (ἢ τῆς ΑΔ, ἢ τῆς ΒΔ). Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο, ἔστω τὸ Π, θὰ τμήσῃ τὴν Κx εἴς τι σημεῖον Σ, ὅπερ εἶναι τὸ ζητούμενον. Προφανὲς ὅτι τοῦτο ἰσαπέχει τῶν Α, Β, Γ, Δ.

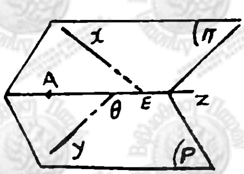


Σχ. 178.

Διερεύνησις.—Τὸ ἐπίπεδον Π θὰ τμήσῃ τὴν Κx, διότι ἂν δὲν τὴν ἔτεμνε θὰ ἦτο παράλληλον τῇ Κx, ὅτε θὰ ἦτο κάθετον τῷ Ρ. Ἀλλὰ τότε ἡ ΓΔ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π θὰ ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν Κx. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ἄγεται ἐκ σημείου Γ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, ὅτε θὰ ἔπρεπε νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Ρ, δηλαδὴ τὸ Δ θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ Ρ· ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἥτις δίδει ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ὥστε τὸ Π τέμνει τὴν Κx. Ἐπίσης θὰ πρέπῃ τρία τῶν δεδομένων σημείων νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

287.—Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω Α τὸ δοθὲν σημεῖον, x δὲ καὶ y αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τοῦ χώρου, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 179). Θέλομεν νὰ φέρωμεν διὰ τοῦ Α εὐθεῖαν τέμνουσαν ἀμφοτέρας ταύτας. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Α καὶ ἡ x ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Π, ἐπίσης δὲ ὅτι τὸ Α καὶ ἡ y ὁρίζουν τὴν θέσιν τοῦ ἐπιπέδου Ρ. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα, ὡς ἔχοντα κοινὸν σημεῖον τὸ Α, τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν ΑΖ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Πράγματι ἡ ΑΖ ὡς κειμένη μετὰ τῆς x εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π, τέμνει τὴν x π.χ. εἰς τὸ Ε. Ὁμοίως δὲ ὡς κειμένη μετὰ τῆς y εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ τέμνει τὴν y π.χ. εἰς τὸ Θ.

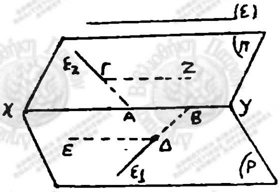


Σχ. 179.

Διερεύνησις.—Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν θὰ πρέπῃ ἑκάστη τῶν εὐθειῶν x, y νὰ μὴ εἶναι παράλληλος τῇ τομῇ ΑΖ. Δηλαδὴ ἑκάστη τῶν x, y νὰ μὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ὅπερ ὁρίζει τὸ Α καὶ ἡ ἄλλη τῶν εὐθειῶν x, y.

288.—Νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι (ε), ($ε_1$), ($ε_2$) μὴ κείμεναι εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (Σχ. 180). Θέλομεν νὰ φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον π.χ. πρὸς τὴν (ε), ἥτις νὰ τέμνῃ τὰς δύο ἄλλας ($ε_1$) καὶ ($ε_2$).



Σχ. 180.

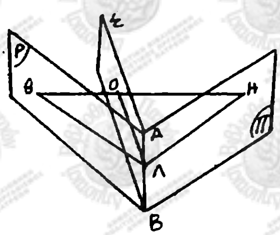
Πρὸς τοῦτο διὰ τυχόντος σημείου Γ τῆς ($ε_2$) φέρομεν τὴν ΓΖ παράλληλον τῆς (ε), ὅτε τὸ ἐπίπεδον (Π) τὸ ὁριζόμενον ὑπὸ τῶν ΓΖ καὶ ($ε_2$) θὰ εἶναι παράλληλον τῇ (ε). Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ τῆς ($ε_1$) φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ (ε), ὅτε τὸ ὑπὸ τῶν ΕΔ καὶ ($ε_1$) ὁριζόμενον ἐπίπεδον (Ρ) θὰ εἶναι παράλληλον τῇ (ε). Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα (Π) καὶ (Ρ) ἐν γένει τέμνονται κατά τινα εὐθεῖαν *xy*, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη. Διότι αὕτη εἶναι παράλληλος τῇ (ε) καὶ τέμνει ἀμφοτέρας τὰς ($ε_1$), ($ε_2$) ὡς κειμένη μεθ' ἑκάστης ἐν ἐπιπέδῳ. Εἶναι δὲ ἡ *xy* παράλληλος τῇ (ε) διότι, τὸ ἐπίπεδον (Ρ) εἶναι παράλληλον τῇ (ε), ἐπειδὴ δὲ τὸ (Π) περιέχει τὴν ΓΖ, ἥτις εἶναι παράλληλος τῇ (ε) καὶ ἄρα καὶ πρὸς τὸ (Ρ), ἕπεται ὅτι το (Π) τέμνον τὸ (Ρ) θὰ τέμνῃ τοῦτο κατ' εὐθεῖαν *xy* παράλληλον τῇ ΓΖ ἄρα καὶ τῇ (ε).

Διερεύνησις: Ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχῃ λύσιν θὰ πρέπῃ τὰ ἐπίπεδα (Π) καὶ (Ρ) νὰ τέμνωνται, ἀλλὰ διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο θὰ πρέπῃ οἱ εὐθεῖαι (ε), ($ε_1$), ($ε_2$) νὰ μὴ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, διότι ἄλλως τὰ (Π), (Ρ) θὰ εἶναι παράλληλα. Τότε δὲ καὶ ἡ *xy* θὰ τέμνῃ τὰς ($ε_1$) καὶ ($ε_2$), διότι ἂν δὲ ἔτεμνε π.χ. τὴν ($ε_1$) τότε ἡ ($ε_1$) θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ (Π) καὶ συνεπῶς αἱ εὐθεῖαι (ε), ($ε_1$), ($ε_2$) θὰ ἦσαν παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον. Τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει ἐπίσης λύσιν ἂν ἡ (ε) εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν ($ε_1$), ($ε_2$).

289.—**Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ κειμένων πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐπιπέδου ἀχθοῦν εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς ἀλλήλας, τέμνουσαι τὸ ἀνωτέρω ἐπίπεδον, ἀντιστοίχως εἰς τὰ α, β, γ, δ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΒ : ΓΔ=αβ : γδ.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἀκριβῶς ὁμοία πρὸς τὴν τῆς ἀσκ. 266.

290.—**Ἐὰν ἐπίπεδον διχοτομῇ δίεδρον γωνίαν, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπ' αὐτὸ καὶ περατουμένη εἰς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.**



Σχ. 181.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔστω δίεδρος γωνία ΡΑΒΠ καὶ Σ τὸ ἐπίπεδον τὸ διχοτομοῦν ταύτην (Σχ. 181). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΗΘ κάθετον ἐπὶ τὸ Σ καὶ περατουμένην εἰς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου γωνίας. Θὰ δείξωμεν ὅτι ΟΗ=ΟΘ. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὴν ΟΛ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν

ΑΒ, ὅτε ἐπειδὴ ΗΟ κάθετος τῷ Σ θὰ εἶναι ΗΛ κάθετος τῇ ΑΒ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ὁμοίως καὶ ἡ ΘΛ θὰ εἶναι κάθετος τῇ ΑΒ. Ἄρα αἱ γωνίαι ΘΛΟ καὶ ΗΛΟ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων ΡΑΒΣ, ΠΑΒΣ καὶ συνεπῶς, ἐπειδὴ τὸ Σ εἶναι τὸ διχοτομοῦν, αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΛΗ, ΟΘΛ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ΟΛ κοινὴν καὶ γων ΟΛΘ=γων ΟΛΗ ἄρα καὶ ΟΘ=ΟΗ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

Σελὶς 170. § 340. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**—Διότι ἡ βάσις καὶ ἡ τομή, εἶναι τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ πρέπῃ συνεπῶς νὰ εἶναι πολύγωνα ἴσα (§ 339).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **291.** Τὰς παραπλεύρους ἕδρας ὀρθοῦ πρίσματος δυνάμεθα νὰ τὰς θέσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν γραμμῶν ; Καὶ διατί ;

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ εἶναι κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῶν βάσεων τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα τὰς ἕδρας νὰ τὰς θέσωμεν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὥστε αἱ πλευραὶ τῶν βάσεων νὰ κεῖνται ἐπὶ εὐθειῶν γραμμῶν. Πράγματι δὲ δύο προσκείμεναι γωνίαι κείμεναι ἐπὶ δύο διαδοχικῶν παραπλεύρων ἑδρῶν θὰ εἶναι παραπληρωματικαί, ὅτε αἱ μὴ κοιναὶ πλευραί των θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

292.—Πρῖσμα ὀρθὸν μὲ βάσιν τετράγωνον ἔχει ὕψος 5 μ. καὶ ἐμβαδὸν βάσεως 6, 25 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του.

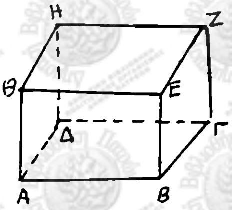
ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον, ἡ πλευρά της θὰ εἶναι $\sqrt{6,25}=2,5$ μ. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας θὰ εἶναι $(4 \,.\, 2,5) \,.\, 5=50$ τ.μ.

293.— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ὀρθοῦ μὲ βάσιν κανονικὸν ἑξάγωνον ἰσοῦται μὲ $4\sqrt{3} \,.\, \alpha\upsilon$, ὅπου α εἶναι τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν x τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἀπόστημα θὰ εἶναι $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ ἄρα θὰ πρέπῃ $\frac{x\sqrt{3}}{2}=\alpha$ ἢ λύοντες ὡς πρὸς x λαμβάνομεν $x=\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας θὰ εἶναι $6 \,.\, \frac{2\alpha\sqrt{3}}{3} \,.\, \upsilon=4\alpha\sqrt{3} \,.\, \upsilon=$ $=4\sqrt{3} \,.\, \alpha \,.\, \upsilon$.

Σελὶς 172. § 343. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**—Ἀφοῦ αἱ βάσεις εἶναι ἰσοδύναμοι δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς μέρη ἴσα, τὰ ὁποῖα καὶ θὰ ἐφαρμόζουν ἀνὰ ἕν. Κατόπιν χωρίζομεν τὰ πρίσματα εἰς ὀρθὰ τοιαῦτα ἔχοντα ἀνὰ ἕν, βάσιν ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθησαν αἱ ἰσοδύναμοι βάσεις τῶν πρισμάτων. Ἀλλὰ τὰ ὀρθὰ ταῦτα πρίσματα εἶναι ἰσοϋψῆ καὶ ἔχουν ἴσας βάσεις, ἄρα εἶναι ἐφαρμόσιμα. Συνεπῶς καὶ τὰ ἀκέραια πρίσματα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Σελὶς 173. § 347. **Η ΑΝΑΠΟΔΕΙΚΤΟΣ ΠΡΟΤΑΣΙΣ.** — Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ (Σχ. 182). Εἰς τοῦτο αἱ βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ εἶναι πολύγωνα ἴσα καὶ παράλληλα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν πρισμάτων. Αἱ ἕδραι ὅμως ΕΒΓΖ καὶ ΑΔΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμα (ἐξ ὁρισμοῦ) ὅτε ΕΒ καὶ ΖΓ εἶναι παράλληλοι καὶ περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων βάσεων θὰ εἶναι καὶ ἴσαι ἤτοι ΕΒ=ΖΓ=ΑΘ=ΗΔ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΖΕΒ καὶ ΗΘΑ ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα ἐφ' ὧν κεῖνται παράλληλα. Ἄρα αἱ ἕδραι ΒΓΖΕ καὶ ΑΔΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμα ἴσα. Ὁμοίως δεικνύομεν ὅτι καὶ ἕδραι ΔΓΖΗ καὶ ΑΒΕΘ εἶναι ἴσαι. Ἄρα πᾶσαι αἱ ἀπέναντι ἕδραι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι καὶ συνεπῶς οἱαιδήποτε τούτων δύνανται νὰ ληφθοῦν ὡς βάσεις παραλληλεπιπέδου.

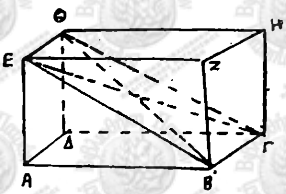


Σχ. 182.

Σελὶς 174. § 350. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**—Διὰ νὰ ὁρισθῇ ἓν παραλληλεπίπεδον ἀρκεῖ νὰ δοθῶσιν αἱ τρεῖς ἀκμαί του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ μιᾶς κορυφῆς του. Συνεπῶς εἰς τὴν περίπτωσίν μας, ἐὰν ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἐπίπεδον παράλληλον τῇ ΒΓΖ, ἐκ τοῦ Ζ παράλληλον τῇ ΑΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὸ ΒΑΖ, τότε θὰ σχηματισθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ δοθέντος, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν § 349.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **294.** **Αἱ διαγώνιοι παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ τετράγωνον μιᾶς τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.**

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΗ. Φέρομεν δύο π. χ. διαγωνίους αὐτοῦ, τὰς ΘΒ καὶ ΕΓ. (Σχ. 183). Θὰ δείξωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἴσαι.



Σχ. 183.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Σύρομεν τὰς ΘΓ καὶ ΕΒ ὅτε τὸ σχῆμα ΕΒΓΘ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, ἐπειδὴ αἱ ΘΕ καὶ ΒΓ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΕΒ καὶ ΘΓ διότι εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ΕΑΒΖ καὶ ΘΔΓΗ.

Ἄρα αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΒΓΘ εἶναι ἴσαι ἤτοι ΘΒ = ΕΓ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύομεν τὴν ἰσότητα ὅλων τῶν διαγωνίων.

Ἤδη ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΘΕΒ ἕπεται ὅτι $(ΘΕ)^2 + (ΕΒ)^2 = (ΘΒ)^2$. Ἀλλὰ $(ΕΒ)^2 = (ΕΑ)^2 + (ΑΒ)^2$ ὡς προκύπτει ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΑΒ.

Ἄρα $(ΘΕ)^2 + (ΕΑ)^2 + (ΑΒ)^2 = (ΘΒ)^2$

Ἐπειδὴ δὲ ΘΕ = ΒΓ, καὶ ΕΑ = ΒΖ θὰ ἔχωμεν

$(ΒΘ)^2 = (ΒΓ)^2 + (ΑΒ)^2 + (ΒΖ)^2$.

295.— Νὰ εὑρεθῇ 1) ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς τῶν στερεῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶναι 8 μ., 6 μ. καὶ $5\sqrt{5}$ μ. καὶ 2) ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α.

ΛΥΣΙΣ.— 1) Εὕρομεν προηγουμένως ὅτι $(ΒΘ)^2=(ΒΓ)^2+(ΑΒ)^2+(ΒΖ)^2$ ὅτε ἀντικαθιστῶντες τὰ ἴσα λαμβάνομεν $(ΒΘ)^2=6^2+8^2+(5\sqrt{2})^2=$ $=225$· ἄρα $(ΒΘ)=\sqrt{225}=15$μ. 2) Εἰς τὸν κύβον πᾶσαι αἱ ἀκμαὶ θὰ εἶναι ἴσαι πρὸς α ἄρα ἄν δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ θὰ ἔχωμεν

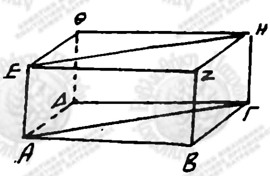
$$δ^2=α^2+α^2+α^2=3α^2 \quad \text{ἄρα} \quad δ=α\sqrt{3}.$$

296.—Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ διαγώνιος εἶναι 64 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Εὕρομεν ὅτι ἡ διαγώνιος τοῦ κύβου ἀκμῆς α εἶναι $α\sqrt{3}$

ἄρα θὰ πρέπῃ $α\sqrt{3}=64$ ἢ $α=\dfrac{64}{\sqrt{3}}=\dfrac{64\sqrt{3}}{3}$

297.— Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κύβου ἀκμῆς α ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας καὶ ποῖον τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς;



Σχ. 184.

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.—Ἔστω ὁ κύβος ΑΗ ἀκμῆς α. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον ΑΕΗΓ διερχόμενον διὰ τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΑΕ καὶ ΗΓ (Σχ. 184). Ἐπειδὴ ΑΕ καὶ ΗΓ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ, θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ΑΓ καὶ ΕΗ. Ἄρα τὸ σχῆμα ΑΕΗΓ ἔχει πάσας τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ συνεπῶς εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΓ εἶναι διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως ΑΒΓΔ θὰ εἶναι $(ΑΓ)=α\sqrt{2}$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΗΓ θὰ εἶναι $α\sqrt{2}\,.\,α=α^2\sqrt{2}$.

Σελὶς 176. § 353. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**— Εὕρομεν ὅτι ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι αβγ ἂν α, β, γ αἱ τρεῖς διαστάσεις αὐτοῦ.

Ἀλλὰ ἂν λάβωμεν τὰς δύο μόνον διαστάσεις καὶ πολλαπλασιάσωμεν αὐτάς, τότε ὁρίζομεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας ἡ ὁποία ἔχει ὡς ἀκμὰς ἐκείνας αἱ ὁποῖαι παρίστανται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α, β. Συνεπῶς ἡ τρίτη διάστασις γ θὰ παριστᾷ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου, ἂν ὡς βάσις ληφθῇ ἡ ἀνωτέρω καθορισθεῖσα ἕδρα.

Σελὶς 178 § 356. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον.**— Ἔστω Ρ ὁ ὄγκος πρίσματος οὗ ἡ βάσις ἔχει ἐμβαδὸν β καὶ τὸ ὕψος του εἶναι υ. Θὰ ἔχωμεν $Ρ=β\,.\,υ$.

Ἐπειδὴ δὲ δι' ἓν ἄλλο πρίσμα τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ β καὶ τὸ αὐτὸ υ, τὸ γινόμενον θὰ εἶναι τὸ ἴδιον, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ὄγκον τοῦ προηγουμένου. Ἄρα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Σελὶς 178 § 357 **ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον.**— 1) Ἂν Ρ καὶ Ρ' οἱ ὄγκοι αὐτῶν β ἡ κοινὴ βάσις καὶ υ, υ' τὰ ὕψη θὰ ἔχωμεν $\dfrac{Ρ}{Ρ'}=\dfrac{β\,.\,υ}{β\,.\,υ'}=\dfrac{υ}{υ'}$

2) Ἂν δὲ υ τὸ κοινὸν ὕψος καὶ β, β' αἱ βάσεις θὰ ἔχωμεν $\dfrac{Ρ}{Ρ'}=\dfrac{β\,.\,υ}{β'\,.\,υ}=\dfrac{β}{β'}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **298** Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 1) 6 μ., 18 μ., καὶ 6,25 μ. καὶ 2) 3,5 μ., 4,25 μ., καὶ 5,8 μ. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

ΛΥΣΙΣ.— 1) Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του ἤτοι $Ρ=6\,.\,8\,.\,6{,}25=675$ κυβ. μέτρα.

2) Ὁμοίως εὑρίσκομεν $Ρ=3{,}5\,.\,4{,}25\,.\,5{,}8=86{,}275$ κ. μ.

299.— Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια κύβου ἔχει ἐμβαδὸν 96 τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος αὐτοῦ ὡς καὶ ὅταν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι $\alpha\sqrt{3}$ μ.—

ΛΥΣΙΣ.— 1) Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ἕδρας του θὰ εἶναι α^2 καὶ ἡ ὁλικὴ $6\alpha^2$. Ἄρα θὰ πρέπῃ $6\alpha^2 = 96$ ἢ $\alpha^2 = 16$ καὶ $\alpha = 4$ μ. Ὁ ὄγκος συνεπῶς αὐτοῦ θὰ εἶναι $P = 4^3 = 64$ κ. μ.

2) Γνωρίζομεν ὅτι ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς α δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\alpha\sqrt{3}$ (ἄσκ. 295,2), συνεπῶς ἐπειδὴ ὁ κύβος ἔχει διαγώνιον $\alpha\sqrt{3}$ θὰ ἔχῃ ἀκμὴν α καὶ ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι α^3.

300.— Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι 3μ., αμ. Ποία ἡ ἀκμὴ κύβου, ὅστις εἶναι διπλάσιος κατ' ὄγκον; ***(Δήλιον πρόβλημα).***

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν x ἡ ἀκμὴ τοῦ διπλασίου κύβου ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι x^3. Ὁ ὄγκος δὲ τοῦ δοθέντος κύβου θὰ εἶναι 3^3 ἢ α^3. Θὰ πρέπῃ συνεπῶς νὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x^3 = 2 . 3^3$ ἢ $x^3 = 2 . \alpha^3$ ἄρα $x = 3\sqrt[3]{2}$ ἢ $x = \alpha\sqrt[3]{2}$

301.— Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ δωμάτιόν τι, οὗτινος τὸ ὕψος εἶναι 6 μ., τὸ δὲ πάτωμα ἔχει μῆκος 4,8 μ. καὶ πλάτος 5,2 μ. Καὶ πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου; (Πυκνότης ἀέρος 1,293 γραμμάρια κατὰ κυβ. δέκατον).

ΛΥΣΙΣ.—Ὁ ὄγκος τοῦ δωματίου εἶναι $6 . 4{,}8 . 5{,}2 = 149{,}760$ κ.μ. Ἄρα καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἀέρος θὰ εἶναι 149,760 κ. μ. Τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ὄγκου του εἰς κυβ. δέκατα ἐπὶ τὴν πυκνότητά του 1,293 ἤτοι $149760 \times 1{,}293$ γραμμάρια.

302.—Κύβος τις ἔχει ὄγκον 125 κ. μ. Πόσα μέτρα εἶναι ἡ ἀκμή του, πόσα ἡ διαγώνιος αὐτοῦ καὶ πόσα τετραγωνικὰ μέτρα εἶναι ἡ ὁλικὴ του ἐπιφανεια;

ΛΥΣΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος κύβου ἀκμῆς α εἶναι α^3 ἄρα θὰ ἔχωμεν $\alpha^3 = 125$ ἢ $\alpha = \sqrt[3]{125} = 5$μ. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι $\alpha\sqrt{3}$ θὰ ἔχωμεν $\delta = 5\sqrt{3}$, ἡ δὲ ὁλικὴ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι $6\alpha^2 = 6 . 5^2 = 150$τμ.

303.— Πρῖσμα ἔχει ὕψος 7,6 μ. καὶ βάσιν τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 12,3μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του θὰ εἶναι $12{,}3 : 4 = 3{,}705$ μ. Ἄρα ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $3{,}705^2 . 7{,}6$ κ. μ.

304.—Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, ὧν αἱ βάσεις ἔχουν διαστάσεις τοῦ μὲν ἑνὸς 3,5 μ. καὶ 3,4 μ. τοῦ δὲ ἄλλου 1,8 μ. καὶ 5,5 μ. ἔχουν ἴσα ὕψη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ δευτέρου παραλληλεπιπέδου, ὅταν ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου εἶναι 39,1 κ. μ.

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ λόγος δύο πρισμάτων (διότι τὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι καὶ πρίσματα) ἐχόντων τὸ αὐτὸ ὕψος ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των ἤτοι $\frac{P}{P'} = \frac{\beta}{\beta'}$ ἀλλὰ ἡ βάσις τοῦ πρώτου εἶναι 3,5 . 3,4, ἡ δὲ βάσις τοῦ δευτέρου εἶναι 1,8 . 5,5 καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρώτου δίδεται ἴσος πρὸς 39,1. Ἄρα $\frac{39,1}{P'} = \frac{3,5 . 34}{1,8 . 5,5}$ ἢ $P' = \frac{39,1 . 1,8 . 5,5}{3,5 . 3,4}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**305.** Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἕδραι τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ ἡ πυραμὶς εἶναι κανονική, ἡ βάσις της εἶναι κανονικὸν πολύγωνον καὶ συνεπῶς πᾶσαι αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως εἶναι ἴσαι δηλαδὴ αἱ βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων. Ἀλλὰ καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσαι, διότι ἂν ἀχθῇ τὸ ὕψος τῆς κανονικῆς πυραμίδος, τοῦτο, συμφώνως μὲ τὸν ὁρισμόν, θὰ πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἂν λοιπὸν συνδέσωμεν τὸν πόδα τοῦ ὕψους μὲ τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως, θὰ σχηματισθοῦν ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα, διὰ τῶν ὁποίων εὐκόλως βλέπομεν ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος θὰ εἶναι ἴσαι. Ἄρα τὰ τρίγωνα τῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος ἔχοντα τὰς πλευράς των ἀνὰ μίαν ἴσας εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα.

306.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος μὲ βάσιν ἑξάγωνον πλευρᾶς 8 μ. καὶ ὅταν τὸ ὕψος ἑνὸς τῶν τριγώνων αὐτῆς εἶναι 10 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ὅλα τὰ τρίγωνα τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα, ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς καὶ νὰ ἐπαναληφθῇ ἑξάκις. Τοῦ ἑνὸς τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{8 . 10}{2} = 40$ τ.μ. ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $6 . 40 = 240$ τ. μ.

307—Δύο τομαὶ πυραμίδος παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις ἀπέχουν ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτῆς 4 μ. καὶ 3 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν.

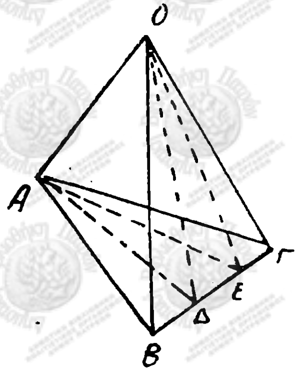
ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ τομαὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν βάσιν αἱ τομαὶ θὰ εἶναι ὅμοιαι πρὸς ἀλλήλας, ὁ δὲ λόγος των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἤτοι μὲ $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

308.—Ποῖος ὁ τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ἰσοδυνάμων πυραμίδων ἐχουσῶν τὴν αὐτὴν βάσιν;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ αἱ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν θὰ ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ἄρα αἱ κορυφαὶ τῶν ἰσοϋψῶν τούτων πυραμίδων θὰ κεῖνται ἐπὶ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν, ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς ἓν τῶν ὑψῶν τῶν πυραμίδων τούτων.

309.—Νὰ διαιρεθῇ τετράεδρον εἰς τρία, τέσσαρα καὶ γενικῶς εἰς ν ἰσοδύναμα τετράεδρα, δι' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς.

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω τὸ τετράεδρον ΟΑΒΓ (Σχ. 185) εἰς τὸ ὁποῖον τὰ ἐπίπεδα ΟΑΔ, ΟΑΕ, ἀγόμενα διὰ τῆς πλευρᾶς ΟΑ διαιροῦν τοῦτο εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.



Σχ. 185.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ τετράεδρα ΟΑΒΔ, ΟΑΔΕ, ΟΑΕΓ ἔχουν κοινὸν ὕψος τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ἀγόμενον ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ, ἐπειδὴ λοιπὸν εἶναι καὶ ἰσοδύναμα, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχουν καὶ βάσεις ἰσοδυνάμους. Δηλαδὴ πρέπει (ΑΒΔ)=(ΑΔΕ)=(ΑΕΓ). Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχοντα κοινὸν ὕψος τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, θὰ πρέπῃ νὰ ἔχουν καὶ ἴσας βάσεις ἤτοι ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Ἐκ τούτων ἀγόμεθα εἰς τὴν ἀκόλουθον σύνθεσιν. Διαιροῦμεν τὴν ἀκμὴν τὴν κειμένην ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς, δι' ἧς θὰ ἀχθοῦν τὰ ἐπίπεδα, εἰς τρία, τέσσαρα, ν ἴσα μέρη. Κατόπιν φέρομεν τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν ἡ πλευρὰ καὶ ἕκαστον τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως τῆς ἔναντι ἀκμῆς. Τὸ τετράεδρον διαιρεῖται οὕτω εἰς ἰσοδύναμα μέρη, τρία, τέσσαρα, γενικῶς ν, καθ' ὅτι θὰ ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ τοῦ τετραέδρου.

Σελὶς 185. § 366. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον.**— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος θὰ εἶναι $\beta \cdot \upsilon$ (β ἡ βάσις καὶ υ τὸ ὕψος ἀμφότερα κοινά), τῆς δὲ πυραμίδος $\frac{1}{3} \cdot \beta \cdot \upsilon$, ἄρα ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

Σελὶς 185. § 367. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον.** 1) Ἂν Ρ καὶ Ρ' οἱ ὄγκοι τῶν πυραμίδων τῶν ἐχουσῶν τὸ αὐτὸ ὕψος υ καὶ βάσεις β καὶ β', θὰ ἔχωμεν $\frac{P}{P'} = \frac{{}^1/_3 \cdot \beta \cdot \upsilon}{{}^1/_3 \cdot \beta' \cdot \upsilon} = \frac{\beta}{\beta'}$.

2) Ἂν δὲ β ἡ κοινὴ βάσις καὶ υ, υ' τὰ ὕψη των θὰ ἔχωμεν $\frac{P}{P'} = \frac{{}^1/_3 \cdot \beta \cdot \upsilon}{{}^1/_3 \cdot \beta \cdot \upsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ **310.— Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 6,2 μ. τὸ δὲ ὕψος της εἶναι 12,5 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.**

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της. Ἐπειδὴ δὲ ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 6,2 μ. θὰ ἔχωμεν $P = \frac{1}{3} \cdot 6{,}2^2 \cdot 12{,}5$ κ. μ.

311.—Κανονική τις πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶναι 3,2μ. Ἑκάστη δὲ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρεχουσῶν ἀκμῶν εἶναι 8 μ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

ΛΥΣΙΣ.— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν ἓξ ἰσοπλεύρων τριγώνων πλευρᾶς 3,2 ἤτοι $6 \cdot \frac{3{,}2^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ (διότι πλευρὰ ἑξαγώνου ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα). Ἀρκεῖ ἤδη νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος. Φέρομεν λοιπὸν τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς, τὸ ὁποῖον θὰ πέσῃ εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἑξαγώνου καὶ συνεπῶς ὁρίζεται ὡς μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 8 μ. καὶ ἡ ἄλλη κάθετος ἴση πρὸς 3,2 μ. ἤτοι $υ = \sqrt{8^2-3{,}2^2} = \sqrt{53{,}76} = 7{,}3$. Ὁ ὄγκος λοιπὸν τῆς πυραμίδος θὰ εἶναι $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 3{,}2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 7{,}3 = 65$ κ. μ.

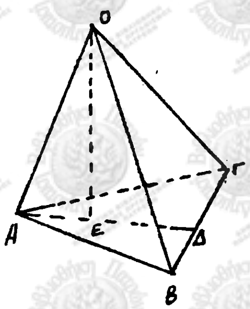
312.— Τριγωνικῆς πυραμίδος τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι 6 τ. μ. καὶ ὁ ὄγκος εἶναι 25 κ. μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος της.

ΛΥΣΙΣ.— Καλοῦντες x τὸ ἄγνωστον ὕψος τῆς πυραμίδος θὰ ἔχωμεν πρὸς λύσιν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x = 25$ ἐξ ἧς $x = 12{,}5$ μ.

313.— Ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς $α$ ἰσοῦται μὲ $\frac{α^3\sqrt{2}}{12}$. Καὶ μὲ τί ἰσοῦται τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς του ἐπιφανείας;

Ἐφαρμογὴ ὅταν εἶναι $α = 3$ μ., 4 μ, 2,5 μ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ ἡ βάσις τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ (Σχ.186) εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς $α$, τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶναι $\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΟΕ, τὸ ὁποῖον πίπτει εἰς τὸ κέντρον Ε τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Τὸ Ε εἶναι ὡς ἐκ τούτου ἡ τομὴ τῶν ὑψῶν, τῶν διαμέσων κλπ. τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι $(ΑΔ) = \frac{α\sqrt{3}}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΕ) = \frac{2}{3}(ΑΔ)$ (ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι καὶ διάμεσος) ἕπεται ὅτι $(ΑΕ) = \frac{2}{3} \cdot \frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{α\sqrt{3}}{3}$.



Σχ. 186.

Ἀλλὰ τώρα ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΕ εὑρίσκεται τὸ ὕψος διότι $(ΟΕ)^2 = (ΟΑ)^2 - (ΑΕ)^2 = α^2 - \left(\frac{α\sqrt{3}}{3}\right)^2 = α^2 - \frac{3α^2}{9} = \frac{6α^2}{9}$. Ἄρα $(ΟΑ) = \frac{α\sqrt{6}}{3}$. Ὥστε τὸ ὕψος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς $α$ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{α\sqrt{6}}{3}$. Ἤδη ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ὑπολογίζεται εὐκόλως καὶ εἶναι $P = \frac{1}{3} \cdot \frac{α^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{α\sqrt{6}}{3} = \frac{α^3\sqrt{2}}{12}$.

Ὁ ὁλικὴ ἐπιφάνεια προφανῶς ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 ἰσόπλευρα τρίγωνα ἴσα πρὸς τὴν βάσιν καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι $Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = α^2\sqrt{3}$.

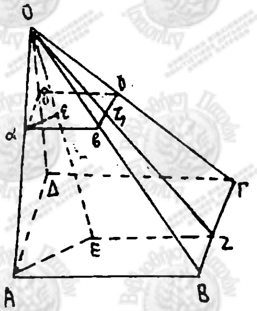
Ἐφαρμογή. Διὰ $α = 3$ μ. εὑρίσκομεν

α) $P=\frac{3^3\sqrt{2}}{12}=\frac{9\sqrt{2}}{3}$ κ.μ. καὶ $E=3^2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$ τ. μ.

β) $P=\frac{4^3 . \sqrt{2}}{12}$ $E=4^2.\sqrt{3}$. γ) $P=\frac{2{,}5^3\sqrt{3}}{12}$ $E=2{,}5^2\sqrt{3}$

314 — **Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ κανονικῆς πυραμίδος (κανονικὴ κόλουρος πυραμὶς) εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια.**

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εἴδομεν εἰς τὴν ἄσκ. 350 ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Διὰ νὰ προκύψῃ ὅμως ἡ κόλουρος, ἐφέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον τῇ βάσει. Συνεπῶς τοῦτο θὰ τμήσῃ τὰς ἀκμὰς εἰς μέρη ἀνάλογα, ὥστε αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς κολούρου θὰ εἶναι ἴσαι, δηλαδὴ τὰ τραπέζια τῶν ἑδρῶν της, θὰ εἶναι ἰσοσκελῆ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν βάσεών των εἶναι ἴσαι ἀνὰ μία, ἕπεται ὅτι τὰ τραπέζια εἶναι ἴσα.



Σχ. 187.

315 — **Κανονικῆς πυραμίδος, ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 8 μ. τὸ δὲ ὕψος εἶναι 6 μ. Ἐπίπεδον δὲ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ ὕψους. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προέκυψεν ἐκ τῆς τομῆς αὐτῆς ὡς καὶ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος.**

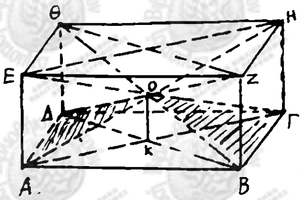
ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ἡ πυραμὶς ΟΑΒΓΔ (Σχ. 187). Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΕ καὶ κατόπιν τὴν ΑΕ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΕ λαμβάνομεν $(OA)^2=(OE)^2+(AE)^2$. Ἀλλὰ (ΟΕ)=6 μ. καὶ (ΑΕ)=μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως ἤτοι $(AE)=\frac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$. μ.

Ἄρα $(OA)=\sqrt{6^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{68}$. Κατόπιν φέρομεν τὸ ὕψος ΟΖ τῆς ἕδρας ΟΒΓ. Δυνάμεθα, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΖΒ, νὰ ὑπολογίσωμεν τοῦτο, διότι θὰ ἔχωμεν $(OZ)^2=(OB)^2-(BZ)^2$. Ἀλλὰ $(OB)=(OA)=\sqrt{68}$ καὶ $(BZ)=(B\Gamma):2=4$. Ἄρα $(OZ)^2=(\sqrt{68})^2-4^2=68-16=52$ καὶ $(OZ)=\sqrt{52}$. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ἐπίπεδον αβγδ ἐξ ὑποθέσεως διχοτομεῖ τὸ ὕψος, θὰ διχοτομῇ καὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς (§ 359), ὡς καὶ πᾶσαν εὐθεῖαν ἀγομένην ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὴν βάσιν. Συνεπῶς θὰ ἔχωμεν $(\beta\gamma)=(B\Gamma):2=8:2=4$ καὶ $(\zeta Z)=(OZ):2=\sqrt{52}:2$. Ἤδη τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας θὰ εἶναι ἴσον πρὸς 4 ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα, ἑκάστου τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{8+4}{2}.\frac{\sqrt{52}}{2}=3\sqrt{52}$. Καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια $4.3\sqrt{52}=12\sqrt{52}$. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν ὄγκον θὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον $P=\frac{1}{3}\upsilon(B+\beta+\sqrt{B\beta})$. Ἐδῶ $\upsilon=(OE):2=3$, $B=8^2=64$ καὶ $\beta=4^2=16$. Ἄρα $P=\frac{1}{3}.3.(64+16+\sqrt{64.16})=112$ κ.μ.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΣΤ' ΒΙΒΛΙΟΥ

316.—Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἂν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἔστω τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ εἶναι ἴσαι (Σχ. 188). Θὰ δείξωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.



Σχ. 188.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, δι' οὗ διέρχονται πᾶσαι αἱ διαγώνιοι. Ἐκ τούτου φέρομεν τὴν κάθετον ΟΚ ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓΔ καὶ συνδέομεν τὸ Κ μὲ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ. Σχηματίζομεν οὕτω τέσσαρα ὀρθογώνια τρίγωνα τὰ ΟΚΒ, ΟΚΓ, ΟΚΔ, ΟΚΑ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων ἐξ ὑποθέσεως διαγωνίων καὶ τὴν ΟΚ κοινήν. Ἄρα θὰ ἔχουν καὶ ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ = ΚΔ. Δηλαδὴ ὑπάρχει περιφέρεια διερχομένη διὰ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ ἔχουσα κέντρον τὸ Κ. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶναι συγχρόνως καὶ παραλληλόγραμμον, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον, θὰ εἶναι ὀρθογώνιον (ἄσκ. 100). Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι ἡ ἕδρα ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου ἀποδεικνύομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα καὶ συνεπῶς τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον.

317.— Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 12 ἀκμῶν αὐτοῦ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ προηγούμενον σχῆμα ὑποθέτομεν ὅτι φέρομεν τὰς διαγωνίους ΔΒ καὶ ΑΓ τῆς ἕδρας ΑΒΓΔ.

Γνωρίζομεν (ἄσκ. 188) ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν παραλληλογράμμου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

Ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν ταύτην εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΔΑ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2$ (1)
καὶ ἐκ τῶν ΘΕΖΗ ἐπίσης $(ΘΕ)^2+(ΕΖ)^2+(ΖΗ)^2+(ΗΘ)^2=(ΕΗ)^2+(ΘΖ)^2$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ τώρα καὶ τὰ σχήματα ΑΕΗΓ καὶ ΒΖΘΔ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμα ἐφαρμόζοντες τὴν πρότασιν ταύτην καὶ εἰς αὐτὰ λαμβάνομεν $(ΑΓ)^2+(ΓΗ)^2+(ΗΕ)^2+(ΑΕ)^2=(ΕΓ)^2+(ΑΗ)^2$ (3)
καὶ $(ΒΖ)^2+(ΖΘ)^2+(ΘΔ)^2+(ΔΒ)^2=(ΘΒ)^2+(ΔΖ)^2$ (4)

Ἀθροίζοντες τὰς (1), (2), (3), (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν
$(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΔΑ)^2+(ΘΕ)^2+(ΕΖ)^2+(ΖΗ)^2+(ΗΘ)^2+$
$+(ΑΓ)^2+(ΓΗ)^2+(ΕΗ)^2+(ΑΕ)^2+(ΒΖ)^2+(ΖΘ)^2+(ΔΘ)^2+(ΔΒ)^2=$
$=(ΑΓ)^2+(ΒΔ)^2+(ΕΗ)^2+(ΘΖ)^2+(ΕΓ)^2+(ΑΗ)^2+(ΘΒ)^2+(ΔΖ)^2$.

Ἐξαλείφοντες τώρα ἀπὸ τῶν δύο μελῶν τὰ ἴσα μέρη, $(ΑΓ)^2$, $(ΒΔ)^2$, $(ΕΗ)^2$, $(ΘΖ)^2$ λαμβάνομεν τελικῶς $(ΑΒ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+(ΔΑ)^2+(ΘΕ)^2+$

$+(EZ)^2+(ZH)^2+(H\Theta)^2+(\Gamma H)^2+(AE)^2+(BZ)^2+(\Delta\Theta)^2=(E\Gamma)^2+(AH)^2+$
$+(\Theta B)^2+(\Delta Z)^2$ ὅ.ἔ.δ,

318.—Ἐπὶ πλευρᾶς τινὸς δοθείσης πυραμίδος νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν βάσιν νὰ δίδῃ τομὴν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως.

ΛΥΣΙΣ.—Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχῆμα 187, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι α εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον τὸ κείμενον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΟΑ τῆς δοθείσης πυραμίδος ΟΑΒΓΔ. Ἔστω δὲ ἀκόμη ὅτι ἤχθη τὸ πρὸς τὴν βάσιν παράλληλον ἐπίπεδον αβγδ ὥστε $(\alpha\beta\gamma\delta)=\frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον αβγδ καὶ ἡ βάσις εἶναι παράλληλα, θὰ εἶναι ὅμοια καὶ συνεπῶς $\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(AB\Gamma\Delta)}=\frac{(O\alpha)^2}{(OA)^2}$ ἢ $\frac{1}{2}=\frac{(O\alpha)^2}{\lambda^2}$ ἂν λ ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεως.
Ἐκ τῆς τελευταίας ἰσότητος λαμβάνομεν εὐκόλως $(O\alpha)=\frac{\lambda\sqrt{2}}{2}$. Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι διὰ νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον α ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τμῆμα Οα ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου τετραγώνου ἔχοντος πλευρὰν λ.

319.— Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α μ. Ἐὰν δὲ λ μ. εἶναι τὸ μῆκος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

ΛΥΣΙΣ.— Ἀναφερόμενοι καὶ πάλιν εἰς τὸ σχ. 187. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὕψος ΟΕ θὰ ὁρισθῇ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΕ. Πράγματι $(OA)=\lambda$ καὶ $(AE)=(A\Gamma):2=\alpha\sqrt{2}:2$. Ἄρα $(OE)^2=(OA)^2-(AE)^2=$
$=\lambda^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2$ ἢ $(OE)=\sqrt{\lambda^2-\frac{\alpha^2}{2}}$. Ὁ ὄγκος θὰ εἶναι $P=\frac{1}{3}\sqrt{\lambda^2-\frac{\alpha^2}{2}}\cdot\alpha^2$

320.— Πυραμὶς ἔχει βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς α μ. Ἐὰν δὲ Β τ. μ. εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

ΛΥΣΙΣ.— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι α^2. Διὰ νὰ εὕρωμεν τώρα τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Ἂς καλέσωμεν γ τὸ ὕψος μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας τῆς πυραμίδος.

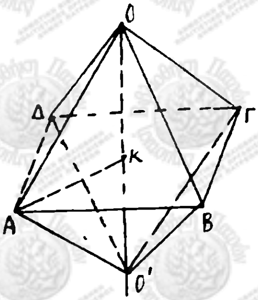
Τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἕδρας θὰ εἶναι $\frac{\alpha\gamma}{2}$. Ἄρα θὰ πρέπῃ $\frac{\alpha\gamma}{2}=B$ ἢ $\gamma=\frac{2B}{\alpha}$. Ἀναφερόμενοι τώρα εἰς τὸ σχῆμα 187 παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ ὁρισθῇ τὸ ὕψος ΟΕ τῆς πυραμίδος ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν τοῦ Πυθαγόρα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΖ εἰς τὸ ὁποῖον

$(OZ)=\frac{2B}{\alpha}$ καὶ $(EZ)=\frac{\alpha}{2}$. Ἤτοι $(OE)^2=(OZ)^2-(EZ)^2=$

$$=\left(\frac{2B}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{4B^2}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{4} \text{ ἢ } (OE)=\sqrt{\frac{4B^2}{\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{4}}$$

Ὁ ὄγκος συνεπῶς τῆς πυραμίδος θὰ εἶναι $P = \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\sqrt{16B^2 - \alpha^4}}{2\alpha}$

321.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ὀκταέδρου ἀκμῆς α.

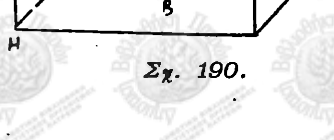


Σχ. 189.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τὸ κανονικὸν ὀκτάεδρον ΟΑΒΓΔΟ′ (Σχ. 189). Διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν ὄγκον αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὸν ὄγκον τῆς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ καὶ νὰ τὸν διπλασιάσωμεν. Φέρομεν πρὸς τοῦτο τὸ ὕψος ΟΚ ἐπὶ τὴν ΑΒΓΔ καὶ σύρομεν τὴν ΑΚ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΚ λαμβάνομεν $(OK)^2 = (OA)^2 - (AK)^2$. Ἀλλὰ $(OA) = \alpha$ καὶ $(AK) =$ ἥμισυ διαγωνίου $A\Gamma = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, ὅτε $(OK)^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2\alpha^2}{4}$ ἢ $(OK) = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$. Ὁ ὄγκος λοιπὸν θὰ εἶναι $P = \frac{1}{3} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6}$ καὶ τοῦ ὀκταέδρου $2 \cdot \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{6} = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{3}$.

322.— Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ. **Νὰ** εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταέδρου τοῦ **ἔχοντος** κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΗΘ καὶ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν του (Σχ. 190). Ζητοῦμεν τὸν ὄγκον τοῦ ὀκταέδρου ΑΒΓΔΕΖ συναρτήσει τῶν ἀκμῶν α, β, γ τοῦ παραλληλεπιπέδου. Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ὀκτάεδρον ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τετραγωνικὰς πυραμίδας ἐχούσας βάσιν τὸ ΔΕΒΖ καὶ κορυφὰς τὰς Α καὶ Γ. Ἀλλὰ τὸ ΔΕΒΖ εἶναι ρόμβος (ὡς εὐκόλως δεικνύεται) οὗ τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ



Σχ. 190.

$\frac{1}{2}(\Delta B).(EZ) = \frac{1}{2} \cdot \alpha.\beta.$ (Διότι $\Delta B = \alpha$ καὶ $EZ = \beta$ ἐπειδὴ ἑκάστη συνδέει τὰ κέντρα δύο ἔναντι ἑδρῶν καὶ συνεπῶς θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις αὐτῶν). Ἤδη ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τοῦ ΔΕΒΖ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{\gamma}{2}$ καὶ ἄρα ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδας ΑΔΕΒΖ θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha.\beta}{2} \cdot \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{12}$. Καὶ τοῦ ὀκταέδρου $= 2 \cdot \frac{\alpha.\beta.\gamma}{12} = \frac{\alpha.\beta.\gamma}{6}$. Ἤτοι εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

323.— Τὸ ὕψος κολούρου πυραμίδος εἶναι 3, 6 μ., τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεγαλυτέρας βάσεως αὐτῆς 24 τ. μ. καὶ μία τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτῆς εἶναι 3,85 μ ἡ δὲ πρὸς αὐτὴν ὁμόλογος πλευρὰ τῆς ἄλλης βάσεως εἶναι 2, 2 μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου ταύτης πυραμίδος.

ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ βάσεις εἶναι ὅμοια πολύγωνα, ἂν καλέσωμεν β τὸ ἐμβαδὸν τῆς μικρᾶς βάσεως θὰ πρέπη νὰ ἔχωμεν $\frac{\beta}{24} = \frac{2,2^2}{3,85^2}$ ἐξ ἧς ὁρίζεται ἡ ἄλλη βάσις. Ἤδη δὲ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου $P = \frac{1}{3}\,\upsilon\,(\beta + B + \sqrt{B\beta})$ ὁρίζομεν καὶ τὸν ὄγκον αὐτῆς ἐπειδὴ ὅλα εἶναι γνωστά.

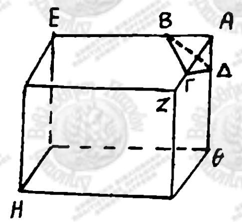
324.— Ἡ βάσις κανονικῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ λ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος καὶ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

ΛΥΣΙΣ.— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶναι $6.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ (διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α). Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ὕψος ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν πρότασιν τοῦ Πυθαγόρα εἰς ἓν τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ὅπερ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, μίαν ἀκμὴν καὶ μίαν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, ἤτοι ἂν x τὸ ὕψος θὰ εἶναι $x = \sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$.

Ὁ ὄγκος λοιπὸν θὰ εἶναι $P = \frac{1}{3}.\frac{6\alpha^2\sqrt{3}}{4}.\sqrt{\lambda^2 - \alpha^2}$

325.— Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας κύβου ἀκμῆς α διχοτομοῦνται ὑπὸ ἐπιπέδου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω σχηματιζομένου τετραέδρου.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ὁ κύβος ΑΗ καὶ Β, Γ, Δ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΕ, ΑΖ, ΑΘ. (Σχ. 191). Τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἔχον βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΔ καὶ ὕψος ΓΑ, διότι αἱ ἀκμαὶ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ θὰ εἶναι



Σχ. 191

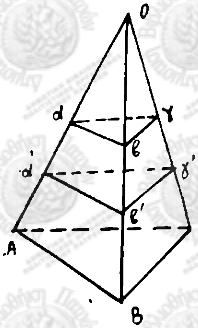
$$\frac{1}{2}\,(AB)(A\Delta) = \frac{1}{2}.\frac{\alpha}{2}.\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{8}$$

τὸ δὲ ὕψος ΑΓ ἐπίσης εἶναι $\frac{\alpha}{2}$. Ἄρα ὁ ὄγκος εἶναι $P = \frac{1}{3}.\frac{\alpha^2}{8}.\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^3}{48}$.

326.—Αἱ βάσεις κολούρου πυραμίδος εἶναι Β καὶ β. Νὰ εὑρεθῇ ἐξ αὐτῶν τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς αὐτὰς καὶ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπ' αὐτῶν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω πυραμὶς ΟΑΒΓ, ἐξ ἧς προκύπτει ἡ κόλουρος αβγΑΒΓ καὶ α'β'γ' ἡ μέση τομὴ αὐτῆς (Σχ. 192). Καλοῦμεν x_1, x_2, x_3 ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς αβ, α'β', ΑΒ. Ἐπειδὴ ἡ τομὴ καὶ αἱ βάσεις εἶναι ὅμοια πολύγωνα θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{(\alpha\beta\gamma)}{x_1^2} = \frac{(\alpha'\beta'\gamma')}{x_2^2} = \frac{(AB\Gamma)}{x_3^2}$

ἢ ἂν καλέσωμεν ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς θὰ ἔχωμεν



Σχ. 192.

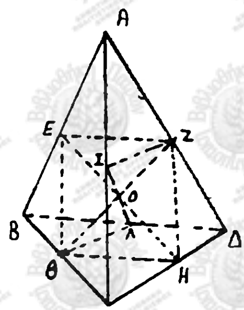
$$\frac{\beta}{x_1^2}=\frac{\varepsilon}{x_2^2}=\frac{B}{x_3^2} \text{ ἢ } \frac{\sqrt{\beta}}{x_1}=\frac{\sqrt{\varepsilon}}{x_2}=\frac{\sqrt{B}}{x_3}$$

ἢ $\dfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{B}}{x_1+x_3}=\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{x_2}$, ἀλλὰ $2x_2=x_1+x_3$ (διάμεσος τραπεζίου) ἄρα $\dfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{B}}{2x_2}=\dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{x_2}$ ἢ $2\sqrt{\varepsilon}=$ $=\sqrt{\beta}+\sqrt{B}$ ἢ $\sqrt{\varepsilon}=\dfrac{\sqrt{\beta}+\sqrt{B}}{2}$ καὶ

$$\varepsilon=\frac{\beta+B+2\sqrt{B\beta}}{4}.$$

327.— Αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου ΑΒΓΔ, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τούτων.

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ (Σχ. 193) καὶ Ε, Η, Ζ, Θ καὶ Ι, Λ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του. Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΗ, ΘΖ, ΙΛ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ὅπερ εἶναι κοινόν των μέσον.



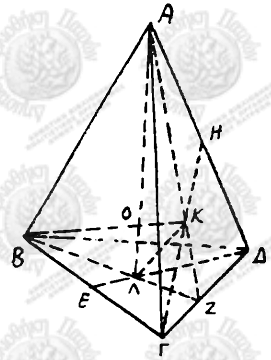
Σχ. 193.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Φέρομεν τὰς ΕΖ καὶ ΘΗ καὶ σχηματίζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ, διότι αἱ ΕΖ καὶ ΘΗ ὡς συνδέουσαι τὰ μέσα δύο πλευρῶν τῶν τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΔ καὶ ἴσαι πρὸς τὸ ἥμισυ αὐτῆς, ὅτε θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι. Συνεπῶς αἱ διαγώνιοι ΕΗ καὶ ΘΖ αὐτοῦ θὰ διχοτομοῦσιν ἀλλήλας εἰς τὸ Ο. Ὁμοίως ἂν σύρωμεν τὰς ΙΖ καὶ ΘΛ τὸ τετράπλευρον ΙΖΛΘ θὰ εἶναι καὶ αὐτὸ παραλληλόγραμμον, ὅτε αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΙΛ καὶ ΘΖ ἐπίσης θὰ διχοτομοῦνται. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ μέσον τῆς ΖΘ εἶναι ἓν καὶ μόνον, ἕπεται ὅτι πᾶσαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, ὅπερ εἶναι κοινόν των μέσον.

328.— Εἰς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ τὰ ἓξ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ μιᾶς ἀκμῆς καὶ τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα 193 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον ὁρίζει τὸ Η καὶ ἀκμὴ ΑΒ, περιέχει προφανῶς τὴν ΕΗ ἥτις διέρχεται, ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, διὰ τοῦ Ο. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον δεικνύομεν, ὅτι ἕκαστον τῶν ἐπιπέδων ΑΔΘ, ΑΓΛ, ΒΔΙ, ΓΔΕ, ΒΓΖ διέρχεται διὰ τοῦ Ο ὡς περιέχον μίαν τῶν ΖΘ, ΙΛ, ἄρα πάντα ταῦτα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤτοι τοῦ Ο.

329. — Αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τετραέδρου ΑΒΓΔ μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ διαιροῦνται ὑπ' αὐτοῦ εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.



Σχ. 194

Ἔστω τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ Λ καὶ Κ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ καὶ ΑΓΔ (Σχ.194). Σύρομεν τὰς ΑΛ καὶ ΒΚ. Δείξωμεν ὅτι τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς τὸ σημεῖον Ο ὥστε $\frac{ΑΟ}{ΟΛ} = \frac{ΒΟ}{ΟΚ} = 3$. καὶ ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς δύο ἄλλας τὰς ἀγομένας ἐκ τῶν κορυφῶν Δ καὶ Γ πρὸς τὰ σημεῖα τῶν διαμέσων τῶν ἑδρῶν ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΖ καὶ ΒΖ τέμνονται εἰς τὸ Ζ, μέσον τῆς ΓΔ, ἔπεται ὅτι ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΖ. Ἐπειδὴ αἱ ΑΛ καὶ ΒΚ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ, ἔπεται ὅτι κεῖνται ἐπ' αὐτοῦ καὶ ἄρα τέμνονται. Ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ἀλλὰ ἐπειδὴ τὰ Κ καὶ Λ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων κατὰ τὴν ἄσκησ. 92 θὰ ἔχωμεν $\frac{ΖΚ}{ΖΑ} = \frac{ΖΛ}{ΖΒ} = \frac{1}{3}$ καὶ ἄρα ἡ ΚΛ τέμνουσα τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΖΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα εἶναι παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΚΛ καὶ ΖΑΒ θὰ εἶναι ὅμοια, ὅτε καὶ $\frac{ΚΛ}{ΑΒ} = \frac{1}{3}$. Ἤδη ὅμως καὶ τὰ τρίγωνα ΚΟΛ καὶ ΑΟΒ εἶναι ὅμοια, ὅτε $\frac{ΑΟ}{ΟΛ} = \frac{ΒΟ}{ΟΚ} = \frac{ΑΒ}{ΚΛ} = \frac{3}{1}$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι μὲ μίαν τῶν ΑΛ ἢ ΒΚ καὶ μὲ μίαν τῶν ἄλλων εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καὶ Δ πρὸς τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαμέσων τῶν ἔναντι ἑδρῶν του, εὑρίσκομεν ὅτι πᾶσαι αἱ εὐθεῖαι αὗται διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Κ, ὅπερ τέμνει ταύτας εἰς δύο μέρη ὧν τὸ ἓν εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ΄.

ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ. **330.** Κυλίνδρου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 4,5μ., τὸ δὲ ὕψος 1,8 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι 4,5 : 2 = 2,25 μ. καὶ συνεπῶς τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι 2 . 3,14 . 2,25 . 1,8 τ.μ.

331.—Αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι δύο κυλίνδρων ἐχόντων ἴσας βάσεις εἶναι ὡς τὰ ὕψη των, ἐὰν δὲ ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Ἂν Ε καὶ Ε΄ αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν κυλίνδρων, υ καὶ υ΄ τὰ ὕψη των, ἐπειδὴ αἱ βάσεις των εἶναι ἴσαι θὰ εἶναι καὶ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τούτων ἴσαι καὶ συνεπῶς ἂν ρ καὶ ρ΄ αἱ ἴσαι ἀκτῖνες θὰ ἔχωμεν $\frac{E}{E'} = \frac{2\pi\rho \cdot \upsilon}{2\pi\rho' \cdot \upsilon'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$ (διότι ρ=ρ΄).

2) Ἂν δὲ ἔχουν ἴσα ὕψη θὰ εἶναι $\frac{E}{E'} = \frac{2\pi\rho \cdot \upsilon}{2\pi\rho' \cdot \upsilon} = \frac{\rho}{\rho'}$.

332.—Ποῖον εἶναι τὸ σχῆμα τῆς τομῆς κυλίνδρου δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ ;

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.—Ἀφοῦ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὰς βάσεις. Αἱ τομαὶ δὲ τῶν βάσεων ὑπ' αὐτοῦ θὰ εἶναι παράλληλοι (§ 310), ὡς ἐπίσης καὶ τομαὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ὑπ' αὐτοῦ παράλληλοι, ὡς παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα καὶ κάθετοι πρὸς τὰς βάσεις. Ἄρα ἡ τομὴ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**333.** Κυλίνδρου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 8,4μ., τὸ δὲ ὕψος 3,5μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ πόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος του, ἐάν μόνον ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α ἢ μόνον τὸ ὕψος του πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β ;

ΛΥΣΙΣ.—Ὁ ὄγκος Ρ τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $P=3{,}14 \cdot 8{,}4^2 \cdot 3{,}5$. Ἂν ἤδη ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ α καὶ γίνῃ 8,4 . α ὁ ὄγκος θὰ γίνῃ $P'=3{,}14 \cdot (8{,}4 \cdot \alpha)^2 \cdot 3{,}5=3{,}14 \cdot 8{,}4^2 \cdot 3{,}5 \cdot \alpha^2=P \cdot \alpha^2$ ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ α^2. Ἂν ὅμως τὸ ὕψος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ β καὶ γίνῃ 3,5 . β, ὁ ὄγκος θὰ γίνῃ $P''=3{,}14 \cdot 8{,}4^2 \cdot (3{,}5 \cdot \beta)=3{,}14 \cdot 8{,}4^2 \cdot 3{,}5 \cdot \beta=P.\beta$ ἤτοι ὁ ὄγκος πολλαπλασιάζεται καὶ οὗτος ἐπὶ β.

334.—Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν ἀγγεῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ μίαν ὀκᾶν ὕδατος καὶ νὰ ἔχῃ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως. Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ;

ΛΥΣΙΣ.—Εἶναι γνωστὸν ὅτι μία ὀκᾶ ὕδατος ἔχει βάρος ἴσον πρὸς 1280 γραμμάρια. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι 1, ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι 1280 κυβ. ἑκατοστά. Ἂν λοιπὸν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, ἡ διάμετρος θὰ εἶναι 2α καὶ συνεπῶς τὸ ὕψος $2 . 2\alpha = 4\alpha$ καὶ ὁ ὄγκος $3{,}14 . \alpha^2 . 4\alpha = 4 . 3{,}14\alpha^3$. Θὰ πρέπη συνεπῶς νὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $4 . 3{,}14\alpha^3 = 1280$

ἢ $\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{1280}{4 . 3{,}14}}$ ἑκ. καὶ τὸ ὕψος θὰ εἶναι τότε $4 . \sqrt[3]{\dfrac{1280}{4 . 3{,}14}}$.

335.—Κύλινδρός τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει μῆκος μὲν 4,12μ. περιφέρειαν δὲ βάσεως 0,6 μ. Ζητεῖται τὸ βάρος αὐτοῦ. (Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶναι 7,2 περίπου).

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως θὰ ἔχωμεν $2 . 3{,}14 . \alpha = 0{,}6$ ἢ $\alpha = \dfrac{6}{62{,}8}$. Ἤδη ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $P = 3{,}14 . \left(\dfrac{6}{62{,}8}\right)^2 . 4{,}12$. Γνωρίζομεν δὲ ὅτι τὸ βάρος σώματος εὑρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ὄγκον του ἐπὶ τὸ εἰδικόν του βάρος

ἤτοι $= 3{,}14 . \left(\dfrac{6}{62{,}8}\right)^2 4{,}12 . 7{,}2$ εἰς τόννους.

Ἂν θέλωμεν νὰ τὸ τρέψωμεν εἰς ὀκάδας πολλαπλασιάζομεν τὸ ἀνωτέρω ἐξαγόμενον πρῶτον ἐπὶ 1.000.000 καὶ κατόπιν διαιροῦμεν διὰ 1280 (διότι 1280 γραμμάρια=1 ὀκᾶ).

336.—Ὁ ὄγκος κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεώς του.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Γνωρίζομεν ὅτι ὁ ὄγκος κυλίνδρου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $P = \pi . \alpha^2 . \upsilon$ ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος του.

Ἀλλὰ ὁ τύπος δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς $P = 2\pi\alpha\upsilon . \dfrac{\alpha}{2}$, ὅπερ σημαίνει ὅτι ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια του 2παυ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος ἤτοι ἐπὶ $\dfrac{\alpha}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **337. Κώνου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 6,5 μ., τὸ δὲ ὕψος 12 μ. Πόση εἶναι ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;**

ΛΥΣΙΣ.—Ἐφαρμόζοντες τὸν δεύτερον τύπον τῆς σημειώσεως τῆς § 377 ἤτοι τὸν $P = \pi\alpha\sqrt{\alpha^2 + \upsilon^2}$ ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ υ τὸ ὕψος λαμβάνομεν $P = 3{,}14 . 6{,}5\sqrt{6{,}5^2 + 12^2}$ τ. μ.

338.—Κώνου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 8 μ., ἡ δὲ πλευρὰ 24,8μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνειά του.

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς κυρτῆς του ἐπιφανείας καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεώς του ἤτοι ἂν α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ λ ἡ πλευρά των θὰ ἔχωμεν $E = \pi\alpha\lambda + \pi\alpha^2 = 3{,}14 . 4 . 24{,}8 + 3{,}14 . 4^2$ τ.μ. (διότι $\alpha = 8 : 2 = 4$)

339.— Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ μιᾶς τῶν διαγωνίων του.

ΛΥΣΙΣ.—Ἡ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου στρεφομένη περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του, θὰ γράψῃ προφανῶς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κώνου ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν ἄλλην κάθετον πλευράν. Ἄρα ἡ ἀκτὶς τοῦ κώνου τούτου θὰ εἶναι α καὶ ἡ πλευρά του θὰ εἶναι $\alpha\sqrt{2}$ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του $\pi \cdot \alpha \cdot \alpha\sqrt{2} = \pi\alpha^2\sqrt{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.—**340.** Κώνου τινὸς ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶναι 2,8μ., ἡ δὲ πλευρὰ 3,64 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τούτου;

ΛΥΣΙΣ.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ὕψος ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τοῦ ὕψους, τῆς ἀκτῖνος καὶ τῆς πλευρᾶς ἤτοι $\upsilon = \sqrt{3{,}64^2 - 1{,}4^2}$ (διότι ἡ ἀκτὶς θὰ εἶναι 2,8 : 2 = 1,4 μ.). Ἄρα ὁ ὄγκος θὰ εἶναι

$$P = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}4^2 \cdot \sqrt{3{,}64^2 - 1{,}4^2} \text{ κ. μ.}$$

341.—Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου εἶναι 2,5 μ., ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ 80 κ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου;

ΛΥΣΙΣ.—Ὑπολογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ὕψος ὅπερ ἔστω υ, ὅτε θὰ πρέπῃ $\frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot \upsilon = 80$ ἢ $\upsilon = \frac{3 \cdot 80}{3{,}14 \cdot 2{,}5^2} = 1{,}2$. Ἤδη εὑρίσκοσκομεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἐκ τοῦ τύπου

$$E = \pi\alpha\sqrt{\alpha^2 + \upsilon^2} = 3{,}14 \cdot 2{,}5\sqrt{2{,}5^2 + 1{,}2^2} \text{ τ. μ.}$$

342.—Ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι 3 μ. καὶ 4 μ. στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο ταύτας καθέτους πλευράς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν σχηματιζομένων στερεῶν.

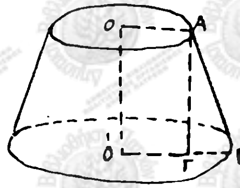
ΛΥΣΙΣ.—Ὅταν στρέφεται ὀρθογώνιον τρίγωνον περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του γεννᾶται ὡς γνωστὸν κῶνος. Ἂν λοιπὸν στραφῇ περὶ τὴν κάθετον τῶν 4 μ., τότε τὸ ὕψος του θὰ εἶναι 4 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεώς του 3 μ. καὶ ὁ ὄγκος του $P = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 4$. Ἂν δὲ στραφῇ περὶ τὴν κάθετον τῶν 3 μ. θὰ ἔχωμεν $P' = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 3$. Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος θὰ εἶναι $\frac{P}{P'} = \frac{1/3 \cdot 3^2 \cdot 4}{1/3 \cdot 4^2 \cdot 3} = \frac{3}{4}$. Ἤτοι ὁ λόγος τῶν ὄγκων θὰ ἰσοῦται με τὸν λόγον τῶν καθέτων πλευρῶν (διαστάσεών του).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **343.** Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 0,74 μ. αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων αὐτοῦ 0,5 μ. καὶ 0,3 μ. Πόση ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω (ΟΑ) = 0,3μ, καὶ (ΟΒ) = 0,5 μ. (Σχ. 195) καὶ (ΟΟ') = 0,74 μ. Δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ ἂν φέρωμεν τὴν ΑΓ κάθετον τῇ Ο΄Β, ὅτε (ΑΓ) = (ΟΟ΄) = 0,74. Ἔχωμεν προφανῶς (ΓΒ)=(Ο΄Β)−(Ο΄Γ)=(Ο΄Β)−(ΟΑ)=0,5−0,3=0,2.

Ἄρα (ΑΒ) = $\sqrt{0,74^2+0,2^2}$.

Ἤδη ἵνα προσδιορίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον Ε= π (Α+α) λ ἔνθα Α, α αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ λ ἡ πλευρά. Ἄρα Ε=3,14 (0,5+0,3) $\sqrt{0,74^2+0,2^2}$ τ.μ.



Σχ. 195

344.— Κώνου τινὸς ἡ πλευρὰ εἶναι 10 μ. καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως 6 μ. Ἐπίπεδον δὲ ἀγόμενον παραλλήλως πρὸς τὴν βάσιν καὶ διὰ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς τέμνει τὸν κῶνον. Πόση εἶναι ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ ἀποκοπέντος κολούρου κώνου ;

ΛΥΣΙΣ.— Εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὰς τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ὅπερ εἶναι $\sqrt{10^2-6^2}=8$ μ. Κατόπιν εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα τῆς ἄνω βάσεως τοῦ προκύψαντος κολούρου, διότι γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἀχθὲν ἐπίπεδον ἐδιχοτόμησε ὕψος καὶ πλευρὰν τοῦ δοθέντος κώνου καὶ ἔχομεν $\sqrt{5^2-4^2}=3$ μ. Ἤδη τοῦ κολούρου κώνου γνωρίζομεν τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεών του 3 μ. καὶ 6 μ. καὶ τὴν πλευράν του 5 μ. Ὅτε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του θὰ εἶναι 3,14 . (3+6) . 5=3,14 . 45 καὶ ἡ ὁλικὴ θὰ εἶναι 3,14 . 45+3,14 . 3²+ + 3,14 . 6²=3,14 . (45+9+36)=3,14 . 90 τ.μ.

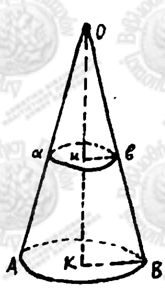
ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— 345. Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶναι 1,18 μ., αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι 0,14 μ. καὶ 0,06μ. πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

ΛΥΣΙΣ.— Ὁ ὄγκος του εὑρίσκεται εὐκόλως δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου καὶ εἶναι $P=\frac{1}{3}$. 3,14 . 1,18 (0,14² + 0,06² + 0,14 . 0,06) = 0,39 κ. μ.

346.— Κῶνός τις ἔχει ὕψος 20 μ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τάμωμεν αὐτὸν εἰς δύο ἴσα τὸν ὄγκον μέρη δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἐκ ποίου σημείου τοῦ ὕψους πρέπει νὰ ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω ὁ κῶνος ΟΑΒ (Σχ. 196) οὗ τὸ ὕψος (ΟΚ) = 20 μ. καὶ τὸν ὁποῖον ἡ τομὴ (ακβ), ἡ παράλληλος τῇ βάσει, διαιρεῖ εἰς δύο μέρη ἴσα κατ' ὄγκον. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὁ κῶνος Οαβ ὀφείλει νὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου ΟΑΒ ἤτοι $\frac{(Οαβ)}{(ΟΑΒ)}=\frac{1}{2}$.

Ἀλλὰ (Οαβ) = $\frac{1}{3}$ π. (κβ)² (Οκ). καὶ (ΟΑΒ) = $=\frac{1}{3}$ π. (ΚΒ)². (ΟΚ). Ἄρα $\frac{(Οαβ)}{(ΟΑΒ)}=\frac{(κβ)^2}{(ΚΒ)^2}\cdot\frac{(Οκ)}{(ΟΚ)}$.



Σχ. 196.

Ἀλλὰ τὰ τρίγωνα Οκβ καὶ ΟΚΒ εἶναι ὅμοια, ὅτε θὰ ἔχωμεν $\frac{(O\kappa)}{(OK)} = \frac{(\kappa\beta)}{(KB)}$, ὅτε ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται $\frac{(O\alpha\beta)}{(OAB)} = \frac{(O\kappa)^3}{(OK)^3}$.

ἢ $\frac{1}{2} = \frac{(O\kappa)^3}{20^3}$ ἢ $(O\kappa) = \frac{20}{\sqrt[3]{2}} = 15{,}54$ μ. (περίπου).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **347.** Ἐὰν ἐπίπεδον ἐφάπτεται σφαίρας, ἡ εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἀγομένη ἀκτὶς εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον. Καὶ τί εἶναι τῆς σφαίρας τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ εἶναι κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς ;

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Διότι αὕτη, ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἡ συντομωτέρα καὶ συνεπῶς θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

2) Ἐπειδὴ πᾶσα ἄλλη εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶναι πλαγία, ἕπεται ὅτι θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθέτου καὶ ἄρα τῆς ἀκτῖνος. Συνεπῶς ὅλα τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν τούτων καὶ τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας.

Ἄρα τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα θὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον καὶ συνεπῶς τὸ ἐπίπεδον θὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.

348. —Ποῖαι εἶναι αἱ σχετικαὶ θέσεις εὐθείας πρὸς σφαῖραν, ὅταν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς θεωρουμένης εὐθείας εἶναι 1ον) μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, 2) ἴση καὶ 3ον) μικροτέρα αὐτῆς ;

ΑΠΑΝΤΗΣΙΣ.—Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ κέντρον ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον θὰ τμήσῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον αὐτῆς. Ἤδη ἂν ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος, τότε ἡ εὐθεῖα θὰ κειται ἐκτὸς τῆς σφαίρας. Ἂν ἡ ἀπόστασις εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα ἡ εὐθεῖα θὰ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου συνεπῶς καὶ τῆς σφαίρας. Ἂν τέλος ἡ ἀπόστασις εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τότε ἡ εὐθεῖα θὰ ἔχῃ δύο κοινὰ σημεῖα μετὰ τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, ἄρα δύο κοινὰ σημεῖα καὶ μετὰ τῆς σφαίρας.

349.—Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπί τινα ἀκτῖνα τῆς σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον αὐτῆς κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— 1) Ἐὰν συνδέσωμεν δι' εὐθείας τὸ κέντρον μὲ οἱονδήποτε σημεῖον τῆς εὐθείας (ἐννοεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ὅπερ ὁρίζει ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ κέντρον), τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς καθέτου καὶ συνεπῶς καὶ τῆς ἀκτῖνος. Ἐκ τούτου γίνεται φανερὸν ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εὐθείας μὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ ὅτι μόνον κοινὸν εἶναι τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, εἰς ἣν ἤχθη κάθετος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα. Ἄρα ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ σφαῖρα ἐφάπτονται ἀλλήλων.

2) Εἶναι φανερὸν ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶναι κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ

σημεῖον, δηλαδὴ εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς. Συνεπῶς ὅλαι αὗται ὡς κάθετοι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον εὐθείας κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ ὅπερ ὡς κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἐν λόγῳ ἀκτῖνος θὰ ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (ἄσκ. 347).

350.—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου σφαίρας ἀκτῖνος 0,4 μ. ἀπόστασιν ἴσην πρὸς 0,25 μ.

ΛΥΣΙΣ.—Ἀρκεῖ νὰ ὁρίσωμεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου τούτου. Αὐτὴ ὅμως ὁρίζεται εὐκόλως, διότι, ἂν κληθῇ x, θὰ εἶναι μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἔχοντος ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας 0,4 καὶ τὴν ἄλλην κάθετον τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν 0,25 μ. ἄρα $x = \sqrt{0{,}4^2 - 0{,}25^2} = \sqrt{0{,}0975}$. Καὶ τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι $E = 3{,}14 \cdot 0{,}0975$ τ.μ.

Σελὶς 204. § 392. **ΠΟΡΙΣΜΑ.**—Φέρομεν τὰς ΚΑ, ΚΒ, ὅτε αἱ γωνίαι ΑΚΠ καὶ ΒΚΠ εἶναι ὀρθαί, (ἐπειδὴ βαίνουν ἐπὶ τεταρτημορίου τῶν ἴσων μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας). Συνεπῶς ἡ διάμετρος ΠΠ', οὖσα κάθετος ἐπὶ τὰς ΚΑ, ΚΒ καὶ εἰς τὴν τομὴν των, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ. Ἄρα τὰ Π καὶ Π' εἶναι πόλοι τοῦ κύκλου τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ— **351.** Τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν ἀπέχουν 0,1 μ., αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶναι 0,06 μ. τῆς μιᾶς καὶ 0,08 μ. τῆς ἄλλης. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κοινῆς τομῆς αὐτῶν.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 396 τοῦ βιβλίου, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τομὴ αὐτή, εἶναι κύκλος κέντρου Δ καὶ ἀκτῖνος ΔΑ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὁρισθῇ ἡ ΔΑ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΚΛ τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἤτοι (ΚΛ) = 0,1 μ., (ΚΑ) = 0,08 μ. καὶ (ΛΑ) = 0,06 μ.

Ὁρίζομεν τὸ (ΑΔ) ἤτοι:

$$(\mathrm{A\Delta}) = \sqrt{(\Lambda\mathrm{A})^2 - (\Lambda\Delta)^2} = \sqrt{(\Lambda\mathrm{A})^2 - \frac{\left[(\mathrm{K}\Lambda)^2 + (\Lambda\mathrm{A})^2 - (\mathrm{KA})^2\right]^2}{4\,(\mathrm{K}\Lambda)^2}} =$$

$=0{,}048$ (περίπου). Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου θὰ εἶναι $3{,}14 \cdot 0{,}048^2$. τ. μ.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος ἕπεται ἡ ἑξῆς ἀξιοσημείωτος παρατήρησις. Τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν εἰς ὁσασδήποτε ἰσοδυνάμους ζώνας θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ μίαν διάμετρον αὐτῆς εἰς σημεῖα ἰσαπέχονται ἀλλήλων. Αἱ προκύπτουσαι ζῶναι ὡς ἰσοϋψεῖς θὰ θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ —**352.** Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 3,5 μ. Πόση εἶναι ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς;

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν α ἡ ἀκτίς, γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $E = 4\pi\alpha^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5^2$ τ.μ.

353.—Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶναι 3,6μ. τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ 0,4μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων;

ΛΥΣΙΣ.—Εἶναι προφανὲς ὅτι πρόκειται περὶ σφαιρικῆς ζώνης ἐχούσης ὕψος 0,4 μ. Ἄρα τὸ ἐμβαδόν της θὰ εἶναι $2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}6 \cdot 0{,}4$ τ. μ.

354.—Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, πόσας φορὰς γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς μεγαλυτέρα ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἂν α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας τὸ ἐμβαδὸν της θὰ εἶναι $E=4\pi\alpha^2$. Ἂν ὅμως ἡ ἀκτὶς διπλασιασθῇ καὶ γίνῃ 2α, ἡ ἐπιφάνεια τῆς νέας σφαίρας θὰ εἶναι $E'=4\pi.(2\alpha)^2=4\pi.4\alpha^2=4.4\pi\alpha^2=4E$ ἤτοι τετραπλασιάζεται.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **355.** Τρίγωνον ἰσόπλευρον στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του ὁλόκληρον περιστροφήν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

ΛΥΣΙΣ.— Φέρομεν τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τὸ ἀντίστοιχον πρὸς τὴν πλευρὰν περὶ ἣν θὰ γίνῃ ἡ στροφή. Εἶναι φανερὸν τότε, ὅτι κατὰ στροφὴν τοῦ τριγώνου θὰ παραχθῶσι δύο ἴσοι κῶνοι, ἔχοντες ἀκτῖνα βάσεως τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς, περὶ ἣν ἐστράφη τὸ τρίγωνον: Ἂν λοιπὸν κληθῇ α ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοπλεύρου, τὸ ὕψος του, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου θὰ εἶναι $\frac{1}{3}\pi.\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{\alpha}{2}=\frac{\pi\alpha^3}{8}$ καὶ τοῦ ὅλου $\frac{\pi\alpha^3}{4}$.

Σελὶς 209 § 401. **ΠΟΡΙΣΜΑ 1.**— Γνωρίζομεν (§ 400) ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $2\pi\alpha\,.\,2\alpha$ (α=ἀκτίς). Δηλαδὴ ἴσον πρὸς $4\pi\alpha^2$. Ἀλλὰ $\pi\alpha^2$ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν σφαίρας ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τεσσάρων μεγίστων κύκλων της.

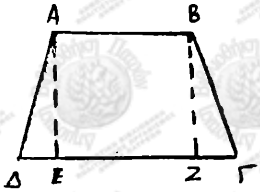
Σελὶς 209. § 402. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**— Ἂν E καὶ E' αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ἐν λόγῳ σφαιρῶν α, α' αἱ ἀκτῖνες των, καὶ Δ, Δ' αἱ διάμετροι αὐτῶν θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις.

$$\frac{E}{E'}=\frac{4\pi\alpha^2}{4\pi\alpha'^2}=\frac{\pi.\Delta^2}{\pi.\Delta'^2}\ \text{ἤτοι}\ \frac{E}{E'}=\frac{\alpha^2}{\alpha'^2}=\frac{\Delta^2}{\Delta'^2}.$$

Σελὶς 209. § 403. **ΠΟΡΙΣΜΑ 3.**—Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ζώνης εἶναι γινόμενον τοῦ ὕψους της ἐπὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου αὐτῆς. Ἀλλὰ εἰς τὴν περίπτωσιν μας αἱ δύο ζῶναι εἶναι ἰσοϋψεῖς, καὶ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν. Δηλαδὴ τὰ ἐμβαδά των ἐκφράζονται μὲ γινόμενα ἀπὸ ἴσους παράγοντας ἄρα εἶναι ἴσα καὶ αἱ ζῶναι εἶναι ἰσοδύναμοι

356.— Τραπέζιον ἰσοσκελές, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς δύο βάσεις καὶ τὸ ὕψος στρέφεται περὶ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἔστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἂς παρασταθῶσι συντόμως ἡ (ΑΒ) = α ἡ (ΔΓ) = β καὶ τὸ ὕψος (ΑΕ) = υ. (Σχ. 197) Σύρομεν ἀμφότερα τὰ ὕψη τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν Α, καὶ Β καὶ στρέφομεν τὸ τραπέζιον περὶ τὴν μεγαλυτέραν βάσιν ΔΓ. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ θὰ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ κυλίνδρου, ὅστις παράγεται ὑπὸ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΕΖΒ καὶ τῶν δύο ἴσων κώνων οἱ ὁποῖοι παράγονται ἀπὸ τὰ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΖΓ. Ὁ κύλινδρος θὰ ἔχῃ ὕψος μὲν τὴν (ΑΒ) = α καὶ ἀκτῖνα βάσεως τὴν (ΑΕ) = υ.



Σχ. 197.

Οἱ κῶνοι θὰ ἔχουν ἀκτῖνα βάσεως τὴν $(ΑΕ) = υ$ καὶ ὕψος τὴν $(ΔΕ) = \frac{(ΔΓ) - (ΕΖ)}{2} = \frac{β - α}{2}$.

Ἄρα ἂν καλέσωμεν Ρ τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ θὰ ἔχωμεν

$$Ρ = Ρ' \cdot \text{κυλίνδρου} + 2 Ρ'' \cdot \text{κώνου} = π \cdot υ^2 \cdot α + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot π \cdot υ^2 \cdot \frac{β - α}{2} =$$

$$= πυ^2 \left(α + \frac{β - α}{3} \right) = πυ^2 \cdot \frac{2α + β}{3}.$$

Σελὶς 213. § 408. **ΠΟΡΙΣΜΑ 2.**—Ἂν καλέσωμεν Ρ, Ρ' τοὺς ὄγκους τῶν ἐν λόγῳ σφαιρῶν α, α', τὰς ἀκτῖνας των καὶ Δ, Δ' τὰς διαμέτρους των θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας τῶν λόγων

$$\frac{Ρ}{Ρ'} = \frac{4/3πα^3}{4/3\,πα'^3} = \frac{\frac{1}{6}\,.\,π\,.\,Δ^3}{\frac{1}{6}\,.\,π\,.\,Δ'^3} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{Ρ}{Ρ'} = \frac{α^3}{α'^3} = \frac{Δ^3}{Δ'^3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.— **357.** Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶναι 3,5 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος αὐτῆς ;

ΛΥΣΙΣ.— Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $Ρ = \frac{4}{3} πα^3$ (ἔνθα α= = ἀκτὶς) λαμβάνομεν $Ρ = \frac{4}{3} . 3{,}14 . 3{,}5^3$ κ.μ.

358.— **ΛΥΣΙΣ.** Ὁ ὄγκος τοῦ σιδήρου τῆς σφαίρας εἶναι προφανῶς ἴσος πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο σφαιρῶν τῆς ἐξωτερικῆς καὶ τῆς ἐσωτερικῆς. Ἄρα ἂν Ρ ὁ ὄγκος τοῦ σιδηροῦ μέρους θὰ ἔχωμεν

$$Ρ = \frac{4}{3} . 3{,}14 . 0{,}05^3 - \frac{4}{3} . 3{,}14 . 0{,}04^3 \text{ κ. μ.}$$

359.— Μιᾶς σφαίρας ὁ ὄγκος εἶναι 33, 5104 κ. μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ;

ΛΥΣΙΣ.— Καλοῦντες x τὴν ἄγνωστον ἀκτῖνα, ἀρκεῖ νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{4}{3} . 3{,}14 x^3 = 33{,}5104$, διὰ νὰ προσδιορισθῇ αὕτη.

$$\text{Ἤτοι } x = \sqrt[3]{\frac{3 . 33{,}5104}{4 . 3{,}14}}$$

360.— Ἐὰν ἡ ἀκτὶς σφαίρας διπλασιασθῇ, πόσας φορὰς μεγαλύτερος θὰ γίνῃ ὁ ὄγκος αὐτῆς ; Καὶ ἂν ὁ ὄγκος σφαίρας διπλασιασθῇ, ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

ΛΥΣΙΣ.— 1) Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα της, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι $Ρ = \frac{4}{3} πα^3$. Ἀλλὰ ὅταν ἡ ἀκτὶς διπλασιασθῇ καὶ γίνῃ 2α, ὁ ὄγκος της θὰ γίνῃ $Ρ' = \frac{4}{3} π (2α)^3 = 8 \cdot \frac{4π}{3} α^3 = 8 . Ρ$ δηλαδὴ ὀκταπλασιάζεται.

2) Ἐὰν ἤδη ὁ ὄγκος εἶναι $Ρ = \frac{4}{3} πα^3$ καὶ γίνῃ 2Ρ, καλέσωμεν δὲ x τὴν ἀκτῖνα τῆς νέας σφαίρας θὰ πρέπῃ $2Ρ = \frac{4}{3} πx^3$ ἢ $\frac{4}{3} πx^3 =$

$= \frac{4}{3}\pi\alpha^3.2$ ἢ $x^3 = \alpha^3.2$ ἢ $x = \alpha\sqrt[3]{2}$, Δηλαδὴ ἡ ἀκτὶς α πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\sqrt[3]{2}$, ἵνα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας διπλασιασθῇ.

361.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας πρὸς τὸν ὄγκον περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κύβου (ἤτοι κύβου, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἕδραι ἐφάπτονται τῆς σφαίρας).

ΛΥΣΙΣ.— Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκμὴν τοῦ κύβου, ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας θὰ εἶναι προφανῶς $\frac{\alpha}{2}$. Ἄρα ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $\frac{4}{3}\pi.\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\pi\alpha^3}{6}$. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου θὰ εἶναι α^3. Καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων θὰ εἶναι $\dfrac{\frac{\pi\alpha^3}{6}}{\alpha^3} = \frac{\pi}{6}$.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

362.—Ποῖος εἶναι ὁ γεωμ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ δύο δοθέντων σημείων ;

ΛΥΣΙΣ.—Ἐπειδὴ τὰ δοθέντα σημεῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῶν σφαιρῶν, ἔπεται ὅτι τὸ κέντρον ἑκάστης σφαίρας θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου τῶν δοθέντων σημείων. Ἀναγόμεθα λοιπὸν εἰς γνωστὸν γεωμ. τόπον (§ 296) εἰς τὸν ὁποῖον ἐδείξαμεν ὅτι οὗτος εἶναι τὸ ἐπίπεδον τὸ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, τῆς συνδεούσης τὰ δοθέντα σημεῖα.

363.— Θέλει τις νὰ κατασκευάσῃ κωνικὴν σκηνὴν χωρητικότητος 120 κ. μ. τὴν ὁποίαν θὰ στηρίξῃ ἐπὶ κυκλικῆς βάσεως ἐμβαδοῦ 80 τ. μ. Πόσα τετραγωνικὰ μέτρα ὑφάσματος σκηνῆς θὰ χρειασθῇ ;

ΛΥΣΙΣ.- Ἡ ἀκτὶς εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως, διότι θὰ εἶναι $\pi\alpha^2 = 80$ ἢ $\alpha = \sqrt{\frac{80}{\pi}}$. Ἡ πλευρὰ θὰ εὑρεθῇ ἀφοῦ πρῶτον ὁρισθῇ τὸ ὕψος τῆς σκηνῆς. Θὰ ἔχωμεν δέ, ἂν x τὸ ὕψος, $\frac{1}{3}\pi.\left(\sqrt{\frac{80}{\pi}}\right)^2.x = 120$

ἢ $\frac{1}{3}\pi.\frac{80}{\pi}.x = 120$ ἢ $x = \frac{3.120}{80} = \frac{9}{2}$ μ. Ἄρα ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι

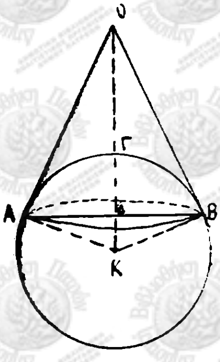
$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{80}{\pi}}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{80}{\pi}} = \sqrt{\frac{320 + 81\pi}{4\pi}}$$

Συνεπῶς ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι $E = \pi.\sqrt{\frac{80}{\pi}}.\sqrt{\frac{320+81\pi}{4\pi}}$. τ. μ.

364.—Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης σφαίρας τινὸς ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἂν καλέσωμεν α τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης, τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης θὰ εἶναι $2\pi\alpha \cdot \upsilon$, δηλαδὴ ἰσοδύναμον πρὸς τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κυλίνδρου, ὅστις ἔχει βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ, διότι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοιούτου κυλίνδρου, θὰ εἶναι ἐπίσης $2\pi\alpha \cdot \upsilon$.

365.—Σφαῖρα ἀκτῖνος ρ φωτίζεται ὑπὸ φωτιστικῆς πηγῆς, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀπόστασιν α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς φωτιζομένης σφαιρικῆς ζώνης εἶναι $\frac{2\pi\rho^2\alpha}{\rho+\alpha}$.



Σχ. 198.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔστω σφαῖρα Κ καὶ Ο ἡ φωτιστικὴ πηγὴ (Σχ. 198) κειμένη εἰς ἀπόστασιν ΟΓ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὥστε (ΟΓ)=α. Φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ΟΚ, τὸ ὁποῖον θὰ τμήσῃ τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, τὸν ΑΓΒ. Ἐκ τοῦ Ο φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΟΑ καὶ ΟΒ πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον. Τὸ μέρος τῆς σφαίρας τὸ φωτιζόμενον ὑπὸ τῆς πηγῆς ἀποτελεῖ τὴν σφαιρικὴν ζώνην τὴν ἔχουσαν βάσιν τὸν κύκλον (Δ, ΔΒ) καὶ ὕψος τὸ ΓΔ. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν αὐτῆς θὰ εἶναι $E=2\pi\rho\,(\Gamma\Delta)$ (1), Ἀλλὰ $(\Gamma\Delta)=(K\Gamma)-(K\Delta)=\rho-(K\Delta)$.
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΚ εὑρίσκομεν τὸ ΚΔ, διότι $(AK)^2=(K\Delta)\cdot(KO)$ ἢ $\rho^2=(K\Delta)\cdot(\alpha+\rho)$ ἢ $(K\Delta)=\frac{\rho^2}{\alpha+\rho}$. Ἄρα $(\Gamma\Delta)=\rho-\frac{\rho^2}{\rho+\alpha}=\frac{\rho^2+\rho\alpha-\rho^2}{\rho+\alpha}=\frac{\rho\alpha}{\rho+\alpha}$
Συνεπῶς ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$E=2\pi\rho\cdot\frac{\rho\cdot\alpha}{\rho+\alpha}=\frac{2\pi\rho^2\alpha}{\rho+\alpha}.$$

366.— Κανονικὸν ἡμιεξάγωνον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σχηματιζομένου στερεοῦ.

ΛΥΣΙΣ.— Ἀναφερόμενοι εἰς τὴν ἄσκησιν 356, παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ εὑρίσκεται ὡς ἐκεῖ, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν $(AB)=\alpha$ (ἔνθα α ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου), $(\Delta\Gamma)=2\alpha$ καὶ

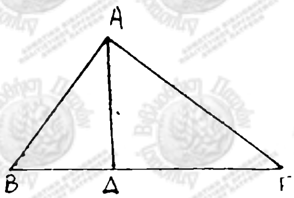
$$(AE)=\sqrt{(A\Delta)^2-(\Delta E)^2}=\sqrt{\alpha^2-\frac{\alpha^2}{4}}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τελικῶς $P=\pi\cdot\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{2\alpha+2\alpha}{3}=\pi\alpha^3.$

Ἡ δὲ ἐπιφάνεια θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὃν γεννᾷ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΕ καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῶν δύο κώνων τοὺς ὁποίους παράγουν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΒΓΖ. Ἤτοι $E=$ Ἐπιφ. κυλ $+2$ ἐπιφ. κώνου $=2\pi\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\alpha+$
$+2\cdot\pi\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\cdot\alpha=4\pi\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}=2\pi\alpha^2\sqrt{3}.$

367.— Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτοῦ. Οἱ σχηματιζόμενοι ὄγκοι εἶναι Ο, ὅταν στρέφεται περὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ Ο′, Ο″, ὅταν στρέφεται περὶ τὰς ἄλλας πλευράς. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\frac{1}{O'^2} + \frac{1}{O''^2} - \frac{1}{O^2}$.

ΛΥΣΙΣ.—Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὀρθὴν τὴν γωνίαν Α καὶ ἔστω ὅτι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν εἶναι (ΒΓ) = α, (ΑΒ)=γ, (ΑΓ) = β (Σχ. 199). Φέρομεν τὸ ὕψος (ΑΔ) = υ καὶ τότε λαμβάνομεν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ. Ἂν στρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν ΒΓ λαμβάνομεν ὡς ὄγκον τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι παράγονται ὑπὸ τῶν δύο ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἤτοι



Σχ. 199.

$$O = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2(\text{ΒΔ}) + \frac{1}{3}\pi\upsilon^2(\text{ΔΓ}) = $$
$$= \frac{1}{3}\pi\upsilon^2\left[(\text{ΒΔ})+(\text{ΔΓ})\right] = \frac{1}{3}\pi\upsilon^2 . \alpha.$$

Ἂν τώρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στραφῇ περὶ τὰς καθέτους πλευρὰς του τότε θὰ παραχθῶσι δύο κῶνοι ἀντιστοίχως, ὧν οἱ ὄγκοι θὰ εἶναι $O' = \frac{1}{3}\pi\beta^2 . \gamma$ καὶ $O'' = \frac{1}{3}\pi\gamma^2 . \beta$

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν παράστασις γίνεται

$$\frac{1}{O'^2} + \frac{1}{O''^2} - \frac{1}{O^2} = \frac{9}{\pi^2\beta^4\gamma^2} + \frac{9}{\pi^2\beta^2\gamma^4} - \frac{9}{\pi^2\upsilon^4\alpha^2} = \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{\gamma^2+\beta^2}{\beta^4\gamma^4} - \frac{1}{\upsilon^4\alpha^2}\right) =$$

$= \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{\alpha^2}{\beta^4\gamma^4} - \frac{1}{\upsilon^4\gamma^2}\right)$. Ἀλλὰ ἐνθυμούμεθα ὅτι αυ=βγ ἤτοι ἡ δοθεῖσα γίνεται $\frac{9}{\pi^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^4.\upsilon^4} - \frac{1}{\upsilon^4.\alpha^2}\right) = \frac{9}{\pi^2}\left(\frac{1}{\alpha^2\upsilon^4} - \frac{1}{\upsilon^4\alpha^2}\right) = \frac{9}{\pi^2} . 0 = 0.$

368.— Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς, ὅταν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς, ὕψους 5 μ., εἶναι 94,248 τ. μ.

ΛΥΣΙΣ.— Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ζώνης εἶναι 2π.α.υ ἤτοι 2.3,14.α.5, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἰσοῦται μὲ 94,248 τ. μ.

Ἄρα 2.3,14.5.α=94,248, ἐξ ἧς α=3.μ. Ἄρα ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $E = 4.\pi.3^2$ καὶ ὁ ὄγκος $P = \frac{4}{3}.\pi.3^3$.

369. ΛΥΣΙΣ.— Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀκτῖνα, ἂν θέσωμεν $4\pi\alpha^2 = 5026{,}56$, ἐξ ἧς α=20. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶναι $P = \frac{4}{3}\pi.\alpha^3 = \frac{4}{3}\pi.20^3$ κ. μ. Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι ἴση πρὸς τὴν 1, ἄρα τὸ βάρος, πληρωθέντος δι' ὕδατος, θὰ εἶναι $\frac{4}{3}.3{,}14.8000$ τόννοι. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὸ βάρος τοῦ ἀερίου, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἄνω ποσότητα $\frac{4}{3}.3{,}14.8000$ ἐπὶ τὸ 0,0000895 ἤτοι τὸ ζητούμενον βάρος εἰς τόννους θὰ εἶναι $\frac{4}{3}.3{,}14.8000.0{,}0000895$.

370. ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος εἶναι $P_1 = \pi a^2 (\lambda - 2a)$. Ὁ ὄγκος τῶν δύο ἴσων ἡμισφαιρίων ἀποτελεῖ τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας ἀκτῖνος α ἤτοι $P_2 = \frac{4}{3}\pi a^3$. Ἄρα ὁ ὁλικὸς ὄγκος θὰ εἶναι $P_1 + P_2 = \pi a^2(\lambda - 2a) +$ $+ \frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{3\pi a^2\lambda - 6\pi a^3 + 4\pi a^3}{3} = \frac{3\pi a^2\lambda - 2\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^2}{3} \cdot (3\lambda - 2a)$.

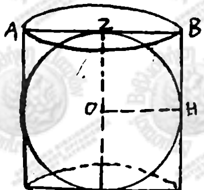
371. ΛΥΣΙΣ.— Ἐπειδὴ εἰς 5 δευτερόλεπτα πίπτει μία σταγὼν εἰς 1 λεπτὸν θὰ πίπτουν 12 σταγόνες καὶ συνεπῶς εἰς 1 ὥραν=60 λεπτὰ θὰ πίπτουν $60 \cdot 12 = 720$ σταγόνες. Εἰς δὲ τὰς 8 ὥρας, καθ' ἃς ἐχρησιμοποιήθη τὸ σταγονόμετρον θὰ ἔπεσαν $8 \cdot 720 =$ $= 5760$ σταγόνες. Ἤδη εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον μιᾶς σταγόνος, ὅστις θὰ εἶναι $\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^3$ (διότι 4 χιλιοστὰ=0,4 ἑκατοστά). Ὁ ὄγκος λοιπὸν τῶν 5760 σταγόνων θὰ εἶναι $5760 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^3$ κ. ἑκ. Καὶ βάρος θὰ εἶναι $5760 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4^3\ 0{,}8$ γραμμάρια.

372. ΛΥΣΙΣ.— Ὁ ὄγκος τοῦ μετάλλου θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῆς ἐξωτερικῆς σφαίρας καὶ τῆς ἐσωτερικῆς σφαίρας, ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{4}{3}\pi\, 0{,}04^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}03^3$. Ἂν ἤδη κληθῇ α ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου, ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι a^3. Ἄρα θὰ πρέπῃ $a^3 =$

$$= \frac{4}{3}\pi\, 0{,}04^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 0{,}003^3 \text{ ἢ } a = \sqrt[3]{\frac{4}{3}\pi\,(0{,}04^3 - 0{,}03^3)}$$

373.—Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου (ἤτοι περιλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουν καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ὁ κύλινδρος ΑΒΓΔ (Σχ. 200) ἔχει ἀκτῖνα βάσεως (ΕΓ)=(ΟΗ)=α καὶ ὕψος (ΑΔ)= =(ΖΕ)=2α. Ἔνθα α ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἡ ὁλική, θὰ εἶναι $2\pi a \cdot 2a +$ $+ 2\pi a^2 = 6\pi a^2$. Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $4\pi a^2$. Ὁ λογος των θὰ εἶναι $\frac{4\pi a^2}{6\pi a^2} = \frac{2}{3}$.



Σχ. 200.

Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶναι $\pi a^2 \cdot 2a = 2\pi a^3$.

Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $\frac{4}{3}\pi a^3$

Ὁ λόγος των $\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{2\pi a^3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

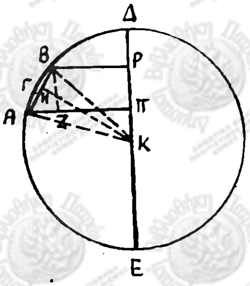
374.— Οἱ ὄγκοι σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν πολυέδρου, ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.— Ἓν πολύεδρον περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς πυραμίδας ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει βάσιν μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου καὶ ὕψος τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

Ἄρα ὁ ὄγκος μιᾶς τοιαύτης πυραμίδος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{1}{3}$ (τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας)×(ἀκτῖνα σφαίρας). Ὁ ὄγκος συνεπῶς ὅλου τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι $P = \frac{1}{3} \times$(Ἐπιφ. πολυέδρου)×(ἀκτῖνα σφαίρας). Ὁ δὲ ὄγκος τῆς σφαίρας (§ 407) $P' = \frac{1}{3} \times$(ἐπιφ. σφαίρας)×(ἀκτ. σφαίρας) ἄρα $\frac{P}{P'} = \frac{\text{Ἐπιφ πολυέδρου}}{\text{ἐπιφ. σφαιρας}}$.

375.— Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἂν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτό, γράφει στερεόν, ὅπερ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ.—Ἔστω τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒΑ (σχ. 201) καὶ διάμετρος κύκλου ἡ ΔΕ μὴ τέμνουσα αὐτό. Ἂν τὸ τμῆμα τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ΔΕ, τότε ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον θὰ γράψῃ τὸ ΑΓΒΑ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τὰ ὁποῖα γράφουν ἀφ᾽ ἑνὸς ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΚΑΒ στρεφόμενα περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ. Ἀλλὰ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρ. τομ. ΚΑΓΒ $= \frac{1}{3}\cdot$(ζώνης ΑΓΒ) . α = (α = ἀκτὶς τῆς σφαίρ.) $= \frac{1}{3} 2\pi\alpha.(\Pi P)\alpha = \frac{2}{3}\pi\alpha^2 (\Pi P)$. Ἐπίσης ὁ ὄγκος τριγ. ΚΑΒ $= \frac{1}{3}$ (ἐπιφ. ΑΒ).(ΚΗ) $= \frac{1}{3} 2\pi . (KH) . (\Pi P) . (KH)$ (§ 383 σημ. β′)



Σχ. 201.

Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ τμήμ. $= \frac{2}{3}\pi\alpha^2(\Pi P) - \frac{2}{3}\pi (KH)^2 . (\Pi P) =$

$$= \frac{2}{3}\pi . (\Pi P)\left[\alpha^2 - (KH)^2\right] = \frac{2}{3}\pi (\Pi P) . (AH)^2 = \frac{2}{3}\pi.(\Pi P)\frac{(AB)^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi (AB)^2 . (\Pi P).$$

376.— Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ, καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ, εἰς τὸ ὁποῖον προστίθεται ὁ ὄγκος σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. – Ἀναφερόμεθα εἰς τὸ σχῆμα 201 καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, ὅπερ ἔχει βάσεις τοὺς κύκλους κέντρων Ρ καὶ Π καὶ ἀκτῖνας ἀντιστοίχως ΡΒ καὶ ΠΑ, γράφεται ἀπὸ τὸ ΑΓΒΡΠΑ, ὅταν τοῦτο στραφῇ ὁλόκληρον περιστροφὴν περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ. Εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ὄγκος τούτου εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων, τοὺς ὁποίους γράφουν τὸ δισορθογώνιον τραπέζιον ΒΡΠΑ (κολ. κῶνος) καὶ τὸ κυκλ. τμῆμα ΑΓΒΑ. Ὁ ὄγκος P_1 τοῦ τραπεζίου θὰ εἶναι

$P_1 = \frac{1}{3}\pi(ΠΡ).\left[(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2+(ΒΡ)(ΑΠ)\right]$ Ὁ ὄγκος τοῦ τμήματος (ἄσκ 375) $P_2 = \frac{1}{6}\pi\,(ΑΒ)^2.(ΠΡ)$. Ἄρα $P_1+P_2 = \frac{1}{6}\pi.(ΠΡ).\left[2(ΑΠ)^2+2\,(ΒΡ)^2+\right.$ $\left.+2\,(ΑΠ)\,(ΒΡ)+(ΑΒ)^2\right]$ (1). Ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΖ κάθετος τῇ ΑΠ θὰ ἔχωμεν $(ΑΒ)^2=(ΒΖ)^2+(ΑΖ)^2=(ΠΡ)^2+(ΑΠ-ΠΖ)^2=(ΠΡ)^2+(ΑΠ-ΒΡ)^2=(ΠΡ)^2+$ $+(ΑΠ)^2+(ΒΡ)^2-2\,(ΑΠ)\,(ΒΡ)$. Φέροντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΑΒ)^2$ εἰς τὴν (1) λαμβάνομεν $P_1+P_2=\frac{1}{6}\pi\,(ΠΡ)\left[(ΠΡ)^2+3\,(ΑΠ)^2+3\,(ΒΡ)^2\right]=$ $=\frac{1}{6}\pi\,(ΠΡ)^3+\frac{1}{2}\pi.(ΑΠ)^2\,(ΠΡ)+\frac{1}{2}\pi.(ΒΡ)^2.(ΠΡ)$.

Ἀλλὰ τὸ μὲν $\frac{1}{6}\pi\,(ΠΡ)^3$ φανερώνει τὸν ὄγκον σφαίρας διαμέτρου ΠΡ (ὕψος τμήματος). Τὰ δὲ $\pi\,(ΑΠ)^2\,(ΠΡ)$ καὶ $\pi.(ΒΡ)^2\,(ΠΡ)$ φανερώνουν τοὺς ὄγκους δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν βάσεις, τὰς βάσεις ΒΡ καὶ ΑΠ, τοῦ τμήματος καὶ κοινὸν ὕψος, τὸ ὕψος ΠΡ, τοῦ τμήματος.

377.— Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος ἀμφικύρτου φακοῦ, οὗ αἱ ἕδραι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα ρ καὶ τὸ αὐτὸ βάθος ε. (βάθος=ὕψος).

ΛΥΣΙΣ.— Ὁ ἀμφίκυρτος φακὸς εἶναι ἄθροισμα δύο ἴσων σφαιρικῶν τμημάτων μὲ μίαν βάσιν ἀκτῖνος ρ καὶ μὲ ὕψος τὸ ε. Ἄρα ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι $2\left[\frac{1}{6}\pi.ε^3+\frac{1}{2}\piρ^2ε\right]=\frac{\piε}{3}(ε^2+3ρ^2)$.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

107.—Νὰ ἀχθῇ διὰ δοθείσης εὐθείας ἐπίπεδον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων.

108.—Ἐὰν ὀρθῆς γωνίας ἡ μία πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ὀρθή.

109.—Διατυπώσατε καὶ δείξατε τὴν ἀντίστροφον πρότασιν.

110.—Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἂν εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ ἄλλο ἐπίπεδον τέμνον τὸ πρῶτον, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων.

111.—Ἂν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν τομήν των.

112.—Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας διέδρου γωνίας, τὰ σημεῖα τομῆς αὐτῆς καὶ τῶν ἑδρῶν, ἰσαπέχουν τῆς τομῆς τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου.

113.—Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε) ἐκτὸς τοῦ (Π) καὶ σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα ἐγγίζουσα τὴν (ε) καὶ τὸ (Π) καὶ ἔχουσα μέσον τὸ Α.

114.—Δίδεται σημεῖον Α ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) καὶ εὐθεῖα (ε) μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ (Π). Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τὴν (ε) καὶ τὸ (Π), ὥστε τὸ μεταξὺ τῆς (ε) καὶ (Π) μέρος αὐτῆς νὰ ἔχῃ μῆκος λ.

115.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν δοθέντος σημείου, ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) κειμένου, ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ (Π), αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐξ ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου.

116.—Ἐκτὸς ἐπιπέδου (Π) δίδεται σημεῖον Α, καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἕτερον σημεῖον Β. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Β καὶ ἐπὶ τοῦ (Π) εὐθεῖα ἥτις νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Α ἀπόστασιν λ.

117.—Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πλαγίου πρίσματος εἶναι γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

118.—Πυραμίδος ΟΑΒΓ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεώς της ΑΒΓ ἔχουν μήκη ἀντιστοίχως 6, 8, 10μ., ἡ δὲ ΟΑ εἶναι κάθετος τῇ βάσει καὶ ἔχει μῆκος τὸ τρίτον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑψῶν τῆς βάσεως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος της.

119.—Αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἀσυμβάτως ὀρθογώνιοι.

120.—Ἂν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ἀσυμβάτως ὀρθογώνια θὰ εἶναι ἐπίσης καὶ τὸ τρίτον ζεῦγος.

121.—Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν δίεδρον γωνίαν τετραέδρου, διαιρεῖ τὴν ἔναντι ἀκμὴν εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς τὰς παρακειμένας ἕδρας.

122.— Ἐπὶ μιᾶς τῶν βάσεων κυλίνδρου σύρομεν χορδὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τόξον 120^0. Διὰ ταύτης φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου καὶ χωρίζομεν τὸν κύλινδρον εἰς δύο μέρη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν.

123.— Ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου τὸ ὁποῖον γεννᾷ αὐτόν, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου.

124.—Τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ διαγώνιον αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

125.—Ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α, στρέφεται περὶ ἄξονα κάθετον ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ καὶ ἀπέχοντος τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς ταύτης ἀπόστασιν δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

126.— Εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος 3μ. ἐγγράφομεν κῶνον, ἔχοντα κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσιν μικρόν κύκλον αὐτῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος αὐτοῦ ἂν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἔχουν λόγον $^{5}/_{4}$.

127.—Νὰ τμηθῇ σφαῖρα ὑπὸ ἐπιπέδου διαιροῦσα τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

128.—Εἰς δοθέντα κύκλον Κ, ἀκτῖνος ρ, καὶ ἐκ σημείου Α ἐκτὸς φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ, ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρεφόμεεον περὶ τὴν ΑΚ ἂν γωνία $Α=60^0$.

129.—Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας, ἐγγεγραμμένης ἢ περιγεγραμμένης περὶ δοθέντα κύβον.