GH. STOICA

DEVIAŢII MARI

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
1995

GH. STOICA

DEVIAŢII MARI

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
-1995-

II

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. Ion Cuculescu
Prof. dr. Constantin Tudor

ISBN-973-575-007-4

Cuprins

INTRODUCERE

In acest curs prezentăm noţiunile şi rezultatele de bază ale teoriei deviaţiilor mari, împreună cu aplicaţiile importante care decurg de aici.

Capitolul 1 se referă la primele rezultate de acest tip, obţinute de H. Cramer (*Random Variables and Probability Distributions*, Cambridge Univ. Press, 1938) şi H. Chernoff (*Ann. Math. Statist.* 23, 1952, pp. 493-507) in ceea ce priveşte suma normalizată a variabilelor aleatoare independente şi identic repartizate, in cazul real şi in raport cu o semidreaptă. Totodată studiem in detaliu proprietăţile transformatei Cramer, in funcţie de care se exprimă valorile asimptotice căutate in teoria deviaţiilor mari.

In capitolul 2 prezentăm rezultatele generale ale acestei teorii, in cazul in care variabilele aleatoare iau valori intr-un spaţiu Banach separabil, urmând rezultatele lui M. Donsker-S. Varadhan (*Comm. Pure Appl. Math.* 28, 1975, pp. 1-47 ; 29, 1976, pp. 279-301 ; 29, 1976, pp. 389-461), in formularea lui R.R. Bahadur-S.L. Zabell (*Ann. Prob.* 7, 1979, pp. 587-621). Problema care rămâne acum de studiat este de a calcula explicit transformarea Cramer.

Cazul cel mai important (din punct de vedere practic) in care se folosesc rezultatele din capitolul 2 este cazul gausian, adică atunci când legea variabilelor aleatore considerate este gausiană pe un spaţiu Banach separabil. Prezentăm aceste lucruri in capitolul 3, in care tratăm apoi cazul particular al spaţiilor Hilbert şi, in fine cazul legilor traiectoriilor proceselor gausiene.

Aceste rezultate permit ca, in capitolul 4, să justificam studiul deviaţiilor mari, prin câteva aplicaţii importante. Prezentăm rezultatul (cu caracter statistic) al lui I. Sanov (*Select. Trans. Math. Stat. Prob.* 1, 1961, pp. 213-244) privind deviaţiile mari ale legii empirice a unui eşantion dat, apoi studiul "cozilor" măsurilor şi proceselor gausiene (după Donsker-Varadhan) şi rezultatul lui M. Schilder (*Trans. Amer. Math. Soc.* 125, 1966, pp. 63-85) in care se calculează explicit transformarea Cramer a legii traiectoriilor mişcării browniene. Incheiem acest capitol cu prezentarea demonstraţiei legii tari a numerelor mari pentru variabile aleatoare cu valori in spaţii Banach (după Ranga Rao) şi o ultimă aplicaţie la obţinerea formei funcţionale a legii logaritmului iterat, după V. Strassen (*Z. Wahrsch. verw. Geb.* 3, 1964, pp. 211-226).

In capitolul 5 prezentăm rezultatele recente ale lui M.I. Freidlin-A.D. Wentzell (*Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, 1984) privind perturbaţiile aleatore mici ale sistemelor dinamice, tratate ca probleme de deviaţii mari (uniforme), datorate unui proces gausian sau unui zgomot alb ; a doua situaţie revine la studiul deviaţiilor soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale stocastice perturbate. In spiritul acestui capitol, direcţii mai generale decât cele tratate aici sunt cele legate de difuzii cu timp de explozie finit sau pe o varietate diferenţiabilă, perturbaţii aleatoare care conduc la procese discontinue sau care provin din fenomene ergodice (măsuri aleatoare), cele legate de principiul de mediere, problemele echilibrului şi stabilităţii. Nu am tratat aceste direcţii, dar ele pot fi găsite in cartea citată a lui Freidlin-Wentzell, ca şi in D.W. Stroock, *An Introduction to the Theory of Large Deviations*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Am inclus o serie de exemple şi exerciţii, in majoritate aplicaţii imediate ale teoriei. Pentru a inţelege foarte bine acest curs, sunt necesare, in afară de ingredientele probabiliste (teoria proceselor şi calcul stocastic), noţiuni legate de măsuri pe spaţii vectoriale, analiză funcţională, topologie, operatori liniari şi functii convexe.

Aş dori să mulţumesc d-lui profesor Paul Deheuvels, care mi-a pus la dispoziţie mai multe versiuni ale acestei teorii, precum şi d-lor profesori Ion Cuculescu şi Constantin Tudor, care au citit manuscrisul şi mi-au indicat punctele, necesare şi importante din punct de vedere probabilist, pe care să pun accent. Mulţumiri totodată d-nei profesor Monica Dumitrescu, care mi-a indicat legăturile posibile ale acestei teorii cu statistica.

Gh. Stoica

Paris şi Bucureşti, 1995

1

DEVIATII MARI PE DREAPTA

CLASIFICAREA STATISTICA A ABATERILOR

Fie $F_n(x)$, $n \geq 1$ şir de funcţii de repartiţie care converge (slab) către o funcţie de repartiţie $F(x)$. Fie x_n, $n \geq 1$ şir de numere reale care converge către $+\infty$ când $n \to +\infty$. Este clar că $F_n(x_n)$ converge către 1 şi că $F_n(-x_n)$ converge către 0 când $n \to +\infty$. Problema care interesează este obţinerea vitezei de convergenţă, adică studiul comportamentului asimptotic al expresiilor $1 - F_n(x_n)$ şi $F_n(-x_n)$ când $n \to +\infty$.

Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ şir de variabile aleatoare reale independente şi identic repartizate, cu media 0 şi dispersia 1. Stim că, pentru orice $x \in \mathbf{R}$ avem

$$P\left[\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \leq x\right] \to \Phi(x)$$

când $n \to +\infty$, unde $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2/2} dx$ este funcţia de repartiţie a legii normale (gausiene) $N(0,1)$. Fie $F_n(x_n) = P(X_1 + \ldots + X_n \leq x)$; atunci $F_n(\sqrt{n}x) \to \Phi(x)$ când $n \to +\infty$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Cu alte cuvinte

$$1 - F_n\left(\sqrt{n}x_n\right) = P\left(X_1 + \ldots + X_n > x_n\sqrt{n}\right) \to 1 - \Phi(x)$$

când $n \to +\infty$, unde $x_n \equiv x$. Abaterile x_n de acest tip se numesc *ordinare* ; abaterile x_n cu $x_n = o(\sqrt{n})$ şi $x_n \to +\infty$ se numesc *mari*, iar cele cu $x_n = c\sqrt{\log n}$ se numesc abateri *medii*.

In statistică sunt cunoscute rezultate de tipul următor.

In cazul abaterilor mari, dacă există $t > 0$ cu $E\left(e^{tX_1}\right) < +\infty$, atunci

$$\frac{1 - F_n\left(\sqrt{n}x_n\right)}{1 - \Phi(x_n)}$$

$$= e^{x_n^2/2}\left[\inf_t e^{-tx_n/\sqrt{n}}E\left(e^{tX_1}\right)\right]^n\left(1+O\left(\frac{x_n+1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

In cazul abaterilor medii, dacă există $k = k(c)$ cu $E \mid X_1 \mid^k < +\infty$, atunci

$$\frac{1-F_n(\sqrt{n}x_n)}{1-\Phi(x_n)} \to 1 \text{ cand } n \to +\infty.$$

Să remarcăm că, dacă $x_n = x\sqrt{n}$ sau $x_n \simeq c\sqrt{n}$ sau $x_n/\sqrt{n} \to +\infty$, rezultatele de mai sus nu mai sunt adevărate. Dacă $x_n = x\sqrt{n}$, atunci trebuie discutat comportamentul la limită al expresiei

$$P\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{n} \geq x\right).$$

In statistică, acest tip de abateri se numesc *excesive* (sau *abateri mari de la medie*).

Pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ vom considera un şir de variabile aleatoare reale $\{X_n, n \geq 1\}$ independente şi identic repartizate, cu repartiţia (legea) μ. Să notăm

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1+\ldots+X_n). \tag{1.1}$$

Comportamentul asimptotic al probabilităţilor

$$P\left(\overline{X}_n \in A\right), A \text{ boreliană din } \mathbf{R}, \text{ când } n \to \infty$$

este descris, in ipoteza $\int \mid x \mid d\mu(x) < \infty$, de legea tare a numerelor mari. Mai precis, intrucât $\overline{X}_n \to m := \int x d\mu(x)$ aproape sigur, obţinem că $\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 1$ dacă A conţine o vecinătate a lui m, in timp ce $\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0$ dacă $m \notin \bar{A}$.

Pentru n mare, un eveniment de tipul $\left\{\overline{X}_n \in A\right\}$ cu $m \notin \bar{A}$ reprezintă o situaţie de "deviaţie mare" in raport cu m (sau de la media m). Calificativul "mare" se referă la faptul că $\overline{X}_n$ evită o vecinătate a lui m a cărei mărime nu tinde la 0 când $n \to \infty$. In acest context, "deviaţiile mici" corespund evenimentelor de tipul $\left\{\overline{X}_n \in A_n\right\}$ cu $A_n = m + \frac{1}{\sqrt{n}}B$, B boreliană din $\mathbf{R}$ i.e. evenimente ale căror probabilităţi converg "in general" către limite nenule descrise de teorema limită centrală.

In acest capitol vom prezenta deviaţiile mari in cazul in care multimea A de mai sus este o semi-dreaptă reală.

DEFINITIE. Notăm *transformarea Laplace* a repartiţiei μ aplicaţia $\hat{\mu} : \mathbf{R} \to (0, +\infty]$ dată de

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{tx} d\mu(x) \tag{1.2}$$

şi *transformarea Cramer* $\lambda : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ a lui μ aplicaţia

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)], \; x \in \mathbf{R}. \tag{1.3}$$

Observaţii.

1. Ca anvelopă superioară de funcţii liniare, λ este convexă şi inferior semi-continuă.

Dacă are loc $\int | x | d\mu(x) < \infty$, atunci

2. $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0 \Longleftrightarrow \lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$.

3. Există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to\infty} \lambda(x) = +\infty$.

Intr-adevăr, dacă $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0$, din relaţia (1.3.) obţinem că $\lambda(x) = \sup_{t\leq 0} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$ şi deci $\lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$. Dacă există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty$, relaţia $\lambda(x) \geq tx - \log \hat{\mu}(t)$ arată că $\lim_{x\to\infty} \lambda(x) = +\infty$. Implicaţiile reciproce din (2) şi (3) rezultă din implicaţiile directe din (3) resp. (2).

Rezultatele 1,2 şi 3 rămân adevărate dacă inlocuim $t, x > 0$, $x \to +\infty$ prin $t, x < 0$, $x \to -\infty$

4. Dacă $\hat{\mu}$ este finită intr-o vecinătate a lui 0, atunci funcţia λ işi atinge minimul in punctul $m = \int_{\mathbf{R}} x d\mu(x)$, iar $\lambda''(m) = 1/\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia lui μ.

Exemple.

Dacă $\mu = p\delta_u + (1-p)\delta_v$ cu $u < v$ şi $0 < p < 1$, avem

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-u}{v-u}\log\frac{x-u}{1-p} + \frac{v-x}{v-u}\log\frac{v-x}{p} - \log(v-u)\,, \text{dacă } u < x < v \\ +\infty, \text{ dacă } x < u \text{ sau } x > v \\ -\log p \text{ pentru } x = u \\ -\log(1-p) \text{ pentru } x = v. \end{cases}$$

Dacă μ este repartiţia exponenţială e_1, atunci

$$\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 - \log x, \text{ dacă } x > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Dacă μ este repartiţia normală (gausiana) $N(m, \sigma^2)$, atunci $\lambda(x) = \frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

TEOREMA 1.1. *Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ şir de variabile aleatoare reale independente şi identic repartizate, cu aceeaşi repartiţie μ. Fie $\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ şi λ transformarea Cramer a lui μ. Atunci, pentru orice $a \in \mathbf{R}$, avem*

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) \tag{1.4}$$

$$-\lambda(a) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq a\right).$$

Dacă $\int |x|\, d\mu(x) < \infty$, atunci au loc şi inegalităţile următoare, valabile pentru orice $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \leq \int x dF(x) \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq a\right) \leq -\lambda(a), \text{ pentru } a \geq \int x dF(x).$$

Demonstraţie. Legile variabilelor aleatoare $Y_n := X_n - a$ şi $Z_n := -X_n$ au ca transformate Cramer funcţiile $x \to \lambda(x+a)$ resp. $x \to \lambda(-x)$. Este suficient deci de tratat cazul $\{a = 0\}$ şi de demonstrat numai inegalităţile privind $P\left(\overline{X}_n \geq 0\right)$.

Să arătăm formulele (1.5). Presupunem că $\int x d\mu(x) \leq 0$; definiţia lui λ devine

$$\lambda(0) = \sup_{t\in\mathbf{R}}[-\log\hat{\mu}(t)] = \sup_{t\geq 0}[-\log\hat{\mu}(t)].$$

Pentru $t \geq 0$, putem scrie

$$P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) = P\left[e^{t(X_1+\ldots+X_n)} \geq 1\right]$$
$$\leq E\left[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right] = [\hat{\mu}(t)]^n \ ;$$

deci

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \leq \inf_{t\geq 0}[\log\hat{\mu}(t)] = -\lambda(0),$$

adică (1.5).

Demonstraţia formulelor (1.4) foloseşte următoarea lemă tehnică (cazul in care μ este "cu suport finit").

LEMA 1.2. *Fie x_i, p_i $(1 \leq i \leq k)$ numere reale astfel ca $p_i > 0$ şi $\min_i x_i < 0 < \max_i x_i$. Notăm*

$$b = \inf_{t\in\mathbf{R}}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{tx_i}\right) \text{ şi } f(n_1,\ldots,n_k) = n!\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Atunci există o constantă $c > 0$ şi un număr natural N astfel ca orice $n \geq N$ se poate scrie ca $n = n_1 + \ldots + n_k$, unde numerele naturale n_i verifică

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \geq 0 \text{ şi } f(n_1,\ldots,n_k) \geq cn^{-k/2}b^n.$$

Demonstraţia lemei 1.2. Conform formulei lui Stirling, pentru $z_i \in [1,\infty)$, obţinem

$$f(z_1,\ldots,z_k) \geq n^{-k/2}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{np_i}{z_i}\right)^{z_i} =: g(z_1,\ldots,z_k)$$

Să fixăm $s \in \mathbf{R}$ astfel ca $b = \sum_{1\leq i\leq k} p_i e^{sx_i}$. Atunci numerele reale $u_i = np_i e^{sx_i}/b$ verifică

$$\sum_{i=1}^{k} u_i = n, \ \sum_{i=1}^{k} u_i x_i = 0,$$

$$g(u_1, \ldots, u_k) = n^{-k/2} b^n.$$

Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $x_i \leq x_k$ pentru orice i. Punem $N_i = [u_i]$ şi $N_k = n - \sum_{i<k} u_i$. Pentru $A > 0$ fixat şi B variind intr-un interval mărginit fixat, există o constantă c_1 cu proprietatea

$$\left(\frac{v}{Av + B}\right)^{Av+B} \geq c_1 \left(\frac{v}{Av}\right)^{Av}$$

pentru orice $v \geq 1$ şi $Av + B \geq 1$. De aici rezultă existenţa unei constante c_2 astfel ca $(np_i/N_i)^{N_i} \geq c_2 (np_i/u_i)^{u_i}$ pentru orice i şi orice n suficient de mare. Deci, pentru n suficient de mare, cu $c_3 = c_2^k$,avem

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} N_i x_i \geq 0,$$

$$g(N_1, \ldots, N_k) \geq c_3 n^{-k/2} b^n,$$

şi lema este demonstrată.

Demonstraţia formulelor (1.4). Putem presupune că $\mu((0,\infty))$ şi $\mu((-\infty,0))$ sunt $\neq 0$. Fie $\mu = \sum_{i \geq 1} p_i \delta_{x_i}$ (suma cel mult numărabilă) şi $p_i > 0$ pentru orice i. Pentru k suficient de mare, vom avea

$$\min_{1 \leq i \leq k} x_i < 0 < \max_{1 \leq i \leq k} x_i \ .$$

Sirul monoton de funcţii $f_k(t) = \sum_{1 \leq i \leq k} p_i e^{tx_i}$ converge către $\hat{\mu}(t)$ când $k \to \infty$, deci converge uniform converge către $\hat{\mu}(t)$ pe orice compact inclus in $\{t \mid \hat{\mu}(t) < \infty\}$. Cum $f_k(t)$ tinde către $+\infty$ odată cu $\mid t \mid$, avem

$$\lim_{k \to \infty} \left[\inf_t f_k(t)\right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}.$$

Punem $b_k = \inf_t f_k(t)$ şi fixăm k. Cu notaţiile din lema 1.2. obţinem, pentru orice n

$$P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq f(n_1, \ldots, n_k) \geq c_k n^{-k/2} b_k^n$$

şi deci

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq \log b_k \ .$$

Facem $k \to \infty$ şi obţinem formulele (1.4).

Să trecem la cazul general. Punem $Y_n^{(s)} = \frac{i}{s}$ pentru $\frac{i-1}{s} \leq X_n \leq \frac{i}{s}$. Fie μ_s legea comună a $Y_n^{(s)}$ -urilor şi λ_s transformarea Cramer a lui μ_s . Construcţia lui μ_s implică

$$\hat{\mu}_s(t) \geq e^{-|t|/s}\hat{\mu}(t) \text{ pentru orice } t, s > 0.$$

Cum $(0, +\infty)$ şi $(-\infty, 0)$ nu sunt μ-neglijabile, avem că $\hat{\mu}(t) \geq Ae^{B|t|}$, cu A, B constante strict pozitive. Putem scrie

$$e^{-\lambda_s(1/s)} = \inf_t \left[e^{-t/s}\hat{\mu}_s(t)\right] \geq \inf_t \left[e^{-2|t|/s}\hat{\mu}(t)\right].$$

Sirul de funcţii $g_s(t) = e^{-2|t|/s}\hat{\mu}(t)$ converge crescător către $\hat{\mu}(t)$ când $s \to \infty$ şi către $+\infty$ când $| t | \to \infty$, pentru $s > 2/B$. Ca mai sus, aceasta implică

$$\lim_{s\to\infty} \left[\inf_t g_s(t)\right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}$$

şi deci $\lim_{s\to\infty} [-\lambda_s(1/s)] \geq -\lambda(0)$.

Din cazul discret, pentru s fixat, obţinem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{Y}_n^{(s)} \geq 1/s\right) \geq -\lambda_s(1/s)$$

şi ţinând cont de incluziunea $\left\{\overline{Y}_n^{(s)} \geq 1/s\right\} \subseteq \left\{\overline{X}_n \geq 0\right\}$ obţinem că

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq -\lambda_s(1/s);$$

facem $s \to \infty$ şi obţinem formula (1.4).□

Observaţii.

1. Restricţiile asupra semnului expresiei $[a - \int x d\mu(x)]$ din formulele (1.5) nu sunt puse decât pentru a formula simplu singurul rezultat netrivial. Intr-adevăr, dacă $\int x d\mu(x) < a$, avem de exemplu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) = 0.$$

2. Teorema 1.1. sugerează că probabilitatea de a găsi $\overline{X}_n$ in vecinătatea lui x "are ordinul" $e^{-n\lambda(x)}$; in această formă, rezultatul este fals, dar acest enunţ exprimă conţinutul intuitiv al teoremei 1.1., după cum vom preciza mai departe. Să reţinem pentru moment că valorile mari ale lui λ corespund punctelor in care apariţiile lui $\overline{X}_n$ sunt puţin probabile.

PROPOZITIA 1.3. *Fie $[u,v] \subset [-\infty,+\infty]$ anvelopa convexă inchisă a suportului repartiţiei μ cu $\int \mid x \mid d\mu(x) < +\infty$. Atunci $\lambda(x) = +\infty$ pentru $x \notin [u,v]$ in timp ce $\lambda(x)$ este finită şi continuă pentru $x \in (u,v)$. In plus, λ este continuă la stânga in v (dacă v este finit) şi continuă la dreapta in u (dacă u este finit). Pentru v finit, relaţia $\lambda(v) = +\infty$ este echivalentă cu $\mu(\{v\}) = 0$ (rezultat analog pentru u finit). In particular avem*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x) < \infty \text{ pentru orice } s < 1 \tag{1.6}$$

şi

$$\hat{\mu}(t) < \infty \text{ pentru orice } t > 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty \tag{1.7}$$

(rezultat analog pentru $t < 0$, $x \to -\infty$).

Demonstraţie. Deoarece $\overline{X}_n \in [u,v]$ aproape sigur, formulele (1.4) aplicate cu $a < u$ şi $a > v$ arată că $\lambda(a) = +\infty$ pentru $a \notin [u,v]$. Reciproc, fie $m = \int x d\mu(x)$; dacă $a \geq m$ şi $\lambda(a) = +\infty$, formulele (1.5) arată că $P\left(\overline{X}_n \geq a\right) = 0$ şi deci $\mu(\{a\}) = 0$, ceea ce implică $a \geq v$. Argument analog pentru $a \leq m$. Deci λ este finită pe (u,v); in plus am văzut că $\lambda(v) = +\infty$ implică $\mu(\{v\}) = 0$, iar formulele (1.4) demonstrează reciproca. Toate proprietăţile de continuitate ale lui λ sunt consecinţe simple ale faptului că λ este convexă şi inferior semi-continuă.

Formula (1.6) este evidentă dacă $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t > 0$ sau dacă v este finit. In cazul contrar, intrucât λ este convexă şi continuă pe $(u,+\infty)$, derivata ei λ' există pe $(u,+\infty)$ (mai puţin, eventual, pe o mulţime numărabilă). O integrare prin părţi impreună cu condiţia $\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = +\infty$ arată că

$\int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită dacă integrala

$$I := \int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} \lambda'(x) \mu([x, +\infty))\, dx$$

este finită. Din formulele (1.5) aplicate pentru $n = 1$, obţinem că $\mu([x, +\infty)) \leq e^{-\lambda(x)}$ pentru $x \geq m$, deci

$$I \leq \int_m^{+\infty} e^{(s-1)\lambda(x)} \lambda'(x) dx < +\infty \text{ pentru } s < 1.$$

Raţionăm analog pentru $\int_{-\infty}^{m}$ şi formula (1.6) este demonstrată.

Să demonstrăm formula (1.7). Dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t > 0$, din definiţia transformării Cramer rezultă, pentru $t, x > 0$, că $\frac{\lambda(x)}{x} \geq t - \frac{1}{x} \log \hat{\mu}(t)$ şi deci $\liminf_{x \to +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} \geq t$. Cum t este arbitrar, obţinem că $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$.

Reciproc, pentru orice $t > 0$ fixat, are loc majorarea $tx \leq \frac{1}{2}\lambda(x)$ pentru x suficient de mare. Din formula (1.6), obţinem

$$\int_A^{+\infty} e^{tx} d\mu(x) \leq \int_A^{+\infty} e^{1/2\lambda(x)} d\mu(x) < +\infty,$$

deci $\hat{\mu}(t)$ este finită.□

Remarcă. In formula (1.6), condiţia $s < 1$ nu poate fi imbunătaţită (in general). De exemplu, dacă μ este gausiană sau exponenţială, atunci $\int_R e^{\lambda(x)} d\mu(x) = +\infty$. Acest fapt rămâne adevărat pentru orice probabilitate μ pe R cu suport necompact astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită cel puţin intr-un $t \neq 0$. In acest caz, λ ar putea fi caracterizată ca funcţia convexă "cea mai mare la ∞" astfel ca $\int_{\mathbf{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită pentru $s < 1$ şi infinită pentru $s = 1$.

2

REZULTATE GENERALE

Fie $\mathbf{E}$ spaţiu Banach real şi separabil inzestrat cu borelienele $\mathcal{B}(\mathbf{E})$, iar μ o probabilitate pe $\mathbf{E}$. Fie (Ω, P) câmp de probabilitate complet şi $X_n : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente şi identic repartizate, cu legea μ. Punem $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, notăm

$$\underline{l}(A) = \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right),$$

$$\overline{l}(A) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

şi observăm că $-\infty \leq \underline{l}(A) \leq \overline{l}(A) \leq 0$.

Dacă $\underline{l}(A) = \overline{l}(A)$, notăm

$$l(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right).$$

PROPOZITIA 2.1. *Limita $l(A)$ există pentru orice parte $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ convexă. Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, avem*

$$\max\left[\underline{l}(A), \underline{l}(B)\right] \leq \underline{l}(A \cup B) \leq \overline{l}(A \cup B) \leq \max\left[\overline{l}(A), \overline{l}(B)\right].$$

In particular, dacă $l(A_i)$ există pentru $i = 1, \ldots, n$, atunci există $l(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ şi este egală cu $\max[l(A_1), \ldots, l(A_n)]$.

Demonstraţie. Punem

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \text{ şi } Y = \frac{1}{m}(X_{n+1} + \ldots + X_{n+m});$$

atunci $\overline{X}_{n+m} = \frac{n}{n+m}X + \frac{n}{n+m}Y$, iar convexitatea lui A implică $(X \in A) \cap (Y \in A) \subset \left(\overline{X}_{n+m} \in A\right)$. Deducem că $\mu_n(A)\mu_m(A) \leq$

$\mu_{n+m}(A)$, unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$, deci funcţia $f : \mathbf{N} \to [0,\infty]$, $f(n) = -\log \mu_n(A)$ este subaditivă, şi deci există $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n}$.

Apoi folosim faptul că $\underline{l}$ şi $\overline{l}$ sunt funcţii crescătoare şi că, pentru $c > \max\left[\overline{l}(A), \overline{l}(B)\right]$ şi n mare, $\mu_n(A)$ şi $\mu_n(B)$ sunt majorate de e^{nc}, deci $\mu_n(A \cup B) \leq 2e^{nc}$, adică $\overline{l}(A \cup B) \leq c$.□

DEFINITIE. Vom numi *transformarea Cramer* a măsurii μ aplicaţia $\lambda : \mathbf{E} \to [0, +\infty]$, dată de

$$\lambda(x) = -\inf\left\{l(A),\ A \text{ deschisă şi convexă, cu } x \in A\right\}. \qquad (2.1)$$

Exerciţiu. Cu notaţiile de mai sus, arătaţi că

$$\lambda(x) = -\lim_{\delta\to 0} l\left(B(x,\delta)\right),$$

unde $B(x,\delta)$ este bila din $\mathbf{E}$ de centru x şi rază δ.

A priori, această definiţie nu coincide cu definiţia din capitolul 1 in cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Vom vedea că acest lucru se intâmplă in cazul in care momentele de ordinul 1 ale tuturor proiecţiilor (continue) 1-dimensionale ale lui μ sunt finite.

LEMA 2.2. *Transformata Cramer λ a lui μ este funcţie convexă şi inferior semi-continuă.*

Demonstraţie. Intr-adevăr, pentru $x \in \mathbf{E}$ şi $c < \lambda(x)$ date, există o vecinătate deschisă şi convexă A a lui x astfel ca $c < -l(A)$. Pentru orice $y \in A$, vom avea

$$\lambda(y) = \sup\left\{-l(B),\ B \text{ vecinătate deschisă şi convexă a lui } y\right\},$$

deci $\lambda(y) \geq -l(A) > c$. Funcţia λ este inferior semicontinuă deoarece verifică relaţia $\lambda(x) \leq \liminf_{y\to x} \lambda(y)$.

Convexitatea se verifică pe dreptele spaţiului, deci este suficient de arătat că $\lambda(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{E}$. Pentru orice deschis convex care conţine $\frac{x+y}{2}$, există deschisi convexi B, C care conţin x respectiv y şi astfel ca $\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) \subset A$. Să punem $X = \frac{1}{n}\left(X_1 + \ldots + X_n\right)$ şi $Y = \frac{1}{n}\left(X_{n+1} + \ldots + X_{2n}\right)$;

incluziunea $(X \in B) \cup (Y \in C) \subset \left(\overline{X}_{2n} \in A\right)$ implică $\mu_n(B)$ $\mu_n(C) \leq \mu_{2n}(A)$, unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$. Trecem la limită după n şi obţinem

$$\frac{1}{2}l(B) + \frac{1}{2}l(C) \leq l(A),$$

deci $-\frac{1}{2}\lambda(x) - \frac{1}{2}\lambda(y) \leq l(A)$ iar apoi luăm inf după A in membrul drept.□

DEFINITIE. Fie (E, μ) ca mai inainte şi λ transformarea Cramer a lui μ. Numim *funcţionala Cramer* a lui μ aplicaţia $\Lambda : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \to [0, +\infty]$ definită prin

$$\Lambda(A) = \inf_{x \in A} \lambda(x), \; A \subset \mathbf{E}. \tag{2.2}$$

Să observăm că a cunoaşte λ este echivalent cu a cunoaşte Λ.

TEOREMA 2.3. *Fie $X_n : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente şi cu aceeaşi lege μ, iar Λ funcţionala Cramer asociată lui μ. Atunci*

(a) Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$-\Lambda\left(\mathring{A}\right) \leq \underline{l}(A). \tag{2.3}$$

(b) Dacă $\overline{A}$ este compact, atunci

$$\overline{l}(A) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right). \tag{2.4}$$

(c) Pentru orice reuniune finită A de deschise convexe ale lui $\mathbf{E}$, *avem*

$$l(A) = -\Lambda(A). \tag{2.5}$$

Demonstraţie. Dacă $x \in \mathring{A}$, există o vecinatate deschisă şi convexă C a lui x astfel ca $C \subset \mathring{A}$ şi avem $\underline{l}(A) \geq \underline{l}(C) = l(C) \geq -\lambda(x)$. Luăm sup după $x \in \mathring{A}$ şi obţinem formula (2.3.).

Intrucât $\bar{l}$ este monotonă, avem $\bar{l}(A) \leq \bar{l}(\bar{A})$, deci putem presupune A compact pentru a demonstra (2.4.). Fie $a > -\Lambda(A)$; pentru orice $x \in A$ avem $a > -\lambda(x)$ şi deci există un deschis convex $C_x \ni x$ astfel ca $a > l(C_x)$. Fie $C_{x_i}, i = 1, \ldots, k$ o acoperire finită a lui A. Din propoziţia 2.1. ştim că

$$\bar{l}(A) \leq \max_{i=1,\ldots,k} l(C_{x_i}) < a$$

şi cum a este arbitrar, obţinem (2.4.).

Din definiţia lui Λ, avem intotdeauna $\Lambda(A \cup B) = \inf[\Lambda(A), \Lambda(B)]$. Conform propoziţiei 2.1. putem presupune A deschisă şi convexă pentru a demonstra formula (2.5.). Din (2.3.) rezultă că $-\Lambda(A) \leq l(A)$, deci este suficient de demonstrat inegalitatea inversă când $l(A)$ este finită.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, putem găsi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$\frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geq l(A) - \epsilon \text{ pentru } n \geq N.$$

Intrucât A este deschis şi convex, există un compact convex K inclus in A astfel ca $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$, deci

$$\frac{1}{N} \log \mu_N(A) - \frac{1}{N} \log \mu_N(K) \leq \epsilon.$$

Aceasta inseamnă că funcţia $f(n) = -\log \mu_n(K)$ verifică $f(N) \leq -[l(A) - 2\epsilon]N$ şi, intrucât K este convex, rezultă că f este subaditivă (vezi propozitia 2.1.). In particular avem $f(pN) \leq -[l(A) - 2\epsilon]Np$ pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$ şi deci

$$-l(K) = \lim_{p\to\infty} \frac{f(pN)}{pN} \leq -l(A) + 2\epsilon.$$

Formula (2.4.) arată inegalitatea $\Lambda(K) \leq -l(K)$. Ultimele două inegalităţi, impreună cu $\Lambda(A) \leq \Lambda(K)$ implică $\Lambda(A) \leq -l(A) + 2\epsilon$ şi cum ϵ este arbitrar, obţinem $\Lambda(A) \leq -l(A)$.□

PROPOZITIA 2.4. *Transformarea Cramer asociată lui μ se poate calcula cu formula*

$$\lambda(x) = \sup\{-l(H),\ H \text{ semi-spaţiu deschis, cu } x \in H\}.$$

Demonstratie. Fie $a < \lambda(x)$. Mulţimea convexă şi inchisă $C = \{y;\ \lambda(y) \le a\}$ nu-l conţine pe x. Există deci un semi-spaţiu deschis H al lui $\mathbf{E}$ astfel ca $H \cap C = \emptyset$ şi $x \in H$. In particular $\Lambda(H) \ge a$. Din relaţia $-l(H) = \Lambda(H)$ obţinem că $-l(H) \ge a$, deci $r = \sup\{-l(H), H$ semi-spaţiu deschis, cu $x \in H\}$ este $\ge a$ pentru $a < \lambda(x)$ i.e. $r \ge \lambda(x)$. Inegalitatea opusă rezultă direct din definiţia lui $\lambda(x)$.□

Observaţie. Propoziţia 2.4. reduce calculul lui λ la calculul lui $l(H)$ cu H semi-spaţiu deschis, iar aceasta este o problemă 1-dimensională, apropiată de cea rezolvată in capitolul 1. Acest fapt ne va permite să calculăm λ in orice dimensiune, pornind de la $\hat{\mu}$ (transformata Laplace a lui μ) iar funcţionala Λ devine in principiu calculabilă.

Fie μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Notăm $\hat{\mu}(t) := \int_{\mathbf{E}} e^{<t,x>} d\mu(x)$, $t \in \mathbf{E}'$ (dualul lui $\mathbf{E}$), *transformarea Laplace* a lui μ. Funcţia $\log \hat{\mu}(t)$ este definită pe $\mathbf{E}'$, cu valori in $[0, +\infty]$, este convexă şi inferior semi-continuă ($\mathbf{E}'$ este inzestrat cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$). Are loc următorul rezultat.

PROPOZITIA 2.5. *Cu notaţiile precedente, dacă*

$$\int_{\mathbf{E}} |< t, x >|\, d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

atunci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} [< t, x > - \log \hat{\mu}(t)],\ x \in \mathbf{E}.$$

Demonstraţie. Să considerăm μ centrată şi $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (cazul in care μ nu este centrată se reduce prin translaţie la calculele ce urmează). Avem de arătat că

$$f(x) := \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$$

coincide cu

$$g(x) := -\lim_{\epsilon \searrow 0} l((x - 2\epsilon,\ x + 2\epsilon)),\ x \in \mathbf{R}.$$

Cum μ este centrată, formulele (1.5.) implică pentru $x \geq 0$

$$l((x-2\epsilon,\ x+2\epsilon)) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq x-2\epsilon\right)$$
$$\leq -f(x-2\epsilon),$$

deci

$$g(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} f(x-2\epsilon) \text{ pentru } x \geq 0. \qquad (2.6)$$

Formulele (1.4.) implică pentru $x \geq 0$

$$-f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq x\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n > x\right)$$

şi, conform formulei 2.5., obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n > x\right) = -\Lambda((x,+\infty)) = -\inf_{y>x} g(y),$$

deci

$$f(x) \geq \inf_{y>x} g(y) \text{ pentru } x \geq 0.$$

Legea numerelor mari arată că $g(0)=0$ şi cum g este convexă, inferior semicontinuă şi pozitivă, avem $\inf_{y>x} g(y) = \lim_{\epsilon\searrow 0} g(x+\epsilon)$ pentru $x \geq 0$, deci

$$f(x) \geq \lim_{\epsilon \searrow 0} g(x+\epsilon) \qquad (2.7)$$

Pot avea loc urmatoarele situaţii. Există $a, b \in [0,+\infty]$ astfel ca f, g să fie respectiv
1) continue finite pe $[0,a)$, $[0,b)$
2) $\equiv +\infty$ pe $(a,+\infty)$, $(b,+\infty)$
3) continue la stânga in a pentru a finit (in b pentru b finit).

Cu inegalităţile (2.6.), (2.7.), arătăm succesiv că $a=b$, apoi că f şi g coincid pe $[0,+\infty)\setminus\{a\}$, deci coincid pe $[0,+\infty)$. Similar tratăm problema compararii lui f şi g pe $(-\infty,0]$.

In cazul general, fie $x \in \mathbf{E}$. Orice semi-spaţiu deschis care-l conţine pe x se scrie

$$H_{t,r}^{+} = \{y \in \mathbf{E}\ ;\ \langle t,y\rangle - r > 0\}, \text{ cu}$$
$$\langle t,x\rangle - r > 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}',\ r \in \mathbf{R}$$

sau

$$H_{t,r}^{-} = \{y \in \mathbf{E} \; ; \; \langle t, y\rangle - r < 0\}, \text{ cu}$$
$$\langle t, x\rangle - r < 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}', \; r \in \mathbf{R}.$$

Fie $t : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ forma liniară asociată lui $t \in \mathbf{E}'$ şi să notăm $Y_n = t(X_n)$, $L_r^+ = t\left(H_{t,r}^+\right) = (r, +\infty)$ şi $L_r^- = t\left(H_{t,r}^-\right) = (-\infty, r)$, $u = t(x)$, $\mu_t = t(\mu)$, $l_t(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{Y}_n \in A\right)$ $= l\left[t^{-1}(A)\right]$, unde A este deschis şi convex in $\mathbf{R}$. Conform propoziţiei 2.4., notând transformarea Cramer a lui μ_t prin λ_t, obţinem

$$\lambda_t(u) = \max\left\{\left[\sup_{r<u} \; -l_t\left(L_r^+\right)\right], \; \left[\sup_{r>u} \; -l_t\left(L_r^-\right)\right]\right\}$$

de unde, ţinând cont că $l_t\left(L_r^{\pm}\right) = l \mid t^{-1}\left(L_r^{\pm}\right) \mid = l\left(H_{t,r}^{\pm}\right)$, obţinem

$$\lambda_t(u) = \max\left\{\left[\sup_{r<t(x)} \; -l\left(H_{t,r}^+\right)\right], \; \left[\sup_{r>t(x)} \; -l\left(H_{t,r}^-\right)\right]\right\}.$$

Luăm sup in membrul drept din ultima inegalitate după $t \in \mathbf{E}'$ şi obţinem $\sup\left\{-l(H), \; H \text{ semi-spaţiu deschis, cu } x \in H\right\}$, care este egal (cf. propoziţiei 2.4.) cu $\lambda(x)$. Obţinem deci

$$\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \; \lambda_t\left(< t, x >\right) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \; \lambda_{t(\mu)}\left[t(x)\right].$$

Din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (studiat anterior) avem

$$\lambda_t\left[t(x)\right] = \varphi_t\left[t(x)\right] = \sup_{s\in\mathbf{R}}\left[s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}_t(s)\right].$$

Cum însă $\hat{\mu}_t(s) = \hat{\mu}(st)$ pentru $s \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{E}'$, obţinem $\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \sup_{s\in\mathbf{R}} \left[s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}(st)\right]$, ceea ce arată că $\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'}\left[< t, x > - \log \hat{\mu}(t)\right]$.$\square$

Exemple.

1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ este gausiană de medie M şi matrice de covariaţie Σ (presupusă inversabilă) . Atunci

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}(x - M)^* \Sigma^{-1} (x - M).$$

2. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, $d\mu(x) = f(x)dx$ cu $f(x) \sim \frac{c}{|x|^r}$ când $|x| \to +\infty$. Atunci $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t \neq 0$, deci $\lambda \equiv 0$ (cf. propoziţiei 2.5.).

Observaţii.

1. Din teorema 2.3. rezultă că λ este identic nulă $\Leftrightarrow$ pentru orice parte boreliană A a lui $\mathbf{E}$, de interior nevid, are loc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0,$$

deci situaţia $\lambda \equiv 0$ necesită o descriere mai fină a comportamentului asimptotic al $P\left(\overline{X}_n \in A\right)$, care poate converge către 0 (atunci când $\int_{\mathbf{E}} x d\mu(x) \notin \overline{A}$) e.g. cu viteză polinomială in $\frac{1}{n}$.

2. Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ probabilitate pe $\mathbf{E}$ astfel ca $\int_{\mathbf{E}} |x| \, d\mu(x) < +\infty$ şi μ nu incarcă nici un subspaţiu afin (propriu) al lui $\mathbf{R}^d$. Dacă λ este transformata Cramer a lui μ, atunci corespondenţa dintre λ şi μ este biunivocă ; in teoria funcţiilor convexe (in dualitate), se arată că mulţimea $D(\lambda) := \left\{x \in \mathbf{R}^d \;;\; \lambda(x) \text{ finită}\right\}$ are interiorul nevid şi că λ este diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\lambda)$. In plus, dacă $y \in \partial \overset{\circ}{D}(\lambda)$, atunci $\lim_{x\to y,\, x\in \overset{\circ}{D}(\lambda)} \| \lambda'(x) \| = +\infty$. Similar, funcţia $\log \hat{\mu}$ este diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\log \hat{\mu})$. Totodată, dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t \in \mathbf{R}^d$, atunci putem scrie $\lambda(x) = \langle z, x\rangle - \log \hat{\mu}(z)$, pentru orice $x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)$, unde z este soluţia (unică) a ecuaţiei $\frac{\hat{\mu}'}{\hat{\mu}}(z) = x$.

Evaluarea lui $l(A)$ se bazează pe teorema 2.3. Restricţia "$\overline{A}$ compact" pentru validitatea formulei $\overline{l}(A) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right)$ este prea puternică in majoritatea aplicaţiilor. In vedea in continuare situaţii cand această condiţie devine inutilă.

LEMA 2.6. *Fie μ probabilitate pe spatiul Banach real şi separabil $\mathbf{E}$, X_n $(n \geq 1)$ şir de variabile aleatoare independente de lege μ, cu valori in $\mathbf{E}$. Dacă, pentru orice $a > 0$ există un* *compact* $K_a \subset \mathbf{E}$ *astfel ca* $P\left(\overline{X}_n \notin K_a\right) \leq e^{-na}$ *pentru orice* $n \geq N(a)$, *atunci, pentru orice* $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ *avem*

$$\bar{l}(B) \leq -\Lambda\left(\bar{B}\right).$$

In plus, daca λ *este transformarea Cramer a lui* μ, *atunci mulţimile* $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ *sunt convexe şi compacte, pentru orice* $b > 0$.

Demonstraţie. Este clar că $\bar{l}(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. Avem

$$\bar{l}(B) \leq \max\left\{\bar{l}\left(B \cap K_a\right), \bar{l}\left(B \cap (\mathbf{E} \setminus K_a)\right)\right\}$$

$$\leq \max\left\{\bar{l}\left(\overline{B} \cap K_a\right),\ -a\right\}.$$

Cum $\overline{B} \cap K_a$ este compact, teorema 2.3. implică

$$\bar{l}\left(\overline{B} \cap K_a\right) \leq -\Lambda\left(\overline{B} \cap K_a\right) \leq -\Lambda\left(\overline{B}\right),$$

deci $\bar{l}(B) \leq \max\left\{-\Lambda\left(\overline{B}\right),\ -a\right\}$ pentru orice $a > 0$, deci $\bar{l}(B) \leq -\Lambda\left(\bar{B}\right)$.

Fie $b > 0$ şi $a > b$ fixat. Mulţimea $\mathbf{E} \setminus K_a$ este deschisă, deci teorema 2.3. implică

$$-\Lambda\left(\mathbf{E} \setminus K_a\right) \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in (\mathbf{E} \setminus K_a)\right),$$

deci, din definiţia lui K_a rezultă $-\Lambda\left(\mathbf{E} \setminus K_a\right) \leq -a$. In particular avem $\lambda(x) \geq a$ pentru $x \notin K_a$, deci $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\} \subset K_a$ şi apoi folosim faptul că λ este inferior semicontinuă. Observaţi că $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ este şi convexă (deoarece λ este convexă).□

Observaţie. Demonstraţia lemei 2.6. funcţionează in ipoteza $\mathbf{E}$ =spaţiu vectorial topologic.

PROPOZITIA 2.7. *Fie* $\mathbf{E}$ *dualul unui spatiu Banach* $\mathbf{F}$ *şi* μ *probabilitate pe* $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ *astfel ca*

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru } s \text{ intr-o vecinătate a lui } 0.$$

Atunci, dacă Λ *este transformata Cramer a lui* μ, *pentru orice* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ *avem*

$$-\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \tag{2.8}$$

$$\leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right),$$

unde $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$ *sunt in raport cu topologia slabă* $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ *pe* $\mathbf{E}$. *In plus, mulţimile* $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ *sunt compacte (slabe) pentru orice* $b > 0$.

Observaţii. Dacă $\mathbf{E} = \mathbf{F}'$, atunci $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ este acelaşi pentru orice topologie intre topologia normei şi cea slabă. In particular, transformarea Cramer λ şi funcţionala Cramer Λ sunt aceleaşi pentru topologiile normei şi slabă. Să reamintim că dualul lui $\mathbf{E}$ cu topologia slabă este $\mathbf{F}$.

Demonstraţia propoziţiei 2.7. Formulele (2.8.) vor rezulta din teorema 2.3. după construcţia compacţilor K_a din lema 2.6. Fie B_a bila inchisă de rază a din $\mathbf{E}$, care este slab compactă. Din formulele (1.5.) obţinem

$$P\left(\overline{X}_n \in B_a\right) = P(\| X_n \| > a)$$

$$\leq P\left\{\frac{1}{n}(\| X_n \| + \ldots + \| X_n \|) > a\right\} \leq e^{-n\alpha(a)},$$

unde α este transformarea Cramer a lui ν =legea lui $\| X_n \|$.

Prin ipoteza $\hat{\nu}$ este finită intr-o vecinătate a lui 0, deci $\lim_{a \to +\infty} \alpha(a) = +\infty$. Rămâne să aplicăm lema 2.6.□

COROLAR 2.8. *Fie* $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ *şi* μ *probabilitate pe* $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ *astfel ca* $\hat{\mu}(t)$ *să fie finită pentru orice* t *intr-o vecinătate a lui* 0. *Atunci, pentru orice* $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ *avem*

$$-\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right).$$

In plus, $\lambda(x) \to +\infty$ *când* $x \to \infty$ *in* $\mathbf{R}^d$.

Observaţie. In ipotezele corolarului 2.8., se observă că relaţia $\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = \Lambda\left(\overline{A}\right)$ (care implică $\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = \Lambda\left(\overline{A}\right) = \Lambda(A)$) este suficientă pentru existenţa lui $l(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$ precum şi a relaţiei $l(A) = -\Lambda(A)$. Reciproca este falsă : fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ si $A = (0, +\infty)$. Atunci avem $l(A) = -\Lambda(A)$ deoarece A este deschis convex, in timp ce $\Lambda(A) = \Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = +\infty$ iar $\Lambda\left(\overline{A}\right) = \lambda(1) = \log 2$.

Exerciţii.

1. Este adevarat că $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$ există pentru orice A deschisă in cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$?

2. In cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ se pot arăta următoarele inegalităţi (cf. P. Bartfai, On the multivariate Chernoff theorem, Preprint Math. Inst. of the Hungarian Acad. of Sciences, 1977). Pentru $A \subset \mathbf{R}^d$ deschisă avem

$$e^{-\Lambda(A)} \leq \liminf_{n\to+\infty} \left[P\left(\overline{X}_n \in A\right)\right]^{1/n}$$

şi pentru $A \subset \mathbf{R}^d$ deschisă şi convexă avem

$$P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq \left[e^{-\Lambda(A)}\right]^n$$

In general, rezultatul

$$\left[P\left(\overline{X}_n \in A\right)\right]^{1/n} \to e^{-\Lambda(A)}$$

pentru orice $A \subset \mathbf{R}^d$ boreliană este fals. Bartfai a dat un exemplu de mulţime A inchisă cu interior nevid, astfel ca $\Lambda\ (A) < +\infty$ şi

$$P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0, \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots \square$$

Interiorul unei mulţimi $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ este mai mare in topologia tare decât in cea slabă, in timp ce aderenţa ei este mai mică. Deci, valorile $-\Lambda\ \left(\overset{\circ}{B}\right)$ si $-\Lambda\ \left(\overline{B}\right)$ se imbunatăţesc când trecem de la topologia slabă la cea a normei. Propoziţia 2.7. nu permite utilizarea acestor valori decât pentru topologia slabă, cel puţin in ce-l priveşte pe $-\Lambda\ \left(\overline{B}\right)$. In continuare vom intări ipotezele, pentru a putea utiliza topologia tare.

Fie Γ spaţiu topologic polonez ; in acest curs vom considera $\Gamma = \mathbf{R}^d$ $(d \geq 1)$ sau $\Gamma = \mathbf{E}$ (spaţiu Banach separabil). Fie $\mathcal{M}(\Gamma)$ spaţiul măsurilor mărginite pe $\mathcal{B}(\Gamma)$ şi $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ submulţimea convexă şi inchisă a probabilităţilor pe $\mathcal{B}(\Gamma)$. Spaţiul $\mathcal{M}(\Gamma)$ il considerăm inzestrat cu topologia convergenţei slabe : $\mu_n \Rightarrow \mu$ dacă $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ pentru orice $f \in C_b(\Gamma)$. O parte $C \subset \mathcal{M}(\Gamma)$ este relativ compactă dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, există K_ϵ compact in Γ astfel ca $\mu^{\pm}(\Gamma \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$, pentru orice $\mu = \mu^+ - \mu^- \in C$.

Fie $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ cu $\int_{\mathbf{E}} \| x \| \, d\mu(x) < +\infty$. Atunci există şi este unic un element notat $b(\mu) \in \mathbf{E}$ astfel ca

$$\langle t, b(\mu)\rangle = \int_{\mathbf{E}} \langle t, x\rangle d\mu(x) \text{ pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

numit *baricentrul* lui μ. Au loc urmatoarele proprietăţi :

1. Dacă $\mu(C) = 1$ atunci $b(\mu) \in C$, unde C este convex inchis din $\mathbf{E}$.

2. Fie $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ convergent către $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$. Dacă B este o bilă inchisă din $\mathbf{E}$ astfel ca $\mu_n(B) = 1$ pentru orice n, atunci $b(\mu_n) \to b(\mu)$ când $n \to +\infty$.

LEMA 2.9. *Fie $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funcţie continuă cu $\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. Atunci mulţimea*

$$\mathcal{F}(f,a) := \left\{\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})\ ;\ \int_{\mathbf{E}} f(\| x \|)\, d\mu(x) \le a\right\}$$

este inchisă in $\mathcal{M}(\mathbf{E})$. Aplicaţia $\mu \to b(\mu)$ este bine-definită şi continuă pe $\mathcal{F}(f,a)$.

Demonstraţie. Lema lui Fatou arată că $\mathcal{F}(f,a)$ este inchisă. Pe de altă parte, pentru $\mu \in \mathcal{F}(f,a)$ şi $r > 0$, avem

$$\| \int_{\|x\|\ge r} x d\mu(x) \| \le \int_{\|x\|\ge r} \| x \|\, d\mu(x)$$

$$\le \epsilon(r) \int_{\|x\|\ge r} f(\| x \|)\, d\mu(x) \le a\epsilon(r),$$

unde $\epsilon(r) = \sup_{\|x\|\ge r} [\| x \| / f(\| x \|)]$; observăm că $\lim_{r\to+\infty} \epsilon(r) = 0$ şi aplicăm proprietatea 2 de mai sus a baricentrelor pentru a obţine continuitatea aplicaţiei $\mu \to b(\mu)$ pe $\mathcal{F}(f,a)$.□

LEMA 2.10. *Fie Γ spaţiu topologic polonez şi X_n şir de variabile aleatoare independente cu valori in Γ, cu aceeaşi lege μ. Sa considerăm legea empirică a eşantionului $X_1, \ldots, X_n$ i.e. variabila aleatoare $Z_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \ldots + \delta_{X_n})$ cu valori in $\mathcal{M}_1(\Gamma)$. Atunci, pentru orice $a > 0$, există un compact $\mathcal{K}_a$ in $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ şi un număr natural $N(a)$, astfel ca*

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \le e^{-na} .$$

Demonstraţie. Fie b_p, ϵ_p şiruri de numere pozitive care converg către 0. Pentru fiecare p alegem un compact K_p in Γ astfel ca $\mu(\Gamma \setminus K_p) \le b_p$. Notăm

$$\mathcal{F}_p = \{\nu \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \text{ cu } \nu(\Gamma \setminus K_p) \le b_p\} .$$

Să arătăm că

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \le \left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p} \quad \text{pentru orice } n, p. \tag{2.9}$$

Dacă acest lucru este arătat atunci, cu notaţia $\mathcal{K} := \cap_{p\geq 1}\mathcal{F}_p$ (care este compact in $\mathcal{M}_1(\Gamma)$) şi cu formula (2.9.), obţinem

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p\geq 1} P(Z_n \notin \mathcal{F}_p) \leq \sum_{p\geq 1} \left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p}$$

Este suficient apoi de considerat $b_p = \epsilon_p u^{2p/\epsilon_p}$ cu $0 < u < 1/2$ pentru a obţine

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}) \leq \sum_{p\geq 1} u^{np} \leq 2u^n$$

şi lema este demonstrată. Rămâne de arătat formula (2.9.). Suprimăm indicele p pentru uşurinţa calculelor. Are loc

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}) = P\left\{\frac{1}{n}\left[1_{K^c}(X_1) + \ldots + 1_{K^c}(X_n)\right] > \epsilon\right\}$$

$$= P\left(\overline{U}_n > \epsilon\right),$$

unde $U_i = 1_{K^c}(X_i)$ este variabila aleatoare cu legea binomială $\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0$, cu $\alpha = \mu(K^c)$ şi a cărei transformare Cramer o notăm cu λ. După formulele (1.5.) avem

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}) \leq e^{-n\lambda(\epsilon)}\,. \tag{2.10}$$

Dar, pentru $\epsilon \in (0,1)$ avem

$$\lambda(\epsilon) = \epsilon \log\frac{\epsilon}{\alpha} + (1-\epsilon)\log\frac{1-\epsilon}{1-\alpha}$$

şi luăm $b_p < \epsilon_p$ (deci $\alpha \leq b_p < \epsilon_p$) şi $\epsilon_p \leq \frac{1}{2}$ pentru a obţine $\lambda(\epsilon_p) \geq \epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$. Impunem condiţia $\frac{1}{2}\epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p} \geq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ pentru a obţine $\lambda(\epsilon_p) \geq \frac{1}{2}\epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p}$, ceea ce, impreună cu (2.10.), demonstrează (2.9.).□

TEOREMA 2.11. *Fie* $\mathbf{E}$ *spaţiu Banach real, separabil şi* μ *probabilitate pe* $\mathbf{E}$ *astfel ca*

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } s \in \mathbf{R}.$$

Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ *avem*

$$-\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right),$$

unde Λ *este funcţionala Cramer asociată lui* μ. *In plus, mulţimile* $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ *sunt compacte pentru orice* $b > 0$ *finit.*

Demonstraţie. Fie ν legea comună a variabilelor $\| X_n \|$ şi să notăm $m = \int_{\mathbf{R}} x d\nu(x)$. Vom arăta existenţa unei funcţii f continuă şi convexă pe $[0, +\infty)$ astfel ca

$$f(x) = 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq m$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \tag{2.11}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{sf(x)} d\nu(x) \text{ este finita pentru } s < 1.$$

Cum $\hat{\nu}$ este finită pe $\mathbf{R}$ (din ipoteză), putem lua $f(x) = \lambda_\nu(x)$ pentru $x \in [m, +\infty)$, unde λ_ν este transformarea Cramer a lui ν şi $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, m]$. Cu notaţiile din lemele 2.9. si 2.10., avem

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)\right) = P\left\{\frac{1}{n}\left[f\left(\| X_1 \|\right) + \ldots + f\left(\| X_n \|\right)\right] > a\right\}$$

$$\leq e^{-n\lambda_\theta(a)},$$

unde prin λ_θ am notat transformarea Cramer asociată lui θ, legea lui $f\left(\| X_1 \|\right)$. Conform formulelor (2.11.), $\hat{\theta}(s)$ este finită in vecinătatea lui 0, deci $\lambda_\theta(a)$ converge către $+\infty$ când $a \to +\infty$. Deci, pentru orice $A > 0$ există a_A astfel ca

$$P(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)) \leq e^{-nA} .$$

Fie acum $\mathcal{L}_A := \mathcal{K}_A \cap \mathcal{F}(f, a)$, unde $\mathcal{K}_A$ este compactul din lema 2.10. Conform acestei leme şi a ultimei formule, obţinem

$$P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA} \text{ pentru } n \geq N(A).$$

In plus, conform lemei 2.9., $\mathcal{L}_A$ este compact in $\mathcal{M}_1(\mathbf{E})$, pe care aplicaţia $\pi \to b(\pi)$ este bine-definită şi continuă. Deci imaginea $L_A = b(\mathcal{L}_A)$ este compactă in $\mathbf{E}$ şi

$$P(X_n \notin L_A) = P(b(Z_n) \notin b(\mathcal{L}_A)) \leq P(Z_n \notin \mathcal{L}_A) \leq 2e^{-nA}$$

pentru $n \geq N(A)$. Rămân de aplicat lema 2.6. şi teorema 2.3.□

3

CAZUL GAUSIAN

Fie $\mathbf{E}$ spatiu Banach separabil. O probabilitate μ pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ se numeşte *gausiană* dacă, pentru orice functională liniară şi continuă $t : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, legea $t(\mu)$ este gausiană pe $\mathbf{R}$. Dacă in plus $t(\mu)$ este centrată pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, spunem că μ este *centrată*.

TEOREMA 3.1. *Dacă μ este probabilitate gausiană centrată pe $\mathbf{E}$, atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ este finită pentru orice $s \in \mathbf{R}$. In particular, $\int_{\mathbf{E}} \| x \|^2 \, d\mu(x)$ este finită.*

Demonstraţie. Putem presupune μ centrată. Fie $x, x_1, \ldots, x_n$ variabile aleatoare independente din $\mathbf{E}$, toate având legea μ. Să observăm că, pentru $n \geq 1$, legea lui $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} x_k$ in raport cu μ^n este aceeaşi cu legea lui x in raport cu μ. Vom arăta că este suficient ca $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ să fie finită *pentru un singur* $s \in \mathbf{R}$. Intr-adevăr, dacă este aşa, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} e^{n^{1/2} s\|x\|} d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbf{E}} \exp\left(n^{1/2} \frac{s}{n^{1/2}} \, \| \sum_{k=1}^{n} x_k \| \right) \mu^n \left(dx_1, \ldots, dx_n \right)$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \right)^n$$

Acum să observăm că, dacă x, y sunt variabile aleatoare pe $\mathbf{E}$, independente şi cu legea μ, atunci $\left(\frac{x+y}{2^{1/2}}, \frac{x-y}{2^{1/2}} \right)$ are aceeaşi lege sub μ^2 ca şi (x, y). Pentru $0 < s < t$, avem

$$\mu^2 \left((x, y) \in \mathbf{E}^2 : \ \| x \| \leq s, \ \| y \| \geq t \right)$$

$$= \mu^2\left((x,y)\in \mathbf{E}^2:\ \| x-y \| \le 2^{1/2}s,\ \| x+y \| \ge 2^{1/2}t\right)$$

$$\le \mu^2\left((x,y)\in \mathbf{E}^2:\ \big|\| x \| - \| y \|\big| \le 2^{1/2}s,\ \| x \| + \| y \| \ge 2^{1/2}t\right)$$

$$\le \mu^2\left((x,y)\in \mathbf{E}^2:\ \| x \| \wedge \| y \| \ge \frac{t-s}{2^{1/2}}\right),$$

deci

$$\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s)\,\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge t)$$
$$\le \left(\mu\left(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge \frac{t-s}{2^{1/2}}\right)\right)^2$$

Luăm $t_0 = s$ şi $t_{n+1} = s + 2^{1/2}t_n$ pentru a obţine

$$\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge t_{n+1})\,/\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s)$$

$$\le \left(\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge t_n)\,/\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s)\right)^2 .$$

Deci

$$\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge t_n)$$
$$\le \mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s)\times\exp\left[2^n\log\frac{\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge s)}{\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s)}\right]$$

pentru orice $0 < s < t$ şi $n \ge 0$. In particular, alegem pe s astfel ca $\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge s)\,/\mu(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \le s) = \rho < 1$; obţinem

$$\mu\left(x\in\mathbf{E}:\ \| x \| \ge \frac{2^{(n+1)/2}-1}{2^{1/2}-1}s\right) \le e^{2^n\log\rho}\ .\square$$

Să notăm $\mathbf{E}'$ dualul lui $\mathbf{E}$ şi $\langle t,x\rangle$ dualitatea dintre $t\in\mathbf{E}'$ şi $x\in\mathbf{E}$. Pentru μ centrată, definim *covariaţia* lui μ prin $K:\mathbf{E}'\times\mathbf{E}'\to\mathbf{R}$,

$$K(s,t) = \int_{\mathbf{E}}\langle s,x\rangle\langle t,x\rangle d\mu(x);\ s,t\in\mathbf{E}' .$$

Intrucât $| K(s,t) | \le c^2 \| s \| \| t \|$ cu $c^2 = \int \| x \|^2\, d\mu(x)$, observăm că aplicaţia K este biliniară şi continuă pe $\mathbf{E}'\times\mathbf{E}'$

iar $K(s,t) \geq 0$ pentru $t \in \mathbf{E}'$. Spaţiul $\mathbf{E}'$ se scufundă într-un spaţiu Hilbert $\mathbf{H}$ în felul următor. Fiecarei $t \in \mathbf{E}'$ îi asociem variabila aleatoare gausiană reală Z^t definită pe câmpul de probabilitate $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ prin $Z^t(x) = \langle t, x\rangle$. Fie $\mathbf{H}$ închiderea în $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ a spaţiului vectorial $\{Z^t , t \in \mathbf{E}'\}$. Aplicaţia $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ este liniară, continuă şi de imagine densă. In plus, dacă notăm $[\cdot,\cdot]$ produsul scalar din $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ (deci şi din $\mathbf{H}$), avem

$$K(s,t) = \left[Z^s, Z^t\right] \text{ pentru orice } s, t \in \mathbf{E}' .$$

Să observăm că, dacă $v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} \| x \| | v(x) | \, d\mu(x) \leq c \, \| v \|_{L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)} \quad ,$$

deci formula $Sv = \int_{\mathbf{E}} xv(x)d\mu(x)$ defineşte un operator liniar şi continuu $S : L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) \to \mathbf{E}$. Din construcţie avem

$$\int_{\mathbf{E}} Z^s(x)v(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x\rangle v(x)d\mu(x) = \langle s, \int_{\mathbf{E}} xv(x)d\mu(x)\rangle$$

şi deci

$$\left[Z^t, v\right] = \langle t, Sv\rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , \, v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu),$$

ceea ce arată că restricţia lui S la $\mathbf{H}$ este injectivă.

In concluzie, dată fiind o probabilitate gausiană μ pe spaţiul Banach separabil $\mathbf{E}$, îi putem asocia un spaţiu Hilbert separabil $\mathbf{H}$ cu produsul scalar notat $[\cdot,\cdot]_{\mathbf{H}}$, o injecţie liniară şi continuă $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$, o aplicaţie liniară şi continuă (de imagine densă) $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ astfel ca

$$\left[Z^t, v\right]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sv\rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , \, v \in \mathbf{H},$$

$$\left[Z^t, Z^s\right]_{\mathbf{H}} = K(t,s) \text{ pentru } t, s \in \mathbf{E}' .$$

PROPOZITIA 3.2. *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil* $\mathbf{E}$. *Fie* $\mathbf{H}$ *spaţiul Hilbert şi* $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ *injecţia liniară şi continuă asociate lui μ ca mai inainte. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \| S^{-1}x \|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in S(\mathbf{H}) \\ +\infty, \text{ dacă } x \in \mathbf{E} \backslash S(\mathbf{H}). \end{cases}$$

In plus, operatorul S este compact.

Demonstraţie. Transformarea Laplace $\hat{\mu}(t)$ se scrie

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{E}} e^{\langle t,x \rangle} d\mu(x) = E\left[\exp\left(Z^t\right)\right],$$

deci $\log \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}[Z^t, Z^t]_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}K(t,t)$. Propoziţia 2.5. arată că

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[< t, x > -\frac{1}{2}K(t,t) \right], \; x \in \mathbf{E}, \text{ deci}$$

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[< t, x > -\frac{1}{2} \| Z^t \|^2 \right]. \tag{3.1}$$

Fie acum $x \in \mathbf{E}$ fixat astfel ca $\lambda(x) < +\infty$. Pentru $t \in \operatorname{Ker} Z$ şi orice $a \in \mathbf{R}$, conform formulei (3.1.), avem $\lambda(x) \geq a \langle t, x \rangle$, ceea ce implică $\langle t, x \rangle = 0$. Aceasta inseamnă că există o aplicaţie liniară $g : \operatorname{Im} Z \to \mathbf{R}$ astfel ca $g(Z^t) = \langle t, x \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Tot din formula (3.1.) rezultă

$$| g(v) | \leq \lambda(x) + \frac{1}{2} \| v \|_{\mathbf{H}}^2 \; \text{ pentru } v \in \operatorname{Im} Z,$$

deci g este marginită pe intersecţia dintre $\operatorname{Im} Z$ şi bila unitate din $\mathbf{H}$. Cum $\operatorname{Im} Z$ este densă in $\mathbf{H}$, aplicaţia g se prelungeşte (unic) la o funcţională liniară şi continuă pe $\mathbf{H}$ i.e. există $w \in \mathbf{H}$ astfel ca $g(v) = [v, w]_{\mathbf{H}}$ pentru orice $v \in \mathbf{H}$. In particular $\langle t, x \rangle = g(Z^t) = [Z^t, w]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sw \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, deci $x = Sw$ i.e. $x \in S(\mathbf{H})$.

Reciproc, fie $x \in S(\mathbf{H})$ şi să scriem $x = Sw$ cu $w \in \mathbf{H}$. Conform formulei (3.1.), avem

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left\{ \left[Z^t, w\right]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \| Z^t \|_{\mathbf{H}}^2 \right\}$$

şi cum $\operatorname{Im} Z$ este densă in $\mathbf{H}$, obţinem

$$\lambda(x) = \sup_{v \in \mathbf{H}} \left\{ [v, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \| v \|_{\mathbf{H}}^2 \right\}.$$

Pentru $\| v \|_{\mathbf{H}} = a$ fixat, $\sup [v, w]_{\mathbf{H}}$ este atins şi este egal cu $a \| w \|_{\mathbf{H}}$. Cum $\sup \left(a \| w \|_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} a^2 \right)$ este egal cu $\frac{1}{2} \| w \|_{\mathbf{H}}^2$, obţinem $\lambda(x) = \frac{1}{2} \| w \|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{2} \| S^{-1} x \|_{\mathbf{H}}^2$ şi in particular $\lambda(x) < +\infty$.

Calculul lui λ arată că imaginea prin S a bilei unitate din $\mathbf{H}$ este $\{x \in \mathbf{E} : \lambda(x) \leq 1\}$. Această mulţime este compactă (cf. teoremei 2.11.), deci S este operator compact.□

TEOREMA 3.3. *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil $\mathbf{E}$. Fie $X : \Omega \to \mathbf{E}$ variabilă aleatoare de lege μ. Fie Λ funcţionala Cramer asociată lui μ. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$-\Lambda \left(\mathring{A} \right) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P (\epsilon X \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P (\epsilon X \in A) \leq -\Lambda \left(\overline{A} \right).$$

Demonstraţie. Fie $\epsilon \in (0, 1)$ şi notăm $n(\epsilon)$ partea intreagă a lui $1/\epsilon^2$. Putem scrie

$$\epsilon = \frac{b(\epsilon)}{n(\epsilon)^{1/2}}, \text{ cu } 1 - \epsilon^2 \leq b^2(\epsilon) \leq 1. \tag{3.2}$$

Fie $X_p : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente, toate cu legea μ. Intrucât μ este gausiană, media normalizată $p^{1/2} \overline{X}_p$ are aceeaşi lege ca şi X pentru orice p. In consecinţă

$$P(\epsilon X \in A) = P \left(\epsilon n(\epsilon)^{1/2} \overline{X}_{n(\epsilon)} \in A \right) \tag{3.3}$$

$$= P \left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A \right)$$

Să notăm $F = \left\{x \in \mathbf{E} : x = ay,\ 1 \leq a \leq 2,\ y \in \bar{A}\right\}$. Din definiţia lui Λ şi remarcând că transformarea Cramer λ a lui μ satisface $\lambda(ax) = a^2\lambda(x)$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{E}$, obţinem

$$\Lambda(F) = \inf_{x \in F} \lambda(x) \tag{3.4}$$

$$= \inf_{y \in \bar{A}} \inf_{1 \leq a \leq 2} a^2 \lambda(y) = \inf_{y \in \bar{A}} \lambda(y) = \Lambda\left(\bar{A}\right).$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{b(\epsilon)} A \subset F$ dacă ϵ este suficient de mic (F este inchisă) şi cum $\lim_{\epsilon \to 0} n(\epsilon) = +\infty$, teorema 2.11. implică

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{1}{n(\epsilon)} \log P\left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A\right)$$

$$\leq \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in F\right) \leq -\Lambda(F),$$

ceea ce, impreună cu formulele (3.2.)-(3.4.) dau a doua inegalitate din concluzia teoremei.

Fie $x \in \mathring{A}$. Există o vecinătate deschisă şi convexă V a lui x astfel ca, pentru ϵ suficient de mic, să avem $V \subset \frac{1}{b(\epsilon)} A$. Conform aceleiaşi teoreme 2.11., avem

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \geq \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{b^2(\epsilon)}{n(\epsilon)} \log P\left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in V\right)$$

$$= -\Lambda(V) \geq -\lambda(x).$$

Luăm sup in membrul drept din ultima inegalitate după $x \in \mathring{A}$ şi obţinem prima inegalitate din concluzia teoremei.□

Sa considerăm acum $\mathbf{E}$ spaţiu Hilbert separabil şi μ probabilitate gausiană (centrată) pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Are loc $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$, iar covariaţia $K(s,t)$ asociată lui μ se scrie

$$K(s,t) = \langle s, Tt \rangle = \langle Ts, t \rangle \text{ pentru } s, t \in \mathbf{E},$$

unde $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ este operator liniar, continuu, autoadjunct, pozitiv şi *de urmă finită.* Aceasta inseamnă ca există o bază ortonormală e_n a lui $\mathbf{E}$ şi numere pozitive r_n astfel ca $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$ şi

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}.$$

Vom nota $T^{1/2}$ rădăcina pătrată (unică) auto-adjunctă a lui T, definită prin

$$T^{1/2}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n^{1/2} e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}$$

şi $\mathbf{H}$ inchiderea lui $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci $\mathbf{H}$ este ortogonalul lui $\operatorname{Ker} T$ in $\mathbf{E}$, iar $\operatorname{Ker} T$, $\mathbf{H}$ sunt nucleul şi aderenţa imaginii lui $T^{1/2}$. In particular, restricţia lui $T^{1/2}$ la subspaţiul inchis $\mathbf{H}$ este injectivă şi $T^{1/2}(\mathbf{E}) = T^{1/2}(\mathbf{H})$.

PROPOZITIA 3.4. *Fie μ probabilitate gausiană (centrată) pe spaţiul Hilbert separabil $\mathbf{E}$, $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ operatorul de covariaţie asociat lui μ ca mai inainte şi $\mathbf{H}$ ortogonalul lui $\operatorname{Ker} T$ in $\mathbf{E}$. Notăm cu S restricţia lui $T^{1/2}$ la $\mathbf{H}$, deci $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ este injectiv şi aplică $\mathbf{H}$ pe $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \| S^{-1}x \|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in T^{1/2}(\mathbf{E}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin T^{1/2}(\mathbf{E}). \end{cases}$$

Demonstraţie. Pentru orice $s \in \mathbf{E}' = \mathbf{E}$, notăm $Z^s = T^{1/2}s$. Intrucât operatorul $T^{1/2}$ lasă pe $\mathbf{H}$ invariant şi verifică $\overline{T^{1/2}(\mathbf{E})} = \mathbf{H}$, obţinem că $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ este operator liniar, continuu, de imagine densă, in timp ce $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ este injectiv. Rămâne de aplicat propoziţia 3.2., observând că $S(\mathbf{H}) = T^{1/2}(\mathbf{E})$.□

Fie $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ proces gausian centrat cu traiectoriile continue a.s. Atunci *covariaţia* ρ a procesului, definită prin

$$\rho(s,t) = \int_\Omega X_s(\omega) X_t(\omega) dP(\omega), \text{ pentru } s,t \in [0,1],$$

este continuă in (s,t). De exemplu, daca ρ satisface condiţia Hölder

$$|\rho(s,t)-\rho(s',t')| \leq ct. [|s-s'|^{\alpha}+|t-t'|^{\alpha}]$$

pentru $s,t,s',t' \in [0,1]$, atunci procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s.

Mai mult, deindată ce procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s., putem găsi o versiune a procesului cu traiectoriile continue *peste tot*. Obţinem astfel o aplicaţie măsurabilă $X : \Omega \to C[0,1]$, unde $X(\omega)$ este funcţia care lui $t \in [0,1]$ ii asociază $X_t(\omega)$, iar $C[0,1]$ este spaţiul funcţiilor continue pe $[0,1]$ inzestrat cu corpul borelienelor.

Fie μ imaginea probabilitaţii P (dată pe Ω) prin aplicaţia X, numită *legea procesului* X_t. Atunci μ este probabilitate gausiană centrată pe $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$, unde $\mathbf{E} = C[0,1]$ inzestrat cu structura sa uzuală de spaţiu Banach.

Intr-adevar, $\mathbf{E}'$ este spaţiul măsurilor Radon mărginite pe $[0,1]$; pentru orice $\pi \in \mathbf{E}'$, variabila aleatoare $Z^{\pi} : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Z^{\pi}(f) = \langle \pi, f \rangle = \int_{[0,1]} f(t)d\pi(t), \text{ pentru } f \in \mathbf{E}$$

are aceeaşi lege (atunci când $\mathbf{E}$ este inzestrat cu probabilitatea μ) ca şi variabila aleatoare $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Y(\omega) = \int_{[0,1]} X_t(\omega)d\pi(t).$$

Deci imaginea măsurii μ prin orice funcţională liniară şi continuă este gausiană centrată, deci μ este gausiană centrată.

Covariaţia K a lui μ este dată de

$$\begin{aligned} K(\pi,\eta) &= \operatorname{Cov}\left[\int_{[0,1]} X_t d\pi(t), \int_{[0,1]} X_t d\eta(t)\right] \\ &= \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \rho(s,t)d\pi(s)d\eta(t). \end{aligned}$$

PROPOZITIA 3.5. *Fie $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ proceş gausian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariaţie $\rho(s,t)$, $s,t \in [0,1]$. Să definim operatorul $R : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ prin $Rf(t) = \int_0^1 \rho(t,s)f(s)ds$. Atunci R ia valori in $C[0,1]$, este auto-adjunct, pozitiv, compact şi de urmă finită. Fie $\mathbf{H}$ ortogonalul lui* $\operatorname{Ker} R$ *in $L^2[0,1]$ şi S restricţia la $\mathbf{H}$ a operatorului $R^{1/2}$, deci $S : \mathbf{H} \to L^2[0,1]$ este injectiv şi aplică $\mathbf{H}$ pe $R^{1/2}(L^2[0,1])$.*

Fie μ legea procesului X_t. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată (pentru $f \in C[0,1]$) de :

$$\lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \| S^{-1} f \|^2_{L^2[0,1]} & \text{dacă } f \in R^{1/2}(L^2[0,1]) \\ +\infty, \text{ dacă } f \notin R^{1/2}(L^2[0,1]). \end{cases}$$

Demonstraţia se va baza pe lema următoare.

LEMA 3.6. *Fie $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$ spaţii Banach separabile şi μ probabilitate gausiană centrată pe $\mathbf{C}$. Dacă există o injecţie continuă $i : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, atunci transformările Cramer ale măsurilor μ şi $i(\mu)$ sunt legate prin relaţia*

$$\lambda_\mu = \lambda_{i(\mu)} \circ i \, .$$

Demonstraţia lemei 3.6. Fie $i^* : \mathbf{L}^* \to \mathbf{C}^*$ aplicaţia duală a lui i. Din definiţia covariaţiei obţinem

$$K_{i(\mu)}(s,t) = K_\mu(i^*(s), i^*(t)) \text{ pentru } s,t \in \mathbf{L}^* \, .$$

Cum i este injectivă, $i^*(\mathbf{L}^*)$ este densă in $\mathbf{C}^*$ şi deci, pentru $x \in \mathbf{C}$, avem

$$\lambda_\mu(x) = \sup_{t \in \mathbf{C}^*} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(t,t) \right]$$

$$= \sup_{s \in \mathbf{L}^*} \left[\langle i^*(s), x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(i^*(s), i^*(s)) \right]$$

$$= \sup_{s \in \mathbf{L}^*} \left[\langle s, i(x) \rangle - \frac{1}{2} K_{i(\mu)}(s, s) \right]$$

i.e. $\lambda_\mu(x) = \lambda_{i(\mu)}(i(x))$.□

Demonstrația propoziției 3.5. Luăm $\mathbf{C} := C[0,1]$ și $\mathbf{L} := L^2[0,1]$; dacă i este injecția canonică, lema 3.6. arată că, pentru $f \in C[0,1]$ avem $\lambda_\mu(f) = \lambda_{i(\mu)}(f)$ unde prin abuz de limbaj am identificat f și $i(f)$. Apoi, covariația lui $i(\mu)$ este dată de $K_{i(\mu)}(f, g) = \langle Rf, g \rangle_{L^2[0,1]}$, iar calculul lui $\lambda_{i(\mu)}$ pentru spațiul Hilbert $\mathbf{L}$ a fost făcut în propoziția 3.4. Folosim în final că λ este "restricția" lui $\lambda_{i(\mu)}$ la $\mathbf{C}$.□

4

APLICATII

APLICATIE IN STATISTICA

Vom formula şi demonstra această aplicaţie in cazul real, deşi rămâne adevărată in contextul unui spaţiu topologic polonez. Să remarcăm importanţa ei intrinsecă, deoarece se calculează explicit transformarea Cramer a legii empirice asociate unui eşantion dat.

Notăm $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$) spaţiul măsurilor reale mărginite (resp. spaţiul probabilităţilor pe dreaptă). Pentru $\mu,\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, definim *informaţia* (sau *informaţia Kullback*) lui ν in raport cu μ prin

$I_\mu(\nu) = \int f(x) \log f(x) d\mu(x)$, dacă ν este absolut continuă in raport cu μ şi $f(x) = \frac{d\mu}{d\nu}(x)$,

$I_\mu(\nu) = +\infty$, dacă ν nu este absolut continuă in raport cu μ.

Observăm ca $I_\mu(\nu)$ este cu atât "mai mare "cu cât ν este mai indepărtată de μ. In particular $I_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \nu = \mu$.

TEOREMA 4.1. *Fie X_n şir de variabile aleatoare reale independente, cu aceeaşi lege μ. Să considerăm legea empirică a eşantionului $X_1, \ldots, X_n$ i.e. $Z_n := \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \ldots + \delta_{X_n})$ cu valori in $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avem*

$$-I_\mu\left(\overset{\circ}{A}\right) \le \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A)$$

$$\le \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A) \le -I_\mu\left(\bar{A}\right),$$

unde $I_\mu(A) = \inf_{\nu\in A} I_\mu(\nu)$. Pentru orice reuniune A de deschise *şi convexe din* $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$*, avem*

$$-I_\mu\ (A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P(Z_n \in A)\,.$$

In fine, transformarea Cramer λ *a legii lui* δ_{X_1} *coincide cu* I_μ *pe* $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ *şi este egală cu* $+\infty$ *pe* $\mathcal{M}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$*. In plus, mulţimile* $\{\lambda(x) \le b\}$ *sunt compacte, pentru orice* $b > 0$*.*

Demonstraţie. Din lema 2.10. există, pentru orice $a > 0$, un compact $\mathcal{K}_a$ in $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ astfel ca $P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \le e^{-na}$. Lema 2.6. şi teorema 2.3. furnizează concluzia, dacă arătam că transformarea Cramer λ a lui π (:=legea lui δ_{X_1}) coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ şi este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbf{R})\setminus\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Ultima afirmaţie rezultă din faptul că $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ conţine anvelopa convexă închisă a suportului lui π . Pentru $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, conform cu propoziţia 2.5., avem

$$\lambda(\nu) = \sup_{f\in C(\mathbf{R})} [\langle f, \nu\rangle - \log \hat{\pi}(f)]\,.$$

Din constructie, pentru $f \in C(\mathbf{R})$, avem

$$\hat{\pi}(f) = \int_{\mathcal{M}_1(\mathbf{R})} \exp(\langle f, \tau\rangle)\, d\pi(\tau) = \int e^{f(x)} d\mu(x),$$

deci

$$\lambda(\nu) = \sup_{f\in C(\mathbf{R})} \left[\int f(x) d\nu(x) - \log \int e^{f(x)} d\mu(x)\right].$$

Să presupunem că $I_\mu(\nu) < +\infty$. Atunci $\nu \ll \mu$ şi fie $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pentru $f \in C(\mathbf{R})$, din inegalitatea Jensen, obţinem

$$\exp\left[\int (f - \log g)\, 1_{(g>0)} g d\mu\right] \le \int \exp(f - \log g)\, 1_{(g>0)} g d\mu,$$

deci

$$\int f g d\mu - \int g \log g d\mu \le \log \int e^f d\mu$$

sau

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \le \int g \log g d\mu = I_\mu(\nu).$$

Luăm sup in membrul stâng dupa $f \in C(\mathbf{R})$ şi obţinem $\lambda(\nu) \leq I_\mu(\nu)$. Reciproc, presupunem $\lambda(\nu) < +\infty$ deci, pentru orice $f \in C(\mathbf{R})$ avem

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \lambda(\nu) < +\infty. \tag{4.1}$$

Formula (4.1.) rămâne adevărată pentru orice f măsurabilă şi marginită (cf. teoremei lui Luzin, restricţia unei astfel de funcţii la compacţi de ν şi $\mu-$măsură ≈ 1 este continuă). Aplicăm (4.1.) funcţiei $f = n1_A$, cu $A \subset \mathbf{R}$, $\mu(A) = 0$ şi obţinem $n\nu(A) \leq \lambda(\nu)$ pentru orice n, deci $\nu(A) = 0$. Notăm $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ şi, dacă $\log g$ ar fi mărginită, formula (4.1.) aplicată funcţiei $\log g$ ar implica

$$\int \log g d\nu - \log \int d\mu \leq \lambda(\nu)$$

i.e. $I_\mu(\nu) \leq \lambda(\nu)$. Dacă $\log g$ nu e mărginită, o aproximăm cu funcţii măsurabile mărginite.□

APLICATII LA MASURI SI PROCESE GAUSIENE

Notaţiile şi definiţiile sunt cele din capitolul 3.

PROPOZITIA 4.2. *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil $\mathbf{E}$. Fie λ transformata ei Cramer şi K covariaţia ei. Atunci numerele*

$$a = \inf\{\lambda(x) : x \in \mathbf{E}, \ \| x \|= 1\}$$

şi

$$b = \sup\{K(t,t) : t \in \mathbf{E}', \ \| t \|= 1\}$$

sunt finite şi avem

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu\{x \in \mathbf{E}, \ \| x \| \geq r\} = -a = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstraţie. Fie $B = \{x \in \mathbf{E}, \ \| x \| \geq 1\}$. Relaţia $\lambda(\alpha x) = \alpha^2\lambda(x)$ pentru $\alpha \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{E}$ implică

$$\Lambda(B) = \inf_{x \in B} \lambda(x) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha > 1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

$$\Lambda\left(\overset{\circ}{B}\right) = \inf_{\|y\|=1} \inf_{\alpha>1} \alpha^2 \lambda(y) = a.$$

Cum B este inchisă, teorema 3.3. implică

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log \mu \{x \in \mathbf{E},\ \| x \| \geq r\}$$

$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log P\left(\frac{1}{r} X \in B\right) = -a,$$

unde $X : (\Omega, P) \to \mathbf{E}$ este variabilă aleatoare cu legea μ.

Rămân de comparat numerele a si $1/2b$. Pentru $x \in \mathbf{E}$, $t \in \mathbf{E}'$ şi $s \geq 0$, avem $\lambda(x) \geq s\langle t, x\rangle - \frac{1}{2}s^2 K(t,t)$. Fie $x \in \mathbf{E}$ cu $\| x \| = 1$ fixat. Conform teoremei Hahn-Banach, există $t_0 \in \mathbf{E}'$ cu $\| t_0 \| = 1$ astfel ca $\langle t_0, x\rangle = 1$. Obţinem

$$\lambda(x) \geq \sup_{s\geq 0} \left[s - \frac{1}{2}s^2 K\left(t_0, t_0\right)\right] = \frac{1}{2K\left(t_0, t_0\right)} \geq \frac{1}{2b}$$

şi de aici obţinem $a \geq \frac{1}{2b}$. Fie acum $t \in \mathbf{E}'$ cu $\| t \| = 1$; avem $t^{-1}[1, +\infty) \subset B$. Fie $X_n : \Omega \to \mathbf{E}$ variabile aleatoare cu legea μ. Atunci

$$P\left(\overline{t\left(X_n\right)} \in [1, +\infty)\right) \leq P\left(\overline{X_n} \in B\right).$$

In această inegalitate aplicăm log, facem $n \to +\infty$ şi, dacă notăm $\lambda_{t(\mu)}$ transformata Cramer a lui $t(\mu)$, obţinem

$$-\frac{1}{2K\left(t, t\right)} = -\lambda_{t(\mu)}(1) = -\Lambda_{t(\mu)}[1, +\infty) \leq -\Lambda(B) = -a$$

şi de aici rezultă $a \leq \frac{1}{2b}$.

Cum K este biliniară şi continuă, rezultă că $b < +\infty$ şi deci $a > 0$. Calculul lui λ arată că $a < +\infty$ şi deci $b > 0$.□

Vom vedea in cazul proceselor gausiene situaţii in care atât λ cât şi numerele a, b se pot determina explicit.

PROPOZITIA 4.3. *Fie* $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ *proces gausian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariaţie* $\rho(s,t)$, $s,t \in [0,1]$. *Dacă notăm* $b = \sup_{t\in[0,1]} \rho(t,t)$, *atunci*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \sup_{t\in[0,1]} \mid X_t \mid \geq r \right\} = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei 4.2., este suficient de verificat că

$$\sup \{K(\eta,\eta)\,;\, \eta \in \mathbf{E}' \,,\, \| \eta \| = 1\} = b.$$

Fie $\eta \in \mathbf{E}'$ cu $\| \eta \| = 1$. Putem scrie $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\tilde{\eta} = \eta^+ + \eta^-$ şi $\| \tilde{\eta} \| = \| \eta \| = 1$, deci

$$K(\eta,\eta) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \rho(s,t) d\eta(s) d\eta(t)$$

$$\leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \mid \rho(s,t) \mid d\tilde{\eta}(s) d\tilde{\eta}(t).$$

Funcţia ρ este pozitiv definită, deci $\rho(s,t)^2 \leq \rho(s,s)\rho(t,t)$ şi deci $\sup_{s,t\in[0,1]} \mid \rho(s,t) \mid = b$, ceea ce arată că $K(\eta,\eta) \leq b$. Pe de altă parte, din compactitate, există $t \in [0,1]$ astfel ca $\rho(t,t) = b$, ceea ce dă $K(\delta_t, \delta_t) = b$.□

Remarcă. Dacă procesul gausian X_t are traiectoriile a.s. in $L^p[0,1]$, cu $p \geq 1$, propoziţia 4.2. arată că

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log P \left\{ \left(\int_0^1 \mid X_t \mid^p dt \right)^{1/p} \geq r \right\}$$

există, dar calculul acestei limite, plecând de la ρ, nu este posibilă "explicit " in general.□

In continuare se va determina explicit transformarea Cramer in cazul mişcării browniene.

PROPOZITIA 4.4. *Fie $B_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ mişcare browniană cu $B_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor miscării browniene B_t pe $C_0[0,1]$, spaţiul Banach al funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi nule in 0. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată, pentru $f \in C_0[0,1]$, prin*

$$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f', respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

Demonstraţie. Vom aplica propoziţia 3.5. spaţiului $C_0[0,1]$ in loc de $C[0,1]$, ceea ce nu modifică nimic. Avem $\rho(s,t) = s \wedge t$, iar operatorul $R : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ este dat de

$$Rg(t) = \int_0^1 (s \wedge t)\, g(s)ds = \int_0^t sg(s)ds + t\int_t^1 g(s)ds.$$

Este clar că, dacă f este continua, nulă in 0 şi $f = Rg$, atunci f admite derivată continuă $f'(t) = \int_t^1 g(s)ds$ nulă in 1 şi admite derivată de ordinul doi $f'' = -g$ de pătrat integrabil. De aici rezultă că R este injectiv, că $R(L^2[0,1])$ este mulţimea $f \in C_0[0,1]$ de două ori derivabile, astfel ca $f'' \in L^2[0,1]$ şi $f'(1) = 0$. In fine, pentru $f \in R(L^2[0,1])$, avem $R^{-1}f = -f''$.

Fie $f \in R(L^2[0,1])$; din $f = -Rf''$, obţinem

$$\| R^{-1/2} f \|^2_{L^2[0,1]} = \| R^{1/2} f'' \|^2_{L^2[0,1]} = \langle Rf'', f'' \rangle_{L^2[0,1]}$$

$$= -\langle f, f'' \rangle_{L^2[0,1]} = \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \quad ,$$

in care ultima egalitate s-a obţinut prin integrare prin părţi, deoarece $f(0) = f'(1) = 0$. Conform propoziţiei 3.5. avem

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \| R^{-1/2} f \|^2_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \, ,$$

pentru $f \in R(L^2[0,1])$. Acest rezultat trebuie extins la $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$. Fie deci $f = R^{1/2}g$ cu $g \in L^2[0,1]$, $f \in C_0[0,1]$. Cum R este injectiv, şi $R^{1/2}$ este injectiv, deci $R^{1/2}(L^2[0,1])$ este dens in $L^2[0,1]$. Există un şir $h_n \in L^2[0,1]$ astfel ca $R^{1/2}h_n =$

g_n converge către g in $L^2[0,1]$, ceea ce implică convergenţa lui $f_n = R^{1/2}g_n = Rh_n$ către f in $C_0[0,1]$. Cum $f_n \in R(L^2[0,1])$, avem

$$\| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f_n \|_{L^2[0,1]} = \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

şi cum g_n converge către g, se obţine că f'_n este şir mărginit in $L^2[0,1]$. Putem deci extrage un subşir (notat tot f'_n) convergent slab către $k \in L^2[0,1]$. In consecinţă, $f_n(t) = \langle f'_n, 1_{[0,t]}\rangle_{L^2[0,1]}$ converge pentru orice $t \in [0,1]$ către

$$\overline{k}(t) = \langle k, 1_{[0,t]}\rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^t k(s)ds.$$

Cum f_n converge către f in $C_0[0,1]$, rezultă că $f = \overline{k}$, deci există $k = f' \in L^2[0,1]$. In plus, cum f'_n converge slab către f' in $L^2[0,1]$, avem

$$\| f' \|_{L^2[0,1]} \leq \varliminf_{n\to+\infty} \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| g \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f \|_{L^2[0,1]}$$

adică, tinând cont de propoziţia 3.5.

$$\frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \leq \lambda(f) \text{ pentru } f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}\left(L^2[0,1]\right).$$

In plus, am văzut că $f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$ implică existenţa lui f' şi $f' \in L^2[0,1]$.

Reciproc, fie $f \in C_0[0,1]$ astfel că f' există şi $f' \in L^2[0,1]$. Aproximăm f' in $L^2[0,1]$ cu funcţii de clasă C^1 şi obţinem existenţa unui şir $v_n \in C_0[0,1]$ astfel că v'_n , v''_n există, $v''_n \in L^2[0,1]$, $v'_n(1) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} v'_n = f'$ in $L^2[0,1]$ şi $\lim_{n\to+\infty} v_n = f$ in $C_0[0,1]$. Semi-continuitatea inferioară a lui λ implică $\lambda(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} \lambda(v_n)$. Pe de altă parte, intrucât $v_n \in R(L^2[0,1])$, avem $\lambda(v_n) = \frac{1}{2} \| v'_n \|_{L^2[0,1]}$, deci

$$\lambda(f) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \| v'_n \|_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]} .$$

In particular $\lambda < +\infty$, ceea ce implică $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$.

Am identificat deci $C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$ cu mulţimea $f \in C_0[0,1]$ astfel că f' există şi $\in L^2[0,1]$, am demonstrat că $\lambda(f) = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]}$ pentru $f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$, în timp ce $\lambda = +\infty$ în afara acestui subspaţiu.□

Exerciţii.

1. Fie repartiţiile $\mu_\epsilon(dx) = (2\pi/\epsilon)^{-1/2} \exp(-x^2/2\epsilon)\, dx$. Arătaţi că

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) = -\operatorname*{essinf}_{x \in A} x^2/2$$

pentru orice boreliană reală A.

2. Fie procesul Ornstein-Uhlenbeck real definit prin

$$V_t = \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dB_s \,, \; V_0 = 0,$$

sau ca soluţia unică a ecuaţiei stocastice Langevin

$$V_t = \alpha B_t - \beta \int_0^t V_s ds.$$

Folosind metoda din propoziţia 4.4., arătaţi că transformarea Cramer a acestui proces este, pentru $f \in C_0[0,1]$

$$\lambda(f) = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^1 [f'(t) + \beta f(t)]^2 \, dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f', respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

3. Fie λ transformarea Cramer a legii traiectoriilor mişcarii browniene şi $f \in C_0[0,1]$ cu $\lambda(f) < +\infty$. Arătaţi că

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon B - f| < \delta \right\}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon B - f| < \delta \right\} = -\lambda(f).$$

4. În cazul unui proces gausian X_t (vezi propoziţia 3.5.), pentru $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$, arătaţi că

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{P\left\{\sup_{[0,1]} |\epsilon X - f| < \delta\right\}}{P\left\{\sup_{[0,1]} |\epsilon X| < \delta\right\}} = \exp\left\{-\epsilon^{-2} \lambda(f)\right\}.$$

5. Arătaţi că afirmaţiile de la 3 şi 4 rămân adevărate in cazul unei variabile aleatoare cu valori intr-un spaţiu Banach (sau a unei probabilităţi cu valori intr-un spaţiu Banach). Mai precis, fie λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \rightarrow \mathbf{E}$,cu $\mathbf{E}$ spaţiu Banach separabil, cu legea gausiană centrată. Atunci, pentru orice $S(\mathbf{H})$ (vezi notaţiile din propoziţia 3.2. şi teorema 3.3.), avem

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\| \epsilon X - x \| < \delta) = -\lambda(x)$$

şi

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{P(\| \epsilon X - x \| < \delta)}{P(\| \epsilon X \| < \delta)} = \exp\left\{-\epsilon^{-2} \lambda(x)\right\}.$$

Indicaţie. Arătaţi că, in ipoteza

$\Phi(t) := \{\lambda(x) \leq t\}$ sunt mulţimi compacte pentru orice $t > 0$,

următoarele afirmaţii sunt echivalente.

1) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă avem

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \geq -\Lambda(A).$$

1') Pentru orice $\delta, \gamma > 0$, $x \in \mathbf{E}$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\| \epsilon X - x \| < \delta) \geq \exp\left(-\epsilon^{-2}[\lambda(x) + \gamma]\right) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 .$$

Similar, următoarele afirmaţii sunt echivalente.

2) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ inchisă avem

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda(A).$$

2') Pentru orice $\delta, \gamma, s > 0$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\| \epsilon X - \Phi(s) \| \geq \delta) \leq \exp\left(-\epsilon^{-2}(s - \gamma)\right) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 .$$

LEMA 4.5. *Fie E spaţiu Banach separabil, λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \to E$ şi $A \subset E$ astfel ca*

$$\inf_{x \in \mathring{A}} \lambda(x) = \inf_{x \in \bar{A}} \lambda(x),$$

iar valoarea comună este atinsă intr-un punct unic $x_0 \in E$. Atunci, pentru orice $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{P\{(\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| < \delta)\}}{P(\epsilon X \in A)} = 1 \qquad (4.2)$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\inf\left\{\lambda(x),\ x \in \bar{A},\ \| x - x_0 \| < \delta\right\} > \lambda(x_0).$$

Apoi

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P((\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta))$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left(\left(\epsilon X \in \bar{A}\right) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta)\right)$$

$$< -\lambda(x_0).$$

Aceasta inseamnă că $P((\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta))$ converge către 0 mai repede ca numitorul din (4.2.).□

Exemplu. Fie procesul stocastic X_t^ϵ pe intervalul $[0, 1]$ care satisface ecuaţia liniară

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X_t^\epsilon \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k X_t^\epsilon}{dt^k} = \epsilon\ \dot{B}_t\ ,$$

impreună cu n condiţii la frontieră, liniare, omogene şi deterministe, unde B_t este o mişcare browniană. Avem

$$X_t^\epsilon = \epsilon \int_0^1 G(s, t)\, dB_s\ ,$$

unde $G(s,t)$ este funcţia Green a problemei la frontieră asociată operatorului $P(d/dt)$şi condiţiilor la frontieră date. Transformarea Cramer asociată traiectoriilor procesului X_t^ϵ este $\lambda(f) = +\infty$ dacă f nu satisface condiţiile la frontieră sau dacă derivata $d^{n-1} f_t/dt^{n-1}$ nu este absolut continuă, respectiv

$$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left| P\left(\frac{d}{dt}\right) f \right|^2 dt$$

in caz contrar. Arătaţi că mulţimea $A = \{f \in L^2[0,1] : \| f \| > c\}$ satisface ipotezele lemei 4.5. şi deduceţi că

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| > c\} = \lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| \geq c\}$$

$$= -\inf\left\{\frac{1}{2} \| P\left(\frac{d}{dt}\right) f \|^2\right\},$$

unde inf $-$ul se ia după toate funcţiile f care satisfac condiţiile la frontieră şi $\| f \| = c$. In cazul particular in care $P(d/dt)$ este autoadjunct in $L^2[0,1]$, avem

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| > c\} = -\frac{c^2}{2}\zeta^2,$$

unde ζ este valoarea proprie cea mai mica in valoare absolută a lui $P(d/dt)$.

Observaţie. Vom vedea in capitolul următor un alt exemplu de aplicare al lemei 4.5. in cazul difuziilor (soluţiile ecuaţiilor stocastice), la evaluarea asimptotică a probabilităţii ca difuzia să rămâna intr-un domeniu şi a primului timp de ieşire a difuziei dintr-un domeniu.

LEGEA TARE A NUMERELOR MARI

Pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ vom considera un şir de variabile aleatoare $\{X_n, n \geq 1\}$ independente şi identic repartizate, cu legea μ şi cu valori in spaţiul Banach separabil E. Să notăm $\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

TEOREMA 4.6. *Dacă* $E(\| X_1 \|) < +\infty$, *atunci* $\overline{X}_n \to E(\mu)$ *a.s. (şi in probabilitate).*

Demonstraţie. Să presupunem că $\| X_1 \| \leq M$ (a.s. sau in probabilitate). Atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \leq e^{sM} < +\infty$ pentru orice $s \in \mathbf{R}$ şi deci, din teorema 2.11. (şi lema 2.10.) există un compact $K \subset \mathbf{E}$ şi o constantă $c > 0$, cu

$$P\left(\overline{X}_n \notin K\right) = \mu_n(K^c) \leq ce^{-n} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$. Deci $P\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\overline{X}_n \notin K\right\}\right) = 0$ i.e. şirul $\left\{\overline{X}_n(\omega), n \geq 1\right\}$ este relativ compact pentru $\omega \in \Omega_1$, cu $P(\Omega_1^c) = 0$. Din legea tare a numerelor mari (cazul real) avem

$$t\left(\overline{X}_n\right) \to t(E(\mu)) \text{ a.s., in probabilitate,}$$

pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Cum $\mathbf{E}$ este separabil, $\mathbf{E}'$ este w^*−separabil, deci $\overline{X}_n(\omega) \to E(\mu)$ slab, pentru $\omega \in \Omega_2$, cu $P(\Omega_2^c) = 0$. Aceasta inseamnă că $\overline{X}_n(\omega) \to E(\mu)$ tare, pentru $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Pentru cazul general, notăm $X_n^{(M)} = \chi_{[0,M)}(\| X_n \|) X_n$ şi fie $Y_n^{(M)} = X_n - X_n^{(M)}$ pentru $n \geq 1$, $M > 0$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să alegem $M > 0$ cu $E\left(\| Y_1^{(M)} \|\right) < \epsilon/4$. Din legea tare pentru şirul $\left\{\| Y_n^{(M)} \|, n \geq 1\right\}$, alegem N astfel ca

$$P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \| Y_k^{(M)} \| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2$$

şi

$$P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n} \| X_n^{(M)} - E\left(\mu^{(M)}\right) \| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2,$$

unde $\mu^{(M)}$ este legea lui $X_1^{(M)}$. Observând că $\| E(\mu) - E\left(\mu^{(M)}\right) \| \leq E\left(\| Y_1^{(M)} \|\right)$, obţinem

$$P\left(\sup_{n\geq N} \| \overline{X}_n - E(\mu) \| \geq \epsilon\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{n\geq N} \| \overline{X}_n - X_n^{(M)} \| \geq \epsilon/3\right)$$

$$+P\left(\sup_{n\geq N} \| X_n^{(M)} - E\left(\mu^{(M)}\right) \| \geq \epsilon/3\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \| Y_k^{(M)} \| \geq \epsilon/3\right) + \epsilon/2 = \epsilon. \ \square$$

LEGEA LOGARITMULUI ITERAT

Fie $B_t : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in [0,1]$ o mişcare browniană cu $B_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mişcării browniene B_t pe $C_0[0,1]$, spaţiul Banach al funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi nule in 0. Reamintim că $tB_{1/t}$, $t \in [1, +\infty)$ este incă mişcare browniană, deci putem considera mişcarea browniană B_t definită pentru $t \in [0, +\infty)$.

Vom prezenta in continuare forma "functională" a legii logaritmului iterat pentru mişcarea browniană. Notăm $AC[0,1]$ spaţiul funcţiilor $g \in C[0,1]$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0,1]$, derivata (Lebesgue) g' a lui g există şi este de pătrat integrabil pe $[0,t]$, inzestrat cu topologia indusă de $C[0,1]$.

TEOREMA 4.7. *Sirul de procese*

$$(2n \log\log n)^{-1/2} B_{nt}\ ,\ t \in [0,1]\ ,\ n \geq 2,$$

(cu traiectoriile in $C_0[0,1]$), este relativ compact in $C_0[0,1]$ cu $\mu-$probabilitate 1 şi multimea punctelor sale limită este dată de

$$S = \left\{AC[0,1],\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f'(x)^2\, dx \leq 1\right\}.$$

Aceasta inseamnă că există $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilitate 0 cu proprietățile următoare.

1. Pentru orice $\omega \notin \Omega_0$ şi orice şir de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots$, există un subşir $n_{k_j} = n_{k_j}(\omega)$ şi o funcţie $f \in \mathcal{S}$ astfel ca

$$\left(2n_{k_j} \log\log n_{k_j}\right)^{-1/2} B_{n_{k_j}t}(\omega) \rightarrow f(t) \text{ uniform in } t \in [0,1], \text{şi}$$

2. Pentru orice $f \in \mathcal{S}$ şi $\omega \notin \Omega_0$, există un şir $n_k = n_k(\omega, f)$ astfel ca

$$(2n_k \log\log n_k)^{-1/2} B_{n_k t}(\omega) \longrightarrow f(t) \text{ uniform in } t \in [0,1].$$

Observaţie. Conform propoziţiei 4.4., mulţimea limită $\mathcal{S}$ coincide cu $\{AC[0,1], f(0) = 0, 2\lambda(f) \leq 1\}$.

COROLAR 4.8. *Dacă $\Phi : C_0[0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ este functională liniară şi continuă, atunci*

$$\limsup_{n\rightarrow+\infty} \Phi\left((2n \operatorname{loglog} n)^{-1/2} B_{n\cdot}\right) = \sup_{f\in\mathcal{S}} \Phi(f) \quad \mu - \text{a.s.}$$

In particular, pentru $\Phi(f) = f(1)$, obţinem legea clasică a logaritmului iterat :

$$\limsup_{n\rightarrow+\infty} \pm (2n \operatorname{loglog} n)^{-1/2} B_n = 1 \ \mu - \text{a.s.}$$

Observaţie. Folosind un rezultat al lui Skorohod, care afirmă că un şir de variabile aleatoare se poate obţine redefinind o mişcare browniană, din teorema 4.7. se poate obţine forma "funcţională" a legii Hartman-Wintner-Hincin a logaritmului iterat pentru variabile aleatoare identic repartizate. Mai precis, fie $X_1, X_2, \ldots$ independente, identic repartizate pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$, cu media 0 si dispersia 1. Definim $S_0 = 0$ şi

$$S_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ dacă } t \in \mathbf{N}^* \\ (1 - t - [t]) S_{[t]} + (t - [t]) S_{[t]+1} \text{ in caz contrar.} \end{cases}$$

Atunci şirul de procese

$$(2n \operatorname{loglog} n)^{-1/2} S_{nt}\ ,\ t \in [0,1]\,,\ n \geq 2,$$

este relativ compact in $C_0\,[0,1]$ cu $P-$probabilitate 1 şi mulţimea punctelor sale limită este dată de $\mathcal{S}$. In particular, procedând ca in corolarul 4.8., obţinem

$$\limsup_{n\to+\infty} \pm\, (2n \operatorname{loglog} n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} X_k \;= 1\ \ P-\text{a.s.}$$

Aplicaţie. Cu notaţiile de mai sus, fie μ_n legea lui $S_{nt}/n^{1/2}$. Arătaţi că $\mu_n \to \mu$ slab, unde μ este legea traiectoriilor mişcării browniene. (*Principiul de invariantă* al lui Donsker).

Pentru a face demonstraţia teoremei 4.7., vom avea nevoie de

LEMA 4.9. *Fie $K \subset C_0\,[0,1]$ compact, $g \in C_0\,[0,1]$ şi $I \subset (1,+\infty)$, $1 \in \bar{I}$. Notăm $g_n(t) = g(nt)/\,(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}$ pentru $n \geq 2$, $t \in [0,1]$. Pentru $i > 1$, notăm $i_n = [i^n]$. Dacă*

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\, g_{i_n} - K \,\| = 0 \text{ pentru orice } i \in I,$$

atunci şirul $\{g_n\ ,\ n \geq 2\}$ este relativ compact şi orice subşir convergent al său converge către un element din K.

Demonstraţie. Intrucât K este compact, există $M > 0$ şi $\rho : (0,1] \to (0,+\infty)$ nedescrescătoare cu $\lim_{t\searrow 0} \rho(t) = 0$ şi

$$\sup_{f\in K} \|\, f \,\| \leq M,\ \sup_{f\in K} |\, f(t) - f(s) \,| \leq \rho\,(t-s)\,,\ 0 \leq s < t \leq 1.$$

Dat fiind $\epsilon > 0$, să alegem $i \in I$ cu $\rho\,(1 - 1/i) < \epsilon$ şi $(i-1) \times (M+\epsilon) < \epsilon$. Apoi alegem un număr natural $L \geq 2$ astfel ca $\operatorname{loglog} ix/\operatorname{loglog} x \leq i$ pentru $x \geq L$. In fine, fie $n\,(i,\epsilon)$ cu $\|\, g_{i_n} - K \,\| < \epsilon$ pentru $n \geq n\,(i,\epsilon)$; notăm $n\,(\epsilon) = L \vee n\,(i,\epsilon)$. Pentru $n \geq n\,(\epsilon)$, să alegem m astfel ca $i^m \leq n \leq i^{n+1}$ şi notăm

$N = [i^{m+1}]$; cum $m \geq n(i, \epsilon)$, ştim că $\| g_N - K \| < \epsilon$. Deci $\| g_n - K \| < \epsilon + \| g_n - g_N \|$. Observând că

$$g_n(t) = g\left(\frac{n}{N} Nt\right) / (2 \log\log n)^{1/2}$$

$$= g_N\left(\frac{n}{N} t\right) (2 \log\log N)^{1/2} / (2 \log\log n)^{1/2} ,$$

obţinem

$$\| g_n - g_N \| = \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \frac{(2 \log\log N)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} g_N\left(\frac{n}{N} t\right) - g_N(t) \right|$$

$$\leq \left| \frac{(2 \log\log N)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} - 1 \right| \| g_N \| + \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| g_N\left(\frac{n}{N} t\right) - g_N(t) \right|$$

$$\leq \left| \frac{(2 \log\log N)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) + 2\epsilon + \rho\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Cum $n \leq N \leq \lambda n$, avem

$$1 \leq \frac{(2 \log\log N)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} \leq \frac{(2 \log\log \lambda n)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} \leq \lambda,$$

deci

$$\left| \frac{(2 \log\log N)^{1/2}}{(2 \log\log n)^{1/2}} - 1 \right| (M + \epsilon) \leq (\lambda - 1)(M + \epsilon) \leq \epsilon.$$

In acelaşi timp avem $\rho(1 - n/N) \leq \rho(1 - 1/\lambda) < \epsilon$, deci $\| g_n - K \| < 5\epsilon$ pentru $n \geq n(\epsilon)$.□

Demonstraţia teoremei 4.7. Fie $i > 1$ si $\delta > 0$ fixate ; notam $i_n = [i^n]$, $\mathcal{S}^\delta = \{g \in C_0[0,1], \ \| g - \mathcal{S} \| < \delta\}$, $\xi_n(t) = B_{nt} / (2 \log\log n)^{1/2}$ şi alegem $1 < i < \inf_{g \in \mathcal{S}^\delta} 2\lambda(g)$. Din a doua inegalitate a teoremei 4.4. rezultă

$$\mu\left(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) \leq \exp(-\gamma \log\log i_n) \leq \frac{1}{(n-1)^\gamma \log i}$$

pentru n suficient de mare. De aici obţinem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) < +\infty, \text{ deci } \mu\left(\limsup_{n\to+\infty} \xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) = 1.$$

Aceasta egalitate este adevărată pentru orice $\delta > 0$ deci, pentru orice $i > 1$, există B_i cu $\mu(B_i) = 0$ şi

$$\limsup_{n\to+\infty} \| \xi_{i_n}(\cdot,\omega) - \mathcal{S} \| = 0 \text{ pentru } \omega \notin B_i.$$

Punem $B = \cup_{n\geq 1} B_{1+1/n}$; avem $\mu(B) = 0$ şi pentru orice $\omega \notin B$ aplicăm lema 4.8. cu $I = \{1 + 1/n \ , n \geq 1\}$ pentru a obtine că şirul $\{\xi_n \ , n \geq 2\}$ este relativ compact şi orice subsir convergent al său converge către un element din $\mathcal{S}$.

Pentru reciprocă, să alegem o submulţime numărabilă densă in $\mathcal{S}$, formată din funcţii f cu $2\lambda(f) < 1$ (luăm e.g. $f_n(t) = \int_0^t \dot{f}_n(t)\,dt$; $n \geq 1$, $t \in [0,1]$, unde $\dot{f}_n \in L^2[0,1]$ este densă in $\left\{\dot{f} \in L^2[0,1],\ \|\dot{f}\|_{L^2[0,1]} < 1\right\}$). Este deci suficient de arătat că, pentru orice $f \in \mathcal{S}$ cu $2\lambda(f) < 1$, avem

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} \| \xi_n(\cdot) - f \| = 0\right) = 1.$$

Pentru $k \geq 2$, definim

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } 0 \leq t \leq 1/k \\ f(t) - f(1/k), \text{ pentru } t \geq 1/k \end{cases}$$

şi pentru $m \geq 1$

$$\eta_{m,k}(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 0 \leq t \leq 1/k \\ \left(B_{k^m t} - B_{k^{m-1}}\right) / \left(2 \log\log k^m\right)^{1/2}, \text{ dacă } t \geq 1/k. \end{cases}$$

Să observăm că

$$\| \xi_{k^m} - f \| \leq \sup_{[0,1/k]} \| \xi_{k^m} \| + \sup_{[0,1/k]} \| f \| + \sup_{[1/k,1]} \| \xi_{k^m} - f \|$$

$$\leq 2\left(\sup_{[0,1/k]} \| \xi_{k^m} \| + \sup_{[0,1/k]} \| f \|\right) + \| \eta_{m,k} - f_k \| .$$

Dacă $C := \{\omega : \xi_{i_n}(\cdot,\omega)$ este relativ compact$\}$, pentru $\delta > 0$ și $\omega \in C$, există $k(\omega) \geq 2$ cu

$$\| \xi_{k^m} - f \| \leq \delta + \| \eta_{m,k(\omega)} - f_k \| \text{ pentru } m \geq 1.$$

Cum $\mu(C) = 0$, este suficient de arătat că pentru $k \geq 2$,

$$\mu\left(\liminf_{m\to+\infty} \| \eta_{m,k} - f_k \| = 0\right) = 1.$$

Insa procesele $\{\eta_{m,k}\ ,\ m \geq 1\}$ sunt independente in raport cu μ, deci vom arăta că

$$\sum_{m\geq 1} \mu\left(\| \eta_{m,k} - f_k \| < \epsilon\right) = +\infty.$$

Din prima inegalitate din teorema 4.4. obținem că există $m(k)$ cu proprietatea

$$\mu\left(\| \eta_{m,k} - \tilde{f}_k \| < \epsilon\right) \geq \exp\left(-\gamma \log\log k^m\right) = \frac{1}{(m \log k)^{\gamma}}$$

pentru $m \geq m(k)$, unde γ este strict subunitar, iar $\tilde{f}_k := f_k(t + 1/k)$ pentru care $\int_0^{1-1/k} \tilde{f}_k'(t)^2\, dt \leq 2\lambda(f) < 1$. □

5

PERTURBATII ALEATOARE MICI

Fie $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ câmp (local) lipschitzian de vectori căruia îi asociem sistemul dinamic

$$\dot{x}_t = b(x_t), \tag{5.1}$$

unde x_t este soluţia maximală a lui (5.1.).

Fie σ aplicaţie (local) lipschitziană de la $\mathbf{R}^n$ in spaţiul matricilor (n, n). Pentru orice funcţie continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, orice $\epsilon \geq 0$ şi orice $x \in \mathbf{R}^n$, ecuaţia diferenţială

$$\dot{x}_t^\epsilon = b(x_t^\epsilon) + \epsilon\sigma(x_t^\epsilon) f_t \tag{5.2}$$

admite o soluţie maximală unică cu $x_0^\epsilon = x$. Dacă (a, b) este intervalul de definiţie al acestei soluţii maximale, atunci avem $0 < b \leq +\infty$, iar b nu nu poate fi finit dacât dacă $\lim_{t \to b} \|x_t^\epsilon\| = +\infty$. Vom numi b *timpul de explozie* al soluţiei x_t^ϵ.

Să considerăm un proces gausian $G_t : \Omega \to \mathbf{R}^n$ cu traiectorii continue, $\epsilon > 0$ şi sistemul

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon) G_t \\ X_0^\epsilon = x, \text{ cu } x \in \mathbf{R}^n \text{ dat,} \end{cases} \tag{5.3}$$

unde, pentru orice $\omega \in \Omega$, $X_t^\epsilon(\omega)$ este soluţia maximală unică a lui (5.2.) când inlocuim f_t cu $G_t(\omega)$ şi punem $X_0^\epsilon(\omega) = x$.

Continuitatea soluţiilor lui (5.2.) (ca funcţionale de f) implică măsurabilitatea lui X_t^ϵ in raport cu corpul borelian generat de G_s, $0 \leq s \leq t$. Să observăm că, in general, X_t^ϵ nu este proces gausian.

Problema pe care o studiem este de a preciza comportamentul traiectoriilor lui X_t^ϵ când $\epsilon \to 0$, mai precis să evaluăm probabilitatea ca traiectoria lui X_t^ϵ, $t \in [0,1]$ să aparțină unei mulțimi A de traiectorii "aberante "din punctul de vedere al sistemului (5.1.). Aceste probabilități vor converge către 0 odată cu ϵ, cu viteze de tipul $\exp(-C(A)\epsilon^2)$, iar problema este de a evalua $C(A)$.

Interpretarea euristică a acestei probleme este următoarea. "Creșterile " $\Delta X_t^\epsilon = X_{t+\Delta t}^\epsilon - X_t^\epsilon$ "verifică " $\Delta X_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)\Delta t + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\Delta Z_t$. Cu alte cuvinte, creșterea deterministă $b(X_t^\epsilon)\Delta t$ anticipată de sistemul (5.1.) este perturbată aici de variabila aleatoare $\epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\Delta Z_t$ ("zgomotul") a cărei legi condiționate de trecut la timpul t este gausiană centrată și cu matricea de covariație proporțională cu ϵ^2.

Remarcă. Dacă $b \equiv 0$, $k = n$, $x = 0$, $\sigma \equiv$identitatea, atunci $X_t^\epsilon = \epsilon Z_t$, unde $Z_t = \int_0^t G_s ds$ este proces gausian cu traiectorii continue iar aceasta situație a fost tratată in capitolul anterior.

Vom presupune că timpii de explozie ai soluțiilor lui (5.1.)-(5.3.) sunt infiniți. Aceasta se intâmplă e.g. dacă b și σ sunt cu creștere subliniară i.e. $||b(y)|| + ||b(y)|| \leq ct.(1 + ||y||)$ (similar pentru σ). Totodată vom presupune că, pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$, matricea $\sigma(x)$ este inversabilă.

Observație. In aceste ipoteze putem justifica afirmația că (5.3.) este "perturbație aleatoare mică" a lui (5.1.). Mai precis, se poate arată că, pentru orice $t \in [0,1]$ și $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta\right\} = 0.$$

Vom nota $C[0,1]$ spaţiul funcţiilor continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ şi, pentru $x \in \mathbf{R}^n$, notăm $C_x[0,1]$ subspaţiul funcţiilor $f \in C[0,1]$ cu $f(0) = x$, ambele inzestrate cu topologia convergenţei uniforme. In particular, observăm că aplicaţia X^ϵ care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria (soluţia lui (5.3.)) $t \to X_t^\epsilon$, $t \in [0,1]$, este măsurabilă de la Ω la $C_x[0,1]$. Fie acum $x \in \mathbf{R}^n$ fixat.

Pentru orice $f \in C[0,1]$, vom nota $F_x(f)$ restricţia la $[0,1]$ a soluţiei unice maximale g a ecuaţiei diferenţiale

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t \text{ cu } g_0 = x.$$

Din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, obţinem că aplicaţia F_x de la $C[0,1]$ la $C_x[0,1]$ este *continuă*.

TEOREMA 5.1. *In ipotezele precedente, notăm $\lambda : C[0,1] \to [0,+\infty]$ transformarea Cramer a legii traiectoriilor procesului G_t in $C[0,1]$. Definim $\tilde{\lambda}(g) = +\infty$ dacă g nu este de clasă C^1 pe $[0,1]$ şi*

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda(f),$$

cu f dată de $f_t = \sigma(g_t)^{-1}\left(\dot{g}_t - b(g_t)\right)$, $t \in [0,1]$, $g_0 = x$. Dacă $\tilde{\Lambda}(A) = \inf_{g \in A} \tilde{\lambda}(g)$ pentru A boreliană in $C_x[0,1]$, atunci

$$-\tilde{\Lambda}\left(\mathring{A}\right) \le \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\le \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \le -\tilde{\Lambda}\left(\bar{A}\right).$$

Demonstraţie. Pentru $g \in C_x[0,1]$ considerăm mulţimea (posibil vidă) $F_x^{-1}(g)$ a funcţiilor $f \in C[0,1]$ astfel că g este pe $[0,1]$ soluţia maximală a ecuaţiei diferenţiale $\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t$ cu $g_0 = x$. Atunci avem că $\lambda(g) = \inf\{\lambda(f) \mid f \in F_x^{-1}(g)\}$ pentru $g \in C_x[0,1]$ şi $\tilde{\Lambda}(A) = \Lambda \circ F_x^{-1}(A)$ pentru $A \subset C_x[0,1]$.

Intrucât $P(X^\epsilon \in A) = P\{\epsilon G \in F_x^{-1}(A)\}$, teorema 3.3. arată că, atunci când $\epsilon \to 0$, liminf şi limsup ale lui $\epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$

sunt in intervalul $\left[-\Lambda\left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right]$, unde $C = F_x^{-1}(A)$. Continuitatea lui F_x implică $\bar{C} \subset F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)$ şi $\overset{\circ}{C} \supset F_x^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)$, deci

$$\left[-\Lambda\left(\overset{\circ}{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right] \subset \left[-\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\overset{\circ}{A}\right)\right), -\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)\right)\right].$$

Rămâne să aplicăm teorema 2.11.,tinând cont că $\tilde{\lambda}$ este inferior semi-continuă şi mulţimile $\left\{\tilde{\lambda}(g) \leq a\right\}$ sunt compacte pentru orice $a \geq 0$ finit (deoarece λ este inferior semi-continuă şi F_x este continuă).□

Observaţie. Ipotezele in care am lucrat se pot adapta uşor la situaţia in care procesul gausian G_t are traiectoriile in L^2 (resp. continue) şi inzestrând spaţiul traiectoriilor lui X_t^ϵ cu norma $\left(\|\dot{g}\|_{L^2}^2 + \| g \|_{L^2}^2\right)^{1/2}$ (resp. $\|\dot{g}\|_\infty^2 + \| g \|_\infty^2$).□

Situaţia tratată până acum se referă la un proces X_t^ϵ ale carui traiectorii verifică "ecuaţia stocastică " $dX_t^\epsilon = b\left(X_t^\epsilon\right)dt + \epsilon\sigma\left(X_t^\epsilon\right)dZ_t$, unde Z_t este proces gausian cu traiectoriile continue şi *diferenţiabile.*

Cazul ecuaţiilor stocastice ar corespunde lui $Z_t = B_t$, unde B_t este mişcare browniană. Insă B_t nu este diferenţiabilă, deci nu este posibil să considerăm X_t^ϵ ca funcţională continuă de "$\epsilon\ B_t$" , dar putem considera X_t^ϵ ca funcţională de $F_x(\epsilon B)$, unde B inseamnă traiectoria mişcării browniene in R^n . In general insă, regularitatea aplicaţiei F_x se reduce in acest caz doar la măsurabilitate, deşi rezultatul formal vom vedea că rămâne adevarat i.e. dacă notăm λ funcţionala Cramer a mişcării browniene şi $\tilde{\lambda}$ "funcţionala Cramer " asociată ecuaţiei stocastice $dX_t^\epsilon = b\left(X_t^\epsilon\right)dt + \epsilon\sigma\left(X_t^\epsilon\right)dB_t$, din propoziţia 4.4. şi teorema 5.1., avem

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda\left[F_x^{-1}(g)\right] = \frac{1}{2}\left\| \frac{d}{dt}F_x^{-1}(g)\right\|_{L^2}^2,$$

unde relaţia $f = F_x^{-1}(g)$ inseamnă $g_t = \int_0^t \left[b(g_s) + \sigma(g_s)\dot{f}_s\right] ds$,

adică
$$\tilde{\lambda}(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 \| \sigma(g_s)^{-1}\left[\dot{g}_s - b(g_s)\right] \|^2 ds.$$

Să arătăm insă acest lucru riguros ; punctul "tare" va fi in a arăta că, pentru ϵ mic, aplicaţia F_x "seamănă" cu o aplicaţie continuă.

Fie $D \subset R^n$ deschis, σ câmp de matrice (n,n) şi o familie de câmpuri de vectori b_ϵ , $\epsilon \geq 0$ $(b_0 =: b)$ care satisfac condiţiile

$$\begin{gathered}\sigma \in C^1(D) \\ b_\epsilon \text{ sunt local lipschitziene pe } D \\ \lim_{\epsilon \to 0} b_\epsilon(x) = b(x) \text{ uniform pe compactele lui } D.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Notam prin X_t^ϵ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice pe D

$$dX_t^\epsilon = b_\epsilon(X_t^\epsilon)\,dt + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\,dB_t\ ,\ X_0^\epsilon = x \in D, \tag{5.5}$$

unde B_t este mişcare browniană de dimensiune n. Vom presupune că ecuaţia (5.5.) are o soluţie unică $X_t^\epsilon : \Omega \to D$, $t \in [0,1]$ i.e. timpul de explozie al acestei soluţii este infinit pe D şi traiectoriile soluţiei sunt in $C_x(D)$, spaţiul funcţiilor f continue pe D cu $f(0) = x$. Vom nota $X^\epsilon : \Omega \to C_x(D)$ variabila aleatoare care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria $t \to X_t^\epsilon(\omega)$.

Observaţie. Sistemul (5.5.) poate fi considerat şi el ca perturbaţie mică a sistemului dinamic (5.1.) in sensul că, pentru orice $t \in [0,1]$ şi $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta\right\} = 0\ ;$$

in plus acest model este "invariant " la schimbările de coordonate i.e. dacă $\varphi : D \to D'$ (D' deschis din $\mathbf{R}^n$) este difeomorfism, atunci procesul $\varphi(X_t^\epsilon)$ verifică o ecuaţie de tip (5.5.) cu coeficienţi b'_ϵ ,σ' care satisfac condiţiile (5.4.).

Vom nota $AC(D)$ spaţiul funcţiilor $g \in C(D)$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0,1]$, derivata (Lebesgue) $\dot{g}$ a lui g există şi este de pătrat integrabil pe $[0,t]$, inzestrat cu topologia indusă de $C(D)$. Din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, avem

LEMA 5.2. *Fie $x \in D$ şi $f \in AC(D)$. Atunci ecuaţia diferenţială*

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t)\,\dot{f}_t \tag{5.6}$$

admite o soluţie unică $g \in AC(D)$ cu $g_0 = x$. Notăm această asociere $g = F_x(f)$. Aplicaţia $F : D \times AC(D) \to AC(D)$ nu este in general continuă, dar restricţia ei la $D \times K_a$ este continuă pentru orice $a \geq 0$, unde $K_a := \left\{ f \in AC(D) \,\middle|\, \int_0^1 |\dot{f}_t|^2\, dt \leq a \right\}$. In plus, pentru orice compacţi $K, L \subset D$ cu $K \subset \mathring{L}$ şi orice $a > 0$, există $t, c > 0$ cu proprietăţile

(i) pentru orice $v \in K$, $f \in K_a$, funcţia $h = F_v(f)$ are timpul de explozie infinit şi $h([0,t]) \subset L$.

(ii) pentru orice $v, w \in K$, $f \in K_a$ şi $s \leq t$ avem

$$\sup_{[0,s]} | F_v(f) - F_w(f) | \leq e^{cs} \, | v - w | .$$

TEOREMA 5.3. *Cu notaţiile şi in ipotezele precedente, să fixăm un compact $K \subset D$ şi numerele reale $a > 0$, $t \in (0,1]$. Atunci, pentru orice $R, \rho > 0$ există $\alpha, r, \epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Pentru orice $x \in K$, $f \in AC(\mathbf{R}^n)$, $g = F_x(f)$ care verifică $\int_0^t |\dot{f}_t|^2\, dt \leq a$ şi $g([0,t]) \subset K$, relaţiile $\epsilon \leq \epsilon_0$ şi $| X_0^\epsilon - x | \leq r$ (P-a.s.) implică*

$$P\left[\sup_{[0,t]} | \epsilon B - f | \leq \alpha \text{ şi } \sup_{[0,t]} | X^\epsilon - g | > \rho \right] \tag{5.7}$$

$$\leq \exp\left(-R\epsilon^{-2} \right).$$

Observaţii.

1. Pentru $h \in C(D)$, să notăm

$$\Gamma_{0,t}(h,r) = \left\{ k \in C(D) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} | h - k | \leq r \right\}$$

banda inchisă de axă h şi rază r. Teorema 5.3. garantează că, pentru ϵ şi α mici şi dacă neglijăm un eveniment de probabilitate inferioară lui $\exp(-R\epsilon^{-2})$, prezenţa lui ϵB in banda $A = \Gamma_{0,t}(f,\alpha)$ implică prezenţa lui X^ϵ in banda de axă $g = F_x(f)$ şi rază ρ, cu condiţia ca X_0^ϵ sa fie suficient de aproape de $g_0 = x$.

2. Teorema 5.3. descrie deci o proprietate de "continuitate" a aplicaţiei măsurabile care lui ϵB ii asociază X^ϵ când $x = X_0^\epsilon$ este fixat.

3. Formal, propoziţia 4.4. implică $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon B \in A) = -\Lambda(A)$, unde $\Lambda(A) = \inf_{\varphi\in A} \lambda(\varphi)$ şi $\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{\varphi}_s\|^2\, ds$, norma fiind euclidiană. Probabilitatea $P(\epsilon B \in A)$ se comportă deci ca şi $\exp(-(ct.)\epsilon^{-2})$; dar, pentru R suficient de mare, probabilitățile in $\exp(-R\epsilon^{-2})$ sunt neglijabile in raport cu $P(\epsilon B \in A)$. Aceasta ajută la inţelegerea consecinţei următoare.

COROLARUL 5.4. *In ipotezele şi cu notaţiile din teorema 5.3., să fixăm x, f şi punem $g = F_x f$. Atunci, pentru orice $\rho > 0$ şi $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ astfel ca relaţia $\alpha \leq \alpha_0$ să implice*

$$\lim_{\epsilon\to 0} P\left[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g,\rho) \,|\epsilon B \in \Gamma_{0,t}(f,\alpha)\right] = 1.$$

Mai precis, pentru orice $\rho, R > 0$ şi $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ şi $\epsilon_0(\alpha) > 0$ cu proprietatea

$$P\left[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g,\rho) \,|\epsilon B \in \Gamma_{0,t}(f,\alpha)\right] \geq 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right)$$

pentru $\alpha \leq \alpha_0$ şi $\epsilon \leq \epsilon_0(\alpha)$.

Demonstraţia corolarului 5.4. Vom nota simplu $\Gamma_{0,t}(g,\rho) = \Gamma_g$ si $\Gamma_{0,t}(f,\alpha) = \Gamma_f$. Fie $p = P[X^\epsilon \in \Gamma_g |\epsilon B \in \Gamma_f]$. Atunci

$$p = 1 - \frac{P[(\epsilon B \in \Gamma_f) \cap (X^\epsilon \notin \Gamma_g)]}{P(\epsilon B \in \Gamma_f)}. \tag{5.8}$$

Fie $a = \frac{1}{2} \int_0^t |\dot{f}_t|^2 \, dt$. Conform propoziţiei 4.4., avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P[\epsilon B \in \Gamma_f] = -\Lambda(\Gamma_f) \geq -a$$

deci, pentru $\epsilon \leq \epsilon_1(\alpha)$

$$P[\epsilon B \in \Gamma_f] \geq \exp\left(-\frac{2a}{\epsilon^2}\right). \tag{5.9}$$

Pentru $R > 0$ dat, să punem $R_1 = R + 2a$. Teorema 5.3. aplicată lui ρ, t, R_1 implică existenţa unor $\epsilon_0(R_1)$, $\alpha_0(R_1)$ astfel că majorarea (5.7.) se aplică pentru $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1)$ şi $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$. Din formulele (5.8.) şi (5.9.) rezultă, pentru $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$ şi $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1) \wedge \epsilon_1$

$$p \geq 1 - \frac{\exp(-R_1/\epsilon^2)}{\exp(-2a/\epsilon^2)} = 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right). \square$$

Demonstraţia teoremei 5.3. Fie $K, L \subset D$ compacte astfel ca $K \subset \mathring{L}$. Notam K^r reuniunea bilelor inchise de centru $v \in K$ şi de rază $r > 0$. Fixăm $r_0 > 0$ astfel ca $K^{3r_0} \subset \mathring{L}$, $a > 0$, $T \in (0, 1]$ şi punem $K_a = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \middle| \int_0^T |\dot{f}_t|^2 \, dt \leq a \right\}$.

Din propoziţia 5.2., există $s_0 \in (0, T]$ astfel ca, pentru orice $f \in K_a$ şi orice $v \in K^{r_0}$, funcţia $h = F_x f$ să fie definită pe $[0, s_0]$ şi $h([0, s_0]) \subset K^{2r_0}$. In plus, pentru s_0 suficient de mic, există o constantă $c > 0$ astfel ca, pentru $s \leq s_0$, $v, w \in K^{r_0}$, $f \in K_a$ să avem

$$\sup_{[0,s]} (F_v f, \; F_w f) \leq e^{cs} \mid v - w \mid . \tag{5.10}$$

Pentru $\rho \in (0, r_0]$, $v \in K^{r_0}$ şi $g = F_v f$, cu notaţia $\varphi_t = X_t^\epsilon - g_t$ avem, pentru $t \leq s_0$

$$\varphi_t = \int_0^t a_s dB_s + z_t + \int_0^t h_s ds + X_0^\epsilon - v,$$

unde am notat $a_s = \epsilon [\sigma(X_s^\epsilon) - \sigma(g_s)]$, $h_s = b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)$, $z_t = \int_0^t \sigma(g_s) \left[\epsilon dB_s - \dot{f}_s \, ds \right]$.

Funcţia $m_s = \frac{d}{ds}\sigma(X_s^\epsilon) \in L^2[0, s_0]$ şi, integrând prin părţi, obţinem

$$z_t = \sigma(g_t)[\epsilon B_t - f_t] - \sigma(g_0)[\epsilon B_0 - f_0] - \int_0^t m_s(\epsilon B_s - f_s)\,ds.$$

Pentru $\alpha > 0$, $\rho \in (0, r_0]$, considerăm timpii de ieşire

$$\begin{aligned} \eta &= \inf\{s \in [0,1]\ ;\ |\epsilon B_s - f_s| \geq \alpha\} \\ \theta &= \inf\{s \in [0,1]\ ;\ |X_s^\epsilon - g_s| \geq \rho\}. \end{aligned}$$

Pentru $t \leq \theta \wedge s_0$, X_t^ϵ şi g_t rămân in $K^{3r_0} \subset L$ şi există deci o constantă care majorează (peste tot) expresiile $|\sigma(g_t)|$, $|\sigma(X_t^\epsilon) - \sigma(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$, $|b(X_t^\epsilon) - b(g_t)| / |X_t^\epsilon - g_t|$ şi $\int_0^t |m_s|^2\,ds$.

Convergenţa lui b_ϵ către b este uniformă pe compacţi deci, pentru orice $\gamma > 0$, există $\epsilon_0(\gamma) > 0$ astfel ca

$$|b_\epsilon(X_t^\epsilon) - b(X_t^\epsilon)| \leq \gamma \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ si } t \leq \theta \wedge s_0\ .$$

Punem condiţiile

$$\begin{gathered} v \in K^{r_0}\ ,\ f \in K_a\ ,\ \epsilon \leq \epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma)\ ,\ \rho \leq r_0 \\ |X_0^\epsilon - v| \leq \rho/R\ P\text{-a.s.} \end{gathered} \tag{5.11}$$

pentru a obţine majorările (cu c constantă adecvată)

$$|a_t| \leq \epsilon c_\rho \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$\int_0^t h_s ds \leq \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(X_s^\epsilon)|\,ds$$

$$+ \int_0^t |b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)|\,ds \leq (\gamma + c\rho)t \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$|z_t| \leq c^\alpha \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0 \wedge \eta.$$

Punem $w_t = \int_0^t a_s dB_s = \varphi_t - z_t - \int_0^t h_s ds - X_0^\epsilon + v$ pentru a obţine

$$|w_t| \geq |\varphi_t| - |z_t| - \left|\int_0^t h_s ds\right| - \frac{1}{5}\rho.$$

Fie $s \leq s_0$. Cu notaţia $A := \{\theta \leq s \leq \eta\}$, obţinem $| \varphi_\theta | = \rho$ şi, ţinând cont de majorările precedente, obţinem

$$| w_\theta | \geq \rho - c\alpha - \gamma s - cs\rho - \frac{1}{5}\rho .$$

In afară de condiţiile (5.11.), să punem şi condiţiile

$$c\alpha \leq \frac{1}{5}\rho, \; s \leq s_0 \; , \; cs \leq \frac{1}{5}, \; \gamma s_0 = \frac{1}{5}\rho \tag{5.12}$$

pentru a obţine că $A \subset \left\{| w_\theta | \geq \frac{1}{5}\rho\right\}$. Dacă w_θ^i , $i = 1, \ldots, n$ sunt coordonatele lui w_θ , atunci

$$P(A) \leq \sum_{i=1}^{n} P\left\{| w_\theta | \geq \frac{1}{5}\rho\right\}. \tag{5.13}$$

Pentru orice $i = 1, \ldots, n$, w_t^i este martingal local al carui proces crescator asociat d_t este majorat de $\int_0^t | a_s |^2 ds$, deci $Z_t := \exp\left(M w_t^i - \frac{M^2}{2} d_t\right)$ este martingal local pentru orice $M \in \mathbf{R}$. In consecinţă, $Z_{t\wedge\theta}$ este martingal mărginit pentru $t \in [0, T]$ şi $E(Z_{s\wedge\theta}) = E(Z_0) = 1$. Putem scrie deci

$$P\left\{w_{s\wedge\theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} = P\left\{M w_{s\wedge\theta}^i - \frac{M^2}{2} d_{s\wedge\theta} \geq \frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2} d_{s\wedge\theta}\right\},$$

iar din (5.12.) obtinem

$$d_{s\wedge\theta} \leq \int_0^{s\wedge\theta} | a_s |^2 ds \leq \epsilon^2 s c^2 \rho^2 ,$$

deci

$$P\left\{w_{s\wedge\theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} \leq P\left\{Z_{s\wedge\theta} \geq \exp\left(\frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2}\epsilon^2 s c^2 \rho^2\right)\right\}$$

$$\leq E(Z_{s\wedge\theta}) \exp\left(-\frac{M}{5}\rho + \frac{M^2}{2}\epsilon^2 s c^2 \rho^2\right).$$

Alegem acum $M = \rho/5\left(\epsilon^2 s c^2 \rho^2\right)$ pentru a obţine

$$P\left\{w_{s\wedge\theta}^i \geq \frac{1}{5}\rho\right\} \leq \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right).$$

Similar găsim o majorare pentru $P\left\{w^i_{s\wedge\theta} \leq -\frac{1}{5}\rho\right\}$ deci, impreună cu (5.13.) obţinem, in ipotezele (5.11.) şi (5.12.)

$$P(A) \leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right).$$

Ceea ce am demonstrat până acum se poate enunţa astfel. In ipotezele

$$v \in K^{r_0}\ ,\ f \in K_a\ ,\ g = F_x f,\ \mid X_0^\epsilon - v \mid \leq \rho/5\ P\text{-a.s.}$$

$$\rho \leq r_0\ ,\ \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) = \epsilon_0\left(\frac{\rho}{5s_0}\right),\ \alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c} \tag{5.14}$$

$$\alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c},\ s \leq s_1 = s_0 \wedge \frac{1}{5c},$$

are loc

$$P\left[\sup_{[0,s]} \mid \epsilon B - f \mid \leq \alpha \text{ şi } \sup_{[0,s]} \mid X^\epsilon - g \mid \geq \rho\right] \tag{5.15}$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right).$$

Conform proprietatii Markov obţinem că, dacă

$$f \in K_a\ ,\ \rho \leq r_0\ ,\ \epsilon \leq \epsilon_1(\rho)\ ,\ \alpha \leq \alpha_0(\rho)\ ,\ s \leq s_1,\ t + s \leq T,$$

atunci, pe mulţimea $\{\omega \in \Omega\ ;\ X_t^\epsilon \in K^{r_0}\}$, are loc P - a.s. inegalitatea

$$P\left[\sup_{[t,t+s]} \mid \epsilon B - f \mid \leq \alpha \text{ şi } \sup_{[t,t+s]} \mid X^\epsilon - G^t \mid \geq \rho \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{5.16}$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right),$$

unde $\mathcal{F}_t$ este corpul borelian generat de mişcarea browniană până la momentul t, iar G^t este traiectoria aleatoare definită pe $[t, t+s]$ ca soluţia unică a ecuaţiei stocastice $\dot{\psi}_s = b(\psi_s) + \sigma(\psi_s)\dot{f}_s$, care porneşte din X_t^ϵ la timpul t.

Fie acum $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ şi $N \in \mathbf{N}^*$. Punem $g = F_x(f)$, $s = T/N$ şi presupunem verificate condiţiile

$$f \in K_a\ ,\ g([0,T]) \subset K,\ \epsilon \leq \epsilon_1(\rho)\,,\ \alpha \leq \alpha_0(\rho)\,,\ s \leq s_1. \tag{5.17}$$

Pentru $k = 0, \ldots, N-1$, definim evenimentele

$$A_0 = \left\{ \sup_{[0,s]} \mid X^\epsilon - g \mid \geq \rho \right\} \text{ şi}$$

$$A_k = \left\{ \sup_{[ks,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - G^{ks} \mid \geq \rho \right\},\ k = 1, \ldots, N-1.$$

Prin recurenţă după k, in ipoteza

$$\rho N \left(e^{cT} - 1\right) / cT \leq r_0\ , \tag{5.18}$$

să arătăm că, pentru $k = 1, \ldots, N$ avem

$$A_0 \cap \ldots \cap A_{k-1} \tag{5.19}$$

$$\subset \left\{ \sup_{[0,ks]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho \left(e^{cks} - 1\right) / \left(e^{cs} - 1\right) \right\}$$

Pentru $k = 1$ relaţia (5.19.) este evidentă. Dacă este adevărată pentru un $k = 1, \ldots, N-1$, fie $\omega \in A_0 \cap \ldots \cap A_k$; din ipoteza de inductie avem

$$\mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid \leq \rho \frac{e^{cks} - 1}{e^{cs} - 1} \leq \rho \frac{e^{cT} - 1}{e^{cT/N} - 1} \leq \rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT},$$

deci, in ipoteza (5.18.), avem că $X^\epsilon_{ks} \in K^{r_0}$. Traiectoriile G^{ks} iau valori in D pe $[ks, (k+1)s]$ iar proprietatea (5.10.) implică

$$\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid G^{ks} - g \mid \leq \mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid,$$

deci

$$\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho + e^{cs} \mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid .$$

Obţinem in fine

$$\sup_{[0,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho e^{cs} \left(e^{cks} - 1\right) / \left(e^{cs} - 1\right)$$

$$= \rho\left(e^{c(k+1)s} - 1\right) / \left(e^{cs} - 1\right),$$

deci (5.19.) este demonstrată.

Fie $r > 0$ arbitrar şi presupunem indeplinită condiţia

$$\rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT} < r \wedge r_0 \tag{5.20}$$

Atunci (5.19.) implică, pentru $k = N$,

$$A_0 \cap \ldots \cap A_{N-1} \subset \left\{\sup_{[0,T]} | X^\epsilon - g |< r\right\},$$

deci

$$\left\{\sup_{[0,T]} | X^\epsilon - g |\geq r\right\} \subset A_0^c \cap \ldots \cap A_{N-1}^c = \bigcup_{k=0}^{N-1} F_k\,, \tag{5.21}$$

unde $F_0 = A_0^c$, $F_k = A_0 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$ pentru $k = 1, \ldots, N-1$. Din (5.19.) şi (5.20.) avem $F_k \subset \{X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap A_k^c$ şi deci $F_k \subset \{X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap \left\{\sup_{[ks,(k+1)s]} | X^\epsilon - G^{ks} |> \rho\right\}$.

Condiţiile (5.17.), (5.20.) şi

$$| X_0^\epsilon - g_0 |\leq \frac{1}{5}\rho \ P\text{-a.s.} \tag{5.22}$$

implică $F_0 \subset \left\{| X_0^\epsilon - g_0 |\leq \frac{1}{5}\rho\right\} \cap \left\{\sup_{[0,s]} | X^\epsilon - g |> \rho\right\}$. Aplicăm acum inegalităţile (5.15.) şi (5.16.) pentru a obţine, pentru $k = 0, \ldots, N-1$,

$$P\left[F_k \cap \left\{\sup_{[0,T]} | \epsilon B - f |\leq \alpha\right\}\right] \leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right). \tag{5.23}$$

Notăm $Q = \left\{\sup_{[0,T]} | \epsilon B - f |\leq \alpha \text{şi } \sup_{[0,T]} | X^\epsilon - g |\geq r\right\}$. Din (5.21)-(5.23) rezultă (pentru că $s = T/N$)

$$P(Q) \leq 2nN \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 T c^2}\right)$$

şi cum $se^{-s} \leq e^{-s/2}$ pentru orice $s \geq 0$, avem

$$P(Q) \leq 100 n\epsilon^2 T c^2 \exp\left(-\frac{N}{100\epsilon^2 T c^2}\right).$$

Fie $R > 0$ arbitrar ; în condițiile (5.17.), (5.20.), (5.22.) și

$$N/100Tc^2 \ , \ 100nTc^2\epsilon^2 \leq 1 \tag{5.24}$$

obținem $P(Q) \leq \exp(-R/\epsilon^2)$. Pentru a termina demonstrația, să observăm că setul următor de condiții implică (5.17.), (5.20.), (5.22.) și (5.24.).

$$\epsilon \leq \epsilon_2(r,R),\ \alpha \leq \alpha_1(r,R),\ f \in K_a\ ,\ g([0,T]) \subset K$$

$$| X_0^\epsilon - x | \leq 1/5\rho_0(r,R) \ \ P\text{-a.s.}\ ,$$

unde $\epsilon_2(r,R) = \min\left[\epsilon_1(\rho_0), 1/\sqrt{100nTc^2}\right]$, $\alpha_1(r,R) = \alpha_0(\rho_0)$, $\rho_0 = \min\left[cT(r \wedge r_0)/2N_0\left(e^{cT}-1\right), r_0\right]$, iar $N_0 = N_0(R)$ este ales $\geq \max(100Tc^2R, T/s_1)$.□

Definim *transformarea Cramer* $\lambda : C(D) \to [0,+\infty]$ a sistemului dinamic (5.5.) prin

$$\lambda(g) = +\infty \text{ pentru } g \in C(D)\,,\ g \notin AC(D)\,, \tag{5.25}$$

$$\lambda(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 \| \sigma(g_t)^{-1}\left[\dot{g}_t - b(g_t)\right] \|^2 \, dt$$

și *funcționala Cramer* a sistemului (5.5.) prin

$$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g) \ \text{ pentru orice } A \subset C(D)\,. \tag{5.26}$$

Interpretarea transformării Cramer este aceea că $\lambda(g)$ măsoară distanța dintre g și soluția sistemului (5.1.), ambele plecând din același punct $x \in D$ și utilizând pe spațiul tangent la D în x metrica definită de forma pătratică $\frac{1}{2} \| \sigma(x)^{-1}(\cdot) \|^2$.

PROPOZITIA 5.5. *Cu notaţiile de mai sus şi in ipotezele (5.4.), transformarea Cramer (5.25.) este inferior semicontinuă , pentru orice compact $K \subset D$ şi $a \geq 0$, mulţimile $\{g \in C(D)$, $g_0 \in K$, $\lambda(g) \leq a\}$ sunt compacte şi, pentru orice $g \in C(D)$, avem*

$$\lambda(g) = \inf\left\{\widetilde{\lambda}(f),\ f \in AC(\mathbf{R}^n),\ g = F_x f\right\}, \qquad (5.27)$$

unde $\widetilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}_t|^2\, dt$ *este transformarea Cramer a mişcării browniene (cf. propoziţiei 4.4.). In această formulă,* inf *este atins dacă* $\lambda(g)$ *este finită.*

Demonstraţie. Fie borelianul

$$D^* = \left\{(x, v) \in D \times \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sigma(x)^{-1}(v) \neq \emptyset\right\}$$

şi, pentru $(x, v) \in D^*$, notăm

$$K(x, v) = \left\{w \in \sigma(x)^{-1}(v) \,\middle|\, |\,v\,| = \inf_{u \in \sigma(x)^{-1}(v)} |\,u\,|\right\}.$$

Cum $\{(u, v)\,|\,K(x, v) \cap S \neq \emptyset\}$ este borelian pentru orice inchis S din $\mathbf{R}^n$, există o funcţie boreliană $\chi : D^* \to \mathbf{R}^n$ cu proprietatea $\chi(x, v) \in K(x, v)$ pentru orice $(x, v) \in D^*$.

Fie $g \in C(D)$ cu $\lambda(g)$ finită. Din faptul că

$$\|\,\sigma^{-1}(x)\,v\,\|^2 = \inf\left\{|\,w\,|^2,\ w \in \mathbf{R}^n,\ \sigma(x)w = v\right\},$$

avem $\left(g_t\,,\ \dot{g}_t - b(g_t)\right) \in D^*$ şi

$$\|\,\sigma(g_t)^{-1}\left[\dot{g}_t - b(g_t)\right]\,\|^2 = |\,\chi\left[g_t\,,\ \dot{g}_t - b(g_t)\right]\,|^2$$

pentru orice $t \in [0, 1]$. Din (5.25.) avem

$$\lambda(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\,\chi\left[g_t\,,\ \dot{g}_t - b(g_t)\right]\,|^2\, dt < +\infty,$$

deci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\lambda(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}_t|^2\, dt$ (este suficient de luat $\dot{f}_t = \chi\left[g_t\,,\ \dot{g}_t - b(g_t)\right]$ pentru aproape toţi $t \in$

$[0,1]$). Am arătat că, dacă $g \in C_x(D)$ cu $\lambda(g)$ finită, atunci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ si $g = F_x f$.

Fie acum $h \in AC(\mathbf{R}^n)$ cu $g = F_x h$; pentru aproape toţi $t \in [0,1]$ avem

$$|\dot{f}_t|^2 = \| \sigma(g_t)^{-1} \left[\dot{g}_t - b(g_t)\right] \|^2 = \| \sigma(g_t)^{-1} \left(\dot{f}_t\right) \|^2,$$

şi $\dot{f}_t = \sigma(g_t)\, \dot{h}_t$, deci $|\dot{f}_t|^2 \leq |\dot{h}_t|^2$ a.e. Aceasta inseamnă că

$$\lambda(g) = \tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}_t|^2\, dt \leq \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{h}_t|^2\, dt = \tilde{\lambda}(h)$$

deci (5.27.) este satisfacută.

Conform propoziţiei 5.2, dacă $K_a = \left\{f \in C(\mathbf{R}^n),\ \tilde{\lambda}(f) \leq a\right\}$ şi dacă K este compact in D, atunci restricţia lui F_x la $K \times K_a$ (cu valori in $C(D)$), este continuă. Din (5.25.) rezultă că λ este inferior semicontinuă şi că $F_x(K \times K_a)$ este compact.□

Exerciţiu. Folosind teorema 5.5., regăsiţi transformarea Cramer a procesului Ornstein-Uhlenbeck (ca difuzie perturbată aleator), şi care a fost calculată direct in capitolul precedent.

COROLAR 5.6. *In ipotezele şi cu notaţiile de mai sus, pentru orice $A \subset C_x(D)$ avem*

$$-\tilde{\Lambda}\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}\left(\bar{A}\right).$$

Demonstraţie. Fie $g \in \mathring{A}$ cu $\lambda(g)$ finită. Din propoziţia 5.5., există $f \in AC(D)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ şi $g = F_x f$. Apoi există $t \in [0,1]$ şi $\rho > 0$ astfel ca

$$\left\{h \in C_x(D) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} |h - g| \leq \rho\right\} \subset \mathring{A}.$$

Fie $R > 0$ astfel ca $R > \lambda(g) = \tilde{\lambda}(f)$. Conform teoremei 5.3. există α, $\epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Relaţia $\epsilon \leq \epsilon_0$ implică

$$P\left[\sup_{[0,t]} \mid \epsilon B - f \mid \leq \alpha \text{ şi } \sup_{[0,t]} \mid X^\epsilon - g \mid > \rho\right]$$
$$\leq \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce dă

$$P(X^\epsilon \in A) \geq P\left[\sup_{[0,t]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho\right]$$

$$\geq P\left[\sup_{[0,t]} \mid \epsilon B - f \mid \leq \alpha\right] - \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right).$$

Din propoziţia 3.9. avem

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P\left(\sup_{[0,t]} \mid \epsilon B - f \mid \leq \alpha\right)$$

$$= -\inf\left\{\tilde{\lambda}(\varphi) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} \mid \varphi - f \mid \leq \alpha\right\} \geq -\tilde{\lambda}(f)$$

şi $-\tilde{\lambda}(f) > -R$, ceea ce implică

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \geq -\tilde{\lambda}(f) = -\lambda(g).$$

Luam sup după $g \in \mathring{A}$ şi obţinem prima inegalitate din corolar.

Fie acum $a < \Lambda\left(\bar{A}\right)$ şi punem $K_a = \{g \in C_x(D) \mid \lambda(g) \leq a\}$, $L_a = \left\{f \in AC(\mathbf{R}^n) \,\middle|\, \tilde{\lambda}(f) \leq a\right\}$; avem $K_a = F_x(L_a)$. Din $K_a \cap \bar{A} = \emptyset$, pentru orice $g \in K_a$ există o vecinătate deschisă V_g a lui g in $C_x(D)$ astfel ca $V_g \cap A = \emptyset$. Există $\rho_g > 0$, $t_g \in [0, 1]$ astfel ca

$$G^g = \left\{h \in C_x(D) \,\middle|\, \sup_{[0,t_g]} \mid h - g \mid \leq \rho_g\right\} \subset V_g.$$

Fie $f_g \in L_a$ astfel ca $g = F_x(f_g)$. Din teorema 5.3., pentru $R > a$, există $\alpha_g, \epsilon_g > 0$ cu proprietatea următoare. Dacă

$$D^g = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \,\middle|\, \sup_{[0,t_g]} | f - f_g | < \alpha_g \right\},$$

atunci

$$P\left[(\epsilon B \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin G^g)\ \right] \leq \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce implică

$$P\left[(\epsilon B \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin V^g)\ \right] \leq \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right).$$

Din acoperirea deschisă $(D^g)_{g \in K_a}$ a lui L_a extragem o acoperire finită $D_1^g, \ldots, D_k^g$ şi punem $D_* = \cup_{i=1}^k D_i^g$. Obţinem că

$$(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A) = \cup_i \left\{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \in A)\right\},$$

care este inclus in evenimentul $\cup_i \left\{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \notin V_{g_i})\right\}$. Deci, dacă alegem $\epsilon \leq \min\left\{\epsilon_{g_1}, \ldots, \epsilon_{g_k}\right\}$, avem

$$P\left[(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)\ \right] \leq k \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce implică

$$P(X^\epsilon \in A) \leq P\left[(\epsilon B \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)\ \right] + P(\epsilon B \in D_*^c)$$

$$\leq k \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right) + P(\epsilon B \in D_*^c).$$

Propozitia 4.4. implică

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon B \in D_*^c) = -\ \widetilde{\Lambda}\ (D_*^c)$$

(deoarece D_* este deschis), deci

$$\overline{l}\ (A) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq (-R) \vee \left(-\ \widetilde{\Lambda}\ (D_*^c)\right).$$

Cum $R > a$ şi $D_*^c \cap L_a = \emptyset$, membrul al doilea este majorat de $-a$. Relaţia $\bar{l}\,(A) \leq -a$ pentru orice $a < \Lambda\left(\bar{A}\right)$, a finit, implică $\bar{l}\,(A) \leq -\Lambda\,(A)$.□

Observaţie. Transformarea Cramer $\tilde{\lambda}$ (deci şi funcţionala Cramer $\tilde{\Lambda}$) in cazul perturbaţiilor cu procese gausiene şi al ecuaţiilor stocastice sunt *uniforme* in raport cu $x \in \mathbf{R}^n$, când $\epsilon \to 0$.

APLICATII

Să considerăm X_t^ϵ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice

$$dX_t^\epsilon = b\left(X_t^\epsilon\right) dt + \epsilon dB_t \text{ , pe } \mathbf{R}^n \text{ , cu } X_t^\epsilon = x_0$$

Dacă D este domeniu in $\mathbf{R}^n$ cu $x_0 \in D$, notăm ∂D frontiera lui D,

$$\tau^\epsilon = \inf\left\{t : X_t^\epsilon \notin D\right\}$$

prima ieşire a lui X_t^ϵ din D şi

$$H_D\,(t) = \left\{f \in C\left(\mathbf{R}^n\right) \;:\; f_0 = x_0 \text{ , } f_t \in D \cup \partial D\right\},$$

$$\bar{H}_D\,(t) = \left\{f \in C\left(\mathbf{R}^n\right) \;:\; f_0 = x_0 \text{ , } f_s \notin D \text{ pentru un } 0 \leq s \leq t\right\}.$$

PROPOZITIA 5.7. *Daca frontiera lui D coincide cu frontiera lui $\bar{D}$, atunci*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left\{X_t^\epsilon \in D\right\} = -\inf_{f \in H_D(t)} \lambda\,(f) \qquad (5.28)$$

şi

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left\{\tau^\epsilon \leq t\right\} = -\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda\,(f)\,. \qquad (5.29)$$

Demonstraţie. Relaţia (5.29.) va rezulta din lema 4.5. ; să verificăm ipotezele acesteia. Presupunem că $\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda\,(f)$

$= \lambda(f_0)$, cu $f_0 = x_0$. Funcţia f_t atinge frontiera ∂D intr-un $t_0 \neq 0$, iar inf −ul de mai sus este finit pentru că există funcţii netede arbitrare care pleacă din x_0 şi părăsesc D in $[0, 1]$; rezultă că f_t este absolut continuă.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, există $x^\epsilon \in \mathbf{R}^n \setminus D$ intr-o ϵ−vecinătate a lui f_{t_0} ; punem

$$f_t^\epsilon = f_t + \frac{t}{t_0}\left(x^\epsilon - f_{t_0}\right), \; 0 \leq t \leq 1.$$

Observăm că f_t^ϵ aparţine interiorului lui $\bar{H}_D\,(t)$. Să arătăm că $\lambda(f^\epsilon) \to \lambda(f)$ când $\epsilon \to 0$. Avem

$$\lambda(f^\epsilon) - \lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left|\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)\right|^2 - \left|\dot{f}_t - b(f_t)\right|^2\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t), \; \dot{f}_t - b(f_t)\right\rangle_{L^2[0,1]} dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \left|\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t)\right|^2 dt.$$

Apoi

$$\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) = \frac{1}{t_0}\left(x^\epsilon - f_{t_0}\right) + b(f_t)\; \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)$$

care converge către 0 uniform in $t \in [0, 1]$ când $\epsilon \to 0$.□

Observaţii.

1. Calculul expresiilor (5.28.)-(5.29.) se reduce la probleme variaţionale. Intr-adevăr, să observăm că noi ne-am restrâns la spaţiul $C[0, 1]$, dar toate argumentele şi calculele din capitolul 5 rămân adevărate in spaţiul $C[0, t]$, $t > 0$. Să notăm λ_t transformarea Cramer asociată traiectoriilor $X^\epsilon_\cdot$ pe intervalul $[0, t]$ (deci $\lambda \equiv \lambda_1$). Pentru calculul extremelor avem la dispoziţie ecuaţia Euler, iar inf −ul se poate găsi prin ecuaţia Hamilton-Jacobi. Punem

$$V(t, x, y) = \inf_{f_0 = x,\; f_t = y} \lambda_t(f).$$

Atunci

$$\inf_{f \in H_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{y \in D \cup \partial D} V(t, x, y)$$

şi

$$\inf_{f \in \bar{H}_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{0 \le s \le t,\, y \notin D} V(s, x, y).$$

Ecuaţia Hamilton-Jacobi pentru $V(t, x, y)$ are forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2} |\nabla_y V(t, x, y)|^2 + \langle b(y),\ \nabla_y V(t, x, y) \rangle,$$

la care adaugăm condiţiile $V(0, x, x) = 0$ si $V(t, x, y) \ge 0$.

2. Să notăm că funcţiile $u^\epsilon(t, x) = P\{X_t^\epsilon \in D\}$ şi $v^\epsilon(t, x) = P\{\tau^\epsilon \le t\}$ sunt soluţiile problemelor

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta u^\epsilon + \langle b(x),\ \nabla_x u^\epsilon \rangle,\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$$

$$u^\epsilon(0, x) = 1 \text{ pentru } x \in D,\ u^\epsilon(0, x) = 0 \text{ pentru } x \notin D,$$

respectiv

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2} \Delta v^\epsilon + \langle b(x),\ \nabla_x v^\epsilon \rangle,\ x \in D,\ t > 0$$

$$v^\epsilon(0, x) = 0 \text{ pentru } x \in D,\ v^\epsilon(t, x)_{|x \in \partial D} = 1.$$

(remarcaţi că parametrul ϵ apare la derivatele de cel mai mare ordin). Propoziţia 5.7. furnizează informaţii, atunci când $\epsilon \to 0$, asupra comportamentului soluţiilor problemelor de mai sus.

Tiparul s-a efectuat sub c-da nr. 151/1994
la Tipografia Editurii Universităţii Bucureşti

ISBN 973-575-007-4

Lei 704