

ȘTEFAN PĂTRAȘCU

BV  
SANDA VOINEA

FIZICA APELOR SUBTERANE  
ȘI A APELOR DE SUPRAFAȚĂ

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

1998



BIBLIOTECA CENTRALA  
UNIVERSITARA  
București

Cota IV 515909  
Inventar 0199804078

ȘTEFAN PĂTRAȘCU

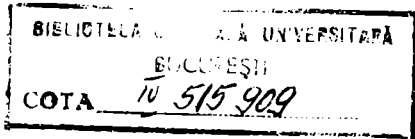
141239  
SANDA VOINEA

# FIZICA APELOR SUBTERANE ȘI A APELOR DE SUPRAFAȚĂ

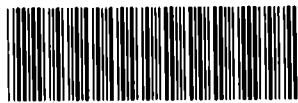
- NOTE DE CURS -

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI  
1998

Referenți științifici: Dr. GHEORGHE MĂRMUREANU  
Dr. CRIȘAN DEMETRESCU



**B.C.U. București**



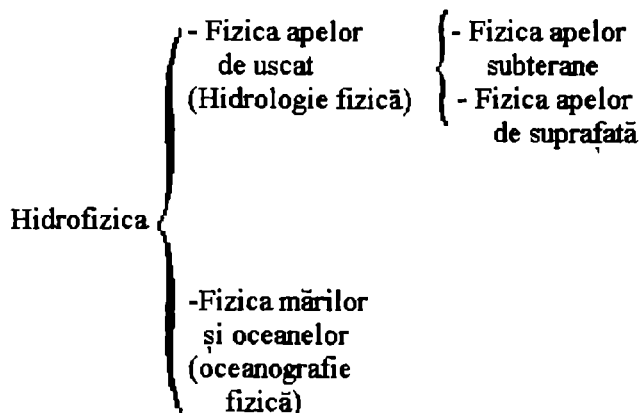
C199804078

© Editura Universității din București  
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 222 - 0

## INTRODUCERE

Cursul cuprinde două discipline ale Hidrofizicii ( Partea I - Fizica apelor subterane; Partea II - Fizica apelor de suprafață), aceasta reprezentând una din cele trei grupe de discipline ale Fizicii globului terestru sau ale Fizicii mediului. Disciplinele hidrofizicii ar putea fi grupate astfel:



Cunoașterea resurselor de apă, evaluarea rezultatelor, exploatarea rațională cât și conservarea lor au devenit probleme de prim ordin ale societății deoarece ele asigură dezvoltarea agriculturii, a industriei și a vieții. Tocmai aceste scopuri fac din apele subterane și cele de suprafață un complex unitar atât în ceea ce privește cantitatea de apă cât și în ceea ce privește calitatea apei.

Deși accesul la apele subterane nu este întotdeauna la fel de simplu ca la apele de suprafață, apele subterane prezintă avantaje mai importante cum sunt:

- compensarea debitelor prin acumularea naturală, - protecția pierderilor prin evaporare; protecția naturală mai bună împotriva poluării decât a apelor de suprafață. Toate aceste avantaje obligă și mai mult dezvoltarea activității de protecție a apelor subterane cât și a aceleia de exploatare rațională a ei. De aceea trebuie subliniat încă o dată că exploatarea rațională a apelor subterane într-o anumită regiune nu se poate face decât în concordanță cu aceea a apelor de suprafață a aceleiași regiuni.

Exploatarea rațională a apelor subterane impune deci evaluarea resurselor exploatabile, cu alte cuvinte estimarea resurselor de apă, adică a volumului de apă ce poate fi eliberat din subteran, sau a celui înmagazinat în substrat, fie în cursul unei perioade, fie la un moment dat. Pentru aceasta sunt necesare următoarele:

- determinarea dimensiunilor rocii-magazie;
- volumul de apă ce există în aceste roci-magazie;
- volumul de apă eliberat față de cel înmagazinat;
- volumul de apă exploatabil prin mijloacele tehnice avute la dispoziție, pentru că numai această parte de apă din totalul de rezerve, reprezintă interes la un moment dat pentru om, pentru societate.

Pentru estimarea rezervelor de apă subterană sunt necesare următoarele date de bază:

- Cunoașterea structurilor hidrologice, adică a formațiunilor geologice (a rocilor) capabile să primească apa, să păstreze apa și să permită circulația apei. Acest gen de informații sunt aduse de geologi specializați în hidrologie.

- Porozitatea eficace sau coeficientul de variație a înmagazinării al rocilor.

- Dinamica circulației apei prin acvifere, etc.

Ultimele două tipuri de informații sunt procurate de cercetători în fizica globului, specializați în circulația apelor subterane: ingineri hidrologi, ingineri hidrogeologi, ingineri geofizicieni, fizicieni, etc.

În cazul studiului apelor de suprafață, cele mai importante probleme care se pun și la care trebuie să se răspundă sunt:

- stabilirea de bilanțuri hidrologice (precipitații atmosferice, evaporări, umidități în sol, scurgeri pe cursuri de ape) pe bazine hidrografice;

- determinarea volumului de apă mediu care se scurge printr-un profil transversal al cursului de apă;

- variația volumului de apă scurs pe diferite intervale calendaristice;

- stabilirea valorilor extreme ale curgerilor de apă;

- studiul aluviunilor transportate și depuse de apă;

- prognozarea volumelor și nivelurilor apelor;

- studiul poluării apelor.

Apele din oceane, râuri, etc, care la un loc alcătuiesc hidrosfera, se află în permanentă circulație chiar dacă pe anumite porțiuni ale circuitului apare în diferite stări de agregare.

O imagine a cantităților de apă de pe Glob ar putea fi următoarea:

- Volumul de apă din oceane și mări:  $V_0 = 1370 \times 10^6 km^3$

- Volumul de apă corespunzător uscatului:  $V_u = 84 \times 10^6 km^3$

- Volumul de apă din atmosferă:  $V_{at} = 0,014 \times 10^6 km^3$ .

Din volumul total de apă  $V_0 + V_u + V_{at} \sim 1454 \times 10^6 km^3$ , starea solidă (gheață și zăpadă permanentă) a ei reprezintă numai  $\sim 24 \times 10^6 km^3$ .

Circuitele mari și mici ale apei în natură pot fi integrate într-un circuit închis global, care schematic ar putea fi reprezentat ca în figura 1. Întregul Glob este împărțit din punct de vedere al acestor circuite în două regiuni: exoreică și endoreică. În regiunea exoreică apa din bazinele hidrografice se scurge (zona umedă) în oceanele și mările legate și se mai racordează cu acestea prin curenții aerieni de deasupra continentelor sau oceanelor și mărilor, care transportă apa sub formă de vapori în ambele sensuri. În regiunea endoreică bazinele hidrografice nu comunică cu oceanele și mările legate. Pentru fiecare bazin nivelul de bază este o mare interioară sau un lac, ca de exemplu M. Caspică, M. Moartă și Lacul Aral. Circuitul apei în această regiune poate fi legat de acela al precedentei regiuni numai prin curenții aerieni de deasupra continentelor.

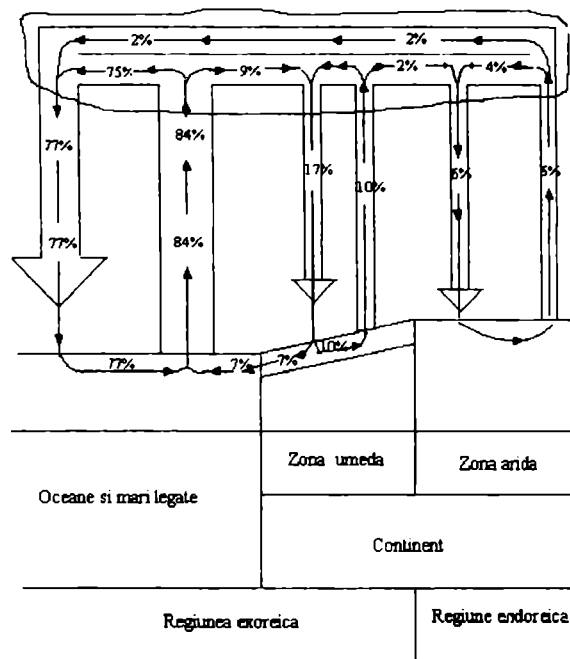


Figura 1

În această regiune cantitatea de apă evaporată nu este întotdeauna egală cu aceea venită sub formă de precipitații, așa cum este reprezentată în figura 1, pentru cazul ideal. Cele două cantități de apă pot fi diferite ducând la creșterea sau la scăderea nivelului de bază a mărilor respective. De exemplu în ultimii 40 de ani nivelul M. Caspice a scăzut cu 3m.

# PARTEA I: FIZICA APELOR SUBTERANE

## CAPITOLUL 1

### PROPRIETATI FIZICE SI CARACTERISTICI HIDROGEOLOGICE ALE APELOR SUBTERANE SI ALE ROCILOR CARE LE ADAPOSTESC

#### 1.1. Originea apelor subterane

Apele care circulă prin porii sau fisurile rocilor constituie apele subterane. În ceea ce privește originea lor pot fi clasificate în trei categorii: ape *vadoase*, ape *juvenile* și ape de *zăcământ*.

Apele vadoase sau de infiltrație provin din infiltrarea precipitațiilor atmosferice (ploaie, zăpadă topită, ghețari în faze de topire) din cadrul circuitului general al apei din natură și din condensarea vaporilor de apă în partea superioară a litosferei. Această categorie de ape contribuie în cea mai mare măsură la formarea rezervoarelor de ape subterane.

Apele juvenile sau magmatice provin din condensarea vaporilor de apă care apar din degazeificarea magmelor. Au un conținut mare de săruri și gaze, au temperaturi mai ridicate și când apar la suprafață sunt considerate ape minerale. Trebuie însă precizat că nu toate apele minerale sunt de tip juvenil. De multe ori apele minerale provin din ape vadoase care pe parcursul circulației lor întâlnind anumite categorii de roci, suferă procese chimice, mineralizându-se.

Apele de zăcământ (fosile sau veterice) sunt legate de prezența zăcămintelor petrolifere și apar sub forma unor strate acvifere sub presiune, ca și petrolul. Ele provin din nămolul prezent în vechi lagune sau bazine maritime, unde ulterior s-au format zăcămintele de petrol prin descompunerea substanțelor organice.

#### 1.2. Porozitatea rocilor

Problema capacității rocilor de a înmagazina apa a stârnit curiozitatea multor cercetători. Ea a devenit și mai importantă atunci când a apărut și problema înmagazinării petrolului în roci. La început cercetările au abordat nisipurile neconsolidate în care golurile cunoscute și sub denumirea de pori le conferă posibilitatea de înmagazinare considerabilă a apei.

Mai târziu cercetările s-au extins și asupra altor roci sedimentare și chiar asupra rocilor magmatice și metamorfice. S-a introdus proprietatea de porozitate a unei roci, proprietate care să reflecte existența golurilor dintr-o rocă într-o cantitate mai mică sau mai mare, în funcție de tipul rocii. În funcție de momentul dobândirii porilor se poate vorbi de o porozitate primară și de o porozitate secundară.

*Porozitatea primară* ia naștere în procesul de formare a rocilor. Ea este caracteristică rocilor detritice neconsolidate (argile, nisipuri, pietrișuri), pentru unele roci detritice consolidate (gresii, conglomerate) și pentru roci de precipitație chimică (calcare oolitice, calcare cristalizate).

*Porozitatea secundară* ia naștere prin procese geologice care acționează asupra rocilor după formarea lor, de exemplu dizolvare, fracturare, recristalizare, dolomitizare, etc. Ea este caracteristică pentru unele roci detritice consolidate (șisturi argiloase fracturate, gresii



fisurate), pentru unele roci de precipitație chimică (calcare și dolomite carstificate, calcare dolomitizate) precum și pentru unele roci magmatice și metamorfice (granite, andezite, gnaise, micașisturi, etc., fracturate și fisurate).

Între porozitatea primară și cea secundară există o deosebire esențială care constă în caracterul diferit al dispunerii și distribuției golurilor. Această caracteristică conduce la considerarea rocilor fie ca medii poroase caracterizate prin existența golurilor intragranulare, fie ca medii fisurate caracterizate prin existența golurilor fisurale (crăpături, diaclaze, canalicule, canale și conducte înguste sau largi, fracturi, goluri de dizolvare, cavități).

O altă clasificare a porozității poate fi făcută în funcție de gradul de umplere a golurilor și de posibilitatea circulației apei prin ele. *Porozitatea reală sau totală*  $m_t$ , este aceea căreia îi corespund toate golurile, fie că o parte se află în comunicație între ele, iar restul sunt izolate față de primele. *Porozitatea comunicativă, efectivă* sau pe scurt *porozitatea*, deoarece ea apare în majoritatea cazurilor, este aceea care corespunde totalității golurilor aflate în comunicație. *Porozitatea eficace*,  $m_e$ , este aceea căreia îi corespunde partea din golurile aflate în comunicație, prin care apa poate circula liber sub acțiunea forței de greutate. În paragraful următor se va arăta de ce o parte din apa care pătrunde într-o rocă uscată nu poate circula liber sub acțiunea gravitației. Pe baza acestor definiții calitative se pot enunța definițiile cantitative.

*Porozitatea reală sau totală*,  $m_t$ , exprimată relativ, reprezintă raportul dintre  $V_g$  - volumul tuturor golurilor aflate în comunicație sau izolate dintr-o rocă al cărei volum total este  $V$  și volumul  $V$ .

$$m_t = \frac{V_g}{V} = \frac{V_{gi} + V_{gc}}{V} = \frac{V - V_s}{V} \quad (1.1)$$

în care  $V_{gi}$  este volumul golurilor izolate;  $V_{gc}$  este volumul golurilor aflate în comunicație și  $V_s$  - volumul părții solide a rocii, toate volumele referindu-se la roca de volum  $V$ .

*Porozitatea comunicativă*,  $m$ , exprimată relativ, reprezintă raportul dintre volumul golurilor aflați în comunicație,  $V_{gc}$ , dintr-o rocă de volum  $V$ , și acest volum:

$$m = \frac{V_{gc}}{V} = \frac{V - V_s - V_{gi}}{V} = 1 - \frac{V_s + V_{gi}}{V} \quad (1.2)$$

Deoarece  $V_{gi} \ll V_s$  în majoritatea cazurilor, relația (1.2) se poate scrie:

$$m = 1 - \frac{V_s}{V} = \frac{V_g}{V} = m_t$$

Acesta este motivul pentru care în literatura de specialitate cele două mărimi nu apar întotdeauna deosebite. Câteva valori numerice ale porozității arată varietatea acestora la diferite roci:

Marmura	0,001 ÷ 0,006	Gresie	0,040 ÷ 0,300
Calcar	0,025 ÷ 0,200	Tuf vulcanic	0,110 ÷ 0,400
Granit	0,002 ÷ 0,015	Piatra ponce	~ 0,880

*Porozitatea eficace*,  $m_e$ , exprimată relativ, reprezintă raportul dintre volumul de apă eliberabilă gravitațional,  $V_{ae}$ , dintr-o rocă de volum  $V$ , și volumul acesteia.

$$m_e = \frac{V_{ae}}{V} = \frac{V - (V_s + V_{gi} + V_{ar})}{V} = \frac{V_{gc} - V_{ar}}{V} = m - \frac{V_{ar}}{V} \quad (1.3)$$

în care  $V_{ar}$  reprezintă volumul apei reținute în roca de volum  $V$ , apa care nu părăsește roca numai datorită greutateii proprii. Detalii asupra apei reținute vor fi date în paragraful următor. Din (1.2) și (1.3) rezultă că întotdeauna :

$$m_e < m \quad (1.4)$$

Se poate face o clasificare a porilor în funcție de dimensiunile lor în următoarele categorii:

- pori supracapilari cu diametrul cuprins între 0,5 și 1,2 mm. În condiții normale de presiune și temperatură, circulația apei prin asemenea pori se face conform legilor hidrodinamicii. Dacă porii depășesc dimensiunea de 1,2 mm se spune că e vorba de macroporozitate.

- pori capilari cu diametrul cuprins între 0,0002 mm și 0,5 mm ( 0,2  $\mu m$  - 500  $\mu m$ ). Prin acești pori apa circulă mult mai greu din cauza forțelor capilare nemaisupunându-se legilor hidrodinamicii.

- pori subcapilari cu dimensiuni mai mici decât 0,0002 mm ( 0,2  $\mu m$ ). Apa pătrunsă în asemenea pori se menține datorită forțelor de adsorbție și nu are posibilitatea să circule deloc. Din acești pori apa nu poate fi scoasă decât prin încălzirea rocii la o anumită temperatură. Există pori și fisuri mai mici decât cei subcapilari, fiind cunoscuți sub denumirea de micropori și sunt specifici granulelor însăși.

### 1.3. Tipuri de apă conținută în sol și subsol

Un material acvifer poros poate conține diferite tipuri de ape susceptibile să fie clasificate în patru mari categorii:

- apă de reținere
- apă capilară
- apă gravifică
- apă sub formă de vapori

În aceste categorii nu a fost inclusă apa implicată chimic sau apa de constituire, parte integrantă a diferitelor tipuri de molecule constituente ale rocii. Ea nu este o apă eliminabilă în sensul celor patru categorii. Ea poate fi scoasă numai prin distrugerea moleculelor constituente ale părții solide a rocii.

#### 1.3.1 Apa de reținere

Molecula de apă fiind un dipol electric permanent este atrasă și fixată de neregularitățile electronice de la suprafața diferitelor cristale, ai căror constituenți sunt în mod asemănător mici dipoli. O anumită cantitate de apă pătrunsă în roci este astfel adsorbită. Aceasta este apa de reținere, adesea considerată apa legată. Proprietățile sale fizice sunt foarte diferite de acelea ale apei libere, în special densitatea. Apa de reținere este întâlnită în roci sub două forme: apă higroscopică și apă peliculară.

Apa higroscopică. Granulele constituente ale rocilor sunt acoperite complet de apă care impregnează microporii sau pătrunde în canale foarte fine formând parcele izolate de apă care se mențin prin forțele de adsorbție. Din acest motiv ea este cunoscută adesea ca apă de adsorbție. Ea nu poate să se deplaseze decât în stare de vapori. Cantitatea de apă

higroscopică nu este constantă. Ea variază în funcție de porozitate în mod special, dar și de umiditate, temperatură și presiunea aerului.

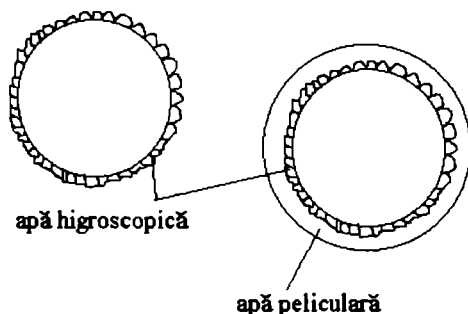


Figura 1.1

Apa peliculară înconjoară granulele constituente și apa lor higroscopică ca o peliculă subțire de grosime variabilă de ordinul câtorva fracțiuni de micron, nedepășind 0,1 microni. Ea umple microporii a căror secțiune este de ordinul de mărime al sferei de atracție moleculară. Ea mai este cunoscută sub denumirea de apă de adeziune (cercetătorii germani) sau apă de carieră din rocile compacte.

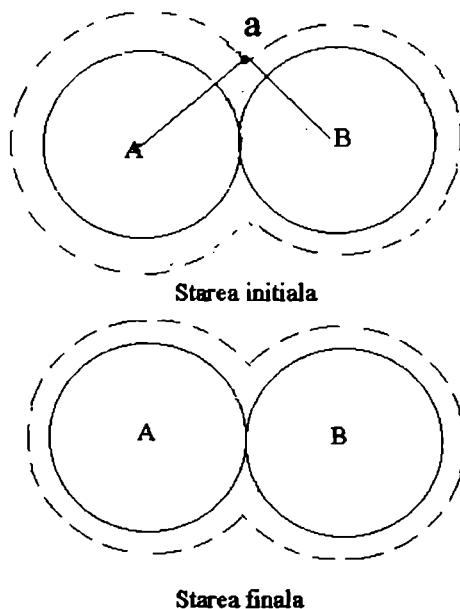


Figura 1.2

Ea se poate deplasa în stare lichidă prin jocul de atracție moleculară a granulelor vecine. Să presupunem două granule de nisip în contact, având raza egală cu  $R$ , înconjurate de o peliculă de apă de grosime inegală (mai groasă pe A în starea inițială). Dacă ne-am fixa asupra unei paricule de apă peliculară "a", care în starea inițială se află la o distanță mai mică de granula B decât de granula A, forța de atracție moleculară va fi mai mare din partea

granulei *B* din care cauză particula de apă "a" se va deplasa spre pelicula mai subțire ce înconjoară granula *B*. Această mișcare va înceta atunci când pelicula de apă va atinge aceeași grosime în jurul celor două granule. Apa peliculară nu se poate deplasa sub acțiunea gravitației și nici nu transmite presiunea de tip hidrostatic. Apa peliculară poate fi extrasă numai prin centrifugare. Conținutul în apă peliculară al rocilor variază de la 40% - 50% pentru argile și de la 3% - 15% pentru nisipuri.

### 1.3.2. Apa capilară

Apa capilară umple o parte din pori în funcție de dimensiunea lor pentru a putea da naștere meniscului necesar manifestării forței capilare. În figură este dat un exemplu de formare a unui film capilar între două granule care nu se ating dar sunt suficient de apropiate.

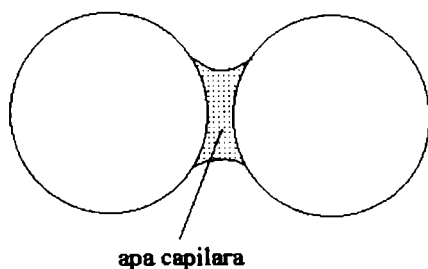


Figura 1.3

Un alt exemplu este acela al unui ansamblu de granule care în anumite condiții favorizează formarea unor canale cu dimensiuni transversale capilare și lungimi diferite, sau interstiții cu cel puțin o dimensiune capilară. Astfel sunt create condiții formării meniscurilor capilare, generatoare de forțe (capilare) ce vor contribui la umplerea cu apă (capilară) a unei alte părți din porii, canalele și interstițiile ce au creat condiții. După poziția acestor filamente capilare în raport cu suprafața liberă a apei subterane și după modul în care se manifestă acțiunea gravitației asupra lor există două feluri de apă capilară.

Apa capilară continuă sau susținută se află în contact cu suprafața liberă a apei subterane, se ridică deasupra acesteia pornind din ea și urcă în funcție de dimensiunile capilare. Astfel această apă capilară îmbracă o formă specială cu aspect continuu și susținută de suprafața liberă a apei. Acest domeniu în care se formează și există acest tip de apă capilară se numește *subzona franjurilor capilare*. Această categorie de apă capilară legată de suprafața liberă a apei subterane, cu care se ridică și se lasă în perioade de ploi abundente sau de secetă, transmite presiunea hidrostatică și este supusă acțiunii forței de greutate.

Apa capilară izolată sau suspendată este a doua categorie de apă capilară care se află deasupra subzonei cu franjuri capilare, fără să aibă legătură cu aceasta. Ea ocupă numai o parte din goluri, cealaltă parte fiind ocupată de aer și vapori de apă. Filamentele scurte de apă capilară izolată nu sunt legate între ele, din care cauză apar suspendate, și nici nu se deplasează sub acțiunea forței de greutate. Din aceste motive apa capilară izolată face parte din categoria apelor suspendate.

### 1.3.3 Apa gravifică

Apa gravifică umple spațiul rămas liber al porilor, interstițiilor și fisurilor din rocă (figura 1.4). Mai este cunoscută sub denumirea de *apă liberă* sau *apă de percolație*. Apa gravifică este supusă numai acțiunii gravității, curge în subsol și poate fi extrasă prin procedee tehnice variate. Ea transmite presiunea hidrostatică, iar supusă acțiunii diferențelor de presiune poate circula prin acvifere. Apa gravifică constituie partea activă a apelor subterane din care cauză se mai numește *apă hidrodinamic activă*. Unii autori consideră apa gravifică ca fiind alcătuită din apa de infiltrație care coboară prin sol și subsol către acvifer și din apa pânzei subterane.

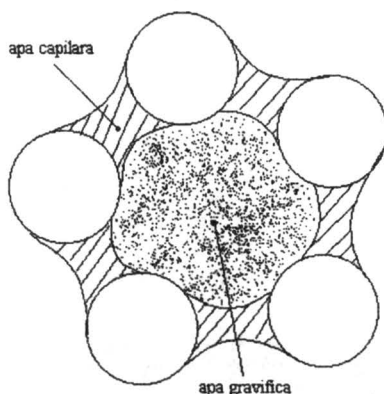


Figura 1.4

Extragerea din roci a tipurilor de ape definite se face prin procedee diferite. Dacă unui eșantion de rocă saturat cu apă i se lasă fațete libere el lasă să-i scape liber apa gravitațională și apa capilară continuă. Restul de apă capilară (suspendată) și apa peliculară se poate elimina prin centrifugare. Apa higroscopică se elimină numai prin calcinare din cauza forțelor de atracție moleculară foarte intense.

Categoriile de ape	Subcategoriile sau tipuri de ape	Alte moduri de a împarti pe categ	Moduri de extragere din roca
Ape de retinere	Apa higroscopică	Ape suspendate sau legate	Calcinare
	Apa peliculară		Centrifugare
Ape capilare	Apa capilară izolată sau suspendată		
	Apa capilară continuă sau susținută		
Apa gravifică	Apa gravifică		

Tabelul 1.1

Diferitele moduri de a împărți apele din sol și subsol pe categorii și subcategorii sunt prezentate sintetic în tabelul 1.1.

#### 1.4. Repartiția pe verticală a apei în sol și subsol

Repartiția pe verticală a apei în sol și subsol îmbracă aspecte particulare de la o zonă la alta a Pământului. Fără a-i pierde din aspectele importante, ea poate fi prezentată pe un model teoretic de structură a solului și subsolului. Pentru aceasta să presupunem o structură simplificată și anume formată din două straturi de roci cu proprietăți opuse în ceea ce privește permeabilitatea apei (figura 1.5). Ambele sunt așezate orizontal, cel de la bază fiind impermeabil apei, iar cel de deasupra a cărui față superioară este în contact cu atmosfera este permeabil apei și mai prezintă și următoarele caracteristici: *omogen*, adică granulometria uniformă și *izotrop* adică lipsit de orice stratificație și permeabilitate uniformă pe verticală și pe orizontală.

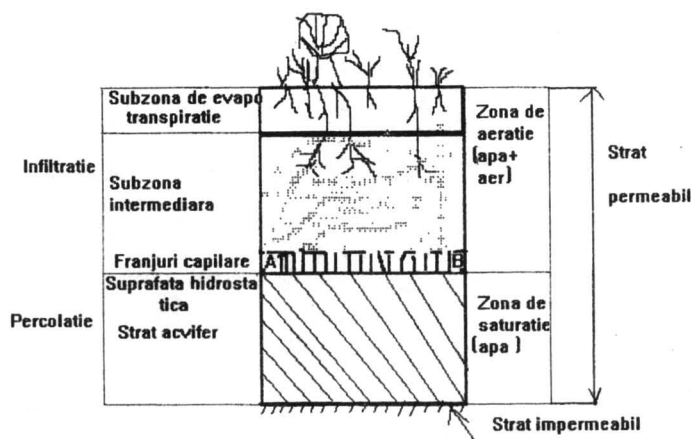


Figura 1.5

În urma căderii ploilor apa se infiltrează creându-se la un moment dat situația reprezentată schematic în figura 1.5. O parte din stratul freatic se saturează, suprafața AB reprezentând partea superioară a zonei saturate. Deasupra acesteia se formează zona de aeratie.

##### Zona de saturație sau zona de ape susținute

Prin denumirea ei rezultă că toate golurile sunt ocupate în întregime de apă, cu alte cuvinte cantitatea de apă înmagazinată în volumul respectiv este maximă. De asemenea și apa gravifică sau apa liberă și-a atins maximum. Se spune că apele de percolație sunt localizate în această zonă. De asemenea în această zonă se practică puțurile pentru alimentare cu apă. Această zonă se mai numește *pânză acviferă* sau *strat acvifer*. Pânza acviferă reprezentată în schemă este un caz particular de acvifer care mai poartă denumirea și de pânză freatică deoarece partea superioară a zonei saturate este liberă și se poate deplasa pe verticală în funcție de regimul pluviometric și de regimul de exploatare al ei, adică în funcție de numărul de puțuri practicate în ea.

Limita superioară a zonei de saturație, suprafața AB, este o suprafață de echilibru pentru care presiunea este egală cu presiunea atmosferică. Ea poartă mai multe denumiri: *suprafața*

*liberă a apelor subterane, nivel freatic, oglinda apei, suprafață hidrostatică* (când apa în acvifer este în regim static).

### Zona de aerație

Această zonă cuprinde așa cum se vede și în figura 1.5: franjele capilare, subzona de reținere (intermediară) și subzona de evapotranspirație, înșiruirea făcându-se de jos în sus spre suprafața Pământului.

Gradul de umiditate al acestei zone scade treptat de jos în sus, de la saturație lângă suprafața liberă a apelor subterane până la o valoare oarecare lângă suprafața Pământului, valoare ce depinde și de condițiile meteorologice atmosferice. Umiditatea acestei zone este legată de prezența apei capilare. Așa cum s-a arătat mai înainte există două tipuri de apă capilară: apa capilară izolată sau suspendată și apa capilară continuă sau susținută.

Apa capilară izolată se află în toată zona de aerație și face parte din categoria apelor suspendate. Apa capilară continuă aparține apei susținute și caracterizează franța capilară. Ea este capabilă să scadă liber dacă nivelul hidrostatic, de care ea este legată hidrolic, coboară (sau invers). Înălțimea franței capilare variază în raport invers cu dimensiunile granulelor constituente rocilor din zona franței. De la câțiva decimetri în terenuri foarte permeabile ea poate crește până la 3-4 m în nămoluri unde ea atinge valoarea maximă. Alte valori: 0,3 - 0,6m în nisipuri; 1,2m în marne; 3m în șlam, nămoluri.

Subzona de retenție (reținere) se află deasupra franței capilare. Ea este caracterizată prin aceea că spațiul liber dintre granulele constituente ale rocilor este ocupat de apă, aer și de vapori de apă. Volumul de apă este funcție de capacitatea de retenție (reținere) a apei de către rocile constituente. În această subzonă apa este reținută sub trei forme: apă higroscopică, apă peliculară și apă capilară izolată. Nici una din aceste categorii de ape nu prezintă legături hidrolice cu stratele inferioare din care cauză se mai spune că este domeniul apelor suspendate. Unii autori pentru acest domeniu folosesc denumirea de subzonă intermediară. Grosimea medie a acestei subzone este de la 0,6 la 2m, dar ea poate atinge 10 - 20 m, dar tot atât de bine poate să lipsească complet ( de ex. zona mlăștinoasă).

Subzona de evapotranspirație reprezintă partea superioară a zonei de aerație, cunoscută și sub denumirea de subzona apei din sol. Denumirea de evapotranspirație reprezintă reunirea a două fenomene principale ale bilanțului hidrologic, evaporația și transpirația într-un singur cuvânt. Evapotranspirația este suma tuturor pierderilor de apă prin transformare în vapori, oricare ar fi cauzele care o produc. Evaporația reprezintă fenomenul fizic de transformare a apei în vapori de apă. Transpirația este un fenomen biologic legat de învelișul vegetal care absoarbe apă din sol, o tranzitează prin el și din care o parte o elimină prin pori. Cealaltă parte din apa absorbită este folosită pentru creșterea învelișului vegetal.

Contribuția evapotranspirației este determinată de ansamblul de factori care fiecare la rândul său determină evaporația și transpirația. Acest ansamblu de factori poate fi împărțit în două grupe: factori fizici și factori fiziologici. Exemplu de factori fizici: -deficitul higrometric, temperatura, viteza și turbulența vântului, presiunea atmosferică, intensitatea radiației solare, granulometria, porozitatea, litologia elementelor componente ale solului, altitudinea și zona climatică, gradul de acoperire cu vegetație, etc.

Exemplu de factori fiziologici: specia de vegetație, vârsta vegetației, gradul de dezvoltare al frunzelor, profunzimea rădăcinilor, etc.

Grosimea subzonei de evapotranspirație variază în funcție de climat și de tipul de cultură vegetală. În zona temperată ea ajunge în medie 1 - 2m, rar 3m.

Din cele prezentate se poate face o sinteză a repartiției pe verticală a diferitelor tipuri de ape.

Zona de saturație cuprinde toate tipurile de ape: apă higroscopică, apă peliculară, apă capilară izolată (deși acestea definesc apa de retenție și nu zona de retenție; ele apar în funcție de structura granulară a rocii), apa capilară continuă și apa gravifică.

Franja capilară cuprinde: apa higroscopică, apa peliculară, apa capilară izolată și apa capilară continuă.

Zona de retenție (de reținere) cuprinde toate apele de retenție: apa higroscopică, apa peliculară și apa capilară izolată.

Zona de evapotranspirație cuprinde aceleași tipuri de ape ca și zona de retenție numai că aici gradul de umiditate este variabil datorită cuplajului acestei zone cu exteriorul fie prin rădăcinile vegetației, fie prin contactul direct cu climatul.

Se înțelege că pe vreme ploioasă starea normală de distribuție pe verticală a apelor este modificată temporar datorită infiltrației apelor superficiale către zona de saturație. Este momentul când apa gravifică își poate ridica nivelul pentru mai mult sau mai puțin timp.

Relația dintre diferite categorii și subcategorii de ape pe de o parte și zonele și subzonele care le găzduiesc pe de altă parte, poate fi prezentată și printr-o schemă - tabel sau printr-o secțiune verticală după cum urmează în tabelul 1.2.

Zone	Categoriile de ape		Ape legate sau suspendate			Ape libere sau sustinute	
	Tipuri	Vap de	Apa higroscopica	Apa peliculara	Apa capilara		Apa gravifica
	ape	apa		izolata	continua		
Zona de aeratie	Subzona evapotranspiratie						
	Subzona intermediana						
	Franja capilara						
Zona de saturatie							

Tabelul 1.2

Hașura indică apartenența unei categorii sau subcategorii de apă la o anumită zonă sau subzonă.



## 1.5. Strate acvifere

Din punctul de vedere al modului în care o rocă permite circulația apei prin ea se poate face următoarea clasificare a rocilor:

-roci acvifere, în care apa circulă foarte ușor ca de exemplu: nisipuri, pietrișuri, bolovănișuri, grohotișuri, gresii grosiere, etc.

-roci acviclude, în care apa circulă cu viteză redusă din cauza porilor prea mici, ca de exemplu: marnele, argilele, etc.

-roci acvifuge, în care apa practic nu circulă din cauza porilor foarte mici, ca de exemplu roci eruptive, metamorfice și sedimentare bine cimentate.

După această clasificare se poate trage concluzia că din cele trei categorii de roci, cele acvifere prezintă cel mai mare interes hidrologic deoarece ele au capacitatea cea mai mare de înmagazinare a apei.

Stratele acvifere, sau pe scurt acviferele se împart în două mari categorii:

- acvifere cu suprafață liberă
- acvifere sub presiune

### 1.5.1. Acvifere cu suprafață liberă

În paragraful 1.4 cu ocazia prezentării repartiției pe verticală a diferitelor tipuri de apă, s-a pus în evidență că numai existența unui strat impermeabil la o anumită adâncime oprește infiltrația apei gravitaționale și în acest fel se formează un strat de rocă acviferă saturat cu apă. În figura 1.6 este prezentată o situație similară simplificată în care sunt evidențiate numai cele două zone de aeratie și de saturație. Suprafața AB reprezintă oglinda apei sau suprafața liberă a apei. De aceea și acviferul definit de zona de saturație se numește acvifer cu suprafață liberă. O asemenea situație poate fi determinată în teren cu ajutorul piezometrelor. Pe figură sunt reprezentate trei piezometre (1, 2, 3). Un piezometru este un foraj (o gaură) foarte îngust efectuat până în zona saturată. Suprafața definită de nivelul apei din fiecare piezometru definește suprafața liberă a apei sau suprafața piezometrică. Dacă în acvifer apa nu circulă pe orizontală, adică se află în echilibru, suprafața AB se mai numește și suprafață (nivel) hidrostatică.

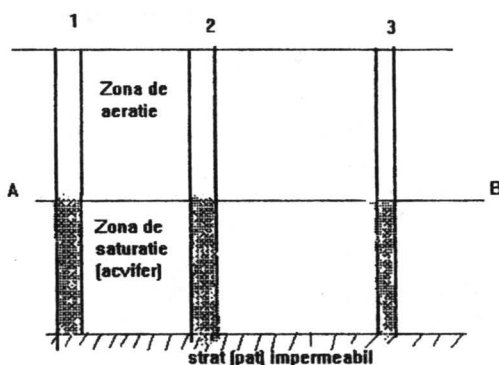


Figura 1.6

În majoritatea cazurilor apa circulă și pe orizontală în acvifere, situație în care suprafața liberă a apei (sau suprafața piezometrică) nu mai coincide cu suprafața sau nivelul hidrostatic. Cauzele care pun în mișcare apa și de-a lungul acviferului pot fi naturale sau artificiale. Un exemplu de cauze naturale este acela al unui acvifer cu suprafață liberă în zona unui interfluviu (figura 1.7). Sensul de deplasare al apei de-a lungul acviferului este reprezentat prin săgeți și el este impus de diferența de nivel al celor două râuri prezentate în secțiune transversală. În acest caz suprafața liberă (piezometrică) nu mai este și o suprafață de nivel hidrostatic.

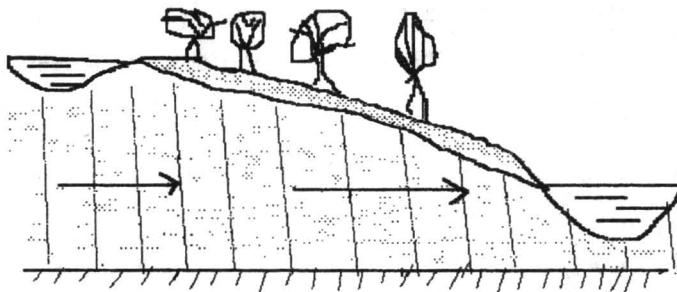


Figura 1.7

Un exemplu de cauze artificiale (figura 1.8) este acela al unui acvifer străbătut de un puț din care se pompează apă și în acest caz suprafața hidrostatică nu mai coincide cu suprafața liberă.

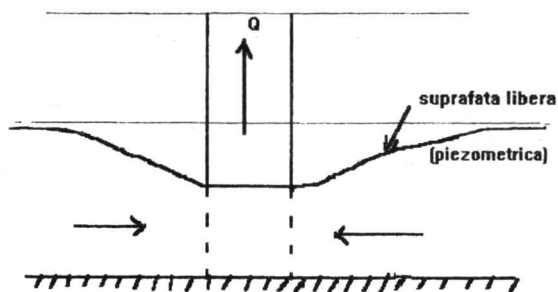


Figura 1.8

În figura 1.9 este prezentată o schiță generală a acviferului cu suprafața liberă în care și patul impermeabil are o formă oarecare în care sunt fixate și coordonatele diferitelor puncte de interes în studiul mișcării. Au fost precizate numai pe verticală cotele punctelor respective.  $P$  este un punct material care se mișcă cu viteza  $\vec{u}$ . Între diferitele cote și distanțe se poate stabili următoarea relație:

$$h = z + \frac{p}{\gamma} = H + z_0 \quad (1.5)$$

unde  $h$  este nivel (cotă) piezometric.

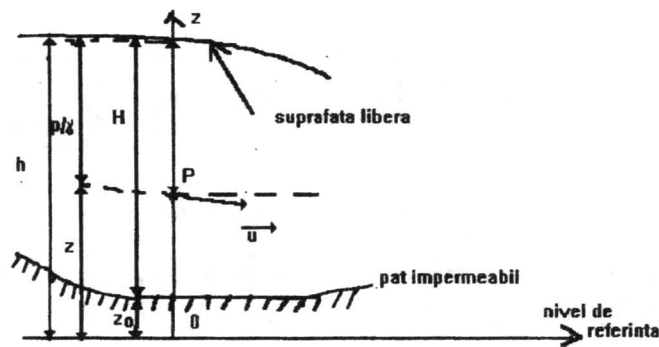


Figura 1.9

Relația (1.5) mai poate fi scrisă:

$$p' = \gamma \cdot H = p + \gamma \cdot z - \gamma \cdot z_0 \quad (1.6)$$

în care s-a notat cu  $p' = \gamma \cdot H$ , presiunea pe patul impermeabil.

### 1.5.2 Acvifere sub presiune

Mai sunt cunoscute și sub denumirea de acvifere captive deoarece acviferul în acest caz se află între două straturi impermeabile. Cu alte cuvinte în acest caz există și pat impermeabil și capac impermeabil. Mecanismul de formare și de întreținere al unui asemenea strat este diferit față de acela al acviferelor cu suprafață liberă. În figura 1.10 este prezentat un acvifer sub presiune în care se poate observa și mecanismul de formare și întreținere. Stratul acvifer având corespondent la suprafață, porțiunea *ab*, aceasta permite infiltrația apelor meteorice.

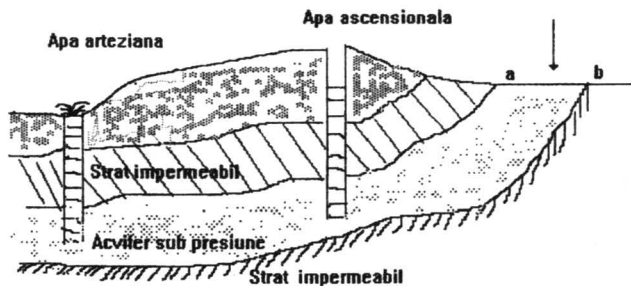


Figura 1.10

Se observă că în acest tip de acvifere dispăre și noțiunea de suprafață liberă sau oglinda apei. În acest caz rămâne utilizabilă numai noțiunea de suprafață piezometrică. Ea se definește tot cu ajutorul piezometrelor care de data aceasta indică presiunea apei acviferului în punctul în care a fost forat piezometrul. Deci suprafața piezometrică este locul geometric al tuturor nivelelor de apă din piezometre. Această suprafață imaginată în acest caz este ilustrată în figura 1.11 în care este prezentat un puț din care se pompează apă.



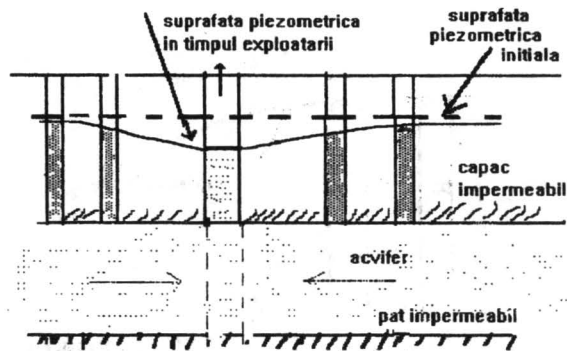


Figura 1.11

În figura 1.12 sunt prezentate mărimile ce caracterizează poziția unui punct material din curgere și poziția suprafeței piezometrice.

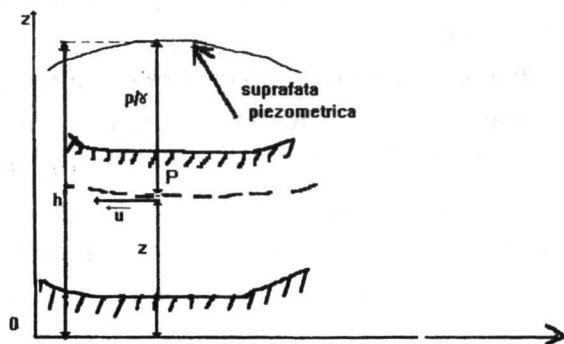


Figura 1.12

Din figură rezultă următoarea relație între acestea:

$$h = z + \frac{p}{\gamma} \quad (1.7)$$

iar

$$p' = \gamma \cdot (h - z_0) \quad (1.8)$$

reprezintă presiunea pe patul impermeabil, care cu ajutorul lui (1.7) se mai poate scrie:

$$p' = p + \gamma \cdot z - \gamma \cdot z_0 \quad (1.9)$$

Relația exprimă legătura dintre presiunea pe patul impermeabil și presiunea  $p$  dintr-un punct de pe aceeași verticală.

## 2.1. Forțe implicate în roci uscate

Se consideră un strat de roci de la suprafața pământului care la o anumită adâncime ( $\Delta z$ ) are în componența sa un strat orizontal poros de grosime  $M$ . Deasupra și dedesubtul acestui strat se află straturi impermeabile apei denumite *acoperiș etanș* respectiv *pat (culcuș) etanș* (figura 2.1), pentru care nu s-a luat în considerație grosimea lor. Deasupra și dedesubtul acestora se află alte tipuri de roci .

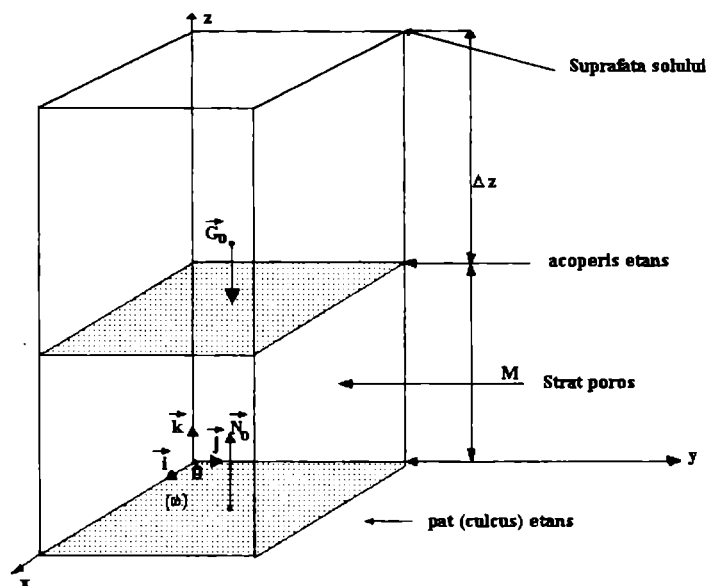


Figura 2.1

În această succesiune de straturi este delimitată o prismă dreaptă, verticală imaginată, cu înălțimea  $M + \Delta z$  și aria bazei  $\omega$ . Porozitatea comunicativă a stratului poros, sau pe scurt porozitatea, definită în capitolul precedent este:

$$m = \frac{V_{gc}}{V} = \frac{V - (V_s + V_{gi})}{V} = 1 - \frac{V_s + V_{gi}}{V} \quad (2.1)$$

Deoarece  $V_{gi} \ll V_s$  se poate neglija  $V_{gi}$  presupunând că efectul golurilor izolate este implicat în determinarea experimentală a densității părții solide a rocii ( $\rho_s$ ). În acest caz relația precedentă se scrie:

$$m = \frac{V_{gc}}{V} = 1 - \frac{V_s}{V} \quad (2.2)$$

Prisma de înălțime  $M + \Delta z$ , formată din rocă uscată, rigidă și presupusă în echilibru se află sub acțiunea a două forțe, greutatea proprie ( $\vec{G}_0$ ) și reacțiunea normală a culcușului etanș ( $\vec{N}_0$ ). Conform primului principiu al mecanicii:

$$\vec{G}_0 + \vec{N}_0 = 0 \quad (2.3)$$

Pentru  $\vec{G}_0$  se poate scrie că reprezintă suma greutateților celor două porțiuni de prismă, una de înălțime  $\Delta z$  și alta de înălțime  $M$ :

$$\vec{G}_0 = -\vec{k}g[\rho_z\omega\Delta z + \rho_s(1-m)\omega M] \quad (2.4)$$

în care:  $\rho_z$  este densitatea medie a rocilor din prisma cu înălțimea  $\Delta z$  și aria bazei  $\omega$ ;  $\rho_s$  este densitatea medie a componentelor solide ale rocii poroase ce alcătuiește porțiunea de prismă de înălțime  $M$ ;  $-\vec{k}g = \vec{g}$  este accelerația greutateții;  $(1-m)\omega M = V_s$  este volumul componentelor minerale solide din volumul  $V = \omega M$  al rocii poroase considerate.

Expresia lui  $\vec{N}_0$  este:

$$\vec{N}_0 = \vec{k} \cdot \sigma_{z_0} \cdot \omega \quad (2.5)$$

în care  $\sigma_{z_0}$  este efortul unitar pe fața bazei inferioare, a cărui expresie se obține din (2.3) după înlocuirea lui (2.4) și (2.5):

$$\sigma_{z_0} = g[\rho_z\Delta z + \rho_s(1-m) \cdot M] \quad (2.6)$$

## 2.2. Forțe implicate în roci saturate cu apă

Exprimarea cantitativă a înmagazinării apei în volumul  $V$  corespunzător prisme din mediul poros poate fi realizată prin intermediul imaginării unor situații ca în figura 2.2.

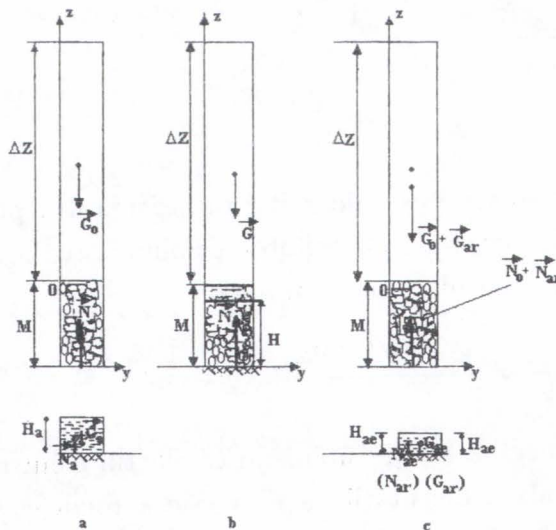


Figura 2.2

Ariile bazelor prismelor au rămas aceleași,  $\omega$ . În situația notată cu  $a$ , porțiunea de prismă poroasă este considerată uscată, separată de apa destinată înmagazinării. Aceasta este desenată separat ocupând volumul  $\omega H_a$ , cu densitatea  $\rho_a$ . Situația următoare notată

cu  $b$  reprezintă aceeași coloană, cu prisma de rocă poroasă saturată cu apa care în situația  $a$  a fost desenată separat. În situația nouă apa are densitatea  $\rho$  pe înălțimea  $H \leq M$  complet înmagazinată. Dacă  $H < M$ , apa are suprafața liberă și se spune că înmagazinarea este cu nivel liber. Dacă  $H = M$  apa presează pe acoperișul etanș iar înmagazinarea este sub presiune.

În situația a treia, notată cu  $c$ , prisma cu roca poroasă este considerată împreună doar cu apa reținută de ea prin absorbție - adsorbție, cu densitatea  $\rho_{ar}$ , separată de apa eliberată din înmagazinare prin cedare gravitațională. Densitatea acesteia după eliberare se notează cu  $\rho_a$ , ea fiind reprezentată separat, ocupând volumul  $\omega H_{ae} < \omega H_a$ .

În toate cele trei situații greutatea coloanei împreună cu aceea a apei de înmagazinat, complet separată sau complet înmagazinată sau parțial înmagazinată și parțial cedată, este aceeași. Conform notațiilor din figură se poate scrie șirul de egalități:

$$\vec{G}_0 + \vec{G}_a = \vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{G}_{ar} + \vec{G}_{ae} \quad (2.7)$$

în care:  $\vec{G}_0$  = greutatea prismei uscate;  $\vec{G}_a$  = greutatea apei destinate înmagazinării;  $\vec{G}$  = greutatea prisme cu roca poroasă saturată cu apă complet înmagazinată;  $\vec{G}_{ar}$  = greutatea apei reținute în înmagazinare prin absorbție - adsorbție;  $\vec{G}_{ae}$  = greutatea apei eliberate din înmagazinare prin cedare gravitațională.

Sirul de egalități (2.7) se mai poate scrie sub forma:

$$\vec{G}_a = \vec{G} - \vec{G}_0 = \vec{G}_{ar} + \vec{G}_{ae} \quad (2.8)$$

O parte din aceste greutăți pot fi exprimate pe baza notațiilor din figurile 2.1 și 2.2 și din textul respectiv, astfel:

$$\begin{aligned} \vec{G}_a &= -\vec{k}g\rho_a\omega H_a \\ \vec{G} - \vec{G}_0 &= -\vec{k}g\rho m\omega H \\ \vec{G}_{ae} &= -\vec{k}g\rho_a\omega H_{ae} \\ \vec{G}_{ar} &= -\vec{k}g\rho_a[\omega H_a - \omega H_{ae}] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Înlocuind aceste greutăți în șirul de egalități (2.8) și trecând de la densități la greutățile specifice se obține:

$$\gamma_a\omega H_a = \gamma m\omega H = \gamma_a\omega H_{ae} + \gamma_a(\omega H_a - \omega H_{ae}) \quad (2.10)$$

Din prima egalitate se obține pentru porozitate:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\gamma_a\omega H_a}{\gamma\omega H} \quad \text{sau} \\ m &= \frac{(\gamma_a/\gamma) \cdot \omega H_a}{\omega H} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dacă se egalează expresiile lui  $m$  date de (2.1) și (2.11), rezultă:

$$m = \frac{V_{gc}}{V} = \frac{(\gamma_a/\gamma) \cdot \omega H_a}{\omega H} \quad (2.12)$$

În aceste condiții se pot face următoarele observații:

- $\omega H$  corespunde lui  $V$ , volumul rocii saturate cu apă (fig. 2.2.b)
- $(\gamma_a/\gamma)\omega H_a$  corespunde lui  $V_{gc}$ , volumul porilor aflați în comunicație.

Dacă din figura 2.2.a se ia volumul apei înainte de a fi înmagazinată,  $\omega H_a$ , apă ce urmează să satureze volumul  $\omega H$  de rocă uscată ai cărei pori în comunicație au volumul  $V_{gc}$  se obține:

$$V_{gc} = \frac{\gamma_a}{\gamma} \omega H_a < \omega H_a \quad (2.13)$$

deoarece  $\gamma > \gamma_a$ , rezultă că  $\gamma_a/\gamma < 1$  ( $\gamma$ , greutatea specifică medie a apei înmagazinate, este mai mare decât  $\gamma_a$ , greutatea specifică a apei în stare liberă, cel puțin din cauza forțelor intermoleculare care măresc densitatea unei părți a apei înmagazinate).

Astfel din relația (2.13) se ajunge la concluzia că atunci când o cantitate de apă este înmagazinată de o rocă poroasă își micșorează volumul ( la  $(\gamma_a/\gamma) \cdot \omega H_a$ ) față de acela pe care l-a avut înainte de înmagazinarea ei ( $\omega H_a$ ).

Din a doua egalitate a relației (2.10) rezultă pentru  $m$ :

$$m = \frac{\gamma_a \omega H_{ae}}{\gamma \omega H} + \frac{\gamma_a (\omega H_a - \omega H_{ae})}{\gamma \omega H} \quad (2.14)$$

Primul termen din membrul doi are ca semnificație porozitatea eficace,  $m_e$ , semnificație ce rezultă din scrierea egalității dintre masa de apă eliberabilă ( $\rho \cdot V_{ae}$ ) și masa de apă eliberată ( $\rho_a \omega H_{ae}$ ):

$$M_{ae} = \rho V_{ae} = \rho_a \omega H_{ae} \rightarrow V_{ae} = \frac{\rho_a \omega H_{ae}}{\rho} = \frac{\gamma_a \omega H_{ae}}{\gamma} \quad (2.15)$$

Conform relației (1.3):

$$m_e = \frac{V_{ae}}{V} = \frac{(\gamma_a/\gamma) \cdot \omega H_{ae}}{\omega H} = \frac{\gamma_a \omega H_{ae}}{\gamma \omega H} \quad (2.16)$$

iar (2.14) se mai poate scrie:

$$m = m_e + \frac{\gamma_a (\omega H_a - \omega H_{ae})}{\gamma \omega H} \quad (2.17)$$

Relațiile (2.11), (2.16) și (2.17) se mai pot scrie sub forma:

$$m \gamma \omega H = \gamma_a \omega H_a \quad (2.11')$$

$$m_e \gamma \omega H = \gamma_a \omega H_{ae} \quad (2.16')$$

$$(m - m_e) \gamma \omega H = \gamma_a (\omega H_a - \omega H_{ae}) \quad (2.17')$$



Cu ajutorul acestora, relațiile (2.9) pot fi retranscrise astfel:

$$\begin{aligned}\vec{G}_a &= -\vec{k}\gamma_a\omega H_a = -\vec{k}\gamma m\omega H \\ \vec{G}_{ae} &= -\vec{k}\gamma_a\omega H_{ae} = -\vec{k}\gamma m_e\omega H \\ \vec{G}_{ar} &= -\vec{k}\gamma_a(\omega H_a - \omega H_{ae}) = -\vec{k}\gamma(m - m_e)\omega H\end{aligned}\quad (2.18)$$

### 2.3. Presiuni exercitate de diferite tipuri de ape înmagazinate

Pentru calculul presiunilor exercitate pe fațeta inferioară a secțiunii orizontale cu aria  $\omega$ , din vecinătatea culcușului etanș se procedează în felul următor:

Se notează cu  $p_a$ , presiunea apei destinată înmagazinării (figura 2.2. a) de înălțime  $H_a$  și greutate specifică  $\gamma_a$ , presiune ce va fi dată de raportul dintre greutatea apei respective ( $G_a = \gamma_a\omega H_a = \gamma m\omega H$  din relațiile 2.18) și aria  $\omega$ :

$$p_a = \frac{\gamma_a\omega H_a}{\omega} = \frac{\gamma m\omega H}{\omega} = \gamma_a \cdot H_a = \gamma m H \quad (2.19)$$

Se notează cu  $p_{ae}$ , presiunea apei gravitaționale ca fiind raportul dintre greutatea apei eliminată gravitațional ( figura 2.2.c și din relațiile 2.18 rezultând :  $G_{ae} = \gamma_{ae}\omega H_{ae} = \gamma m_e\omega H$ ) și aria  $\omega$ :

$$p_{ae} = \frac{\gamma_a\omega H_{ae}}{\omega} = \frac{\gamma m_e\omega H}{\omega} = \gamma_a \cdot H_{ae} = \gamma m_e H \quad (2.20)$$

Deoarece apa reținută nu transmite presiuni hidrostatice ea își manifestă totuși efectul de apăsare asupra culcușului impermeabil prin intermediul părții solide a rocii poroase de care este "agățată", producând o încărcare suplimentară a coloanei litologice. Apare astfel o apăsare unitară normală suplimentară,  $\sigma_{zar}$ , egală cu raportul dintre greutatea apei reținute dată de relațiile (2.15) și figura 2.2 a și c ( $G_{ar} = \gamma_a(\omega H_a - \omega H_{ae}) = \gamma(m - m_e)\omega H$ ) și aria secțiunii,  $\omega$ :

$$\sigma_{zar} = \frac{\gamma_{ar}(\omega H_a - \omega H_{ae})}{\omega} = \frac{\gamma(m - m_e)\omega H}{\omega} = \gamma_{ar}(H_a - H_{ae}) = \gamma(m - m_e)H \quad (2.21)$$

Comparând (2.19) și (2.20) cu (2.21) rezultă:

$$\sigma_{zar} = p_a - p_{ae} \quad (2.22)$$

Pentru aflarea diferitelor reacțiuni ce apar din partea patului impermeabil, pe baza notațiilor din figura 2.2. a,b,c și aplicând principiul unu al mecanicii se pot scrie următoarele relații:

$$\begin{aligned}\vec{G}_a + \vec{N}_a &= 0 \\ \vec{G} + \vec{N} &= 0 \\ \vec{G}_{ae} + \vec{N}_{ae} &= 0 \\ \vec{G}_0 + \vec{G}_{ar} + \vec{N}_0 + \vec{N}_{ar} &= 0 \\ \vec{G}_0 + \vec{N}_0 &= 0 \\ \vec{G}_{ar} + \vec{N}_{ar} &= 0\end{aligned}\quad (2.23)$$

Folosind aceste relații și expresiile (2.18), (2.19), (2.20) și (2.21) se pot scrie expresiile reacțiunilor:

$$\begin{aligned} \vec{N}_a &= -\vec{G}_a = \vec{k}\gamma m\omega H = \vec{k}p_a\omega \\ \vec{N}_{ae} &= -\vec{G}_{ae} = \vec{k}\gamma m_e\omega H = \vec{k}p_{ae}\omega \\ \vec{N}_{ar} &= -\vec{G}_{ar} = \vec{k}\gamma(m - m_e)\omega H = \vec{k}\sigma_{zar} \cdot \omega \end{aligned} \quad (2.24)$$

#### 2.4. Coeficienți de variație a înmagazinării

Coeficienții de variație a înmagazinării apei de către o rocă poroasă dintr-un acvifer sunt mărimi relative care exprimă posibilitatea variației înmagazinării apei. În figura 2.3 a este reprezentată o prismă verticală într-un acvifer cuprins între două strate impermeabile paralele și orizontale situate la distanța  $M$ . Dacă apa saturează prisma pe toată înălțimea acviferul este sub presiune. Dacă apa se ridică numai până la cota  $H < M$ , acviferul este cu suprafață liberă.

##### 2.4.1 Coeficienți de variație a înmagazinării în acvifere cu suprafață liberă

În figura 2.3.a este reprezentată o prismă verticală cu aria secțiunii  $\omega$  într-un acvifer cu suprafața liberă, având pe patul impermeabil presiunea  $p'$ .

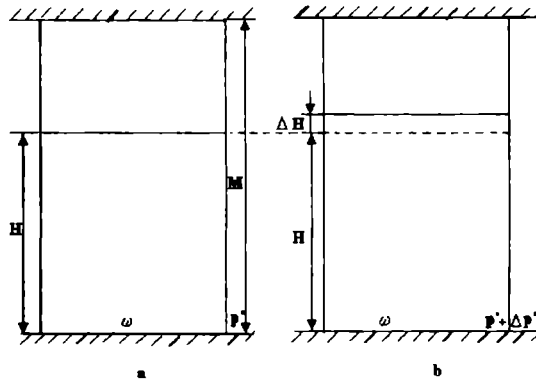


Figura 2.3

În figura 2.3.b este reprezentată aceeași prismă în care nivelul apei din acvifer a variat (crescut) cu  $\Delta H$  datorită variației (creșterii) cu  $\Delta p'$  a presiunii pe patul acviferului. Ca o consecință a acesteia s-a înmagazinat o cantitate suplimentară de apă în greutate de  $\Delta G_a = \Delta(\gamma m\omega H)$  din care o parte eliberabilă  $\Delta G_{ae} = \Delta(\gamma m_e\omega H)$ . Aria secțiunii transversale a prisme este  $\omega$ , iar acviferul este presupus omogen și izotrop. Deci  $\Delta G_a$ , respectiv  $\Delta G_{ae}$ , reprezintă variațiile absolute ale greutăților diferitelor tipuri de ape totale sau eliminabile, înmagazinate în prisma cu aria secțiunii  $\omega$  pentru variația  $\Delta p'$  a presiunii pe patul acviferului. Deoarece definiția coeficientului de variație a înmagazinării urmează să fie o caracteristică a acviferului trebuie să fie enunțată în așa fel încât să fie independentă de dimensiunile prisme și de mărimea variației presiunii pe patul acviferului. În aceste condiții, coeficientul de variație a înmagazinării poate fi definit ca reprezentând variația greutății apei înmagazinabile

( $\Delta G_a$  sau  $\Delta G_{ae}$ ) într-o prismă verticală cu aria secțiunii transversală egală cu unitatea datorită variației presiunii pe patul acviferului ( $\Delta p'$ ) cu o unitate. Cu ajutorul variațiilor finite se poate scrie:

$$S_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta G_a}{\Delta p'} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta(\gamma m \omega H)}{\Delta(\gamma H)} \quad (2.25)$$

pentru coeficientul de variație a înmagazinării totale în acviferul cu suprafață liberă și:

$$S_{e0} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta G_{ae}}{\Delta p'} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta(\gamma m_e \omega H)}{\Delta(\gamma H)} \quad (2.26)$$

pentru coeficientul de variație a înmagazinării eficace în acvifere cu suprafață liberă.

Unele dintre mărimile care intră în relațiile (2.25) și (2.26), cu excepția lui  $H$ , pot fi scoase sau introduse de sub operatorul  $\Delta$  deoarece fie că sunt constante, fie că pe baza unor ipoteze suplimentare asupra acviferului devin constante. De exemplu, pentru un acvifer cu suprafață liberă, omogen și izotrop, mărimile  $\gamma, m, m_e, \omega$  sunt constante. Pe baza acestor proprietăți  $S_0$  și  $S_{e0}$  pot fi puși și sub alte forme decât (2.25) și (2.26), din care să rezulte și alte definiții ale lor:

$$S_0 = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta G_a}{\Delta p'} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta(\gamma m \omega H)}{\Delta(\gamma H)} = \frac{\Delta(\gamma m \omega H)}{\Delta(\gamma \omega H)} = \frac{\Delta G_a}{\Delta G'} \quad (2.27)$$

$$S_0 = \frac{\gamma m \omega \Delta H}{\gamma \omega \Delta H} = m \quad (2.28)$$

$$S_0 = \frac{\gamma \Delta(m \omega H)}{\gamma \omega \Delta H} = \frac{1}{\omega} \frac{\Delta V_a}{\Delta H} \quad (2.29)$$

$$S_0 = \frac{\omega \Delta(\gamma m H)}{\omega \Delta(\gamma H)} = \frac{\Delta p_a}{\Delta p'} \quad (2.30)$$

și respectiv:

$$S_{e0} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta G_{ae}}{\Delta p'} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta(\gamma m_e \omega H)}{\Delta(\gamma H)} = \frac{\Delta(\gamma m_e \omega H)}{\Delta(\gamma \omega H)} = \frac{\Delta G_{ae}}{\Delta G'} \quad (2.31)$$

$$S_{e0} = \frac{\gamma m_e \omega \Delta H}{\gamma \omega \Delta H} = m_e \quad (2.32)$$

$$S_{e0} = \frac{\gamma \Delta(m_e \omega H)}{\gamma \omega \Delta H} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\Delta V_{ae}}{\Delta H} \quad (2.33)$$

$$S_{e0} = \frac{\omega \Delta(\gamma m_e H)}{\omega \Delta(\gamma H)} = \frac{\Delta p_{ae}}{\Delta p'} \quad (2.34)$$

Relațiile (2.27) și (2.31) conduc la o definiție mai puțin clară a coeficienților. Conform lor ei reprezintă variația greutateii apei totale înmagazinată în rocă, sau a celei eliberabile din rocă, corespunzătoare unei variații egale cu unitatea ( $\Delta G' = 1$ ) a greutateii apei înmagazinate, dacă ar ocupa singură volumul întreg (al rocii poroase și al apei din ea) și având aceeași densitate cu apa înmagazinată în rocă.

Semnificațiile relațiilor (2.28) și (2.32) sunt evidente.

Relațiile (2.29) și (2.33) conduc la o altă definiție a coeficienților. În acest caz ei reprezintă variația volumului de apă total înmagazinată (sau a celei eliminabile) într-o prismă cu aria secțiunii egală cu unitatea când nivelul apei variază cu unitatea.

Ultimile relații, (2.30) și (2.34) conduc la definirea coeficienților prin variația presiunii apei înmagazinată (sau eliberabilă) în rocă produsă de variația presiunii pe patul impermeabil (pe aceeași verticală) egală cu o unitate. În paragraful următor se va arăta că această definiție este cea mai generală pentru ambele tipuri de acvifere.

Relațiile (2.27) ÷ (2.34) pot fi retranscrise și pentru variații infinit mici ale mărimilor respective și anume:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial G_a}{\partial p'} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial(\gamma m \omega H)}{\partial(\gamma H)} = \frac{\partial G_a}{\partial G'} \\
 &S_0 = m \\
 S_0 &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial V_a}{\partial H} \\
 S_0 &= \frac{\partial p_a}{\partial p'}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

și respectiv:

$$\begin{aligned}
 S_{e0} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial G_{ae}}{\partial p'} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial(\gamma m_e \omega H)}{\partial(\gamma H)} = \frac{\partial G_{ae}}{\partial G'} \\
 &S_{e0} = m_e \\
 S_{e0} &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial V_{ae}}{\partial H} \\
 S_{e0} &= \frac{\partial p_{ae}}{\partial p'}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Ultimile forme ale fiecărui coeficient din ecuațiile (2.35) și (2.36) pot fi puse sub o formă finală ținând cont de relația (1.6):

$$p' = H\gamma = p + \gamma z - \gamma z_0$$

$$\text{din care se obține: } \frac{\partial p}{\partial p'} = 1$$

Deci:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{\partial p_a}{\partial p'} = \frac{\partial p_a}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p'} = \frac{\partial p_a}{\partial p} \\
 S_{e0} &= \frac{\partial p_{ae}}{\partial p'} = \frac{\partial p_{ae}}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p'} = \frac{\partial p_{ae}}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Expresiile finale ale celor doi coeficienți sunt:

$$S_0 = \frac{\partial p_a}{\partial p} = \frac{\partial(m\gamma H)}{\partial p} \quad (2.38)$$

$$S_{e0} = \frac{\partial p_{ae}}{\partial p} = \frac{\partial(m_e\gamma H)}{\partial p} \quad (2.39)$$

Sub această formă ei pot fi utilizați și pentru acviferele neomogene. Între cei doi coeficienți rezultă relația:

$$S_0 - S_{e0} = \frac{\partial}{\partial p}[\gamma(m - m_e)H] = m - m_e \quad (2.40)$$

#### 2.4.2. Coeficientul de variație a înmagazinării pentru acvifere sub presiune

Pentru un acvifer sub presiune, omogen și izotrop, coeficientul respectiv poate fi de asemenea definit cu ajutorul variațiilor finite ale mărimilor implicate. Fie o prismă verticală de material acvifer saturat, de secțiune  $\omega$ , înălțime  $M$ , volum  $V = \omega M$  și porozitate  $m$  (sau porozitate eficace  $m_e$ ).

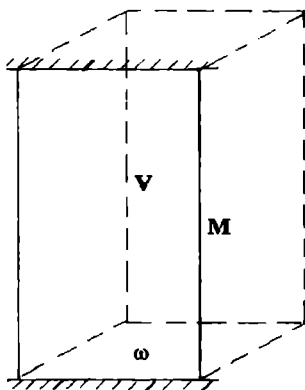


Figura 2.4

Chiar dacă materialul acvifer din prismă este saturat, el mai poate primi masă de apă, fie prin comprimarea apei, fie prin variația (forțarea) porozității care implică și o variație a lui  $M$ . Să presupunem că în condițiile menționate în prisma respectivă, prin înmagazinarea suplimentară (după atingerea stării de saturație) a crescut greutatea apei cu  $\Delta G_a = \Delta(\gamma m \omega M)$  pentru o creștere cu  $\Delta p'$  a presiunii  $p'$  de pe patul impermeabil (baza prisme) al stratului acvifer. Atunci coeficientul de variație a înmagazinării se definește ca fiind raportul dintre variația (creșterea) greutății apei înmagazinate într-o prismă verticală de acvifer complet saturat cu secțiunea egală cu unitatea pentru o creștere a presiunii totale pe baza prisme cu o unitate. Definiția permite să se scrie pentru coeficientul de variație a înmagazinării totale expresia:

$$S_1 = \frac{\Delta G_a}{\omega \Delta p'} = \frac{\Delta(\gamma m \omega M)}{\omega \Delta p'} = \frac{\Delta(\gamma m M)}{\Delta p'} \quad (2.41)$$

iar pentru coeficientul de variație a înmagazinării eficace:

$$S_{e1} = \frac{\Delta G_{ae}}{\omega \Delta p'} = \frac{\Delta(\gamma m_e \omega M)}{\omega \Delta p'} = \frac{\Delta(\gamma m_e M)}{\Delta p'} \quad (2.42)$$

Pentru un acvifer sub presiune și neomogen se obțin expresiile coeficienților prin trecere la limită pentru  $\Delta p' \rightarrow 0$ :

$$S_1 = \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p'} \quad \text{și} \quad S_{e1} = \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p'} \quad (2.43)$$

Folosind relația (1.9), care stabilește legătura dintre presiunea de pe patul impermeabil cu presiunea  $p$  dintr-un punct oarecare al acviferului sub presiune de pe aceeași verticală, adică:  $p' = p + \gamma z - \gamma z_0$  expresiile celor doi coeficienți devin:

$$S_1 = \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p'} = \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p'} = \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p} \quad (2.44)$$

$$S_{e1} = \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p'} = \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial p'} = \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p} \quad (2.45)$$

Pe parcursul deducerii acestor expresii s-a făcut mereu mențiunea că acviferul sub presiune este presupus complet saturat. Dacă nu ar fi îndeplinită această condiție, deci ar exista o porțiune de acvifer nesaturată sub acoperișul impermeabil ne-am situa în cazul precedent al acviferului cu suprafață liberă. Această observație, cât și compararea expresiilor celor doi coeficienți de variație a înmagazinării găsiți pentru cele două tipuri de acvifere (adică (2.38) cu (2.44) și (2.39) cu (2.45)) permit să se considere câte o singură expresie pentru fiecare coeficient și anume;

$$S = \frac{\partial(\gamma m H)}{\partial p} \quad S_e = \frac{\partial(\gamma m_e H)}{\partial p} \quad (2.46)$$

în care pentru acviferele cu suprafață liberă se face mențiunea  $H < M$  și i se pune indicele "0" și se scrie:

$$S_0 = \frac{\partial(\gamma m H)}{\partial p} \quad (2.47)$$

iar pentru acviferele sub presiune se face mențiunea  $H = M$  și se pune indicele "1", adică:

$$S_1 = \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p} \quad (2.48)$$

Deoarece  $\gamma = g \cdot \rho$ ,  $m, m_e, M$  sunt mărimi care variază cu presiunea în cazul acviferelor sub presiune, expresiile coeficienților de variație a înmagazinării nu mai pot fi simplificate (ca în cazul acviferelor cu suprafață liberă :  $S_0 = m$  și  $S_{e0} = m_e$ ) decât în foarte puține cazuri și anume acolo unde tipul de acvifer sub presiune și tipul de curgere permit ipoteze suplimentare asupra mărimilor respective.

Caracterizarea compresibilității ansamblului rocă poroasă, apă înmagazinată sub presiune poate fi făcută cu ajutorul expresiei:

$$\beta^* = \frac{1}{\rho V} \cdot \frac{\partial(\bar{\rho}V)}{\partial p} \quad (2.49)$$

a cărei semnificație fizică o vom deduce în final și în care  $\bar{\rho}V$  reprezintă masa totală a rocii poroase saturată cu apă al cărei volum este  $V$  iar densitatea medie  $\bar{\rho}$ . Această masă mai poate fi scrisă:

$$\bar{\rho} \cdot V = \rho m V + \rho_s(1 - m)V = \rho m_e V + \rho(m - m_e)V + \rho_s(1 - m)V \quad (2.50)$$

Introducând (2.50) în (2.49) se obține:

$$\beta^* = \frac{1}{\rho V} \cdot \frac{\partial(\bar{\rho}V)}{\partial p} = \frac{1}{\rho V} \cdot \frac{\partial(\rho m_e V)}{\partial p} + \frac{1}{\rho V} \cdot \frac{\partial}{\partial p}[\rho(m - m_e)V] + \frac{1}{\rho V} \cdot \frac{\partial}{\partial p}[\rho_s(1 - m)V] \quad (2.51)$$

Ultimul termen din membrul doi este nul deoarece masa părții solide a rocii nu variază cu presiunea. Restul relației se scrie, în urma înmulțirii sus și jos cu  $g$  și a punerii lui  $V$  sub forma  $\omega \cdot M$ , astfel:

$$\beta^* = \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p} + \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{\partial}{\partial p}[\gamma(m - m_e)M] \quad (2.52)$$

Simplificarea cu  $\omega$  a fost posibilă deoarece aria secțiunii transversale a prisme este singura mărime ce poate fi considerată constantă într-un acvifer sub presiune. După desfacerea termenului doi din membrul drept și reducerile corespunzătoare, se obține:

$$\beta^* = \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p} \quad (2.53)$$

Introducând pe (2.53) în (2.52) se obține:

$$\beta^* = \frac{1}{\gamma M} \frac{\partial(\gamma m M)}{\partial p} = \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{\partial(\gamma m_e M)}{\partial p} + \frac{1}{\gamma M} \cdot \frac{\partial}{\partial p}[\gamma(m - m_e)M] \quad (2.54)$$

sau :

$$\beta^* = \frac{S_1}{\gamma M} = \frac{S_{e1}}{\gamma M} + \frac{1}{\gamma M} \frac{\partial}{\partial p}[\gamma(m - m_e)M] \quad (2.55)$$

Din cele două egalități rezultă:

$$\begin{aligned} S_1 &= \gamma M \beta^* \\ S_{e1} &= S_1 - \frac{\partial}{\partial p}[\gamma(m - m_e)M] \end{aligned} \quad (2.56)$$

Derivata din membrul doi este neglijabilă deoarece masa apei de reținere  $\rho(m - m_e)M$  din prismă variază foarte puțin cu presiunea. Deci practic:

$$S_1 \simeq S_{e1} = \gamma M \beta^* \quad (2.57)$$

Semnificația fizică a lui  $\beta^*$  poate fi dedusă din dezvoltarea relației (2.53):

$$\beta^* = \frac{1}{\gamma M} \frac{\partial}{\partial p} [\gamma m M] = \frac{1}{\gamma M} \left[ \gamma M \frac{\partial m}{\partial p} + \gamma m \frac{\partial M}{\partial p} + m M \frac{\partial \gamma}{\partial p} \right] \quad (2.58)$$

sau dând factor comun pe  $\gamma m M$ :

$$\beta^* = m \left[ \frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial p} + \frac{1}{M} \cdot \frac{\partial M}{\partial p} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial p} \right] \quad (2.59)$$

din care se observă că  $\beta^*$  reprezintă suma variațiilor unitare ale lui  $m, M, \gamma$  în raport cu presiunea înmulțită cu porozitatea rocii.



## LEGILE DINAMICII APEI ELIBERABILE PRIN ACVIFERE

## 3.1. Modelul ales pentru apa care circulă prin golurile din roci

Mișcarea reală a apei prin pori sau fisuri (numită și apă hidrodinamic activă) este foarte complicată din cauza sinuozității canalelor prin care circulă, canale cu dimensiuni și forme variabile, cât și din cauza unui sistem de legături de comunicație între canale, practic aleator. De aceea mișcarea reală este neuniformă și pe traiectorii de formă oarecare, studiul direct al ei ridicând probleme de calcul greu de rezolvat, dacă nu chiar imposibil.

În aceste condiții se preferă ca mișcarea să fie studiată cu ajutorul unui model utilizat și în alte situații, modelul mediului continuu. În cazul circulației apei prin acvifere acest model este ușor diferit față de modelul clasic al mediului continuu din cauza prezenței scheletului constituenților solizi ai rocii.

Fie, mai întâi un mediu poros omogen (granule identice), de porozitate eficace  $m_e$  din care se delimitează un cilindru imaginar a cărui axă să coincidă cu direcția de curgere a apei prin acvifer, având aria secțiunii transversale  $\omega$  și lungimea  $l$ .

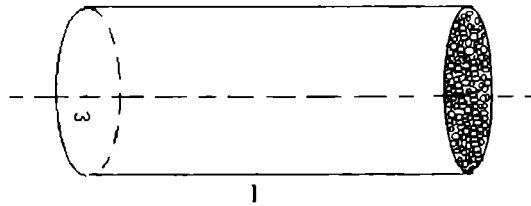


Figura 3.1

Aria secțiunii transversale  $\omega$  este numai parțial traversată de apă, și anume aceea care corespunde secțiunii golurilor aflate în comunicație, notată cu  $\omega_{ae}$  și numită suprafață eficace, restul fiind ocupată de secțiunile granulelor. Pe acest model pot fi definite diferite viteze de curgere a apei:

- Viteza medie reală sau efectivă pe secțiunea transversală a canalelor din rețeaua de pori ar putea fi definită cu ajutorul debitului real,  $Q$ , al apei prin secțiunea transversală a cilindrului raportat la aria suprafeței eficace  $\omega_{ae}$  a secțiunii, adică:

$$u = \frac{Q}{\omega_{ae}} \quad (3.1)$$

- Se poate defini viteza unui mediu continuu care ocupă întregul cilindru imaginat, mediu care în timpul deplasării traversează întreaga arie  $\omega$  a secțiunii transversale, debitul fiind tot cel real ( $Q$ ). În acest caz expresia ei va fi:

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad (3.2)$$

și se numește viteză aparentă sau de filtrare (filtrație), ea fiind întotdeauna mai mică decât viteza reală  $u$ . Relația dintre cele două viteze se obține făcând raportul expresiilor (3.1) și (3.2):

$$\frac{v}{u} = \frac{\omega_{ae}}{\omega} = \frac{\omega_{ae}l}{\omega l} = \frac{V_{ae}}{V} = m_e \quad (3.3)$$

Deci

$$v = m_e \cdot u \quad (3.4)$$

Dacă volumul cilindrului imaginar îl micșorăm suficient de mult (matematic îl facem să tindă către zero), dar în același timp rămâne suficient de mare pentru a conține destule granule și respectiv goli pentru a păstra imaginea modelului de mediu continuu, expresiile vitezelor definite capătă sens de viteze "punctuale", adică ale elementului de volum corespunzător. Relația dintre cele două viteze poate fi scrisă și vectorial:

$$\vec{v} = m_e \cdot \vec{u} \quad (3.5)$$

Astfel definite, cele două viteze pot fi utilizate și într-un mediu neomogen, din care cauză toate cele trei mărimi  $\vec{v}$ ,  $m_e$ ,  $\vec{u}$ , pentru a cuprinde toate variantele de curgeri subterane, trebuie declarate de la început ca fiind niște funcții de punct și de timp, adică:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t); \quad \vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t); \quad m_e = m_e(\vec{r}, t) \quad (3.6)$$

$\vec{r}$  fiind vectorul de poziție al elementului de volum la care se referă cele trei mărimi.

Dacă se notează cu  $dV$  volumul elementar al mediului continuu, el reprezintă volumul în care se află punctul material al modelului, punct care se deplasează cu viteza de filtrare  $\vec{v}$ . În același timp  $m_e dV$  reprezintă volumul elementar de apă hidrodinamic activă corespunzătoare volumului  $dV$ , apă care se mișcă cu viteza efectivă  $\vec{u}$ . Atât volumul elementar  $dV$  cât și un volum finit al mediului continuu sunt în general funcții de timp. Pe baza acestor notații volumul apei hidrodinamic active corespunzătoare volumului  $V(t)$  este:

$$V_{ae}(t) = \int_{V(t)} m_e dV \quad (3.7)$$

Pe parcursul mișcării, volumul de apă hidrodinamic activă,  $\int_{V(t)} m_e dV$ , prezintă o variație în timp, variație ce poate fi exprimată cu ajutorul derivatei substanțiale astfel:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} m_e dV = \int_{V(t)} \left( \frac{dm_e}{dt} + m_e \cdot \text{div} \vec{u} \right) dV \quad (3.8)$$

Dacă dezvoltăm și derivata substanțială a lui  $m_e$  se obține:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} m_e dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial m_e}{\partial t} + \vec{u} \text{grad} m_e + m_e \text{div} \vec{u} \right) dV$$

sau

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} m_e dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial m_e}{\partial t} + \text{div}(m_e \vec{u}) \right] dV = \int_{V(t)} \frac{\partial m_e}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \text{div}(m_e \vec{u}) dV \quad (3.9)$$

Cu ajutorul formulei lui Gauss  $\int_{V(t)} \text{div}(m_e \vec{u}) dV = \oint_{\omega(t)} m_e \vec{u} d\vec{\omega}$  se obține:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} m_e dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} m_e dV + \oint_{\omega(t)} m_e \vec{u} d\vec{\omega} \quad (3.10)$$

sau folosind viteza de filtrare  $\vec{v} = m_e \cdot \vec{u}$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} m_e dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V(t)} m_e dV + \oint_{\omega(t)} \vec{v} d\vec{\omega} \quad (3.11)$$

Rezultatul obținut arată că derivata substanțială a volumului  $V_{ae}(t)$  este egală cu suma dintre derivata locală a aceluiași volum de apă hidrodinamic activă și fluxul vitezei de filtrare prin suprafața închisă  $\omega(t)$  care delimitează volumul  $V(t)$ .

### 3.2. Forțe reale implicate în dinamica apelor subterane

Forțele care participă la mișcarea apei în domeniul saturat cu apă al unei roci poroase sau fisurate sunt: *forța de greutate*, *forța de presiune* și *forța de rezistență la înaintare*.

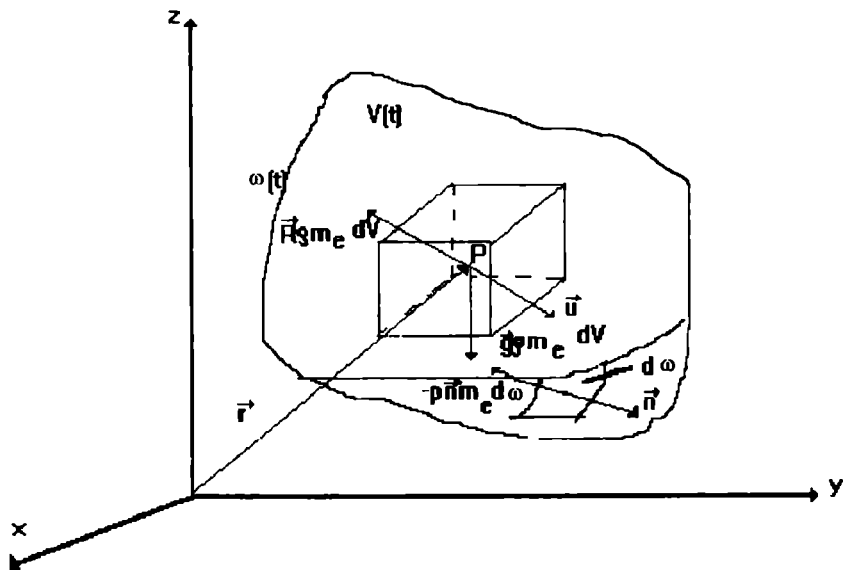


Figura 3.2

Forța de greutate a apei hidrodinamic active din volumul  $V(t)$ , notată cu  $\vec{G}_{ae}$ , rezultă prin integrarea pe întreg volumul  $V(t)$  a greutateților elementare  $\vec{g} \rho m_e dV$  ale porțiunilor elementare de apă hidrodinamic activă din volumele elementare  $m_e dV$ . Deci:

$$\vec{G}_{ae} = \int_{V(t)} \vec{g} \cdot \rho \cdot m_e dV \quad (3.12)$$

Forța de presiune exercitată asupra apei hidrodinamic active din interiorul suprafeței închise  $\omega(t)$  care delimitează volumul  $V(t)$ , notată cu  $\vec{F}_{pae}$ , se obține prin integrarea pe  $\omega(t)$  a forțelor de presiune elementare:  $-pm_e d\vec{\omega} = -p\vec{n}m_e d\omega$  care acționează pe suprafețele elementare eficiente  $m_e d\vec{\omega} = \vec{n}m_e d\omega$ , forțe orientate spre interiorul volumului în sens opus versurilor normalelor  $\vec{n}$  pe  $d\omega$ . Deci:

$$\vec{F}_{pae} = - \oint_{\omega(t)} p \cdot m_e d\vec{\omega} \quad (3.13)$$

Forța de rezistență,  $\vec{R}_{ae}$ , care se opune mișcării apei hidrodinamic active din volumul  $V(t)$  se obține prin integrarea pe  $V(t)$  a forțelor elementare,  $\vec{R}\rho m_e dV$ , întâmpinate de masele elementare  $\rho m_e dV$ , adică:

$$\vec{R}_{ae} = \int_{V(t)} \vec{R}\rho m_e dV \quad (3.14)$$

în care  $\vec{R}$  este forța de rezistență la înaintarea unității de masă hidrodinamic activă. Pentru determinarea rezistenței pe care o întâmpină apa la înaintare din partea componentelor solide ale rocilor se poate folosi problema inversă a calculului rezistenței pe care o întâmpină componentele solide când se mișcă prin apă. Astfel pentru viteze mici în regim laminar se folosește pentru modulul forței de rezistență la înaintarea apei expresii de tip Stokes (relația 3.15), iar pentru viteze mari în regim turbulent expresii de tip Newton (relația 3.16):

$$|\vec{R}_{ae}| = \eta v l f(Re) \quad (3.15)$$

$$|\vec{R}_{ae}| = \rho v^2 l^2 f(Re) \quad (3.16)$$

în care  $\rho$  este masa specifică a apei;  $v$  este modulul vitezei de filtrare;  $l$  este dimensiunea liniară caracteristică pentru proprietățile geometrice ale mediului poros;  $\eta$  este vâscozitatea dinamică a apei;  $f(Re)$  este o funcție de numărul lui Reynolds a cărui expresie este:

$$Re = \frac{\rho u l}{\eta} = \frac{u l}{\nu} \quad (3.17)$$

în care  $u$  este modulul vitezei efective și  $\nu$  este vâscozitatea cinematică a apei. Împărțind ultima expresie a modulului forței de rezistență (3.15) prin  $\rho l^3$  se obține modulul forței de rezistență la înaintare a unității de masă a apei hidrodinamic active:

$$|\vec{R}| = \frac{|\vec{R}_{ae}|}{\rho l^3} = \frac{\eta v l f(Re)}{\rho l^3} = \frac{\nu v}{l^2} \cdot f(Re) \quad (3.18)$$

in care

$$l^2 = k \quad (3.19)$$

are semnificația permeabilității mediului poros sau fisurat.

Deoarece forța de rezistență la înaintare a unității de masă a apei hidrodinamic activă se opune mișcării apei cu viteza  $\vec{v}$ , ea va fi pe aceeași direcție dar de sens opus cu  $\vec{v}$ , ceea ce permite și scrierea vectorială a ei:

$$\vec{R} = -\frac{\nu}{k} \cdot \vec{v} \cdot f(Re) \quad (3.20)$$

Cele două expresii date pentru numărul lui Reynolds pot fi puse și sub altă formă dacă se înlocuiește viteza efectivă cu cea de filtrare ( $\vec{v} = m_e \vec{u}$ ) și  $l = \sqrt{k}$ :

$$Re = \frac{1}{m_e} \cdot \frac{\rho v \sqrt{k}}{\eta} = \frac{1}{m_e} \frac{v \sqrt{k}}{\nu} \quad (3.21)$$

Pentru determinarea completă a forței rezistente în mișcarea prin roci poroase sau fisurate, se caută o funcție  $f(Re)$  care să satisfacă condițiile:

$$\lim_{Re \rightarrow 0} [f(Re)] = 1; \quad \text{și} \quad \lim_{Re \rightarrow \infty} [f(Re)] = e^{Re} \quad (3.22)$$

Din aceste condiții rezultă:

$$1 < f(Re) < e^{Re} \\ 0 < \frac{\ln[f(Re)]}{Re} < 1$$

Sau sub forma:

$$\frac{\ln[f(Re)]}{Re} = n - 1, \quad \text{unde} \quad 1 < n < 2 \quad (3.23)$$

de unde:

$$f(Re) = e^{(n-1)Re}, \quad \text{unde} \quad 1 < n < 2 \quad (3.24)$$

în care  $n \rightarrow 1$  pentru mișcarea foarte lentă și  $n \rightarrow 2$  pentru mișcarea foarte rapidă.

În domeniul mișcării laminare a apei prin medii poroase determinările experimentale dau pentru  $Re$  ca limită superioară valori de  $50 \div 60$ , iar în domeniul mișcării turbulente până la 420. Deci în domeniul mișcării laminare, exponentul  $(n - 1)Re$  are valori suficient de mici pentru a permite o bună aproximare a funcției  $f(Re)$  numai prin primii doi termeni ai dezvoltării în serie:

$$e^{(n-1)Re} = 1 + \frac{(n-1)Re}{1!} + \frac{(n-1)^2 Re^2}{2!} \quad (3.25)$$

adică :

$$f(Re) = 1 + (n - 1)Re \quad (3.26)$$

### 3.3. Mărimi și legi generale ale mișcării apei hidrodinamic active

#### 3.3.1. Legea continuității

În domeniul saturat cu apă al rocii poroase sau fisurate, masa de apă hidrodinamic activă  $\mathcal{M}$ , conținută în volumul  $V(t)$  este invariabilă în timp, adică:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = 0 \quad (3.27)$$

Dacă notăm cu  $\rho(\vec{r}, t)$  densitatea apei conținute în  $V(t)$ , masa  $\mathcal{M}$  din  $V(t)$  poate fi scrisă:

$$\mathcal{M} = \int_{V(t)} \rho m_e dV \quad (3.28)$$

iar invariabilitatea (conservarea) ei se scrie:

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho m_e dV = 0 \quad (3.29)$$

Deoarece volumul de integrare  $V(t)$  este format din particule ( $P$ ) de apă hidrodinamic activă în mișcare cu viteza  $\vec{u}(P)$ , derivata substanțială a integralei de volum care exprimă condiția de invariabilitate a masei se scrie:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho m_e dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{d(\rho m_e)}{dt} + \rho m_e \operatorname{div} \vec{u} \right] dV \quad (3.30)$$

iar condiția de conservare sub formă integrală (globală) devine:

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{d(\rho m_e)}{dt} + \rho m_e \operatorname{div} \vec{u} \right] dV = 0 \quad (3.31)$$

Întrucât volumul  $V(t)$  este arbitrar ales se poate scrie și forma locală a acestei condiții de conservare:

$$\frac{d(\rho m_e)}{dt} + \rho m_e \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (3.32)$$

Dacă se înlocuiește termenul doi cu:

$$\rho m_e \operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div}(\rho m_e \vec{u}) - \vec{u} \cdot \operatorname{grad}(\rho m_e) \quad (3.33)$$

și viteza efectivă  $\vec{u}$  cu viteza de filtrare  $\vec{v}$  prin relația de definiție, iar derivata totală din primul termen se dezvoltă, atunci cele două forme ale legii continuității, globală și locală (3.31 și 3.32), mai pot fi scrise astfel:

$$\int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (3.35)$$

în care  $\rho \vec{v}$  este densitatea fluxului de masă al apei hidrodinamic active.

### 3.3.2. Impulsul și legea impulsului

Impulsul apei hidrodinamic active conținută în volumul  $V(t)$  este dat de expresia:

$$\vec{H} = \int_{V(t)} \rho m_e \vec{u} dV \quad (3.36)$$

Legea impulsului poate fi aplicată apei hidrodinamic active din volumul  $V(t)$  ca fiind reprezentabilă printr-un ansamblu de puncte materiale cu masa  $\rho m_e dV$  și impulsul  $\rho m_e \vec{u} dV$  ansamblu aflat sub acțiunea celor trei tipuri de forțe externe. Deci, derivata substanțială a impulsului apei hidrodinamic active conținută în volumul  $V(t)$  este egală cu suma tuturor forțelor externe care acționează asupra apei respective.

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{G}_{ae} + \vec{F}_{pae} + \vec{R}_{ae} \quad (3.37)$$

sau

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho m_e \vec{u} dV = \int_{V(t)} \vec{g} \rho m_e dV - \int_{\omega(t)} p m_e d\vec{\omega} + \int_{V(t)} \vec{R} \rho m_e dV \quad (3.38)$$

Derivata substanțială a primului membru, adică a impulsului total conduce la:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho m_e \vec{u} dV &= \int_{V(t)} \left[ \frac{d(\rho m_e \vec{u})}{dt} + \rho m_e \vec{u} \text{div} \vec{u} \right] dV = \\ &= \int_{V(t)} \left( (\rho m_e) \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \left[ \frac{d(\rho m_e)}{dt} + \rho m_e \text{div} \vec{u} \right] \right) dV = \int_{V(t)} \rho m_e \frac{d\vec{u}}{dt} dV \end{aligned} \quad (3.39)$$

expresia din parantezele drepte fiind nulă conform relației (3.32). Termenul doi din membrul drept al relației (3.38) poate fi transformat cu ajutorul formulei integrale a gradientului astfel:

$$\oint_{\omega(t)} p m_e d\vec{\omega} = \int_{V(t)} \text{grad}(p m_e) dV \quad (3.40)$$

Înlocuind pe (3.39) și (3.40) în (3.38) se obține pentru legea impulsului sub formă integrală relația:

$$\int_{V(t)} \rho m_e \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \int_{V(t)} \vec{g} \rho m_e dV - \int_{V(t)} \text{grad}(p m_e) dV + \int_{V(t)} \vec{R} \rho m_e dV \quad (3.41)$$

sau:

$$\frac{d\vec{H}}{dt} = \int_{V(t)} \rho m_e \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \int_{V(t)} [\vec{g} \rho m_e - \text{grad}(p m_e) + \vec{R} \rho m_e] dV \quad (3.42)$$

Deoarece alegerea lui  $V(t)$  a fost arbitrară forma locală a aceleiași legi se poate scrie:

$$\rho m_e \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g} \rho m_e - \text{grad}(p m_e) + \vec{R} \rho m_e \quad (3.43)$$

### 3.3.3. Legile de filtrare

Pentru obținerea legilor de curgere a apei prin medii poroase sau fisurate saturate se pornește de la legea impulsului sub formă locală (3.43), care se mai poate scrie:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho \cdot m_e} \text{grad}(p \cdot m_e) + \vec{R} \quad (3.44)$$

Pentru a se obține diferite forme ale legii de filtrare vor fi transformați pe rând toți membrii relației (3.44). Membrul stâng se mai poate scrie:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (3.45)$$

iar din:  $\vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) = \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) - (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$   
se obține:

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (3.46)$$

Deci se mai poate scrie că:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (3.47)$$

Termenul 1 din membrul drept al relației (3.44) poate fi scris astfel:

$$\vec{g} = -\vec{k}g = -g \cdot \text{grad}z \quad (3.48)$$

Termenul 2 din membrul drept poate fi scris și altfel pornind de la :

$$\text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \text{grad}\left(p \cdot m_e \cdot \frac{1}{\rho \cdot m_e}\right) = \frac{1}{\rho \cdot m_e} \cdot \text{grad}(p \cdot m_e) + p \cdot m_e \cdot \text{grad}\left(\frac{1}{\rho m_e}\right) \quad (3.49)$$

de unde:



$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho \cdot m_e} \cdot \text{grad}(p \cdot m_e) &= \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) - p \cdot m_e \text{grad}\left(\frac{1}{\rho \cdot m_e}\right) = \\ &= \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{p}{\rho^2 \cdot m_e} \cdot \text{grad}(\rho \cdot m_e) \end{aligned} \quad (3.50)$$

Ultimul termen din membrul drept poate fi scris conform relației (3.20):

$$\vec{R} = -\frac{\nu \cdot \vec{v}}{k} \cdot f(Re) \quad (3.51)$$

Se înlocuiesc relațiile (3.47), (3.48), (3.50) și (3.51) în relația (3.44) și se obține:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2}\right) - \vec{u} \times (\nabla \times \vec{u}) &= -g \cdot \text{grad}z - \text{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \\ &- \frac{p}{\rho^2 \cdot m_e} \cdot \text{grad}(\rho \cdot m_e) - \frac{\nu \vec{v}}{k} \cdot f(Re) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Se împarte cu  $g$ , se face substituția  $g \cdot \rho = \gamma$  și după redistribuirea termenilor se obține:

$$\begin{aligned} -\text{grad}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) &= \frac{\nu \cdot \vec{v}}{k \cdot g} \cdot f(Re) + \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{u^2}{2g}\right) - \\ &- \frac{\vec{u}}{g} \times (\nabla \times \vec{u}) + \frac{p}{\gamma^2 \cdot m_e} \cdot \text{grad}(\gamma \cdot m_e) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Deoarece  $z + \frac{p}{\gamma} + \text{const} = h$  este cota sau sarcina piezometrică și reprezintă energia potențială a unității de greutate de apă hidrodinamic activă se poate alege  $\text{const} = 0$  și se obține:

$$z + \frac{p}{\gamma} = h \quad (3.54)$$

De asemenea derivata vitezei  $\vec{u}$  poate fi înlocuită:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\vec{v}}{m_e} \right) = \frac{1}{m_e} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{\vec{v}}{m_e^2} \frac{\partial m_e}{\partial t} \quad (3.55)$$

Înlocuind pe (3.54) și (3.55) în (3.53) se obține:

$$\begin{aligned} -\text{grad}h &= \frac{\nu}{kg} \cdot \vec{v} f(Re) + \frac{1}{g \cdot m_e} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{v^2}{2gm_e^2}\right) - \frac{\vec{v}}{gm_e} \times \left[ \nabla \times \left(\frac{\vec{v}}{m_e}\right) \right] + \\ &+ \frac{p}{\gamma^2 \cdot m_e} \cdot \text{grad}(\gamma \cdot m_e) - \frac{\vec{v}}{g \cdot m_e^2} \cdot \frac{\partial m_e}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.56)$$

expresie ce reprezintă legea generală de filtrare sub formă vectorială.

Pentru a se obține forma scalară a legii se înmulțește scalar cu versorul tangentei la traiectorie  $\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds}$ .

Se obțin egalitățile:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_0 \cdot \text{grad} h &= \frac{\partial h}{\partial s} \\
\vec{s}_0 \cdot \text{grad} \left( \frac{v^2}{2g \cdot m_e^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g \cdot m_e^2} \right) \\
\vec{s}_0 \cdot \text{grad}(\gamma m_e) &= \frac{\partial}{\partial s}(\gamma \cdot m_e) \\
\vec{s}_0 \cdot \vec{v} &= v; \quad \vec{s}_0 \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \\
\vec{s}_0 \cdot \left( \vec{v} \times \left[ \nabla \times \left( \frac{\vec{v}}{m_e} \right) \right] \right) &= 0 \quad \text{vezi figura 3.3}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

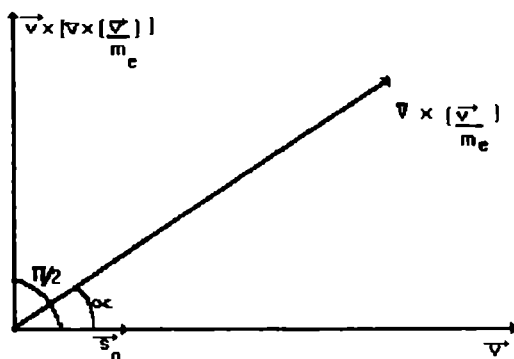


Figura 3.3

Deci forma scalară a legii este:

$$-\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\nu}{k \cdot g} v \cdot f(Re) + \frac{1}{g \cdot m_e} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g \cdot m_e^2} \right) + \frac{p}{\gamma^2 m_e} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\gamma m_e) - \frac{v}{g \cdot m_e^2} \cdot \frac{\partial m_e}{\partial t} \tag{3.58}$$

Se face notația  $\mathcal{P} = -\frac{\partial h}{\partial s}$  în care  $\mathcal{P}$  reprezintă panta hidraulică sau gradientul hidraulic, iar pentru  $f(Re)$  se folosește expresia (3.24) (cu  $Re$  din expresia 3.21), atunci expresia (3.58) devine:

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{gk} \cdot v \cdot e^{(n-1)Re} + \frac{1}{g \cdot m_e} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g \cdot m_e^2} \right) + \frac{p}{\gamma^2 m_e} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\gamma m_e) - \frac{v}{g \cdot m_e^2} \frac{\partial m_e}{\partial t} \tag{3.59}$$

Pentru domeniul mișcării laminare și chiar pentru domeniul mișcării turbulente mai puțin rapidă s-a arătat în capitolul precedent că funcția  $f(Re)$  poate fi exprimată astfel:

$$f(Re) = 1 + (n-1)Re = 1 + (n-1) \cdot \frac{\nu \sqrt{k}}{m_e \nu}$$

în care caz expresia pantei hidraulice devine:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \frac{\nu}{g \cdot k} v + \frac{(n-1)}{g \cdot \sqrt{k} \cdot m_e} v^2 + \frac{1}{g \cdot m_e} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g \cdot m_e^2} \right) + \\
&\quad + \frac{p}{\gamma^2 m_e} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(\gamma \cdot m_e) - \frac{v}{g \cdot m_e^2} \cdot \frac{\partial m_e}{\partial t}
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Ultimii doi termeni pot fi exprimați în funcție de coeficientul de variație a înmagazinării eficace  $S_e$ , definit astfel:

$$S_e = \frac{\partial}{\partial p}(\gamma m_e H) = H \frac{\partial}{\partial p}(\gamma m_e) + \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial(\gamma m_e)}{\partial p} = \frac{1}{H} \left( S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \right) \quad (3.61)$$

sau

$$S_e = \frac{\partial}{\partial p}(\gamma m_e H) = \gamma H \cdot \frac{\partial m_e}{\partial p} + m_e \frac{\partial(\gamma H)}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial m_e}{\partial p} = \frac{1}{\gamma H} \left( S_e - m_e \frac{\partial(\gamma H)}{\partial p} \right) \quad (3.62)$$

Cu ajutorul relațiilor (3.61) și (3.62) ultimii doi termeni ai lui (3.60) se scriu:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\gamma^2 m_e} \frac{\partial}{\partial s}(\gamma m_e) &= \frac{p}{\gamma^2 m_e} \frac{\partial}{\partial p}(\gamma m_e) \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p}{\gamma^2 m_e H} \left( S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \right) \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{v}{g m_e^2} \frac{\partial m_e}{\partial t} &= \frac{v}{g m_e^2} \cdot \frac{\partial m_e}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{v}{\gamma g m_e^2 H} \left( S_e - m_e \frac{\partial(\gamma H)}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Pornind de la această formă se arată că parantezele celor două expresii sunt nule pentru acviferele cu suprafață liberă și cu aproximație nule pentru acviferele sub presiune. Pentru acviferele cu suprafață liberă se obține:

$$\begin{aligned} S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} &= S_{e0} - \frac{\partial(\gamma m_e H)}{\partial p} = S_{e0} - S_{e0} = 0 \\ S_e - m_e \frac{\partial(\gamma H)}{\partial p} &= S_{e0} - \frac{\partial(\gamma m_e H)}{\partial p} = S_{e0} - S_{e0} = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

iar pentru acviferele sub presiune se obține:

$$\begin{aligned} S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} &= S_{e1} - \gamma m_e \frac{\partial M}{\partial p} = S_{e1} - S_{e1} + M \gamma \frac{\partial m_e}{\partial p} + M m_e \frac{\partial \gamma}{\partial p} \\ S_e - m_e \frac{\partial(\gamma H)}{\partial p} &= S_{e1} - m_e \frac{\partial(\gamma M)}{\partial p} = S_{e1} - S_{e1} + \gamma M \frac{\partial m_e}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Deci și în cazul acviferelor sub presiune parantezele pot fi considerate nule dacă variațiile cu presiunea ale porozității eficace și greutateii specifice a apei sunt nule sau cel puțin neglijabile. În acest caz relația (3.60) se scrie:

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{kg} v + \frac{n-1}{g m_e \sqrt{k}} v^2 + \frac{1}{g m_e} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g m_e^2} \right) \quad (3.66)$$

Relația reprezintă legea filtrării sub formă scalară pentru domeniul mișcării laminare și chiar pentru domeniul mișcării turbulente, mai puțin rapidă. Ultimul termen al ei mai poate fi scris:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v^2}{2g m_e^2} \right) = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v}{m_e} \right)^2 = \frac{1}{g} \frac{v}{m_e} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{v}{m_e} \right) = \frac{v}{g m_e^2} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v^2}{g m_e^3} \frac{\partial m_e}{\partial s}$$

și (3.66) se scrie:

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{k \cdot g} v + \frac{n-1}{gm_e \sqrt{k}} v^2 + \frac{1}{gm_e} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{gm_e^2} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v^2}{gm_e^3} \frac{\partial m_e}{\partial s} \quad (3.67)$$

Ipoteza precedentă, mișcare laminară sau turbulentă mai puțin rapidă presupune că  $v$  variază foarte lent de-a lungul liniei de curent, deci:

$$\frac{\partial v}{\partial s} \sim 0$$

În ipoteza unui acvifer omogen sau aproape omogen, adică atunci când  $m_e$  variază foarte lent de-a lungul acviferului se poate presupune că :

$$\frac{\partial m_e}{\partial s} \sim 0$$

Dacă regimul este staționar, sau slab nestaționar, adică variația locală în timp a lui  $v$  este neglijabilă, se poate presupune că și:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \sim 0$$

Pe baza acestor aproximații legea de filtrare (3.67) capătă forma:

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{g \cdot k} v + \frac{(n-1)}{g \sqrt{k} m_e} v^2 \quad (3.68)$$

cunoscută și sub denumirea de legea neliniară de filtrare și este caracteristică pentru regimul laminar neliniar de curgere staționară sau slab nestaționară. Coeficientul  $(n-1)/m_e$  este uneori substituit cu  $C_1 \cdot d/\sqrt{k}$  în care  $C_1$  este coeficient adimensional,  $d$  este dimensiunea liniară caracteristică granulelor de dimensiune medie. S-au folosit și legi neliniare stabilite empiric scrise la forma generală :  $\mathcal{P} = a \cdot v + b \cdot v^2$

În cazul mișcării laminare foarte lente, termenul al doilea din relația (3.68) tinde să se anuleze deoarece, așa cum s-a arătat la forța de frecare  $n \rightarrow 1$  și  $(n-1) \rightarrow 0$  și se obține o nouă variantă a legii de filtrare:

$$\mathcal{P} = \frac{\nu}{g \cdot k} v \quad (3.69)$$

cunoscută sub denumirea de lege liniară de filtrare.

Această lege liniară de filtrare este sigură până la  $Re \sim 1$ ; ( $\ln Re < 0$ ), este probabilă până la  $Re \sim 2 \div 3$ ; ( $0 < \ln Re < 1$ ) și posibilă până la  $7 \div 9$  ( $1 < \ln Re < 2$ ) și este practic imposibilă pentru  $\ln Re > 2$ .

Mișcarea apei prin roci poroase sau fisurate fiind preponderent lentă se face conform legii liniare care se mai poate pune și sub alte forme:

$$v = \frac{gk}{\nu} \mathcal{P} \quad (3.70)$$

Dacă se notează

$$\frac{gk}{\nu} = \frac{\gamma k}{\mu} = \mathcal{K} \quad (3.71)$$

unde  $\mathcal{K}$  este coeficient de filtrare sau conductibilitate hidraulică legea liniară se poate scrie:

$$v = \mathcal{K} \cdot \mathcal{P} = -\mathcal{K} \frac{\partial h}{\partial s} \quad (3.72)$$

formă cunoscută sub denumirea de lege a lui Darcy care a fost stabilită experimental și care vectorial se poate scrie:

$$\vec{v} = -\mathcal{K} \text{grad} h \quad (3.73)$$

### 3.3.4. Difuzivitatea hidraulică

Modelul ales pentru apa hidrodinamic activă a fost acela al unui ansamblu de particule cu dimensiuni elementare ( $m_e dV$ ). Între aceste particule în afară de interacțiunea directă a aceluia aflate în contact, are loc o a doua interacțiune între toate particulele care nu vin direct în contact, dar care se transmite din aproape în aproape în așa fel încât schimbarea poziției oricărei particule este rezultatul ambelor tipuri de interacțiuni. Propagarea din aproape în aproape a interacțiunii particulelor de apă hidrodinamic activă, constituie fenomenul de difuzivitate hidraulică prin medii poroase sau fisurate.

Pentru a deduce legea difuzivității hidraulice prin medii poroase sau fisurate se pornește de la legea continuității dedusă pentru aceleași condiții (relația 3.35)

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Ea va fi transformată în două etape. Prima etapă implică dezvoltarea ambilor termeni. Primul termen este pus mai întâi sub forma:

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.74)$$

iar primul factor din membrul doi se obține din dezvoltarea expresiei generale a coeficientului de variație a înmagazinării:

$$\begin{aligned} S_e &= \frac{\partial(\gamma m_e H)}{\partial p} = gH \frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} + \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \\ \Rightarrow \frac{\partial(\rho m_e)}{\partial p} &= \frac{1}{gH} \left[ S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \right] \end{aligned}$$

și

$$\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t} = \frac{1}{gH} \left[ S_e - \gamma m_e \frac{\partial H}{\partial p} \right] \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.75)$$

Al doilea termen al legii continuității se transformă, în ipoteza mișcării laminare lente, staționară sau turbulentă nerapidă, cu ajutorul legii Darcy:

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = -\operatorname{div}(\rho\mathcal{K}\operatorname{grad} h) = -\rho\mathcal{L}\operatorname{div}\operatorname{grad} h - (\operatorname{grad} h)\operatorname{grad}(\rho\mathcal{K}) \quad (3.76)$$

Înlocuind pe (3.75) și (3.76) în legea continuității (3.35) se obține:

$$\frac{S_e}{gH} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\gamma m_e}{gH} \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} - \rho\mathcal{K}\operatorname{div}\operatorname{grad} h - (\operatorname{grad} h)\operatorname{grad}(\rho\mathcal{K}) = 0$$

Se înmulțește cu  $H/\rho$ , se ține cont că  $\gamma = g\rho$  și se obține:

$$\frac{S_e}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - m_e \frac{\partial H}{\partial t} - \mathcal{K}H\operatorname{div}\operatorname{grad} h - \frac{H}{\gamma}(\operatorname{grad} h)\operatorname{grad}(\gamma\mathcal{K}) = 0 \quad (3.77)$$

A doua etapă de transformare presupune dezvoltarea tuturor termenilor relației (3.77).

Primul termen se obține derivând local în raport cu timpul, expresia cotei piezometrice (1.5) sau (1.7):  $z + \frac{p}{\gamma} = h \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$ , din care, după înmulțirea cu  $S_e$  se obține:

$$\frac{S_e}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = S_e \frac{\partial h}{\partial t} - S_e \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{pS_e}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (3.78)$$

Al doilea termen din (3.77) se obține derivând local în raport cu timpul funcția  $H/\gamma\mathcal{K}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma\mathcal{K}} \right) = \frac{1}{\gamma\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{H}{\gamma^2\mathcal{K}^2} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma\mathcal{K})$$

din care după înmulțirea cu  $m_e\gamma\mathcal{K}$  se obține:

$$m_e \frac{\partial H}{\partial t} = m_e\gamma\mathcal{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma\mathcal{K}} \right) + \frac{m_e H}{\gamma\mathcal{K}} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma\mathcal{K}) \quad (3.79)$$

Al treilea termen din (3.77) se obține prin dezvoltarea expresiei:

$$\operatorname{div}(H\operatorname{grad} h) = H\operatorname{div}\operatorname{grad} h + (\operatorname{grad} h)\operatorname{grad} H$$

din care, după înmulțirea cu  $\mathcal{K}$  și folosirea legii lui Darcy  $\vec{v} = m_e\vec{u} = -\mathcal{K}\operatorname{grad} h$ , se obține:

$$\mathcal{K}H\operatorname{div}\operatorname{grad} h = \mathcal{K}\operatorname{div}(H\operatorname{grad} h) + m_e\vec{u}\operatorname{grad} H \quad (3.80)$$

Al patrulea termen din (3.77) se obține din legea Darcy sub aceeași formă:

$$\frac{H}{\gamma}(\operatorname{grad} h) \cdot \operatorname{grad}(\gamma\mathcal{K}) = -\frac{m_e H}{\gamma\mathcal{K}}\vec{u}\operatorname{grad}(\gamma\mathcal{K}) \quad (3.81)$$

Se înlocuiesc (3.78), (3.79), (3.80) și (3.81) în (3.77) și după o grupare convenabilă se obține:

$$\begin{aligned} & S_e \frac{\partial h}{\partial t} - S_e \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_e p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{m_e H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \frac{\partial (\gamma\mathcal{K})}{\partial t} - \mathcal{K}\operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = \\ & = m_e\gamma\mathcal{K} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \right) + \vec{u} \left[ \frac{1}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \cdot \operatorname{grad} H - \frac{H}{\gamma^2\mathcal{K}^2} \cdot \operatorname{grad}(\gamma \cdot \mathcal{K}) \right] \right\} \end{aligned}$$

sau:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) - S_e \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_e p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{m_e H}{\gamma \mathcal{K}} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma \mathcal{K}) = \\ = m_e \gamma \mathcal{K} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \right) + \vec{u} \cdot \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \right) \right] \quad (3.82)$$

Prin restrângerea încă o dată a membrului 2 se obține:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \cdot \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) - S_e \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_e \cdot p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{m_e \cdot H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \frac{\partial}{\partial t}(\gamma \cdot \mathcal{K}) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \right) \quad (3.83)$$

Această relație reprezintă legea difuzivității în mișcarea laminară foarte lentă, în regim staționar sau slab nestaționar, al apei prin medii poroase specifice acviferelor.

Forma obținută poate fi ușor simplificată dacă se consideră conductibilitatea hidraulică funcție numai de punct [ $\mathcal{K} = f(\vec{r})$ ] și deci independentă de timp. Pe baza acestei ipoteze:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = 0$$

în ultimul termen din membrul unu al relației (3.83) se simplifică  $\mathcal{K}$  și rămâne:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \cdot \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) - S_e \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_e \cdot p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{m_e \cdot H}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \cdot \mathcal{K}} \right) \quad (3.84)$$

Sub această formă se arată că suma ultimilor trei termeni ai primului membru este întotdeauna nulă pentru acviferele cu suprafață liberă, iar pentru cele sub presiune este de asemenea nulă dacă se pune condiția ca :

$$\frac{\partial S_{e1}}{p} = 0$$

Pentru acviferele cu suprafață liberă expresia celor trei termeni:

$$E = -S_{e0} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_{e0} p}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{H \cdot m_e}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (3.85)$$

poate fi calculată pornind de la relația (1.5) pusă sub forma:

$$z + \frac{p}{\gamma} = H + z_0$$

În ipoteza patului impermeabil nedeformabil  $\frac{\partial z_0}{\partial t} = 0$  se obține prin derivare, înmulțirea cu  $-S_{e0}$  și reordonarea termenilor:

$$-S_{e0} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{S_{e0} p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{S_{e0}}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - S_{e0} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (3.86)$$

Se înlocuiesc primii doi termeni din expresia lui  $E$  (3.85) cu relația (3.86), se ține seama că pentru acviferele cu suprafață liberă  $S_{e0} = m_e$  și se obține:

$$E = \frac{m_e}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} - m_e \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{H m_e}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{m_e}{\gamma} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma \frac{\partial H}{\partial t} - H \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] =$$

$$= \frac{m_e}{\gamma} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\gamma H) \right] = \frac{m_e}{\gamma} \left[ \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial t} \right]$$

unde  $p' = \gamma H$  este presiunea pe patul impermeabil pe aceeași verticală. Deoarece în paragraful 2.4 s-a arătat că  $\frac{\partial p'}{\partial p} = 1$  se obține pentru  $E$  valoarea zero.

$$E = \frac{m_e}{\gamma} \cdot \left[ \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p'}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \right] = 0 \quad (3.87)$$

În cazul acviferelor sub presiune, pentru curgerea laminară cota unui punct material  $P$  de viteză  $\vec{u}$  rămâne constantă în timp, adică  $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$ , fapt pentru care expresia lui  $E$ , (3.85), devine:

$$E = \frac{S_{e1} p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} - \frac{M \cdot m_e}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \left[ S_{e1} - \frac{\gamma m_e M}{p} \right] \quad (3.88)$$

Pentru a obține anularea lui  $E$  și în acest caz, este necesară o ipoteză suplimentară: coeficientul de variație a înmagazinării eficace nu trebuie să varieze cu presiunea, adică:

$$\frac{\partial S_{e1}}{\partial p} = 0 \quad (3.89)$$

Rolul acestei condiții suplimentare în anularea expresiei lui  $E$  (3.88) poate fi arătat mai ușor cu ajutorul graficului din figura 3.4. Din (3.89) rezultă:

$$S_{e1} = \text{const.} \quad (3.90)$$

care este reprezentată grafic prin dreapta (sau segmentul de dreaptă) paralelă cu axa  $Op$ . Din definiția lui  $S_{e1}$  și condiția (3.90) rezultă :

$$S_{e1} = \frac{\partial}{\partial p}(m_e \gamma M) = \text{constant} > 0 \quad (3.91)$$

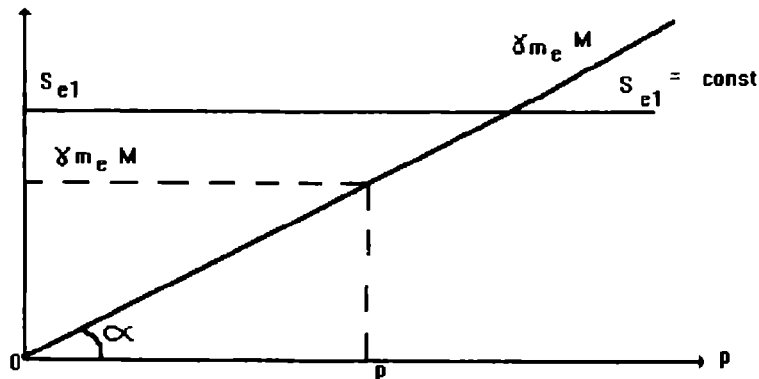


Figura 3.4



Deci funcția  $\gamma m_e M$  în graficul din figură poate fi reprezentată printr-o dreaptă cu panta pozitivă și care trece prin origine, proprietate ce rezultă din semnificația fizică a funcției. Din figura 3.4 și din relația (3.91) rezultă:

$$\tan \alpha = \frac{\partial}{\partial p}(\gamma m_e M) = S_{e1} = \frac{\gamma m_e M}{p} \Rightarrow S_{e1} - \frac{\gamma m_e M}{p} = 0$$

Deci:

$$E = \frac{p}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \left[ S_{e1} - \frac{\gamma m_e M}{p} \right] = 0 \quad (3.92)$$

În acest caz relația (3.84) devine:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (3.93)$$

și ea reprezintă forma locală a legii difuzivității hidraulice prin medii poroase pentru curgerea laminară foarte lentă în regim staționar sau slab nestaționar care satisfac și condițiile  $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = 0$  și  $\frac{\partial S_{e1}}{\partial p} = 0$ . Pentru această lege se mai pot obține încă alte trei forme.

Prin împărțire cu  $\mathcal{K}$  și simplificare cu  $g$  a membrului drept se obține:

$$\frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \right) \quad (3.94)$$

Membrul drept poate fi înlocuit dacă se ține cont de relația:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\rho m_e H}{\rho \mathcal{K}} \right) = \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \frac{d}{dt}(\rho m_e) + (\rho m_e) \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \right)$$

din care:

$$m_e \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) - \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \cdot \frac{d}{dt}(\rho m_e)$$

Prin înlocuire în relația (3.94) se obține:

$$\frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) - \frac{H}{\rho \mathcal{K}} \frac{d}{dt}(\rho m_e) \quad (3.95)$$

Si această formă poate fi modificată ținând cont de :

$$-\mathcal{K} \operatorname{grad} h = \vec{v}$$

și de legea de continuitate pusă sub forma :

$$\frac{d}{dt}(\rho m_e) = -\rho m_e \operatorname{div} \vec{v}$$

Prin înlocuire în relația (3.95) se obține:

$$\frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div} \left( \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) + \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \cdot \operatorname{div} \vec{u} \quad (3.96)$$

Această formă poate fi modificată la rândul ei ținând cont de:

$$\operatorname{div} \left( \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} \right) = \operatorname{div} \left( \frac{H}{\mathcal{K}} m_e \vec{u} \right) = \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \operatorname{div} \vec{u} + \vec{u} \operatorname{grad} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right)$$

și de dezvoltarea derivatei substanțiale din membrul drept:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) + \vec{u} \operatorname{grad} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right)$$

Prin înlocuire în relația (3.96) se obține:

$$\frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) \quad (3.97)$$

Ecuția fundamentală de difuzivitate hidraulică poate fi pusă și sub formă globală. Prin integrarea relației (3.96) pentru oricare volum inclus într-un acvifer reprezentat prin domeniul de dezvoltare al unei roci poroase sau fisurate saturate cu apă eliberabilă se obține:

$$\int_{V(t)} \frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \operatorname{div} \left( \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} \right) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) + \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \operatorname{div} \vec{u} \right] dV$$

Termenul doi din membrul stâng poate fi transformat cu ajutorul formulei Gauss - Ostrogradski, iar membrul drept reprezintă derivata substanțială a integralei de volum. Cu aceste observații relația precedentă se poate scrie:

$$\int_{V(t)} \frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} dV + \oint_{\omega(t)} \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} d\vec{\omega} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{m_e H}{\mathcal{K}} dV \quad (3.98)$$

sau conform cu forma locală pusă sub forma (3.97):

$$\int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) dV + \oint_{\omega(t)} \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} d\vec{\omega} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \frac{m_e H}{\mathcal{K}} dV \quad (3.99)$$

Dacă volumul  $V(t)$  se referă la un întreg acvifer atunci relația (3.99) exprimă un aspect cantitativ cu privire la dinamica încărcăturii acviferului corespunzătoare posibilităților de descărcare și încărcare posibilitate exemplificată în schema de principiu reprezentată în tabelul 3.1.

Relația (3.98) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\left( \int_{V(t)} \frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} dV + \oint_{\omega(t)} \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} d\vec{\omega} \right) dt = d \left[ \int_{V(t)} \frac{m_e H}{\mathcal{K}} dV \right]$$

Ea poate fi integrată în raport cu timpul, de la momentul inițial  $t_0$  la un moment oarecare  $t$ , când volumul acviferului poate varia și el de la  $V(t_0)$  la  $V(t)$ . În acest caz relația obținută reprezintă evoluția încărcăturii hidrodinamice a unui acvifer, adică:

$$\int_{t_0}^t \left( \int_{V(t)} \frac{S_e}{K} \frac{\partial h}{\partial t} dV + \oint_{\omega(t)} \frac{H}{K} \vec{v} d\vec{\omega} \right) dt = \int_{V(t)} \frac{m_e H}{K} dV - \int_{V(t_0)} \frac{m_e H}{K} dV \quad (3.100)$$

În tabelul 3.1 sunt prezentate schematic exemple de mecanisme posibile de încărcare - descărcare a unui acvifer în scopul ilustrării dinamicii sale.

Unitati posibile cu care acviferul schimba apa prin incarcare-descarcare		Sensul schimbului de apa	Locul prin care are loc schimbul de apa cu unitatea
Ape meteorice	de precipitație atmosferică și condensare în sol	→	A
	de evapotranspirație	←	
Ape naturale de suprafață: râuri, lacuri, etc.		→	C
		←	
Lucrari de amenajare	Canale, irigații, puturi și fronturi de injecție a apei în subteran	→	V
	Drenări, puturi și fronturi de captare a apei din subteran	←	
Acvifere învecinate separate prin ecrane litologice semipermeabile		→	E
		←	
Acvifere învecinate aflate în contact direct de tip piemontan sau carstic		→	R
		←	

Tabelul 3.1

### 3.4. O clasificare posibilă a modelelor de curgeri subterane

Legea difuzivității hidraulice obținută sub forma (3.93):

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - K \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \gamma K \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma K} \right) \quad (3.101)$$

ca și următoarele trei forme (3.94), (3.95), (3.96), toate sunt valabile pentru curgerea laminară foarte lentă, în regim staționar sau ușor nestaționar cu cele două condiții suplimentare  $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$  pentru ambele tipuri de acvifere și cu  $\frac{\partial S_{e1}}{\partial p} = 0$  numai pentru cele sub presiune. Această lege mai poate fi pusă și sub altă formă dacă se dezvoltă derivata substanțială din membrul doi:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) + \gamma \mathcal{K} \vec{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (3.102)$$

Această formă a legii difuzivității permite un mod de împărțire a modelelor mișcărilor apei hidrodinamic active prin acvifere de la simple la foarte complicate în funcție de regimul de curgere, staționar sau nestaționar, de prezența sau absența unor surse auxiliare de apă.

Dacă se parcurge drumul invers obținerii legii difuzivității (3.102), se constată că cei doi termeni care nu conțin derivate în raport cu timpul din această lege au fost obținuți prin dezvoltarea și transformarea lui  $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$  din legea continuității (3.35), iar ceilalți doi care conțin  $\frac{\partial}{\partial t}$  au fost obținuți din  $\frac{\partial(\rho m_e)}{\partial t}$ , cel de-al doilea termen al aceleiași legi (3.35).

Cei doi termeni proveniți din transformarea  $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$  exprimă sub o formă mai puțin vizibilă, vitezele a două mișcări simultane.

Din punct de vedere dimensional termenii celor două legi (3.35) și (3.102) diferă. Termenii legii continuității au dimensiunile variației densității curentului de masă pe unitatea de lungime sau ale variației locale a densității apei hidrodinamic active în unitatea de timp, pe când termenii legii difuzivității (3.102) au dimensiunile unei viteze sau ale unui debit specific, adică ale unui debit corespunzător unității de arie perpendiculară pe direcția de curgere. Această deosebire apare deoarece pe parcursul transformărilor legii continuității acesta a fost înmulțit cu  $H/\rho$ .

Astfel fiecare membru al relației (3.102) reprezintă o curgere. Membrul unu seamănă ca formă cu legea continuității (3.35), pe când membrul doi seamănă mai puțin evident. Fiecare dintre ei are aceeași structură, un termen care conține derivata în raport cu timpul, iar cel de-al doilea distribuția în spațiu a mărimilor ce caracterizează curgerea. Termenii care conțin derivata în raport cu timpul arată comportarea în timp a mărimii care caracterizează curgerea. De exemplu, în cazul curgerii reprezentată de membrul unu al relației (3.102), în care mărimea caracteristică este cota piezometrică  $h$ , se poate spune că ea reprezintă curgerea principală dintr-un anumit domeniu al acviferului. Cota piezometrică poate fi determinată în spațiu și în timp, fie numai de sursele principale care asigură mișcarea în acvifer, fie și de surse auxiliare sau numai de acestea din urmă. Efectul surselor auxiliare este conținut în membrul doi al legii difuzivității (3.102). Exemple de surse auxiliare pot fi luate din tabelul 3.1 sau din cazurile tratate la mișcări cu surse auxiliare (cap. 5, 7). Dacă nu există surse auxiliare membrul doi al relației (3.102) sau (3.101) este nul.

Din relația (3.102) rezultă că derivata locală a cotei piezometrice stabilește caracterul mișcării. Dacă  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$  mișcarea reprezentată de membrul unu este staționară. Dacă  $\frac{\partial h}{\partial t} \neq 0$  mișcarea este nestaționară.

Până aici pot fi distinse două modele de curgeri subterane pentru care legea difuzivității (3.102) îmbracă forme particulare.

Curgerea staționară fără surse auxiliare are ca lege a difuzivității:

$$\mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad} h] = 0 \quad (3.103)$$

Curgerea nestaționară fără surse auxiliare are ca lege a difuzivității:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad} h] = 0 \quad (3.104)$$

Dacă există surse auxiliare trebuie luat în considerație și membrul doi al relației (3.102). Dar și membrul doi are doi termeni. Dacă primul termen al acestuia, care conține derivata în raport cu timpul, este și el nul ca și  $\frac{\partial h}{\partial t}$  atunci contribuția sursei auxiliare se reduce la a modifica ecuația suprafeței piezometrice, regimul de curgere rămânând tot staționar. În acest caz se definește curgerea staționară cu sursă auxiliară pentru care legea difuzivității devine:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad} h] = \gamma \mathcal{K} \bar{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (1.105)$$

Dacă într-un acvifer există sursă auxiliară care funcționează în regim nestaționar și încărcarea sau descărcarea acviferului de către sursa principală se face tot în regim nestaționar, toți termenii relației (3.102) vor fi diferiți de zero. În acest caz se definește o curgere nestaționară cu sursă auxiliară pentru care legea difuzivității conține toți termenii, adică:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) + \gamma \mathcal{K} \bar{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (3.106)$$

sau:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \cdot \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (3.107)$$

## CURGEREA STATIONARA FARA SURSE AUXILIARE

## 4.1. Aspecte generale

În capitolul precedent s-a arătat că o asemenea curgere are o lege a difuzivității de forma:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = 0 \quad (4.1)$$

Debitul elementar de apă hidrodinamic activă printr-o secțiune a curentului este prin definiție:

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{\omega}$$

Elementul de suprafață pe secțiunea  $\omega'$  normală pe direcția locală de curgere poate fi scris:

$$d\vec{\omega} = \vec{n} H dl_0$$

în care  $H$  este înălțimea secțiunii, iar  $l_0$  este lățimea frontului normal pe direcția de curgere.

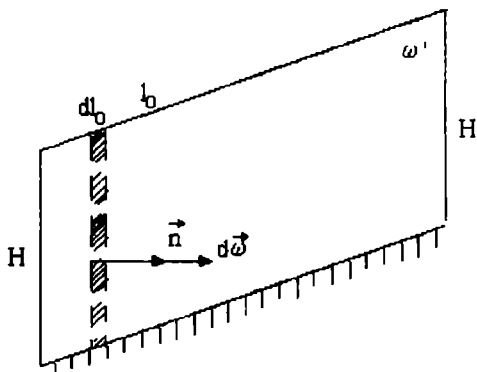


Figura 4.1

Debitul prin elementul de suprafață va fi:

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{\omega} = \vec{v} \vec{n} H dl_0 = v H dl_0 = q dl_0$$

unde s-a notat cu  $q = vH$  o nouă mărime - debitul unitar a cărei semnificație fizică rezultă din relațiile precedente. Acesta poate fi scris:

$$\begin{aligned} q &= \frac{dQ}{dl_0} \quad \text{pentru } q = q(l_0) \\ q &= \frac{Q}{l_0} \quad \text{pentru } q = \text{constant} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Debitul unitar poate fi scris convențional și vectorial, iar dezvoltat ca expresie cu ajutorul legii lui Darcy devine:

$$\vec{q} = H\vec{v} = -\mathcal{K}H \cdot \text{grad } h \quad (4.3)$$

Cunoașterea acestei noi mărimi  $\vec{q} = \vec{q}(\vec{r})$  prezintă interes practic deoarece cu ajutorul ei se pot determina alte mărimi:

- viteza de filtrare:  $\vec{v} = \vec{q}/H$

-debitul:  $Q = \int_{\omega'} \vec{v} d\vec{\omega}$  prin orice secțiune  $\omega'$  a curentului de apă

-cota (sarcina) piezometrică funcție de punct  $h = h(P)$  în diferite condiții în funcție de tipul de simetrie pe care o prezintă acviferul, operațiune ce se poate realiza chiar prin integrarea relației de definiție:

$$-HK \text{grad } h = \vec{q}$$

Deci în cazul studiului curgerilor cu nivel staționar și fără surse auxiliare pot fi folosite două relații:

$$\text{Legea difuzivității } \mathcal{K} \text{div}(H \text{grad } h) = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{Legea Darcy } -HK \text{grad } h = H\vec{v} = \vec{q} \quad (4.5)$$

Ele pot îmbrăca forme ușor diferite pentru cele două tipuri de acvifere: cu suprafață liberă și sub presiune:

-În cazul curgerilor cu suprafață liberă, relația care leagă diferite moduri de exprimare a cotei piezometrice permite ca cele două legi să se scrie sub altă formă:

$$h = z + \frac{p}{\gamma} + \text{const} = z_0 + H + \text{const}$$

Rezultă:

$$\mathcal{K} \text{div}[H \text{grad}(z_0 + H)] = 0 \quad (4.6)$$

$$-\mathcal{K}H \text{grad}(z_0 + H) = H\vec{v} = \vec{q} \quad (4.7)$$

care la rândul lor pentru un acvifer cu patul impermeabil presupus plan orizontal,  $z_0 = \text{constant} \Rightarrow \text{grad } z_0 = 0$ , devin:

$$\text{divgrad}(H^2) = 0 \quad (4.8)$$

$$-\mathcal{K}H \text{grad } H = H\vec{v} = \vec{q} \quad (4.9)$$

Relația (4.8) mai este cunoscută și sub denumirea de ecuația lui Forchheimer.

- În cazul curgerii sub presiune ( $H = M$ ) relațiile stabilite pentru curgerea cu nivel staționar și fără sursă auxiliară se scriu:

$$\operatorname{div}(M \operatorname{grad} h) = 0 \quad (4.10)$$

$$-\mathcal{K} M \operatorname{grad} h = M \vec{v} = \vec{q} \quad (4.11)$$

pentru acviferele sub presiune cu grosime constantă ( $M = \text{const}$ ), cele două relații devin:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} h = 0 \quad (4.12)$$

$$-\mathcal{K} M \operatorname{grad} h = M \vec{v} = \vec{q} \quad (4.13)$$

Pe baza relațiilor obținute vor fi studiate câteva modele ale curgerii.

#### 4.2. Curgeri vertical plane

În cazul unei frontiere rectilinii de descărcare sau reîncărcare a unor acvifere se poate face ipoteza că în plane verticale, perpendiculare pe direcția frontierei și paralele între ele, pe distanțe suficient de mari față de frontieră și pe o durată suficient de mare curgerea se menține practic identică în oricare dintre planele verticale și paralele între ele. Planele definite coincid și cu direcția de curgere în acvifer.

Pentru curgeri vertical plane pentru care se alege un sistem cartezian cu axa  $OX$  de-a lungul curgerii și axa  $OZ$  verticală, relațiile (4.6) și (4.7), pentru acviferele cu suprafață liberă, se reduc la:

$$\mathcal{K} \frac{d}{dx} \left[ H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) \right] = 0 \quad (4.14)$$

$$-\mathcal{K} H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) = q_x = H v_x \quad (4.15)$$

iar relațiile (4.10) și (4.11) deduse pentru acviferele sub presiune se reduc la:

$$\frac{d}{dx} \left( M \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (4.16)$$

$$-\mathcal{K} M \frac{dh}{dx} = q_x = M v_x \quad (4.17)$$

În continuare vor fi prezentate câteva cazuri de mișcări plan - verticale.

##### 4.2.1. Curgerea vertical - plană într-un mediu omogen

Dacă și mediul constituent al acviferului este omogen, adică  $\mathcal{K} = \text{constant}$  ( $\Rightarrow \operatorname{grad} \mathcal{K} = 0$ ;  $\operatorname{div} \mathcal{K} = 0$ ) atunci relațiile (4.14) și (4.15) pentru acviferele cu suprafață liberă devin:



$$\frac{d}{dx} \left[ -\mathcal{K}H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) \right] = 0 \quad (4.18)$$

$$-\mathcal{K}H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) = q = Hv \quad (4.19)$$

combinând cele 2 relații se obține:

$$\frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow q = \text{constant} \quad (4.20)$$

Pentru un acvifer sub presiune cu  $\mathcal{K} = \text{constant}$  relațiile (4.16) și (4.17) devin:

$$\frac{d}{dx} \left( -\mathcal{K}M \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (4.21)$$

$$-\mathcal{K}M \frac{dh}{dx} = q = Mv \quad (4.22)$$

Combinând și aici cele două relații rezultă:

$$\frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow q = \text{constant} \quad (4.23)$$

#### 4.2.1.1. Exemple de curgeri plan verticale cu suprafață liberă

a) Curgerea cu suprafață liberă, vertical plană, într-un mediu omogen cu patul impermeabil plan orizontal spre un dren

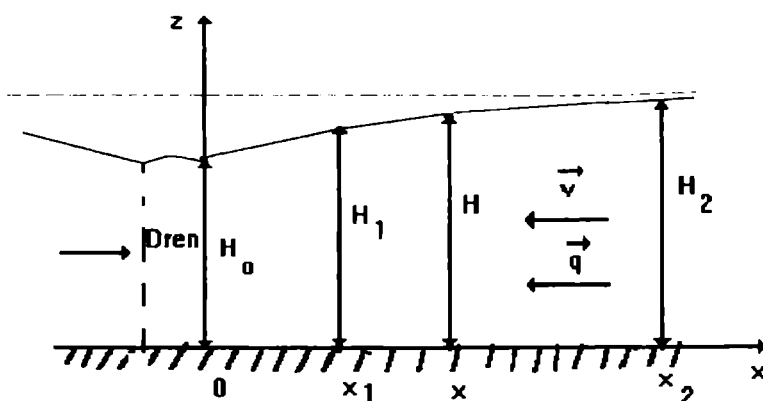


Figura 4.2

Având în vedere sensul curgerii din acvifer, impus de dren și sensul axelor SC-ului cele două legi vectoriale pentru curgerea cu suprafață liberă (4.6) și (4.7) devin pentru acest caz:

$$-\mathcal{K} \frac{d}{dx} \left[ H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) \right] = 0 \quad (4.24)$$

$$-\mathcal{K}H \left( \frac{dz_0}{dx} + \frac{dH}{dx} \right) = -q \quad (4.25)$$

la care dacă se adaugă  $\mathcal{K} = constant$  (mediu omogen), pat orizontal ( $\frac{dz_0}{dx} = 0$ ) se obține:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} \right] &= 0 \\ \mathcal{K}H \frac{dH}{dx} &= q \Rightarrow q = constant \end{aligned}$$

Ultima lege se mai poate scrie :

$$HdH = \frac{q}{\mathcal{K}} dx \quad (4.26)$$

Ecuția poate fi integrată între diferite limite:

- Pentru a obține ecuația curbei de nivel va fi integrată de la zero la  $x$ , respectiv de la  $H_0$  la  $H$ :

$$\int_{H_0}^H HdH = \frac{q}{\mathcal{K}} \int_0^x dx$$

$$H^2 = H_0^2 + \frac{2q}{\mathcal{K}} x \quad (4.27)$$

reprezintă ecuația curbei de nivel și este un arc de parabolă, parabola fiind simetrică în raport cu axa  $OX$ .

-Pentru a obține expresia debitului unitar ecuația diferențială este integrată de la  $x_1$  la  $x_2$ , respectiv de la  $H_1$  la  $H_2$ :

$$q = \frac{\mathcal{K}}{2} \cdot \frac{H_2^2 - H_1^2}{x_2 - x_1} \quad (4.28)$$

Relația se numește *relația Dupuit* și permite calculul debitului dacă se cunoaște  $\mathcal{K}$  și nivelele  $H_1, H_2$  în două piezometre aflate pe o direcție perpendiculară pe frontiera drenului la distanțele  $x_1$  respectiv  $x_2$  de aceasta.

b) *Curgerea cu suprafață liberă, vertical plană într-un mediu omogen cu patul impermeabil plan orizontal într-o zonă de interfluviu.*

Frontierele de încărcare și de descărcare fiind tot rectilinii și paralele curgerea este tot vertical plană. Ea este identică în plane verticale paralele așezate de-a lungul direcției de curgere. Pornind de la legea difuzivității(4.4) și legea lui Darcy (4.5) pentru curgerea staționară, fără surse auxiliare, cu suprafață liberă:

$$\begin{aligned} -\mathcal{K}div[Hgrad h] &= 0 \quad \text{și} \quad -\mathcal{K}Hgrad h = \vec{q} \\ \text{cu } h &= z_0 + H + const \end{aligned}$$

și scrisă pentru mișcarea vertical plană cu  $\mathcal{K} = constant$  și  $z_0 = constant$  se obține:

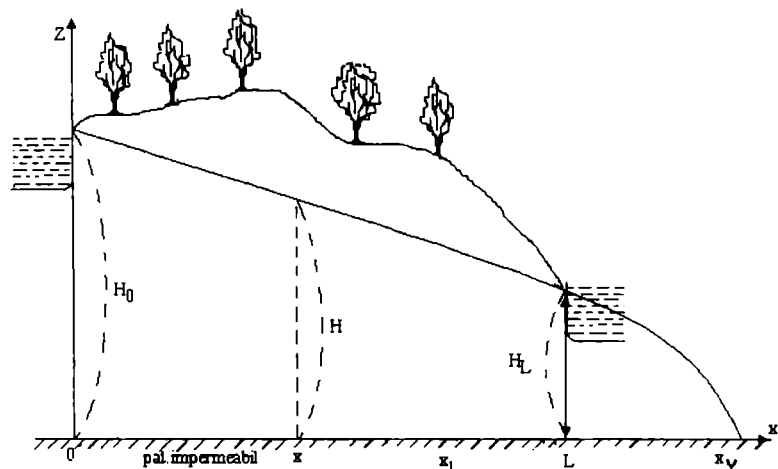


Figura 4.3

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [-\mathcal{K}H \frac{dH}{dx}] = 0 \\ -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} = q_x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dq_x}{dx} = 0 \Rightarrow q_x = \text{constant}$$

S-a notat cu  $q_x$  proiecția vectorului  $\vec{q}$  pe  $OX$  deoarece nu se cunoaște sensul curgerii în acvifer. Se știe doar că  $H_0 > H_L$ . Din a doua ecuație diferențială se obține forma:

$$-\frac{\mathcal{K}}{2}d(H^2) = q_x dx \quad \text{sau} \quad d(H^2) = -\frac{2q_x}{\mathcal{K}}dx$$

Integrată de la  $x = 0$  la  $x$ , respectiv de la  $H_0$  la  $H$  se obține ecuația curbei de nivel:

$$H^2 = H_0^2 - \frac{2q_x}{\mathcal{K}}x \quad (4.29)$$

Ea este o parabolă simetrică în raport cu axa  $OX$ . Dacă aceeași ecuație se integrează de la  $x = 0$  la  $x = L$ , respectiv de la  $H_0$  la  $H_L$  se obține:

$$H_L^2 - H_0^2 = -\frac{2q_x}{\mathcal{K}}L \Rightarrow q_x = \frac{\mathcal{K}}{2L}(H_0^2 - H_L^2) \Rightarrow q_x > 0$$

deci curgerea are loc în sensul axei  $OX$ .

- Coordonatele vârfului parabolei sunt:  $z_v = H_v = 0$  și  $x_v = \frac{H_0^2 \cdot \mathcal{K}}{2q_x} > 0$

- Relația dintre  $x_v$  și  $L$  rezultă din:

$$x_v = \frac{H_0^2 \cdot \mathcal{K}}{2q_x} = \frac{H_0^2 \mathcal{K} L}{\mathcal{K}(H_0^2 - H_L^2)} = L \frac{H_0^2}{H_0^2 - H_L^2} > L \Rightarrow x_v > L$$

#### 4.2.1.2. Exemplu de curgere plan verticală într-un acvifer sub presiune, omogen

*Curgerea sub presiune, vertical plană, spre un dren într-un strat acvifer omogen plan orizontal cu grosime uniformă*

Legile curgerii staționare fără surse auxiliare sub presiune (4.10) și (4.11) scrise pentru curgerea plan - verticală din acest caz devin:

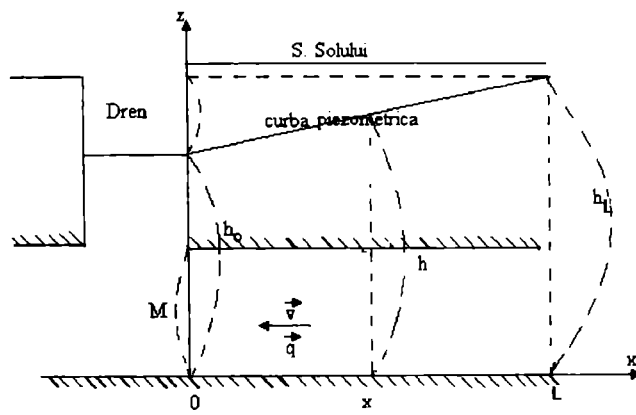


Figura 4.4

$$-\mathcal{K} \frac{d}{dx} \left( M \frac{dh}{dx} \right) = 0 \quad (4.30)$$

$$-\mathcal{K} M \frac{dh}{dx} = -q \quad (4.31)$$

iar pentru strat omogen  $\mathcal{K} = \text{constant}$  ecuațiile se scriu astfel:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (\mathcal{K} M \frac{dh}{dx}) = 0 \\ \mathcal{K} M \frac{dh}{dx} = q \end{cases} \Rightarrow \frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow q = \text{constant}$$

Legea a doua poate fi pusă sub forma  $dh = \frac{q}{\mathcal{K}M} dx$ . Dacă este integrată de la 0 la  $x$ , respectiv de la  $h_0$  la  $h$  se obține ecuația curbei piezometrice:

$$h = h_0 + \frac{q}{\mathcal{K}M} x \quad (4.32)$$

care este o dreaptă cu pantă pozitivă, ca în figura 4.4.

Dacă ecuația se integrează de la 0 la  $L$ , respectiv de la  $h_0$  la  $h_L$  se obține modulul debitului unitar:

$$q = \frac{\mathcal{K}M(h_L - h_0)}{L} \quad (4.33)$$

în care s-a notat cu  $L$  distanța față de frontiera drenului la care începe să nu se mai simtă influența drenului și unde cota piezometrică este  $h_L$ .

#### 4.2.2. Curgerea vertical - plană într-un mediu neomogen

4.2.2.1. Curgerea sub presiune, vertical plană, într-un acvifer cu grosime uniformă și orizontal, neomogenitatea constând în variații discontinue de conductibilitate hidraulică după plane dispuse perpendicular pe fețele stratului și pe direcția de curgere

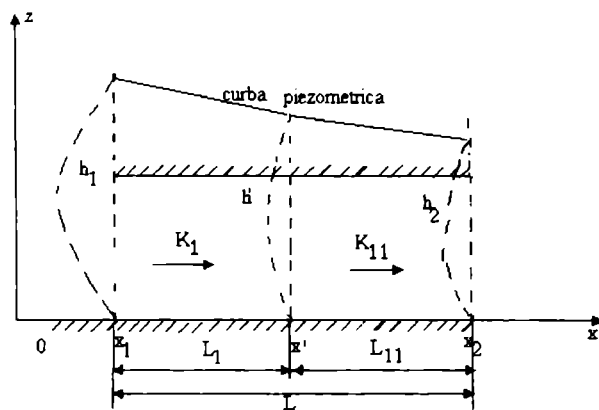


Figura 4.5

Curgerea va fi uniformă, cu același debit unitar chiar dacă fiecare domeniu este caracterizat de o altă conductivitate hidraulică, deoarece în fiecare domeniu  $\mathcal{K} = \text{constant}$ . Legile de curgere vor fi aceleași ca în cazul curgerii de la 4.2.1.2 numai că ele vor fi aplicate pentru fiecare domeniu omogen în parte:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (-\mathcal{K}M \frac{dh}{dx}) = 0 \\ -\mathcal{K}M \frac{dh}{dx} = q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dx} = 0 \quad \Rightarrow q = \text{constant}$$

Legea a doua pusă sub forma:  $dh = -\frac{q}{\mathcal{K}M} dx$  va fi integrată separat pentru fiecare domeniu:

$$\int_{h_1}^{h'} dh = -\frac{q}{\mathcal{K}_I M} \int_{x_1}^{x'} dx \Rightarrow$$

$$h' = h_1 - \frac{q}{\mathcal{K}_I M} (x' - x_1) = h_1 - \frac{qL_I}{\mathcal{K}_I M}$$

și

$$\int_{h'}^{h_2} dh = -\frac{q}{\mathcal{K}_{II} M} \int_{x'}^{x_2} dx \Rightarrow$$

$$h' = h_2 + \frac{q}{\mathcal{K}_{II} M} (x_2 - x') = h_2 + \frac{qL_{II}}{\mathcal{K}_{II} M}$$

Comparând cele două expresii ale lui  $h'$  se obține modulul debitului unitar:

$$q = \frac{M(h_1 - h_2)}{\frac{L_I}{\mathcal{K}_I} + \frac{L_{II}}{\mathcal{K}_{II}}} \quad (4.34)$$

Curba piezometrică pentru fiecare domeniu este câte un segment de dreaptă cu pante negative diferite și care au un punct comun de coordonate  $(x', h')$ . Dacă cele două conductibilități hidraulice se află în relația  $\mathcal{K}_I < \mathcal{K}_{II}$  atunci pantele celor două drepte vor fi  $-\frac{q}{\mathcal{K}_I M} < -\frac{q}{\mathcal{K}_{II} M}$ , iar cele două segmente vor corespunde celor din figura 4.5.

Dacă expresia debitului este înmulțită sus și jos cu  $L = L_I + L_{II}$  se obține:

$$q = \frac{L_I + L_{II}}{\frac{L_I}{\mathcal{K}_I} + \frac{L_{II}}{\mathcal{K}_{II}}} M \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (4.35)$$

Dacă se notează conductibilitatea hidraulică echivalentă cu  $\tilde{\mathcal{K}}_{\perp}$

$$\frac{L_I + L_{II}}{\frac{L_I}{\mathcal{K}_I} + \frac{L_{II}}{\mathcal{K}_{II}}} = \tilde{\mathcal{K}}_{\perp} \quad (4.36)$$

atunci:

$$q = \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{\perp} M}{L} (h_1 - h_2) \quad (4.37)$$

Dacă se compară această expresie cu aceea a debitului într-un acvifer sub presiune dar omogen  $[q = \frac{\mathcal{K}M}{L} (h_L - h_0)]$  se constată că debitul unitar pentru curgerea într-un strat acvifer sub presiune neomogen ca în modelul studiat poate fi obținut printr-o curgere la aceeași diferență piezometrică  $(h_1 - h_2)$  pe aceeași lungime  $L$  într-un strat acvifer cu aceeași grosime  $M$ , dacă acesta are conductibilitatea hidraulică  $\tilde{\mathcal{K}}_{\perp}$  definită mai înainte.

Dacă există  $n$  domenii succesive și omogene cu valori diferite ale lui  $\mathcal{K}$  și anume  $\mathcal{K}_I, \mathcal{K}_{II}, \mathcal{K}_{III}, \dots, \mathcal{K}_n$ , fiecare având lungimea  $L_I, L_{II}, L_{III}, \dots, L_n$ , atunci conductibilitatea hidraulică echivalentă are expresia:

$$\tilde{\mathcal{K}}_{\perp} = \frac{\sum_{i=I}^n L_i}{\sum_{i=I}^n \frac{L_i}{\mathcal{K}_i}} \quad (4.38)$$

4.2.2.2 Curgerea sub presiune, vertical plană, într-un acvifer cu grosime uniformă și orizontal, neomogenitatea constând în variații discontinue de conductibilitate hidraulică după plane dispuse paralel cu fețele stratului și cu direcția de curgere

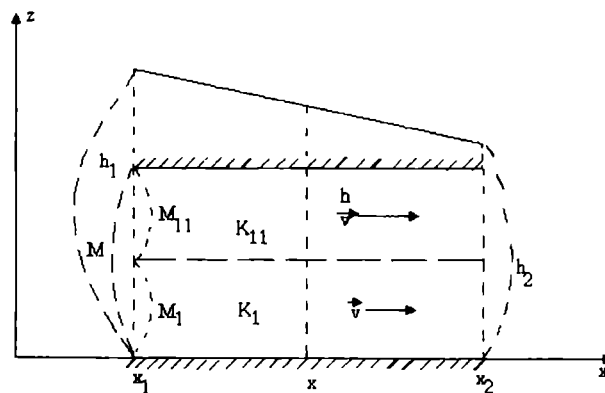


Figura 4.6

Legile aplicate cazului precedent sunt valabile și aici numai că ele se aplică separat celor două domenii suprapuse cu conductibilități hidraulice diferite. Deci:

$$-\mathcal{K}M \frac{dh}{dx} = q$$

Curgerea fiind asigurată în ambele strate simultan de aceeași sursă principală, cota piezometrică este practic independentă de numărul stratelor. Debitul unitar total  $\bar{q}$  va fi egal cu suma debitelor prin fiecare strat ( $\bar{q}_I$ , respectiv  $\bar{q}_{II}$ ). Deci se poate scrie:

$$\begin{cases} -\mathcal{K}_I M_I \frac{dh}{dx} = q_I \\ -\mathcal{K}_{II} M_{II} \frac{dh}{dx} = q_{II} \\ q_I + q_{II} = q \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\mathcal{K}_I M_I \frac{dh}{dx} - \mathcal{K}_{II} M_{II} \frac{dh}{dx} = q$$

Se rezolvă separat cele două ecuații diferențiale pentru fiecare strat în parte și se obține pentru fiecare dintre ele:

$$dh = -\frac{q_I}{\mathcal{K}_I M_I} dx \quad dh = -\frac{q_{II}}{\mathcal{K}_{II} M_{II}} dx$$

Se integrează fiecare din ele pe două domenii, de la  $x_1$  la  $x$  respectiv de la  $h_1$  la  $h$  și de la  $x$  la  $x_2$ , respectiv  $h$  la  $h_2$ ; se obține pentru prima ecuație:

$$h = h_1 - \frac{q_I}{\mathcal{K}_I M_I} (x - x_1) \quad \text{și} \quad h = h_2 + \frac{q_I}{\mathcal{K}_I M_I} (x_2 - x) \quad (4.39)$$

și pentru a doua ecuație:

$$h = h_1 - \frac{q_{II}}{\mathcal{K}_{II} M_{II}} (x - x_1) \quad \text{și} \quad h = h_2 + \frac{q_{II}}{\mathcal{K}_{II} M_{II}} (x_2 - x) \quad (4.40)$$

Toate cele 4 ecuații  $h = h(x)$  exprimă același lucru, ecuația curbei piezometrice care și în acest caz este o dreaptă cu panta negativă, ca în figura 4.6. Întrucât panta lor e aceeași din egalarea lor se obține:

$$\frac{q_I}{\mathcal{K}_I M_I} = \frac{q_{II}}{\mathcal{K}_{II} M_{II}} \quad (4.41)$$

Eliminând pe  $(h + q_I x / \mathcal{K}_I M_I)$  între ecuațiile (4.39) obținute pentru primul strat și pe  $(h + q_{II} x / \mathcal{K}_{II} M_{II})$  între ecuațiile (4.40) obținute pentru stratul 2, se obțin expresiile celor două debite unitare.

$$q_I = \mathcal{K}_I M_I \frac{h_1 - h_2}{x_2 - x_1} = \mathcal{K}_I M_I \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (4.42)$$

$$q_{II} = \mathcal{K}_{II} M_{II} \frac{h_1 - h_2}{x_2 - x_1} = \mathcal{K}_{II} M_{II} \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (4.43)$$

iar debitul unitar total va fi:

$$q = q_I + q_{II} = (\mathcal{K}_I M_I + \mathcal{K}_{II} M_{II}) \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (4.44)$$

Membrul 2 al acestei expresii se înmulțește și se împarte cu  $M = M_I + M_{II}$  și se obține:

$$q = \frac{\mathcal{K}_I M_I + \mathcal{K}_{II} M_{II}}{M_I + M_{II}} M \frac{h_1 - h_2}{L}$$

Se notează conductibilitatea hidraulică echivalentă cu  $\tilde{\mathcal{K}}_{||}$ :

$$\tilde{\mathcal{K}}_{||} = \frac{\mathcal{K}_I M_I + \mathcal{K}_{II} M_{II}}{M_I + M_{II}} \quad (4.45)$$

și se obține pentru debitul unitar total:

$$q = \frac{\tilde{\mathcal{K}}_{||} M}{L} (h_1 - h_2) \quad (4.46)$$

Dacă se compară expresia (4.46) cu relația (4.33) obținută pentru curgerea sub presiune spre un dren ( din paragraful 4.2.1.2) se constată că debitul unitar pentru curgerea într-un strat acvifer sub presiune, neomogen - format din strate omogene horizontale, poate fi obținut printr-o curgere la aceeași diferență piezometrică ( $h_1 - h_2 = h_L - h_0$ ) pe același segment de lungime  $L$  într-un strat acvifer cu aceeași grosime  $M = M_I + M_{II}$  dacă acesta are conductibilitatea hidraulică  $\tilde{\mathcal{K}}_{||}$  definită mai înainte.

Dacă există  $n$  straturi succesive plane paralele horizontale de grosimi constante  $M_I + M_{II} + M_{III} + \dots + M_n = M$  fiecare având conductibilitatea hidraulică  $\mathcal{K}_I, \mathcal{K}_{II}, \mathcal{K}_{III}, \dots, \mathcal{K}_n$ , și aceeași lungime  $L$ , atunci conductibilitatea hidraulică echivalentă ar avea expresia:

$$\tilde{\mathcal{K}}_{||} = \frac{\sum_{i=I}^n \mathcal{K}_i M_i}{\sum_{i=I}^n M_i} \quad (4.47)$$

### 4.3. Curgerea compusă în regim staționar fără surse auxiliare

Există cazuri când două sau mai multe curgeri vertical plane se întâlnesc dând naștere unei curgeri rezultante. În figura 4.7 este reprezentată, într-o secțiune plană orizontală, concurența a patru curgeri, axa  $OX$  fiind aleasă de-a lungul curgerii rezultante. În acest caz mișcarea resultantă poate fi obținută prin compunerea celor patru curgeri concurente. Pentru fiecare dintre acestea se poate scrie legea difuzivității (4.1) și legea lui Darcy sub forma (4.3), în ipoteza unui mediu omogen și izotrop:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h)_j = 0 \quad (4.48)$$

$$-\mathcal{K}(H \operatorname{grad} h)_j = H \vec{v}_j = \vec{q}_j \quad (4.49)$$



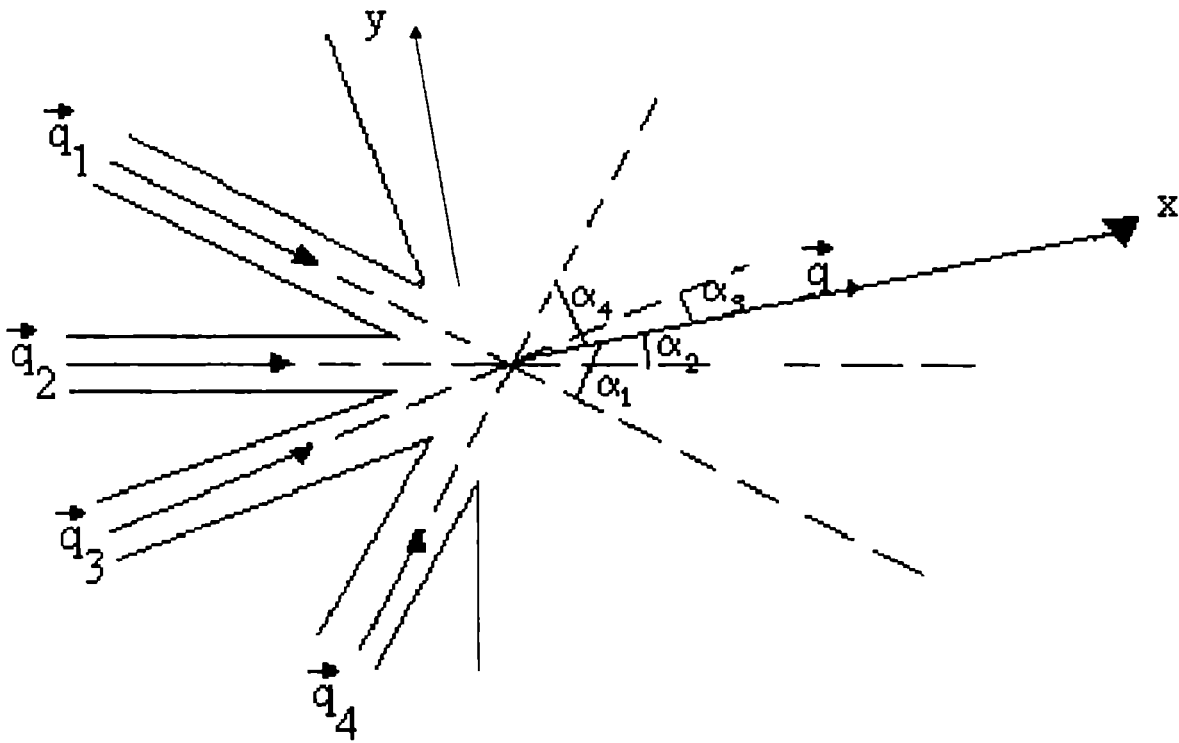


Figura 4.7

iar pentru mișcarea rezultantă:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = -\mathcal{K} \sum_{j=1}^4 \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h)_j = -\mathcal{K} \operatorname{div} \sum_{j=1}^4 (H \operatorname{grad} h)_j = 0 \quad (4.50)$$

$$-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h = -\mathcal{K} \sum_{j=1}^4 (H \operatorname{grad} h)_j = \sum_{j=1}^4 (H \vec{v})_j = \sum_{j=1}^4 \vec{q}_j = \vec{q} \quad (4.51)$$

Legile (4.50) și (4.51) pot fi aplicate în diferite cazuri particulare.

#### 4.3.1. Curgerea compusă în acvifere cu suprafață liberă

Pentru un acvifer cu suprafață liberă, omogen și izotrop, având patul impermeabil plan orizontal se ține seama de:

$$h = z_0 + H \quad \text{și} \quad z_0 = \text{constant}$$

iar cele două legi devin:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div} \operatorname{grad}(H^2) = -\mathcal{K} \operatorname{div} \sum_{j=1}^4 \operatorname{grad}(H^2)_j = 0 \quad (4.52)$$

$$-\mathcal{K} \operatorname{grad} \left( \frac{H^2}{2} \right) = -\mathcal{K} \sum_{j=1}^4 \left[ \operatorname{grad} \left( \frac{H^2}{2} \right)_j \right] = \sum_{j=1}^4 \vec{q}_j = \vec{q} \quad (4.53)$$

Tinând cont de orientarea axelor  $OX$  și  $OY$  din figura 4.7 expresia (4.53) se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^2}{\partial x} &= -\frac{2}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \\ \frac{\partial H^2}{\partial y} &= -\frac{2}{\mathcal{K}} \sum_{j=1}^4 q_j \sin \alpha_j = 0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Deoarece  $\frac{\partial H^2}{\partial y} = 0$  rezultă că  $H^2 = f(x)$  și prima ecuație (4.54) se poate scrie:

$$dH^2 = -\frac{2}{\mathcal{K}} \left( \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \right) dx \quad (4.55)$$

Integrată de la  $H_0$  la  $H$  și de la  $x_0$  la  $x$  se obține ecuația suprafeței libere a curentului rezultat:

$$H^2 = H_0^2 - \frac{2}{\mathcal{K}} \left( \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \right) (x - x_0) \quad (4.56)$$

#### 4.3.2 Curgerea compusă în acvifere sub presiune

În ipoteza că acviferul este omogen și izotrop, de grosime constantă  $M$  și patul impermeabil orizontal, corespunde unei configurații în plan orizontal reprezentată în figura 4.7, legile (4.50) și (4.51) se scriu:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(M \operatorname{grad} h) = -\mathcal{K} \operatorname{div} \sum_{j=1}^4 (M \operatorname{grad} h)_j = 0 \quad (4.57)$$

$$-\mathcal{K} M \operatorname{grad} h = -\mathcal{K} \sum_{j=1}^4 (M \operatorname{grad} h)_j = \sum_{j=1}^4 \vec{q}_j \quad (4.58)$$

Proiectată pe axele  $OX$  și  $OY$  relația (4.58) devine:

$$\begin{aligned} -\mathcal{K} M \frac{\partial h}{\partial x} &= \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \\ -\mathcal{K} M \frac{\partial h}{\partial y} &= \sum_{j=1}^4 q_j \sin \alpha_j = 0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Din care rămâne:

$$dh = -\frac{1}{\mathcal{KM}} \left( \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \right) dx \quad (4.60)$$

iar prin integrare de la  $h_0$  la  $h$  și de la  $x_0$  la  $x$  se obține ecuația suprafeței piezometrice a curentului rezultat:

$$h = h_0 - \frac{1}{\mathcal{KM}} \left( \sum_{j=1}^4 q_j \cos \alpha_j \right) (x - x_0) \quad (4.61)$$

CURGEREA STATIONARA CU SURSA AUXILIARA

5.1. Aspecte generale

Așa cum s-a arătat în paragraful 3.3.5 legea difuzivității pentru această curgere este:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad} h] = \gamma \vec{v} \mathcal{K} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right) \quad (5.1)$$

Această lege poate fi pusă și sub alte forme, uneori mai utile în aplicații. De exemplu:

- Primul membru poate fi dedus din dezvoltarea următoarei expresii vectoriale:

$$\operatorname{div}[\mathcal{K} H \operatorname{grad} h] = \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) + H(\operatorname{grad} h) \operatorname{grad} \mathcal{K}$$

din care se obține:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = \operatorname{div}(-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) + H(\operatorname{grad} h) \operatorname{grad} \mathcal{K}$$

care cu ajutorul legii lui Darcy:  $\operatorname{grad} h = -\vec{v}/\mathcal{K}$  mai poate fi scrisă:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = \operatorname{div}(-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) - \frac{H}{\mathcal{K}} \vec{v} \operatorname{grad} \mathcal{K} \quad (5.2)$$

Se înlocuiește (5.2) în (5.1) și prin dezvoltarea membrului doi se obține o nouă formă a legii difuzivității:

$$\operatorname{div}(-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) = \gamma \vec{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right) \quad (5.3)$$

Încă o formă a aceleiași legi se poate obține dacă precedentă se scrie:

$$\operatorname{div}(-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) - H \vec{v} \frac{\operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right)}{\frac{H}{\gamma}} = 0 \quad (5.4)$$

Dar legea lui Darcy pusă sub forma:  $-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h = H \vec{v} = \vec{q}$  permite să se scrie:

$$\operatorname{div} \vec{q} - \frac{\vec{q}}{H/\gamma} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right) = 0 \quad (5.5)$$

sau:

$$\frac{1}{H/\gamma} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{\vec{q}}{(H/\gamma)^2} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right) = 0 \quad (5.6)$$

Deoarece:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{H/\gamma} \right) = \frac{1}{H/\gamma} \operatorname{div} \vec{q} + \vec{q} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{H/\gamma} \right) = \frac{1}{H/\gamma} \operatorname{div} \vec{q} - \frac{\vec{q}}{(H/\gamma)^2} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right)$$

o altă formă a legii difuzivității hidraulice pentru curgerea staționară cu sursă auxiliară este:

$$\operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{H/\gamma} \right) = 0 \quad (5.7)$$

Pentru aplicațiile care urmează prezintă interes legea difuzivității pusă sub forma a doua - relația (5.3). În cazul curgerii staționare cu sursă auxiliară și cu suprafață liberă această lege poate fi în continuare transformată luând în considerare atât expresia cotei piezometrice pentru curgeri cu suprafață liberă:

$$h = z_0 + H + \text{const} \quad (5.8)$$

cât și semnificația fizică a membrului doi al legii:

$$\gamma \vec{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right)$$

Acest termen are dimensiunile unei viteze. Fiind vorba de deplasarea unui fluid, viteza lui poate fi considerată ca reprezentând debitul fluidului care traversează unitatea de suprafață. În cazul acviferelor cu suprafață liberă este vorba de debitul apei care traversează unitatea de suprafață liberă fie prin evaporație, fie prin infiltrație. Se notează cu  $w$  debitul prin unitatea de suprafață, adică:

$$\gamma \vec{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma} \right) = w \quad (5.9)$$

Denumirea lui  $w$  este și de *modul de infiltrație* sau *infiltrația eficace*, cu observația că mărimea respectivă este o funcție de punct. Dacă descărcarea acviferului prin evaporație este mai mică decât reîncărcarea lui prin infiltrația din precipitații sau condensare în sol, atunci  $w$  este pozitiv, în caz contrar este negativ.

Deci legea difuzivității pentru un acvifer cu suprafață liberă se mai poate scrie în cazul curgerii staționare cu sursă auxiliară:

$$\operatorname{div}[-\mathcal{K}H \operatorname{grad}(z_0 + H)] = w \quad (5.10)$$

*Dacă patul impermeabil este orizontal ( $z_0 = \text{const}$ ) legea devine:*

$$\operatorname{div} \left[ -\frac{\mathcal{K}}{2} \operatorname{grad}(H)^2 \right] = w \quad (5.11)$$

*în ipoteza că și  $\mathcal{K} = \text{const}$  :*

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}(H)^2 = -\frac{2w}{\mathcal{K}} \quad (5.12)$$

- Pentru curgerea staționară cu sursă auxiliară, prin acvifere sub presiune, cu  $H = M$ , legea difuzivității (5.3) devine:

$$\operatorname{div}(-\mathcal{K}M\operatorname{grad}h) = \gamma\vec{v}\operatorname{grad}\left(\frac{M}{\gamma}\right) \quad (5.13)$$

Membrul doi al legii păstrează aceeași semnificație fizică și anume reprezintă debitul de apă ce traversează unitatea de suprafață. De data acesta este vorba de suprafața care separă acviferul sub presiune de un alt acvifer secundar aflat în contact cu cel principal prin patul sau capacul semipermeabil al acestuia. Potrivit legii lui Darcy debitul care traversează unitatea de suprafață ( ceea ce este același lucru cu scalarul vitezei fluidului pe direcția de curgere cu care traversează suprafața) se poate exprima și printr-o funcție de punct de forma:

$$v'_z = -\mathcal{K}'\frac{\Delta h}{\Delta z} = -\mathcal{K}'\frac{h - h_0}{M'} \quad (5.14)$$

în care  $\mathcal{K}'$  și  $M'$  sunt conductibilitatea hidraulică și grosimea patului sau capacului semipermeabil, adică a aceluia strat semipermeabil care separă acviferul principal de cel secundar, acesta din urmă având sarcina (cota) piezometrică presupusă constantă și egală cu cota piezometrică de la capul curgerii din acviferul principal ( $h_0$ ).

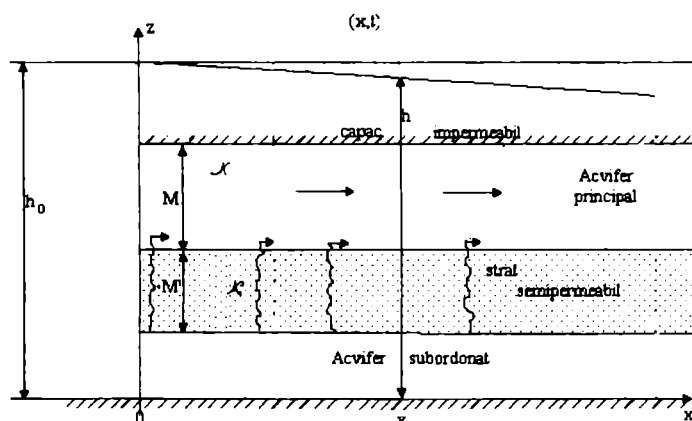


Figura 5.1

În acest caz  $h$  reprezintă sarcina piezometrică în acviferul principal care este o funcție de punct și care pentru  $x = 0$  ia valoarea  $h = h_0$ , iar  $(h - h_0)/M'$  reprezintă raportul dintre variația sarcinii piezometrice prin mediul "poros" ( adică prin capacul sau patul semipermeabil de grosime  $M'$  și conductibilitate hidraulică  $\mathcal{K}'$ ) și grosimea  $M'$ , adică distanța de-a lungul căreia are loc variația sarcinii piezometrice respective. Acest raport mai reprezintă viteza de variație a sarcinii piezometrice pe direcția perpendiculară pe capacul sau patul semipermeabil al acviferului principal, sau proiecția gradientului sarcinii piezometrice pe aceeași direcție. Acest raționament permite să se scrie:

$$\gamma\vec{v}\operatorname{grad}\left(\frac{M}{\gamma}\right) = -\mathcal{K}'\frac{h - h_0}{M'} \quad (5.15)$$

iar legea difuzivității hidraulice pentru curgerea staționară cu sursă auxiliară, sub presiune, devine:

$$\operatorname{div}(-\mathcal{K}M\operatorname{grad}h) = -\mathcal{K}'\frac{h-h_0}{M'} \quad (5.16)$$

cu precizarea că dacă:

a)  $h_0 - h < 0$  ( $h_0 < h$ ), acviferul principal cedează apa către acviferul subordonat hidraulic (secundar) prin capacul sau patul impermeabil

b)  $h_0 - h > 0$  ( $h_0 > h$ ), acviferul principal primește apa de la acviferul subordonat prin capacul sau patul impermeabil.

Transferul de apă printr-un strat semipermeabil care separă două acvifere de sarcină piezometrică diferită este cunoscut sub denumirea de *drenanță*.

Intensitatea acestui transfer conform relației stabilite (5.15), este condiționată de mărimea raportului  $\mathcal{K}'/M'$  pentru o diferență de sarcină piezometrică dată ( $h_0 - h$ ). Raportul  $\mathcal{K}'/M'$  se numește *parametru de drenanță*. O altă mărime caracteristică este *transmisivitatea hidraulică* a acviferului principal, care prin definiție reprezintă:

$$\mathcal{T} = \mathcal{K} \cdot M \quad (5.17)$$

În ipoteza că  $\mathcal{T} = \mathcal{K} \cdot M$  este constantă, legea difuzivității se poate scrie:

$$\frac{\mathcal{T}M'}{\mathcal{K}'}\operatorname{divgrad} h = -(h_0 - h) \quad (5.18)$$

De asemenea *factorul de drenanță*,  $B$ , se definește cu ajutorul relației:

$$B = \left(\frac{\mathcal{T}M'}{\mathcal{K}'}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mathcal{K}MM'}{\mathcal{K}'}\right)^{1/2} \quad (5.19)$$

În acest caz legea difuzivității se scrie:

$$\operatorname{divgrad} h + \frac{(h_0 - h)}{B^2} = 0 \quad (5.20)$$

iar în ipoteza că  $h_0 = \text{const}$  se obține:

$$\operatorname{divgrad}(h_0 - h) - \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h) = 0 \quad (5.21)$$

care este o ecuație de tip Helmholtz.

## 5.2. Curgeri plan - verticale în regim staționar cu surse auxiliare

### 5.2.1. Curgerea vertical plană cu suprafață liberă

O asemenea curgere poate să aibă loc în zonele de interfluviu unde un acvifer cu suprafață liberă, în afară de mișcarea de filtrație impusă de apa infiltrată din cele două râuri, poate ceda prin evaporare sau primi prin infiltrare de la precipitații căzute în interfluviu, în mod permanent apă prin suprafața liberă. Curgerea se poate menține neschimbată în plane verticale paralele orientate după direcția de ansamblu a curentului în acvifer. Planul  $XOZ$  al SC -ului a fost ales conform figurii 5.2, paralel cu planele verticale definite ale curgerii cu axa  $OX$  orizontală. Se consideră patul impermeabil orizontal, adică  $dz_0/dx = 0$ , iar pentru început  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x)$ .

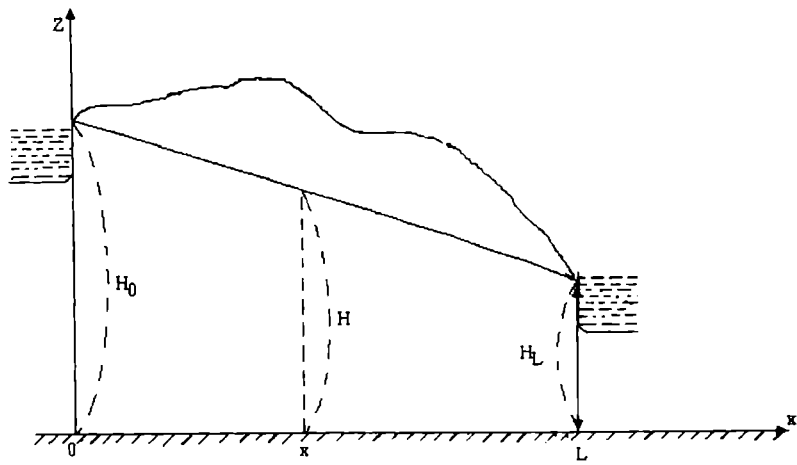


Figura 5.2

În aceste condiții, cele două legi, difuzivitate (5.10) și Darcy, se scriu prin proiecțiile lor astfel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} \right) &= w \\ -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} &= q \end{aligned}$$

unde  $w$  și  $q$  sunt mărimi algebrice ( $q$  proiecția vectorului respectiv). din care rezultă:

$$\frac{dq}{dx} = w \quad \text{sau} \quad dq = w \cdot dx \quad (5.22)$$

- În ipoteza că  $w = \text{const}$ , ecuația diferențială se poate integra ușor de la  $x = 0$  la  $x$ , respectiv de la  $q_0 = \left( -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} \right)_{x=0}$  până la  $q = -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx}$  și se obține:

$$q = q_0 + w \cdot x \quad (5.23)$$

ecuație ce reprezintă dependența lui  $q$  de  $x$ , adică variația debitului unitar de-a lungul curgerii.

Dacă se înlocuiește expresia lui  $q$  din legea lui Darcy se obține o ecuație diferențială care integrată între limitele alese convenabil se ajunge la  $H = H(x)$ , la  $q_0$  și la alte forme ale lui  $q(x)$ . Deci:

$$\begin{aligned} -\mathcal{K}H \frac{dH}{dx} &= q_0 + w \cdot x \Rightarrow \\ -\frac{\mathcal{K}}{2} d(H^2) &= (q_0 + wx) dx \end{aligned} \quad (5.24)$$

- În ipoteza  $\mathcal{K} = \text{const}$  integrarea se simplifică mult. Integrată de la  $x = 0$  la  $x$ , respectiv de la  $H_0$  la  $H$  se obține ecuația curbei de nivel:



$$H^2 = H_0^2 - \frac{2q_0}{\mathcal{K}}x - \frac{w}{\mathcal{K}}x^2 \quad (5.25)$$

Înainte de a studia funcția  $H = H(x)$  trebuie obținute expresiile pentru  $q_0$  și  $q(x)$ . Pentru acesta se integrează ecuația (5.24) de la  $x = 0$  la  $x = L$ , respectiv de la  $H_0$  la  $H_L$  și se obține:

$$-\frac{\mathcal{K}}{2}(H_L^2 - H_0^2) = q_0L - \frac{w}{2}L^2$$

din care:

$$q_0 = \frac{\mathcal{K}}{2L}(H_0^2 - H_L^2) - \frac{w}{2}L \quad (5.26)$$

iar prin înlocuirea lui  $q_0$  în expresia inițială (5.23) a lui  $q$  se obține:

$$q(x) = \frac{\mathcal{K}}{2L}(H_0^2 - H_L^2) - \frac{w}{2}L + w \cdot x \quad (5.27)$$

Studiul formei curbei de nivel se face căutând mai întâi valorile lui  $x = x_e$  pentru care funcția atinge valori extreme și apoi valorile extreme  $H_e$  ale lui  $H$ .

Prin anularea derivatei se obține:

$$2H \frac{dH}{dx} = -\frac{2q_0}{\mathcal{K}} - \frac{2w}{\mathcal{K}}x = 0 \rightarrow$$

$$x_e = -\frac{q_0}{w} \quad \text{și} \quad H_e^2 = H_0^2 + \frac{q_0^2}{\mathcal{K}w}$$

Din ecuația curbei de nivel (5.25) se observă că este vorba de o parabolă cu axa de simetrie verticală. Coordonatele vârfului,  $x_e$  și  $H_e$ , și orientarea parabolei în plan vertical depind de valorile și semnele lui  $w$  și  $q_0$ . Din expresia (5.26) a lui  $q_0$  se observă că el poate fi pozitiv pentru  $w < 0$  sau pentru valori suficient de mici ale lui  $w$  dar pozitive;  $q_0$  poate fi și negativ pentru  $w > 0$  și suficient de mare. Deci în funcție de domeniile de valori ale lui  $w$  și  $q_0$  se pot distinge mai multe cazuri.

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} w > 0 \\ q_0 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_e = -\frac{q_0}{w} < 0 \\ H_e^2 = H_0^2 + \frac{q_0^2}{\mathcal{K}w} > H_0^2 \end{array} \right.$$

Din relația  $q(x) = q_0 + w \cdot x$  se observă că, deoarece  $w > 0$ , pentru orice valoare  $0 < x < x_1$ ,  $q(x) > 0$ , de unde rezultă și sensul curgerii.

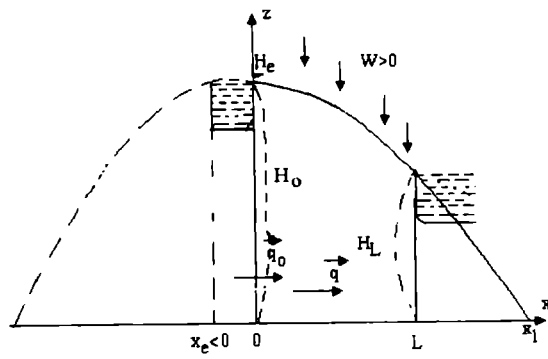


Figura 5.3

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} w > 0 \\ q_0 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_e = -\frac{q_0}{w} > 0 \\ H_e^2 = H_0^2 + \frac{q_0^2}{\kappa w} > H_0^2 \end{array} \right.$$

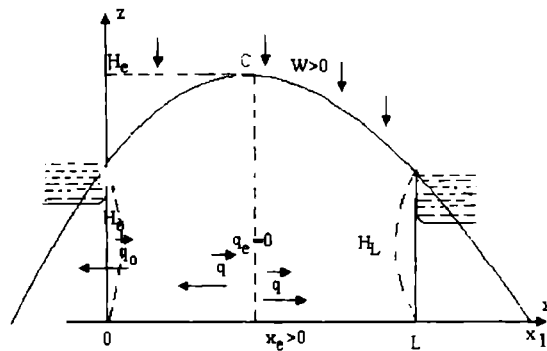


Figura 5.4

Din relația  $q(x) = q_0 + w \cdot x$  se observă că pentru  $x = x_e$ ,  $q = q_e = 0$ , iar pentru domeniul de valori  $x_e < x < x_1$ ,  $q(x) > 0$ , domeniul în care se schimbă sensul curgerii în acvifer ca o consecință a precipitațiilor abundente. În acest sens apare și creasta  $C$  a curbei de nivel.

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} w < 0 \\ q_0 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_e = -\frac{q_0}{w} > 0 \\ H_e^2 = H_0^2 + \frac{q_0^2}{\kappa w} < H_0^2 \end{array} \right.$$

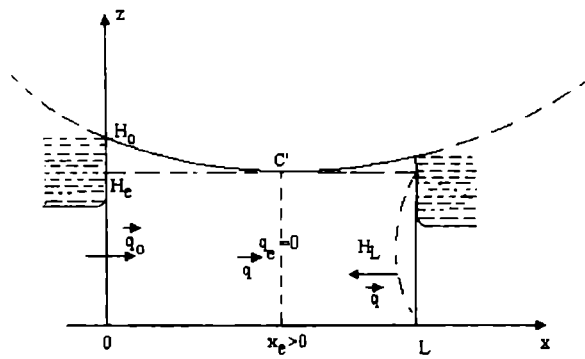


Figura 5.5

Din relația  $q(x) = q_0 + w \cdot x$  se observă că pentru  $x = x_e$ ,  $q = q_e = 0$ , iar pentru domeniul de valori  $x_e < x < L$ ,  $q(x) < 0$ .

### 5.2.2. Curgerea verticală plană sub presiune

O asemenea curgere poate să aibă loc în zonele de descărcare și reîncărcare prin frontiere practic rectilinii și paralele ale unor strate acvifere cvasiorizontale care pot ceda sau primi permanent apă prin paturile sau capacele lor semipermeabile. Curgerea se poate menține neschimbată în plane verticale paralele, orientate de-a lungul direcției de ansamblu a curentului acvifer. Planul  $XOZ$  al sistemului a fost ales conform figurii 5.6, paralel cu planele verticale definite și cu axa  $OX$  orizontală.

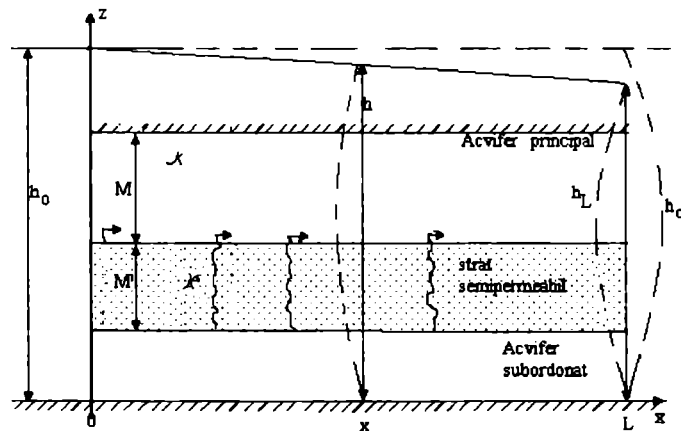


Figura 5.6

Deci în cazul curgerii staționare cu sursă auxiliară sub presiune caracterizată printr-un factor de drenanță  $B = (TM'/K')^{1/2} = \text{constant}$ , în care sarcina piezometrică este funcție numai de  $x$ ,  $h = h(x)$ , legea difuzivității de tipul ecuației Helmholtz:

$$\text{divgrad}(h_0 - h) = \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h) \quad (5.28)$$

se scrie:

$$\frac{d^2}{dx^2}(h_0 - h) = \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h) \quad (5.29)$$

În această ecuație s-a presupus  $h_0 = \text{const}$ ,  $T = \mathcal{K}M = \text{const}$ . Deci legea lui Darcy pentru acviferul principal proiectată pe  $OX$  :

$$-\mathcal{K}M \frac{dh}{dx} = q$$

se mai poate scrie

$$\mathcal{K}M \frac{d(h_0 - h)}{dx} = q$$

și care pentru  $x = 0$  ia valoarea particulară:

$$\mathcal{K}M \left( \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right)_{x=0} = q_0$$

sau

$$\left( \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{q_0}{T}$$

Pentru integrare, ecuația difuzivității trebuie pusă sub o altă formă; mai întâi se înmulțește cu  $2 \frac{d(h_0 - h)}{dx}$ :

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2}(h_0 - h) \right] \cdot 2 \frac{d(h_0 - h)}{dx} = \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h) \cdot 2 \frac{d(h_0 - h)}{dx}$$

sau

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2}(h_0 - h) \right] \cdot 2 \frac{d(h_0 - h)}{dx} dx = \left(\frac{1}{B}\right)^2 2(h_0 - h) d(h_0 - h)$$

adică

$$d \left[ \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right]^2 = \left(\frac{1}{B}\right)^2 d(h_0 - h)^2 \quad (5.30)$$

Soluția ecuației (5.30) se poate obține prin integrare în două etape. Mai întâi integrarea se face de la  $(h_0 - h) \rightarrow 0$  la  $(h_0 - h) \neq 0$ , respectiv de la  $x = 0$  la  $x \neq 0$  și se obține:

$$\left[ \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right]^2 - d \left[ \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right]_{x=0}^2 = \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h)^2 - \left(\frac{1}{B}\right)^2 (h_0 - h)_{x=0}^2$$

Deoarece s-a arătat mai înainte că :

$$\left( \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right)_{x=0} = \frac{q_0}{T}, \quad \text{iar} \quad (h_0 - h)_{x=0} = 0$$

rezultatul se poate pune sub forma:

$$\left[ \frac{d(h_0 - h)}{dx} \right]^2 - \left( \frac{q_0}{T} \right)^2 = \left( \frac{1}{B} \right)^2 (h_0 - h)^2 \quad (5.31)$$

A doua integrare se face separând mai întâi variabilele în rezultatul de la prima integrare (5.31), rezultat ce reprezintă tot o ecuație diferențială; se obține:

$$\frac{d(h_0 - h)}{\sqrt{(q_0 B/T)^2 + (h_0 - h)^2}} = \frac{1}{B} dx \quad (5.32)$$

Se integreaza expresia de la  $(h_0 - h) \rightarrow 0$  la  $(h_0 - h) \neq 0$ , respectiv de la  $x = 0$  la  $x \neq 0$  și se obține:

$$\ln \left[ (h_0 - h) + \sqrt{\left( \frac{q_0 B}{T} \right)^2 + (h_0 - h)^2} \right] - \ln \frac{q_0 B}{T} = \frac{x}{B}$$

Rezolvând ecuația în raport cu  $(h_0 - h)$  se ajunge la :

$$h_0 - h = \frac{q_0 B}{2T} (e^{\frac{x}{B}} - e^{-\frac{x}{B}}) \quad (5.33)$$

sau

$$h_0 - h = \frac{q_0 B}{T} \sinh \left( \frac{x}{B} \right) \quad (5.34)$$

Ambele expresii reprezintă forme diferite ale ecuației curbei piezometrice. Pentru fiecare dintre ele se mai poate obține câte o nouă formă dacă se deduc mai întâi expresiile lui  $q_0$ . Acestea se obțin pentru fiecare în parte. În acest scop se retranscriu (5.33) și (5.34) pentru un punct particular:  $x = L$  și  $h = h_L$  din care se scot cele două expresii căutate pentru  $q_0$

$$q_0 = \frac{2T(h_0 - h_L)}{B(e^{\frac{L}{B}} - e^{-\frac{L}{B}})} \quad \text{și} \quad q_0 = \frac{T(h_0 - h_L)}{B \sinh(L/B)}$$

care înlocuite în (5.33) și (5.34) se obține:

$$h_0 - h = (h_0 - h_L) \frac{(e^{\frac{x}{B}} - e^{-\frac{x}{B}})}{(e^{\frac{L}{B}} - e^{-\frac{L}{B}})} \quad (5.35)$$

$$h_0 - h = (h_0 - h_L) \frac{\sinh \left( \frac{x}{B} \right)}{\sinh \left( \frac{L}{B} \right)} \quad (5.36)$$

CURGEREA NESTATIONARA FARA SURSE AUXILIARE

6.1. Aspecte generale

Aşa cum s-a arătat în paragraful 3.3.5. legea difuzivității hidraulice pentru acest tip de curgeri este:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = 0 \quad (6.1)$$

Ea mai poate fi pusă sub o altă formă utilă în anumite aplicații. Termenul întâi poate fi transformat dacă se ia în considerație o altă formă a legii difuzivității neparticuliarizată care a fost dedusă în paragraful 3.3.4 - relația (3.97):

$$\frac{S_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{m_e H}{\mathcal{K}} \right) \quad (6.2)$$

valabilă pentru curgerea laminară lentă care satisface condițiile:

$$\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial S_{e1}}{\partial p} = 0$$

Cu aceste precizări ecuația (6.2) devine:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial(m_e H)}{\partial t}$$

Se înlocuiește în (6.1) și o nouă formă a legii difuzivității este:

$$\frac{\partial(m_e H)}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = 0 \quad (6.3)$$

O altă formă a legii difuzivității se poate obține prin modificarea termenului doi al relației (6.3) pornind de la expresia:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = \operatorname{div}(-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) - (-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h) \frac{\operatorname{grad} \mathcal{K}}{\mathcal{K}}$$

și ținând cont de legea lui Darcy pusă sub forma:

$$-\mathcal{K} H \operatorname{grad} h = H \vec{v} = \vec{q}$$

se obține:

$$-\mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = \operatorname{div} \vec{q} - \frac{\vec{q}}{\mathcal{K}} \operatorname{grad} \mathcal{K} = \mathcal{K} \operatorname{div} \frac{\vec{q}}{\mathcal{K}}$$

Această relație se înlocuiește în (6.3) și se obține o nouă formă a legii difuzivității:

$$\frac{\partial(m_e H)}{\partial t} + \mathcal{K} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\mathcal{K}} \right) = 0 \quad (6.4)$$

În cazul curgerii în regim nestaționar fără sursă auxiliară cu suprafață liberă se mai pot lua în considerație:

- expresia cotei piezometrice :  $h = z_0 + H + const$
  - expresia particulară a coeficientului de variație a înmagazinării:  $S_e = S_{0e} = m_e = const$
  - constanța în timp a patului impermeabil :  $\frac{\partial z_0}{\partial t} = 0$
- Forma (6.3) a legii difuzivității devine:

$$m_e \frac{\partial H}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad}(z_0 + H)] = 0 \quad (6.5)$$

iar dacă se presupune și patul impermeabil orizontal ( $\operatorname{grad} z_0 = 0$ ) și  $\mathcal{K} = \text{constant}$  legea ia forma:

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad}(H^2) = 0 \quad (6.6)$$

ecuație ce reprezintă o formă particulară a ecuației lui Boussinesq.

- În cazul curgerii nestaționare fără sursă auxiliară în acvifer sub presiune caracterizată prin  $H = M$  în acvifere compresibile și elastice, prima formă a legii difuzivității (6.1) devine:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(M \operatorname{grad} h) = 0 \quad (6.7)$$

Particularizată pentru  $\mathcal{K} = \text{constant}$ , de-a lungul acviferului și știind că  $\mathcal{T} = \mathcal{K}M$  se scrie:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathcal{T} \operatorname{grad} h) = 0$$

iar pentru acvifere cu grosime constantă ( $M = \text{const}$ ):

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{T} \operatorname{div} \operatorname{grad} h = 0 \quad (6.8)$$

Ecuația reprezintă o formă particulară a ecuației lui Fourier. Ecuația se mai poate scrie și sub forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \operatorname{div} \operatorname{grad} h = 0 \quad (6.9)$$

dacă se notează cu  $a = \mathcal{T}/S_e$ , mărime ce poartă denumirea de *coeficient de difuzivitate*, sau *coeficient de piezotransmisivitate* sau *coeficient de piezoconductibilitate*.

## 6.2. Curgeri vertical plane în regim nestaționar fără sursă auxiliară

### 6.2.1. Curgere vertical plană cu suprafață liberă

Un exemplu de curgere vertical plană cu suprafață liberă în regim nestaționar și fără sursă auxiliară este aceea care se face în apropierea unei frontiere rectilinii de descărcare sau încărcare nepermanentă a unui acvifer, cum ar fi curgerea spre un dren. În aceste condiții curgerea va avea loc identic în plane verticale paralele orientate după direcția curentului acvifer, în care se plasează și planul  $XOZ$  al unui SC - rectangular cu axa  $OX$  orizontală.

În ipoteza că acviferul este omogen și izotop cu patul impermeabil orizontal și cu cota de nivel ( $H$ ) funcție numai de  $x$  și de  $t$ , legea difuzivității pusă sub forma lui Boussinesq (6.6) se reduce la:

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = 0 \quad (6.10)$$

Pentru rezolvarea ecuației, Boussinesq a folosit metoda separării variabilelor, pornind de la o soluție de tipul:

$$H = H(x, t) = \Phi(x) \cdot T(t) \quad (6.11)$$

de unde:

$$\begin{aligned} H^2 = \Phi^2(x) \cdot T^2(t) &\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \Phi(x) \frac{dT(t)}{dt} \\ \frac{\partial H^2}{\partial x} = T^2(t) \frac{d\Phi^2}{dx}; &\quad \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = T^2(t) \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} \end{aligned}$$

Înlocuite în ecuația (6.11) se obține:

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \Phi \frac{dT}{dt} - T^2 \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} = 0 \quad (6.12)$$

sau separând variabilele:

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{K}}{2m_e} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} \quad (6.13)$$

Faptul că au putut fi separate cele două variabile rezultă că cei doi membri au o valoare comună, valoare ce trebuie să fie negativă pentru a se obține o soluție mărginită a ecuației Boussinesq pentru  $t > 0$ . Atunci se poate scrie :

$$\frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{K}}{2m_e} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (6.14)$$

de unde se pot obține două ecuații cu câte o singură variabilă:

$$-\frac{dT}{T^2} = \lambda^2 dt \quad \text{sau} \quad d\left(\frac{1}{T}\right) = \lambda^2 dt \quad (6.15)$$

și

$$\frac{d^2\Phi^2}{dx^2} = -\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \cdot \Phi \quad (6.16)$$

Ultima ecuație poate fi adusă la o formă convenabilă dacă se fac câteva artificii:

- mai întâi se înmulțește cu  $\frac{d\Phi^2}{2}$ :

$$\frac{1}{2} d\Phi^2 \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} = -\frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \cdot \Phi d\Phi^2$$



- membrul întâi se înmulțește și se împarte cu  $dx$  iar  $\Phi$  din membrul doi se pune sub forma  $(\Phi^2)^{1/2}$ .

$$\frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dx} \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} dx = -\frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \cdot (\Phi^2)^{1/2} d\Phi^2$$

-membrul unu se înmulțește și se împarte cu 2, iar membrul doi cu 2/3.

$$2 \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dx} \frac{1}{2} \frac{d^2\Phi^2}{dx^2} dx = -\frac{2}{3} \frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \frac{3}{2} (\Phi^2)^{1/2} d\Phi^2$$

expresie care se reduce la :

$$d \left[ \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dx} \right]^2 = -\frac{2}{3} \frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 d(\Phi^2)^{3/2}$$

sau:

$$d \left[ \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dx} \right]^2 = -\frac{2}{3} \frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 d(\Phi)^3 \quad (6.17)$$

- Puse sub această formă de ecuații cu o singură variabilă (6.15) și (6.17) pot fi integrate separat:

Mai întâi pentru ecuația în  $t$  se obține:

$$\frac{1}{T} = \lambda^2 t + C_0 \quad \text{sau} \quad T = \frac{1}{C_0 + \lambda^2 t} \quad (6.18)$$

Deoarece  $\Phi(x)$  va fi determinată în așa fel încât  $T(0) = 1$  rezultă că  $C_0 = 1$  și soluția (6.18) a ecuației în  $t$  va fi:

$$T(t) = \frac{1}{1 + \lambda^2 t} \quad (6.19)$$

Ecuația în  $x$  se integrează în mai multe rânduri și se obține mai întâi:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2} \frac{d\Phi^2}{dx} \right]^2 &= -\frac{2}{3} \frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \Phi^3 + C_1 \quad \text{sau} \\ \left[ \Phi \frac{d\Phi}{dx} \right]^2 &= -\frac{2}{3} \frac{m_e}{\mathcal{K}} \lambda^2 \Phi^3 + C_1 \end{aligned}$$

de unde

$$dx = \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{C_1 - \frac{2m_e}{3\mathcal{K}} \lambda^2 \Phi^3}} \quad (6.20)$$

care se integrează încă o dată:

$$x = \int_0^\Phi \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{C_1 - \frac{2m_e}{3\mathcal{K}} \lambda^2 \Phi^3}} + C_2 \quad (6.21)$$

Deoarece suprafața liberă a curgerii se află într-un anumit raport cu ărenul prin ipoteză, rezultă, conform figurii 6.1 și alegerii SC -ului că pentru  $x = 0$  rezultă  $H(x, t) = \Phi(x)T(t) = 0$ . Întrucât s-a ales  $T(0) = 1$  rezultă că  $\Phi(0) = 0$ . Dacă se pun aceste condiții în ecuația (6.21) rezultă  $C_2 = 0$  și ecuația respectivă devine:

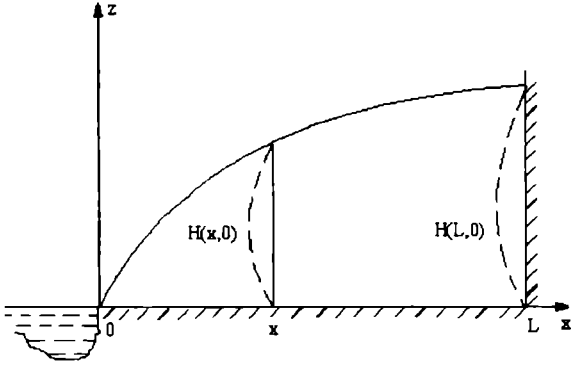


Figura 6.1

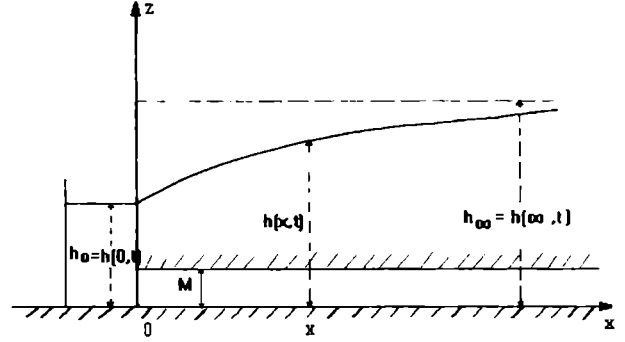


Figura 6.2

$$x = \int_0^{\Phi} \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{C_1 - \frac{2m_e \lambda^2}{3\mathcal{K}} \Phi^3}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2m_e \lambda^2}{3\mathcal{K}}}} \int_0^{\Phi} \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2} C_1 - \Phi^3}} \quad (6.22)$$

Dacă se notează  $\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2} C_1 = H_L^3$ , ecuația (6.22) se poate aduce la forme mai convenabile prin transformări succesive:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \int_0^{\Phi} \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{H_L^3 - \Phi^3}} = \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \int_0^{\Phi} \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{H_L^3} \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^{\Phi} \frac{3\Phi d\Phi}{H_L^2 \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

sau

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^{\Phi} \frac{3\Phi^2 d\Phi}{\Phi H_L^2 \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} = \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi^3}{H_L^3 \frac{\Phi}{H_L} \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^{\Phi^3/H_L^3} \frac{d\left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)}{\left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)^{1/3} \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} \end{aligned} \quad (6.24)$$

ceea ce se mai poate scrie și sub forma:

$$x = \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e \lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^{\Phi^3/H_L^3} \left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)^{-1/3} \cdot \left(1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)^{-1/2} \cdot d\left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right) \quad (6.25)$$

Deoarece la  $t = 0$  s-a ales  $T(0) = 1$ , acum, tot la  $t = 0$ , se pune condiția ca pentru  $x = L$  să avem  $H(L, 0) = \Phi(L) \cdot T(0) = H_L$ .

Această condiție atrage după sine și valoarea particulară:

$$H^3(L, 0) = \Phi^3(L) \cdot T^3(0) \Rightarrow H_L^3 = \Phi_L^3 1^3 \Rightarrow \frac{\Phi_L^3}{H_L^3} = 1$$

expresie ce reprezintă valoarea limitei de integrare pentru  $x = L$ , pentru care  $\Phi^3/H_L^3 = \Phi_L^3/H_L^3 = 1$ . Punând deci în expresia (6.23) condiția ca pentru  $x = L$  să avem  $\Phi^3/H_L^3 = \Phi_L^3/H_L^3 = 1$ , se obține:

$$L = \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e\lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} \int_0^1 \left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)^{-1/3} \cdot \left(1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}\right)^{-1/2} \cdot d\left(\frac{\Phi^3}{H_L^3}\right) \quad (6.26)$$

în care  $L$  are semnificația distanței față de drenul orizontal (cu frontiera plasată de-a lungul axei  $OY$ ) la care s-ar afla o limită impermeabilă verticală.

În urma transformărilor efectuate asupra expresiilor integrate pe parcurs a apărut sub integrală o nouă variabilă  $\Phi^3/H_L^3$ . Adusă sub ultima formă integrala apare ca o funcție Euler de speța I, care poate fi scrisă mai simplu dacă noua variabilă se notează  $\chi = \Phi^3/H_L^3$ , iar la exponenți se introduc  $\alpha = \frac{2}{3}$  și  $\beta = \frac{1}{2}$ . Cu aceste substituții și notații integrala apare simplificată ca formă și se notează astfel:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \chi^{\alpha-1} (1 - \chi)^{\beta-1} d\chi \quad (6.27)$$

În cazul nostru valoarea particulară a funcției Euler de speța I se va nota simbolic cu  $B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ , iar expresia lui  $L$  se retranscrie astfel:

$$L = \sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e\lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \quad (6.28)$$

din care se poate scoate valoarea lui  $\lambda^2$  ca fiind:

$$\lambda^2 = \frac{1}{6} \left[ B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \right]^2 \frac{\mathcal{K}H_L}{m_e L^2} \quad (6.29)$$

Revenind la expresia funcției  $T(t)$  ea poate fi detaliată prin înlocuirea lui  $\lambda^2$ :

$$T(t) = \frac{1}{1 + \lambda^2 \cdot t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6} \left[ B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \right]^2 \frac{\mathcal{K}H_L}{m_e L^2} \cdot t} \quad (6.30)$$

Se construiește raportul  $x/L$  cu ajutorul expresiilor (6.23) și (6.28) și se obține:

$$\begin{aligned} \frac{x}{L} &= \frac{\sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e\lambda^2}} \int_0^\Phi \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{H_L^3 - \Phi^3}}}{\sqrt{\frac{3\mathcal{K}}{2m_e\lambda^2}} \frac{\sqrt{H_L}}{3} B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})} = \frac{3}{\sqrt{H_L} B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})} \cdot \int_0^\Phi \frac{\Phi d\Phi}{\sqrt{H_L^3} \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} = \\ &= \frac{3}{B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})} \cdot \int_0^\Phi \frac{\Phi d\Phi}{H_L^2 \sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} = \frac{3}{B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\Phi/H_L} \frac{\frac{\Phi}{H_L} d\left(\frac{\Phi}{H_L}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\Phi^3}{H_L^3}}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Se face substituția  $\frac{\Phi}{H_L} = \Phi_L = f\left(\frac{x}{L}\right)$  și rezultă:

$$\Phi(x) = H_L \Phi_L = H_L f\left(\frac{x}{L}\right) \quad (6.32)$$

Expresia (6.31) devine

$$\frac{x}{L} = \frac{3}{B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})} \cdot \int_0^{\Phi_L} \frac{\Phi_L d\Phi_L}{\sqrt{1 - \Phi_L^3}} \quad (6.33)$$

Se revine la soluția generală (6.11), se înlocuiesc expresiile (6.30) și (6.32) găsite pentru  $T(t)$  și  $\Phi(x)$  și se obține:

$$H(x, t) = \Phi(x) \cdot T(t) = \frac{H_L f\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + \frac{1}{6} [B(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})]^2 \frac{\mathcal{K} H_L}{m_e L^2} \cdot t} \quad (6.34)$$

Deoarece  $B[\frac{2}{3}, \frac{1}{2}] = 2,587$  și  $\frac{1}{6}(2,587)^2 = 1,115$  se obține în final:

$$H(x, t) = \frac{H_L f\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + 1,115 \frac{\mathcal{K} H_L}{m_e L^2} \cdot t} = \frac{H_L \Phi_L}{1 + 1,115 \frac{\mathcal{K} H_L}{m_e L^2} \cdot t} \quad (6.35)$$

### 6.2.2. Curgerea verticală plană sub presiune

Într-un acvifer omogen și izotrop de grosime constantă în care curgerea sub presiune se face în regim nestaționar și fără surse auxiliare are loc o descărcare de-a lungul unei frontiere rectilinii (axa  $OX$  în figura 6.2) spre un dren pentru care legea difuzivității (6.9) devine:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \quad (6.36)$$

Ecuția poate fi integrată prin mai multe metode în funcție de cunoașterea condițiilor inițiale.

Metoda separării variabilelor se folosește dacă se cunoaște cota piezometrică la momentul inițial, adică se cunoaște funcția  $\varphi(x) = h(x, 0)$ . În acest caz se caută o soluție de forma:

$$h(x, t) = \Phi(x) T(t) \quad (6.37)$$

care trebuie să satisfacă ecuația (6.36), adică:

$$\Phi \frac{dT}{dt} - aT \frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0 \quad (6.38)$$

Prin separarea variabilelor se obține:

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (6.39)$$

din care rezultă cele două ecuații diferențiale cu câte o singură variabilă:

$$\frac{dT}{dt} + \lambda^2 aT = 0 \quad (6.40)$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \lambda^2\Phi = 0 \quad (6.41)$$

Soluția ecuației (6.40) este:

$$T = C_1 e^{-\lambda^2 at}$$

Soluția ecuației (6.41) este de tipul:

$$\Phi = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x$$

Introduse în soluția (6.37) se obține mai întâi:

$$h(x, t, \lambda) = [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] \cdot e^{-\lambda^2 at} \quad (6.42)$$

în care s-au folosit notațiile:

$$C_1 \cdot C_2 = C(\lambda)$$

$$C_1 \cdot C_3 = D(\lambda)$$

Soluția  $h(x, t)$  se obține prin integrarea relației (6.42) în raport cu  $\lambda$ :

$$h(x, t) = \int_0^{\infty} h(x, t, \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] \cdot e^{-\lambda^2 at} d\lambda \quad (6.43)$$

$C(\lambda)$  și  $D(\lambda)$  se determină cu ajutorul condițiilor inițiale:  $\varphi(x) = h(x, 0)$ , funcție presupusă cunoscută. Pentru  $t = 0$ , (6.43) devine:

$$h(x, 0) = \varphi(x) = \int_0^{\infty} [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] \cdot d\lambda \quad (6.44)$$

În ipoteza că  $\varphi(x)$  poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier, adică:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \cos \lambda(x - \epsilon) d\epsilon \quad (6.45)$$

sau prin dezvoltarea cosinusului și reordonarea convenabilă a factorilor:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \cos \lambda \epsilon d\epsilon + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \sin \lambda \epsilon d\epsilon] d\lambda \quad (6.46)$$

Se compară (6.44) cu (6.46) și se obțin expresiile căutate:

$$C(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \cos \lambda \epsilon d\epsilon \quad (6.47)$$

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \sin \lambda \epsilon d\epsilon \quad (6.48)$$

Soluția (6.43) a ecuației (6.36) cu constantele determinate se scrie:

$$h(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \cos \lambda \epsilon d\epsilon + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \sin \lambda \epsilon d\epsilon] e^{-\lambda^2 at} \cdot d\lambda \quad (6.49)$$

a carei formă poate fi restrânsă:

$$h(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda(x - \epsilon) d\epsilon \cdot d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) d\epsilon \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda(x - \epsilon) d\lambda \quad (6.50)$$

Ultima integrală este de tip Poisson (cu  $a \cdot t > 0$ ) și are soluția:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda(x - \epsilon) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4at}} \cdot e^{-\frac{(x-\epsilon)^2}{4at}} \quad (6.51)$$

Forma finală a soluției (6.49) corespunzătoare ecuației (6.36) este deci:

$$h(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\epsilon) \cdot e^{-\frac{(x-\epsilon)^2}{4at}} \cdot d\epsilon \quad (6.52)$$

### 6.3. Curgeri axial simetrice în regim nestaționar fără surse auxiliare

Acest tip de curgere poate fi reprezentat de situația creată prin săparea unui puț într-un acvifer orizontal, omogen și izotrop din care se pompează apă sau prin care se introduce apă în acvifer. De aceea curgerea axial simetrică se mai numește și convergentă în primul

caz și divergentă în al doilea caz. Datorită simetriei acestui caz cel mai convenabil este ca mișcarea să fie studiată în raport cu un SC cilindric cu axa  $oz$  verticală și care coincide cu axa puțului.

### 6.3.1. Curgerea axial simetrică cu suprafață liberă în regim nestaționar fără surse auxiliare

Deoarece curgerea în acest caz este identică în orice plan vertical ce trece prin axa  $oz$  este suficient să fie studiată mișcarea într-un asemenea plan. Dacă se notează coordonatele cilindrice cu  $l, \alpha, z$  mișcarea va putea fi studiată într-un plan  $loz$  unde axa  $ol$  este orizontală.

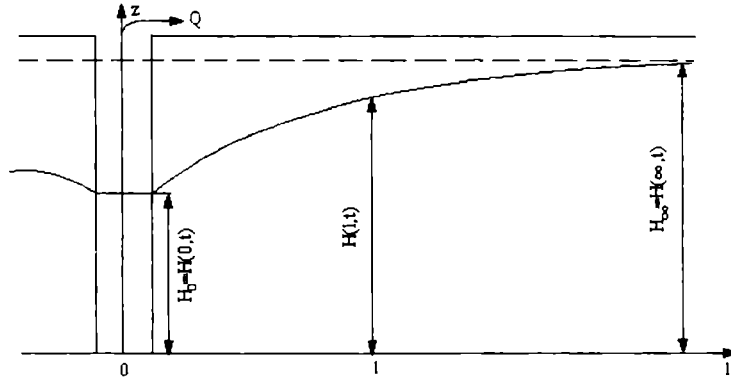


Figura 6.3

Legea difuzivității corespunzătoare regimului nestaționar fără surse auxiliare pentru acvifere cu suprafață liberă (6.6) se reduce pentru planul menționat la:

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial l} \left( l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) = 0 \quad (6.71)$$

Pentru rezolvarea acestei ecuații este necesar să se cunoscă expresia componentei radiale a vitezei efective  $\frac{\partial l}{\partial t}$  funcție de coordonata radială și de timp. Componenta radială a vitezei de filtrare la o distanță  $l$  de axa puțului este dată de raportul dintre debitul de pompare și aria laterală a cilindrului coaxial cu puțul, de rază  $l$  și înălțime  $H$ . S-a presupus că puțul a fost forat până la patul impermeabil. Se poate scrie în acest caz:

$$m_e \frac{dl}{dt} = -\frac{Q}{2\pi l H} \quad (6.72)$$

sau:

$$2l \frac{dl}{dt} = \frac{dl^2}{dt} = -\frac{Q}{\pi m_e H} \quad (6.73)$$

din care rezultă:

$$dl^2 = -\frac{Q}{\pi m_e H} dt \quad (6.74)$$

Integrată pentru  $l$  de la  $l$  la 0 și pentru  $t$  de la 0 la  $t$  se obține:

$$l^2 = \frac{Q}{\pi m_e H} t \quad \text{sau} \quad -\frac{l^2}{t} = -\frac{Q}{\pi m_e H} \quad (6.75)$$

Dacă se compară (6.75) cu (6.73) se obține expresia căutată pentru componenta radială a vitezei efective:

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{l}{2t} \quad (6.76)$$

Cu ajutorul acestei relații, primul termen al legii difuzivității (6.71) poate fi scris:

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{m_e l}{\mathcal{K} t} \frac{\partial H}{\partial l} = -\frac{m_e}{2\mathcal{K} t} \frac{1}{H} \left( l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) \quad (6.77)$$

iar legea difuzivității devine:

$$\frac{m_e}{2\mathcal{K} t} \frac{l}{H} \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) + \frac{\partial}{\partial l} \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) = 0 \quad (6.78)$$

sau:

$$\frac{1}{-l \frac{\partial H^2}{\partial l}} \frac{\partial}{\partial l} \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) = -\frac{m_e}{2\mathcal{K} t} \frac{l}{H} \quad (6.79)$$

și mai restrâns:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \ln \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) \right] = -\frac{m_e}{2\mathcal{K} t} \frac{l}{H} \quad (6.80)$$

Pentru integrarea acestei expresii de la  $l = 0$  la  $l$  este necesar să fie precizate condițiile inițiale și condițiile la limită. Astfel:

- din condiția inițială curba piezometrică, adică funcția  $H(l, t)$  are valoarea  $H(l, 0) = H_\infty$
- din condițiile la limită funcția  $H(l, t)$  are valorile:

$$H(0, t) = H_0(t) \quad \text{și} \quad H(\infty, t) = H_\infty$$

și

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) = -\frac{Q}{\pi \mathcal{K}} \quad (6.82)$$

Prin integrarea expresiei (6.80), pentru un anumit moment  $t$ , pentru  $l$  de la zero la  $l$ , interval în care funcția  $-l \frac{\partial H^2}{\partial l}$  variază de la  $-\frac{Q}{\pi \mathcal{K}}$  la  $-l \frac{\partial H^2}{\partial l}$  se obține:

$$\ln \left( -l \frac{\partial H^2}{\partial l} \right) - \ln \left( -\frac{Q}{\pi \mathcal{K}} \right) = -\frac{m_e}{2\mathcal{K} t} \int_0^l \frac{ldl}{H} \quad (6.83)$$

sau:



$$\ln \left( \frac{l \frac{\partial H^2}{\partial l}}{\frac{Q}{\pi \mathcal{K}}} \right) = -\frac{m_e}{4\mathcal{K}t} \int_0^{l^2} \frac{dl^2}{H} \quad (6.84)$$

Dacă se notează:

$$\frac{l^2}{\int_0^{l^2} \frac{dl^2}{H}} = \tilde{H} \quad (6.85)$$

unde  $\tilde{H}$  reprezintă înălțimea medie și:

$$\frac{\mathcal{K} \tilde{H}}{m_e} = a \quad (6.86)$$

în care  $a$  reprezintă coeficientul variației de nivel, atunci din (6.84) se obține:

$$\frac{\partial H^2}{\partial l} = \frac{Q}{\pi \mathcal{K} l} \cdot e^{-\frac{l^2}{4at}} \quad (6.87)$$

Expresia (6.87) reprezintă derivata parțială în raport cu  $l$ , a funcției  $H^2(l, t)$ . Derivata parțială în raport cu  $t$  a aceleiași funcții se obține din (6.87) și (6.76):

$$\frac{\partial H^2}{\partial t} = \frac{\partial H^2}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{Q}{2\pi \mathcal{K} t} \cdot e^{-\frac{l^2}{4at}} \quad (6.88)$$

Cu ajutorul (6.87) și (6.88) se construiește diferențiala totală a funcției  $H^2(l, t)$ :

$$dH^2 = \frac{\partial H^2}{\partial l} dl + \frac{\partial H^2}{\partial t} dt = -\frac{Q}{2\pi \mathcal{K}} \left( \frac{2}{l} dl - \frac{1}{t} dt \right) \quad (6.89)$$

Dacă se introduce variabila:

$$u = \frac{l^2}{4at} \quad (6.90)$$

se obține:

$$dH^2 = \frac{Q}{2\pi \mathcal{K}} \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.91)$$

Integrarea se face de la o oarecare valoarea a lui  $u$ , pentru care  $H^2(u) = H^2$ , până la  $u = \infty$ , pentru care  $H(u) = H(\infty) = H_\infty$  iar  $H^2(u) = H^2(\infty) = H_\infty^2$ . Pentru  $Q$  și  $\mathcal{K}$  presupuse constante se obține din (6.91):

$$H_\infty^2 - H^2 = \frac{Q}{2\pi \mathcal{K}} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.92)$$

Integrala se rezolvă prin dezvoltarea în serie a funcțiilor exponențiale și se obține:

$$\begin{aligned}
 H_{\infty}^2 - H^2 &= \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \int_u^{\infty} \frac{1}{u} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n!} \right) du = \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \left[ \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right]_u^{\infty} = \\
 &= \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \left[ -0,5772 - \ln u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right] \quad (6.93)
 \end{aligned}$$

în care  $-0,5772$  reprezintă valoarea expresiei  $\left[ \ln u + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right]$  pentru  $n \rightarrow \infty$ , valoarea cunoscută și sub denumirea de "constanta lui Euler".

Relația (6.93) poate fi pusă și sub o altă formă dacă se folosește denivelarea  $\nu = H_{\infty} - H$ .

$$\nu(2H_{\infty} - \nu) = \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \left[ -0,5772 - \ln u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right] \quad (6.94)$$

Pentru  $\nu \ll H_{\infty}$  se poate aproxima  $2H_{\infty} - \nu \sim 2H_{\infty}$ , iar (6.94) devine:

$$\nu = \frac{Q}{4\pi\mathcal{K}H_{\infty}} \left[ -0,5772 - \ln u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right] \quad (6.95)$$

Pentru valori foarte mici ale lui  $u$  suma  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!}$  devine neglijabilă în raport cu  $\ln u$  și constanta lui Euler iar soluția (6.94) devine

$$\begin{aligned}
 \nu(2H_{\infty} - \nu) &= \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} [-0,5772 - \ln u] = \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \left[ -\ln 1,781 - \ln \frac{l^2}{4at} \right] = \\
 &= -\frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \ln \frac{1,781l^2}{4at} \sim \frac{Q}{2\pi\mathcal{K}} \ln \frac{2,25at}{l^2} \quad (6.96)
 \end{aligned}$$

din care rezultă expresia debitului:

$$Q = \frac{\pi\mathcal{K}\nu(2H_{\infty} - \nu)}{\frac{1}{2} \ln \frac{2,25at}{l^2}} = \frac{\pi\mathcal{K}\nu(2H_{\infty} - \nu)}{\ln \frac{1,5\sqrt{at}}{l}} \quad (6.97)$$

### 6.3.2. Curgerea axial simetrică sub presiune în regim nestaționat fără surse auxiliare

Legea difuzivității pentru curgerea nestaționară fără surse auxiliare, într-un acvifer sub presiune, omogen și izotrop, cu grosime uniformă și orizontal a fost dedusă sub forma (6.9), adică:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - a \cdot \operatorname{divgrad} h = 0$$

În cazul practicării unui puț vertical până la patul impermeabil al acviferului curgerea prezintă o simetrie axială. Prin scrierea legii (6.9) în coordonate cilindrice ea se reduce la forma:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{a}{l} \frac{\partial}{\partial l} \left( l \frac{\partial h}{\partial l} \right) = 0 \quad (6.98)$$

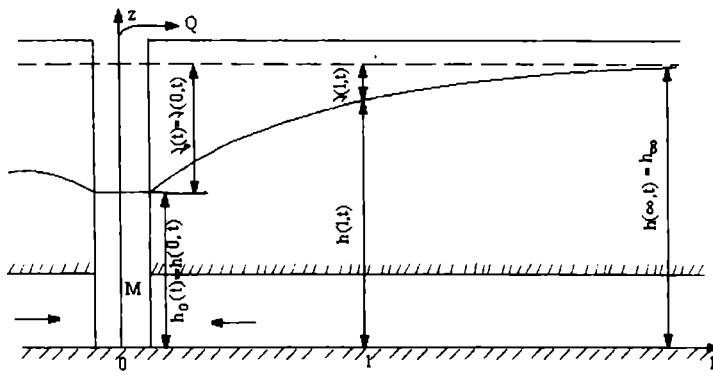


Figura 6.4

Ecuția obținută fiind asemănătoare cu (6.71) modul de rezolvare este același. Condiția inițială a funcției  $h = h(l, t)$  este  $h(l, 0) = h_\infty$  iar condițiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} h(0, t) &= h_0(t) \\ h(\infty, t) &= h_\infty \\ \lim_{l \rightarrow 0} \left( -l \frac{\partial h}{\partial l} \right) &= -\frac{Q}{2\pi T} \end{aligned}$$

unde  $T$  este transmisivitatea.

Se obține:

$$h_\infty - h = \frac{Q}{4\pi T} \int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (6.99)$$

sau prin rezolvarea integralei:

$$h_\infty - h = \frac{Q}{4\pi T} \left[ -0,5772 - \ln u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-u)^n}{n \cdot n!} \right] \quad (6.100)$$

Dacă se folosește denivelarea  $\nu = h_\infty - h$  și se fac aceleași aproximări ca în cazul precedent se obține:

$$\nu \sim \frac{Q}{4\pi T} \ln \frac{2,25at}{l^2} \quad (6.101)$$

iar pentru debit:

$$Q = \frac{2\pi T \nu}{\frac{1}{2} \ln \frac{2,25at}{l^2}} = \frac{2\pi K M \nu}{\ln \frac{1,5\sqrt{at}}{l}} \quad (6.102)$$

CURGEREA NESTAȚIONARA CU SURSE AUXILIARE

7.1. Aspecte generale

În paragraful 2.3.5. s-a arătat că legea difuzivității pentru această curgere cuprinde toți termenii

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) + \gamma \mathcal{K} \vec{v} \operatorname{grad} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (7.1)$$

sau cu membrul doi restrâns:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (7.2)$$

Membrul doi al acestei ecuații se mai poate pune și sub altă formă dacă se consideră, pentru ecuația exprimată de legea difuzivității, o soluție de forma:

$$h = h^* + \delta h \quad (7.3)$$

în care  $h^*$  este o soluție ce satisface doar primul membru, adică:

$$S_e \frac{\partial h^*}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}(H \operatorname{grad} h^*) = 0 \quad (7.4)$$

Scăzând din (7.2) pe (7.4) se obține, pentru legea difuzivității corespunzătoare curgerii nestaționare cu surse auxiliare forma:

$$S_e \frac{\partial (h - h^*)}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad}(h - h^*)] = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (7.5)$$

sau folosind (7.3):

$$S_e \frac{\partial (\delta h)}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[H \operatorname{grad}(\delta h)] = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (7.6)$$

O altă formă a legii difuzivității hidraulice pentru această curgere se obține modificând membrul 1 al relației (7.2). Egalat cu zero se reduce la legea difuzivității pentru curgerea nestaționară fără surse auxiliare, lege pentru care în paragraful 6.1. s-a dezvoltat și forma (6.4), adică:

$$\frac{\partial (m_e H)}{\partial t} + \mathcal{K} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\mathcal{K}} \right) = 0$$

în ipoteza că  $\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} = 0$ . Deci în aceeași ipoteză, legea difuzivității pentru curgerea nestaționară cu surse auxiliare (7.2) se mai poate scrie:

$$\frac{\partial (m_e H)}{\partial t} + \mathcal{K} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{q}}{\mathcal{K}} \right) = m_e \gamma \mathcal{K} \frac{d}{dt} \left( \frac{H}{\gamma \mathcal{K}} \right) \quad (7.7)$$

Pentru curgerea nestaționară cu surse auxiliare și cu suprafață liberă se obține o formă particulară a legii difuzivității (7.2) dacă se ține cont de:

- relația cotei piezometrice:  $h = z_0 + H$ ;
- relația dintre coeficienții de variație a înmagazinării și porozitatea efectivă:

$$S_e = S_{e_0} = m_e = \text{const.}$$

- constanța în timp a cotei patului impermeabil:  $\frac{\partial z_0}{\partial t} = 0$ ;
- conductibilitatea hidraulică constantă ( $\mathcal{K} = \text{const.}$ ) și în spațiu și în timp;
- semnificația fizică a membrului doi și în acest caz este tot o viteză sau debit pe unitatea de suprafață, numai că în acest tip de curgere nestaționară și cu surse auxiliare, funcția  $w$  cu care se va înlocui membrul doi va fi și o funcție de punct și de timp, adică  $w = w(\vec{r}, t)$ .

Debitul specific  $w$  mai este denumit modul de infiltrație sau infiltrație eficace, când  $w > 0$  și modul de exfiltrație sau exfiltrație eficace atunci când  $w < 0$ .

Cu aceste precizări, legea difuzivității (7.2) se poate scrie:

$$m_e \frac{\partial H}{\partial t} - \mathcal{K} \text{div} [H \text{grad}(z_0 + H)] = w \quad (7.8)$$

Dacă se mai presupune că și patul impermeabil este orizontal, adică  $\text{grad}z_0 = 0$ , relația (7.8) se reduce la ecuația lui Boussinesq:

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\mathcal{K}}{2m_e} \text{div grad}(H^2) = \frac{w}{m_e} \quad (7.9)$$

sau

$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \text{div grad}(H^2) = \frac{2w}{\mathcal{K}} \quad (7.10)$$

Pentru curgerea sub presiune în regim nestaționar și cu surse auxiliare pot fi evidențiate mai multe situații, în funcție de comportamentul în timp al acviferului subordonat. În paragraful 5.1 a fost prezentat contactul dintre un acvifer principal și unul subordonat prin intermediul unui strat intermediar semipermeabil de grosime constantă  $M'$  și conductibilitate hidraulică  $\mathcal{K}'$ .

În cazul unui acvifer subordonat care își menține cota piezometrică inițială  $h_\infty$  a acviferului principal, membrul doi al legii difuzivității (7.2) se pune sub forma (5.14) cu ajutorul legii lui Darcy. Astfel legea difuzivității (7.2) se scrie pentru curgerea sub presiune menționată astfel:

$$S_e \frac{\partial h}{\partial t} - \mathcal{K} \text{div}(M \text{grad}h) = -\mathcal{K}' \frac{h - h_\infty}{M'} \quad (7.11)$$

Deoarece  $h_\infty = \text{const.}$  se poate scrie că:

$$S_e \frac{\partial h_\infty}{\partial t} - \mathcal{K} \text{div}(M \text{grad}h_\infty) = 0 \quad (7.12)$$

Scăzând (7.11) din (7.12) se obține:

$$S_e \frac{\partial(h_\infty - h)}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[M \operatorname{grad}(h_\infty - h)] = -\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{M}'}(h_\infty - h) \quad (7.13)$$

iar dacă se notează denivelarea

$$\nu = h_\infty - h \quad (7.13')$$

$$S_e \frac{\partial \nu}{\partial t} - \mathcal{K} \operatorname{div}[M \operatorname{grad} \nu] = -\frac{\mathcal{K}'}{\mathcal{M}'} \nu \quad (7.14)$$

Într-un acvifer cu  $M = \text{const.}$  și reluând notațiile din paragrafele 5.1 și 6.1 pentru transmisivitatea ( $\mathcal{T} = \mathcal{K}M$ ), pentru coeficientul de difuzivitate hidraulică ( $a = \frac{\mathcal{T}}{S_e}$ ) și pentru factorul de drenanță ( $B = \sqrt{\frac{\mathcal{T}M'}{\mathcal{K}'}}$ ). legea difuzivității (7.14) se scrie:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \nu}{\partial t} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \nu = -\frac{1}{B^2} \nu \quad (7.15)$$

## 7.2. Curgerea vertical-plană nestaționară și cu surse auxiliare

### 7.2.1. Curgerea vertical-plană cu suprafață liberă

În această categorie pot fi considerate zonele de interfluvii sau orice alte situații în care încărcarea și descărcarea acviferelor se face de-a lungul unor direcții rectilinii paralele și în care atât alimentarea principală cât și sursele auxiliare (schimbul de apă prin suprafața liberă) se fac în regim nestaționar.

În ipoteza unui acvifer omogen și izotrop cu pat impermeabil orizontal, legea difuzivității (7.10) devine:

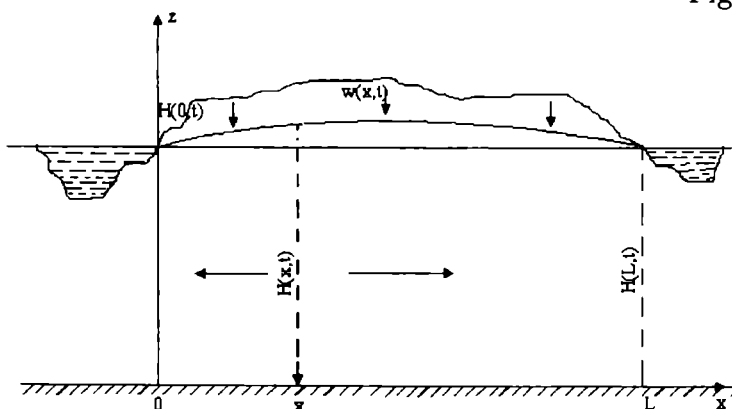
$$\frac{2m_e}{\mathcal{K}} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = \frac{2w(x,t)}{\mathcal{K}} \quad (7.16)$$

în care s-a luat axa  $Ox$  orizontală și de-a lungul curgerii, iar debitul de apă schimbată prin unitatea de suprafață liberă a acviferului este de asemenea o funcție de punct și de timp. Relația (7.16) mai poate fi pusă și sub forma:

$$\frac{m_e}{\mathcal{K}H} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} = \frac{2w(x,t)}{\mathcal{K}} \quad (7.17)$$

Particularizând și mai mult acviferul mărginit de două frontiere rectilinii și paralele, ca fiind de exemplu un interfluviu alimentat și de precipitații (fig 7.1); se pot preciza în plus și alte aspecte .

Figura 7.1



Conform alegerii SC-ului, coordonatele frontierelor sunt  $x = 0$  și  $x = L$ . La momentul inițial  $t = 0$  când și  $w$  este încă nul se consideră înălțimea suprafeței liberă  $\tilde{H}$  ca reprezentând  $\tilde{H} \simeq H(0, t) \simeq H(L, t) = H(x, 0)$ . Până la momentul inițial în absența sursei auxiliare  $\tilde{H}$  satisface legea difuzivității de forma:

$$\frac{m_e}{\mathcal{K}\tilde{H}} \frac{\partial \tilde{H}^2}{\partial t} - \frac{\partial^2 \tilde{H}^2}{\partial x^2} = 0 \quad (7.18)$$

Dacă se scade (7.18) din (7.17) se obține:

$$\frac{m_e}{\mathcal{K}\tilde{H}} \left[ \frac{\tilde{H}}{H} \frac{\partial H^2}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{H}^2}{\partial t} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H^2 - \tilde{H}^2) = \frac{2w(x, t)}{\mathcal{K}} \quad (7.19)$$

În cazul  $(\tilde{H} - H) \ll H$  sau  $\frac{\tilde{H}-H}{H} \approx 0$  sau  $\frac{\tilde{H}}{H} \approx 1$  relația (7.19) poate fi transformată pornind de la:

$$\frac{m_e}{\mathcal{K}\tilde{H}} \left[ \left( \frac{\tilde{H}}{H} - 1 \right) \frac{\partial H^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (H^2 - \tilde{H}^2) \right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H^2 - \tilde{H}^2) = \frac{2w(x, t)}{\mathcal{K}} \quad (7.20)$$

și se obține:

$$\frac{m_e}{\mathcal{K}\tilde{H}} \frac{\partial}{\partial t} (H^2 - \tilde{H}^2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H^2 - \tilde{H}^2) = \frac{2w(x, t)}{\mathcal{K}} \quad (7.21)$$

în acest caz condiția inițială devine:

$$H^2(x, 0) - \tilde{H}^2(x, 0) \sim 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq L \quad (7.22)$$

iar condițiile limită:

$$\begin{aligned} H^2(0, t) - \tilde{H}^2(0, t) &= 0 \\ H^2(L, t) - \tilde{H}^2(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

Dacă se face schimbarea de variabilă

$$\frac{\mathcal{K}\tilde{H}}{m_e} t = at \quad (7.24)$$

relația (7.21) devine:

$$\frac{\partial}{\partial(at)} (H^2 - \tilde{H}^2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (H^2 - \tilde{H}^2) = \frac{2w(x, at)}{\mathcal{K}} \quad (7.25)$$

în care  $a$  este considerat constant.

Întrucât funcția  $f(x, at) = H^2 - \tilde{H}^2$ , derivatele sale de ordinul 1 și 2 și funcția din membrul doi al relației (7.25) satisfac condițiile impuse funcțiilor "originale" în transformarea Laplace în raport cu variabila  $(at)$ , aplicând această transformare se obține:

$$\mathcal{L}(H^2 - \tilde{H}^2) = \int_0^{\infty} (H^2 - \tilde{H}^2) e^{-p(at)} d(at) = S(x, p) \quad (7.26)$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial(H^2 - \tilde{H}^2)}{\partial(at)} = pS(x, p) - (H^2 - \tilde{H}^2) \quad (7.26')$$

$$\mathcal{L} \frac{\partial^2(H^2 - \tilde{H}^2)}{\partial x^2} = \int_0^{\infty} \frac{\partial^2(H^2 - \tilde{H}^2)}{\partial x^2} e^{-p(at)} d(at) = \frac{d^2 S}{dx^2} \quad (7.26'')$$

$$\mathcal{L}w(x, at) = \int_0^{\infty} w(x, at) e^{-p(at)} d(at) = W(x, p) \quad (7.26''')$$

În aceste condiții ecuația (7.25) se transformă în:

$$pS - \frac{d^2 S}{dx^2} = \frac{2}{\mathcal{K}} W(x, p) \quad (7.27)$$

o ecuație operațională a cărei soluție este

$$S(x, p) = \int_0^L G(x, \sigma, p) \left[ \frac{2}{\mathcal{K}} W(x, p) \right] d\sigma \quad (7.28)$$

în care funcția Green este de forma:

$$G(x, \sigma, p) = \frac{sh[(L - \sigma)\sqrt{p}] \cdot sh(x\sqrt{p})}{\sqrt{p} \cdot sh(L\sqrt{p})} \text{ pentru } 0 \leq x \leq \sigma \leq L \quad (7.29)$$

sau:

$$G(x, \sigma, p) = \frac{sh[(L - x)\sqrt{p}] \cdot sh(\sigma\sqrt{p})}{\sqrt{p} \cdot sh(L\sqrt{p})} \text{ pentru } 0 \leq \sigma \leq x \leq L \quad (7.30)$$

Funcția "imagine"  $G(x, \sigma, p)$  de tip (7.29) respectiv (7.30) îi corespunde funcția "original" de tip:

$$\begin{aligned} g(x, \sigma, at) &= \frac{1}{2L} \left[ \varphi \left( \frac{x - \sigma}{2L}, \frac{at}{L^2} \right) - \varphi \left( \frac{x + \sigma}{2L}, \frac{at}{L^2} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{at}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \sigma}{L} \end{aligned} \quad (7.31)$$

în care



$$\varphi\left(\frac{x \pm \sigma}{2L}, \frac{at}{L^2}\right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{at}{L^2}} \cos 2\pi n \frac{x \pm \sigma}{2L} \quad (7.32)$$

Funcției  $S(x, p)$ , exprimată prin (7.28), îi corespunde transformarea inversă

$$H^2 - \tilde{H}^2 = \mathcal{L}^{-1} S(x, p) = \int_0^L d\sigma \int_0^{at} g[x, \sigma, a(t - \tau)] \frac{2}{\mathcal{K}} w(\sigma, a\tau) d(at) \quad (7.33)$$

Se obține astfel soluția pentru ecuația curbei de nivel:

$$H^2 = \tilde{H}^2 + \frac{4}{\mathcal{K}L} \int_0^L d\sigma \int_0^{at} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{a(t-\tau)}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \sigma}{L} \right] w(\sigma, at) d(at) \quad (7.34)$$

### 7.2.2. Curgerea vertical-plană sub presiune

În ipoteza unui acvifer sub presiune, omogen, izotrop, cu grosime uniformă,  $M$ , orizontal, cu conductibilitatea hidraulică  $\mathcal{K}$  și coeficientul de variație a înmagazinării  $S_{e1}$ , considerat acvifer principal (figura 7.2), se află separat, prin culcușul său semipermeabil de grosime constantă  $M'$ , conductibilitate hidraulică  $\mathcal{K}'$  și coeficienți de variație a înmagazinării  $S'_{e1}$ , de un alt acvifer subordonat hidraulic, legea difuzivității (7.15) se scrie sub forma:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \nu}{\partial t} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} = -\frac{1}{B^2} \nu \quad (7.35)$$

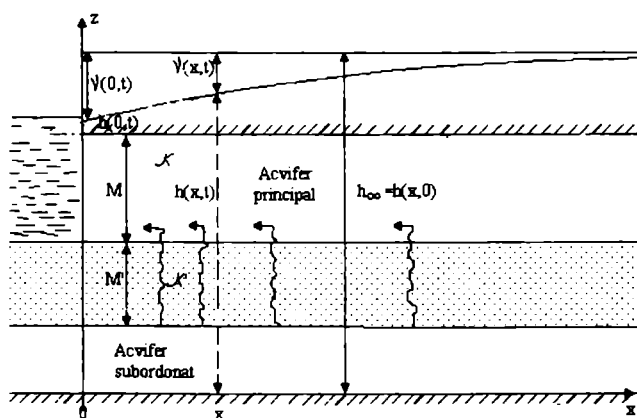


Figura 7.2

Axa  $Ox$ , orizontală, este perpendiculară pe direcția drenului, iar  $B$ , factorul de drenanță este presupus constant.

Pentru condiția inițială  $\nu(x, 0) = f(x)$  ecuația (7.35) se poate rezolva prin metoda separării variabilelor căutând o soluție de forma:

$$\nu(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (7.36)$$

Înlocuită în (7.35) se obține:

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{B^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (7.37)$$

deoarece valoarea comună  $(-\lambda^2)$  este cerută de soluția mărginită pentru  $t > 0$ , soluție ce trebuie căutată. Astfel ecuațiile (7.37) se rezolvă separat. Pentru ecuația

$$\frac{1}{aT} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{B^2} = -\lambda^2 \quad (7.38)$$

soluția este:

$$T = C_1 \cdot e^{-\left(\frac{1}{B^2} + \lambda^2\right)at} \quad (7.39)$$

iar pentru ecuația:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad (7.40)$$

soluția este:

$$X = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x \quad (7.41)$$

Funcția  $\nu(x, t, \lambda) = X(x, \lambda) \cdot T(t, \lambda)$  va fi

$$\begin{aligned} \nu(x, t, \lambda) &= [C_1 C_2 \cos \lambda x + C_1 C_3 \sin \lambda x] \cdot e^{-\left(\frac{1}{B^2} + \lambda^2\right)at} = \\ &= [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] \cdot e^{-\left(\frac{1}{B^2} + \lambda^2\right)at} \end{aligned} \quad (7.42)$$

iar soluția ecuației (7.36) se obține din:

$$\nu(x, t) = \int_0^{\infty} \nu(x, t, \lambda) d\lambda \quad (7.43)$$

sau

$$\nu(x, t) = \int_0^{\infty} [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\left(\frac{1}{B^2} + \lambda^2\right)at} d\lambda \quad (7.44)$$

ai cărei coeficienți  $C(\lambda)$  și  $D(\lambda)$  se determină din condiția inițială:

$$\nu(x, 0) = \int_0^{\infty} [C(\lambda) \cos \lambda x + D(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x) \quad (7.45)$$

În cazul în care condiția inițială  $\nu(x, 0) = f(x)$  se poate exprima cu ajutorul integralei Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \cos \lambda(x - \sigma) d\sigma = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \cos \lambda \sigma d\sigma + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \sin \lambda \sigma d\sigma \right\} d\lambda
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

atunci prin compararea relațiilor (7.45) și (7.46) se obțin expresiile celor doi coeficienți:

$$\begin{aligned}
 C(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \cos \lambda \sigma d\sigma \\
 D(\lambda) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \sin \lambda \sigma d\sigma
 \end{aligned} \tag{7.47}$$

Soluția generală (7.44) a ecuației (7.35) se scrie:

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \cos \lambda \sigma d\sigma + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \sin \lambda \sigma d\sigma \right\} e^{-(\frac{1}{B^2} + \lambda^2)at} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) d\sigma \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{B^2} + \lambda^2)at} \cos \lambda(x - \sigma) d\lambda
 \end{aligned} \tag{7.48}$$

Exponențiala din ultima integrală poate fi separată în doi factori, iar unul dintre ei fiind independent de  $\lambda$  poate fi scos de sub a doua integrală

$$v(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-\frac{at}{B^2}} d\sigma \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 at} \cos \lambda(x - \sigma) d\lambda \tag{7.49}$$

Ultima integrală este de tip Poisson putând fi înlocuită cu  $\sqrt{\frac{\pi}{4at}} \cdot e^{-\frac{(x-\sigma)^2}{4at}}$ , iar ultima formă a soluției generale devine:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-\frac{at}{B^2} - \frac{(x-\sigma)^2}{4at}} d\sigma \tag{7.50}$$

Ecuația curbei piezometrice se obține prin înlocuirea lui (7.50) în (7.13'):

$$h(x, t) = h_{\infty} - \frac{1}{2\sqrt{\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) e^{-\frac{at}{B^2} - \frac{(x-\sigma)^2}{4at}} d\sigma \tag{7.51}$$

CAPITOLUL 8

BAZELE STATISTICO- MATEMATICE ALE HIDROLOGIEI

8.1. Calculul de probabilități. Asigurări hidrologice experimentale.

În hidrologie nu se pot soluționa toate problemele folosind doar metodologia deterministă, adică găsind relațiile între cauză și efect. În schimb se observă că o serie de factori hidrologici au caracterul variabilelor aleatoare și în acest caz se aplică calculul de probabilități.

8.1.1. Asigurările factorului unic

Un factor hidrologic X, aleatoriu, e măsurat la fiecare interval de timp Δt în care se produce. Se obține un șir statistic cu n elemente: X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, ..., X<sub>m-1</sub>, X<sub>m</sub>, ..., X<sub>n</sub>; fiecare element apărând o singură dată. Frecvența relativă a fiecărui element în acest caz, este:

$f = \frac{1}{n}$ ;  $f < 1$ . Aceasta este echivalentă cu probabilitatea empirică sau statistică.

\* Probabilitatea empirică sau statistică:

Evenimentul X se observă în medie de n<sub>k</sub> ori, dintr-un număr total de n operații individuale independente. Probabilitatea statistică este:

$$p(X) = \frac{n_k}{n} \tag{8.1}$$

Probabilitatea elementară se definește astfel: fiecare element are aceeași probabilitate de a se realiza:  $p(X) = \frac{1}{n} = f$  (unde f a fost definit anterior).

\* Probabilitatea matematică reprezintă raportul dintre numărul cazurilor favorabile producerii evenimentului X (m) și numărul cazurilor posibile (n), atunci când toate cazurile au posibilități egale de reproducere:  $p(X) = \frac{m}{n}$ .

Relația între probabilitatea statistică și probabilitatea matematică e echivalentă cu relația între o funcție experimentală și una teoretică. Probabilitatea de a se realiza indiferent care din elementele șirului este 1 sau 100%.

Se ordonează șirul după valoarea elementelor ( în ordine crescătoare) și se înscrie în dreptul fiecărui element probabilitatea sa de apariție- f (probabilitate elementară pentru cazul enunțat mai sus).

$$X : X_1 < X_2 < X_3 < \dots < X_m < \dots < X_n$$

$$p : \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n} \quad \dots \quad \frac{1}{n}$$

Dacă elementele sunt independente (matematic- incompatibile) se pot defini două categorii de probabilități.

1. Probabilitatea totală de egalare sau de depășire, a elementului X<sub>m</sub>; în hidrologie se numește *asigurare empirică de depășire*: P<sub>m</sub>.

$$P_m = \sum_{k=m}^n p_k = \frac{n - m}{n} \tag{8.2}$$

sau procentual:

$$P_m \% = \sum_{k=m}^n p_k \% = 100 \frac{n-m}{n} \quad (8.3)$$

2. Probabilitatea totală de egalare sau de nedepășire a elementului  $X_m$ , în hidrologie se numește *asigurare empirică de nedepășire*:  $P'_m$ :

$$P'_m = \sum_{k=1}^m p_k = \frac{m}{n} \quad (8.4)$$

sau procentual

$$P'_m \% = \sum_{k=1}^m p_k \% = 100 \frac{m}{n} \quad (8.5)$$

Se observă că între cele două tipuri de probabilități există următoarea relație:

$$P_m + P'_m = 1 \text{ sau } P_m \% + P'_m \% = 100\% \quad (8.6)$$

Weibull introduce alte două relații ale acestor probabilități pentru a micșora ponderea lui  $n$  (numărul de elemente) în expresiile care intervin.

$$P_m = 1 - \frac{m}{n+1} \quad (8.7)$$

$$P'_m = \frac{m}{n+1} \quad (8.8)$$

Asigurarea de depășire a unui element cuprins în intervalul  $(X_m - X_{m+i})$  este :

$$P = \sum_{k=m}^{m+i} p_k = \frac{m+i}{n} - \frac{m}{n} = \frac{i}{n} \quad (8.9)$$

sau (după Weibull)

$$P = \frac{i}{n+1} \text{ unde } i = 1, 2, 3, \dots, n-m \quad (8.10)$$

Notiunea de asigurare de depășire poate fi înlocuită cu notiunea de *perioadă de repetare*, în condițiile în care fiecare element al șirului se realizează o singură dată în intervalul de timp  $\Delta t$ , menționat la începutul paragrafului.

Se observă că între cele două asigurări de depășire, cea procentuală și cea neprocentuală, există următoarea relație:

$$P_m = \frac{P_m \%}{100} \quad (8.11)$$

Relația se interpretează astfel: din 100 de elemente realizate, elementul  $X_m$  a fost depășit de  $P_m\%$  ori.

Relația de mai sus poate fi scrisă și astfel:

$$P_m = \frac{1}{100/P_m\%} \quad (8.12)$$

ceea ce înseamnă că din  $100/P_m\%$  elemente,  $X_m$  a fost depășit o singură dată, sau din  $100/P_m\%$  intervale de timp,  $X_m$  a fost depășit sau egalat o singură dată (numărul de elemente este egal cu numărul intervalelor de timp  $\Delta t$ ).

În acest context se poate defini perioada de repetare a asigurărilor de depășire  $T_m$ , care reprezintă numărul de intervale de timp la care elementul e egalat sau depășit o singură dată.

$$T_m = \frac{100}{P_m\%} \quad (8.13)$$

În hidrologie  $T_m$  e exprimat în luni, trimestre, ani. Această noțiune (perioada de repetare) trebuie înțeleasă ca o mărime medie; astfel într-o suită de perioade e posibil să nu apară valoarea lui  $X_m$ , iar în altele să apară de mai multe ori. Analog se poate stabili o relație și pentru perioada de repetare a asigurărilor de nedepășire:

$$T'_m = \frac{100}{P'_m\%} \quad (8.14)$$

Calculul de probabilități poate oferi posibilitatea să se calculeze probabilitatea  $p_0$  ca valoarea lui  $X_m$  să fie depășită cel puțin o dată la începutul a  $\tau$  intervale de timp din totalul celor  $T_m$  intervale  $\Delta t$  (deci  $\tau < T_m$ ).

$$p_0 = 1 - \left(1 - \frac{1}{T_m}\right)^\tau \quad (8.15)$$

### 8.1.2. Asigurări complexe

Unele procese hidrologice au în structura lor mai mulți factori aleatori independenți, sau cu o slabă legătură între ei. În această situație se definesc asigurările complexe.

Se studiază cazul cel mai frecvent în hidrologie când intervin doi factori cu același număr de elemente.

Se consideră două șiruri statistice obținute în urma măsurărilor efectuate asupra unor factori hidrologici:

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_m, \dots, X_n$

$Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m, \dots, Y_n$

Pentru fiecare șir se poate construi graficul probabilităților elementare : pe abscisă probabilitatea empirică sau frecvența relativă  $p_x, p_y$  și pe ordonată valoarea elementelor șirului;  $p_x, p_y$  reprezintă raportul dintre numărul de elemente cuprinse în intervalul  $\Delta X$ , respectiv  $\Delta Y$  și numărul total de elemente - pot fi denumite frecvențe medii pe intervalele menționate. ( $\Delta X$  și  $\Delta Y$  sunt intervale alese convenabil); vezi figura 8.1.

Întrucât șirurile sunt independente se poate stabili următoarea relație între probabilitățile empirice ale elementelor  $X_m$  și  $Y_j$ :

$$p_{X_m, Y_j} = p_{X_m} \cdot p_{Y_j} \quad (8.16)$$

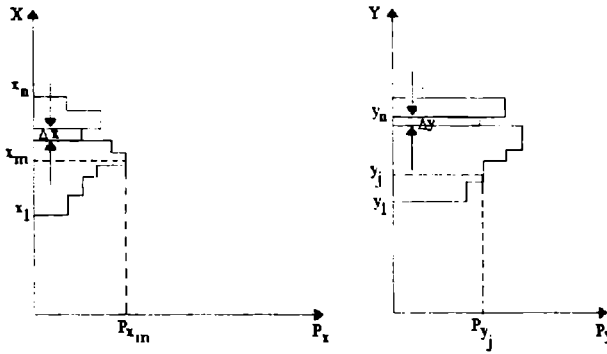


Figura 8.1

Relația de mai sus exprimă faptul că probabilitatea să se realizeze un element al șirului  $X$  ( $X_m$ ) când se cunoaște elementul  $Y_j$  este egală cu produsul probabilităților de realizare a celor două elemente.

$p_{X_m, Y_j}$  se numește probabilitate elementară complexă care se poate reprezenta în mod analog pe un grafic.

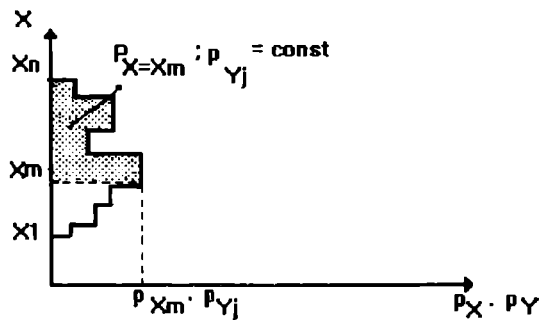


Figura 8.2

Asigurarea complexă de depășire în cazul unor șiruri crescătoare, se definește astfel:

$$P = \sum_{k=m}^n \sum_{i=j}^n p_{X_m} p_{Y_j} \quad (8.17)$$

Asigurarea condiționată de depășire a factorului  $X_m$  în funcție de un element dat  $Y = Y_j$  care are probabilitatea elementară  $p_{Y_j}$  (figura 8.2) e dată de relația:

$$P_{X=X_m} = p_{Y_j} \sum_{k=m}^n p_{X_m} = p_{Y_j} \left(1 - \frac{m}{n+1}\right) \quad (8.18)$$

Exemplu: asigurarea de depășire a elementului  $X_m = 5.5$ , care face parte dintr-un șir de 20 elemente, cu poziția numărul trei în șir, condiționat de  $Y_j$  cu probabilitatea  $p_{Y_j} = 3/16$  este  $9/56$ .

### 8.1.3. Valoarea medie și dispersia unei distribuții empirice

Dintr-o serie de  $n$  determinări, o variabilă aleatoare  $X$  apare într-o ordine oarecare cu diverse valori:  $X_1$  de  $n_1$  ori,  $X_2$  de  $n_2$  ori, ...,  $X_k$  de  $n_k$  ori.

În acest caz media se definește :

$$\bar{X} = \frac{n_1 X_1 + n_2 X_2 + \dots + n_k X_k}{n} \quad (8.19)$$

sau

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^k X_i \cdot f_i \quad , \text{unde} \quad f_i = \frac{n_i}{n}$$

$i = 1, 2, 3, \dots, k; \quad n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

Dispersia acestei distribuții este dată de relația:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2 \cdot n_i}{n} \quad (8.20)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^k (X_i^2 - 2X_i \bar{X} + \bar{X}^2) \frac{n_i}{n}$$

Caz particular:  $n_i = 1$  ;  $n$  elemente ale șirului:

În acest caz se obțin relațiile următoare pentru media șirului și dispersie:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (8.21)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{2}{n} \bar{X} \sum_{i=1}^n X_i + \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 .$$

Ultima egalitate e obținută prin înlocuirea lui  $\bar{X}$  din relația (8.21).

Expresia dispersiei este:



$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \quad (8.22)$$

*Deviația standard* a unui șir statistic e dată de relația :  $s = \sqrt{\sigma^2}$ , sau:

$$ns^2 = \sum_{i=1}^k n_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (8.23)$$

## 8.2. Extrapolarea asigurărilor empirice

În general șirurile statistice din hidrologie nu depășesc 40 - 50 de elemente. În acest caz se recurge la calculul de probabilitate prin care se poate efectua extrapolarea șirurilor statistice scurte.

Formulele de extrapolare sunt date de anumiți parametri determinați la rândul lor de funcția continuă de probabilitate  $p(X)$ , funcția de asigurare  $F(X)$  al căror suport empiric sunt șirurile statistice obținute din măsurători.

Prin trecerea de la cazul discret la cel continuu rezultă următoarele relații:

$$\int_0^{\infty} p(X) dX = 1 \quad (8.24)$$

$$F(X) = \int p(X) dX \quad (8.25)$$

În cazul șirului ordonat crescător se definește:

1. *asigurarea teoretică de depășire* a elementului  $X_i$ :

$$P = \int_{X_i}^{\infty} p(X) dX \quad (8.26)$$

2. *asigurarea teoretică de nedepășire* a elementului  $X_i$ :

$$P' = 1 - P = \int_0^{X_i} p(X) d(X) \quad (8.27)$$

### 8.2.1. Funcții teoretice de probabilitate

#### a. Funcția Gauss - Laplace

Funcția de probabilitate elementară e dată de relația:

$$p(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\left(\frac{-(X_i - \bar{X})^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (8.28)$$

unde  $X_i$  sunt elementele șirului,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;

$\sigma^2 =$  dispersia șirului de date experimentale  $X_i$ ;

$\sigma =$  deviația standard a șirului statistic  $X_i$ ;

Pentru calculul funcției de asigurare teoretică se face următoarea schimbare de variabilă:

$$u_m = \frac{X_m - \bar{X}}{\sigma\sqrt{2}} \quad (8.29)$$

Pentru acest șir nou format, ținând cont de relațiile (8.21) și (8.22), se găsesc următoarele valori pentru medie și dispersie:

$$\bar{u} = \frac{\sum_{m=1}^n u_m}{n} = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{X_m - \bar{X}}{\sigma\sqrt{2}}}{n} = \frac{\bar{X} - \bar{X}}{\sigma\sqrt{2}} = 0, \quad \text{deci}$$

$$\bar{u} = 0.$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \bar{u}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}, \quad \text{deci}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{2}.$$

Asigurarea de depășire se calculează din relația (8.26) cu ajutorul noii variabile  $u_m$  dată de relația (8.29):

$$P(u_i) = \int_{u_i}^{\infty} p(u) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{u_i}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (8.30)$$

Se cunoaște valoarea integralei :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad (8.31)$$

Ținând cont de relația (8.31) integrala  $\int_{u_i}^{\infty} e^{-u^2} du$  se determină astfel:

$$\int_{u_i}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{u_i} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} - \left( \int_{-\infty}^{-u_i} e^{-u^2} du + \int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du \right) \quad (8.32)$$

Întrucât  $e^{-u^2}$  este funcție pară, avem următoarea proprietate:

$$\int_{-\infty}^{-u_i} e^{-u^2} du = \int_{u_i}^{\infty} e^{-u^2} du \quad (8.33)$$

Folosind această proprietate, relația (8.32) devine:

$$2 \int_{u_i}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi} - \int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du.$$

Această expresie a integralei căutate se înlocuiește în relația (8.30) și se obține pentru asigurarea de depășire expresia:

$$P(u_i) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left( \sqrt{\pi} - \int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du \right) \quad (8.34)$$

Pentru calculul asigurării de nedepășire se folosește relația (8.27):

$$P'(u_i) = 1 - P(u_i) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du \right) \quad (8.35)$$

Pentru calculul valorilor de asigurare corespunzătoare unui anumit element al șirului  $X_i$  se determină valoarea integralei  $\int_{-u_i}^{u_i} e^{-u^2} du$  din tabele, în funcție de elementul  $u_i$ . Elementul  $u_i$  la rândul său depinde de valoarea elementului șirului  $X_i$ , așa cum se vede din relația (8.29).

### b. Funcții logaritmice normale (lognormala Galton)

Funcția de probabilitate este exprimată astfel:

$$p(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma_u} \right)^2} \quad (8.36)$$

unde  $u_i = \log \left( \frac{X_i}{\bar{X}} - a \right)$

și  $a$  e dat de relația  $a = \frac{\min X_i}{\bar{X}}$ .

$p(u_i)$  se observă că este tot o funcție de tip Gauss - Laplace obținută printr-o schimbare de variabilă pentru a o face nesimetrică în  $X$ .

Pentru a se exprima funcțiile de asigurare se face din nou o schimbare de variabilă :  $z_i = \frac{u_i - \bar{u}}{\sigma_u \sqrt{2}}$ . Deci funcțiile de asigurare de depășire și nedepășire sunt:

$$P(z_i) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z_i}^{z_i} e^{-z^2} dz \right) \quad (8.37)$$

$$P'(z_i) = 1 - P(z_i) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z_i}^{z_i} e^{-z^2} dz \right) \quad (8.38)$$

### c. Funcțiile Pearson (Gamma)

Funcția de probabilitate elementară este:

$$p(X) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot X^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta X}; \quad \text{pentru } X > 0 \quad (8.39)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri ce se pot calcula din valorile șirului statistic. În calculul hidrologic acești parametri se înlocuiesc cu:

- coeficientul de variație  $C_v$ :

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^n (K_m - 1)^2}{n - 1}} \quad (8.40)$$

-coeficientul de asimetrie  $C_s$ :

$$C_s = \frac{\sum_{m=1}^n (K_m - 1)^3}{n \cdot C_v^3} \quad (8.41)$$

unde  $K_m = \frac{X_m}{\bar{X}}$  și  $m = 1, 2, 3, \dots, n$ . Valorile funcțiilor  $\Gamma(\alpha)$  se găsesc în tabele.

Funcția teoretică de asigurare de depășire se exprimă prin relația:

$$P(X) = \int_{X_i}^{\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot X^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta X} dX \quad (8.42)$$

#### d. Funcții Gumbel

Aceste funcții sunt generate pe baza "legii limită a valorilor extreme". În acest sens există două categorii de funcții:

- unele aplicate șirurilor statistice cu elemente maxime ale factorului considerat (spre exemplu debite maxime)

- unele aplicate șirurilor statistice cu elemente minime ( exemplu debite minime).

Pentru elemente maxime se definește următoarea funcție de probabilitate:

$$p(u_i) = (e^{-u_i})^{-e^{-u_i}} \quad \text{cu} \quad u_i = \alpha(X_i - X_d) \quad (8.43)$$

$\alpha$  este un parametru funcție de șirul statistic și  $X_d$  este valoarea dominantă a elementelor șirului.

Funcția de asigurare în acest caz este:

$$P(u_i) = \int_{u_i}^{\infty} p(u) du = 1 - e^{-e^{-u_i}} \quad (8.44)$$

#### 8.2.2. Procedee de verificare a asigurărilor teoretice

##### A. Formate de probabilitate

Un criteriu de verificare a uneia sau alteia din funcțiile teoretice de asigurare admise, reprezintă confruntarea asigurărilor calculate cu asigurările empirice determinate din șirul statistic.

Cel mai frecvent se folosește procedeul grafic pentru întocmirea formatelor de probabilitate. Pentru fiecare funcție de asigurare ce urmează a fi verificată în comparație cu

asigurările empirice se construiesc formate de probabilitate. În acest scop se reprezintă punctele  $(P_m, X_m)$  și curba  $F(X)$  într-un sistem de axe : asigurările pe abscisă și valorile elementelor pe ordonată. Pe abscisă se pot scrie asigurările  $P_m$  sau perioadele de repetare  $T$ , sau ambele.

Cu cât un format de probabilitate prezintă curbele mai puțin accentuate (curba se apropie cât mai mult de o dreaptă), cu atât extrapolarea se face mai corect.

Formatul de probabilitate arată ca în figura 8.3:

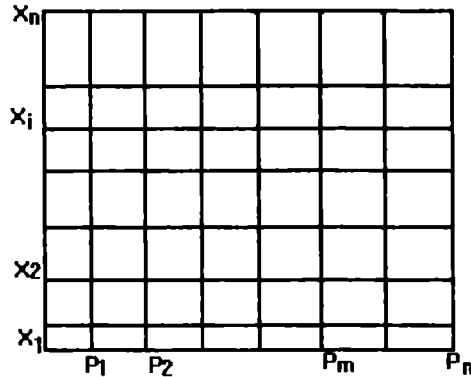


Figura 8.3

Se reprezintă în acest format funcția propusă spre verificare  $(u_i, P(u_i))$ . Dacă punctele empirice  $(P_m, X_m)$  se situează în jurul curbei obținută anterior prin reprezentarea punctelor  $(u_i, P(u_i))$  atunci extrapolarea poate fi considerată exactă.

### B. Criteriul $\chi^2$

Pentru un șir statistic empiric, numeros, cu  $n$  termeni  $(X_1, \dots, X_i, \dots, X_n)$ , se poate face o comparație directă cu funcția de probabilitate teoretică  $p(X)$ , care trebuie verificată.

Se construiește un grafic de frecvențe relative pentru un număr "m" de intervale " $\Delta X$ " (vezi figura 8.1). Pentru un interval oarecare se calculează  $f_i$ , media frecvențelor relative corespunzătoare aceluși interval. Unei astfel de valori  $f_i$  îi corespunde elementul  $X_i$ , determinat empiric. Se introduce valoarea  $X_i$  în formula probabilității teoretice supusă verificării și se obține valoarea  $p(X_i)$  notată cu  $p_i$ . Cu aceste elemente se poate exprima analitic valabilitatea funcției alese prin calcularea expresiei:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(f_i - p_i)^2}{p_i} \quad (8.45)$$

Această valoare determină gradul de încredere asupra utilizării funcției teoretice alese.

#### 8.2.3. Asigurarea teoretică bidimensională

Asigurarea teoretică bidimensională se definește în felul următor:

$$P(X_i, Y_i) = \int_{X_i}^{\infty} \int_{Y_i}^{\infty} p(X, Y) dX dY \quad (8.46)$$

unde  $p(X,Y)$  este funcție de probabilitate bidimensională astfel încât

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} p(X,Y) dX dY = 1 \quad (8.47)$$

$X, Y$  sunt doi factori hidrologici care pot fi compatibili sau incompatibili.

Dacă  $X, Y$  sunt incompatibili atunci funcția de probabilitate bidimensională se poate calcula funcție de  $p(X)$  și  $p(Y)$  - funcțiile de probabilitate individuale.

$$p(X, Y) = \int_{X_1}^{\infty} \int_{Y_1}^{\infty} p(X)p(Y) dX dY \quad (8.48)$$

Funcțiile teoretice de probabilitate  $p(X)$  și  $p(Y)$  se folosesc sub forma funcțiilor Gauss-Laplace sau funcțiile lognormale (vezi paragraful 8.2.1).

Pentru aceeași valoare a asigurării teoretice se obțin o infinitate de perechi de valori  $(X_1, Y_1)$ . Dacă se fixează o valoare  $X_1$  se obține o valoare unică pentru  $Y_1$  și în aceste condiții asigurarea se numește *asigurare condiționată monodimensională*.

### 8.3. Corelații

Corelațiile reprezintă exprimarea analitică sau grafică a legăturilor cantitative între diverși factori (în particular factori hidrologici) chiar dacă nu se referă la cauză și efect în mod strict.

#### 8.3.1. Relația empirică între două mărimi aleatoare

a) Fie o colectivitate statistică  $(X,Y)$  pentru care se face o serie de determinări experimentale și rezultatele obținute se trec într-un astfel de tabel:

$X : X_1, X_2, \dots, X_k$                       Tabel A

$Y : Y_1, Y_2, \dots, Y_k$

Pentru ambii factori avem același număr de determinări:  $k$ .

b) Pentru anumite perechi de factori  $(X,Y)$  se fac determinări în felul următor: pentru o anumită valoare determinată  $X_i$  se fac "m" măsurători asupra lui  $Y$  și se obțin valorile  $(Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{im})$ , respectiv pentru o valoare determinată  $Y_i$  se fac "l" măsurători asupra lui  $X$  și se obțin valorile  $(X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{il})$ . Rezultatele obținute se pot grupa în astfel de tabele:

$X^{(1)} : Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1m} \rightarrow \bar{Y}_{X_1}$

$X^{(2)} : Y_{21}, Y_{22}, \dots, Y_{2m} \rightarrow \bar{Y}_{X_2}$

$\vdots$                        $\vdots$

Tabel B1

$X^{(l)} : Y_{l1}, Y_{l2}, \dots, Y_{lm} \rightarrow \bar{Y}_{X_l}$

unde  $\bar{Y}_X$  reprezintă media șirului de determinări ale lui  $Y$  pentru o valoare constantă  $X_i$

dată de relația  $\bar{Y}_{X_i} = \frac{Y_{i1} + Y_{i2} + \dots + Y_{im}}{m}$ .

$$Y^{(1)} : X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1l} \rightarrow \bar{X}_{Y_1}$$

$$Y^{(2)} : X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2l} \rightarrow \bar{X}_{Y_2}$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$Y^{(m)} : X_{m1}, X_{m2}, \dots, X_{ml} \rightarrow \bar{X}_{Y_m}$$

Tabel B2

unde  $\bar{X}_{Y_i}$  este media șirului de determinări ale lui X pentru o valoare constantă  $Y_i$  și are expresia  $\bar{X}_{Y_i} = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{il}}{l}$ .

Definim în continuare câteva noțiuni legate de corelația dintre două mărimi aleatoare:

Câmp de corelație reprezintă repartiția empirică a variabilelor (X,Y) și se obține prin reprezentarea grafică în sistemul (XOY) a perechilor  $(X_i, Y_i)$  sau  $(\bar{X}_{Y_i}, \bar{Y}_{X_i})$ .

Centru de repartiție este punctul determinat de mediile celor două șiruri statistice :  $M(\bar{X}, \bar{Y})$ .

Din analiza câmpurilor de corelație se disting trei tipuri de relații între cei doi factori:

- a) dependență funcțională: în cazul în care punctele experimentale sunt așezate pe o bandă care formează o curbă determinată;
- b) dependență corelațională: punctele sunt așezate destul de ordonat dar cu o tendință mică ca X să fie dependent de Y;
- c) independență: în cazul unei distribuții haotice a punctelor experimentale  $(X_i, Y_i)$  (vezi figura 8.4).

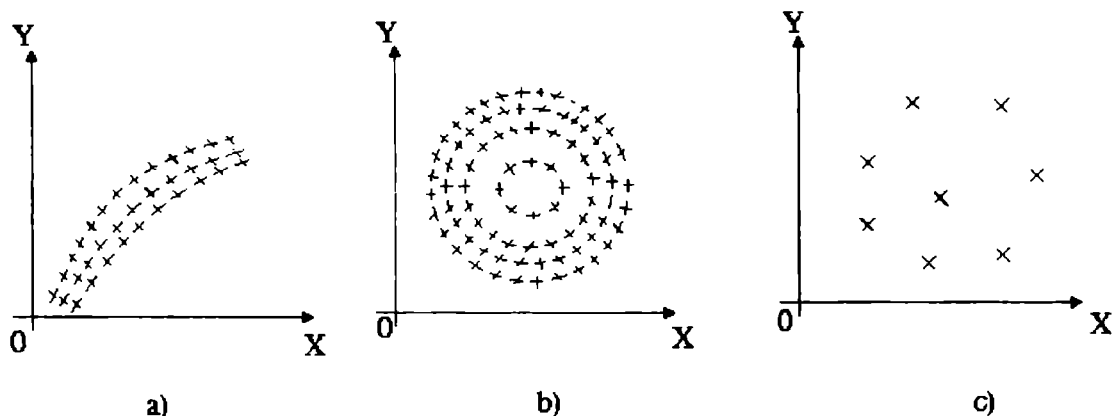


Figura 8.4

### 8.3.2. Corelație liniară. Ecuația dreptei de regresie

Când dependența funcțională ce se stabilește între doi factori X și Y e de tip liniar, atunci se pot determina ecuații liniare între X și  $\bar{Y}_X$  sau Y și  $\bar{X}_Y$ .

$$\bar{Y}_X = \alpha + \beta X \tag{8.49}$$

$$\bar{X}_Y = \gamma + \delta Y \quad (8.50)$$

a) În cazul în care numărul de determinări pentru X coincide cu numărul de determinări pentru Y și acesta este n ( conform tabelului A fiecărui element  $X_i$  îi corespunde un element  $Y_i$  ) atunci ecuația liniară se scrie:

$$a + b \cdot X_k - Y_k = 0 \quad (8.51)$$

Pentru a se determina dependența analitică dintre cele două elemente X și Y trebuie să se determine coeficienții a și b.

Se face sumă peste toți factorii  $X_i, Y_i$  în ecuația (8.51):

$$n \cdot a + b \cdot \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad (8.52)$$

Ecuația (8.52) se împarte la numărul total de determinări "n". Se obține :

$$a + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = 0 \quad (8.53)$$

în care expresiile  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , respectiv  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$  reprezintă mediile șirurilor:  $\bar{X}$  și  $\bar{Y}$ .

Atunci expresia (8.53) devine:

$$a + b \cdot \bar{X} - \bar{Y} = 0 \quad (8.54)$$

Se înmulțește ecuația (8.51) cu  $X_k$  și apoi se face suma de la 1 la n.

$$a \sum_{k=1}^n X_k + b \sum_{k=1}^n X_k^2 - \sum_{k=1}^n X_k Y_k = 0 \quad (8.55)$$

În continuare se împarte ecuația (8.55) la n, se obține:

$$a \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k + b \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k Y_k = 0 \quad (8.56)$$

Conform relației (8.22)  $\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$ .

De aici se obține:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n = \sigma_X^2 + \bar{X}^2 \quad (8.57)$$

Înlocuind (8.57) în (8.56) și ținând cont de expresia mediei pentru șirul X, se face următoarea notație  $\nu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k Y_k$  și se obține:



$$a \cdot \bar{X} + b(\sigma_X^2 + \bar{X}^2) - \nu_{11} = 0 \quad (8.58)$$

La expresia (8.58) se adună și se scade termenul  $\bar{X} \cdot \bar{Y}$ :

$$a\bar{X} + b \cdot \bar{X}^2 - \bar{X} \cdot \bar{Y} + b\sigma_X^2 - \nu_{11} + \bar{X} \cdot \bar{Y} = 0 \quad (8.59)$$

Dacă ecuația (8.54) se înmulțește cu  $\bar{X}$  se obține prima parte a expresiei (8.59):

$a\bar{X} + b\bar{X}^2 - \bar{X} \cdot \bar{Y} = 0$ . În aceste condiții expresia (8.59) se reduce la următoarea formă:

$$b\sigma_X^2 = \nu_{11} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad (8.60)$$

Se face următoarea notație :

$$\mu_{11} = \nu_{11} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad (8.61)$$

Se obține relația:

$$\mu_{11} = b\sigma_X^2 \quad (8.62)$$

Se formează următorul sistem de ecuații liniare:

$$\begin{cases} a + b\bar{X} = \bar{Y} \\ b\sigma_X^2 = \mu_{11} \end{cases} \quad (8.63)$$

ale cărui soluții sunt chiar coeficienții căutați:

$$a = \bar{Y} - \mu_{11} \frac{\bar{X}}{\sigma_X^2} \quad (8.64)$$

$$b = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \quad (8.65)$$

Mărimile  $\bar{X}, \bar{Y}, \mu_{11}, \sigma_X$  se determină din cele două șiruri empirice X, Y. Factorul Y se exprimă în funcție de X în modul următor:

$$Y = a + bX \quad (8.66)$$

Înlocuind valorile calculate ale coeficienților a și b se găsește următoarea relație analitică de corelație:

$$Y - \bar{Y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \cdot (X - \bar{X}) \quad (8.67)$$

În cazul în care valorile  $X_k, Y_k$  apar de  $n_k$  ori în șirul statistic (deci  $n_k \neq 1$ , diferit față de cazul studiat mai sus) se regăsește expresia de mai sus în care termenii  $\bar{X}, \bar{Y}, \mu_{11}, \sigma_X$  își modifică exprimarea în conformitate cu noua situație:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k X_k; \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k Y_k \quad (8.68)$$

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k (X_k - \bar{X})^2 \quad (8.69)$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n n_k X_k Y_k - \bar{X} \cdot \bar{Y} \quad (8.70)$$

În mod analog se obține expresia care dă dependența lui X față de Y:

$$X - \bar{X} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} (Y - \bar{Y}) \quad (8.71)$$

Ecuatiile (8.67) și (8.71) poartă numele de *ecuații de regresie*.

b) În cazul în care pentru același element  $X_i$  se obțin "m" valori pentru Y, respectiv pentru un element  $Y_k$  se obțin "l" valori pentru X (conform tabelelor B1, B2) ecuațiile de regresie se deduc ca și în cazul a) și se obțin expresiile:

$$\bar{X}_Y - \bar{X} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} (Y - \bar{Y}) \quad (8.72)$$

$$\bar{Y}_X - \bar{Y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} (X - \bar{X}) \quad (8.73)$$

unde  $\bar{Y}_X$  și  $\bar{X}_Y$  au fost definiți mai sus, iar  $\bar{X}$  și  $\bar{Y}$  au expresiile:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_Y \quad (8.74)$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \bar{Y}_X \quad (8.75)$$

Pentru rapoartele care apar în ecuațiile (8.67), (8.71), (8.72), (8.73) se fac următoarele notații:

$$\frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} = \rho_{Y,X} \quad (8.76)$$

$$\frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} = \rho_{X,Y} \quad (8.77)$$

Mărimile  $\rho_{X,Y}; \rho_{Y,X}$  poartă numele de *coeficienți de regresie*. Dreapta care în sensul principiului celor mai mici pătrate reprezintă sistemul de puncte  $(X_i, Y_i)$  care se găsesc în corelație, se numește *dreaptă de regresie*.

### 8.3.3. Determinarea coeficientului de corelație

Se determină centrul de distribuție definit de  $(\bar{X}, \bar{Y})$  și se face următoarea translație :

În cazul a):

$$\begin{cases} u = X - \bar{X} \\ v = Y - \bar{Y} \end{cases} \quad (8.78)$$

În cazul b) :

$$\begin{cases} \bar{u}_v = \bar{X}_Y - \bar{X} \\ \bar{v}_u = \bar{Y}_X - \bar{Y} \end{cases} \quad (8.79)$$

Ecuțiile de regresie corespunzătoare celor două cazuri se obțin înlocuind expresiile (8.78), (8.79) în (8.67), (8.71), (8.72), (8.73).

Cazul a):

$$\begin{cases} u = \frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} \cdot v & (I) \\ v = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \cdot u & (II) \end{cases} \quad (8.80)$$

Cazul b) :

$$\begin{cases} \bar{u}_v = \frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} \cdot v & (I) \\ \bar{v}_u = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \cdot u & (II) \end{cases} \quad (8.81)$$

Grafic, translația se poate reprezenta în modul următor.

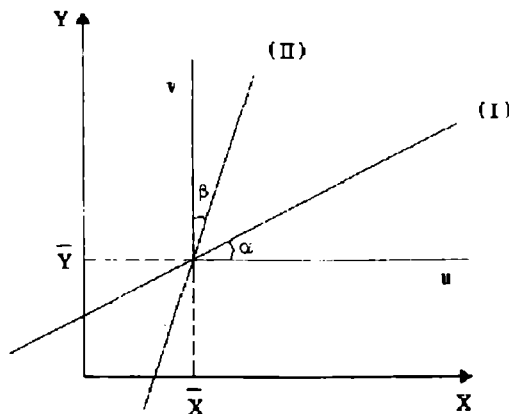


Figura 8.5

Această translație reprezintă deplasarea originii vechiului sistem de coordonate din poziția sa inițială în centrul de distribuție care este originea noului sistem de coordonate.

Din expresiile (8.78) se observă că mediile noilor șiruri obținute prin translație sunt nule și dispersiile lor sunt egale cu cele ale șirurilor inițiale.

$$\bar{u} = \bar{v} = 0$$

$$\sigma_u^2 = \sigma_X^2$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_Y^2$$

Conform relațiilor anterioare expresia lui  $\mu_{11}$  devine:

$$\mu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k v_k \quad (8.82)$$

Din ecuațiile (8.80) se observă că coeficienții de regresie sunt dați de valorile pantelor dreptelor (I) și (II):

$$\tan \alpha = \rho_{Y,X} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \quad (8.83)$$

$$\tan \beta = \rho_{X,Y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_Y^2} \quad (8.84)$$

\*) Dacă dependența corelațională dintre cei doi factori este funcțională liniară atunci cele două drepte de regresie coincid, deci  $\alpha + \beta = 90^\circ$ , respectiv:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 1 \quad (8.85)$$

\*\*) Dacă între cei doi factori nu se poate stabili o relație liniară atunci putem spune că  $v$  variază puțin în funcție de  $u$  și practic pantele dreptelor (I), (II) sunt aproximativ nule, ceea ce se scrie astfel:

$$\tan \alpha \cdot \tan \beta = 0 \quad (8.86)$$

În concluzie produsul  $\tan \alpha \cdot \tan \beta$  este un criteriu pentru determinarea legăturilor de corelație și dependență funcțională liniară. Se definește *coeficientul de corelație* în felul următor:

$$r = \sqrt{\tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\mu_{11}}{\sigma_v \cdot \sigma_u} \quad (8.87)$$

Valoarea sa e cuprinsă în intervalul  $[-1, 1]$ . Când valoarea absolută a acestui coeficient atinge sau se apropie de valoarea 1, dependența celor doi factori este liniară. Când valoarea sa absolută se apropie de zero, atunci variabilele se pot considera în relație de dependență funcțională neliniară.

Pentru cele două cazuri menționate mai sus se scriu în modul următor relațiile pentru coeficientul de corelație:

a) În acest caz (vezi tabelul A),  $r$  se exprimă astfel:

$$r = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n u_k v_k}{\sigma_u \sigma_v} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{n \sigma_X \sigma_Y} \quad (8.88)$$

sau prin înlocuirea expresiilor  $\sigma_X, \sigma_Y$  se obține:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})(Y_k - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2 \cdot \sum_{k=1}^n (Y_k - \bar{Y})^2}} \quad (8.89)$$

b) În condițiile în care  $n_k \neq 1$  (vezi tabelul B), când se face un număr  $n_{ik}$  de determinări ale lui Y pentru o valoare dată  $X_i$ , coeficientul de corelație are o expresie corespunzătoare. Numărul de determinări  $n_{ik}$ , ale factorilor  $X_i$  și  $Y_k$  se grupează într-un tabel de felul următor.

Y/X	$X_1$	$X_2$	...	$X_l$	$n_k$	$\bar{X}_Y$
$Y_1$	$n_{11}$	$n_{12}$		$n_{1l}$	$n_1$	$\bar{X}_{Y_1}$
$Y_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	...	$n_{2l}$	$n_2$	$\bar{X}_{Y_2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$Y_m$	$n_{m1}$	$n_{m2}$	...	$n_{ml}$	$n_m$	$\bar{X}_{Y_m}$
$n_i$	$n_1$	$n_2$	...	$n_l$		
$\bar{Y}_X$	$\bar{Y}_{X_1}$	$\bar{Y}_{X_2}$	...	$\bar{Y}_{X_l}$		

Valoarea  $n_{ik}$  din tabel reprezintă numărul de determinări pentru o anumită valoare măsurată  $X_i$  când elementul  $Y_i$  este constant;  $i$  ia valori între 1 și  $l$ , iar  $k$  e cuprins între 1 și  $m$ .  $n_i$  și  $n_k$  reprezintă numărul de determinări pentru toate valorile  $X_i$  când  $Y_k$  este constant și invers.

Corelația dintre  $X_i$  și  $\bar{Y}_X$ , e dată de coeficientul de corelație  $r_1$  :

$$r_1 = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sum_{i=1}^l n_i (X_i - \bar{X})(\bar{Y}_{X_i} - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^l n_i (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^l n_i (\bar{Y}_{X_i} - \bar{Y})^2}} \quad (8.90)$$

$$\text{unde } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^l n_i X_i}{\sum_{i=1}^l n_i}; \quad n_i = \sum_{k=1}^m n_{ki}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k Y_k}{\sum_{k=1}^m n_k}; \quad n_k = \sum_{i=1}^l n_{ik}; \quad \bar{Y}_{X_i} = \frac{\sum_{k=1}^m n_{ik} Y_k}{\sum_{k=1}^m n_{ik}}$$

Corelația dintre  $Y_k$  și  $\bar{X}_{Y_k}$  este exprimată prin coeficientul de corelație  $r_2$ :

$$r_2 = \frac{\sum_{k=1}^m n_k (Y_k - \bar{Y})(\bar{X}_{Y_k} - \bar{X})}{\sqrt{\sum_{k=1}^m n_k (Y_k - \bar{Y})^2 \sum_{k=1}^m n_k (\bar{X}_{Y_k} - \bar{X})^2}} \quad (8.91)$$

$$\text{unde } \bar{X}_{Y_k} = \frac{\sum_{i=1}^l n_{ki} X_i}{\sum_{i=1}^l n_{ki}}$$

### 8.3.4. Proprietățile coeficientului de corelație

Fie  $s_u$ ,  $s_v$  deviațiile standard ale șirurilor  $u, v$ . Din definiția deviației (8.23) se poate scrie:

$$ns_v^2 = \sum_{k=1}^n (v_k - \bar{v}_u)^2 \quad (8.92)$$

Din relația (8.81), ținând cont că  $\sigma_X = \sigma_u$ , rezultă:

$$\bar{v}_u = \frac{\mu_{11}}{\sigma_X^2} \cdot u_k = \frac{\mu_{11}}{\sigma_u^2} \cdot u_k \quad (8.93)$$

Din relația (8.85)  $\mu_{11}$  se poate scrie astfel:

$$\mu_{11} = r\sigma_u\sigma_v \quad (8.94)$$

Introducând relațiile (8.93), (8.94) în (8.92) se obține:

$$n \cdot s_v^2 = \sum_{k=1}^n \left( v_k - \frac{\sigma_v}{\sigma_u} r u_k \right)^2 = \sum_{k=1}^n \left( v_k^2 - 2 \frac{\sigma_v}{\sigma_u} r v_k u_k + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_u^2} r^2 u_k^2 \right) \quad (8.95)$$

Dar  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k^2 = \sigma_u^2$  și  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k^2 = \sigma_v^2$  (întrucât  $\bar{u}_k = \bar{v}_k = 0$ ). Deci:

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 = \sigma_u^2 \cdot n \quad (8.96)$$

$$\sum_{k=1}^n v_k^2 = \sigma_v^2 \cdot n \quad (8.97)$$

Din relația (8.94) și din definiția lui  $\mu_{11}$  obținem:

$$\mu_{11} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_k u_k = r \sigma_u \sigma_v \quad (8.98)$$

Înlocuind (8.96) și (8.98) în expresia (8.95) rezultă:

$$n s_v^2 = n(\sigma_v^2 - 2r^2 \sigma_v^2 + r^2 \sigma_v^2) = n(1 - r)^2 \sigma_v^2 \quad (8.99)$$

și după simplificare se obține:

$$s_v^2 = (1 - r^2) \sigma_v^2 \quad (8.100)$$

Analog se obține

$$s_u^2 = (1 - r^2) \sigma_u^2 \quad (8.101)$$

În funcție de valorile lui  $r$  apar următoarele cazuri:

1)  $r = \pm 1$ . În acest caz se obține:

$$s_v^2 = s_u^2 = 0 \quad (8.102)$$

$$\mu_{11} = \pm \sigma_u \sigma_v \quad (8.103)$$

Înlocuind în ecuația de regresie (8.81) și revenind la translație obținem:

$$\begin{cases} \bar{Y}_X - \bar{Y} = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \bar{X}) \\ \bar{X}_Y - \bar{X} = \pm \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (Y - \bar{Y}) \end{cases} \quad (8.104)$$

Se observă că pentru  $r = 1$ , atunci când  $Y$  crește și  $X$  crește și pentru  $r = -1$  atunci când  $Y$  crește,  $X$  scade.

2)  $r = 0$ . Dependența este funcțională dar nu liniară.

O corelație hidrologică se consideră valabilă dacă în valoare absolută coeficientul de corelație "r" depășește valoarea de 0.7.

### 8.3.5. Corelația liniară cu trei variabile

În cazul în care un factor  $Y$  depinde liniar de alți doi,  $X$  și  $Z$  atunci ecuația de regresie se scrie:

$$Y = a + b \cdot X + c \cdot Z \quad (8.105)$$

Făcându-se determinări asupra celor 3 factori se obțin 3 șiruri empirice :

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$

În acest fel se poate forma un sistem cu  $n$  ecuații din care se determină coeficienții  $a, b, c$  prin metoda celor mai mici pătrate:

$$a = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} n\bar{Y} & n\bar{X} & n\bar{Z} \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ \sum Z_i Y_i & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{bmatrix} \quad (8.106)$$

$$b = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} n & n\bar{Y} & n\bar{Z} \\ n\bar{X} & \sum X_i Y_i & \sum X_i Z_i \\ n\bar{Z} & \sum Z_i Y_i & \sum Z_i^2 \end{bmatrix} \quad (8.107)$$

$$c = \frac{1}{N} \cdot \begin{bmatrix} n & n\bar{X} & n\bar{Z} \\ n\bar{X} & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ n\bar{Z} & \sum X_i Z_i & \sum Z_i X_i \end{bmatrix} \quad (8.108)$$

$$N = \begin{bmatrix} n & n\bar{X} & n\bar{Z} \\ n\bar{X} & \sum X_i^2 & \sum X_i Z_i \\ n\bar{Z} & \sum X_i Z_i & \sum Z_i^2 \end{bmatrix} \quad (8.109)$$

Corelația celor trei factori e dată de trei coeficienți de corelație parțiali  $\rho_{YX}, \rho_{XZ}, \rho_{YZ}$  (care exprimă corelația între doi câte doi factori) și coeficientul general de corelație este:

$$R = \sqrt{\frac{\rho_{YX}^2 + \rho_{YZ}^2 - 2\rho_{XY} \cdot \rho_{YZ} \cdot \rho_{XZ}}{1 - \rho_{XZ}^2}} \quad (8.110)$$

### 8.3.6. Corelația curbă

În cazul în care graficul XOY în care sunt trecute valorile determinate experimental ale doi factori  $(X_i, Y_i)$  indică o curbă, atunci pentru exprimarea corelației se va alege una din următoarele patru ecuații, în mod corespunzător:

$$I) \quad Y = b \cdot e^{aX} \quad (8.111)$$

Dacă se folosește următoarea schimbare de variabilă  $\begin{cases} u = X \\ v = \lg Y \end{cases}$  atunci ecuația (8.111)

se transformă într-o ecuație liniară:



$$v = \lg b + u \cdot a \quad (8.112)$$

$$II) \quad Y = a + bX + cX^2 \quad (8.113)$$

Se face transformarea de variabilă  $\begin{cases} u = X - \bar{X} \\ v = \frac{Y - \bar{Y}}{X - \bar{X}} \end{cases}$  și atunci se obține ecuația liniară :

$$v = b + 2b\bar{X} + c \cdot u \quad (8.114)$$

$$III) \quad Y = aX^b \quad (8.115)$$

Prin transformarea de variabilă  $\begin{cases} u = \lg X \\ v = \lg Y \end{cases}$  se obține ecuația liniară:

$$v = \lg a + b \cdot u \quad (8.116)$$

$$IV) \quad Y = \frac{a}{b + cX} \quad (8.117)$$

Dacă se face următoarea schimbare de variabilă  $\begin{cases} u = X \\ v = \frac{1}{Y} \end{cases}$  se obține ecuația liniară:

$$v = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \cdot u \quad (8.118)$$

Dreapta sau curba de corelație se poate determina și în mod grafic, construindu-le printre punctele experimentale  $(X_i, Y_i)$ , dar procedeul este mai puțin precis și determinarea parametrilor care definesc curba sau dreapta se face cu eroare mai mare decât în cazul analitic.

#### 8.4. Generarea de valori cronologice

Importantă din punct de vedere hidrologic este simularea de șiruri de valori care se succed cronologic în continuarea unor șiruri cronologice cunoscute. Toate valorile obținute prin simulare împreună cu cele de bază sunt necesare obținerii unei informații mai bogate asupra fenomenului hidrologic studiat, în special cu aplicație în problemele de proiectare și exploatare a construcțiilor hidrotehnice.

Simularea consideră fenomenul hidrologic ca fiind aleator, iar noul șir generat trebuie să aibă aceleași caracteristici statistice ca și ansamblul valorilor de bază  $(\sigma, C_v, \bar{X}, etc)$ .

##### 8.4.1. Relații de simulare

Principiul metodei care stabilește aceste relații de simulare derivă din teoria lanțului Markov: trecerea unui sistem aleator de la momentul  $(t - 1)$  la momentul  $t$  depinde de probabilitatea sistemului de trecere la timpul  $t$ .

Fie un șir discret de valori cronologice determinate experimental:  
 $X_1, X_2, \dots, X_{t-1}, X_t, \dots, X_n$ . Între aceste elemente există o relație de ordin 1:

$$\Delta X_t = \varphi \cdot \Delta X_{t-1} + \epsilon_t \quad (8.119)$$

unde  $\Delta X_t = X_t - \bar{X}$  și  $\Delta X_{t-1} = X_{t-1} - \bar{X}$ ,  $\epsilon_t$  este o variabilă de trecere la timpul  $t$  și  $\varphi$  este coeficientul lanțului de ordin I.

În acest caz expresia (8.119) se poate scrie:

$$X_t = \bar{X} + \varphi(X_{t-1} - \bar{X}) + \epsilon_t \quad (8.120)$$

### 1. Sirul hidrologic cu pas constant $\Delta t = 1$ an

Fie  $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$  șirul de bază și  $X_{n+1} = Y_1, X_{n+2} = Y_2, \dots, X_{n+i} = Y_i$  șirul simulat. Conform ecuației (8.120) se poate scrie:

$$Y_{i+1} = \bar{X} + \rho(Y_i - \bar{X}) + \epsilon_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (8.121)$$

În relația (8.121)  $\rho$  este coeficient de autocorelație de ordin I cu proprietatea :

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_X^2(1 - \rho^2) \quad (8.122)$$

unde  $\sigma_X$  este abaterea pătratică medie a șirului de bază. Valoarea  $\epsilon_i$  se înlocuiește cu  $g_i$ , unde  $g_i$  este o variabilă gaussiană cu valori pozitive și negative. Relația de substituție e următoarea :

$$\epsilon_{i+1} = \sigma_\epsilon \cdot g_{i+1} \quad (8.123)$$

În acest caz relația (8.121) devine :

$$Y_{i+1} = \bar{X} + (Y_i - \bar{X})\rho + g_{i+1} \cdot \sigma_X \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \quad (8.124)$$

Sau se poate face substituția lui  $g_i$  cu  $\gamma_i$  care este o variabilă aleatoare de tip Pearson cu caracteristicile  $\bar{\gamma} = 0$  și  $\sigma_\gamma = 1$ .

Atunci ecuația (8.124) devine:

$$Y_{i+1} = \bar{X} + (Y_i - \bar{X})\rho + \gamma_{i+1} \cdot \sigma_X \cdot \sqrt{1 - \rho^2} \quad (8.125)$$

### 2. Sirul hidrologic cu pas constant $\Delta t = 1$ lună

În acest caz problema se transformă în generarea de matrice ( $Y_{j,i}$ ) cunoscând matricea de bază ( $X_{j,i}$ ). (Exemplu: debite medii lunare, niveluri medii lunare, etc.)

Fie matricea de bază, cu datele determinate experimental, ( $X_{j,i}$ ):

$$\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{2,1} \cdots & X_{j,1} & X_{j+1,1} \cdots & X_{12,1} \\ X_{1,2} & X_{2,2} \cdots & X_{j,2} & X_{j+1,2} \cdots & X_{12,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1,m} & X_{2,m} \cdots & X_{j,m} & X_{j+1,m} \cdots & X_{12,m} \end{pmatrix} \quad (8.126)$$

unde  $j = 1, 2, \dots, 12$  (numărul de luni ale anului)  $i = 1, 2, \dots, m$  (numărul de ani pentru care s-au făcut determinări)

Matricele generate pot avea aceeași valoare pentru  $m$  ca și matricea de bază, sau nu. Generarea se face de la șir la șir, respectiv de la coloană la coloană:

$$Y_{j+1,i} = \bar{X}_{j+1} + \rho_{j+1,j}(Y_{j,i} - \bar{X}_j) \frac{\sigma_{j+1}}{\sigma_j} + g_{j+1,i} \cdot \sqrt{1 - \rho_{j+1,j}^2} \quad (8.127)$$

sau dacă se folosesc variabile de tip Pearson:

$$Y_{j+1,i} = \bar{X}_{j+1} + \rho_{j+1,j}(Y_{j,i} - \bar{X}_j) \cdot \frac{\sigma_{j+1}}{\sigma_j} + \gamma_{j+1,i} \cdot \sqrt{1 - \rho_{j+1,j}^2} \quad (8.128)$$

unde  $\bar{X}_j, \bar{X}_{j+1}$  reprezintă mediile coloanelor  $j$  și  $j+1$  din matricea de bază respectiv abaterile pătratice.

$g_{j+1,i}, \gamma_{j+1,i}$  sunt variabile aleatoare Gauss sau Pearson corespunzătoare valorilor  $Y_{j+1,i}$  generate.

#### 8.4.2. Coeficientul de corelație serială și autocorelație

Se pleacă de la expresia găsită mai sus pentru coeficientul de corelație (8.89). Pentru exprimarea coeficientului de autocorelație se fac următoarele substituții:

$X_i \rightarrow X_i$  și  $Y_i \rightarrow X_{i+1}$ , întrucât corelația se face între aceeași termeni ai șirului.

În aceste condiții avem:

$$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \quad (8.129)$$

Atunci coeficientul de autocorelație devine:

$$\rho = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i Y_i - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_X^2} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i X_{i+1} - \bar{X}^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2} \quad (8.130)$$

În expresia lui  $\rho$ , la numărător sumarea se face până la  $(n-1)$  deoarece ultimul termen al șirului se obține pentru  $i+1 = n$ , deci  $i = n-1$ .

În cazul coeficientului de corelație serială se pleacă de la aceeași expresie (8.89) și se fac substituțiile :

$X_i \rightarrow X_j; Y_j \rightarrow X_{j+1}; n \rightarrow m$ .

Se obține :

$$\rho_{j+1,j} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (X_{j+1} - \bar{X}_{j+1}) \cdot (X_j - \bar{X}_j)}{\frac{1}{m} \sqrt{\sum_{j=1}^m (X_{j+1} - \bar{X}_{j+1})^2 \sum_{j=1}^m (X_j - \bar{X}_j)^2}}; \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (8.131)$$

Coeficientul  $\rho_{j+1,j}$  dă corelația între coloanele  $j$  și  $j+1$ .

Din expresiile (8.130) și (8.131) se observă următoarea relație:  $-1 < \rho < 1$ .

### 8.4.3. Determinarea variabilelor aleatoare

S-au definit următoarele caracteristici ale șirurilor respective: abaterea standard sunt egale cu unitatea  $\sigma_g = 1$ ;  $\sigma_\gamma = 1$  și mediile șirurilor sunt nule  $\bar{\gamma} = 0$ ;  $\bar{g} = 0$ .

Aceste variabile se obțin prin numerele aleatoare care sunt practic frecvențe relative cu distribuția uniformă în intervalul  $(0, 1)$  și au aceleași caracteristici statistice: abaterea standard egală cu unitatea și media nulă.

Numerele aleatoare se generează printr-un proces întâmplător, care are loc în sisteme imaginate fizic sau matematic.

Exemplu de sistem fizic: o urnă cu 10.000 bile din care 1000 sunt numerotate cu 0; alte 1000 cu 1 și așa mai departe câte 1000 cu fiecare cifră de la 0 la 9. Se pot scoate din urnă bile ale căror notații formează un număr aleator ca parte zecimală: 4321, 0720, etc.

Ca sistem matematic se folosește calculatorul prin care se pot genera numere pseudoaleatoare  $f_i$ :

$$f_{i+1} = \frac{F_{i+1}}{|M|}$$

unde,

$$F_{i+1} = (2^k + 1) \cdot F_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.132)$$

și  $F_i$  este un număr întreg pseudoaleator mai mic sau egal cu  $|M|$  și  $M$  este cel mai mare număr întreg acceptat de calculator (Ex: pentru IBM 360/40  $M = 2^{32}$ ). Pentru calculul lui  $F_1$  din formula de recurență (8.132) se folosește un număr oarecare întreg și impar  $F_0$ .

Legătura dintre aceste numere pseudoaleatoare și variabilele Gauss  $g_i$  se face prin următoarea funcție de transfer:

$$\sum f_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{g_i} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda \quad (8.133)$$

În mod curent se folosesc următoarele relații aproximative de trecere de la  $f_i$  la  $g_i$  și la  $\gamma_i$ :

$$g_i = \sum_{k=1}^{12} f_k - 6 \quad (8.134)$$

$$\gamma_i = \frac{2}{C_s} \left[ 1 + C_s \cdot \frac{g_i}{6} - \frac{C_s^2}{36} \right]^3 - \frac{2}{C_s} \quad (8.135)$$

unde  $C_s$  este coeficientul de asimetrie al șirului de bază.

$$C_s = \alpha \frac{\sigma_X}{\bar{X}}, \quad \alpha \in (2, 3) \quad (8.136)$$

Valorile aleatoare în ordinea în care se calculează se asociază valorilor în curs de generare conform relațiilor de generare anterioare. Se pot genera șiruri oricât de mari.

### 8.5. Evoluția factorilor hidrologici

Evoluția se definește ca fiind tendința de desfășurare în timp a fenomenului în cauză, cunoscând un șir numeros de valori cronologice cu același pas de timp. Tendința poate fi crescătoare sau descrescătoare pe un interval redus de timp, sau periodică pe un interval mai mare de timp.

#### 8.5.1. Metode pentru urmărirea tendinței fenomenului

##### A. Metoda mediei mobile

Această metodă permite atenuarea variației valorilor. Se calculează media unei valori a șirului,  $Y_i$  prin una din relațiile:

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{4}(Y_{i-1} + 2Y_i + Y_{i+1}) \quad (8.137)$$

unde  $Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1}$  sunt valori cronologice ale factorului  $Y$ .

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{3}(aY_{i-1} + bY_i + cY_{i+1}) \quad (8.138)$$

unde  $a, b, c$  sunt ponderi constante afectate valorilor din șir astfel încât  $a + b + c = 1$ .

Fiecare valoare din șir se substituie cu media corespunzătoare și se reprezintă grafic conform pasului de timp al șirului.

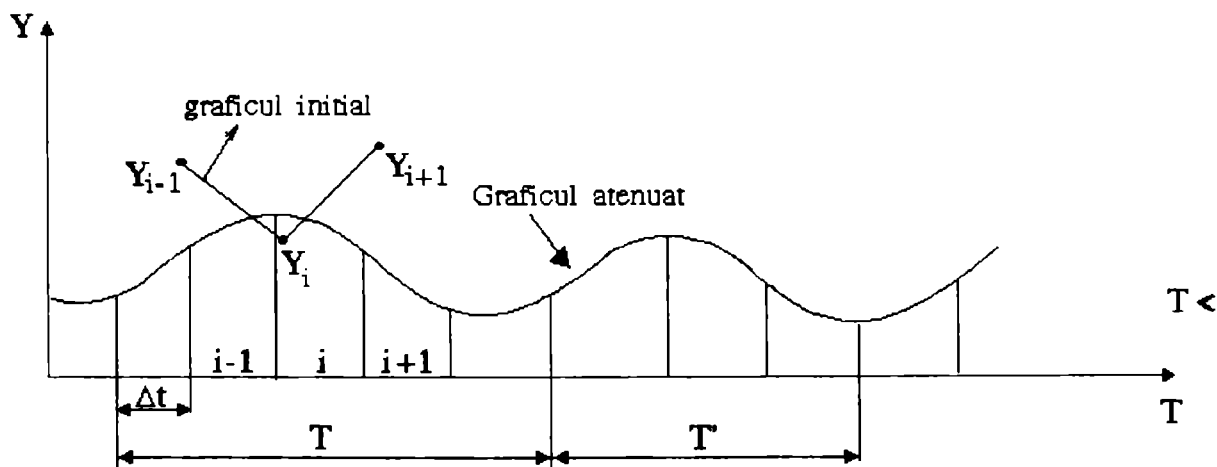


Figura 8.6

Graficul poate prezenta un ciclu sau mai multe. Nu e necesar ca valorile de la un ciclu la altul să fie identice și nici perioada acestor cicluri.

Existența ciclului hidrologic global din natură imprimă cicluri specifice cu perioada  $T = 1an$  pentru temperatură, evaporări, precipitații, niveluri și debite la cursuri de apă.

##### B. Metoda analizei armonice. Formularea matematică a periodicității

Dacă se cunoaște sau se determină perioada  $T$  a ciclului se poate exprima variația valorilor cronologice ale șirului prin funcțiile Fourier.

$$Y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos k \frac{2\pi}{T} t + b_k \sin k \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (8.139)$$

unde  $t \in \left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$  și  $a_0, a_k, b_k$  sunt coeficienții funcție de valoarea  $Y_i$ .

Pentru calculul coeficienților  $a_k, b_k$  se face următoarea schimbare de variabilă:  $t = \frac{T \cdot X}{2\pi}$  și se obține un șir cu perioada  $T' = 2\pi$ . Atunci ecuația (8.139) devine:

$$Y(X) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kX + b_k \sin kX) \quad (8.140)$$

Intervalul  $(0, 2\pi)$  se împarte în  $n$  părți egale pentru care se cunosc următoarele valori perechi:  $(0, Y_0), (X_1, Y_1), \dots, (X_n = 2\pi, Y_n)$ . Se obține un sistem de ecuații de tipul:

$$Y_i = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kX_i + b_k \sin kX_i) \quad (8.141)$$

Ecuațiile (8.141) se înmulțesc pe rând cu  $\cos kX_i$  respectiv cu  $\sin kX_i$  și utilizând proprietățile funcțiilor Fourier se obțin următoarele valori pentru coeficienții  $a_k, b_k, a_0$ :

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \cos kX_i \quad (8.142)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \sin kX_i \quad (8.143)$$

$$a_0 = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \quad (8.144)$$

În cazul funcțiilor continue  $Y(X)$  sumele care apar în relațiile de mai sus se transformă în integrale. Astfel:

$$a_k = \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} Y(X) \cos kX dX \quad (8.145)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} Y(X) \sin kX dX \quad (8.146)$$

## 8.6. Omogenitate hidrologică

Omogenitatea unui teritoriu din punct de vedere hidrologic se definește ca fiind calitatea acestuia de a fi reprezentativ față de un factor hidrologic (ex: debit mediu anual, precipitații, etc.).

Gradul de omogenitate poate avea diverse valori acestea fiind calculate pe baza dispersiei valorilor factorului considerat pe întreg teritoriul.

Fie  $k$  puncte pe teritoriu în care s-au obținut măsurători ale factorului hidrologic considerat. În fiecare punct există un șir de  $n$  termeni și media tuturor valorilor pe teritoriu, pentru cele  $k$  șiruri este  $\bar{X}$ . Se poate construi un tabel cu valorile determinate și mediile lor în cele  $k$  puncte.

$$\begin{array}{rcl}
 1 : & X_{11} & X_{12} \cdots X_{1j} \cdots X_{1n} \rightarrow \bar{X}_1 \\
 2 : & X_{21} & X_{22} \cdots X_{2j} \cdots X_{2n} \rightarrow \bar{X}_2 \\
 & & \vdots \\
 i : & X_{i1} & X_{i2} \cdots X_{ij} \cdots X_{in} \rightarrow \bar{X}_i \\
 & & \vdots \\
 k : & X_{k1} & X_{k2} \cdots X_{kj} \cdots X_{kn} \rightarrow \bar{X}_k
 \end{array} \tag{8.147}$$

Coeficientul de neomogenitate se definește astfel:

$$\varphi = \frac{A(N - k)}{B(k - 1)} \tag{8.148}$$

$$\text{unde } N = nk; \quad A = n \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{X})^2; \quad B = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$$

Termenul  $A$  exprimă dispersia mediilor din punctele teritoriului față de media generală. Termenul  $B$  exprimă dispersia valorilor din șiruri față de mediile șirurilor din fiecare punct în parte.

Pentru cazul în care șirurile din cele  $k$  puncte nu au același număr de valori se obțin următoarele expresii pentru factorii  $N, A, B$ :

$$N = \sum_{i=1}^k n_i; \quad A = \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2; \quad B = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2.$$

S-au construit tabele cu valori limită critice pentru coeficientul de neomogenitate în funcție de un anumit nivel de încredere.

## ASPECTE FIZIOGRAFICE ALE CURGERII APELOR DE SUPRAFATA

## 9.1. Rețeaua hidrografică

*Rețeaua hidrografică* (R.H) este un sistem de văi și depresiuni naturale către care converg apele provenite din precipitații și cele subterane.

Rețeaua hidrografică naturală poate fi completată cu canale, lacuri de acumulare, sau poate fi redusă prin eliminarea formațiunilor dăunătoare ( bălți, mlaștini). Rețelele hidrografice sunt create prin scufundările și ridicările scoarței, fenomene care au avut loc de-a lungul erelor geologice, până în era Cuaternară. Ulterior apar modificări datorită interacțiunii apă - uscat, în principal prin acțiunea de eroziune a apelor și a depunerilor în aval a pământurilor erodate.

Rețelele hidrografice au importanță diferită, în funcție de lungimea lor și numărul de ramificații. Un criteriu de stabilire a importanței rețelei hidrografice se obține prin acordarea unui ordin de mărime  $n$  văilor în funcție de numărul de ramificații  $N$ . Cel mai mic ordin de mărime  $n = 1$ , se atribuie văilor singulare (fără ramificații) cu lungimea minimă de 5 km;  $n = 2$  pentru văi care rezultă din unirea a cel puțin două văi de ordinul 1;  $n = 3$  pentru văi care rezultă din unirea a cel puțin două văi de ordinul 2; s.a.m.d.(vezi figura 9.1). În mod evident se poate stabili o corelație între numărul de ramificații  $N$  și ordinul de mărime  $n$ , pentru fiecare R.H.

*Exemplu: Pentru râul Argeș la profilul Pitești s-a determinat următoarea corelație exprimată analitic:  $\lg N = 2,3 - 0,572 \cdot n$ .*

Parametrii rețelei hidrografice

A. *Lungimea rețelei hidrografice* este dată de lungimea tuturor ramificațiilor unei R.H. Lungimea unei ramificații  $l$  în funcție de ordinul de mărime  $n$  se stabilește astfel : Pentru  $n = 1$  lungimea reprezintă distanța desfășurată în plan orizontal de la izvor până la prima confluență. Pentru  $n \geq 2$  lungimea reprezintă distanța desfășurată în plan orizontal măsurată de la punctul de confluență care definește începutul rețelei cu ordinul respectiv până la următoarea confluență care schimbă ordinul de mărime (se măsoară în km).

Pentru o rețea de ordinul  $n$  se poate calcula lungimea  $L$  prin relația :

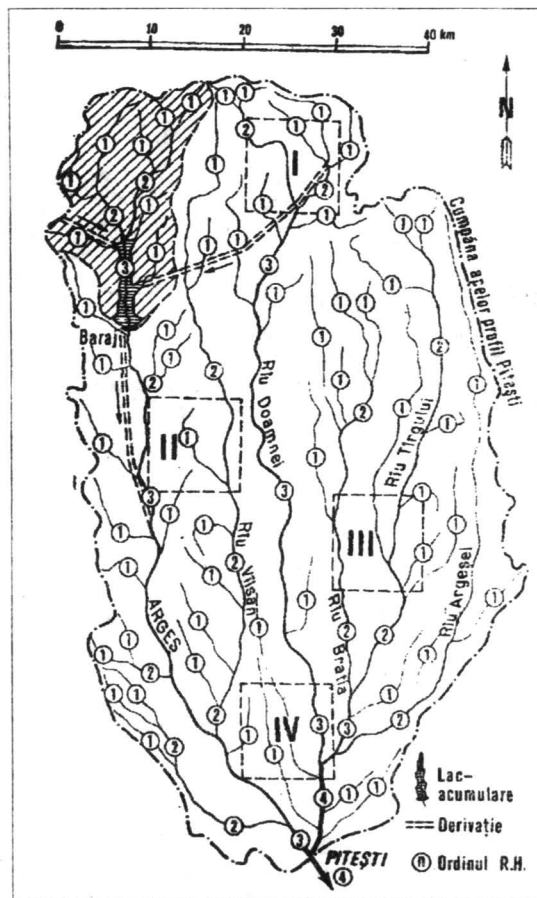
$$L = \sum_{k=1}^{N_1} l_{1k} + \dots + \sum_{k=1}^{N_i} l_{ik} + \dots + \sum_{k=1}^{N_{n-1}} l_{n-1,k} + l_n \quad (9.1)$$

unde  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $N_i =$  numărul de ramificații care au ordinul de mărime  $i$ ,  $\sum_{k=1}^{N_i} l_{ik} =$  suma lungimilor ramificațiilor rețelei de ordinul  $i$ .

B. *Profilul longitudinal al rețelei hidrografice* reprezintă succesiunea cotelor terenului de pe fundul văilor, care reiese din hărțile cu curbe de nivel.

În general, valea cu ordinul de mărime cel mai mare are cote mai mici față de văile adiacente, ceea ce îi permite să primească gravitațional aflusul de apă al acestora.





Criteriul de clasificare a rețelei hidrologice aplicat râului Argeș.

Figura 9.1

C. *Densitatea rețelei hidrografice*  $D$  reprezintă lungimea rețelei hidrografice raportată la suprafața care înscrie R.H.

$$D = \frac{L}{S} \quad (9.2)$$

unde  $L$  = lungimea R.H. și  $S$  = suprafața care cuprinde R.H.

Această mărime caracterizează capacitatea R.H. de a colecta o anumită cantitate de apă.

## 9.2. Bazinul hidrografic

Bazinul hidrografic ( B.H.) se mai numește bazin de recepție sau bazin colector și reprezintă teritoriul care înglobează rețeaua hidrografică până la cumpăna apelor.

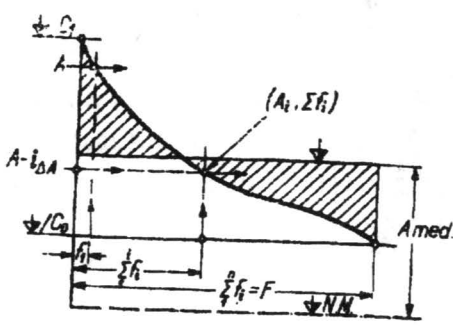
Cumpăna apelor este linia celor mai înalte cote ale B.H. considerat.

### Parametrii bazinului hidrografic

A. *Suprafața bazinului hidrografic* se notează de obicei cu  $F$  și se estimează pentru o anumită lungime  $L$  a rețelei hidrografice.

*Exemplu: B.H. al Dunării are suprafața totală  $F = 817000 \text{ km}^2$ .*

B. *Curba hipsometrică* este un grafic obținut pe baza curbelor de nivel de pe suprafața B.H.



Curba hipsometrică a B.H.

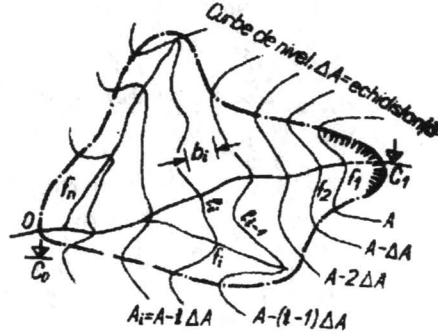


Figura 9.2 b)

Figura 9.2 a)

Ordonatele acestui grafic reprezintă altitudinile de la cea mai joasă cotă  $C_0$  până la cea mai înaltă  $C_1$ , iar abscisele sunt însumări ale suprafețelor parțiale  $f_i$  dintre două curbe de nivel succesive.  $\sum_{k=1}^i f_k =$  însumarea suprafețelor parțiale dintre cota  $C_1$  și curba de nivel de ordinul  $i$ .

$A_i =$  valoarea curbei de nivel de ordinul  $i$  (vezi figura 9.2.a).

Construcția curbei se obține prin reprezentarea perechilor de valori  $(A_i, \sum_{k=1}^i f_k)$ . Curba hipsometrică oferă posibilitatea de a estima rapid suprafețele aflate deasupra unor cote date, sau suprafețele aferente B.H. din diverse regiuni. Prin echivalarea ariei determinate de curba hipsometrică cu aria unui dreptunghi cu baza egală cu suprafața  $F$  a B.H. se obține altitudinea medie a reliefului ca fiind înălțimea dreptunghiului.

### C. *Panta medie a bazinului hidrografic*

Se poate calcula o pantă medie a bazinului  $\bar{J}$  pentru aprecierea mișcării apei pe suprafața sa.

Fie  $J_i$  panta medie a terenului dintre două curbe de nivel definită de raportul dintre diferența de altitudine dintre două curbe de nivel și lățimea medie a terenului dintre cele două curbe de nivel:

$$J_i = \frac{\Delta A}{b_i} \quad (9.3)$$

unde  $\Delta A$  este diferența dintre două curbe de nivel și  $b_i$  este lățimea medie a terenului dintre cele două curbe de nivel (figura 9.2.b).

Se exprimă suprafața dintre două curbe de nivel în felul următor:  $f_i = l_i \cdot b_i$ , unde  $l_i$  este lungimea mediană a suprafeței  $f_i$ . Atunci panta medie a bazinului hidrografic se exprimă prin următoarea relație:

$$\bar{J} = \sum_{i=1}^n \frac{J_i \cdot f_i}{F} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta A \cdot f_i}{F \cdot b_i} = \frac{\Delta A}{F} \sum_{i=1}^n \frac{l_i \cdot b_i}{b_i} = \frac{\Delta A}{F} \sum_{i=1}^n l_i \quad (9.4)$$

unde  $F$  reprezintă suprafața totală a bazinului hidrografic și se poate exprima astfel:

$$F = \sum_{i=1}^n f_i;$$

$\sum_{i=1}^n l_i$  reprezintă lungimea totală a curbelor de nivel din bazinul hidrografic.

#### D. Structura geologică a solului bazinului hidrografic și învelișul vegetal

Structura geologică a solului B.H. constituie un factor fiziografic necesar pentru caracterizarea bazinului. Pentru studiul bazinului e necesară elaborarea unei hărți a bazinului hidrografic cu repartitia structurilor geologice, cu aprecieri asupra gradului lor de permeabilitate, în funcție de capacitatea diferită pe care o au rocile de a infiltra precipitații, deci de a micșora volumul curgerilor.

De exemplu în regiuni muntoase cu roci cristaline neîmpădurite, infiltrația este neglijabilă, în formații de carst e cuprinsă între 30% - 80%, în roci argiloase este de 30% - 50%, iar în nisipuri și pietrișuri este de 40% - 70% din cantitatea de apă superficială.

De asemenea învelișul vegetal intervine cu o pondere importantă la procesul de curgere prin reținerea parțială și frânarea mișcării maselor de apă precipitate pe suprafața B.H.

### 9.3. Albiile cursurilor de apă

Albia reprezintă partea inferioară a văii ocupată permanent sau temporar de curentul de apă.

Structurile geologice foarte tari modelează forma curentului și îi imprimă direcțiile de curgere, iar pe structurile aluvionare curentul își modelează singur albia pentru a corespunde legilor sale de mișcare.

#### Parametrii albiilor

##### A. Profil transversal al albiei

Profilul transversal e alcătuit dintr-o parte adâncă numită *albie minoră* și părțile laterale care nu sunt mereu acoperite cu apă, care se numesc *lunci* (figura 9.3).

Linia adâncimilor maxime ale albiei minore din profilele transversale succesive se numește *talveg*.

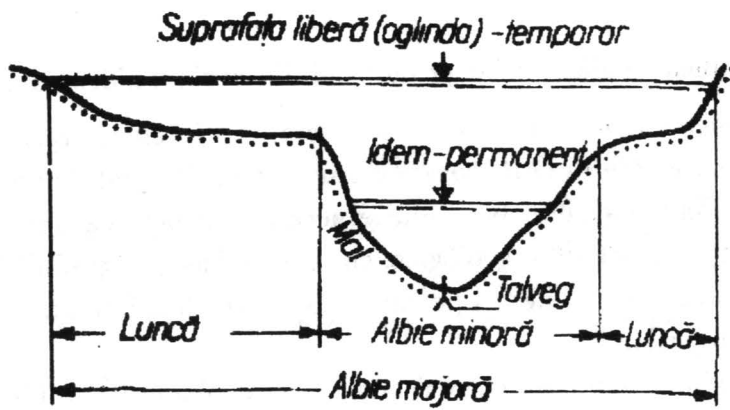
Albia minoră și luncile formează așa numita *albie majoră*. După gradul inundațiilor albia majoră are o întindere mai mare sau mai mică. Calculele hidrologice de probabilitate și cele hidraulice permit determinarea întinderilor albiei majore pentru asigurări de depășire a debitelor maxime. Lățimea  $B$  și adâncimea medie  $Y_{med}$  a secțiunii transversale de curgere a curentului sunt în relație directă cu debitul  $Q$ . Pe baza cercetărilor în natură sau laborator, s-au stabilit o serie de formule de legătură între acești parametri.

Exemplu: Formula Blench

$$B = \left( \frac{\alpha}{\beta} \cdot Q \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad Y_{med} = \left( \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot Q \right)^{\frac{1}{3}} \quad (9.5)$$

unde  $\alpha$  și  $\beta$  sunt parametri funcție de forma profilului albiei și granulației sale.

Suprafața liberă nu e riguros orizontală, datorită unor curenți secundari. Dacă debitul crește, pe porțiuni rectilinii suprafața are o formă convexă (cu cote mai mari în mijlocul albiei) și dacă debitul scade forma devine concavă (cu cote mai mari către maluri).



Profil transversal de principiu prin albia minoră și albia majoră.

Figura 9.3

### B. Profil longitudinal al albiei

Reprezentarea grafică în plan vertical a liniei talvegului și a liniilor suprafețelor libere la anumite asigurări ale debitului se numește *profil longitudinal*.

### C. Reprezentări batimetrice

Curbele batimetrice sunt linii de egală adâncime ale albiei considerate față de suprafața liberă a apei, la nivelul cel mai scăzut înregistrat după un timp îndelungat. Curbele celor mai mici adâncimi se prezintă ca niște elipse mult alungite.

Reprezentarea albiei prin curbe batimetrice se folosește în hidrologie pentru calculul volumului de apă acumulat de-a lungul unui anumit sector de albie, în studiul hidrodinamic al albiei, în proiectarea construcțiilor de amenajare a albiei.

## 9.4. Dinamica râurilor

Forțele care acționează asupra apei în timpul curgerii pe B.H. sunt:

### A. Forța gravitațională

Mișcarea apei din amonte în aval are loc asemenea mișcării pe un plan înclinat. Componenta tangențială a forței gravitaționale contribuie la deplasarea particulei de apă de-a lungul planului înclinat.

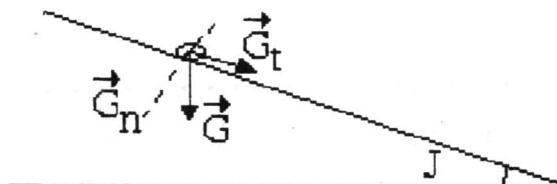


Figura 9.4

### B. Forța Coriolis

Această forță apare datorită mișcării de rotație a Pământului și acționează perpendicular pe direcția de mișcare a apei în râuri.

Expresia forței este:

$$\vec{F} = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_r \quad (9.6)$$

unde  $m$  este masa particulei de apă asupra căreia considerăm acțiunea forței,  $\omega$  este viteza de rotație a Pământului și  $v_r$  viteza medie a curentului de apă.

Forța Coriolis determină abaterea apei în emisfera nordică spre dreapta și în cea sudică spre stânga, fapt care duce la apariția eroziunii malurilor respective, datorită presiunii mai mari ce acționează pe aceste părți.

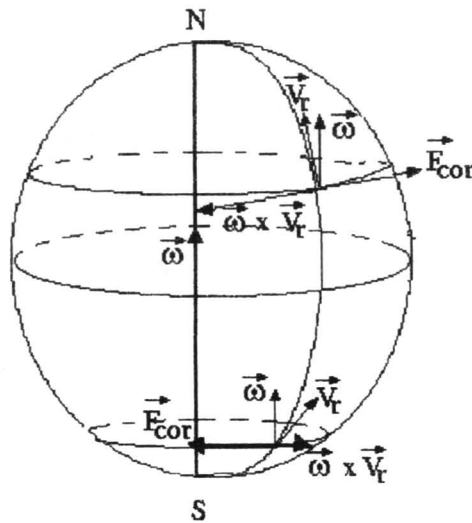


Figura 9.5

### C. Forța centrifugă

Pe sectoarele în curbă (cu raza  $R$ ) ale cursului de apă datorită acțiunii forței centrifuge suprafața liberă se înclină cu un unghi  $a$  față de planul orizontal.

Acest unghi se poate calcula din figura de mai jos conform relației:

$$\tan a = \frac{mv^2}{R} = \frac{v^2}{gR} \quad (9.7)$$

Diferența de nivel dintre suprafața liberă a apei între cele două maluri are valoarea  $\Delta y$  (vezi figura 9.6) și se exprimă prin relația :

$$\Delta y = B \cdot \tan a = \frac{B \cdot v^2}{gR} \quad (9.8)$$

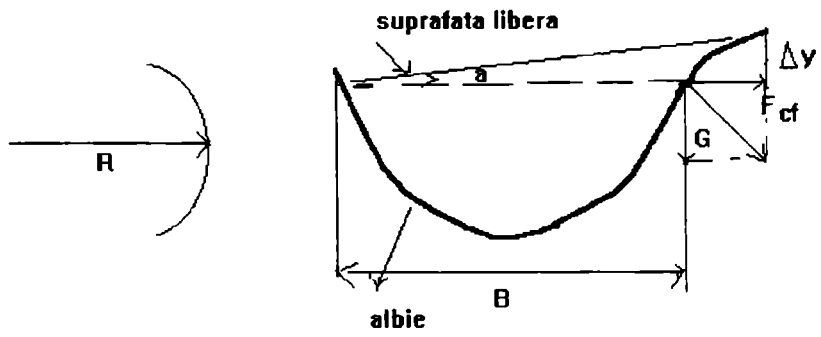


Figura 9.6

*D. Forța de frecare*

Datorită frecării care are loc cu patul albiei, asupra particulei de apă acționează o forță de frecare care se opune mișcării.

## MARIMI SI METODE DE MASURA IN HIDROLOGIE

## 10.1. Rețeaua hidrometrică

Pentru obținerea de date privind fenomenele hidrologice dintr-un bazin hidrografic fie prin observații directe, fie prin operații tehnice e necesar ca în anumite puncte geografice să se înființeze servicii cu acest specific.

În funcție de importanța studiilor efectuate, acestea se împart în *stații hidrometrice* și *posturi hidrometrice*. Totalitatea acestor servicii constituie *rețeaua hidrometrică*. Rețeaua hidrometrică e formată din două rețele componente: una cu funcționalitate de lungă durată - *rețeaua hidrometrică de bază* și cealaltă cu o durată de funcționare relativ scurtă și discontinuă - *rețeaua hidrometrică auxiliară*.

Prin stațiile și posturile hidrometrice se urmăresc în mod continuu variabilele hidrologice (niveluri, debite, etc) în unul sau mai multe profile transversale ale unui sector de lungime limitată (pentru apele de suprafață) sau într-un sistem de foraje (pentru apele subterane).

## 10.1.1. Rețeaua hidrometrică a apelor de suprafață

Rețeaua hidrometrică de bază trebuie să furnizeze date în mod continuu cel puțin 25 de ani. Pentru amplasarea stațiilor și posturilor hidrometrice astfel încât să se asigure caracterul natural al variabilei studiate se ține cont de următoarele:

- se evită amplasarea în vecinătatea imediată a construcțiilor hidrotehnice;
- se alege sectoare rectilinii cu profile invariabile, evitându-se instabilitatea în plan orizontal și vertical al albiei;
- se evită localizarea lor în sectoare cu variații mari ale uneia dintre mărimi (ex: nivelul în profil transversal) care duc la variații mici ale altei mărimi (ex: debitul).

Repartizarea stațiilor și a posturilor hidrometrice în rețea trebuie să se facă după următoarele criterii astfel încât să se obțină o cât mai bună coordonare și exploatare a datelor obținute pe întregul bazin hidrografic:

- pe sectoarele lungi fără afluenți importanți, distanțele între două puncte hidrometrice să se aleagă astfel încât debitul mediu al cursului de apă între două puncte învecinate să difere cu circa 20%;
- la confluențe importante, fiecare curs de apă să dispună de un punct în aval la o distanță care să satisfacă diferența de 20% în raport cu însumarea debitelor de la confluență.

Punctele hidrometrice ale rețelei auxiliare completează în mod temporar rețeaua de bază, pentru a obține informații suplimentare (ex: pentru proiectarea unor construcții hidrotehnice în amplasamente îndepărtate de punctele hidrometrice existente, pentru îmbunătățirea metodelor de prognoză hidrologică, etc.)

### 10.1.2. Rețeaua hidrometrică a acviferelor freatice

Rețeaua hidrometrică în acest caz constă din puncte de măsurătoare alcătuite din foraje singulare sau grupate în triunghiuri, care permit determinarea direcției și sensului de curgere ale curentului subteran. Modul de repartizare a forajelor depinde de natura structurilor freatice și de interacțiunea acestora cu apele de suprafață.

Pentru studii lărgite asupra interacțiunii ape de suprafață - ape subterane, se utilizează foraje amplasate perpendicular pe cursul de apă.

## 10.2. Nivelul

### 10.2.1. Hidrometria nivelurilor la apele de suprafață

Nivelul reprezintă cota unui punct situat pe suprafața liberă a apei la un moment dat. Planul de referință orizontal față de care se determină această cotă poate fi nivelul mării sau oricare alt plan relativ. Se notează de obicei cu  $H$ .

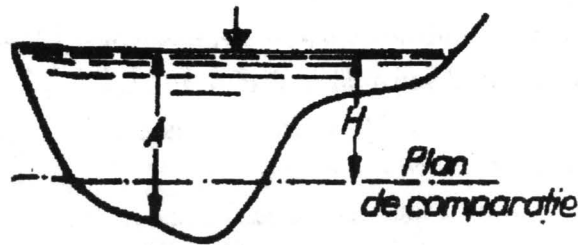


Figura 10.1

Când linia suprafeței libere nu e orizontală, nivelul se consideră ca fiind media valorilor sale determinate pe lățimea suprafeței libere.

*Mirele hidrometrice* sunt instalații, aparate și construcții cu care se determină nivelul apelor de suprafață în cadrul stațiilor și posturilor hidrometrice.

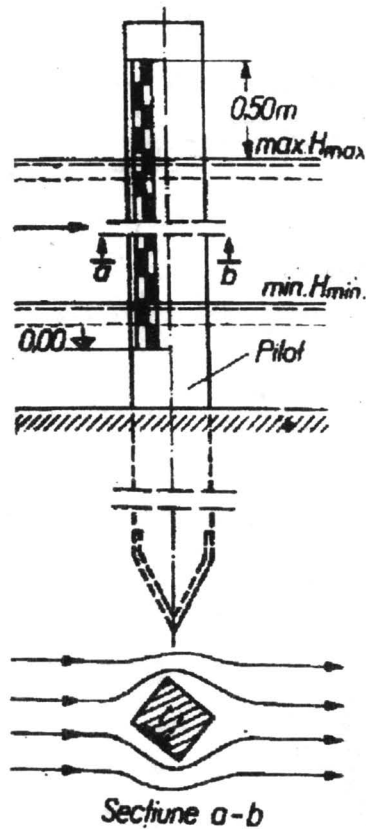
a. Mire hidrometrice simple - sunt rigle gradate din doi în doi centimetri care se montează pe un suport fixat în curentul apei fără să perturbe curgerea normală astfel încât:

- planul orizontal de referință să treacă prin gradația "0" a riglei și să se găsească sub cel mai scăzut nivel cunoscut în zona respectivă.

- gradația superioară să fie cu 0.5 m mai sus decât nivelul maxim cunoscut (figura 10.2). Mira hidrometrică simplă se citește de către observatori cu ochiul liber de pe mal sau de pe o punte amenajată, în anumite ore fixate ale zilei.

b. Limnigrafe - sunt aparate care înscriu pe grafic în mod continuu nivelurile. În funcție de amplitudinea nivelurilor, limnigrafele înregistrează pe o foaie de grafic nivelurile la scări de la 1:5 la 1:20, în perioadă de o zi, o săptămână sau 15 zile. Aparatul urmărește direct nivelul printr-un plutitor de la suprafața apei și îl transmite la un sistem de înregistrare.





Secțiune a-b  
Suportul pe piloți  
al mirei hidrometrice.

c. Teletransmițătoare - sunt aparate de măsurat ce transmit singure valoarea nivelului măsurat la distanțe mari. Aceste aparate se construiesc pe principiul variației intensității curentului electric sau pe principiul emiterii de impulsuri electrice.

Teletransmițătorul bazat pe variația intensității curentului electric este astfel construit încât variația nivelului duce la variația intensității, care se transmite la dispozitivul de recepție etalonat în unități ale nivelului (figura 10.3). Aparatul funcționează până la tensiunea de 60 V și poate transmite informații până la 5 km. Erorile asupra măsurătorilor sunt influențate de variația temperaturii și umidității aerului care duc la modificări ale caracteristicilor circuitului de transmisie.

Instalațiile construite pe baza emiterii de impulsuri electrice pot transmite informații până la câteva sute de kilometri.

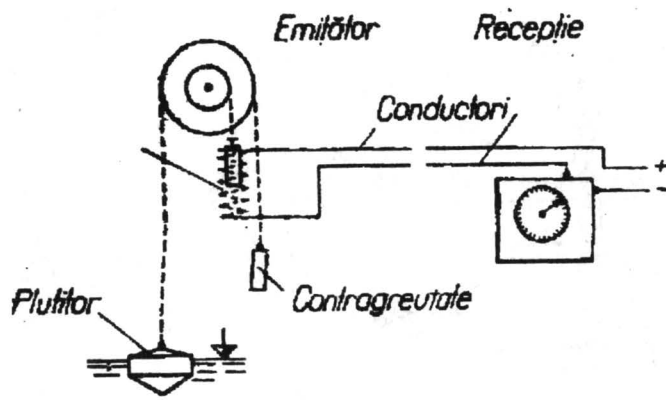


Figura 10.3

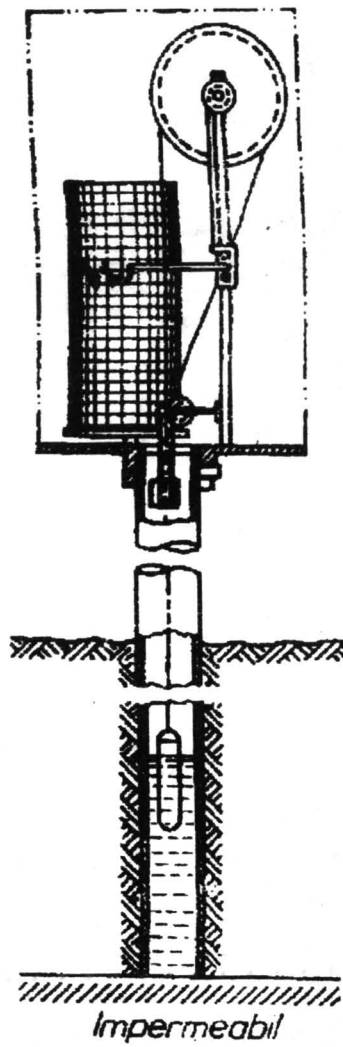


Figura 10.4

### 10.2.2. Hidrometria nivelurilor la apele freatice

În scopul determinării nivelurilor apelor freatice se practică foraje care să pătrundă în stratul acvifer.

Modul de realizare a unui foraj este următorul (figura 10.5):

- se introduce până la stratul de bază impermeabil o coloană metalică cu diametrul de 300 mm și în interiorul ei o altă coloană metalică cu diametrul de 100 mm, prevăzută cu fante pentru a interacționa cu acviferul.

- se umple spațiul dintre cele două coloane cu pietriș până la adâncimea de un metru de la nivelul terenului, și peste se pune argilă.

- se extrage coloana exterioară pe măsură ce se umple spațiul dintre cele două coloane; se constituie astfel filtrul forajului.

- se ridică deasupra terenului capătul exterior al coloanei interioare și se închide cu capac.

Planul de referință față de care se determină nivelul apei din foraj este planul orizontal care trece prin capătul exterior al coloanei. Valoarea nivelului se determină prin citirea directă pe o ruletă metalică a lungimii desfășurate în interiorul forajului. Ruleta are la capătul din interiorul forajului un dispozitiv care semnalizează sonor sau optic contactul cu suprafața apei. Valoarea nivelurilor freaticelor se poate înregistra direct și continuu cu ajutorul limnigrafelor montate la capătul exterior al coloanei (figura 10.4).

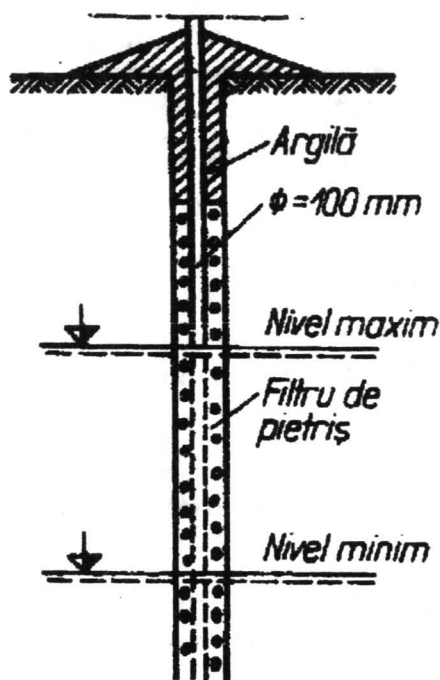


Figura 10.5

### 10.2.3. Modul de reprezentare a datelor de nivel

#### a. Hidrografe de nivel

Reprezentarea grafică în ordine cronologică a nivelurilor măsurate la o stație hidrometrică de-a lungul unui interval de timp formează așa numitul *hidrograf de nivel* (figura 10.6).

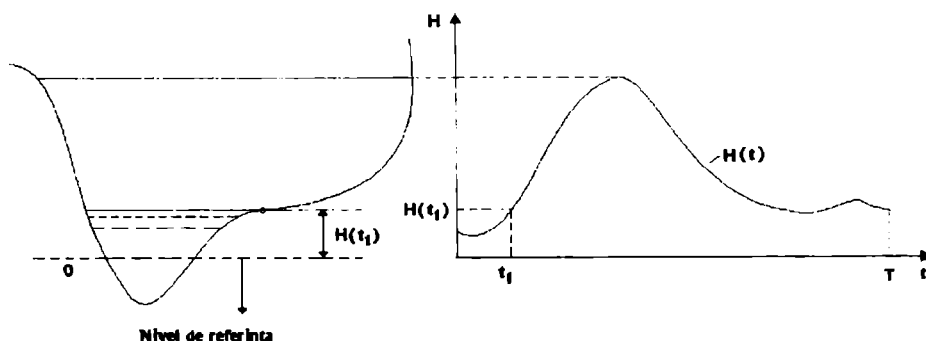


Figura 10.6

Hidrografele se elaborează pe intervale de câte un an sau pe anumite luni din întreaga perioadă de ani de când se efectuează observațiile. Limnigrafele redau în mod automat aceste hidrografe dar corespunzător intervalului de timp și scării proprii a aparatului.

Pentru fiecare an se constată o epocă de niveluri mari în intervalul martie -iunie și una sau două epoci cu niveluri scăzute în timpul verii și iernii. Graficul de nivel din epoca de niveluri mari se numește *hidrograf de viitură*.

Valorile caracteristice ale nivelurilor sunt cele extreme ( nivel maxim anual, multianual; nivel minim anual, multianual) și cele medii (nivel mediu anual, multianual). Cu aceste valori se formează șiruri statistice care sunt baza de calcul a valorilor asigurate și a generării de noi valori (conform calculului statistic - vezi capitolul 8).

#### b. Grafice de durată și de frecvență

Pe baza hidrografului de nivel se pot construi încă două grafice uzuale în problemele de folosire a apelor: graficul de durată și graficul de frecvență a nivelurilor (figura 10.7).

*Graficul de durată a nivelurilor* prezintă duratele nivelurilor hidrografului în ordine descrescătoare.

*Graficul de frecvență a nivelurilor* prezintă durata de variație a nivelului pentru o clasă de nivel  $\Delta H$ .

Utilitatea lor constă în faptul că dau posibilitatea de a determina în cât timp (ore, zile) din întregul interval a fost egalat sau depășit un nivel sau o clasă de niveluri.

### 10.3. Adâncimea

Adâncimea reprezintă diferența între cotele suprafeței libere și a unui punct situat în planul albiei. Se notează de obicei cu  $A$  (vezi figura 10.1). Pentru același nivel, în profil transversal se obțin diferite valori pentru adâncime. Adâncimea se măsoară periodic pentru a urmări schimbările morfologice ale albiei ( depuneri, eroziuni) și pentru a determina secțiunea de curgere la nivelurile curenului.

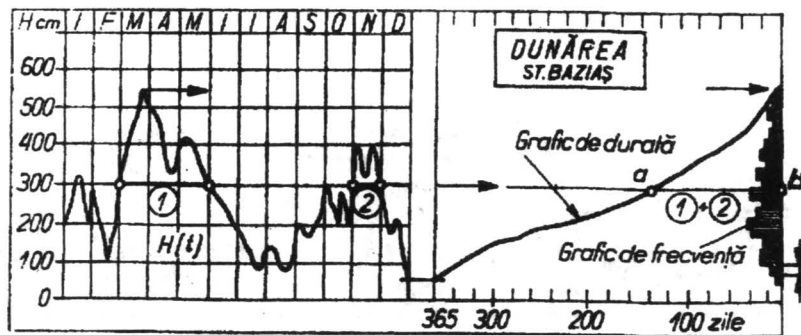


Figura 10.7

În scopul de a determina adâncimea în cadrul unei secțiuni transversale se materializează limita suprafeței libere la contactul cu malurile prin anumite repere. Valoarea adâncimii se măsoară cu sonde gradate care se introduc în cursul de apă. Pentru adâncimi mici se folosesc cabluri gradate și se citește direct valoarea adâncimii. Pentru adâncimi mari citirea directă nu mai dă valoarea reală a adâncimii deoarece se adaugă o anumită eroare datorată presiunii curentului care abate cablul de la verticală. Pentru o determinare corectă se înregistrează unghiul făcut de cablu cu verticala și se estimează eroarea creată. În final se determină valoarea reală a adâncimii.

#### 10.3.1. Determinarea secțiunii de curgere

Valoarea secțiunii de curgere (secțiunea transversală pe cursul de apă) e necesară în calculul debitului curentului de apă corespunzător unui anumit nivel.

Secțiunea transversală trebuie măsurată perpendicular pe direcția de mișcare a curentului. Se aleg corespunzător lățimii suprafeței libere distanțele "d" între sondajele unde se determină adâncimea pentru profilul respectiv. Aceste distanțe "d" împreună cu adâncimile "A" măsurate, constituie coordonatele care intră în calculul secțiunii de curgere respective, și care permit determinarea formei secțiunii.

### 10.4. Viteza

#### 10.4.1. Metode de determinare a vitezei apelor de suprafață

Pentru caracterizarea mișcării apelor curgătoare de suprafață se folosește noțiunea de viteză medie a secțiunii de curgere. Viteza medie a secțiunii rezultă din mulțimea de viteze punctuale distribuite în secțiune. Vitezele punctuale oscilează în jurul unor valori medii. Pentru o curgere rectilinie și regulată distribuția pe verticală a vitezelor e parabolică sau logaritmică (vezi figura 10.8).

Când apar perturbații (ex: vântul, înghețul) se modifică forma distribuției pe verticală a vitezelor:

- când vântul bate în direcție opusă curgerii se măresc adâncimile și se diminuează viteza (vezi figura 10.8).

- când vântul are direcție comună cu curgerea are loc micșorarea adâncimilor și amplificarea vitezei (vezi figura 10.8).

- când curentul se mișcă sub un pod de gheață au loc de asemenea modificări în distribuția vitezelor, după cum arată figura 10.8.

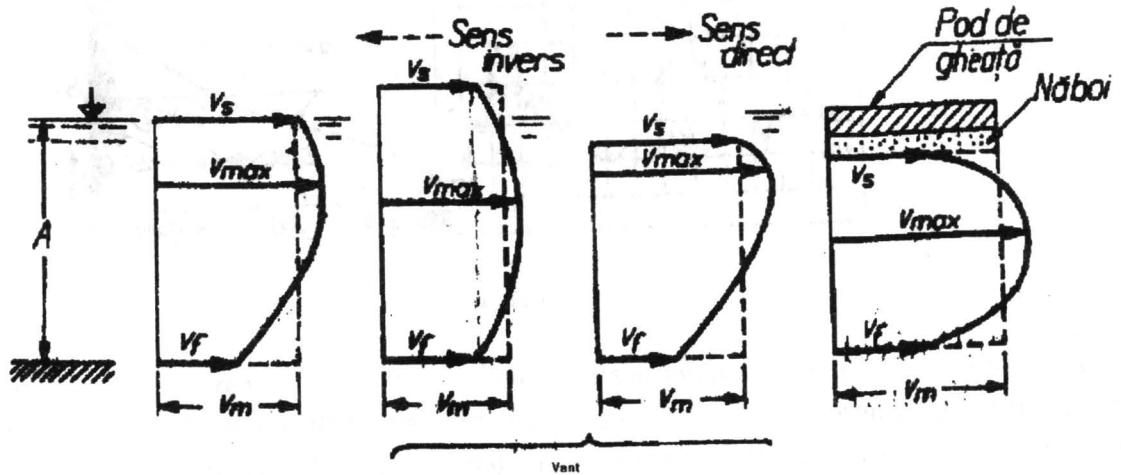


Figura 10.8

Viteza punctuală a curentului de apă se măsoară cu morișca hidrometrică (figura 10.9). Aparatul respectiv transformă viteza orizontală a curentului în viteză de rotație prin intermediul elicei cu care este prevăzut, după legea:

$$v = a + b \cdot n \quad (10.1)$$

unde  $v$  este viteza liniară a apei,  $n$  este turația elicei,  $a$  și  $b$  sunt parametri care depind de tipul de fabricație al aparatului.

Aparatul este construit astfel încât la o rotație a axului aparatului elicea se învârtă de  $N$  ori și roțița care restabilește curentul în circuit o singură dată. O dată cu restabilirea contactului se pune în funcțiune și sistemul de semnalizare care poate fi sonor sau optic.

Dacă într-un punct în care se fac măsurătorile se înregistrează  $S$  semnale în timpul  $T$  secunde atunci turația  $n$  a elicei e dată de următoarea relație:

$$n = \frac{N(S - 1)}{T} \text{ rot/s} \quad (10.2)$$

Pentru calculul vitezei medii pe verticală se fac determinări de-a lungul verticalei respective în punctele situate la adâncimile  $0,2 A$ ;  $0,8 A$  ( pentru o verticală cu adâncimea  $A$  ). Pentru efectuarea acestor măsurători morișca se suspendă de un cablu și se coboară pe verticală în curentul de apă.

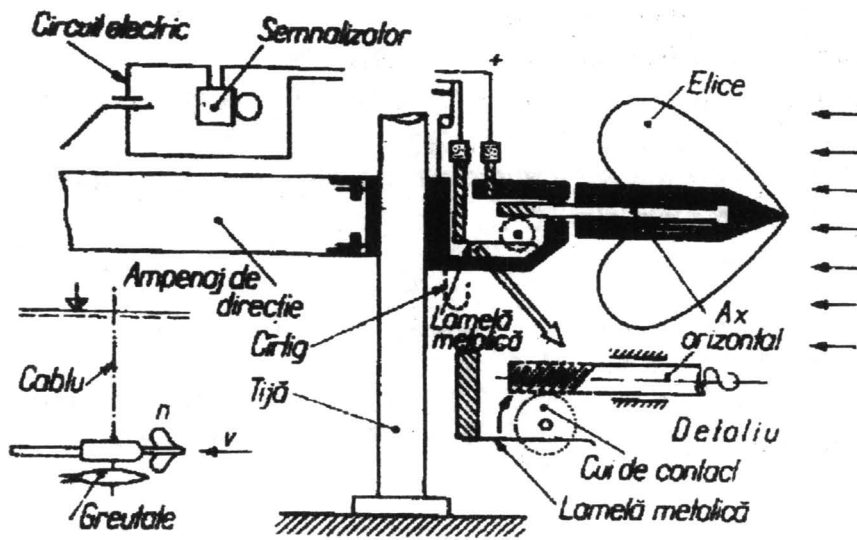
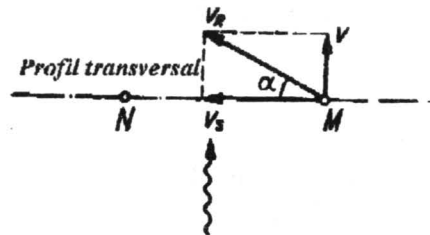


Figura 10.9

Pentru măsurători rapide se folosește o șalupă în continuă mișcare din care se determină viteza cu morișca hidrometrică, de la un mal la celălalt al cursului de apă.

Figura 10.10



În punctul M aflat la adâncimea  $y$  se determină viteza curentului din legea de compunere a vitezelor:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_s + \vec{v} \quad (10.3)$$

unde  $v$  este viteza curentului la adâncimea  $y$ ;  $v_R$  este viteza rezultantă înregistrată de morișca hidrometrică în mișcarea șalupei cu viteza  $v_s$ .

Unghiul dintre direcția axului moriștei și direcția profilului transversal ( $\alpha$ ) se înregistrează automat ca și adâncimea  $y$ . Expresia analitică a vitezei la adâncimea  $y$  în funcție de viteza care se măsoară cu morișca este :

$$v = v_R \cdot \sin \alpha \quad (10.4)$$

Trecerile succesive ale șalupei de la un mal la altul permite determinarea vitezelor punctuale din secțiunea udată a cursului de apă.

#### 10.4.2. Metode de determinare a vitezei apelor subterane

Apele subterane sunt caracterizate de două tipuri de viteze distincte : viteza medie reală sau efectivă și viteza aparentă sau de filtrare.

a. Viteza medie reală se definește ca raportul dintre debitul real prin secțiunea transversală de curgere și aria suprafeței eficiente a secțiunii:

$$u = \frac{Q}{\omega_{ae}} \quad (10.5)$$

$\omega_{ae}$  este aria corespunzătoare tuturor golurilor aflate în comunicație (aria traversată efectiv de apă). Relația dintre aria eficientă și cea totală este următoarea:

$$\omega_{ae} = m_e \cdot \omega \quad (10.6)$$

unde  $m_e$  este porozitatea eficientă și  $\omega$  este aria transversală totală.

Pentru determinarea vitezei medii reale se folosesc trasorii. Din punct de vedere al detectării lor trasorii se clasifică în trasori chimici, coloranți, substanțe biologice, trasori izotopici.

#### 1. Trasori chimici

Trasorii chimici utilizați sunt săruri ușor solubile (ex: clorură de sodiu, clorură de calciu, clorură de amoniu, acid boric, azotați). Detectarea acestor trasori se face prin măsurători de rezistivitate (metoda I) sau prin prelevare de probe și analiză chimică în scopul determinării concentrației (metoda II).

##### Metoda I

Această metodă utilizează electroliți foarte puternici cum ar fi clorură de sodiu sau clorură de calciu. Trasorul se introduce într-un foraj  $F_1$  și se înregistrează trecerea sa în forajul  $F_2$ , amplasat în aval față de  $F_1$ , prin măsurarea rezistenței electrice între tubul forajului  $F_2$  și conductorul metalic central al acestui foraj. .

O dată cu înaintarea trasorului scade rezistența dintre cei doi electrozi, urmând ca la atingerea electrodului din forajul  $F_2$  să se producă un scurtcircuit înregistrat de ampermetrul A.

Dacă  $l$  este distanța dintre cele două foraje și  $\Delta t$  este timpul de propagare a trasorului (timpul scurs de la introducerea trasorului în  $F_1$  și înregistrarea scurtcircuitului) atunci viteza reală de deplasare a apei în stratul freatic este dată de raportul dintre distanța  $l$  și intervalul de timp  $\Delta t$ .

$$u = \frac{l}{\Delta t} \quad (10.7)$$

Metoda se aplică în cazul rocilor permeabile și distanțele între cele două foraje cuprinse între 0,75 și 1.50 m.



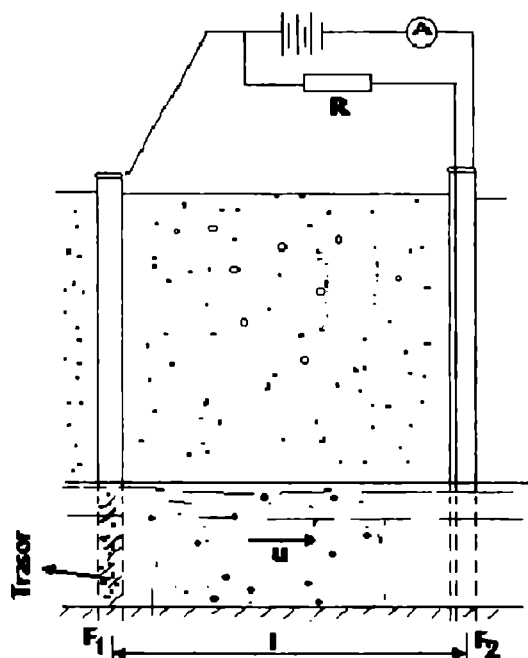


Figura 10.11

## Metoda II

Ce-a de-a doua metodă propune detectarea concentrațiilor trasorului în diverse foraje de observație prin prelevare de probe. Se utilizează tot relația (10.7) pentru calculul vitezei, cu următoarea semnificație a termenilor:  $l$  este distanța dintre două foraje și  $\Delta t$  este intervalul de timp între atingerea maximelor concentrației trasorului în fiecare foraj. Metoda dă erori de ordinul de mărime al parametrului determinat.

### **2. Coloranți**

Se pot introduce în apa subterană coloranți ca fluoresceina, rodamina B, albastru de metil, albastru de anilină, fucsina, roșu de Congo, etc. Colorantul cel mai des utilizat este fluoresceina (sarea de sodiu a resorcinal - ftaleinei :  $C_{20}H_{10}O_5Na_2$ ). Folosirea acestui colorant e limitată la terenuri cu strate granulate permeabile și în strate fisurate. Datorită dependenței intensității culorii fluoresceinei de valoarea pH-ului mediului în care se află, măsurătorile trebuie să se facă la un  $pH = 9$  deoarece în această regiune intensitatea fluorescenței e aproximativ constantă (vezi figura 10.12)

Fluoresceina poate fi detectată cu fluorimetrul în diluții maxime de  $5 \cdot 10^{-4}$  mg.

### **3. Substanțe biologice**

Domeniul de utilizare al acestor trasori este foarte limitat, din cauza reținerii trasorului de către mediile străbătute de apa subterană. Substanțele biologice se folosesc pentru stabilirea perimetrelor de protecție sanitară, la instalațiile de captări și de tratare a apelor. În acest scop se folosesc: bacteria violaceus, bacteriofag antifolic, etc.

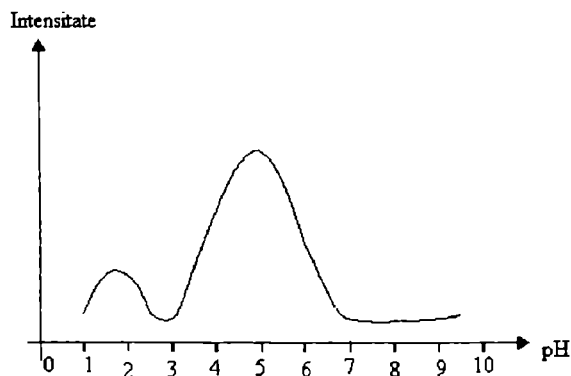


Figura 10.12

#### 4. Trasori izotopici (trasori neconvenționali)

Pentru studiul fenomenelor ce au loc în apele subterane folosirea izotopilor radioactivi ca trasori este foarte convenabilă întrucât timpul de detectare e mult redus față de utilizarea trasorilor convenționali. Izotopii radioactivi pot fi detectați direct în curentul acvifer. Trasorul ideal introdus în apa subterană trebuie să se deplaseze cu aceeași viteză ca și apa, fără pierderi pe unitatea de parcurs. În plus trasorul radioactiv trebuie să aibă o durată de înjumătățire corespunzătoare duratei de investigare și să emită radiații caracteristice astfel încât să nu contamineze apa peste limitele admisibile.

În funcție de durata de investigare se folosesc următoarele tipuri de izotopi:

- pentru lucrări de scurtă durată se folosește  $I^{131}$  cu timpul de înjumătățire  $T_{1/2} = 8,06$  zile.
- pentru lucrări cu durata medie se folosește  $Rb^{86}$  cu timpul de înjumătățire  $T_{1/2} = 18,6$  zile
- pentru lucrări cu durată mare se folosește  $Cl^{36}$  cu timpul de înjumătățire  $T_{1/2} = 3,08 \cdot 10^5$  ani.

Mișcarea izotopilor e caracterizată de variația concentrației în timp. Curba teoretică a concentrației pentru trasorul ideal e puțin diferită de curba pentru trasorul real în sensul că maximele sunt deplasate unul față de celălalt și curba reală e puțin aplatisată față de cea teoretică (vezi figura 10.13).

În figura 10.13 notațiile folosite reprezintă:

$t_t$  = timpul teoretic de atingere a concentrației maxime

$t_r$  = timpul real de atingere a concentrației maxime

$$\Delta t = t_r - t_t$$

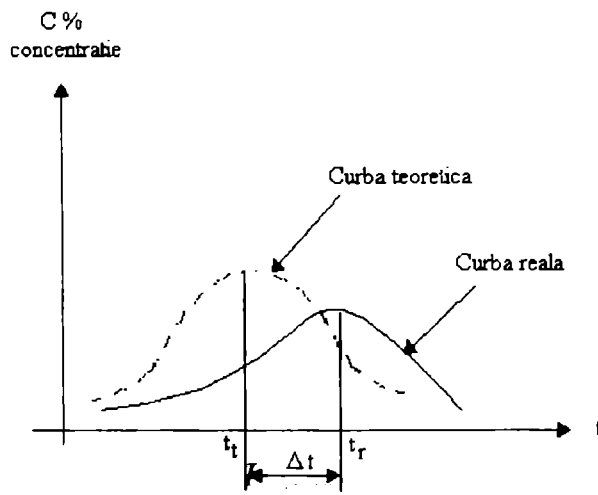


Figura 10.13

### Principiul de determinare a vitezei apei subterane

Determinarea vitezei folosind trasori izotopici se face prin evaluarea timpului de tranzit între două puncte din acvifer măsurându-se concentrația izotopilor în două piezometre plasate în punctele respective. Viteza e dată de relația :

$$u = \frac{L}{t_2 - t_1} \quad (10.8)$$

unde  $L$  este distanța dintre foraje care se alege în funcție de natura acviferului;

$t_1$  este momentul în care trazorul e introdus în pânza freatică în forajul  $F_1$ ;

$t_2$  este momentul în care trazorul e observat în forajul  $F_2$  situat în aval față de  $F_1$ .

Dacă între cele două foraje situate pe direcția de curgere a apei subterane există un regim de curgere permanent (fără nici un aport de apă nemarcată), micșorarea concentrației trazorului radioactiv este dată numai de dezintegrarea izotopului. Luând în considerație legea de dezintegrare radioactivă pentru două momente de timp diferite  $t_1$  și  $t_2$  putem exprima concentrațiile izotopilor față de concentrația inițială  $C_0$ .

$$C_1 = C_0 \cdot e^{-\lambda t_1} \quad (10.9)$$

$$C_2 = C_0 \cdot e^{-\lambda t_2} \quad (10.10)$$

Se împarte ecuația (10.10) la ecuația (10.9) și se obține:

$$\frac{C_2}{C_1} = e^{-\lambda t} \quad (10.11)$$

unde  $t = t_2 - t_1$  este timpul de tranzit între două foraje.

Dacă se exprimă constanta de dezintegrare prin intermediul timpului de înjumătățire

$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$  atunci expresia (10.11) devine:

$$\frac{C_2}{C_1} = 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (10.12)$$

Relația (10.12) exprimă scăderea concentrației izotopului radioactiv în timp.

În practică trebuie să se țină cont și de ceilalți factori care duc la scăderea concentrației traserului: convecția hidrodinamică, dispersia hidrodinamică și schimbul de ioni. Atunci legea după care variază concentrația izotopului este următoarea ( Inoue și Kaufman, 1963):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\rho \cdot \frac{1-p}{p} \cdot \frac{\partial q^*}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{0x} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_{0y} \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_{0z} \frac{\partial C}{\partial z} \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u_x \cdot C) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y \cdot C) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z \cdot C) \right] \quad (10.13)$$

unde  $C, q^*$  sunt concentrațiile specifice ale radioizotopului în fazele lichidă respectiv solidă,  $p$  este presiunea apei,  $\rho$  este densitatea apei,  $u_x, u_y, u_z$  sunt componentele vitezei apei pe cele 3 axe ale unui sistem de coordonate cartezian și  $D_{0x}, D_{0y}, D_{0z}$  sunt coeficienții de difuzie.

Primul termen din ecuația (10.13), din membrul drept descrie influența absorbției traserului, cel de-al doilea descrie influența difuziei, respectiv cel de-al treilea termen descrie influența convecției asupra variației concentrației traserului. Studiile experimentale au arătat că dispersia traserului se face în plan sub un unghi  $\alpha$  mai mic de 30 de grade (de obicei cuprins între 15 și 20 de grade) și că această dispersie este dependentă de viteza apei subterane (figura 10.14).

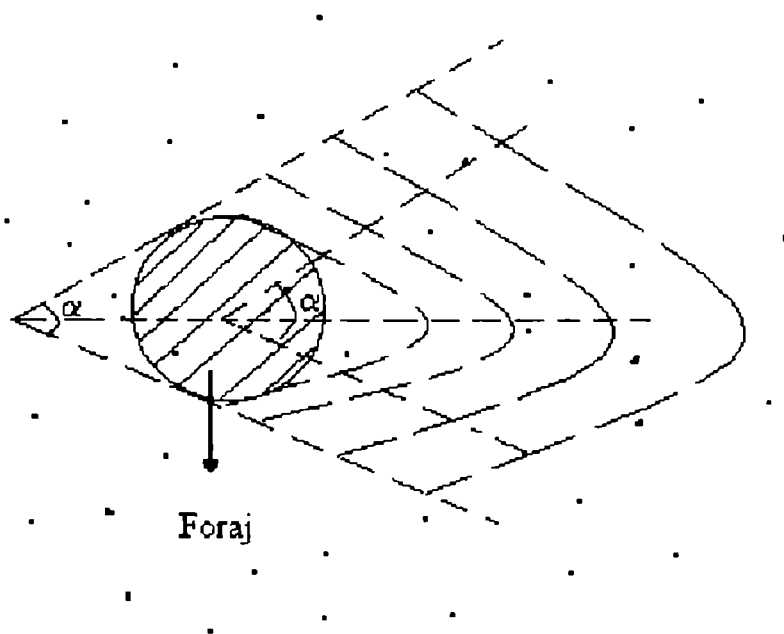


Figura 10.14

### Metoda de lucru

Pentru măsurarea vitezei reale sunt necesare minim 2 foraje. Distanța dintre foraje e dependentă de viteza apei. Trasorul se introduce în foraj sub formă de soluție apoasă, miscibilă. Activitatea totală necesară se calculează astfel încât să se țină cont de:

- volumul în care se diluează trasorul
- durata probabilă a măsurătorilor
- capacitatea de reținere a mediului străbătut de trasor
- protecția contra radiațiilor.

Pentru determinarea timpului necesar parcurgerii distanței dintre 2 foraje, se măsoară timpul la care s-a introdus trasorul în primul foraj și respectiv timpul la care s-a atins maximul concentrației în forajul 2. Această valoare se determină din curba concentrației și corespunde valorii maxime atinse.

În trecerea apei (respectiv a trasorului) printr-un mediu omogen puțin absorbant, cum ar fi pietrișul, variația concentrației trasorului în forajul de observație are o distribuție gaussiană cu un maxim foarte pronunțat (asemenea curbei teoretice pentru trasorul ideal). Considerând momentul zero, momentul introducerii trasorului în primul foraj, atunci timpul corespunzător maximului concentrației din această curbă reprezintă timpul necesar ca trasorul să parcurgă distanța dintre foraje. Pentru soluri neomogene sau mai mult absorbante (argile), curba concentrației este aplatisată și nesimetrică. Aprecierea timpului în care trasorul a străbătut distanța dintre cele 2 foraje se face prin determinarea centrului de greutate al curbei.

#### b. Viteza medie aparentă

Viteza medie aparentă sau de filtrare se definește ca fiind raportul dintre debitul apei subterane și aria suprafeței transversale pe cursul de apă:

$$v = \frac{Q}{\omega} \quad (10.14)$$

Între aria suprafeței transversale ( $\omega$ ) și aria eficace a suprafeței transversale ( $\omega_{ae}$ ) există relația  $\omega_{ae} = m_e \cdot \omega$  ceea ce duce la stabilirea relației între cele două viteze, cea aparentă și cea reală:

$$v = u \cdot m_e \quad (10.15)$$

Se prezintă în continuare o metodă de determinare a vitezei medii aparente a apelor subterane care utilizează izotopi radioactivi și se numește *metoda diluției punctuale*.

#### Principiul metodei diluției punctuale

Metoda diluției punctuale sau metoda forajului unic folosește un trasor radioactiv introdus într-un foraj, într-un volum izolat al acestuia, și se măsoară concentrația în același foraj (figura 10.15). Scăderea concentrației trasorului ca urmare a antrenării sale de către apa subterană stă la baza determinării vitezei de circulație.

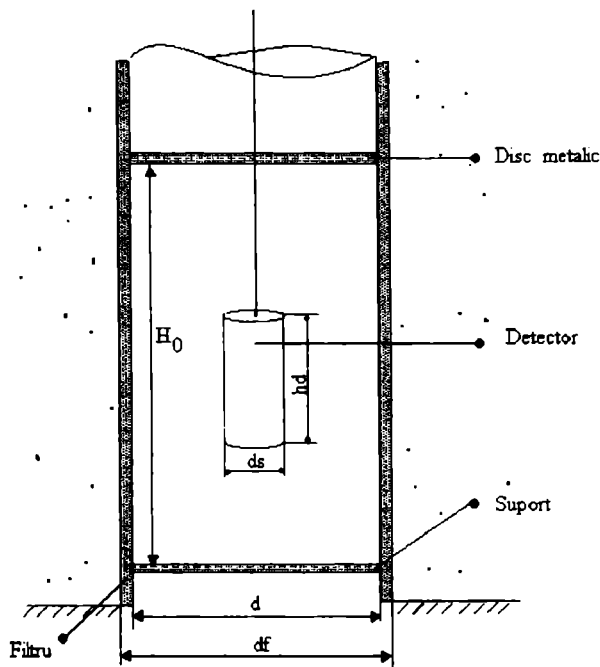


Figura 10.15

Pentru stabilirea ecuației pe baza căreia se poate determina viteza de circulație a apei subterane sunt necesare câteva ipoteze:

- dimensiunile forajului să fie bine cunoscute
- volumul activ pentru detectare este practic egal cu volumul de măsurare (*Volumul activ pentru detectare* este astfel definit, încât orice radiație care ar pătrunde în detector venind din afara acestui volum să contribuie cu mai puțin de 1% la mărirea vitezei de numărare. *Volumul de măsurare* este porțiunea din foraj de înălțime  $H_0$  izolată de restul forajului unde s-a introdus traserul, în care se execută măsurarea.)

- în orice moment al determinării, concentrația traserului e omogenă în volumul de măsurare

- măsurările se fac după ce s-a stabilit un regim de curgere permanent
- absența unui gradient de potențial hidrodinamic vertical (ipoteza Dupuit)
- sonda de detectare are o geometrie radială simetrică, astfel încât determinarea vitezei de numărare nu depinde de poziția sa în foraj.

După ce s-a introdus traserul în volumul de măsurare se înregistrează o variație a concentrației care depinde de mai mulți factori. Această variație poate fi exprimată astfel:

$$dC = dC_1 + dC_2 + dC_3 + dC_4 + dC_5 + dC_6 \quad (10.16)$$

unde:

$dC_1$  reprezintă scăderea concentrației traserului ca urmare a dezintegrării radioactive a izotopului radioactiv utilizat, caracterizată prin constanta de dezintegrare  $\lambda$ ;  
 $dC_2$  dă scăderea concentrației traserului ca urmare a antrenării soluției radioactive de către apa subterană care străbate volumul de măsurare;  
 $dC_3$  reprezintă variația concentrației datorită difuziei;  
 $dC_4$  reprezintă variația concentrației datorită dispersiei;  
 $dC_5$  reprezintă scăderea concentrației traserului datorită unor efecte fizico-chimice care au loc în mediul poros din stratul acvifer, cum ar fi schimbul ionic, adsorbția, etc;  
 $dC_6$  reprezintă scăderea concentrației traserului datorită unor efecte termice și transformări de energie.

Fie  $V$  volumul de apă cuprins în volumul de măsurare și  $C$  concentrația inițială a traserului. Ținând cont de aceste notații se poate scrie următoarea relație, care exprimă analitic semnificația termenului  $dC_2$ :

$$\frac{dV}{V} = \frac{dC_2}{C} \quad (10.17)$$

Variația volumului  $dV$  se poate exprima și prin intermediul debitului  $Q$  sau prin intermediul vitezei apei prin forajul respectiv,  $v_f$ :

$$dV = -Q \cdot dt = -d \cdot H_0 \cdot v_f \cdot dt \quad (10.18)$$

Din ecuația (10.18) și din expresia volumului  $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot H_0$  rezultă:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{4v_f \cdot dt}{\pi d} \quad (10.19)$$

Înlocuind în ecuația (10.17) obținem:

$$dC_2 = -\frac{4v_f \cdot C}{\pi d} \cdot dt \quad (10.20)$$

Celelalte variații care duc la scăderea concentrației traserului se pot exprima analog:

$$\begin{aligned}
 dC_1 &= -\lambda \cdot C \cdot dt \\
 dC_3 &= -x_3 \cdot C \cdot dt \\
 dC_4 &= -x_4 \cdot C \cdot dt \\
 dC_5 &= -x_5 \cdot C \cdot dt \\
 dC_6 &= -x_6 \cdot C \cdot dt
 \end{aligned} \quad (10.21)$$

unde  $\lambda, x_3, x_4, x_5, x_6$  sunt constante ce caracterizează proprietățile traserului radioactiv utilizat, al mediului investigat și ale apei subterane.

Înlocuind expresiile de mai sus în ecuația (10.16) se obține:

$$dC = - \left[ \frac{4 \cdot v_f}{\pi d} + (\lambda + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \right] \cdot C \cdot dt \quad (10.22)$$

Dacă se face notația  $x = \lambda + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$  atunci ecuația diferențială se scrie:

$$dC = - \left( \frac{4v_f}{\pi d} + x \right) \cdot C \cdot dt \quad (10.23)$$

În funcție de condițiile inițiale : la  $t = 0, C = C_0$ , soluția ecuației diferențiale (10.23) este:

$$C = C_0 \exp \left[ - \left( \frac{4v_f}{\pi d} + x \right) \cdot t \right] \quad (10.24)$$

Dacă ansamblul de detectare are un răspuns liniar, atunci concentrația e direct proporțională cu viteza de numărare și atunci relația de mai sus se poate scrie:

$$R = R_0 \exp \left[ - \left( \frac{4v_f}{\pi d} + x \right) \cdot t \right] \quad (10.25)$$

Pentru  $v_f = 0$  ecuația (10.25) se scrie:

$$R = R_0 e^{-xt} \quad (10.26)$$

Cunoscând valorile pentru  $R, R_0, t$ , din ecuația (10.26) se poate determina valoarea lui  $x$ .

Determinările experimentale au arătat că cel de-al doilea termen e mult mai mare față de ceilalți ceea ce poate duce la neglijarea tuturor celorlalți factori. Atunci  $v_f$  se poate exprima astfel (ținând cont de relația (10.25)):

$$v_f = - \frac{\pi d}{4t} \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad (10.27)$$

unde  $t$  reprezintă intervalul de timp de la începutul măsurărilor până când se înregistrează viteza de numărare  $R$ .

Valoarea  $v_f$  a vitezei determinate caracterizează numai trecerea apei prin gaura de sondă și diferă de viteza aparentă  $v$  din mediul investigat. Pentru determinarea vitezei aparente trebuie să se țină cont de faptul că perforarea unui strat acvifer de către un piezometru provoacă o perturbare a câmpului hidrodinamic al pânzei freatică subterane, și în plus filtrul forajului are o permeabilitate diferită de cea a terenului. Atunci debitul real de apă care trece prin secțiunea transversală a forajului ( $Q^*$ ) se calculează din relația:  $Q^* = \varphi \cdot Q$ , unde  $Q$  este debitul care ar trece prin aceeași secțiune a acviferului dacă nu s-ar ține cont de acești factori ( $Q$  folosit mai sus în calcule) și  $\varphi$  este un factor care exprimă perturbația câmpului hidrodinamic al pânzei de apă subterană.

Pentru exprimarea lui  $\varphi$ , Ogilvi (1958) a stabilit relația:

$$\varphi = \frac{2(1 - k)}{1 - \frac{d^2}{d_f^2} \cdot k} \quad (10.28)$$



unde  $k = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$  cu  $k_1 =$  coeficientul de permeabilitate al mediului investigat;  $k_2 =$  coeficientul de permeabilitate al stratului filtrant,  $d =$  diametrul găurii forate,  $d_f =$  diametrul exterior al stratului filtrant.

Tinând cont de această corecție, viteza aparentă se exprimă astfel:

$$v = -\frac{\pi d}{4\varphi t} \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad (10.29)$$

Relația este valabilă în cazul în care detectorul imersat în centrul volumului de măsurare are un diametru mult mai mic în comparație cu diametrul găurii forate. Dacă cele două diametre sunt comparabile trebuie să se țină cont de perturbarea produsă în câmpul hidrodinamic de către detector (vezi figura 10.16 - distribuția liniilor de curent care intersectează un foraj cu diametrul  $d$ , în care s-a introdus un detector cu diametrul  $d_s$ ).

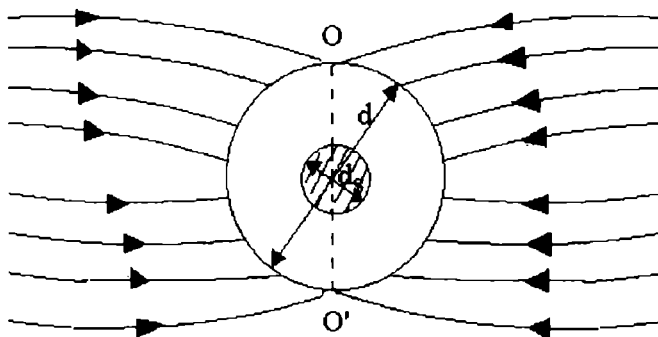


Figura 10.16

În acest caz viteza aparentă prin mediul respectiv e dată de relația  $v = \frac{v_f}{\beta}$  unde  $v_f$  este viteza în piezometru unde se fac determinările și  $\beta$  este un coeficient care caracterizează perturbația datorită detectorului. Acest coeficient a fost calculat de Krolikovski (1964):  $\beta = \varphi \frac{r}{r - r_s}$ , unde  $r$  este raza găurii forate,  $r_s$  este raza detectorului.

S-a constatat că dacă lungimea detectorului  $h_d$  este diferită de înălțimea volumului de măsurare  $H_0$  atunci trebuie să se mai ia în considerare o corecție. Astfel Borowczyk (1964) propune folosirea următoarei relații pentru determinări experimentale:

$$v = -\frac{\pi(d^2 - d_s^2)}{4\varphi \cdot d \cdot t} \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad (10.30)$$

Această relație corectează majoritatea erorilor care apar în practică datorită perturbărilor date de piezometru, filtrul său și detector în câmpul hidrodinamic al pânzei subterane.

## 10.5. Parametrii stratelor acvifere subterane

### 10.5.1. Porozitatea

Porozitatea eficace ( $m_e$ ) reprezintă totalitatea golurilor prin care apa poate circula liber sub acțiunea forței gravitaționale și se exprimă prin raportul dintre volumul tuturor golurilor în comunicație și volumul rocii.

În continuare se prezintă metoda de determinare a porozității eficace prin măsurători radiometrice, *metoda Halevy și Nir* (1962).

Se construiesc două foraje  $F_1$  și  $F_2$  care străbat întreg acviferul. În  $F_1$  se introduce traserul radioactiv, iar din  $F_2$  se pompează apă. Dacă  $H$  este grosimea medie a stratului acvifer atunci distanța dintre foraje,  $L$ , se alege astfel încât să satisfacă relația  $L > H$  (figura 10.17).

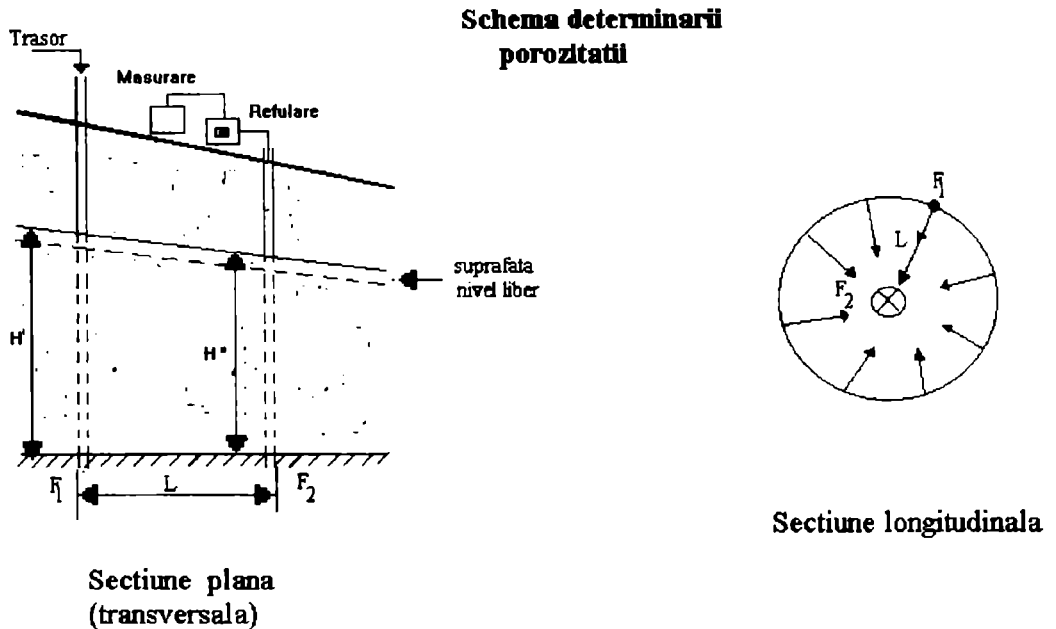


Figura 10.17

Tinând cont de relația  $L > H$  se poate considera că există o simetrie cilindrică în pompare.

Volumul de apă înmagazinat în formația acviferă reprezentată geometric de un cilindru cu raza  $L$  și generatoarea  $H$  va fi

$$V = \pi L^2 H m_e \quad (10.31)$$

Acest volum se determină efectiv prin pomparea apei în forajul  $F_2$ .

Dacă debitul cu care se pompează apa,  $Q(t)$ , este variabil în timp atunci volumul extras în timpul  $t_i$  se determină conform relației:

$$V(t_i) = \int_0^{t_i} Q(t) dt \quad (10.32)$$

Dacă apa se extrage cu debit constant  $Q$ , atunci volumul extras în timpul  $t_i$  se calculează astfel:

$$V(t_i) = Q \cdot t_i \quad (10.33)$$

Determinarea timpului  $t_i$ , necesar pentru pomparea întregului volum  $V$  conținut în acviferul reprezentat de un cilindru se face din curba de concentrație a traserului înregistrată în forajul  $F_2$  astfel încât maximum curbei corespunde timpului  $t_i$ .

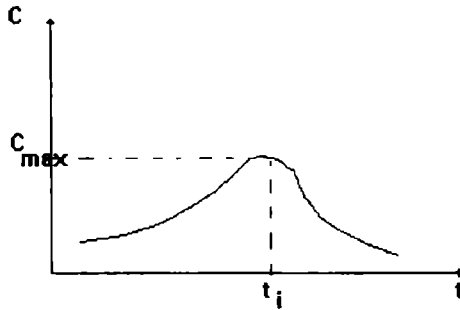


Figura 10.18

Se folosesc trasori cu viață medie sau lungă pentru a evita dezintegrarea în timpul măsurătorilor și deci pentru a reduce eroarea determinărilor.

Din relațiile (10.31), (10.32), (10.33) rezultă valoarea pentru  $m_e$ :

$$m_e = \frac{V(t_i)}{\pi L^2 H} \quad (10.34)$$

*Verificarea datelor experimentale:* Se pot verifica valorile obținute din măsurătorile asupra porozității eficiente, determinând în aceleași foraje viteza aparentă și viteza reală pentru acviferul respectiv. Valoarea obținută din relația  $m_e = \frac{v}{u}$  trebuie să fie aceeași cu cea obținută pe baza determinărilor conform metodei expuse mai sus, dacă erorile de măsurare sunt ne semnificative.

### 10.5.2. Rezervele de apă din bazinele subterane

Eriksson (1958) elaborează o metodă de calcul a rezervelor de apă din bazinele subterane care alimentează cursurile de apă.

În condiții staționare de curgere o cantitate de apă care provine dintr-un element de suprafață  $dS$ , din suprafața bazinului de apă subterană, va avea un timp  $T$  pentru a străbate bazinul subteran și a atinge cursul de apă.

În acest caz volumul de apă depozitat de-a lungul unei linii de curent,  $dW_j$  este dat de expresia:

$$dW_j = v \cdot T \cdot dS \quad (10.35)$$

unde  $v$  este viteza aparentă prin aceeași arie  $dS$ .

Depozitul total de apă subterană  $W_0$  se obține prin integrarea expresiei anterioare pe aria  $S_0$ :

$$W_0 = \int_0^{S_0} v \cdot T \cdot dS \quad (10.36)$$

unde  $S_0$  este aria modelului de curgere idealizat prin care se filtrează apa.

Pentru modelul idealizat considerat, timpul  $T$  necesar apei să străbată elementele de suprafață din secțiunile care alcătuiesc bazinul subteran poate fi considerat ca o funcție monotonă de  $S$ . În acest caz pentru  $S = S_0$  se obține  $T = T_0$ .

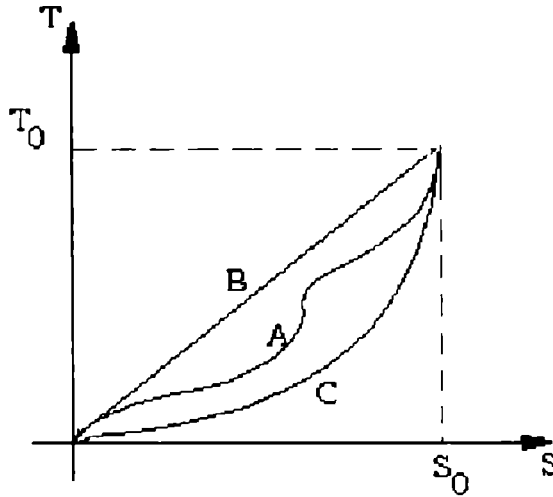


Figura 10.19

În figura 10.19 se reprezintă dependența dintre  $T$  și  $S$  în situații diferite: curba  $A$  reprezintă situația reală, curba  $B$  reprezintă relația dintre  $T$  și  $S$  pentru un model de curgere idealizat, pentru un sol cu o permeabilitate constantă, iar curba  $C$  reprezintă o relație exponențială între  $T$  și  $S$  tot pentru o curgere idealizată. Curgerea idealizată și cea reală sunt reprezentate în figura 10.20.

Dacă timpul necesar apei să străbată bazinul acvifer este proporțional cu distanța până la cursul de apă atunci relația între  $T$  și  $S$  se poate scrie astfel (situație corespunzătoare cazului B):

$$S = S_0 \frac{T}{T_0} \quad (10.37)$$

Curba  $C$  este exprimată analitic printr-o astfel de expresie:

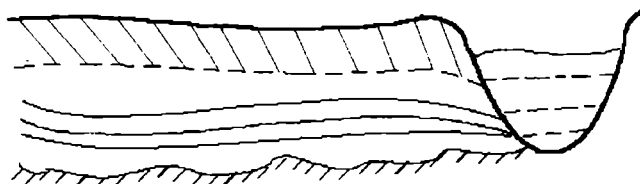
$$S = S_0(1 - e^{-aT}) \quad (10.37')$$

unde  $a$  este o constantă.

Se introduce în apa care alimentează bazinul subteran un traser radioactiv. Dacă la suprafața bazinului concentrația sa este  $C_0$ , iar timpul necesar parcurgerii elementului de suprafață  $dS$  este  $T$  atunci concentrația traserului care ajunge la cursul de apă va fi  $C$ , dată de expresia:

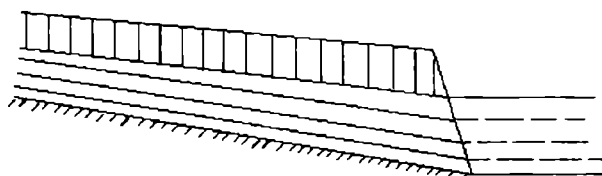
$$C = C_0 \cdot e^{-\lambda T} \quad (10.38)$$

unde  $\lambda$  este constanta de dezintegrare. Relația este valabilă pentru cantitatea de apă care străbate elementul de suprafață  $dS$ .



a) Situația reală - caz A

**Reprezentarea schematica  
a unui model de curgere subte-  
rana, indicandu-se liniile de  
curent**



b) model idealizat corespunzător unei  
permeabilități constante → caz B

Figura 10.20

Valoarea medie a concentrației traserului măsurată în apa care ajunge în râu este:

$$\bar{C} = \frac{C_0}{S_0} \int_0^{T_0} e^{-\lambda T} \cdot \frac{\partial S}{\partial T} dT; \quad \text{Formula Eriksson} \quad (10.39)$$

În funcție de cele două funcții  $S(T)$ , de la modelele idealizate B, C, se obțin următoarele valori:

Caz B:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{S_0}{T_0} \Rightarrow \bar{C} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{C_0}{T_0} (e^{-\lambda T_0} - 1) \quad (10.40)$$

Din relația (10.40) se calculează valoarea lui  $T_0$ , cunoscându-se valoarea pentru concentrația medie.

Caz C :

$$\frac{\partial S}{\partial T} = -aS_0 e^{-aT} \Rightarrow \bar{C} = -\frac{C_0 a}{a + \lambda} [e^{-(\lambda+a) \cdot T_0} - 1] \quad (10.41)$$

Din această relație se poate determina valoarea lui  $T_0$  care interesează.

Înlocuind valorile lui  $T_0$  rezultate din relațiile (10.40), (10.41) în ecuația (10.36) și făcându-se integrala în funcție de condițiile celor două cazuri idealizate, se află cantitatea de apă înmagazinată în acvifer,  $W_0$ .

### 10.6. Debit

Debitul  $Q$  al unui curent de apă se definește ca fiind volumul care trece printr-o secțiune normală de curgere în decursul unui interval de timp. Se măsoară în  $m^3/s$  sau  $l/s$ .

În hidrologie se folosește și debitul specific care reprezintă debitul raportat la suprafața bazinului hidrografic de pe care se colectează:  $q = \frac{Q}{F}$ . Se exprimă în unitățile  $m^3/(s \cdot km^2)$ .

Când debitul  $Q$  este constant pe intervalul de timp  $T$ , volumul  $Q \cdot T$  poate fi echivalat cu înălțimea  $h$  a unui strat de apă uniform repartizată pe suprafața  $BH$ ,  $F$ . Înălțimea corespunzătoare este dată de relația  $h = \frac{QT}{F} (l/m^2 \text{ sau } mm)$ .

Sistemul acesta de unități corespunde cu cel al precipitațiilor atmosferice și al evaporării apei, deci avantajează compararea valorilor acestor factori și facilitează stabilirea ecuației bilanțului hidrologic.

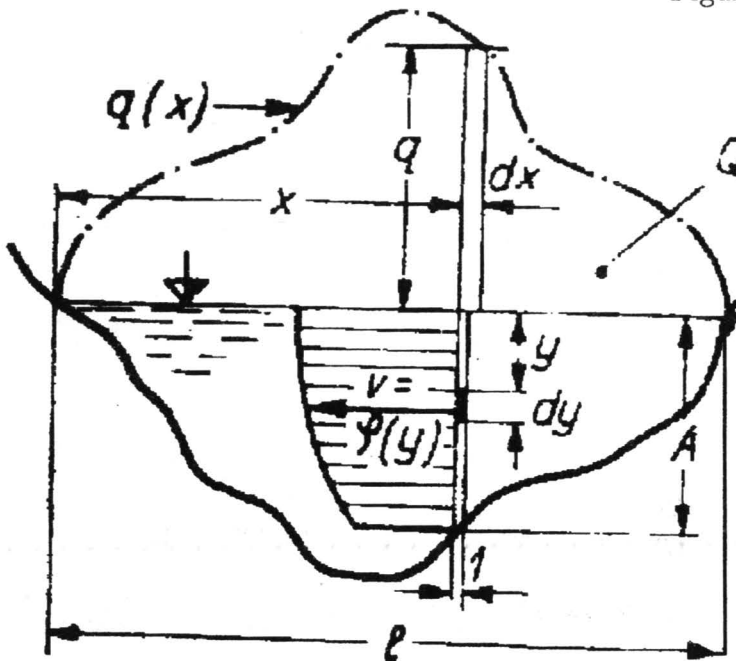
#### 10.6.1. Metode de determinare a debitului apelor de suprafață

##### a). Metoda vitezelor

Presupunem că există o funcție a vitezei exprimată față de coordonatele  $(x, y)$  ale curentului de apă:  $v = \varphi(x, y)$ . Pentru o secțiune cu lățimea unitară  $dx = 1$  și înălțimea elementară  $dy$  se poate exprima debitul elementar:

$$dq = \varphi(x, y) \cdot 1 \cdot dy \quad (10.42)$$

Figura 10.21



### Determinarea analitică a debitelor.

Pentru întreaga verticală de adâncime  $A$  se obține debitul:

$$q = \int_0^A dq = \int_0^A \varphi(x, y) \cdot 1 \cdot dy \quad (10.43)$$

Debitul corespunzător secțiunii de curgere rezultă din integrarea lui  $q$  pe toată lățimea  $l$  a secțiunii.

$$Q = \int_0^l q dx = \int_0^l \int_0^A \varphi(x, y) dx dy \quad (10.44)$$

În realitate nu există o funcție continuă  $\varphi(x, y)$ . În albiile naturale nu se pot face măsurători astfel încât să se exprime satisfăcător funcția de viteze în raport cu coordonatele secțiunii. În practică se folosește o metodă de calcul grafoanalitic. Pentru aceasta se desenează curentul de apă în profil transversal și distribuțiile vitezelor pe verticalele pe care au fost măsurate. Se calculează debitele  $q = \int_0^A v(y) dy = \bar{v}A$  și se reprezintă prin segmente verticale cu originea în planul suprafeței libere. Se trasează curba  $q(x)$  prin capetele acestor segmente (ca în figura 10.22). Se calculează  $Q = \int_0^l q(x) dx$  prin estimarea ariei conținută sub curba  $q(x)$ .

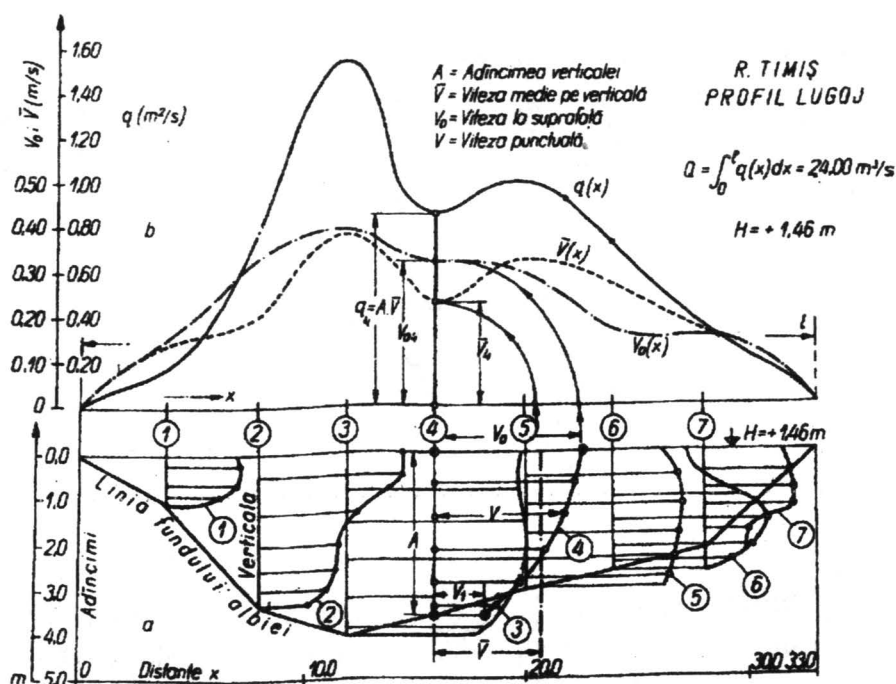


Figura 10.22

O altă metodă de calcul al debitelor se bazează pe curbele izotahe (de egală viteză). Aceste curbe se trasează în secțiunea de curgere pe baza valorilor vitezelor punctuale exprimate pentru o anumită adâncime și pentru o anumită coordonată în planul orizontal. Astfel debitul în secțiunea respectivă se poate exprima prin relația :

$$Q = \frac{1}{2} \sum f_i(v_i + v_{i+1}) \quad (10.45)$$

unde  $v_i, v_{i+1}$  sunt vitezele a două izotahe alăturate și  $f_i$  suprafața cuprinsă între cele două izotahe (figura 10.23).

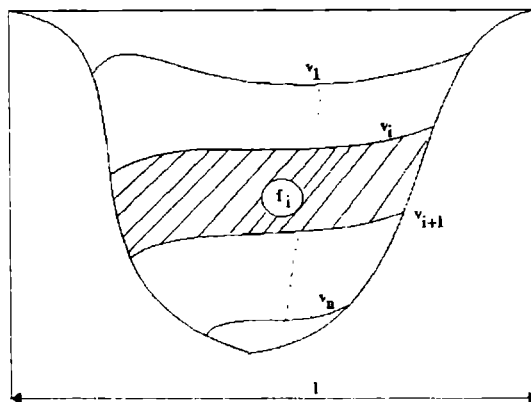


Figura 10.23

Toate aceste determinări ale lui  $Q$  sunt valabile în cazul în care nivelul albiei nu s-a schimbat pe durata efectuării măsurătorilor de viteză și a suprafeței secțiunii de curgere.

În caz contrar debitul se calculează pe suprafețe mai mici și nivelul la care se raportează debitul în acest caz va fi:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{v}_i b_i H'_i}{\sum_{i=1}^n \bar{v}_i b_i} \quad (10.46)$$

unde  $b_i$  sunt lățimile parțiale ale secțiunii de curgere pentru care se calculează debitul,  $\bar{v}_i$  sunt vitezele medii pe verticalele respective și  $H'_i$  sunt nivelele corespunzătoare timpului de măsurare a vitezelor pe verticală.

#### b) Metoda chimică

Procedeul diluției punctuale care se folosește în această metodă permite determinarea directă a debitului. În curentul din albie cu debitul  $Q$  se injectează o cantitate de traser chimic cu debitul  $q$  și concentrația  $C_1$ . În aval față de punctul de injecție, traserul va avea concentrația  $C_2$  și debitul total va fi  $Q + q$ . Traserul folosit este o sare solubilă. În acest caz



ecuația de bilanț a concentrației traserului chimic se scrie funcție de concentrațiile traserului  $C_1, C_2$ , măsurate în laborator și concentrația naturală a curentului,  $C_0$ .

$$(Q + q) \cdot C_2 = Q \cdot C_0 + q \cdot C_1 \quad (10.47)$$

De aici rezultă expresia pentru debit:

$$Q = q \cdot \frac{C_1 - C_2}{C_2 - C_0} \quad (10.48)$$

Concentrația  $C_1$  se determină în laborator din probele care s-au prelevat în amonte și concentrația  $C_2$  se determină din probele prelevate în aval. Experimental s-a constatat că  $C_2$  este mult mai mic decât  $C_1$  și  $C_0$  este mult mai mic față de  $C_2$ . Atunci relația care dă debitul se simplifică:

$$Q = q \frac{C_1}{C_2} \quad (10.49)$$

Metoda se folosește pentru determinarea debitelor în cazul curentilor cu grad mare de turbulență unde nu se poate folosi morișca pentru determinarea vitezei.

### c) Metoda integrării - Hull

Metoda folosește un traser radioactiv care se imersează în curentul de apă. Dacă se introduce în râu un traser cu o activitate determinată  $\Lambda$ , atunci în secțiunea de măsură unda traserului va avea o anumită lungime, funcție de distanța până la punctul de injecție.

Măsurarea concentrației traserului se face prin imersarea unui detector direct în curentul de apă. Unui detector imersat într-un lichid radioactiv îi este caracteristic un volum sensibil  $V$ , în funcție de caracteristicile de construcție și funcționare ale detectorului, ca și de izotopul folosit. Volumul sensibil este astfel definit, încât orice radiație provenită de la traserul radioactiv din exteriorul său, contribuie cu mai puțin de 1% la viteza de numărare care se obține în instalația electronică. Geometria de măsurare se alege astfel încât domeniul de măsurare efectiv să fie "ocupat" numai de apa care conține traserul radioactiv, adică sfera cu raza de investigație  $R_\infty$  să nu intersecteze baza sau malurile cursului de apă (vezi figura 10.24, caz b). În această situație, detectorul se consideră imersat într-un volum infinit.

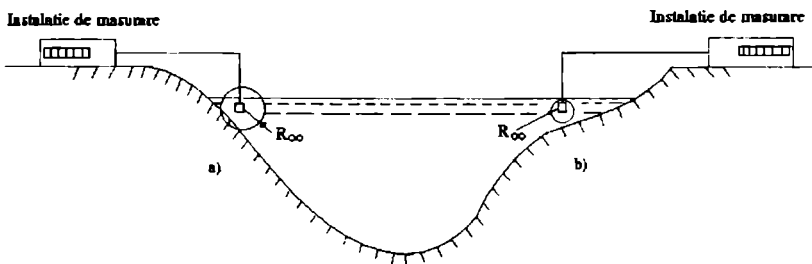


Figura 10.24

Se injectează instantaneu un traser cu activitatea  $\Lambda$ . Dacă nu există alte surse de contaminare ecuația continuității se scrie astfel:

$$\nabla(C \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial C}{\partial t} \quad (10.50)$$

unde  $C$  este concentrația traserului și  $\vec{v}$  este vectorul viteză a cursului de apă.

La  $t = 0$  există un volum  $W$  care conține toată cantitatea injectată  $\Lambda$ . Atunci prin integrarea ecuației (10.50) după timp și volum se obține:

$$\int_T \int_W \nabla(C \cdot \vec{v}) dW dt = \int_T \int_W \left(-\frac{\partial C}{\partial t}\right) dW dt \quad (10.51)$$

Dacă întreaga cantitate de traser părăsește volumul  $W$  la timpul  $T$  atunci activitatea  $\Lambda$  se scrie:

$$\int_T \int_W \left(-\frac{\partial C}{\partial t}\right) dW dt = \Lambda \quad (10.52)$$

Integrala din membrul stâng al ecuației poate fi transformată din integrală pe volum în integrală pe suprafață cu ajutorul teoremei Gauss și atunci se obține:

$$\int_T \int_{S_W} (C \cdot \vec{v})(d\vec{S}_W) dt = \Lambda \quad (10.53)$$

Suprafața  $S_W$  este suprafața care înconjură volumul  $W$ . Traserul se găsește în interiorul suprafeței  $S_W$  la timpul  $t = 0$  și în exteriorul ei la timpul  $t \geq T$ . Deci produsul  $\vec{v} \cdot d\vec{S}_W$  este zero în toată masa fluidului cu excepția volumului  $W$ , iar  $C$  este zero în amonte de punctul de injecție. De aici rezultă că integrala din ecuația (10.53) este zero în aval de intersecția suprafeței  $\Sigma$  a liniilor de curent cu suprafața  $S_W$ .

Debitul  $Q$  este dat de expresia:

$$\int_{\Sigma} \vec{v} d\vec{S}_W = Q \quad (10.54)$$

De aici rezultă:

$$\int_{S_W} \vec{v} d\vec{S}_W = \int_{\Sigma} \vec{v} d\vec{S}_W = Q \quad (10.55)$$

Întrucât în cazul unui regim permanent  $\frac{\partial Q}{\partial t} = 0$  și  $\int_T C dt$  este constantă pe suprafața  $\Sigma$ , se pot separa variabilele din ecuația (10.53) astfel:

$$\left[ \int_{\Sigma} \vec{v} d\vec{S}_W \right] \cdot \int_T C dt = \Lambda \quad (10.56)$$

Din relațiile (10.55) și (10.56) se obține:

$$Q = \frac{\Lambda}{\int_T C dT} \quad (10.57)$$

Relația care exprimă debitul se poate folosi dacă există o suprafață arbitrară în curent astfel încât integrala în timp a concentrației traserului în orice punct de pe această suprafață să fie constantă și dacă această suprafață cuprinde punctul în care se fac măsurătorile.

Presupunând că există o relație liniară între viteza de numărare  $R$  și concentrația  $C$ :  $C = \frac{R}{F_W}$ , unde  $F_W$  este factor de proporționalitate, atunci se poate scrie:

$$\int_T C dT = \int_T \frac{R}{F_W} dt = \frac{\int_T R dt}{\int_T F_W dt} = \frac{N}{F^*} \quad (10.58)$$

unde  $N$  este numărul total de pulsuri obținut din activitatea  $\Lambda$  și  $F^*$  este viteza de numărare obținută pentru o concentrație unitară în volumul  $W$ .  $F^*$  este un factor de calibrare și se determină în condiții statice, în laborator sau pe teren.

Deci debitul se exprimă astfel:

$$Q = F^* \cdot \frac{\Lambda}{N} = F^* \cdot \frac{\Lambda}{\int_T R dT} \quad (10.59)$$

### 10.6.2. Metode de determinare a debitului apelor subterane

Se studiază cazul apelor subterane (provenite din straturile freatice) care sunt colectate de cursurile de apă de suprafață pe care le intersectează.

În cazul în care avem un mediu cu o valoare constantă pentru conductibilitatea hidraulică,  $K$ , se instalează două piezometre cu care să se măsoare nivelurile apei subterane din care unul se situează în locul unde apa subterană intersectează albia.

În figura 10.25  $L$  este distanța dintre locul unde apa subterană intersectează albia și locul unde este plasat al doilea tub piezometric;  $h_1, h_2$  nivelurile apei subterane în cele două piezometre;  $l$  este lungimea frontului normal pe direcția de curgere.

Atunci  $Q$  este debitul care provine din stratul freatic pe lungimea  $L$  și este dat de relația:  $Q = \bar{v} \cdot \bar{\Omega}$ .

Legea lui Darcy:  $\vec{v} = -K \text{grad } h$  se scrie astfel:

$$v = K \cdot \frac{h_1 - h_2}{L} \quad (10.60)$$

Secțiunea medie pe lungimea pe care se calculează debitul este:

$$\bar{\Omega} = \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot l \quad (10.61)$$

Tinând cont de relațiile (10.60) și (10.61) debitul va avea următoarea expresie:

$$Q = \frac{K(h_1^2 - h_2^2) \cdot l}{2L} \quad (10.62)$$

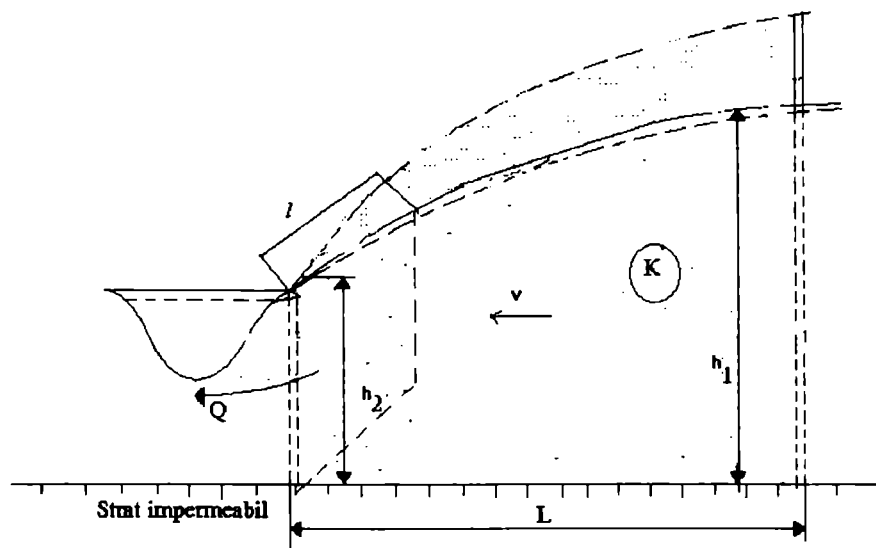


Figura 10.25

Dacă structura geologică a acviferului se compune din două straturi pentru care  $K_1$  și  $K_2$  sunt diferiți, atunci debitul se calculează ca o sumă de debite parțiale cu aceeași pantă piezometrică dar cu secțiuni corespunzătoare fiecărui strat (figura 10.26).

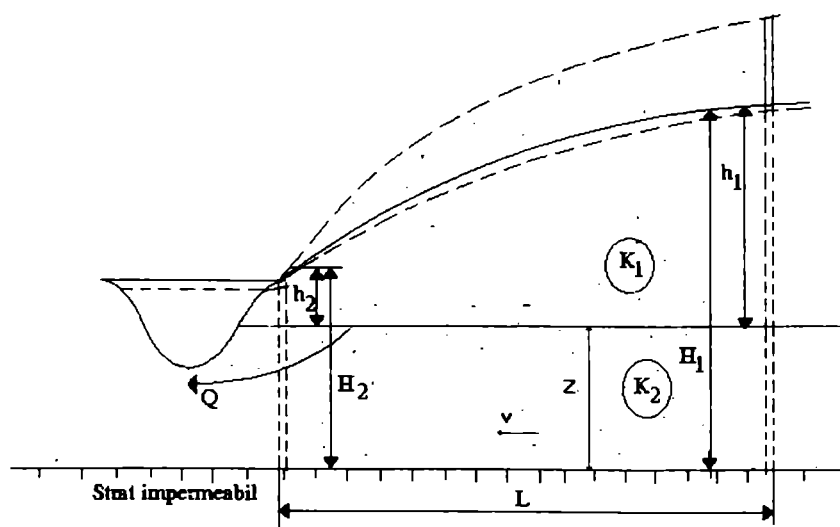


Figura 10.26

$$\begin{aligned}
 Q &= Q_1 + Q_2 = K_1 \cdot \text{grad } h \cdot \bar{\Omega}_1 + K_2 \cdot \text{grad } h \cdot \bar{\Omega}_2 = \\
 &= K_1 \cdot \frac{H_1 - H_2}{L} Zl + K_2 \cdot \frac{H_1 - H_2}{L} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} \cdot l
 \end{aligned}
 \tag{10.63}$$

Deci  $Q$  este:

$$Q = \frac{H_1 - H_2}{L} \left( K_1 Z + K_2 \frac{h_1 + h_2}{2} \right) \cdot l
 \tag{10.64}$$

### 10.6.3. Relația debit - nivel ( curba debitelor)

Există o legătură nemijlocită între cei doi factori, debit și nivel pentru aceeași secțiune de curgere denumită în hidrologie *curba debitelor* sau *cheia debitelor* sau *cheia limnometrică*. Stabilirea relației cantitative între debit și nivel oferă posibilități multiple de rezolvare a problemelor din domeniul hidrologiei, hidraulice și economiei apelor.

Cheia debitelor se poate determina în mod grafic prin reprezentarea perechilor  $(Q_i, H_i)$  înregistrate în timp, sau în mod analitic. Pentru determinarea analitică a curbei debitelor se iau în considerare două tipuri de profile:

a) pentru profile transversale stabile cu forma geometrică asemănătoare parabolei, trapezului, dreptunghiului, relația generală folosită este:

$$Q = Q_0(H + a)^n
 \tag{10.65}$$

unde  $Q_0$  este debitul la nivelul  $H + a = 1$ ;  $a$  este parametru de nivel și  $n$  este un exponent funcție de forma albiei.

Valorile lui  $Q_0, a, n$  se determină din setul de valori  $(Q_i, H_i)$ . Cei trei parametri caracterizează din punct de vedere hidrologic profilul transversal.

b) pentru profile stabile cu forme geometrice neregulate, se alege o funcție polinomială în scopul exprimării relației dintre  $Q$  și  $H$ .

$$Q = \sum_{j=0}^n a_j H^j = f(H)
 \tag{10.66}$$

De obicei se alege  $n = 4$ , polinomul conținând 5 termeni. Parametrii  $a_j$  se determină din condiția ca graficul  $f(H)$  să se apropie de curba debitului dusă prin valorile experimentale. Astfel se pune următoarea condiție de minim:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \sum_{j=0}^n [Q_j - f(H)]^2 \right) = 0 \quad , j = 0 \div n
 \tag{10.67}$$

Din cele  $n + 1$  ecuații obținute în acest mod se determină parametrii  $a_j$ .

c) pentru albie cu secțiuni transversale instabile în timp (eroziune, depuneri, pod de gheață), curba debitelor nu se mai exprimă univoc. Deci în acest caz debitul pentru aceeași valoare a nivelului va avea valori diferite. Dacă se fac studii asupra gradientului variației hidrografului  $\frac{dQ}{dt}$  și asupra valorilor maxime ale debitului, ale nivelului se poate stabili o formulă care să aducă curba la o formă univocă. Se va folosi relația de principiu:

$$Q_i = Q_i^* - \alpha \left( \frac{dQ}{dt} \right)_i \quad (10.68)$$

unde  $Q_i$  este debitul pe curba univocă,  $Q_i^*$  este debitul la nivelul  $H_i$  pe ramura crescătoare a hidrografului,  $\alpha$  parametru,  $\left( \frac{dQ}{dt} \right)_i$  este variația debitului în timp la nivelul  $H_i$ .

Wilson (1974) stabilește relația de principiu de forma următoare:

$$Q_i = \frac{Q_i^*}{\sqrt{1 + \frac{A(dH/dt)_i}{1,3Q_i^*J}}} \quad (10.69)$$

unde  $A$  este secțiunea udată la nivelul  $H$  și  $J$  este panta albiei.

#### 10.6.4. Grafice de debit

a) Hidrograful debitelor  $Q(t)$  reprezintă variația debitelor în ordine cronologică. Acest grafic scoate în evidență valoarea caracteristică de-a lungul perioadei respective și urmărește fidel hidrograful de nivel (figura 10.27).

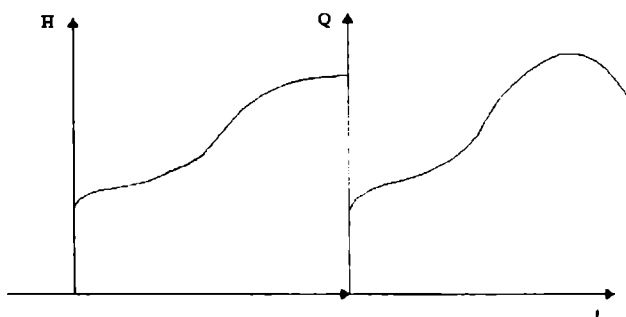


Figura 10.27

Pentru un hidrograf anual se remarcă debitul maxim anual și minim anual. Cu valorile caracteristice anuale ale debitului se formează șiruri statistice care constituie baza pentru determinarea debitelor de asigurare ( vezi calculul statistic, capitolul 8).

b) Graficul debitelor cumulate  $W(t)$  reprezintă variația (creșterea) în raport cu timpul a volumelor de apă care trec prin profilul respectiv (figura 10.28). În mod analitic volumele acumulate se exprimă astfel:

$$W_t = \int_0^t Q dt, \quad \text{dacă } Q \text{ este o funcție continuă}$$

$$W_t = \sum_{i=0}^n Q_i \cdot \Delta t; \quad t = n \cdot \Delta t \quad (10.70)$$

dacă  $Q_i$  este un șir discret cu valorile medii ale debitului pe un interval  $\Delta t$ .

$W_t$  în aceste relații reprezintă volumul de apă care a trecut prin profilul transversal până la momentul  $t$ . Volumul total care trece prin profil, până la final, la momentul  $T$  este:

$$W_T = \int_0^T Q dt = \bar{Q} \cdot T \quad (10.71)$$

unde  $\bar{Q}$  este debitul mediu pe intervalul de timp  $T$ .

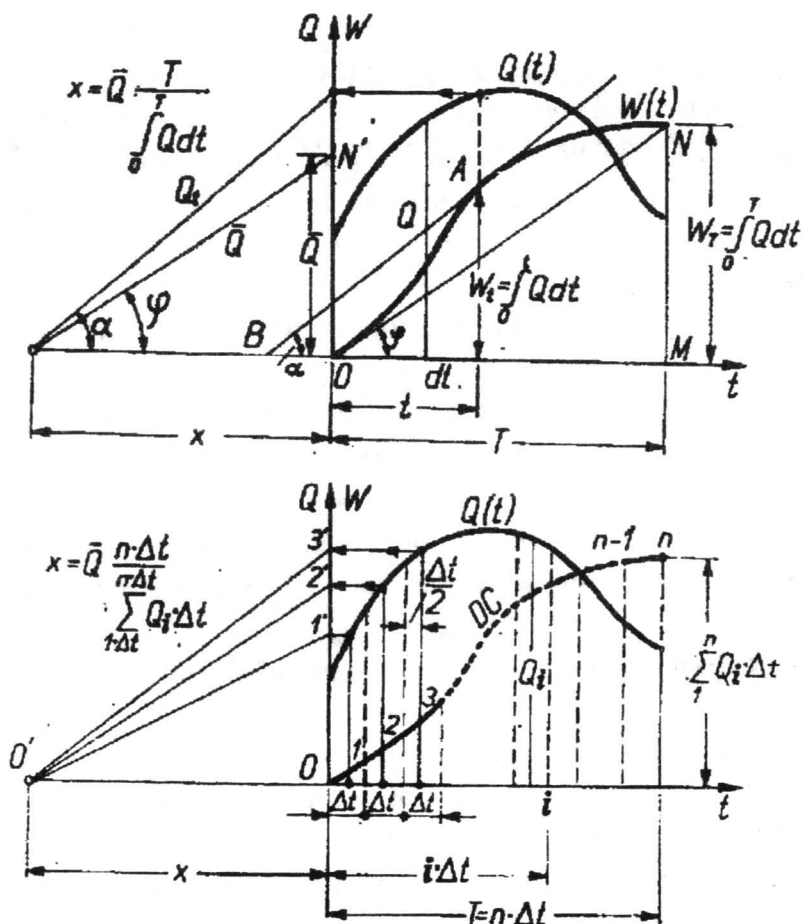


Figura 10.28

Dacă se cunoaște  $W(t)$  se poate determina și  $Q(t)$  ținând cont că tangenta la curba  $W(t)$  într-un punct se scrie:

$$\tan \alpha = \frac{dW_t}{dt} = Q_t \quad (10.72)$$

Evaluarea tangentelor în fiecare punct al curbei debitelor cumulate (DC) trebuie să țină seama de scara în care s-au reprezentat timpul, volumele, debitele. Pentru volumul total cumulat se folosește relația:

$$\frac{W_T}{T} = \bar{Q} = \tan \varphi \quad (10.73)$$

## FACTORI DETERMINANTI IN CURGEREA APELOR DE SUPRAFATA

## 11.1. Atmosfera

Din punct de vedere meteorologic, înălțimea stratului atmosferic nu depășește 80 km și se subdivide în câteva sfere: *troposfera* se întinde pe primii 11 km de la nivelul mării, *stratosfera* cuprinde zona de la 11 km la 30 -40 km înălțime și *mezosfera* de la 30 km la 80 km înălțime.

În atmosferă coexistă gazele (nitrogen, oxigen, argon, bioxid de carbon, etc.), suspensii de vapori de apă și diverse particule microscopice. În troposferă se concentrează jumătate din greutatea totală a aerului și aici se află sediul celor mai multe fenomene care interesează hidrologia: formarea norilor, precipitațiile atmosferice, vântul, etc. Cea mai mare parte a cantității de vapori de apă din atmosferă (90%) se află concentrată în primii 5 km ai troposferei. Factorii din atmosferă care contribuie la mișcarea apelor de suprafață sunt:

Presiunea atmosferică

Presiunea atmosferică este rezultatul acțiunii moleculare a aerului asupra corpurilor cu care vine în contact și se exprimă ca fiind greutatea coloanei de aer cu aria  $1\text{cm}^2$  și înălțimea de la sol până la limita superioară a atmosferei. În hidrologie interesează determinarea presiunii pe întreaga suprafață a bazinului hidrografic.

Vântul

Vântul reprezintă mișcarea pe orizontală a maselor de aer și depinde de următorii factori:

- potențialul aerodinamic caracterizat de gradientul izobarelor regionale
- forța Coriolis datorată rotației Pământului
- componenta orizontală a forței centrifuge din mișcarea masei de aer
- frecarea maselor de aer aflate în mișcare, de învelișul solului.

Vântul poate să apară și prin încălzirea sau răcirea rapidă a stratului de aer în contact cu solul sau cu masele de apă (foen, brize locale). Din punct de vedere hidrologic interesează în special valorile vitezei vântului la sol și la o înălțime din apropierea solului de 1m până la 5m. S-a stabilit o formulă de tip parabolic care dă legătura între viteza vântului  $v$  și înălțimea de la sol  $H$ .

$$v = v_0 \cdot \left( \frac{H}{H_0} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad H > H_0 \quad (11.1)$$

unde  $v_0$  este viteza măsurată la o înălțime standard  $H_0$ . Datele asupra direcției și vitezei vântului se înregistrează zilnic și se prelucrează sub forma unor grafice numite *roza vântului*.

Umiditatea aerului

Umiditatea caracterizează încărcarea aerului cu vapori de apă. Se definesc trei tipuri de umidități:

- *umiditatea de saturație*,  $u_s$  - reprezintă valoarea maximă a cantității de vapori de apă pe care poate să o conțină un volum de  $1\text{m}^3$  de aer la o temperatură dată.



- *umiditatea absolută*,  $u_a$  - reprezintă valoarea cantității de vaporî de apă cuprinsă într-un volum de  $1m^3$  la momentul înregistrării.

- *umiditatea relativă*,  $u_r$  - reprezintă raportul în procente dintre umiditatea absolută și cea de saturație:

$$u_r = 100 \cdot \frac{u_a}{u_s} \quad (\%) \quad (11.2)$$

Umiditatea absolută a aerului pentru același amplasament de înregistrare scade cu înălțimea deasupra solului.

## 11.2. Regimul termic

Pământul primește în medie de la Soare o energie radiantă cu intensitatea  $0,30cal/(cm^2min)$  care se distribuie neuniform în timp și spațiu. La contactul cu diverse corpuri de pe sol, radiațiile solare se reflectă parțial în atmosferă, fracțiunea care se reflectă numindu-se *albedou*. Albedoul zăpezii proaspete este de 75% - 90%, al nisipului 35% - 43%, al argilei 16%- 23%, al ierbii verzi este de 26%. Albedoul suprafeței apelor este cuprins între 2%-12% în funcție de înălțimea soarelui.

### 11.2.1. Regimul termic al solului

Radiația solară care ajunge la sol, cu excepția celei reflectate se transformă în energie calorică care se transmite o parte în interiorul solului și altă parte în aerul atmosferic. Repartiția neuniformă a radiației solare duce la variația temperaturii pe suprafața solului și în adâncimea lui. Din punct de vedere hidrologic interesează propagarea căldurii într-un strat subțire de la suprafața solului care influențează evaporarea apei din sol și topirea zăpezii.

Propagarea căldurii într-un sol omogen se urmărește prin ecuația de propagare a căldurii prin conducție.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (11.3)$$

unde  $T$  este temperatura la adâncimea  $z$  și la timpul  $t$ , iar  $K$  este coeficientul de conductivitate a temperaturii ( $m^2/zi$ ).

În funcție de condițiile inițiale se rezolvă ecuația de propagare. Alegem spre exemplu următoarea lege de variație a temperaturii la suprafață:

$$T_s = A \cos(\omega t - \epsilon) \quad (11.4)$$

Pentru  $T$  se caută o soluție de forma  $T = u(z) \cdot e^{i(\omega t - \epsilon)}$ , apropiată de condițiile inițiale. Introducem în ecuația (11.3) soluția respectivă:

$$i\omega \cdot u e^{i(\omega t - \epsilon)} = K \frac{d^2 u}{dz^2} \cdot e^{i(\omega t - \epsilon)} \quad (11.5)$$

În urma simplificărilor se obține:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{i\omega}{K} \cdot u \quad (11.6)$$

Soluția ecuației diferențiale omogene (11.6) este de forma  $u(z) = e^{\alpha z}$ , unde  $\alpha$  este o constantă. Se înlocuiește această soluție în ecuația (11.6) și se găsește valoarea pentru  $\alpha$ . Din condițiile inițiale (11.4) se obține valoarea lui  $u(0)$ :  $u(0) = u_s = A$ . Se obține soluția:

$$u(z) = A \cdot e^{-z\sqrt{\frac{i\omega}{K}}} \quad (11.7)$$

Se transformă radicalul  $\sqrt{i\omega/K}$ : se scrie  $i\omega/K$  sub forma unui pătrat perfect:  $m^2 = i\omega/K$ , unde  $m$  este un număr complex:  $m = a + b \cdot i$ . Atunci  $m^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ . Prin identificare se obține  $a = b = \omega/2K$ . Deci radicalul se scrie:  $\sqrt{i\omega/K} = (1 + i) \cdot \omega/2K$ .

Astfel soluția ecuației propagării căldurii devine:

$$T = A \cdot e^{-Kz} \cdot e^{i(\omega t - Kz - \epsilon)} \quad (11.8)$$

Se observă că rezultatul reprezintă o undă cosinusoidală pentru care amplitudinea scade cu adâncimea  $z$  și faza undei depinde de adâncime.

Variația temperaturii în sol se determină prin măsurători directe cu geotermometre, îngropate la diferite adâncimi. Adâncimea la care temperatura în sol nu mai e influențată de temperatura de la suprafață e de ordinul 8 - 10 m.

### 11.2.2. Regimul termic al aerului

Solul care a devenit sursă de căldură datorită absorbției radiației solare, încălzește la rândul lui prin contact stratul inferior al aerului, care la rândul său transmite păturilor de deasupra o parte din căldura sa. Regimul termic al aerului din spațiul unui bazin hidrografic se stabilește pe baza observațiilor efectuate sistematic cu ajutorul termometrelor montate la 2 m deasupra solului. În spațiul B.H., datele de temperatură ale aerului pentru un interval de timp se reprezintă sub forma liniilor de egală temperatură numite izoterme.

### 11.2.3. Regimul termic al apelor

Apele curgătoare de suprafață sunt direct expuse radiațiilor solare și drept urmare înmagazinează o cantitate de energie calorică care variază datorită contactului cu mediul înconjurător. Datorită scurgerii în regim turbulent a apelor de suprafață curgătoare are loc un amestec continuu ce duce la uniformizarea temperaturii în masa lichidului, în același profil transversal. Temperatura apelor curgătoare urmărește variația temperaturii aerului înconjurător cu un anumit decalaj, după cum se vede în figură 11.1.

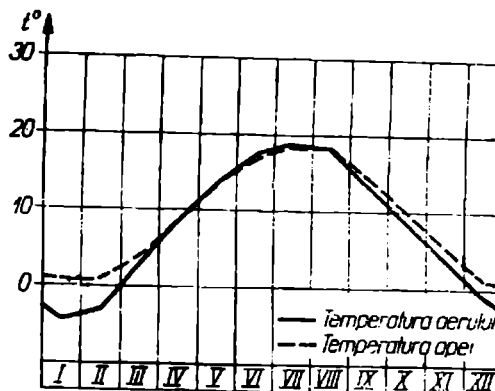


Figura 11.1

Dacă curentul de apă de suprafață intersectează straturi freatice, se produc modificări sensibile regimului termic primar, prin contribuția termică a acestora. Pentru stabilirea temperaturii finale se folosește ecuația de bilanț termic:

$$Q_a \cdot t_a + Q_f \cdot t_f = (Q_a + Q_f)t \quad (11.9)$$

unde  $Q_a, Q_f$  reprezintă debitul apei curgătoare, respectiv al freaticului;  
 $t_a, t_f$  sunt temperaturile corespunzătoare în amonte de contribuția freaticului;  
 $t$  este temperatura apei aval de aportul freaticului.

Ape de suprafață cu viteză neglijabilă - lacuri naturale adânci sau de acumulare.

În acest caz temperatura se stabilește pe baza unor factori diverși ce trebuie luați în considerare. Astfel încălzirea e dată de contactul suprafeței libere cu razele solare, respectiv cu atmosfera și de încălzirea termică a cursurilor de apă caldă care alimentează lacurile. Scăderea temperaturii în lacuri este afectată de absența razelor solare, evaporare și aportul de apă rece din cursurile confluențe, respectiv de către zăpadă. Pentru același moment de timp, temperatura apei în volumul lacului variază semnificativ în primii 8-10 m adâncime, iar de la 50-60 m în jos, temperatura rămâne constantă la valoarea de  $4^{\circ}\text{C}$ .

Ape subterane. Temperatura depozitelor de apă subterană este puternic influențată de mediul geologic în care sunt integrate, în funcție de adâncimea la care se află.

Pentru adâncimi mai mici de 1,5 m temperatura apei e influențată de temperatura exterioară. Pentru adâncimi cuprinse între 15-25 m apa rămâne la o temperatură constantă apropiată de temperatura medie multianuală a aerului de deasupra zonei. Pentru adâncimi mai mari de 25 m temperatura apei variază în funcție de gradientul geotermic al Pământului.

### 11.3. Precipitații atmosferice

În studiul hidrologic interesează precipitațiile care provin din ploi și din topirea zăpezilor, acestea intervenind ca sursă primară a curgerii apelor de suprafață și a celor subterane.

#### 11.3.1. Măsurarea precipitațiilor

Cantitatea de precipitații provenită din ploi se măsoară cu pluviometrul sau pluviograf.

\* *Pluviometrul* e alcătuit dintr-un corp cilindric din metal care are la partea superioară o pâlnie prin care se captează apa precipitată. Volumul colectat este măsurat cu o eprubetă gradată.

\* *Pluviograf* este un pluviometru la care se adaugă un dispozitiv de înregistrare automată a cantității de apă acumulată în 24 de ore. În urma măsurătorilor se obțin două curbe de interes:

-*pluviograma* = curba precipitațiilor acumulate măsurate

-*hidrograf* = graficul intensității precipitațiilor în funcție de timp.

În cazul determinării cantității de apă provenită din zăpezi sunt necesare măsurători asupra grosimii stratului de zăpadă inițial și cumulat, a greutateii zăpezii, a răspândirii suprafețelor acoperite cu zăpadă pe bazinul hidrografic. Având aceste date se fac în continuare estimări asupra cantității de apă rezultată în urma topirii zăpezilor.

#### 11.3.2. Clasificarea precipitațiilor

Din punct de vedere al ariei de acțiune, precipitațiile se clasifică în:

1.- precipitația la stație (într-un punct)

2.- precipitația pe bazinul hidrografic

Din punct de vedere al timpului pentru care se calculează, precipitațiile se clasifică în:

- precipitația zilnică la stație
- precipitația lunară la stație
- precipitația anuală la stație

### 1. Studiul precipitațiilor la stație

Valorile înregistrate pentru precipitații se prezintă ca niște variabile aleatoare, dacă eliminăm variațiile periodice cu anotimpul. În acest caz se folosește studiul statistic al precipitațiilor atât în cazul repartiției precipitațiilor zilnice cât și anuale. Se aplică calculul statistic unor șiruri de  $N$  înregistrări pluviometrice așa cum s-a văzut în capitolul 8. Se folosesc legile teoretice de probabilități : Gumbel, Pearson III, Gauss.

### 2. Studiul precipitațiilor pe bazinul hidrografic

Cantitatea de precipitații căzute pe B.H. se determină în mod curent prin 2 metode:  
*izohietelor*

izohietele sunt definite ca fiind liniile de precipitații egale. Aceste izohiete se trasează pe harta B.H. după procedeu de trasare a curbelor de nivel.

Fie  $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n$  suprafețele parțiale dintre două izohiete și  $h_1, \dots, h_i, \dots, h_{n+1}$  valorile izohietelor (cantitatea de precipitații înregistrată la diverse stații aflate pe suprafața B.H.)

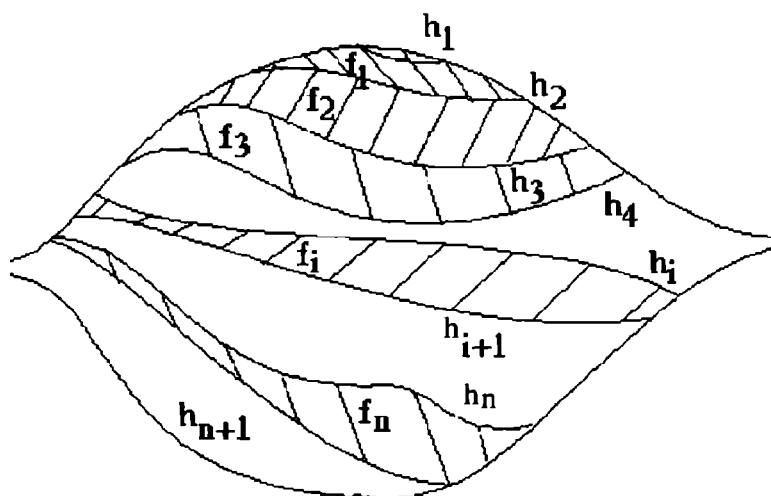


Figura 11.2

În acest caz cantitatea de precipitații căzută pe întreg B.H. se calculează astfel:

$$h_p = \frac{1}{2F} \sum_{i=1}^n (h_i + h_{i+1}) \cdot f_i \quad (11.10)$$

unde  $F$  este suprafața integrală a B.H.

b) *Metoda Thiessen*

Metoda se bazează pe faptul că atribuie fiecărui punct de înregistrare a precipitației o suprafață parțială din B.H. Pentru constituirea unei astfel de suprafețe parțiale se formează un triunghi cu vârfurile în punctele de înregistrare (puncte pluvio) și apoi se construiesc mediatoarele laturilor triunghiului, astfel încât se obține o suprafață poligonală în jurul fiecărui punct de înregistrare.

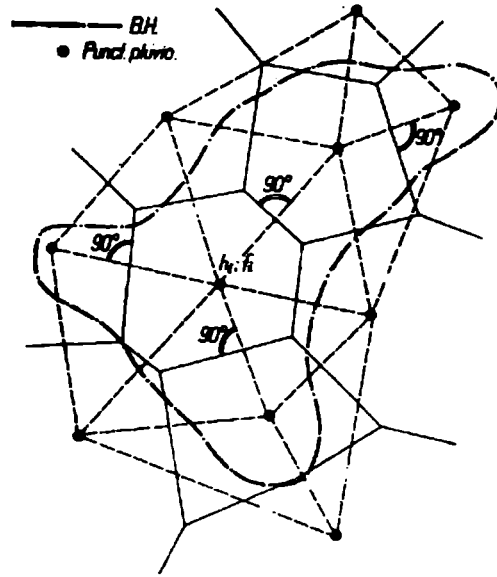


Figura 11.3

Precipitația pe bazinul hidrografic se poate calcula astfel:

$$h_p = \frac{1}{F} \cdot \sum_{i=1}^n h_i \cdot f_i \quad (11.11)$$

unde  $h_i$  este valoarea precipitației la o stație,  $f_i$  este suprafața poligonului construit în jurul stației respective și  $F$  este suprafața totală a B.H.

11.3.3. *Studiul intensității precipitațiilor*

Intensitatea precipitației la timpul  $t$  se calculează prin derivarea curbei de precipitații acumulate (cantitatea de precipitații acumulată la un moment de timp după începutul aversei) în funcție de timp, în acel punct. Se poate trasa curba de intensitate a precipitației (hidrograful) lucrând cu intervale de timp finite, pentru precipitațiile într-un punct. Pentru o arie se definește intensitatea medie pe suprafață la un moment dat:

$$I_m = \frac{1}{S} \int \int_S I(x, y) dx dy \quad (11.12)$$

unde  $I$  este intensitatea precipitației într-un punct de coordonate  $(x, y)$  și  $S$  este suprafața ariei respective.

Din punct de vedere practic când nu dispunem de informații asupra intensității în toate punctele de pe suprafața pe care se face calculul, ci doar de valori punctuale din stațiile de înregistrare, problema intensității medii se rezolvă astfel:

Presupunem că pe suprafața  $S$  există  $n$  pluviometre și un pluviograf care înregistrează cantitatea de precipitații  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , respectiv  $P_E$  la pluviograf, în timpul total al precipitației. La pluviograf se poate calcula intensitatea precipitației în perioada  $\Delta t$  așa cum s-a definit la începutul paragrafului. Se obține valoarea  $I_E$ . Atunci se pot determina intensitățile la fiecare stație în care există un pluviometru; în perioada  $\Delta t$  se obțin valorile:  $I_E \cdot P_1/P_E, I_E \cdot P_2/P_E, \dots, I_E \cdot P_n/P_E$ . Considerăm că ariile din zona de influență a pluviometrelor sunt:  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , respectiv  $S_E$  pentru pluviograf. Aceste arii pot fi calculate ca în metoda Thiessen ( suprafețe poligonale ce se formează în jurul stațiilor). Astfel intensitatea medie a precipitației pe suprafața  $S$  se determină cu relația:

$$I_m = \frac{1}{S} \cdot I_E \left( S_E + \frac{P_1}{P_E} \cdot S_1 + \dots + \frac{P_n}{P_E} \cdot S_n \right) \quad (11.13)$$

$$I_m = \frac{P}{P_E} \cdot I_E \quad (11.14)$$

unde  $P$  e dat de relația :

$$P = \frac{1}{S} (P_E S_E + P_1 S_1 + \dots + P_n S_n) \quad (11.15)$$

și reprezintă ploaia medie pe bazin.

În cazul curgerilor de suprafață interesează doar acea parte din precipitație care n-a fost în totalitate infiltrată, evaporată sau interceptată. Această parte din precipitații se numește precipitație utilă, eficace sau excedentară și e definită de un volum eficace ( $V_E$ ), înălțime eficace ( $H_E$ ) și durată eficace ( $T_E$ ).

#### 11.4. Evaporarea apei

Din punct de vedere hidrologic se studiază evaporarea difuză care reprezintă ruperea legăturilor dintre moleculele de la suprafața liberă a apei datorită înmagazinării unei energii suplimentare ( de exemplu radiația solară).

Evaporarea totală de pe un bazin hidrografic pentru o perioadă dată se numește evapotranspirație și e compusă din mai multe tipuri de evaporări în funcție de starea apei:

-  $E_a$  = evaporarea apei de la suprafața maselor de apă din albiile, lacuri, mlaștini și din stratul precipitațiilor care ating solul;

-  $E_z$  = evaporarea apei de la suprafața maselor de zăpadă și de gheață;

-  $E_s$  = evaporarea apei de la suprafața acoperită a solului umectat de ploi și zăpezi, inclusiv din franja capilară, când ajunge la suprafață;

-  $E_i$  = evaporarea apei de pe învelișul vegetal provenită din interceptia precipitațiilor;

-  $E_p$  = evaporarea apei din sol prin efectul de transpirație a plantelor.

Din punct de vedere cantitativ se poate scrie următoarea expresie:

$$E_t = E_a + E_z + E_s + E_i + E_p \quad (11.16)$$

#### 11.4.1. Evaporarea de la suprafața liberă ( $E_a$ )

##### Metode de determinare

##### a. Stabilirea ecuației de bilanț energetic

Metoda se bazează pe ecuația generală de conservare a masei și energiei termice și radiative dintr-un volum dat:

$$I - O = Q_s \quad (11.17)$$

unde  $I$ , respectiv  $O$  sunt energiile de intrare respectiv ieșire din volumul considerat, în unitatea de timp;  $Q_s$  este energia stocată în volumul respectiv, în unitatea de timp.

Energia de intrare se compune din energia radiației solare incidentă la suprafața apei  $Q_i$  și energia de convecție a masei de apă.

$$I = Q_i + Q_v \quad (11.18)$$

Energia de ieșire se compune din energia radiației solare reflectată la suprafața apei  $Q_r$ , energia pierdută de masa de apă prin schimbul de radiații de unde lungi cu atmosfera  $Q_b$ , energia utilizată în producerea evaporăției  $Q_e$ , energia absorbită de pe suprafața apei în atmosferă  $Q_h$ :

$$O = Q_r + Q_b + Q_e + Q_h \quad (11.19)$$

Deci relația de bilanț (11.17) devine:

$$Q_i + Q_v - Q_r - Q_b - Q_e - Q_h = Q_s \quad (11.20)$$

Se notează raportul  $Q_h/Q_e = R$ , unde  $R$  se numește raportul lui Bowen și în acest caz ecuația (11.20) se scrie:

$$Q_e(1 + R) = Q_i - Q_r - Q_b + Q_v - Q_s \quad (11.21)$$

Pentru exprimarea lui  $R$  se folosește relația:

$$R = C_B \cdot p \cdot \frac{T_s - T}{e_s - e} \quad (11.22)$$

În expresia de mai sus  $C_B$  este constanta Bowen cu unitatea de măsură ( $^{\circ}C^{-1}$ ),  $p$  este presiunea atmosferică,  $e_s$  este presiunea vaporilor de apă saturați la temperatura suprafeței apei  $T_s$  și  $E$  este presiunea vaporilor la temperatura  $T$  a aerului din imediata vecinătate a suprafeței apei.

Pentru energia de evaporare se știe următoarea expresie:

$$Q_e = \rho_e L_e E_a A_s \quad (11.23)$$

unde  $\rho_e$  este densitatea apei evaporate,  $E_a$  este evaporația de la suprafața liberă,  $L_e$  este căldura latentă de evaporare și  $A_s$  este suprafața apei pentru care se calculează energia de evaporare.

Din relațiile (11.21) și (11.23) se determină evaporația  $E_a$ :

$$E_a = \frac{Q_i - Q_r - Q_b + Q_v - Q_s}{\rho_e L_e A_s (1 + R)} \quad (11.24)$$

Unitățile de măsură pentru mărimile care intervin în relația (11.24) sunt:

$E_a$  [ cm/min ];  $A_s$  [ cm<sup>2</sup> ];  $\rho$  [ g/cm<sup>3</sup> ];  $L_e$  [ cal/g ];  $Q$  [ cal/min ].

$Q_b, Q_v, Q_e$  depind de caracteristicile masei de apă. În acest caz evaporația  $E_a$  are valori diferite pentru aceeași regiune.

#### b. Metoda corelației datelor evaporimetrice cu factorii meteorologici

Efectuarea măsurătorilor volumelor de apă evaporate din mici rezervoare de apă simultan cu măsurarea temperaturii aerului, a umidității relative, a vitezei vântului, duce la obținerea unor relații analitice sau grafice între evaporare și factorii meteorologici care o determină.

Se obțin o serie de relații de corelație:

- evaporarea zilnică:

$$E_a = 0,36(u_s - u_a) \left(1 + \frac{v}{16}\right); \quad E_a[\text{mm/zi}] \quad (11.25)$$

$u_s$  = umiditatea de saturație, media zilnică;

$u_a$  = umiditatea absolută, media zilnică;

$v$  = viteza vântului, media zilnică.

- evaporarea lunară:

$$E_a = 0,15n(u_s - u_a)(1 + 0,072)v; \quad E_a[\text{mm/luna}] \quad (11.26)$$

$u_s$  = umiditatea de saturație, media lunară;

$u_a$  = umiditatea absolută, media lunară;

$v$  = viteza vântului, media lunară;

$n$  = numărul de zile din luna respectivă.

Pentru a se face trecerea de la rezervoare mici la lacuri adânci formulele de corelație de mai sus se corectează cu un coeficient  $c = 0,6 - 0,7$ .

Cu datele obținute în anumite puncte ale B.H. se pot trasa pe harta respectivă izoliniile evaporării la suprafața liberă a apei, pentru orice interval de timp; izoliniile reprezintă în acest caz potențialul evaporant al atmosferei.

### 11.4.2. Evapotranspirația

#### Metode de determinare

##### a. Metoda ecuației de bilanț

Pentru determinarea evapotranspirației,  $E_t$  pe un bazin hidrografic pentru un interval de timp  $\Delta t$  se stabilește o ecuație de bilanț între volumele de apă intrate și volumele de apă ieșite din bazin.



În ecuația bilanțului termenii pozitivi (intrările) sunt  $W_p$  - volumul precipitațiilor și  $R$  - cantitățile rămase din perioada precedentă de precipitații sub formă de ape subterane, zăpezi; termenii negativi (ieșirile) sunt  $W_q$  - volumul curgerii totale a cursurilor de apă, corespunzătoare B.H.,  $E_t$  - evaporarea totală,  $R'$  - cantitățile de apă rămase la sfârșitul perioadei  $\Delta t$  pentru care se face bilanțul.

$R'$  se poate exprima prin relația:  $R' = R \pm \Delta R$ ; relația face legătura între cantitățile de apă rămase în bazin înainte de perioada  $\Delta t$  și după această perioadă.

În acest caz ecuația de bilanț se scrie:

$$W_p + R = W_q + E_t + R \pm \Delta R \quad (11.27)$$

De unde se obține pentru evapotranspirație relația:

$$E_t = W_p - W_q \mp \Delta R; \quad [mm] \quad (11.28)$$

Valoarea lui  $\Delta R$  nu se poate determina exact și în aceste condiții se determină evapotranspirația medie pe  $n$  ani:

$$\bar{E}_t = \frac{\sum_{i=1}^n E_{ti}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n W_{pi}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n W_{qi}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n \pm \Delta R_i}{n} \quad (11.29)$$

Media pe  $n$  ani a lui  $\Delta R$  tinde către zero, deci se poate neglija. Astfel se poate determina evapotranspirația medie din diferența a 2 termeni care se determină riguros:

$$\bar{E}_t = \bar{W}_p - \bar{W}_q \quad (11.30)$$

unde  $\bar{W}_p$  este precipitația medie multianuală și  $\bar{W}_q$  este curgerea medie multianuală.

b) *Formule empirice*

În cazul în care  $\bar{W}_q$  nu se poate determina riguros, se folosesc formule semiempirice pentru calculul evapotranspirației medii.

Formula Turc:

$$\bar{E}_t = \frac{\bar{W}_p}{0,9 + \frac{\bar{W}_p^2}{L^2}} \quad (11.31)$$

unde  $\bar{W}_p$  este precipitația medie multianuală și  $L$  este o relație funcție de temperatura medie multianuală,  $T$ :

$$L = 300 + 25T + 0,05T^2; \quad [^\circ C] \quad (11.32)$$

Un caz particular al evapotranspirației este evapotranspirația potențială  $E_{tp}$ . Aceasta se produce în condițiile în care toate formele de evaporare au loc la valorile lor maxime.

### 11.5. Infiltrația

În cazul infiltrației interesează în mod principal:

- variația în timp a pătrunderii apei în sol în timpul precipitațiilor și puțin timp după aceea;

- adâncimea până la care poate ajunge frontul umed;
- cantitatea de apă pătrunsă în sol până ajunge să alimenteze acviferul freatic;
- evaluarea stării de umiditate inițială existentă în sol în momentul producerii unei noi precipitații.

Rezolvarea acestor aspecte se face considerând modelul fizico - matematic al mișcării apei în pământul nesaturat (capitolul 3).

#### 11.5.1. Infiltrația în ipoteze simplificatoare

a) Pătrunderea apei în solul inundat la suprafață de un strat de apă cu grosime redusă a fost studiată ca un caz particular la ecuația mișcării apei în pământ nesaturat. J.R. Philip obține o relație care dă viteza de infiltrație a apei în sol:

$$v(t) = \frac{1}{2}s \cdot t^{-\frac{1}{2}} + A \quad (11.33)$$

$v(t)$  = viteza de infiltrație [ $cm/min$ ];

$s$  = constantă de funcție de coeficientul de permeabilitate;

$A$  = capacitatea de absorbție a Pământului (sau sucțiunea) care depinde de umiditatea inițială.

Cantitatea totală de apă,  $W$ , infiltrată în intervalul de timp  $t$  se obține prin integrarea relației de mai sus:

$$W(t) = s \cdot t^{\frac{1}{2}} + A \cdot t \quad (11.34)$$

În ecuația de mai sus primul termen din membrul drept reprezintă contribuția la infiltrație a potențialului capilar și cel de-al doilea dă contribuția la infiltrație a potențialului gravitațional. Când frontul umed ajunge la adâncimea stratului freatic primul termen se anulează și cel de-al doilea termen dă valoarea alimentării acviferului.

Capacitatea de absorbție  $s$ , într-un punct se obține din măsurători: se măsoară  $W$ ; pentru diverse momente de timp  $t$ ; se determină  $A$  și se reprezintă grafic ( $\sqrt{t}; W - At$ ). Din panta dreptei obținută  $\tan \alpha$ , se calculează capacitatea de absorbție :

$$s = \tan \alpha = \frac{W(t) - At}{t^{\frac{1}{2}}} \quad (11.35)$$

b) Budakovski și Bindeman stabilesc o relație de calcul a vitezei de coborâre a frontului umed în Pământ în timpul infiltrațiilor.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{K(z + s)}{(u_f - u_o)z} \quad (11.36)$$

$z$  = adâncimea la care a ajuns frontul umed, [ $cm$ ];

$u_o, u_f$  = umiditatea inițială, respectiv umiditatea finală;

$K$  = coeficientul de permeabilitate;

$s$  = sucțiunea, [ $mm$ ].

### 11.5.2. Infiltrația tratată empiric

Pentru rezolvarea problemei infiltrației se fac măsurători in situ și rezultatele obținute sunt interpretate sub formă de formule empirice.

#### Metoda de măsurare. Metoda Porchet

Se sapă un canal de adâncime  $H$  și rază  $R$  care se umple cu apă (figura 11.4).

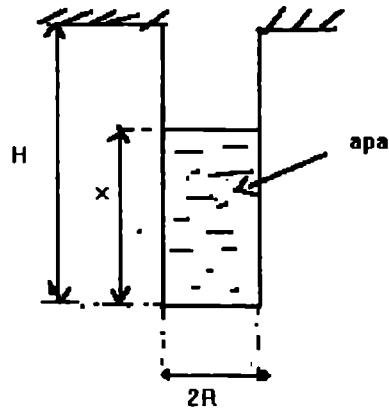


Figura 11.4

Se măsoară înălțimea  $x$  a apei rămase la intervale regulate. Pentru o cotă  $x$  suprafața de infiltrație este aria totală a cilindrului:

$$A_t = \pi R^2 + 2\pi Rx = 2\pi R(x + R/2)$$

În acest caz debitul infiltrației va fi :

$$q = K \cdot A_t = K 2\pi R \left( x + \frac{R}{2} \right) \quad (11.37)$$

unde  $K$  este coeficientul de infiltrație.

Pentru un interval infinitesimal de timp  $dt$ , variația înălțimii apei va fi  $dx$ , iar debitul infiltrației:

$$q = -\pi R^2 \frac{dx}{dt} \quad (11.38)$$

unde  $dx/dt$  este viteza de infiltrație și  $\pi R^2$  este aria suprafeței normale (baza cilindrului).

Egalând relațiile (11.37) și (11.38) se obține:

$$\frac{dx}{K \cdot 2\pi R(x + R/2)} = -\frac{1}{\pi R^2} \cdot dt \quad (11.39)$$

Se integrează relația (11.39) între 2 înălțimi  $x_1$  și  $x_2$  corespunzătoare a 2 momente de timp  $t_1$  și  $t_2$  :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx \cdot \pi R^2}{2K\pi R(x + R/2)} = - \int_{t_1}^{t_2} dt \quad (11.40)$$

Rezolvarea integralelor dă următorul rezultat:

$$\ln\left(x_2 + \frac{R}{2}\right) - \ln\left(x_1 + \frac{R}{2}\right) = -\frac{2K(t_2 - t_1)}{R} \quad (11.41)$$

Se notează  $\varphi(x) = R/2 \cdot \ln(x + R/2)$ . Din ecuația (11.41) rezultă expresia pentru  $K$ :

$$K = \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{t_2 - t_1} \quad (11.42)$$

Pe baza acestor măsurători s-au stabilit o serie de formule empirice pentru calculul vitezei de infiltrație:

$$v = C \cdot t^\beta$$

$$v = C_1 + C_2 \cdot e^{\gamma t}$$

unde  $C, C_1, C_2, \beta, \gamma$  sunt constante.

Cea mai des folosită relație pentru calculul vitezei de infiltrație este formula Horton:

$$v = v_c + (v_0 - v_c)e^{-\gamma t} \quad (11.43)$$

unde  $v_0$  este viteza de infiltrare în primul minut [ $mm/min$ ]

$v$  = viteza de infiltrare la timpul  $t$  [ $mm/min$ ];

$v_c$  = viteza de infiltrare constantă realizată după un timp lung de la începerea infiltrației [ $mm/min$ ];

$\gamma$  = factor invers de timp [ $min^{-1}$ ].

Cantitatea de apă infiltrată în timpul  $t$  se calculează prin integrarea relației (11.43):

$$W = \int_0^t v dt = v_c t + \frac{v_0 - v_c}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}) \quad (11.44)$$

Determinarea constantelor  $v_0, v_c, \gamma$  pentru un anumit tip de sol se face prin experimentarea infiltrației cu ajutorul unor dispozitive care permit reproducerea fenomenului natural. Cu *infiltrometrul* se studiază infiltrația în cazul în care stratul de apă se menține constant deasupra solului. Infiltrometrul este format din 2 cilindri de tablă concentrice (figura 11.5).

Se introduce infiltrometrul vertical în teren, prin presiune. În cilindrul interior se menține stratul subțire de apă cu un flacon gradat. Se notează volumele scurse din flacon la momente de timp diferite: corespunzător momentului  $t_i$  se determină volumul  $W_i$ . Deci viteza medie de infiltrație pe un interval de timp  $\Delta t = t_i - t_{i-1}$  este  $v_i$ :

$$v_i = \frac{W_i - W_{i-1}}{\Omega(t_i - t_{i-1})} \quad (11.45)$$

unde  $\Omega$  este secțiunea transversală a cilindrului interior (prin care circulă apa).

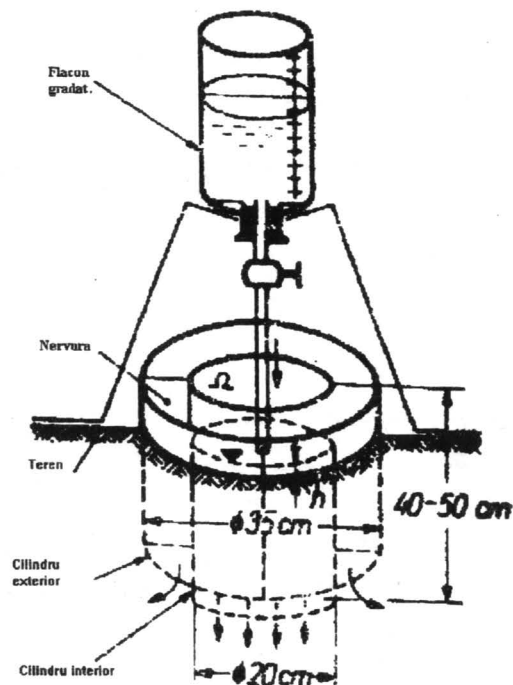


Figura 11.5

Dacă intervalele  $\Delta t$  tind către zero atunci vitezele  $v_i$  sunt viteze instantanee. Perechile obținute din determinări ( $v_i, t_i$ ) se reprezintă grafic și se obține astfel curba de variație a vitezei de infiltrație.

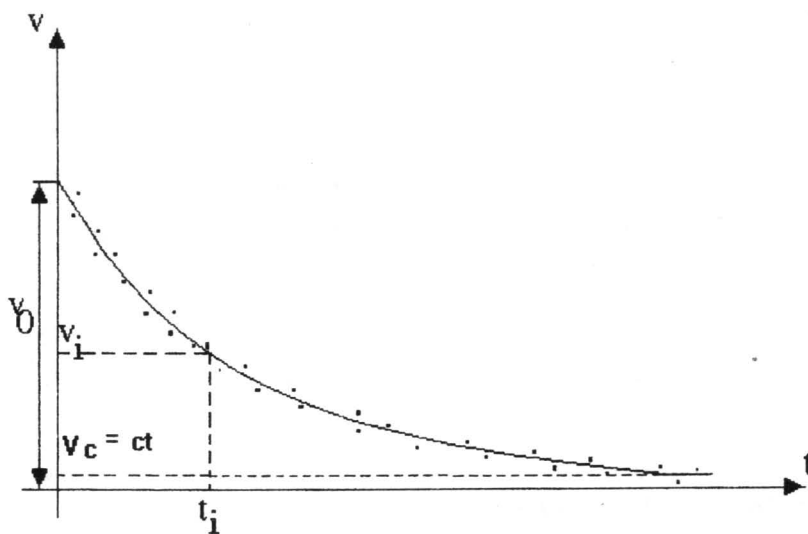


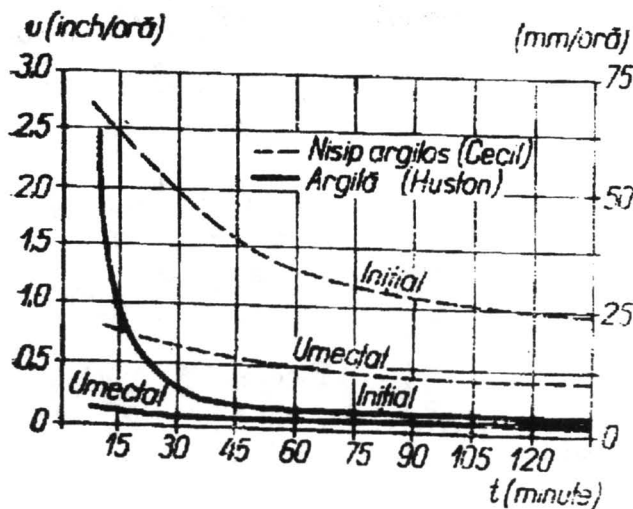
Figura 11.6

Se determină din grafic (figura 11.6) valorile  $v_0$  și  $v_c$  care intervin în formula Horton. Dacă se logaritmează în formula Horton se obține:

$$\ln \frac{v - v_c}{v_0 - v_c} = -\gamma t$$

Se reprezintă grafic  $(\ln \frac{v_i - v_c}{v_0 - v_c}, t_i)$ . Se obține o dreaptă cu panta  $\tan \alpha = \gamma$ . Astfel se determină și valoarea constantei  $\gamma$ .

Viteza de infiltrație depinde puternic de valoarea umidității solului cum se vede și în graficul următor.



Curbe viteze infiltrație-timp pentru soluri cu umectare diferită.

Figura 11.7

Curbele notate cu "inițial" caracterizează solurile neumectate, înainte de a se produce precipitații (cu umiditate minimă). Se observă din grafic că viteza de infiltrație scade cu creșterea umidității solului ceea ce implică creșterea volumului de precipitații care gravitează pe suprafața terenului spre rețeaua hidrografică.

O altă formulă empirică care se folosește pentru calculul vitezei de infiltrație este formula lui Holtan care ține cont și de gradul de umectare al solului:

$$v = v_c + a(u_{max} - u_0)^\delta \cdot t \quad (11.46)$$

unde  $v$  este viteza de infiltrație, [cm/ora];

$u_{max}$  este umiditatea maximă, [cm];

$u_0$  este umiditatea inițială, [cm];

$v_c$  este viteza minimă, [cm/ora];

$a, \delta$  sunt constante empirice.

Pentru a calcula volumul de apă,  $W$ , infiltrat în timpul  $t$  se integrează relația (11.46):

$$W = \int_0^t v \cdot dt = v_c t + a(u_{max} - u_0)^{\delta} \cdot t \quad (11.47)$$

### 11.5.3. Infiltrația în bazine hidrografice

Infiltrația pe B.H. se studiază diferit față de infiltrația pe suprafețe mici de sol omogen (cum s-a văzut în paragrafele anterioare). În acest caz se deduce indirect infiltrația globală pe bazin și repartizarea ei în timp. Infiltrația totală se determină pe baza unei ecuații de bilanț a volumelor intrate și ieșite din bazin:

$$h_u^* = h_p^* - h_Q^* - h_R^* - h_E^* \quad (11.48)$$

Termenii din ecuație reprezintă:

- $h_u^*$  = volumul total de apă infiltrat [ $mm \cdot col H_2O$ ] uniform repartizat pe B.H.;
- $h_p^*$  = volumul total de apă precipitat [ $mm$ ] conform unei pluviograme medii pe bazin;
- $h_Q^*$  = volumul total al curgerii directe rezultat din precipitație, dedus din hidrograful debitelor [ $mm$ ];
- $h_R^*$  = volumul total al retenției superficiale (intercepție și acumulare în depresiuni) [ $mm$ ];
- $h_E^*$  = volumul total al evapotranspirației.

S-a notat cu indicele "\*" volumul total pentru fiecare element din ecuația de bilanț.

Dacă se studiază infiltrația pe B.H. pentru o singură precipitație (de durată scurtă) valoarea lui  $h_E^*$  se poate neglija. Retenția superficială se evaluează după datele generale existente în diferite surse de specialitate. Pentru precipitații puternice,  $h_R^*$  nu influențează sensibil infiltrația.

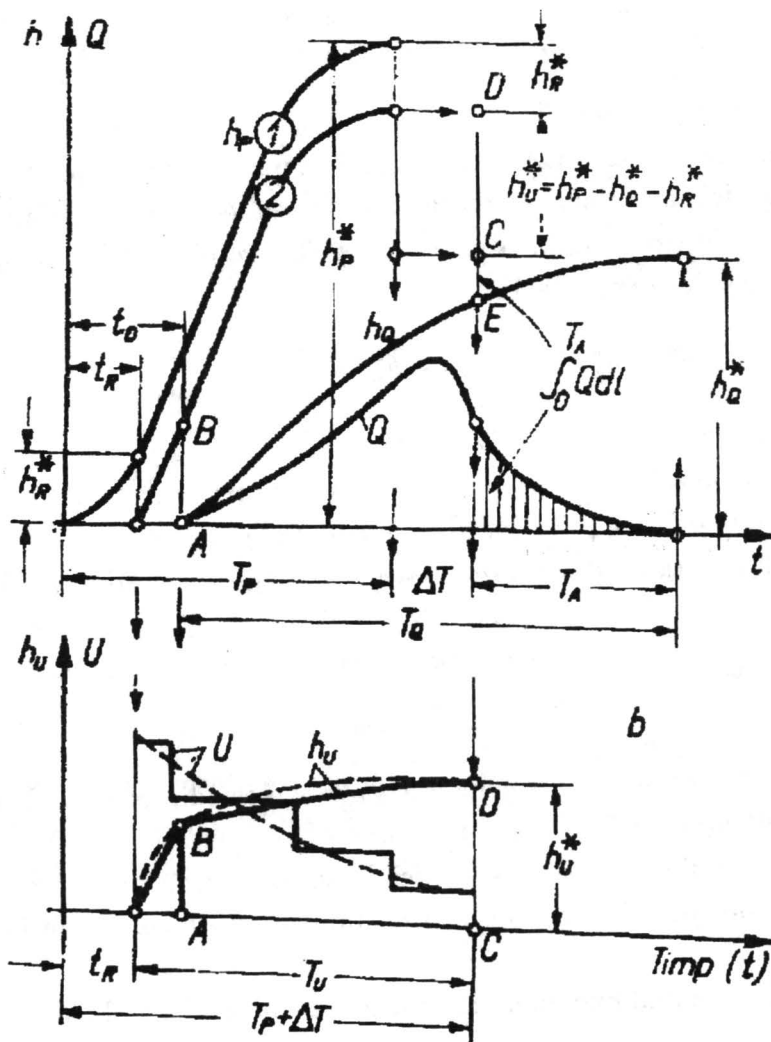
Figura 11.8 ilustrează principiul unei metode de calcul a infiltrației globale  $h_u^*$  și a repartizării acesteia în timp.

Notațiile de pe figură reprezintă:

$h_p(1)$  = pluviograma cu durata  $T_p$

$h_Q$  = curba debitelor cumulate cu durata  $T_Q$ , este corespunzătoare hidrografului de debit  $Q$  (fără debitul inițial, cel dinaintea începerii precipitației).

Curbele  $h_Q$  și  $Q$  sunt întârziate cu timpul  $t_0$  datorită retenției și infiltrației de la începutul precipitației. Curgerea în B.H. se produce după un timp  $t_0$  de la începutul precipitației. Considerând întârzierea produsă de retenție în procesul infiltrației, curba  $h_p(1)$  se deplasează în jos cu valoarea  $h_R^*$  și se transformă în  $h_p(2)$ .



Metodologia de calcul a infiltrației globale în raport cu timpul.

Figura 11.8

În această situație segmentul  $CD$  de pe grafic reprezintă valoarea infiltrației totale, care este exprimată analitic astfel:

$$h_u^* = h_p^* - h_q^* - h_R^* \quad (11.49)$$

Toate valorile din membrul drept al ecuației (11.48) se cunosc din măsurătorile făcute la stațiile de pe suprafața B.H. (din pluviograme, curba debitelor cumulate).

#### Repartizarea în timp a infiltrației globale

Se vede din figura 11.8 că cele 2 curbe  $h_p(1)$  și  $h_q$  au durate diferite  $T_p < T_q$ . Prima problemă care se pune este determinarea duratei totale  $T_u$  a infiltrației în B.H. În acest



sens se ține cont că din durata totală a precipitației infiltrația nu folosește timpul  $t_R$  de la începutul precipitației sustras de retenția superficială. Din timpul  $T_Q$  al debitelor acumulate, infiltrația nu folosește timpul  $T_A$  care reprezintă durata scurgerii acumulate în albiile rețelei hidrografice. Scurgerea acumulată în R.H. reprezintă volumul acumulat în rețeaua hidrografică de la începutul precipitației care se studiază, iar în grafic corespunde porțiunii hașurate din curba debitelor. Acestui volum îi corespunde un timp  $T_A$ . Suprafața hașurată se exprimă prin integrala  $\int_0^{T_A} Q dt$  și corespunde volumului de apă acumulat în R.H. care se poate calcula din produsul dintre lungimea R.H. ( $\sum l$ ) și secțiunea medie udată a albiilor la nivelul malurilor ( $\Omega$ ):

$$\Omega \cdot \sum l = \int_0^{T_A} Q dt \quad (11.50)$$

Acest volum exprimat în înălțime coloană de apă, determină segmentul  $CE$  pe figură:  $|CE| = (\int_0^{T_A} Q dt)/F$  (unde  $F$  este suprafața totală a B.H.) Corespunzător valorii acestui segment se determină timpul  $T_A$ . Atunci durata infiltrației totale se calculează din relația:

$$T_u = T_Q + t_o - (T_A + t_R) \quad (11.51)$$

Pentru repartizarea infiltrației pe durata totală  $T_u$  se trasează curba  $(h_u, t)$  prin punctele  $(h_u^*, T_u)$ ,  $(AB, t_0)$  și  $(t_R, 0)$  (figura 11.8).

Pentru  $t = t_R$  infiltrația e nulă.

Din aceste date se pot obține informații asupra vitezei medii de infiltrație  $U = \Delta h_u / \Delta t$  (curba  $U$  din figura 11.8).

## 11.6. Retenția superficială

Retenția superficială e compusă în ansamblu din două fenomene: interceptia și retenția în depresiuni (acumulare în depresiuni).

### 11.6.1. Interceptia

Interceptia reprezintă partea din precipitații reținută de învelișul vegetal. Interceptia variază în funcție de structura învelișului vegetal, mărimea și durata precipitației atmosferice, puterea evaporantă a atmosferei, etc.

Evaluări directe ale interceptiei se pot obține prin măsurarea simultană a precipitației deasupra sau în afara vegetației și dedesubtul ei. Diferența evaluată reprezintă valoarea interceptiei.

Cercetătorii americani au estimat valoarea interceptiei în funcție de natura vegetației în cazul precipitațiilor importante.

Natura vegetației	Intercepție	Intercepție % din precipitație
Fag		21,8
Stejar		20,7
Arțar		22,5
Porumb	0,75	
Porumbac	8,25	
Cereale	3,40	
Fânețe	2,00	
Lucernă	2,75	

În general pentru studiul bazinelor hidrologice mari și mijlocii intercepția nu se ia în considerare.

#### 11.6.2. Acumulare în depresiuni

Retenția sau acumularea în depresiuni reprezintă partea din intercepție care e reținută în micile depresiuni izolate ale B. H. În aceste locuri, apa care se acumulează nu are posibilitatea de a se scurge ci se epuizează fie prin evaporare, fie prin infiltrație, sau prin ambele moduri simultan.

Pe baza analizei precipitațiilor și curgerii de suprafață s-au evaluat indirect valori ale retenției pentru diverse soluri:

- pentru suprafețe argiloase - 2,5 mm
- pentru suprafețe nisipoase - 5 mm
- pentru lut - 4 mm

Valorile acestea pot suferi modificări în funcție de panta terenului, natura culturilor, etc.

Efectul retenției superficiale este de a produce o întârziere a curgerii pe suprafața solului către rețeaua hidrografică, datorită acumulării unei cantități de apă în depresiuni și vegetație la începutul precipitației.

## PRINCIPII DE MODELARE A CURGERII DE SUPRAFATA

## 12.1. Distribuția precipitațiilor în procesul curgerii. Componentele procesului hidrologic

Se pune problema în cazul unei precipitații constante de intensitate medie, cum se distribuie în timp cantitatea de apă provenită din precipitație în procesul de curgere și de acumulare de apă din B.H. respectiv. Practic problema e similară cu a defini componentele procesului hidrologic rezultate în urma unei precipitații:

a. Curgerea de suprafață. Reprezintă curgerea directă de pe sol, adică este fluxul de apă de pe suprafața solului B.H. care gravitează pe drumul cel mai scurt către ramificațiile R.H. și se produce după un anumit timp de la începerea precipitației (figura 12.1 - 2).

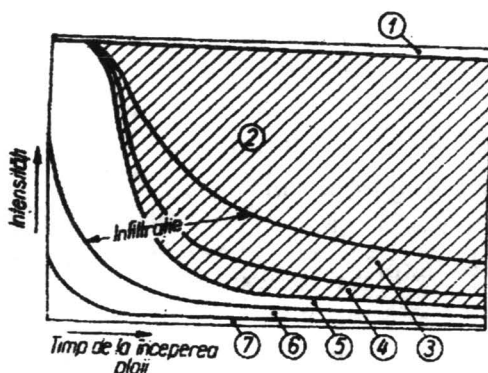
b. Curgerea intermediară sau hipodermă. Este fluxul de apă care pătrunde în zona de aerare și gravitează prin aceasta către R.H. Ea se produce cu un decalaj de timp față de curgerea de suprafață (figura 12.1 - 3).

c. Curgerea subterană sau de bază. Reprezintă fluxul de apă care pătrunde până în zona de saturație și se deplasează în această zonă (figura 12.1 - 4).

d. Restul de precipitații care cad direct în apele de suprafață (figura 12.1 - 1).

e. Acumularea în zona de aerare Reprezintă partea din precipitație care mărește umiditatea solului din zonă (figura 12.1 - 5).

f. Retenția superficială. Se împarte în cele două componente analizate în capitolul precedent (vezi paragraful 11.6):  $f_1$  - acumulare în depresiuni și  $f_2$  - interceptia (figura 12.1 - 6 și 7). Linsley reprezintă schematic repartizarea precipitației în figura următoare în condițiile în care nu se ia în considerare evapotranspirația .



Schema repartizării precipitației uniforme între componentele scurgerii hidrologice (minus evapotranspirația) după Linsley.

Figura 12.1

Suprafața hașurată reprezintă curgerea integrală înregistrată în volumul de control al B.H. și cuprinde curgerea de suprafață (a), curgerea hipodermă (b), curgerea de bază (c).

Curgerea intermediară (b), curgerea subterană (c), acumulările din zona de aeratie (e) și parțial acumulările din depresiuni ( $f_1$ ) formează în totalitatea lor infiltrația.

## 12.2. Coeficientul de curgere

Acest coeficient este definit în vederea determinării scurgerii pe baza precipitațiilor. Relația de definiție a coeficientului de curgere este:

$$c = \frac{h_Q}{h_p} < 1 \quad (12.1)$$

Deci reprezintă raportul dintre volumul de apă scurs în profilul de control al B.H. și volumul de apă dat de precipitație. Ambele volume sunt reprezentate prin înălțimi uniform repartizate pe B.H.

În funcție de precipitațiile și curgerile care se iau în considerație în relație, fie de viitură, fie cumulate în decursul unui an, sau medie a mai multor ani se determină un coeficient de viitură, coeficient de curgere anuală, respectiv coeficient de curgere mediu multianual.

Analiza detaliată a expresiei coeficientului de curgere arată că pentru același loc, valoarea sa variază în timpul precipitației, din cauza schimbării capacității de infiltrare a apei în sol și a evapotranspirației. De aceea pentru fiecare pas de timp  $\Delta t$  al precipitației și o valoare corespunzătoare a acestuia, va exista un coeficient de curgere parțial care în final se mediază pentru obținerea unui coeficient de curgere care să caracterizeze precipitația și B.H. respectiv.

## 12.3. Bilanțul hidrologic

Ecuția generală a bilanțului hidrologic se obține prin estimarea aporturilor și pierderilor de apă din B.H. evaluate pentru perioade mai lungi de timp.

O primă formă a ecuației este următoarea:

$$P = C + E + I + R \quad (12.2)$$

P = cantitatea de precipitații, exprimată în mm;

C = curgerea de suprafață, exprimată în mm;

E = evapotranspirația, exprimată în mm;

I = cantitatea de apă infiltrată, exprimată în mm;

R = retenția superficială, exprimată în mm.

Ultimul termen din ecuație poate fi neglijat pentru perioade mai lungi pentru care se face bilanțul.

Pentru infiltrație putem scrie relația (12.3) în scopul de a împărți apa infiltrată în două categorii:

-  $\Delta I$  = cantitatea de apă infiltrată care contribuie la umiditatea solului (rămâne în sol și subsol).

-  $I_w$  = partea din infiltrații care după un anumit traseu subteran revine la suprafață pentru a alimenta resursele hidrografice (corespunde curgerii intermediare definită mai sus).

$$I = \Delta I + I_w \quad (12.3)$$

În acest caz ecuația bilanțului hidrologic se poate retranscrie:

$$P = C + E + \Delta I + I_w \quad (12.4)$$

Suma dintre curgerea de suprafață și infiltrație reprezintă curgerea totală din B.H, notată cu  $Q$ :

$$Q = C + \Delta I + I_w \quad (12.5)$$

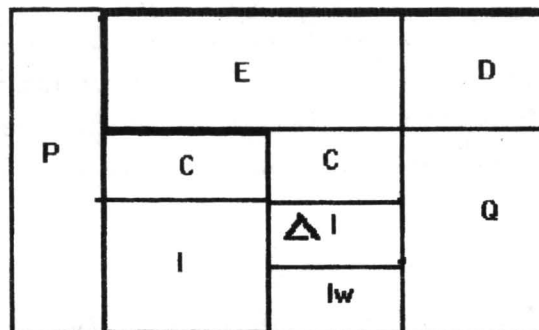
Atunci ecuația bilanțului devine:

$$P = Q + E \quad (12.6)$$

Cantitatea de apă evapotranspirată poate fi numită deficit de curgere, care se notează cu  $D$ . Se obține o ultimă formă pentru ecuația bilanțului hidrologic:

$$P = D + Q \quad (12.7)$$

Toate cele patru forme ale ecuației pot fi reprezentate schematic în felul următor:



În prima coloană este membrul stâng al ecuației bilanțului, respectiv coloanele II, III însumate pe verticală dau termenii din membrul drept al ecuațiilor.

Dacă echilibrul natural în B.H. e modificat prin exploatarea apelor subterane sau de suprafață, deficit pluviometric sau prin deviații spre alte bazine vecine, se introduce în ecuația bilanțului hidrologic un termen  $q$  care reprezintă aceste modificări:

$$P = E + Q + q \quad (12.8)$$

În cazul unei comunicări subterane cu un bazin adiacent se introduce în ecuația bilanțului un termen care reprezintă valoarea curgerii dintre bazine ( $\omega$ ):

$$P = E + Q \pm \omega \quad (12.9)$$

Termenul suplimentar  $\omega$  poate avea semnul plus când B.H. studiat primește apă de la bazinul vecin sau poate fi negativ dacă transferul de apă se face în celălalt sens.

#### 12.4. Curgerea de suprafață

Pentru studiul curgerii de suprafață trebuie analizate procesele de formare și integrare în rețeaua hidrografică a scurgerii pe versanți. Acest studiu este complicat datorită complexității factorilor care trebuie luați în considerare: variația precipitațiilor, a infiltrațiilor și a factorilor bazinului hidrografic.

Din acest motiv nu s-a putut elabora o soluție analitică general valabilă care să permită calculul din precipitații al curgerii pe versanți în bazine hidrografice naturale. Pentru studiul caracteristicilor dominante ale procesului s-au analizat cazuri tipice de formare și propagare a curgerii:

a) - curgerea pe versant sub forma unei pelicule subțiri de apă întâlnită de obicei în zone urbane și pe versanți a căror topografie și vegetație variază foarte puțin în spațiu.

b) - curgerea pe versanți în bazine hidrografice cu suprafețe mici ( $F < 10km^2$ ) caracterizat printr-un aport lateral uniform distribuit pe lungimea cursului de apă.

c) - curgerea pe versanți în bazine cu suprafețe mai mari ( $10km^2 < F < 1000km^2$ ) în care aportul lateral este uniform distribuit și concentrat (prin unirea mai multor pâraie) în lungul cursului de apă.

Din punct de vedere matematic cazurile a) și b) se tratează de regulă utilizând modelele hidrodinamice, iar cazul c) se analizează cu modele de tip hidrograf unitar.

##### 12.4.1. Modele hidrodinamice. Deducerea ecuațiilor Saint - Venant

Această metodă de studiu a curgerii de suprafață se bazează pe integrarea ecuațiilor care descriu mișcarea nepermanentă a apei. Modelul ia în considerare curgerea apei pe versanți până la prima ramificație colectoare. Ecuațiile mișcării nepermanente Saint - Venant se deduc din teorema conservării masei (ecuația de continuitate) și teorema impulsului (ecuația de mișcare).

#### FORMA INTEGRALA A ECUATIILOR SAINT - VENANT

Se consideră un volum de control ( V. C.) în cadrul unui curs de apă de suprafață, plasat între coordonatele  $x_1$  și  $x_2$  (de-a lungul axei OX, în lungul curgerii) respectiv momentele de timp  $t_1$  și  $t_2$  corespunzătoare atingerii coordonatelor. Direcția de curgere face un unghi  $\alpha$  cu orizontala ( $\tan \alpha = i_0 =$  panta talvegului).

În figura de mai jos este reprezentat volumul de control într-un sistem de coordonate tridimensional și o vedere în planul orizontal. Forțele reprezentate în figură sunt componentele forțelor de presiune pe axa OX ( $F'_{p1}, F''_{p1}, F'_{p2}, F''_{p2}$ ), componenta forței de greutate pe axa OX ( $F_g$ ) și forța de frecare cu patul albiei ( $F_f$ ).

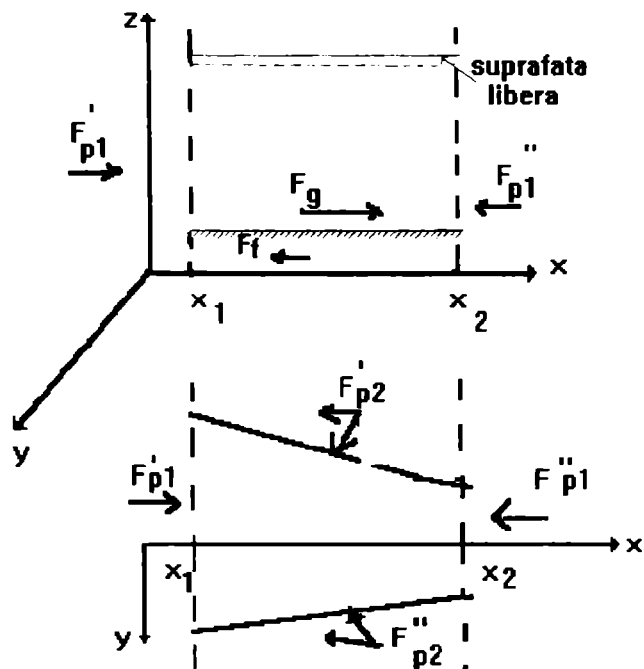


Figura 12.2

### Ecuatia de continuitate

Se deduce din legea conservării masei : cantitatea netă de apă acumulată în volumul de control în intervalul  $(t_1 - t_2)$  trebuie să fie egală cu variația cantității de apă din volumul de control în același interval de timp.

Matematic se poate scrie cantitatea de apă acumulată la un moment de timp  $t$  în V.C. cu expresia:  $\int_{x_1}^{x_2} (\rho A)_t dx$ , unde  $A$  este aria secțiunii transversale. Cantitatea de apă care trece în intervalul  $(t_1 - t_2)$  prin dreptul coordonatei  $x$  se poate exprima astfel:  $\int_{t_1}^{t_2} (\rho v A)_x dt$ . Atunci cei doi membri din legea conservării masei se scriu astfel:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v A)_{x_1} - (\rho v A)_{x_2}] dt \quad (12.10)$$

Pentru un lichid incompresibil ( $\rho = \text{constant}$ ) ecuația (12.10) devine:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(v A)_{x_1} - (v A)_{x_2}] dt \quad (12.11)$$

Produsul dintre viteza în secțiune transversală  $v$  și aria secțiunii transversale  $A$  este debitul în secțiune transversală care depinde de  $x$  și  $t$ .

Ecuția de continuitate se scrie în forma integrală astfel:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_1} - (Q)_{x_2}] dt \quad (12.12)$$

### Ecuția mișcării (sau ecuația dinamică)

Pentru deducerea acestei ecuații se folosește legea conservării impulsului pe volumul de control. Notăm impulsul (cantitatea de mișcare) cu  $M$ , iar expresia sa la un moment de timp  $t$  este:

$$M = m \cdot v = \int_{x_1}^{x_2} (\rho v A)_t dx \quad (12.13)$$

Fluxul cantității de mișcare sau fluxul de impuls se notează  $M_f$  și e dat de produsul dintre și viteză:

$$M_f = \rho v A \cdot v = \rho v^2 A \quad (12.14)$$

Conform legii conservării impulsului, modificarea impulsului în V. C. între  $t_1$  și  $t_2$ ,  $\Delta M$ , trebuie să fie egală cu fluxul net de impuls în V.C. în intervalul de timp ( $t_2 - t_1$ ),  $M_{fn}$  plus impulsul datorat forțelor exterioare care acționează asupra V.C. în același interval de timp.

$$\Delta M = M_{fn} + \int_{t_1}^{t_2} (F_{p1} - F_{p2} + F_g - F_f) dt \quad (12.15)$$

unde  $F_{p1}$ ,  $F_{p2}$ ,  $F_g$ ,  $F_f$  sunt componentele forțelor de presiune, de greutate și de frecare pe axa OX, în lungul căreia are loc curgerea.

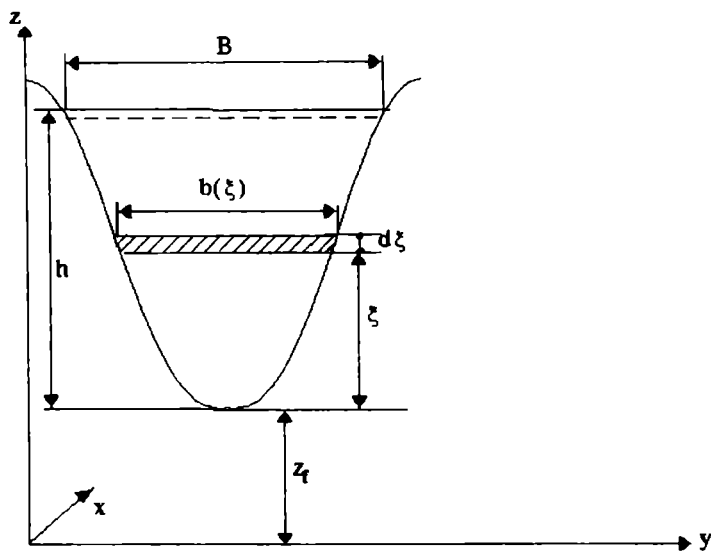
Tinând cont de relațiile (12.13) și (12.14) se pot exprima următorii termeni:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho v A)_{t_2} - (\rho v A)_{t_1}] dx \quad (12.16)$$

$$M_{fn} = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho v^2 A)_{x_1} - (\rho v^2 A)_{x_2}] dt \quad (12.17)$$

În continuare se calculează ceilalți termeni din membrul drept al ecuației (12.15). Pentru cazul general al albiilor neprismatice se consideră o distribuție hidrostatică a presiunii în secțiune.





Secțiune transversală în volumul de control

Figura 12.3

Se atașează figurii 12.3 un sistem cartezian (XOYZ). Pentru o anumită distanță  $\xi$  față de baza albiei volumul de control are o anumită lățime  $b(\xi)$ . Într-o secțiune oarecare forța de presiune hidrostatică se exprimă prin produsul dintre presiunea hidrostatică și aria normală asupra căreia acționează presiunea:

$$F'_{p1} = g \int_0^{h(x)} \rho [h(x) - \xi] b(x, \xi) d\xi \quad (12.18)$$

Atunci impulsul forței nete de presiune în secțiunea cuprinsă între coordonatele  $x_1$  și  $x_2$  este:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{p1} dt = \int_{t_1}^{t_2} (F'_{p1} - F''_{p1}) dt = g \int_{t_1}^{t_2} [\rho(I_1)_{x_1} - \rho(I_1)_{x_2}] dt \quad (12.19)$$

Am notat cu  $I_1$  expresia :

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \cdot b(\xi) d\xi \quad (12.20)$$

Datorită neprismaticității albiei apare în volumul de control o presiune care acționează la maluri. Întrucât lățimea V. C. variază în lungul lui  $\Delta x = x_2 - x_1$ , suprafața udată este  $(db \cdot d\xi)_h$  și forța de presiune se scrie:

$$F_{p2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho g \int_0^h [h(x) - \xi] \left( \frac{\partial b}{\partial x} \cdot d\xi \right)_h dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho g \int_0^h [(h(x) - \xi)] \cdot \left( \frac{\partial b}{\partial x} \right)_h dx d\xi \quad (12.21)$$

Impulsul datorat acestor forțe este:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{p2} dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho I_2 dx dt \quad (12.22)$$

unde cu  $I_2$  s-a notat integrala :

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \cdot \frac{\partial b(x)}{\partial x} d\xi \quad (12.23)$$

Pentru calculul impulsului forței de greutate a apei din V.C., în intervalul ( $t_1 - t_2$ ), pe direcția OX trebuie estimată panta talvegului:

$$i_0 = -\frac{\partial z_f}{\partial x} = \tan \alpha \quad (12.24)$$

unghi mic  $\alpha$ , se poate aproxima  $\sin \alpha$  cu  $\tan \alpha$ . În acest caz proiecția forței de greutate pe axa OX este :  $F_g = G \cdot \sin \alpha = G \cdot \tan \alpha = G \cdot i_0$ . Atunci impulsul căutat este:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A i_0 dx dt \quad (12.25)$$

În vederea calculului impulsului datorat forței de frecare, pe direcția OX se adoptă ipoteza lui Chow și anume că forțele de frecare pe unitatea de lungime de pat de albie sunt date de relații asemănătoare cu cele pentru componenta  $F_g$  a greutății cu deosebirea că apare în expresie panta de frecare ( $i_f$ ) în loc de panta talvegului:

$$F_f = \int_{x_1}^{x_2} \rho g A i_f dx \quad (12.26)$$

Deci impulsul datorat forței de frecare în V.C., în intervalul de timp ( $t_1 - t_2$ ) este:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A i_f dx dt \quad (12.27)$$

Se înlocuiesc toate expresiile de mai sus în legea de conservare a impulsului, se consideră lichid incompresibil ( $\rho = \text{constant}$ ) și se obține ecuația de mișcare:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [(vA)_{t_2} - (vA)_{t_1}] dx = \int_{t_1}^{t_2} [(v^2 A)_{x_1} - (v^2 A)_{x_2}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt - \\ - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} I_2 dx dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(i_0 - i_f) dx dt \quad (12.28) \end{aligned}$$

Ecuatiile (12.12) și (12.28) reprezintă ecuațiile Saint - Venant în formă integrală.

### ECUAȚIILE SAINT-VENANT SUB FORMA DIFERENTIALĂ

În ipoteza că funcțiile care apar în aceste ecuații ,  $Q, z, A, v$  sunt funcții continue și derivabile atunci pot fi dezvoltate în serii Taylor:

$$(A)_{t_2} = (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t}(t_2 - t_1) + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{(t_2 - t_1)^2}{2} + \dots \quad (12.29)$$

$$(Q)_{x_2} = (Q)_{x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x}(x_2 - x_1) + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \frac{(x_2 - x_1)^2}{2} + \dots \quad (12.30)$$

Făcând ca intervalele  $(t_2 - t_1)$  și  $(x_2 - x_1)$  să tindă către zero, putem calcula următoarele limite ținând cont de relațiile (12.29) și (12.30) și considerând semnificativ doar al doilea termen din dezvoltare :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (12.31)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_1} - (Q)_{x_2}] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt \quad (12.32)$$

În aceste condiții ecuația de continuitate (12.12) se scrie :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (12.33)$$

de unde se obține :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (12.34)$$

Ecuatia e valabilă în cazul în care de-a lungul volumului de control nu există aport lateral de apă. În cazul aportului lateral de apă se estimează valoarea fluxului acestuia pe unitatea lungimii de albie ( $q$ ) și se introduce în ecuație:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (12.35)$$

Folosind dezvoltarea în serie a funcțiilor  $vA = Q, v^2A, I_1$  și trecând la limită se obține expresia ecuației de mișcare în formă diferențială:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(Q)_{t_2} - (Q)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dt dx \quad (12.36)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \int_{t_1}^{t_2} [(v^2 A)_{x_1} - (v^2 A)_{x_2}] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(v^2 A)}{\partial x} dx dt \quad (12.37)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} - (I_1)_{x_2}] dt = -g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I_1}{\partial x} dx dt \quad (12.38)$$

Dacă înlocuim expresiile (12.36), (12.37), (12.38) în forma integrală a ecuației de mișcare (12.28), considerând că  $x_2$  tinde la  $x_1$  și  $t_2$  tinde la  $t_1$  se obține forma diferențială:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(v^2 A)}{\partial x} + g \frac{\partial I_1}{\partial x} = gA(i_0 - i_f) + gI_2 \quad (12.39)$$

Ultimul termen din membrul stâng al relației (12.39) se obține prin derivarea expresiei (12.20):

$$g \frac{\partial I_1}{\partial x} = g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \cdot b(x, \xi) d\xi \quad (12.40)$$

Conform teoremei Leibniz integrala de mai sus se poate scrie:

$$g \frac{\partial I_1}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x} \int_0^{h(x)} b(x, \xi) d\xi + g \int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \cdot \frac{\partial b}{\partial x} d\xi \quad (12.41)$$

unde  $\int_0^{h(x)} b(x, \xi) d\xi = A$  aria secțiunii transversale și  $\int_0^{h(x)} [h(x) - \xi] \cdot \frac{\partial b}{\partial x} d\xi = I_2$ .

Astfel ecuația de mișcare devine:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(v^2 A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(i_f - i_0) = 0 \quad (12.42)$$

Ecuațiile Saint - Venant sub formă diferențială sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(v^2 A)}{\partial x} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(i_f - i_0) &= 0 \end{aligned} \quad (12.43)$$

Se pot obține forme echivalente ale ecuațiilor înlocuind diverși parametri din ecuațiile (12.43). Se ține cont că parametrii care se înlocuiesc sunt perechi de variabile dependente. Spre exemplu aria  $A$  se poate exprima prin intermediul nivelului  $h$  astfel:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (12.44)$$

unde  $B$  este lățimea albiei. Viteza într-o secțiune transversală de arie  $A$  se poate exprima funcție de debit:  $v = Q/A$ .

Atunci ecuațiile Saint - Venant exprimate funcție de noile variabile devin:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(i_f - i_0) = 0 \quad (12.45)$$

Sau se poate folosi următorul schimb de variabilă :  $h = z - z_f$  și ecuațiile Saint - Venant se exprimă în acest caz în funcție de  $z$  și  $Q$  ( aceste variabile se folosesc în cazul albiilor cu pat fix  $z_f = const$ ). Efectuăm derivata lui  $h$  în funcție de  $t$  și  $x$  și se obține:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \quad ; \quad \frac{\partial z_f}{\partial t} = 0 \quad (12.46)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z_f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + i_0 \quad (12.47)$$

Atunci ecuațiile Saint - Venant se exprimă:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial z}{\partial x} + gAi_f = 0 \quad (12.48)$$

Alegerea setului de variabile care să intre în componența ecuațiilor Saint - Venant se face în funcție de problema care trebuie rezolvată.

Sistemele de ecuații (12.42), (12.45), (12.48) descriu propagarea undelor dinamice. Undele dinamice se atenuază, iar magnitudinea atenuării depinde de mărimea primilor trei termeni din ecuația dinamică. Dacă se neglijează primii doi termeni din ecuația de mișcare, ecuațiile obținute astfel descriu propagarea undelor de difuzie. Undele de difuzie se atenuază în propagarea de-a lungul albiei. Dacă se neglijează primii trei termeni din ecuația de mișcare se obține un nou sistem care descrie propagarea undelor cinematice. Aceste unde se propagă fără să se atenueze. În această situație debitul e funcție univocă de nivelul apei.

Rezolvarea acestor sisteme de ecuații soluționează problema curgerii de suprafață.

#### 12.4.2. Metoda hidrografului unitar

Metoda aceasta înlocuiește formulele hidraulice și o parte din parametrii care intrau în relațiile Saint - Venant ( parametri mai greu de determinat în diverse situații) cu o relație directă între cauză și efect. Dacă într-un bazin hidrografic se produce o precipitație efectivă (fără pierderi) uniformă cu valoarea  $h_0 = 1mm$  pe o durată foarte scurtă atunci această precipitație este considerată *precipitație impuls* ( funcție de impuls) în procesul formării debitelor. Se notează printr-o funcție de intervalul  $\Delta t$ :  $y = y(\Delta t)$ .

Această precipitație are intensitatea constantă:

$$i_0 = \frac{h_0}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \quad (12.49)$$

Ca urmare a acțiunii precipitației impuls se produce o curgere în profilul care se studiază reprezentată prin hidrograful  $[H.U, \Delta t]$  denumit *hidrograf unitar* de durată  $\Delta t$  a precipitației. Curgerea rezultantă are același volum  $h_0 = 1mm$ , în schimb durata e diferită față de cea a precipitației. Această curgere rezultantă se notează printr-o funcție  $Y = Y(k \cdot \Delta t)$ , unde  $k$  este un număr natural. Dacă în B.H. se consideră o precipitație efectivă ce are loc în intervalul  $\Delta t$  și are volumul  $h = i \cdot \Delta t$  diferit față de  $h_0$  atunci apar curgeri reprezentate de hidrograful  $q(k \cdot \Delta t)$ .

Dacă admitem principiul liniarității sistemului hidrologic considerat, atunci putem găsi următoarea relație între cele două hidrografe:

$$q(k \cdot \Delta t) = [Y(k \cdot \Delta t)] \cdot \frac{h}{h_0} \quad (12.50)$$

sau ținând cont de relația (12.49):

$$q(k \cdot \Delta t) = [Y(k \cdot \Delta t)] \cdot i \cdot \Delta t \quad (12.51)$$

În acest caz se pot calcula ordonatele hidrografului  $q(k \cdot \Delta t)$  cu ajutorul ordonatelor hidrografului unitar  $[H.U, \Delta t]$  prin relația :

$$q = (H.U, \Delta t) \cdot i \cdot \Delta t; \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (12.52)$$

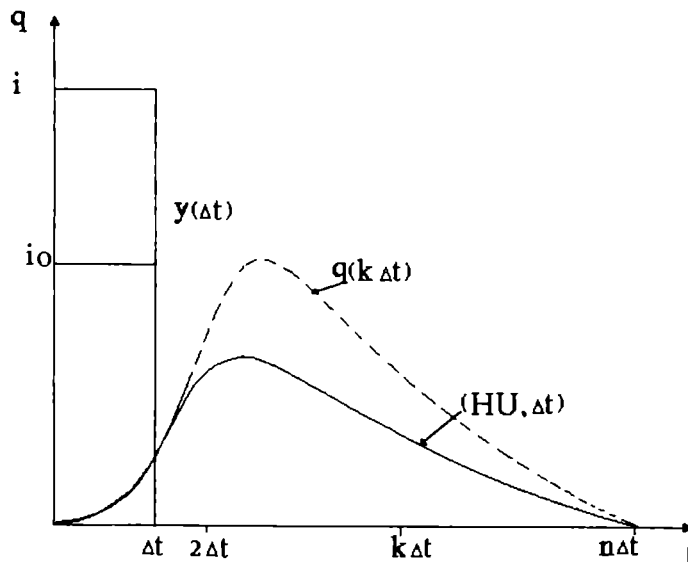


Figura 12.4

## Determinarea hidrografului unitar

Dacă se acceptă postulatul superpoziției în cazul acestui model atunci se poate considera că hidrograful produs de ploii succesive poate fi calculat prin însumarea hidrografelor produse de ploii individuale luând în considerare momentele de început ale ploilor.

Spre exemplificare, se consideră un impuls complex fragmentat în  $m$  precipitații impuls fiecare cu durata  $n \cdot \Delta t$ . La momentul  $t = k \cdot \Delta t$  răspunsul total este dat de următorul hidrograf:

$$Q_k = [Y(k \cdot \Delta t)] \cdot i_1 \cdot \Delta t + [Y(k-1) \cdot \Delta t] \cdot i_2 \cdot \Delta t + [Y(k-2) \cdot \Delta t] \cdot i_3 \cdot \Delta t + \dots \quad (12.53)$$

unde  $k = 1, 2, 3, \dots, s$

Notăm  $n + m - 1 = s$ . Pentru diverse valori ale lui  $k$  (diverse momente de timp) se constituie  $s$  ecuații. Cunosându-se valorile  $Q_k$  se pot determina ordonatele hidrografului unitar  $Y(\Delta t), Y(2\Delta t), \dots, Y(k\Delta t)$  folosind metoda celor mai mici pătrate de rezolvare a sistemului. Astfel se obține un sistem cu  $(n-1)$  necunoscute :

$$\frac{\partial \left[ \sum_{k=1}^s (Y(k \cdot \Delta t) - Q_k)^2 \right]}{\partial [Y(k \cdot \Delta t)]} = 0 \quad (12.54)$$

Din acest sistem se determină ordonatele hidrografului unitar  $[Y(k \cdot \Delta t)]$ . Datele obținute se pot folosi pentru determinarea altor hidrografe dacă se acceptă postulatul invarianței în timp: hidrograful unitar rezultat dintr-o precipitație netă reflectă combinarea efectelor tuturor caracteristicilor bazinului hidrografic și oricând s-ar produce precipitația H.U. este mereu același.

Deci în folosirea acestei metode de studiu a curgerii de suprafață se admit următoarele postulate:

- a) - ploaia netă efectivă e uniform distribuită în timp, pe durata de calcul;
- b) - ploaia netă e uniform distribuită în spațiu sau prezintă moduri similare de variație la toate ploile;
- c) liniaritatea- ordonatele hidrografului unitar sunt direct proporționale cu volumul ploii nete care l-a generat;
- d) superpoziția - hidrograful produs de ploii succesive poate fi calculat prin însumarea hidrografelor produse de ploii individuale luând în considerare momentele de început ale ploilor;
- e) invarianța în timp - hidrograful unitar este nemodificat în timp.

### 12.4.3. Metoda hidrografului unitar instantaneu

Se referă la cazul continuu în aceleași condiții ca în cazul precedent. Metoda folosește o relație directă între impuls și răspuns , integrala Duhamel:

$$Q(t) = \int_0^t i(\tau)Y(t-\tau)d\tau; \quad t < t_p \quad (12.55)$$

unde  $Q(t)$  este debitul curgerii directe la momentul  $t$  și  $t_p$  este durata precipitației;  $i(\tau)$  este intensitatea efectivă a precipitației.

$Y(t-\tau)$  este hidrograful unitar instantaneu (H.U.I.) analog cu hidrograful unitar din metoda precedentă, dar e definit pentru intervale de timp foarte mici,  $\tau$  mult mai mic decât  $\Delta t$ .

### Determinarea H.U.I.

Pentru determinarea hidrografului unitar instantaneu s-au imaginat diverse modele conceptuale care țin cont de procesele care au loc în B.H. În general determinarea ecuației H.U.I. utilizând diferite modele conceptuale se face prin integrarea ecuației de continuitate (12.56) și a ecuației de mișcare care are diferite forme în funcție de schema conceptuală imaginată.

$$I - Q = \frac{dV}{dt} \quad (12.56)$$

unde  $I$  = intensitatea precipitației nete;

$Q$  = debitul curgerii de suprafață;

$\frac{dV}{dt}$  = variația volumului acumulat.

Pentru un rezervor liniar ecuația de mișcare are următoarea formă:

$$V = k \cdot Q \quad (12.57)$$

$V$  = volumul acumulat;

$k$  = parametrul rezervorului (constanta de acumulare).

Înlocuind ecuația (12.57) în (12.56) se obține:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{k} = \frac{I}{k} \quad (12.58)$$

Prin integrarea ecuației (12.58) se obține ecuația H.U.I. pentru un rezervor liniar cu parametru constant ( $k = \text{constant}$ ), în cazul ploii unitare :

$$Y(t) = \frac{1}{k} + e^{-\frac{t}{k}} \quad (12.59)$$

## 12.5. Propagarea undei de viitură în albie naturale

Unda de viitură este un curent de apă care se transmite cu debite variabile, de-a lungul albiei, suprapunându-se curentului existent. Mișcarea undei de la o secțiune la alta e echivalentă cu alimentarea și golirea simultană a unui vas. Când debitul de alimentare  $Q^*$  este mai mare decât debitul de evacuare  $Q$  se acumulează un volum de apă  $W$ . În caz contrar se majorează evacuarea. În secțiunea din aval a sectorului de albie care este tot un rezervor, debitele undei se vor desfășura în timp după un hidrograf diferențiat de cel din amonte. Studiul undei de viitură, și anume determinarea hidrografului din aval când se cunoaște cel din amonte se poate face din punct de vedere hidraulic sau hidrologic.

### 12.5.1. Studiul hidraulic al propagării undei de viitură

Se consideră un sector al albiei cu secțiuni transversale aproximativ dreptunghiulare. Deci în acest caz aria poate fi scrisă:



$$\Omega = B \cdot z \quad (12.60)$$

$B$  = lățimea secțiunii transversale;

$z$  = înălțimea suprafeței libere în aceeași secțiune transversală față de un nivel orizontal de referință (figura 12.5).

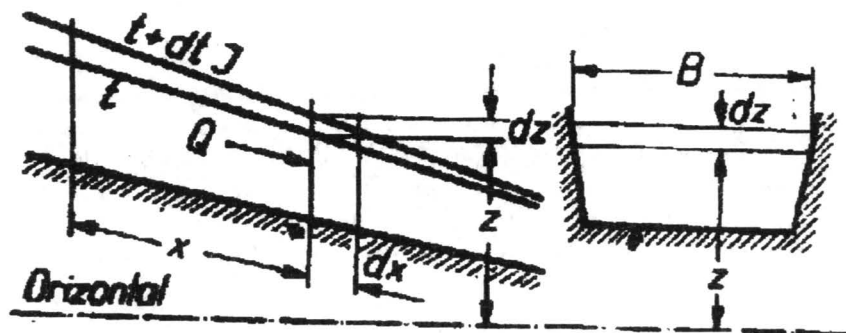


Figura 12.5

Se scriu cele două ecuații Saint - Venant (12.48) pentru această situație. Ecuația de continuitate devine:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (12.61)$$

În cazul ecuației dinamice primii doi termeni sunt neglijabili în comparație cu ultimii doi (predominantă fiind frecarea):

$$gA \frac{\partial z}{\partial x} + gA i_f = 0 \quad (12.62)$$

În urma simplificărilor rămâne:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + i_f = 0 \quad (12.63)$$

Se derivează ecuația de continuitate în raport cu  $x$  și cea dinamică în raport cu  $t$ :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = 0 \quad (12.64)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} + \frac{\partial i_f}{\partial t} = 0 \quad (12.65)$$

Se înmulțește ecuația (12.65) cu  $B$  și se obține:

$$B \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial i_f}{\partial t} = 0 \quad (12.66)$$

Se scad ecuațiile (12.66) și (12.64) și se obține:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - B \cdot \frac{\partial i_f}{\partial t} = 0 \quad (12.67)$$

Termenul  $\frac{\partial i_f}{\partial t}$  se poate scrie în funcție de alte variabile ținând cont de faptul că următoarele variabile sunt dependente între ele:  $(i_f, Q, z); (Q, x, t); (z, x, t)$ .

$$\frac{\partial i_f}{\partial t}(Q, z) = \frac{\partial i_f}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial i_f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \quad (12.68)$$

Termenul  $\frac{\partial z}{\partial t}$  se înlocuiește din ecuația (12.61) și relația (12.68) devine:

$$\frac{\partial i_f}{\partial t} = \frac{\partial i_f}{\partial Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{B} \cdot \frac{\partial i_f}{\partial z} \cdot \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (12.69)$$

Înlocuind expresia (12.67) în ecuația (12.69) se obține:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - B \frac{\partial i_f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial i_f}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (12.70)$$

Se fac următoarele notații:

$$B \cdot \frac{\partial i_f}{\partial Q} = \beta; \quad \frac{\partial i_f}{\partial z} = \alpha \quad (12.71)$$

Atunci se poate scrie ecuația de propagare a undei de viitură:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (12.72)$$

Această ecuație se rezolvă în funcție de condițiile inițiale și se obține distribuția debitului undei de viitură în timp și spațiu.  $\frac{1}{\beta}$  reprezintă un factor de atenuare și e similar coeficientului de difuzie, iar  $\frac{\alpha}{\beta}$  este viteza de translație a debitului  $Q$ .

### 12.5.2. Studiul hidrologic al propagării undei de viitură

Metodele hidrologice prezintă avantaje față de metoda hidraulică în sensul că folosesc un număr mai mic de parametri, deci problema se soluționează mai rapid.

Studiul hidrologic pleacă de la un sistem de două ecuații:

$$\frac{dW}{dt} = Q^* - Q \quad (12.73)$$

$$W = Q \cdot T + \alpha(Q^* - Q)T \quad (12.74)$$

Prima relație este o condiție de continuitate și exprimă faptul că variația volumului acumulat de-a lungul albiei între două secțiuni este egal cu diferența debitelor între cele două secțiuni:

-  $Q^*$  - debitul de alimentare în secțiunea din amonte;

-  $Q$  - debitul de evacuare în secțiunea din aval.

Relația (12.74) este o legătură empirică (Mc. Charty) între debitul de alimentare și cel de evacuare, respectiv volumul de apă acumulat la un moment  $t$ . Parametrii  $\alpha$  și  $T$  sunt constanți și caracterizează albia din punct de vedere al mecanismului de alimentare și evacuare a sectorului respectiv.

Se fac următoarele notații:

$$\alpha \cdot T = K; \quad (1 - \alpha) \cdot T = L \quad (12.75)$$

Derivăm relația (12.74) în raport cu timpul și se obține:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = T \frac{\partial Q}{\partial t} + \alpha T \left( \frac{\partial Q^*}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (12.76)$$

Dacă se grupează termenii pe lângă derivatele debitelor, ecuația de mai sus se transformă astfel:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} (1 - \alpha) \cdot T + \alpha \cdot T \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} \quad (12.77)$$

Folosind notațiile (12.75) se obține:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} + K \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} \quad (12.78)$$

Se egalează relațiile (12.73) și (12.78) și rezultă următoarea ecuație diferențială:

$$Q + L \cdot \frac{\partial Q}{\partial t} = Q^* - K \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} \quad (12.79)$$

Se face următoarea notație:

$$\varphi(t) = \frac{1}{L} \left( Q^* - K \cdot \frac{\partial Q^*}{\partial t} \right) \quad (12.80)$$

și atunci ecuația (12.79) devine:

$$\frac{Q}{L} + \frac{\partial Q}{\partial t} = \varphi(t) \quad (12.81)$$

Ecuația de mai sus este o ecuație diferențială de gradul I, neomogenă care se rezolvă în funcție de condițiile inițiale: la  $t = t_0$  debitul  $Q = Q_0 = \text{constant}$ . Soluția ecuației este  $Q = Q_{om} + Q_{neom}$ .

Partea omogenă a soluției este:

$$Q_{om} = A \cdot e^{-\frac{t}{L}}, \quad \text{cu } A = \text{constant} \quad (12.82)$$

Partea neomogenă a soluției este:

$$Q_{neom} = C(t) e^{-\frac{t}{L}} \quad (12.83)$$

Se înlocuiesc cele două relații (12.82) și (12.83) în ecuația (12.81) pentru identificarea funcției  $C(t)$ :

$$\frac{1}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-\frac{t}{L}} + C'(t)e^{-\frac{t}{L}} - \frac{1}{L} \cdot C(t) \cdot e^{-\frac{t}{L}} = \varphi(t) \quad (12.84)$$

Deci se obține:

$$C'(t) = e^{\frac{t}{L}} \cdot \varphi(t) \quad (12.85)$$

Atunci

$$C(t) = \int_0^t e^{\frac{t}{L}} \varphi(t) dt + C(0) \quad (12.86)$$

Soluția ecuației (12.81) se poate scrie:

$$Q = A \cdot e^{-\frac{t}{L}} + e^{-\frac{t}{L}} \left( \int_0^t e^{\frac{t}{L}} \cdot \varphi(t) dt + C(0) \right) \quad (12.87)$$

Pentru  $t = 0$  înlocuind în (12.87) se obține:

$$Q_0 = A + \int_0^t \varphi(t) dt + C(0) \quad (12.88)$$

Dar debitul inițial  $Q_0$  este constant:  $Q_0 = A$  și atunci ecuația (12.88) dă expresia lui  $C(0)$ :

$$C(0) = - \int_0^t \varphi(t) dt \quad (12.89)$$

Tinând cont de relațiile de mai sus soluția finală este:

$$Q = e^{-\frac{t}{L}} \left[ Q_0 + \int_0^t e^{\frac{t}{L}} \varphi(t) dt - \int_0^t \varphi(t) dt \right] \quad (12.90)$$

Ecuația devine operativă dacă hidrograful din amonte  $Q^*(t)$  se exprimă sub formă analitică (de exemplu polinom Newton). Rezolvând ecuația pentru diverse cazuri se întocmește hidrograful din aval față de cel din amonte. S-au găsit unele caracteristici generale:

- Hidrograful undei din aval  $Q(t)$  are valoarea maximă mai mică decât valoarea maximă a hidrografului  $Q^*(t)$  din amonte. Prin propagarea undei (fără aport de debite pe traseu) se produce o atenuare a valorii maxime a debitului din amonte.

- Valoarea maximă a undei din aval se produce cu o întârziere  $T_0$  față de cea din amonte.

- Volumul maxim acumulat în albie se realizează atunci când debitele  $Q^*$  și  $Q$  devin egale.

- Durata de curgere prin secțiunea din aval e întotdeauna mai mare ca durata de curgere prin secțiunea din amonte.

Problema care intervine este determinarea parametrilor  $\alpha$  și  $T$ . Dacă forma analitică a lui  $Q^*(t)$  este relativ simplă și există o pereche de hidrografe ( amonte, aval) din înregistrări de debite, atunci se poate aplica metoda celor mai mici pătrate pentru determinarea lui  $\alpha$  și  $T$ .

### TRANSPORTUL DE ALUVIUNI

Aluviunile sunt materiale solide granulare, de formă și dimensiuni diferite care au fost transportate de curentul apei. Aceste particule pot proveni din:

- straturile de sol de pe versanți
- sedimentul albiei cursului de apă
- prăbușirea de stânci din versanți, alunecări de teren
- evacuarea accidentală sau controlată de material steril granular rezultat din fluxuri tehnologice industriale.

Aluviunile de pe versanți sunt particule de rocă dezagregate de presiunea exercitată de picăturile de ploaie sau alți agenți atmosferici și apoi antrenate de albia râurilor prin curgerea de suprafață. Acest fenomen de "spălare a solului" se numește *eroziunea solului*. Grosimea stratului de sol erodat anual, variază după natura învelișului solului, după climat și după caracteristicile morfologice ale versanților, de la 0,01 mm/an până la 1mm/an. Despăduririle masive duc la accentuarea procesului de eroziune a solului.

O altă cauză de formare a aluviunilor este fenomenul de dezagregare a malurilor și a sedimentului albiilor, fenomen care se datorează presiunii hidrodinamice a curentului de suprafață și subteran.

Din analiza modului cum se produce deplasarea aluviunilor în lungul cursului de apă se desprind unele caracteristici:

- albiile cursurilor de apă sunt căi de tranzit pentru aluviuni, acestea deplasându-se din zonele înalte ale bazinului hidrografic către cele joase.
- cantitatea de aluviuni antrenată crește odată cu creșterea debitului de apă peste o valoare critică.
- deplasarea aluviunilor de-a lungul cursului de apă este intermitentă, funcție de curgerea generală și condițiile de curgere.

#### 13.1. Structura aluviunilor

Aluviunile care provin din dezagregarea rocilor au componente de tipul: feldspat, mică, cuarț, siliciu sau chiar fragmente de rocă: gresie, calcar, granit. După poziția particulelor în mișcare în masa curentului de apă aluviunile se împart în:

- aluviuni în suspensie, care sunt răspândite în masa curentului de apă. Acestea au forme prismatice, cu muchii ascuțite și diametrul de ordinul micronilor.
- aluviuni în semisuspensie; au forme rotunjite datorită ciocnirilor între particule și pereții albiei.
- aluviuni de fund, care sunt particule mari și se deplasează pe patul albiei sau în imediata vecinătate, pe direcția de curgere a curentului.

Aluviunile în semisuspensie și cele de fund, în mișcarea lor din amonte către aval își micșorează dimensiunile. H. Sternberg descoperă legea după care are loc reducerea dimensiunilor particulelor și o verifică în laborator și pe unele cursuri de apă. În deducerea

legii se pleacă de la ipoteza că pierderea de greutate a unei particule este proporțională cu greutatea  $G$  a acesteia și cu distanța parcursă:

$$dG = -c \cdot G \cdot ds \quad (13.1)$$

unde  $c$  este coeficientul de abraziune care depinde de forma și natura particulei, de viteza de deplasare și de mărimea particulelor care alcătuiesc sedimentul albiei. Prin integrarea ecuației (13.1) se obține:

$$G = G_0 \cdot e^{-c \cdot s} \quad (13.2)$$

unde  $G_0$  este greutatea particulei la coordonata zero și  $G$  este greutatea particulei după ce a străbătut distanța  $s$ .

Se pot folosi diametrele sferelor echivalente în greutate cu particulele considerate și atunci ecuația (13.2) devine:

$$d^3 = d_0^3 \cdot e^{-c \cdot s} \quad (13.3)$$

unde  $d$  este diametrul sferei echivalente cu particula după ce a străbătut distanța  $s$  și  $d_0$  este diametrul inițial ( la  $s = 0$ ).

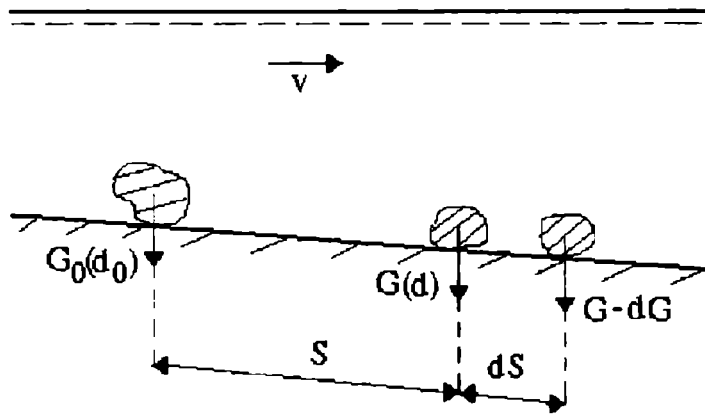


Figura 13.1

Expresia coeficientului  $c$  este stabilită empiric:

$$c = c_1 \cdot v^{0.25 \cdot (d_1 + 15) / 15} \quad (13.4)$$

unde  $v$  este viteza cu care se deplasează aluviunile (m/s);

$d_1$  este diametrul sedimentului de la care particula începe să se miște (mm);

$c_1$  este coeficientul specific de abraziune, cu valori caracteristice pentru fiecare tip de material ( $km^{-1}$ ).

Legea poate fi aplicată în cazul cursurilor de apă fără afluenți și cu o structură aproximativ omogenă a aluviunilor. Aluviunile de fund au o gamă largă de dimensiuni și forme atunci când de-a lungul unui curs de apă, afluenții din amonte aduc aluviuni de dimensiuni și structuri diferite care se află în diverse condiții de abraziune.

Caracterizarea aluviunilor de fund se face pe baza analizei granulometrice și mai ales prin diametrul mediu al amestecului de aluviuni ( $d_{mediu}$ ). Determinarea diametrului mediu se obține prin operația de cernere conform procedurilor geotehnice, din curba frecvențelor relative a diametrelor granulelor (figura 13.2).

*Frecvența relativă* ( $f$ ) se definește ca fiind raportul dintre greutatea probei granulelor de diametre cuprinse într-un anumit interval și greutatea totală a probei. Din această curbă de frecvențe se obține valoarea diametrului mediu ca fiind abscisa centrului de greutate  $G$ .

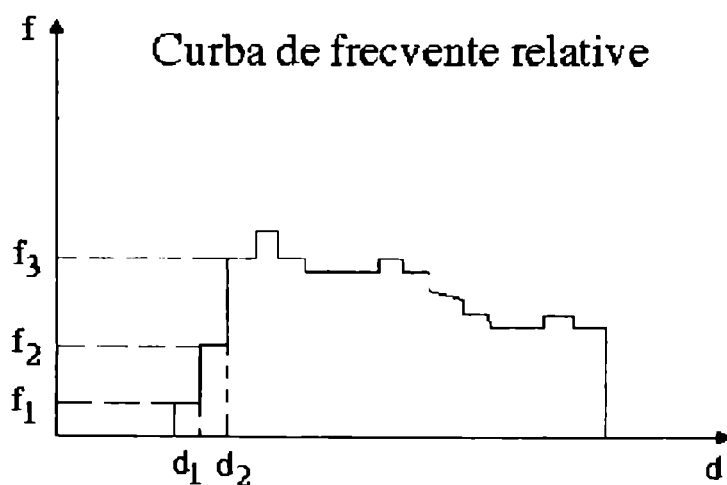


Figura 13.2

Cu datele obținute prin operația de cernere se construiește curba granulometrică (curba frecvențelor cumulate - figura 13.3). Pe această curbă diametrul mediu se obține din condiția ca verticala corespunzătoare diametrului mediu să delimiteze suprafețe egale de o parte și alta a sa.

În cazul particulelor foarte fine cu diametrul mai mic de 0,1 mm, procedeul cernerii devine impracticabil și se recurge la stabilirea diametrului prin mijloace hidraulice și anume prin măsurarea vitezei uniforme  $w$  a căderii particulelor în apă stătătoare, folosind formula Stokes:

$$w = g \cdot \frac{\gamma_1 - \gamma}{1800\eta} \cdot d^2 \quad [m/s] \quad (13.5)$$

$\eta$  este vâscozitatea cinematică ;  $\gamma$  este greutatea specifică a apei și  $\gamma_1$  greutatea specifică a particulei.



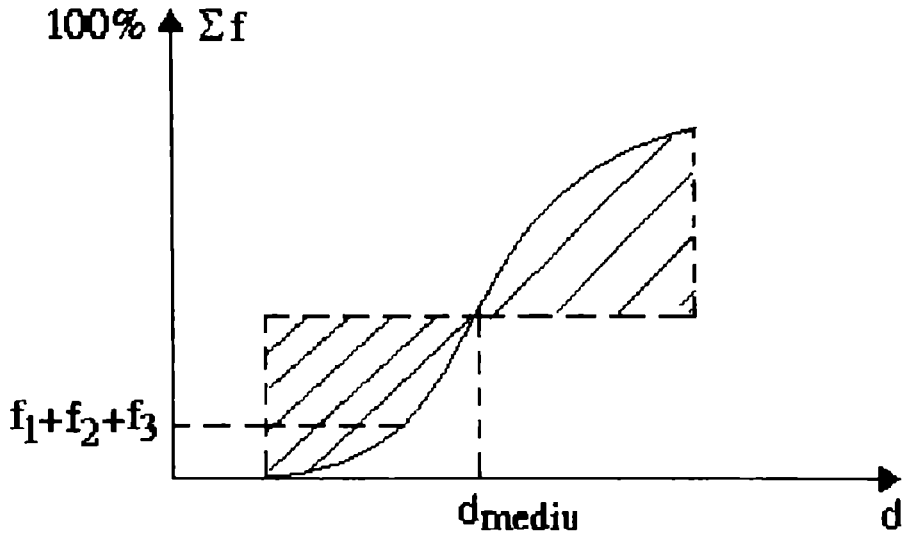


Figura 13.3

### 13.2. Deplasarea aluviunilor

Mișcarea tuturor aluviunilor se face în salturi. În funcție de tipurile de aluviuni salturile sunt mai lungi sau mai scurte. Astfel aluviunile în suspensie execută salturi lungi și neregulate, iar cele de fund salturi scurte (acestea din urmă fiind cu atât mai scurte cu cât se află în interiorul masei de aluviuni).

Mișcarea în salturi se datorează suprapunerii a doi factori:

- regimul turbulent al curentului prin componenta verticală a vitezei sale ( $v^*$ )
- acțiunea vitezei de cădere a particulei în apă ( $w$ ).

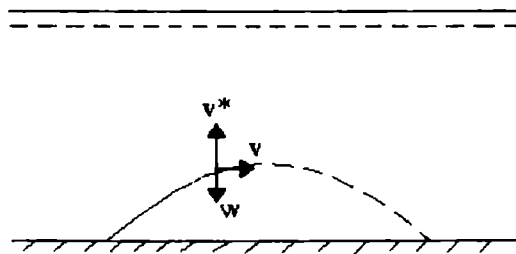


Figura 13.4

Salturile mici ale aluviunilor de fund se explică prin valorile mici ale vitezelor curentului de apă în această zonă ( $v$ ), prin valori mai mari ale vitezei de cădere a particulei, respectiv

prin ciocnirile și contactele pe care le au cu particulele învecinate. Experiențele efectuate asupra modului de antrenare a aluviunilor din patul albiei în funcție de creșterea vitezei curentului au arătat că:

- o particulă de o anumită mărime se menține în repaus pe fund până la o viteză limită a apei ( $v_1$ ).

- pentru viteze mai mari decât  $v_1$  particula intră în mișcare prin rostogolire până la atingerea unei alte viteze limită ( $v_2$ ).

- pentru viteze ale curentului de apă mai mari decât viteza  $v_2$  începe mișcarea prin salturi a căror mărime crește proporțional cu viteza curentului de apă. Această mișcare are loc până la atingerea unei viteze  $v_3$ .

- pentru viteze mai mari decât  $v_3$  particulele nu mai ating patul albiei și se mențin în suspensie.

În concluzie în funcție de viteza cursului de apă particulele se pot rostogoli pe fund, pot executa salturi, sau pot rămâne în suspensie.

### 13.2.1. Studiul mișcării aluviunilor de fund

Mișcarea aluviunilor se studiază începând de la o anumită stare numită stare critică a particulei. Starea critică e dată de condițiile în care aluviunile încep să se deplaseze, dacă se folosește ipoteza că particulele depuse anterior în albie sunt în stare de repaus.

Starea critică a mișcării particulelor de fund se realizează atunci când forța de rezistență ce acționează asupra particulelor este egală cu forța de deplasare. Se consideră  $\tau$ , forța critică de antrenare pe unitatea de suprafață a patului albiei exprimată calitativ prin relația dată de Du Boys și Du Buat:

$$\tau = \gamma \cdot H \cdot \sin \alpha \quad (13.6)$$

unde  $H$  este adâncimea curentului;  $\alpha$  este unghiul de orientare pe orizontală a patului albiei;  $\gamma$  este greutatea specifică a apei.

Dacă această forță se aplică suprafeței particulei care se echivalează cu suprafața unei sfere de diametru  $d$  atunci forța critică de antrenare ce acționează asupra acestei particule va fi:

$$T = \tau \cdot S = \frac{1}{4} \gamma \cdot H \sin \alpha \cdot \varphi \pi d^2 \quad (13.7)$$

unde  $\varphi$  este coeficient de formă al particulei, pentru exprimarea cât mai corectă a suprafeței.

Forța care se opune deplasării este forța de frecare cu patul albiei și se exprimă din relația generală:

$$F = \mu \cdot N = \mu(G - F_A) \cdot \cos \alpha = \mu(\gamma_1 V - \gamma V) \cdot \cos \alpha = \mu \frac{\pi \cdot d^3}{6} \cdot (\gamma_1 - \gamma) \cdot \cos \alpha \quad (13.8)$$

unde  $\gamma_1$  este greutatea specifică a particulei;  $\gamma$  este greutatea specifică a apei.

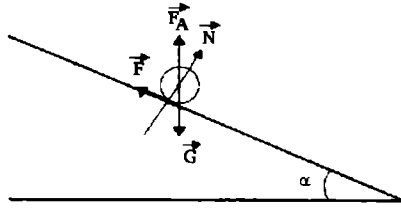


Figura 13.5

În starea critică cele două forțe sunt egale:  $T = F$ . Deci prin egalarea expresiilor (13.7) și (13.8) se obține:

$$\tan \alpha = \frac{2\mu \cdot d \cdot (\gamma_1 - \gamma)}{3\varphi \cdot \gamma \cdot H} \quad (13.9)$$

Pentru unghiuri mici se poate aproxima tangenta prin sinus ( $\tan \alpha = \sin \alpha$ ). În acest caz:

$$\tau_{critic} = \gamma \cdot H \cdot \tan \alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu \cdot d}{\varphi} \cdot (\gamma_1 - \gamma). \quad (13.10)$$

Viteza critică din centrul particulei se obține prin egalarea forței de antrenare a particulei cu greutatea în apă a particulei. Forța de antrenare a particulei de către curentul de apă are forma:

$$T_v = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (13.11)$$

unde  $v$  este viteza curentului de apă care antrenează particula. În starea critică are loc egalarea forțelor menționate:

$$\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \frac{v_{cr}^2}{2g} = \mu \frac{\pi}{6} \cdot d^3 \cdot (\gamma_1 - \gamma) \cdot \cos \alpha \quad (13.12)$$

Pentru unghiuri  $\alpha$  mici se poate aproxima cosinusul cu 1. Deci viteza critică se poate scrie:

$$v_{cr} = \sqrt{\frac{4\mu d(\gamma_1 - \gamma)}{3g}} \quad (13.13)$$

Experimentele din laborator și din natură au condus la formule empirice de calcul ale vitezei critice medii a curentului de apă în funcție de diametru.

### 13.2.2. Studiul mișcării aluviunilor în suspensie

Pentru studiul acestei mișcări se fac următoarele ipoteze:

- concentrația de aluviuni într-un punct al curentului nu se schimbă în timp. Prin concentrație de aluviuni se înțelege cantitatea de particule conținute în unitatea de volum de apă. Se măsoară în  $\frac{g}{l}$  sau  $\frac{g}{m^3}$ .

- particulele sunt atât de mari încât curentul de apă nu consumă o energie prea mare pentru transportul lor.

În aceste condiții putem considera că transferul de aluviuni de jos în sus datorat componentei verticale a vitezei (într-un punct al curentului) este egal cu transferul de aluviuni datorat vitezei de cădere a particulelor sub acțiunea gravitației.

Schmidt a elaborat o teorie asupra mișcării aluviunilor în suspensie. Pentru unitatea de suprafață din planul orizontal în care se face transferul și unitatea de timp, se exprimă egalitatea dintre transferurile de aluviuni, enunțată anterior prin relația:

$$\rho \cdot w = -E \frac{d\rho}{dh} \quad (13.14)$$

unde  $\rho \cdot w$  este transferul de aluviuni datorat vitezei de cădere în câmp gravitațional și  $E \cdot d\rho/dh$  reprezintă transferul de aluviuni de jos în sus datorat componentei verticale a vitezei.

$\rho$  este concentrația aluviunilor;

$w$  este o mărime hidraulică și anume viteza uniformă de cădere a particulelor în apă stătătoare;

$h$  este înălțimea corespunzătoare concentrației  $\rho$

$E$  este un coeficient de transfer al aluviunilor, variabil de la un punct la altul.

Semnul minus care apare în egalitatea (13.14) indică scăderea cu înălțimea a transferului care se produce de jos în sus.

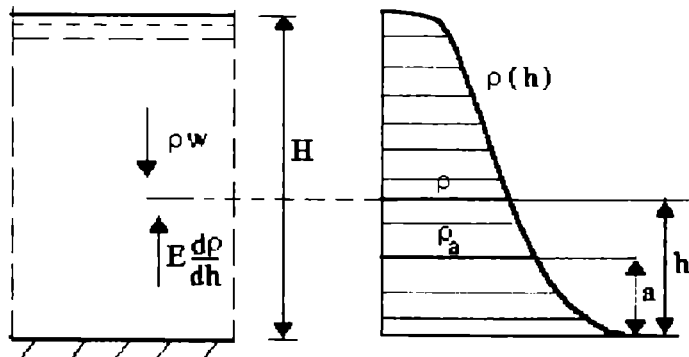


Figura 13.6

În ecuația (13.14) se separă variabilele, se integrează între două limite ale înălțimii  $a$  și  $h$  și se obține:

$$\rho = \rho_a \cdot \exp \left( -w \cdot \int_a^h \frac{1}{E} \cdot dh \right) \quad (13.15)$$

unde  $\rho_a$  este concentrația cunoscută la înălțimea  $a$ .

### 13.3. Debitul solid al aluviunilor târâte și în suspensie

Debitul solid de aluviuni se definește ca fiind raportul dintre numărul de particule târâte sau în suspensie înmulțit cu greutatea uneia (când acestea sunt identice) și intervalul de timp pentru care se măsoară debitul.

Debitul solid aferent aluviunilor târâte pe lățimea unitară de profil (notat  $q'_s$ ) depinde de diferența între forța de târâre  $\tau$  și forța critică de târâre  $\tau_{critic}$  a materialului care alcătuiește sedimentul albiei.

Du Boys stabilește următoarea relație care exprimă debitul solid al aluviunilor târâte pe lățimea unitară de profil:

$$q'_s = C\tau(\tau - \tau_{critic}) \quad (13.16)$$

În expresia de mai sus  $C$  este un coeficient care depinde de structura și mărimea aluviunilor. O altă relație de calcul a debitului solid de târâre e dată de Levy, bazându-se pe proporționalitatea existentă între viteza curentului și viteza critică de antrenare  $v_{crit}$ :

$$q'_s = \frac{d}{k} \cdot (v - v_{crit}) \quad (13.17)$$

unde  $d$  este diametrul mediu al aluviunilor antrenate;

$v$  este viteza curentului;

$v_{crit}$  este viteza critică de antrenare a curentului;

$k$  este parametru de proporționalitate.

Modelul de calcul al transportului solid târât maxim este conceput de H.A. Einstein prin interpretarea probabilistică a teoriei amestecului turbulent în curgerile cu suprafață liberă. Desprinderea unei granule de patul albiei are loc atunci când componenta hidrodinamică de portanță  $F_y$  este superioară greutății granulei în apă  $G$ . Forța  $F_y$  este o mărime fluctuantă și poate fi reprezentată printr-o funcție aleatoare, staționară în timp dată de expresia:

$$R = \frac{F'_y}{\overline{F_y}} \quad (13.18)$$

unde  $\overline{F_y}$  este media probabilistică a forței  $F_y$ , respectiv  $F'_y$  este fluctuația forței. Atunci forța  $F_y$  se poate exprima:

$$F_y = F'_y + \overline{F_y} \quad (13.19)$$

Distribuția funcției  $R$  poate fi reprezentată printr-o funcție de densitate de probabilitate de tip Gauss:

$$f(R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(R-1)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (13.20)$$

Se consideră patul albiei format din granule de aceeași dimensiune, caracterizate de o funcție aleatoare dependentă de acea dimensiune. Fiecare granulă progresează pe pat prin salturi de lungime medie constantă,  $L$ .

Fie  $P_n$  probabilitatea ca o granulă să se desprindă de cel puțin  $n$  ori de patul albiei într-un interval de timp  $T$  (suficient de mare comparativ cu durata saltului), atunci distanța medie parcursă de granulă în intervalul  $T$  este  $n \cdot L$ . Considerând o suprafață de lățime unitară și lungime  $L$  pe patul albiei, numărul mediu de granule ca traversează o secțiune normală când curgerea este saturată e dat de expresia:

$$N = P_n \cdot \frac{L}{\alpha_1 \cdot D_s^2} \quad (13.21)$$

unde  $\alpha_1 \cdot D_s^2$  este aria ocupată de granule pe banda cu lățime unitară ;  $D_s$  este diametrul sferei echivalentă cu granula și  $\alpha_1$  este un coeficient care caracterizează ocuparea suprafeței de către granule.

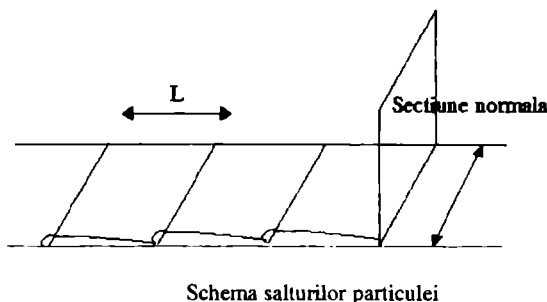


Figura 13.7

Pentru o lungime în sensul curgerii infinită, numărul maxim de granule care traversează secțiunea normală este:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot \frac{L}{\alpha_1 \cdot D_s^2} \quad (13.22)$$

Tinând cont de definiția debitului solid de la începutul paragrafului se poate scrie expresia debitului solid maxim de târâre în secțiune normală pentru o lățime unitară a patului albiei:

$$q'_s = \frac{M \cdot G}{T} = \frac{L}{\alpha_1 \cdot D_s^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cdot \frac{G}{T} = \frac{\alpha(\gamma_s - \gamma) \cdot D_s \cdot L}{\alpha_1 \cdot T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (13.23)$$

unde  $\alpha$  este coeficient de formă a particulei;  $\gamma_s$  - greutatea specifică a particulei;  $\gamma$  - greutatea specifică a apei.

Einstein admite că mărimile  $L$  și  $T$  se pot exprima cu relațiile:

$$L = \alpha_L \cdot D_s \quad (13.24)$$

$$T = \alpha_T \cdot \frac{D_s}{w_r} \quad (13.25)$$

în care  $\alpha_L$  și  $\alpha_T$  sunt parametri de proporționalitate și  $w_r$  este viteza de cădere finală a particulei în apă stătătoare, calculată prin relația:

$$w_r = \alpha_w \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma)gD_s}{\gamma}} \quad (13.26)$$

Introducând relațiile (13.24), (13.25) și (13.26) în relația (13.23) se obține o nouă expresie pentru debitul solid de târare:

$$q'_s = \frac{1}{A^*} \frac{[(\gamma_s - \gamma) \cdot D_s]^{3/2}}{(\gamma/g)^{1/2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_n \quad (13.27)$$

unde cu  $A^*$  s-a notat raportul constantelor:

$$A^* = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_T}{\alpha \cdot \alpha_L \cdot \alpha_w} \quad (13.28)$$

Termenul  $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$  se exprimă în funcție de probabilitatea  $P_1$  pentru care o granulă să se desprindă cel puțin o dată în intervalul  $T$ . La rândul său  $P_1$  se exprimă în funcție de distribuția  $f(R)$ .

Debitul aferent aluviunilor în suspensie, notat  $q''_s$  depinde de viteza curentului cu care acesta transportă concentrația de aluviuni în profilul albiei. Considerând distribuția vitezei ( $v$ ) și a concentrației ( $\rho$ ) pe verticală, ca în figura 13.8, se obține distribuția produsului  $v \cdot \rho$  și se estimează media acestui produs pentru diverse verticale ale profilului transversal al albiei, pentru care se face calculul.

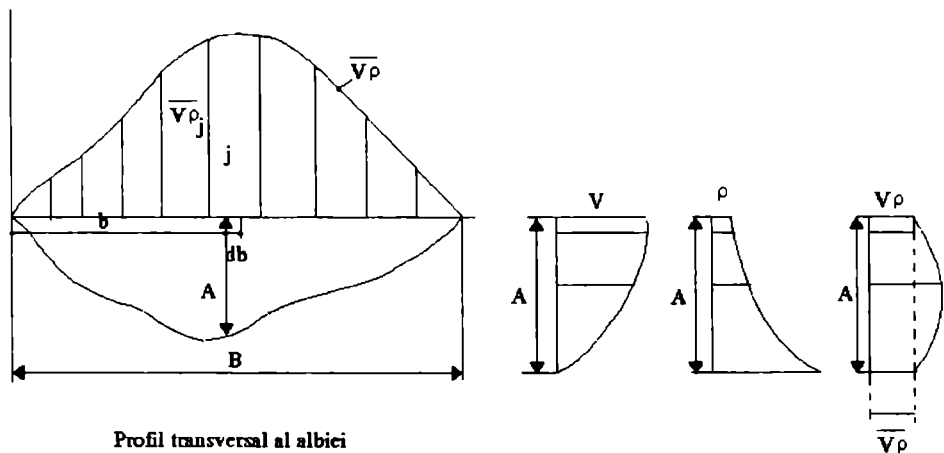


Figura 13.8

Debitul aluviunilor în suspensie pe lățimea  $B$  a profilului se exprimă astfel:

$$q''_s = \int_0^B \int_0^A v \cdot \rho \cdot dh \cdot db \int_0^B \overline{v \cdot \rho} \cdot db \quad (13.29)$$

$A$  adâncimea ;  $\overline{v \cdot \rho}$  media repartiției  $v \cdot \rho$  pe adâncimea  $A$ ;  $\rho$  concentrația punctuală de aluviuni în suspensie;  $v$  viteza curentului în punctul de înălțime  $h$  al verticalei profilului.

### 13.4. Măsurarea debitului solid

Odată cu măsurătorile privind debitul solid se efectuează și măsurători referitoare la morfologia albiei, granulozitatea aluviunilor în mișcare și a celor sedimentate. Debitul solid în suspensie ca și cel târât se raportează la debitul curgerii și la nivelul apei din momentul măsurătorii.

#### 13.4.1. Măsurarea debitului solid de târâre

Se consideră un debit elementar  $q$  care reprezintă cantitatea de aluviuni ce trece în unitatea de timp prin secțiunea transversală de lățime parțială  $b$ :

$$q = \frac{100 \cdot G}{b \cdot t} \quad (13.30)$$

$G$  este greutatea aluviunilor care trec prin secțiunea cu lățimea  $b$ , în timpul  $t$  și se determină direct cu aparate speciale.

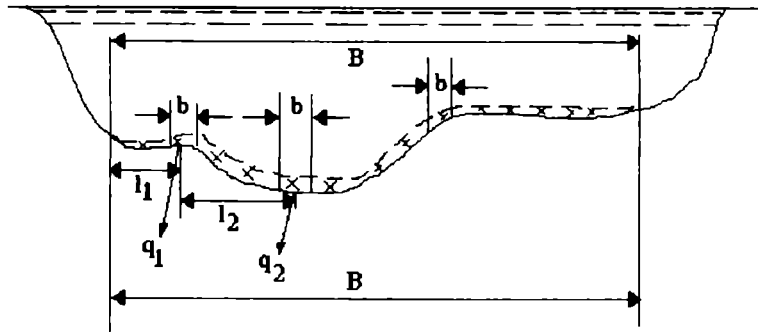


Figura 13.9

Dacă se notează cu  $l_i$  distanțele dintre verticalele care trec prin mijlocul lățimilor  $b$  (vezi figura 13.9), atunci debitul solid de târâre prin secțiunea transversală de lățime  $B$  se poate calcula astfel:

$$q'_s = \frac{1}{2}q_1 \cdot l_1 + \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \cdot l_2 + \dots + \frac{1}{2}(q_i + q_{i+1}) \cdot l_{i+1} + \dots + \frac{1}{2}q_n \cdot l_{n+1} \quad (13.31)$$

Suma distanțelor  $l_1, l_2, \dots, l_{n+1}$  formează lățimea activă  $B$  de circulație a aluviunilor de fund. Lățimea  $b$  este lățimea aparatului care captează aluviunile cu debitul parțial  $q$ . Aparatele folosite pentru captarea aluviunilor se numesc *batometre*. Cel mai simplu batometru este o cutie de plasă de sârmă cu ochiuri mici, cu o parte deschisă pe o lățime  $b$ , fixată pe patul albiei printr-o bară metalică.



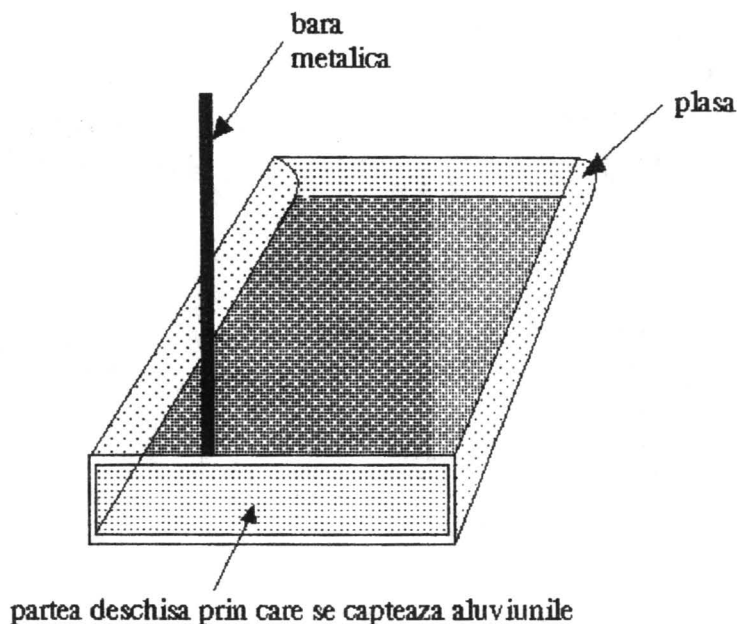


Figura 13.10

Batometrele trebuie construite astfel încât să asigure captarea în întregime a stratului de aluviuni care se mișcă pe fund și să nu perturbe regimul de curgere normală al apei. După un timp  $t$  înregistrat la cronometru, batometrul se extrage din apă și se cântăresc aluviunile reținute în interior.

#### 13.4.2. Măsurarea debitului solid în suspensie

Determinarea debitului solid al aluviunilor în suspensie se obține prin măsurători simultane de viteză a apei și de turbiditate într-un număr de puncte ale secțiunii de curgere a râului. Se consideră că debitul solid în suspensie care se scurge într-un profil e o însumare de debite parțiale corespunzătoare verticalelor considerate în profil:

$$q''_s = \sum b \cdot v_{med} \cdot \rho_{med} \quad (13.32)$$

unde  $b$  este semisuma distanței până la verticala imediat alăturată verticalei considerate;  $v_{med}$  este viteza medie a apei corespunzătoare verticalei considerate;  $\rho_{med}$  este concentrația medie a aluviunilor pe aceeași verticală.

Aparatele cu care se determină concentrația aluviunilor în suspensie se numesc toț batometre și constau într-un mic rezervor care prin scufundare în curent cu ajutorul unui cablu subțire, captează o probă de apă. Cantitatea de apă recoltată depinde de turbiditatea apei. Se separă aluviunile în suspensie de masa lichidă a probei prin filtrare sau decantare și apoi prin uscare și cântărire.

Se cântăresc aluviunile separate de apă ( $G$ ), se cunoaște volumul total al probei ( $W$ ) și se obține concentrația aluviunilor din punctul de unde s-a luat proba:  $\rho = G/W$ .

Cea mai mare parte a aluviunilor în suspensie din volumul total anual de aluviuni transportate de un râu se scurge în perioada viiturilor. Ca exemplu se poate spune că pentru un

debit lichid de 1,25 de ori mai mare ca debitul mediu multianual se scurge o cantitate de cel puțin 90 % din debitul solid mediu multianual.

Dependența debitului solid ( $q''_s$ ) față de cel lichid ( $Q$ ) este de forma unei bucle (figura 13.11), diferită pentru fiecare viitură, cu valori mai mari ale debitului solid în perioada de creștere a viiturii și cu valori mai mici în perioada de scădere pentru același debit lichid.

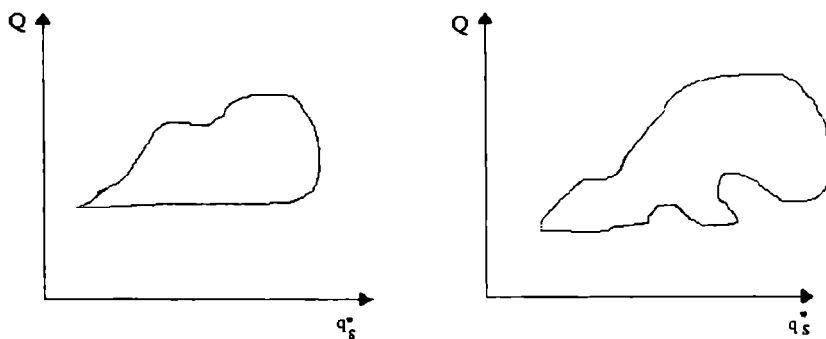


Figura 13.11

Acest aspect se poate explica prin puterea mai mare de antrenare a curentului în perioada de creștere a debitului de apă.

## BIBLIOGRAFIE

1. Albu M., Mecanica apelor subterane, Editura tehnică, București, 1981.
2. Albu M., Pene C., Mecanica fluidelor, Editura Universității București, 1997.
3. Borowczyk M., Grabczak J., Zuber A., Radioisotope Measurements of Ground Water Flow Direction by the Single - Well Method, Institut Bađan Jadrowych, Report 502/VI, 1964.
4. Castagny G., Trait e pratique des eaux souterraines, Dunod, Paris, 1963.
5. Chow T. Handbook of Applied Hydrology, Mc. Graw Hill Company, New York, 1964.
6. Cioc D., Hidraulică, Editura didactică și pedagogică, București, 1975.
7. Constantinescu L., Botezatu R., Calotă C., Steflea V., Dragomirescu Dr., Paucă M., Gohn E., Prospectiuni geofizice, vol I, Metodele c mpurilor naturale, Editura tehnică, București, 1964.
8. Constantinescu M., Goldstein M., Haram V., Solomon S., Hidrologie, Editura tehnică, București, 1956.
9. Cristea N., Hidraulica subterană, Editura tehnică, București, 1956.
10. Davis N.S., De Wiest J.M.R., Hydrogeology, Editura John Wiley Sons Inc., New York. London. Siney, 1967.
11. De Wiest J.M.R., Geohydrology, Editura Revolucionaria, Cuba, 1971.
12. De Wiest J.M.R., Flow through Porous Media, Academic Press, New York. London. Siney, 1969.
13. Errikson E., The Possible Use of Tritium for Estimating Groundwater Storage, Tellus, 10,4, 1958.
14. Gașpar E., Oncescu M., Introducere în radiohidrologie, Editura Academiei Române, 1967.
15. Gheorghe A., Prelucrarea și sinteza datelor hidrologice, Editura Tehnică, București, 1973.
16. Gheorghe A., Bomboe P., Hidrologie minieră, Editura tehnică, București, 1963.
17. Gheorghită S., Metode matematice în hidrogazodinamica subterană, Editura Academiei Române, 1966.
18. Halevy E., Nir A., The Determination of Aquifer Parameters with the Aid of Radioactive Tracers, Journal of Geophysical Research, 67, 6, 1962.
19. Hamburger L., Introducere  n teoria propag rii c ldurii, vol I, Conducția prin solide, Editura Academiei Rom ne, 1956.
20. Inoue E., Kaufman A., Prediction of Movement of Radionuclides in Solution through Porous Media, Health Physics, 9, 1963.
21. Krolikovski C., Influence of Measurement Probes on Determination of Filtration Velocity in Boreholes and Piezometers, Kvortalnik Geologiczny, 3, 1964.
22. Landau D, Lifchitz E., Mecanique de Fluides, Editura MIR, Moscou, 1971.
23. Linsley A., Kohler N., Paulhus G., Hydrology for Engineers, 1958.
24. Ogilvi N.A., Metoda electric  pentru m surarea vitezei de filtrare a apelor subterane, Buletinul de informații tehnico - științifice, nr.4, 1978.

25. Philip J.R., On solving the Unsaturated Flow Equation, Soil Science, nr.5 , 1973.
26. Pișota I., Buta I., Hidrologie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
27. Roche M., Hydrologie de surface, Editura Gauthier - Villars, Paris, 1963.
28. Sabac I., Matematici speciale, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
29. Scheidegger A.E., The Physics of Flow through Porous Media, University of Toronto Press, 1960.
30. Serban P., Stănescu V., Roman P., Hidrologie dinamică, Editura tehnică, București, 1989.
31. Tood K.D., Groundwater Hydrology, Editura John Wiley Sons Inc., New York. London. Sindy, 1963.
32. Vâlcovici V, Bălan St., Voinea R., Mecanică Teoretică, Editura Tehnică, București, 1963.
33. Vladimirescu I., Hidrologie, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
34. Zamfirescu F. Hidrologie, Editura Didactică și Pedagogică, București 1995.

Introducere .....	3
-------------------	---

## PARTEA I: FIZICA APELOR SUBTERANE

<b>Capitolul 1. Proprietăți fizice și caracteristici hidrogeologice ale</b> apelor subterane și ale rocilor care la adăpostesc .....	6
1.1. Originea apelor subterane .....	6
1.2. Porozitatea rocilor .....	6
1.3. Tipuri de apă conținută în sol și subsol .....	8
1.3.1. Apa de reținere .....	8
1.3.2. Apa capilară .....	10
1.3.3. Apa gravifică .....	11
1.4. Repartiția pe verticală a apei în sol și subsol .....	12
1.5. Strate acvifere .....	15
1.5.1. Acvifere cu suprafață liberă .....	15
1.5.2. Acvifere sub presiune .....	17
<b>Capitolul 2. Statica apelor subterane .....</b>	19
2.1. Forțe implicate în roci uscate .....	19
2.2. Forțe implicate în roci saturate cu apă .....	20
2.3. Presiuni exercitate de diferite tipuri de ape înmagazinate .....	23
2.4. Coeficienți de variație a înmagazinării .....	24
2.4.1. Coeficienți de variație a înmagazinării în acvifere cu suprafață liberă .....	24
2.4.2. Coeficienți de variație a înmagazinării în acvifere sub presiune .....	27
<b>Capitolul 3. Legile dinamicii apei eliberabile prin acvifere .....</b>	31
3.1. Modelul ales pentru apa care circulă prin golurile din roci .....	31
3.2. Forțe reale implicate în dinamica apelor subterane .....	33
3.3. Mărimi și legi generale ale mișcării apei hidrodinamic active .....	36
3.3.1. Legea continuității .....	36
3.3.2. Impulsul și legea impulsului .....	37
3.3.3. Legile de filtrare .....	38
3.3.4. Difuzivitatea hidraulică .....	43
3.4. O clasificare posibilă a modelelor de curgeri subterane .....	49
<b>Capitolul 4. Curgerea staționară fără surse auxiliare .....</b>	52
4.1. Aspecte generale .....	52
4.2. Curgeri vertical plane .....	54
4.2.1. Curgerea vertical plană într-un mediu omogen .....	54
4.2.1.1. Exemple de curgeri plan verticale cu suprafață liberă .....	55
4.2.1.2. Exemplu de curgere plan verticală într-un acvifer sub presiune, omogen .....	57
4.2.2. Curgerea vertical plană într-un mediu neomogen .....	58
4.2.2.1. Curgerea sub presiune, vertical plană într-un acvifer cu	

grosime uniformă și orizontal, neomogenitatea constând în variații dis-	
continue de conductibilitate hidraulică după plane dispuse perpendicular	
pe fețele stratului și pe direcția de curgere .....	58
<b>4.2.2.2. Curgerea sub presiune, vertical plană, într-un acvifer cu</b>	
<b>grosime uniformă și orizontal, neomogenitatea constând în variații</b>	
<b>discontinue de conductibilitate hidraulică după plane dispuse paralel</b>	
<b>cu fețele stratului și cu direcția de curgere .....</b>	<b>60</b>
<b>4.3. Curgerea compusă în regim staționar fără surse auxiliare .....</b>	<b>62</b>
<b>4.3.1. Curgerea compusă în acvifere cu suprafață liberă .....</b>	<b>63</b>
<b>4.3.2. Curgerea compusă în acvifere sub presiune .....</b>	<b>64</b>
<b>Capitolul 5. Curgerea staționară cu sursă auxiliară .....</b>	<b>66</b>
<b>5.1. Aspecte generale .....</b>	<b>66</b>
<b>5.2. Curgeri plan verticale în regim staționar cu surse auxiliare .....</b>	<b>69</b>
<b>5.2.1. Curgerea vertical plană cu suprafață liberă .....</b>	<b>69</b>
<b>5.2.2. Curgerea vertical plană sub presiune .....</b>	<b>73</b>
<b>Capitolul 6. Curgerea nestaționară fără surse auxiliare .....</b>	<b>76</b>
<b>6.1. Aspecte generale .....</b>	<b>76</b>
<b>6.2. Curgeri vertical plane în regim nestaționară fără sursă auxiliară .....</b>	<b>77</b>
<b>6.2.1. Curgerea vertical plană cu suprafață liberă .....</b>	<b>77</b>
<b>6.2.2. Curgerea vertical plană sub presiune .....</b>	<b>82</b>
<b>6.3. Curgeri axial simetrice în regim nestaționară fără surse auxiliare .....</b>	<b>84</b>
<b>6.3.1. Curgerea axial simetrică cu suprafață liberă în regim nestaționară</b>	
<b>fără surse auxiliare .....</b>	<b>85</b>
<b>6.3.2 Curgerea axial simetrică sub presiune în regim nestaționară</b>	
<b>fără surse auxiliare .....</b>	<b>88</b>
<b>Capitolul 7. Curgerea nestaționară cu surse auxiliare .....</b>	<b>90</b>
<b>7.1. Aspecte generale .....</b>	<b>90</b>
<b>7.2. Curgerea vertical plană nestaționară și cu surse auxiliare .....</b>	<b>92</b>
<b>7.2.1. Curgerea vertical plană cu suprafață liberă .....</b>	<b>92</b>
<b>7.2.2. Curgerea vertical plană sub presiune .....</b>	<b>95</b>

## PARTEA II: FIZICA APELOR DE SUPRAFAȚĂ

<b>Capitolul 8. Bazele statistico-matematice ale hidrologiei .....</b>	<b>98</b>
<b>8.1. Calculul de probabilități. Asigurări hidrologice experimentale .....</b>	<b>98</b>
<b>8.1.1. Asigurările factorului unic .....</b>	<b>98</b>
<b>8.1.2. Asigurări complexe .....</b>	<b>100</b>
<b>8.1.3. Valoarea medie și dispersia unei distribuții empirice .....</b>	<b>102</b>
<b>8.2. Extrapolarea asigurărilor empirice .....</b>	<b>103</b>
<b>8.2.1 Funcții teoretice de probabilitate .....</b>	<b>103</b>
<b>8.2.2. Procedee de verificare a asigurărilor teoretice .....</b>	<b>106</b>

8.2.3. Asigurarea teoretică bidimensională .....	107
<b>8.3. Corelații .....</b>	<b>108</b>
8.3.1. Relația empirică între două mărimi aleatoare .....	108
8.3.2. Corelația liniară. Ecuația drepte de regresie .....	109
8.3.3. Determinarea coeficientului de corelație .....	113
8.3.4. Proprietățile coeficientului de corelație .....	116
8.3.5. Corelația liniară cu trei variabile .....	117
8.3.6. Corelația curbă .....	118
<b>8.4. Generarea de valori cronologice .....</b>	<b>119</b>
8.4.1. Relații de simulare .....	119
8.4.2. Coeficientul de corelație serială și autocorelație .....	121
8.4.3. Determinarea variabilelor aleatoare .....	122
<b>8.5. Evoluția factorilor hidrologici .....</b>	<b>123</b>
8.5.1. Metode pentru urmărirea tendinței fenomenului .....	123
<b>8.6. Omogenitate hidrologică .....</b>	<b>124</b>
<b>Capitolul 9. Aspecte fiziografice ale curgerii apelor de suprafață .....</b>	<b>126</b>
9.1. Rețeaua hidrografică .....	126
9.2. Bazinul hidrografic .....	127
9.3. Albiile cursurilor de apă .....	129
9.4. Dinamica râurilor .....	130
<b>Capitolul 10. Mărimi și metode de măsură în hidrologie .....</b>	<b>133</b>
10.1. Rețeaua hidrometrică .....	133
10.1.1. Rețeaua hidrometrică a apelor de suprafață .....	133
10.1.2. Rețeaua hidrometrică a acviferelor freatice .....	134
10.2. Nivelul .....	134
10.2.1. Hidrometria nivelurilor la apele de suprafață .....	134
10.2.2. Hidrometria nivelurilor la apele freatice .....	137
10.2.3. Modul de reprezentare a datelor de nivel .....	138
10.3. Adâncimea .....	138
10.3.1. Determinarea secțiunii de curgere .....	139
10.4. Viteza .....	139
10.4.1. Metode de determinare a vitezei apelor de suprafață .....	139
10.4.2. Metode de determinare a vitezei apelor subterane .....	142
10.5. Parametrii stratelor acvifere subterane .....	151
10.5.1. Porozitatea .....	151
10.5.2. Rezervele de apă din bazinele subterane .....	153
10.6. Debit .....	156
10.6.1. Metode de determinare a debitului apelor de suprafață .....	156
10.6.2. Metode de determinare a debitului apelor subterane .....	161
10.6.3. Relația debit-nivel .....	163

10.6.4. Grafice de debit .....	161
<b>Capitolul 11. Factori determinanți în curgerea apelor de suprafață .....</b>	<b>166</b>
11.1. Atmosfera.....	166
11.2. Regimul termic .....	167
11.2.1. Regimul termic al solului.....	167
11.2.2. Regimul termic al aerului .....	168
11.2.3. Regimul termic al apelor .....	168
11.3. Precipitații atmosferice .....	169
11.3.1. Măsurarea precipitațiilor .....	169
11.3.2. Clasificarea precipitațiilor .....	169
11.3.3. Studiul intensității precipitațiilor .....	171
11.4. Evaporarea apei .....	172
11.4.1. Evaporarea de la suprafața liberă .....	173
11.4.2. Evapotranspirația .....	174
11.5. Infiltrația .....	175
11.5.1. Infiltrația în ipoteze simplificatoare .....	176
11.5.2. Infiltrația tratată empiric .....	177
11.5.3. Infiltrația în bazine hidrografice .....	181
11.6. Retenția superficială .....	183
11.6.1. Intercepția .....	183
11.6.2. Acumularea în depresiuni .....	184
<b>Capitolul 12. Principii de modelare a curgerii de suprafață .....</b>	<b>185</b>
12.1. Distribuția precipitațiilor în procesul curgerii. Componentele procesului hidrologic .....	185
12.2. Coeficientul de curgere .....	186
12.3. Bilanțul hidrologic .....	186
12.4. Curgerea de suprafață .....	188
12.4.1. Modele hidrodinamice .....	188
12.4.2. Metoda hidrografului unitar .....	195
12.4.3. Metoda hidrografului unitar instantaneu .....	197
12.5. Propagarea undei de viitură în albie naturale .....	198
12.5.1. Studiul hidraulic al propagării undei de viitură.....	198
12.5.2. Studiul hidrologic al propagării undei de viitură .....	200
<b>Capitolul 13. Transportul de aluviuni .....</b>	<b>204</b>
13.1. Structura aluviunilor .....	204
13.2. Deplasarea aluviunilor .....	207
13.2.1. Studiul mișcării aluviunilor de fund .....	208
13.2.2. Studiul mișcării aluviunilor în suspensie .....	209
13.3. Debitul solid al aluviunilor târâte și în suspensie .....	211
13.4. Măsurarea debitului solid .....	214
13.4.1. Măsurarea debitului solid de târâre .....	214



13.4.2. Măsurarea debitului solid în suspensie .....	215
<b>Bibliografie</b> .....	<b>217</b>

VERIFICAT  
2017

VERIFICAT  
2007

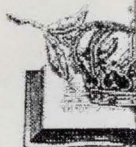


---

**Tiparul s-a executat sub c-da nr. 411/1998,  
la Tipografia Editurii Universității din București**

---

BIBLIOTEC  
UNIVERSITA



DE SPER

### DATA RESTITUIRII

<del>13 DEC. 2001</del>	
<del>26 FEB. 2002</del>	
<del>9 APR. 2002</del>	
20 DEC. 2004	
27 MAR. 2005	
24 IUN. 2008	
31 <u>MAL. 2018</u>	

ISBN - 973 - 575 - 222 - 0

Lei 15000