

B. d. 2
VOICU DOLOCAN

SUPRACONDUCTIBILITATEA

PRINCIPIILE FIZICE ȘI APLICAȚII

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

- 1997 -



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

Cota IV 514 953
Inventar C 800/97

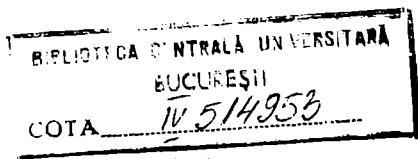
VOICU DOLOCAN

SUPRACONDUCTIBILITATEA

PRINCIPIILE FIZICE ȘI APLICAȚII



EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
- 1997 -



Referenți științifici: Prof. dr. GH. CIOBANU
Prof. dr. ION MUNTEANU

B.C.U. București



C 00800 97

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 069 - 4

CUPRINS

<i>Cuvânt înainte</i>	7
CAPITOLUL 1	9
Starea supraconductoare	9
1.1. Rezistența zero. Temperatura de tranziție	9
1.2. Materiale supraconductoare cu temperatură critică înaltă	11
1.3. Efectul izotopic	15
1.4. Circuite cu rezistență electrică nulă	16
1.5. Proprietățile magnetice	18
1.5.1. Efectul Meissner. Curenți superficiali	18
1.5.2. Magnetizarea supraconductorilor. Supraconductori de speța I și supraconductori de speța a II-a	19
1.5.3. Dispariția supraconductibilității în câmp magnetic	20
1.5.4. Curentul critic	23
1.6. Termodinamica tranziției de fază	24
1.6.1. Energia liberă a unui material magnetic	24
1.6.2. Energia liberă a unui supraconductor	25
1.6.3. Entropia stării supraconductoare	25
1.6.4. Capacitatea calorică și căldura latentă	26
1.6.5. Capacitatea calorică a supraconductorilor de speța a II-a	28
1.7. Electrodinamica supraconductibilității	28
1.7.1. Ecuațiile lui London	28
1.7.2. Electrodinamica nelocală a lui Pippard	30
1.8. Penetrația câmpului magnetic și curentul critic în straturi subțiri	36
CAPITOLUL 2	39
Teoria fenomenologică Ginzburg-Landau	39
2.1. Ecuațiile Ginzburg-Landau	39
2.2. Lungimea de coerență și adâncimea de pătrundere	42
2.3. Condițiile de aplicabilitate ale teoriei Ginzburg-Landau	45
2.4. Energia de suprafață	46
2.5. Curentul electric într-un fir sau într-un strat subțire	49
2.6. Cuantificarea fluxului magnetic	51
2.7. Nucleația în supraconductorii masivi. Câmpul de nucleație H_{c2}	54
2.8. Nucleația la suprafață. Câmpul de nucleație H_{c3}	55
2.8.1. Supraconductibilitatea de suprafață	55
2.8.2. Câmpul H_{c3}	56
2.8.3. Proba de dimensiuni finite	60
2.9. Starea de vortexuri la H_{c2} . Rețele planare de vortexuri	62
CAPITOLUL 3	66
Proprietățile magnetice ale supraconductorilor de speța a II-a	66
3.1. Câmpul critic inferior H_{c1}	66
3.2. Structura unui vortex izolat	67

3.3. Curbele de magnetizare	71
3.3.1. Comportarea supraconductorului la valori ale lui H în apropierea lui H_{c1}	71
3.3.2. Regiunea intermediară	73
3.3.3. Regiunea din apropierea lui H_{c2}	75
3.3.4. Concluzii	76
3.4. Structura de vortexuri în supraconductori cu temperatură critică înaltă	76
3.4.1. Teoria Ginzburg-Landau pentru medii anizotrope	77
3.4.2. Modelul Lawrence-Doniach	79
3.5. Captura fluxului magnetic în supraconductori de speța a II-a	81
3.6. Deplasarea fluxului	83
3.7. Modelul Anderson-Kim pentru deplasarea fluxului	84
3.8. Tranzistorul cu supraconductori cu transport de flux	86
3.9. Elasticitatea rețelei de vortexuri	88
3.10. Rezistivitatea electrică a supraconductorilor de speța a II-a	90
3.11. Impedanța unei bobine care conține în interiorul ei un eșantion supraconductor	92
3.12. Supraconductori cu structură granulară	96
3.13. Tranziția de fază Berezinskii-Kosterlitz-Thouless	99
CAPITOLUL 4	106
Teoria microscopică a supraconductibilității	106
4.1. Interacțiunea electron-rețea	106
4.2. Perechi Cooper	107
4.3. Starea supraconductoare fundamentală	112
4.4. Supraconductibilitatea la temperaturi finite	119
4.5. Câmpul magnetic critic și capacitatea calorică	123
4.6. Transportul curentului electric	126
CAPITOLUL 5	128
Aplicații ale teoriei microscopice	128
5.1. Tranziții cu absorbție de energie. Fenomene de coerență	128
5.2. Atenuarea ultrasunetelor	131
5.3. Relaxarea nucleară	132
5.4. Absorbția radiației electromagnetice	133
5.5. Ecuațiile Bogoliubov de Gennes	134
5.6. Electroni și goluri. Reflexia Andreev	136
5.7. Supraconductibilitatea fără bandă interzisă	140
5.8. Efectul tunel în structuri metal-normal-izolator-supraconductor	143
5.9. Efectul tunel în structuri supraconductor-izolator-supraconductor	145
5.10. Efectul tunel cu participarea fononilor și fotonilor în structuri SIS	146
5.11. Electrostatica supraconductibilității	148
5.11.1. Limita locală (modelul London)	149
5.11.2. Limita neocală (modelul Pippard)	151
5.11.3. Electrostatica nelocală în spațiul coordonatelor	153
5.12. Conductivitatea electrică complexă	155
CAPITOLUL 6	156
Efectul Josephson	156
6.1. Ce este efectul Josephson	156
6.2. Efectul Josephson în curent continuu. Influența câmpului magnetic	159
6.3. Interferometrul cuantic cu supraconductori	163
6.4. Efectul Josephson în curent alternativ	164
6.4.1. Prezența câmpului de radiație	164
6.4.2. Trepte de curent autoinduse. Emisia de radiație	166
6.4.3. Joncțiunea Josephson ca linie de transmisie	167
6.4.4. Moduri rezonante în joncțiunea cu factor de calitate Q mic. Calculul treptelor de curent autoinduse	169
6.4.5. Efectul dimensiunilor finite	176
6.4.6. Trepte Shapiro de valori foarte mari în rețele de joncțiuni Josephson bidimensionale	177

6.5. Teoria microscopică a efectului Josephson	179
6.5.1. Metoda Hamiltonianului de tunelare	179
6.5.2. Curentul tunel	181
6.5.3. Curentul tunel la tensiunea constantă	184
6.5.4. Curentul tunel în aproximația BCS	187
6.5.5. Curentul Josephson la tensiune zero. Dependența de temperatură a curentului critic	189
6.5.6. Maximul Riedel	193
6.6. Caracteristica curent-tensiune	195
6.6.1. Legături slabe	195
6.6.2. Modelul joncțiunii șuntată rezistiv	196
6.6.3. Joncțiunea tunel alimentată de la sursă de curent	198
6.6.4. Modelul sursei de curent când joncțiunea se află în câmp de radiație electromagnetică	200
6.6.5. Măsurarea caracteristicii curent-tensiune	201
6.6.6. Micropunți cu supraconductori	202
6.7. Emisia și detecția radiației	205
6.7.1. Emisia de radiație	205
6.7.2. Detecția radiației	206
6.7.3. Detecția heterodină și moxerii de armonice înalte	208
CAPITOLUL 7	211
Dispozitive de interferență cuantică cu supraconductori (DICS)	211
7.1. Inelul supraconductor cu o singură joncțiune	211
7.2. DICS de radiofrecvență	215
7.3. Tehnica de măsură a câmpului magnetic	220
7.4. Transformatorul supraconductor de flux	222
7.5. Zgomotul și sensibilitatea maximă	223
7.6. DICS rf utilizate în practică	225
7.7. Dispozitive de interferență cuantică în curent continuu	226
7.8. Tehnica de măsură a fluxului magnetic cu DICS cc	229
7.9. DICS cc utilizate în practică	231
7.10. Zgomotul în DICS cc	234
7.11. Dispozitive Josephson și DICS construite din materiale supraconductoare cu temperatură critică înaltă	235
7.12. DICS din straturi subțiri	236
7.13. Limitele DICS cu STI	237
CAPITOLUL 8	240
Aplicațiile materialelor supraconductoare	240
8.1. Magneți cu supraconductori	240
8.2. Instabilitatea termică	241
8.3. Stabilizarea supraconductorilor în câmpuri magnetice intense	243
8.4. Conductori compoziți	244
8.5. Prepararea conductorilor compoziți	248
8.6. Efectele radiațiilor asupra supraconductorilor compoziți	249
8.7. Levitația vehiculelor cu ajutorul magneților cu supraconductori	249
8.7.1. Principiul sistemului de levitație electrodinamică	250
8.7.2. Sisteme de levitație și de ghidare	251
8.7.3. Sisteme de propulsie	252
8.7.4. Principiul de funcționare al motorului liniar sincron de propulsie	253
8.7.5. Programul japonez	254
8.8. Propulsia magnetohidrodinamică (MHD) în apa mării	256
8.9. Cabluri supraconductoare pentru transmisia la distanță a energiei electrice	258
8.10. Magneți cu supraconductori utilizați la separarea magnetică	259
8.11. Magneți cu supraconductori utilizați în reactorii de fuziune nucleară	262
8.12. Magneți cu supraconductori pentru stocarea inductivă a energiei	264

CAPITOLUL 9	265
Aplicațiile DICS la măsurători analogice	265
9.1. Măsurarea câmpului magnetic și a variației sale	265
9.2. Măsurarea susceptibilității magnetice	269
9.3. Magnetometrul absolut cu DICS	270
9.4. Biomagnetism	272
9.5. Cartografia biomagnetică	276
9.6. Aplicațiile DICS în geofizică	278
9.7. Măsurarea curentului, tensiunii și rezistenței electrice. Comparatorul de curenți electrici	282
9.8. Termometrul bazat pe zgomotul termic al unui dispozitiv Josephson sau al unui DICS	286
 CAPITOLUL 10	 288
Aplicațiile DICS și joncțiunilor Josephson în circuitele digitale	288
10.1 Criotronul. Criotronul tunel	288
10.2 Circuite basculante	290
10.3 Dispozitive interferometrice de comutare	292
10.4. Celule de memorie	293
10.5. Circuite logice	294
10.6. Conversia analog-digitală	297
10.7. Circuit de eșantioane cu viteză mare cu joncțiunea Josephson	298
 CAPITOLUL 11	 301
Aplicațiile supraconductibilității la rezolvarea unor probleme de fizică fundamentală	301
11.1. Determinarea raportului $2q/h$	301
11.2. Standardul de tensiune	303
11.3. Verificarea principiului echivalenței	305
11.4. Detecția undelor gravitaționale	306
11.5. Posibilitatea detecției quarcilor	307
11.6. Posibilitatea detecției monopolului magnetic	310
11.7. Giroscopul supraconductor. Verificarea teoriei relativității generale a lui Einstein	311
 ANEXA	 314
A doua cuantificare și teoria microscopică a supraconductibilității	314
A.1. Operatori de generare și anihilare	314
A.2. Hamiltonianul de interacțiune electron-fonon în reprezentarea cuantificării a doua	319
A.3. Eliminarea variabilelor fononice și separarea termenului de atracție electron-electron datorită schimbului virtual de fononi	323
A.4. Hamiltonianul BCS	326
A.5. Excitarea cuasielectronilor din starea fundamentală BCS	332
A.6. Transformarea canonică Bogoliubov	333
A.7. Hamiltonianul BCS și starea fundamentală când se utilizează transformarea canonică. Stări excitate	336
<i>Bibliografie</i>	341

CUVÂNT ÎNAINTE

Această carte este o prezentare extinsă a cursului predat studenților din anul V Fizică tehnologică, de la Facultatea de Fizică, Universitatea București.

În primele 6 capitole se prezintă teoria fenomenologică și microscopică a supraconductibilității. Capitolele 5 și 6 se adresează specialiștilor în domeniu. În capitolele 7-12 se prezintă aplicațiile supraconductibilității: efectul Josephson, dispozitivele de interferență cuantică cu supraconductori, aplicațiile acestora în electronică, biofizică, biochimie, geografică etc., precum și la rezolvarea unor probleme de fizică fundamentală.

Pentru explicarea fenomenului de supraconductibilitate s-au introdus concepte noi ca: perechea de electroni, cuanta de flux magnetic, etc. Înțelegerea acestor concepte se obține pe măsura înaintării în studiul fenomenelor.

Cartea se adresează studenților de la facultățile de Fizică, Chimie, Biologie, Politehnică, Medicină, precum și cercetătorilor și profesorilor de fizică.

Sperăm, stimate cititor, ca și această carte să-ți întărească convingerea că știința și tehnologia, societatea omenească, merg într-un singur sens: înainte.

Prof. dr. VOICU DOLOCAN

CAPITOLUL 1

STAREA SUPRACONDUCTOARE

1.1. Rezistența zero. Temperatura de tranziție

Un metal normal este caracterizat de o rezistență electrică determinată de fenomenul de împrăștiere a electronilor de conducție de către vibrațiile rețelei sau defectele din cristal. Cu scăderea temperaturii scade amplitudinea vibrațiilor termice ale atomilor și rezistivitatea scade liniar până la o temperatură egală cu aproximativ o treime din temperatura caracteristică Debye, T_D , a materialului ca apoi sub această temperatură să scadă mai încet cu apropierea temperaturii de valoare 0 K. Într-un metal perfect pur deoarece la fenomenul de împrăștiere a electronilor contribuie numai vibrațiile rețelei, cu reducerea temperaturii la 0 K rezistivitatea scade la zero. (Fig. 1.1). Acesta nu este fenomenul de supraconductibilitate. În realitate nici un metal nu este perfect pur, ci conține o anumită cantitate de impurități. Datorită împrăștierii electronilor pe aceste impurități materialul prezintă o rezistivitate „reziduală”, ρ_0 , care se menține chiar la cele mai joase temperaturi (Fig. 1.1). Anumite metale prezintă o comportare remarcabilă, și anume cu micșorarea temperaturii rezistența lor scade în mod uzual până la o anumită temperatură, mai mare decât 0 K, la care aceasta scade brusc la valoarea zero (Fig. 1.2). Se spune că materialul a trecut în starea supraconductoare. Fenomenul a fost descoperit în anul 1911 de către Kamerlingh Onnes. Temperatura la care materialul își pierde rezistența electrică se numește temperatură de tranziție sau temperatură critică și se notează cu T_c .

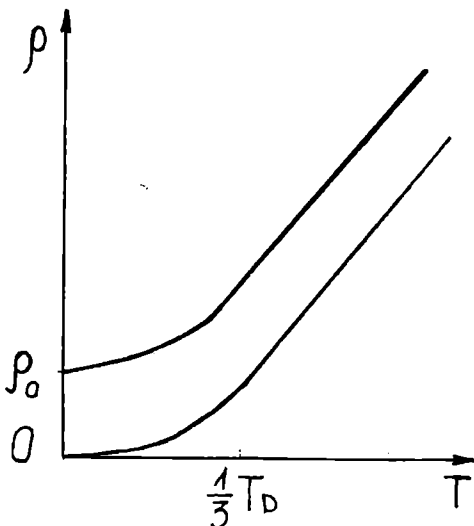


Fig. 1.1.

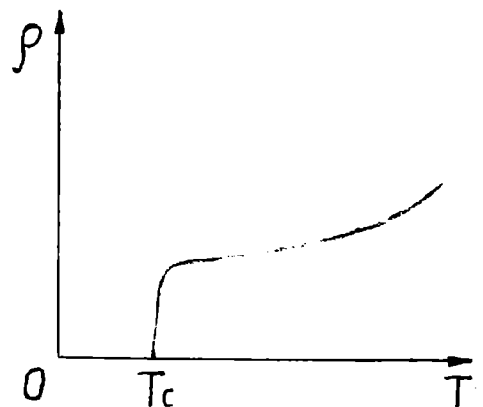


Fig. 1.2.

Elementul	T_c, K	$H_c, A/m \times 10^4$	Elementul	T_c, K	$H_c, A/m \times 10^4$
Aluminiu	1,2	0,79	Reniu	1,7	0,53
Cadmium	0,52	0,22	Rutheniu	0,5	6,6
Galiu	1,1	0,4	Tantal	4,5	tip II
Indiu	3,4	2,2	Technetiu	7,9	1,4
Iridiu	0,11	0,13	Thaliu	2,4	1,3
Lantan α	4,8		Thoriu	1,4	2,4
Lantan β	4,9		Stanu	3,7	
Plumb	7,2	6,4	Titaniu	0,4	
Lutetiu	0,1	2,8	Wolfram	0,016	0,0096
Mercur α	4,2	3,3	Uranu α	0,6	
Mercur β	4	2,7	Uranu β	1,8	
Molibden	0,9	tip II	Vanadiu	5,4	tip II
Niobiu	9,3	0,5	Zinc	0,9	0,42
Osmiu	0,7	1,6	Zirconiu	0,8	0,37

În tabelul 1.1. sunt prezentate temperaturile de tranziție ale elementelor metalice care prezintă fază supraconductoare.

Unele metale ca indiu și molibdenul nu prezintă fenomenul de supraconductibilitate decât dacă sunt extrem de pure; ele își pierd starea supraconductoare dacă conțin o cantitate infimă de impurități magnetice. Nu toate metalele pure prezintă fenomenul de supraconductibilitate; de exemplu, cuprul, fierul, magneziul și sodiul nu prezintă acest efect până la temperaturile cele mai joase posibile. Matthias (1957) a stabilit reguli care favorizează apariția supraconductibilității la elementele metalice [1]:

- a) supraconductibilitatea apare numai la metalele la care numărul electronilor de valență Z_v pe atom este situat între 2 și 8; excepție face metalul cesiu (monovalent) sub presiune.
- b) la metalele de tranziție temperatura critică T_c prezintă maxime ascuțite la $Z_v=3, 5, 7$ (Fig. 1.3).
- c) pentru fiecare valoare a lui Z_v dată există anumite structuri cristaline preferențiale.
- d) temperatura critică T_c crește cu creșterea volumului atomic și scade cu creșterea masei atomice.

Unele elemente devin supraconductoare când sunt supuse la presiuni mari. Am amintit mai sus Cs. De asemenea Ba devine supraconductor sub $T_c=5 K$ la presiunea de $15 \times 10^4 N/m^2$.

Tranziția la starea supraconductoare are loc într-un interval foarte îngust de temperatură dacă materialul este pur. De exemplu în Ga pur tranziția are loc într-un interval de $10^{-5} K$. Dacă materialul este impur sau are rețeaua perturbată, regiunea de tranziție se lărgeste. Un exemplu

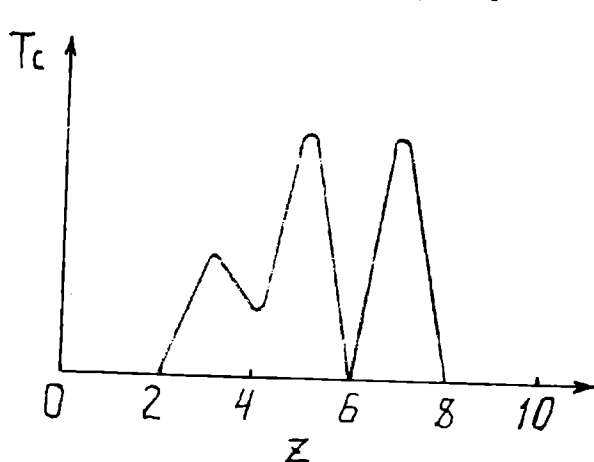


Fig. 1.3.

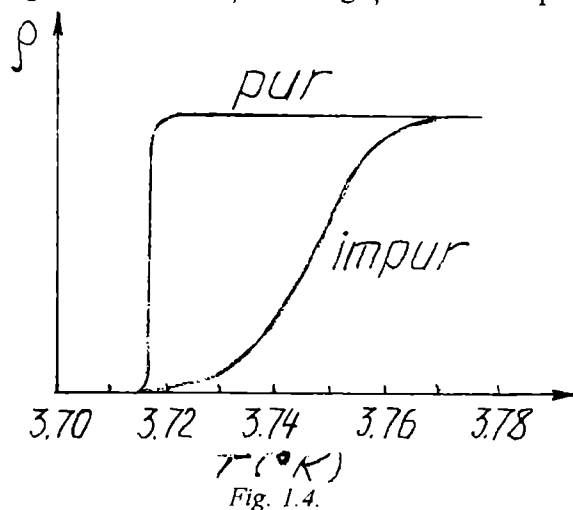


Fig. 1.4.

este reprezentat în Fig. 1.4 pentru Sn pur și impur. În ambele cazuri rezistența devine zero sub o anumită temperatură.

Datorită sensibilității limitate a aparatului utilizate pentru măsurători, nu se poate demonstra că rezistența supraconductorului este zero printr-o experiență directă. Cel mai simplu se poate demonstra astfel: se trece un curent printr-un fir supraconductor și se observă dacă se înregistrează vreo tensiune de către un voltmetru cu sensibilitate mare conectat la capetele firului. O experiență mult mai precisă constă în stabilirea unui curent într-un inel supraconductor (prin aplicarea unui câmp magnetic) și observarea modificării acestui curent într-o perioadă lungă de timp. Dacă $I(0)$ este curentul care trece prin inel la $t=0$ atunci curentul care circulă după un timp t este dat de expresia

$$I(t) = I(0)e^{-(R/L)t}$$

unde R este rezistența și L este inductanța inelului. Se poate măsura câmpul magnetic pe care-l produce curentul circulator și observa dacă acesta se micșorează în timp. Utilizând acest procedeu, într-un inel de Pb menținut timp de doi ani și jumătate la o temperatură sub T_c nu s-a observat nici o scădere vizibilă a curentului inițial. Curentul care circulă prin inel se numește curent persistent. Menționăm că la măsurarea câmpului magnetic nu se extrage energie din circuit și prin urmare este posibil să se observe dacă curentul circulă la infinit.

Deși în curent continuu rezistența supraconductorului este egală cu zero, în curent alternativ acesta prezintă o rezistență diferită de zero. Fenomenul se poate explica dacă se presupune că sub temperatura de tranziție electronii de conducție se împart în două clase: unii se comportă ca superelectroni și circulă fără rezistență (adică fără să sufere fenomenul de împrăștiere) iar ceilalți se comportă ca electroni normali. Acesta este modelul bifluid propus de către London. Raportul dintre concentrațiile celor două clase de electroni depinde de temperatură. Cu cât temperatura este mai joasă cu atât este mai mare concentrația superelectronilor. Un metal supraconductor se prezintă ca doi conductori conectați în paralel, unul cu rezistență normală iar celălalt cu rezistență zero. În curent continuu tot curentul este transportat de către superelectroni. În curent alternativ superelectronii, datorită inerției, vor rămâne în urma câmpului electric și deci vor prezenta o impedanță inductivă și datorită prezenței câmpului electric o parte din curent va fi transportată de către electronii normali. Evident că și electronii normali, având masă inerțială, reprezintă o reactanță inductivă, dar aceasta este neglijabilă față de rezistența dată de procesele de împrăștiere. Prin urmare, un metal poate fi reprezentat din punct de vedere electric de o inductanță în paralel cu o rezistență. Inductanța datorită inerției superelectronilor este foarte mică deoarece au masa foarte mică. Astfel, un supraconductor obișnuit are impedanța în henry egală cu 10^{-12} din rezistența lui normală exprimată în ohmi. La 10 kHz numai 10^{-8} din curentul total este transportat de către electronii normali în timp ce la frecvență mare, peste 10^{12} Hz, supraconductorul se comportă ca un metal normal. Așa după cum vedea mai departe superelectronii sunt perechi de electroni și la aceste frecvențe fotonii despică perechile de electroni în electroni normali.

1.2. Materiale supraconductoare cu temperatură critică înaltă

De la descoperirea supraconductibilității mercurului la 4 K de către Kamerlingh Onnes în 1911, cercetarea în acest domeniu s-a intensificat în special pentru găsirea unor materiale cu temperatură critică înaltă. Astfel, s-au obținut unele aliaje și compuși metalici cu temperatura de tranziție peste 10K (Tabel 2.1).

În ciuda eforturilor depuse timp de 75 ani de la descoperirea supraconductibilității, temperatura T_c maximă de tranziție la starea supraconductoare a rămas, până în anul 1986, la valoarea de 23,2 K, valoare obținută în anul 1973 pe compusul Nb_3Ge .

În septembrie 1986 Bednorz și Muller în Elveția au anunțat obținerea temperaturii de tranziție în jur de 30 K în sistemul La-Ba-Cu-O [2], oxid ceramic. Autorii au cercetat în acest

Tabel 2.1.

Aliajul	T_c , K	Aliajul	T_c , K
(SN) _x	0,26		11 16 16,5
CuS	1,6	NbZr NbN	17,1 17,5
Ti ₃ CO	3,44	V ₃ Ga V ₃ Sn	18,1 23,2
BiNi	4,25	Nb ₃ Al Nb ₃ Sn	
TaNb	6,3	Nb ₃ Ge	
PbBi	8		
La ₃ In	10,4		

scop oxizi ai metalelor de tranziție deoarece aceștia prezintă efecte polaronice, caracteristice interacției electron-fonon, foarte puternice. Ulterior s-a obținut pentru acest compus $T_c = 40K$.

Experimental, s-a observat că temperatura critică a unui supraconductor crește sub presiune. În 1987 Wu și colaboratorii [3] au simulat „presiunea chimică” prin substituirea atomilor din sistemul La 214 cu atomi izovalenți de dimensiuni mai mici. Astfel, substituirea La cu Y a condus la obținerea supraconductorului $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ cu $T_c = 91K$. Acest compus se prepară utilizând tehnica uzuală de obținere a materialelor ceramice. Este necesar un tratament termic la temperatură înaltă și atmosferă de oxigen pentru obținerea conținutului de oxigen și a fazei cristaline necesare pentru obținerea unei T_c înaltă. În anul 1988 Maeda și colaboratorii [4] și Chu și colaboratorii [5] au realizat compusul $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8-x}$ care are temperatura critică de 110K și nu conține element rar (care este mai costisitor). Se distinge și prin aceea că prezintă o stratificare pronunțată, asemănătoare cu mica. În același an, Sheng și colab. [6] au obținut materialul $Tl_2Ba_2CaCu_2O_{8-x}$ cu $T_c = 115K$. Ulterior s-a obținut compusul $Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$ cu $T_c = 125K$ și, mai târziu, în 1933, compusul pe bază de mercur $HgBa_2Ca_2Cu_3O_x$ cu $T_c = 134K$ [7].

Structura cristalină a tuturor acestor materiale are comun faptul că, contin strate de Cu-O pătrate, separate de regiuni mai mult sau mai puțin ionice. Compusul $YBa_2Cu_3O_7$ are o structură ortorombică Pmmm. Această structură poate fi considerată ca o rețea de tip perovskit $(Y-Ba)_3Cu_3O_{9-x}$ (Fig. 1.5 a) defectă, adică cu două vacanțe de oxigen ($x=2$). Celula elementară constă din trei blocuri cubice de tip perovskit împachetate de-a lungul axei cristalografice c (Fig. 1.5 b), cubul din mijloc conține ionul Y^{3+} , iar cele laterale conțin câte un ion Ba^{2+} . Una din vacanțele de oxigen se află în planul atomilor de Y (la $z = 1/2$) și cealaltă, de-a lungul axei a, între atomii adiacenți Cu_1 (la $z = 0$). Aceste poziții vacante sunt responsabile pentru distorsiunea ortorombică a celulei unitate; popularea parțială cu oxigen a acestor poziții dă naștere unei celule unitate tetragonale. În compusul stoichiometric $YBa_2Cu_3O_7$, distorsiunea coordinației planar-pătrată (caracteristică structurii tetragonale), observată pentru atomii Cu_1 (notați cu acest indice pe figură), determină formarea unui lanț unidimensional CuO_3 de-a lungul axei b; atomii O1 din acest lanț se găsesc în pozițiile $(0, 1/2, 0)$. Atomii notați Cu_2 pe figură, situați în noduri la $(0, 0, z Cu_2)$ alcătuiesc împreună cu nodurile O2 și O3 situate la $(1/2, 0, z O2)$ și, respectiv $(0, 1/2, x O_3)$, straturi CuO_2 concave în care atomii Cu_2 sunt ecranați de către atomii O4 din lanțul CuO_3 . Coordinația Cu_2 este astfel piramidal pătrată; straturile de CuO_2 sunt oarecum ondulate cu doi atomi de oxigen O2 și O3 așezați aproximativ coplanar și cu nodul Cu^{2+} așezat în afara acestui plan cu distanța $0,022c = 0,25 \text{ \AA}$. Deplasarea Cu_2 în afara planului O2-O3 este către nodul O4. Distanțele de mai sus pe direcția z sunt în unități c. Astfel, $c Cu_2 = 0,3574$; $z O2 = 0,3767$; $z O3 = 0,3804$; $z O4 = 1542$; $c = 11,8431 \text{ \AA}$, $a = 3,8691 \text{ \AA}$, $b = 3,9195\%$ [8]. Deoarece nu există un drum direct pentru transportul electronilor de-a lungul axei cristalografice c, unitatea structurală responsabilă pentru supraconductibilitate este placa bidimensională $Ba_2Cu_3O_{7-x}^{3-}$, formată din două straturi CuO_2 ce comprimă un lanț CuO_3 și doi cationi Ba^{2+} pe celula elementară (Fig. 1.5 b). Calculul structurii de benzi pentru faza ortorombică arată că proprietățile electronice sunt dominate de subrețele CuO. Sarcina este concentrată în aceste

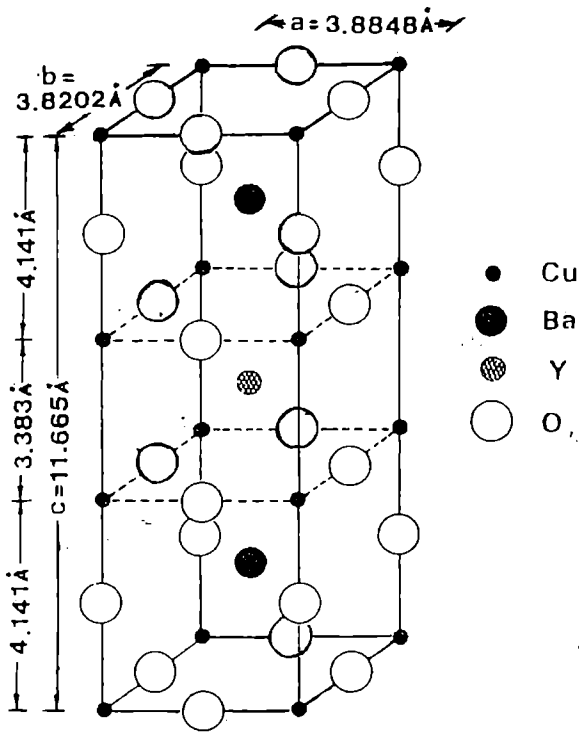


Fig. 1.5a

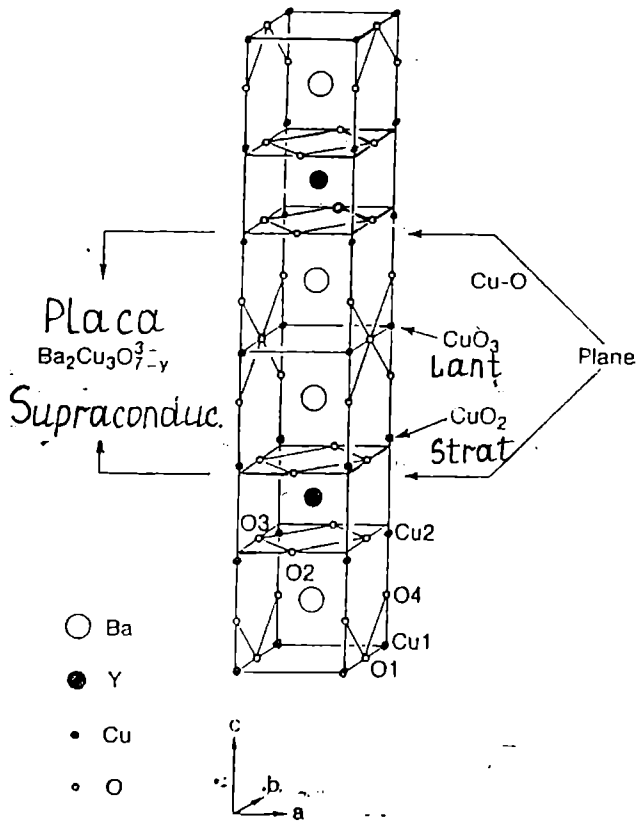


Fig. 1.5b

subrețele uni- și bidimensionale (lanțuri și plane), astfel că pozițiile atomilor Y și Ba sunt izolate, acești atomi având o contribuție minoră la proprietățile electronice.

Aceste caracteristici ale structurii electronice concordă cu observația experimentală că ionii pământurilor rare magnetice pot substitui ytriumul fără să scadă T_c . Pentru fiecare concentrație de oxigen mai mici, $n < 7$, ceea ce se poate obține printr-un tratament termic adecvat, structura prezintă simetrie tetragonală. De asemenea, materialul cu concentrație mare de oxigen prezintă la temperaturi înalte, simetrie tetragonală. Simetria ideală a acestor faze poate fi descrisă cu ajutorul compoziției $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_6$, a cărei structură diferă de structura Pmmm ortorombică descrisă mai sus prin îndepărtarea unui ion de oxigen din nodul de lanț O_1 . Cu nodul O_1 gol, structura corespunde compoziției $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, cu o vacanță la $(1/2, 0, 0)$. Structura rezultată este reprezentată în Fig. 1.6. Materialul cu concentrație mare de oxigen prezintă aceeași simetrie la temperaturi înalte deoarece are loc o transformare ordine-dezordine în care caz ionii din nodurile O_1 ocupă aleatoriu, nodurile O_1 sau O_5 , ceea ce determină în medie o simetrie tetragonală. Grupul spațial corespunzător al simetriei tetragonale este P4/mmm (D_{4h} , No. 123, în International Tables) cu $a = 3,863 \text{ \AA}$; $c = 11,830 \text{ \AA}$; $x_{\text{Ba}} = 0,1934$, $z_{\text{Cu}2} = 0,3604$;

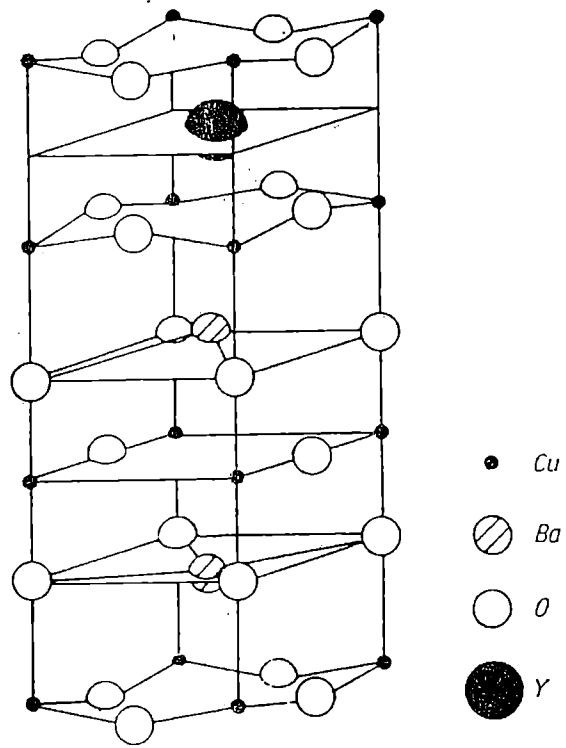


Fig. 1.6

$z_{04} = 0,1533$; $z_{02} = 0,3793$ (02 și 03 devin echivalenți) [8]. Rezultă că prin pierderea unui ion O1 parametrii structurali interni se modifică foarte puțin. Simetriile nodurilor sunt următoarele: Cu1, Cu2 și Y : 4/mmm; O1; mmm; O2; mm; O4 și Ba : 4mm. Modificarea structurii de la faza ortorombică la cea tetragonală are loc pentru concentrația de oxigen $n = 6,35-6,65$, depinzând de condițiile de preparare a materialului. Dacă probele sunt răcite ușor, vacanțele de oxigen tind să se ordoneze, pe când răcirea rapidă inhibă ordonarea. Dacă vacanțele sunt ordonate, poate fi reținută structura ortorombică pentru concentrații mai mici de vacanțe (ceea ce nu se întâmplă dacă vacanțele sunt dezordonate). În acest domeniu de concentrații de vacanțe s-a obținut starea supraconductoare sub $T_c = 60K$. S-a observat că nodurile O1 se deplasează aleatoriu în jurul pozițiilor de echilibru de-a lungul direcțiilor x și z, perpendicular pe legătura Cu1-O1, deplasarea medie micșorându-se cu 30-50% cu micșorarea temperaturii de la 300K la 75K și păstrându-se aproximativ constantă sub 75K. În faza tetragonală, pozițiile atomilor O1 și pozițiile 1/2, 0, 0 sunt echivalente prin simetrie și sunt ocupate în proporție de sub 25%. Astfel, lanțurile CuO_3 prezentate în faza ortorombică, nu vor mai exista în faza tetragonală fiind înlocuite cu straturi de CuO, cu un deficit ridicat de oxigen, care conțin ioni Cu^+ dublu coordinați (pentru $YBa_2Cu_3O_6$). Acest fapt arată că lanțurile CuO_3 sunt esențiale pentru existența supraconductibilității la $T_c 90K$.

Structura $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ (T12212) este o structură tetragonală cu volum centrat I4/mmm (ușor distorsionată). Celula unitate conține două straturi CuO_2 separate prin ioni de Ca și două straturi T10 separate de fiecare strat CuO_2 , cu un strat de BaO. Atomii de Tl și O sunt deplasați din nodurile lor ideale, permițând legături T1-O mai scurte. Materialul $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ (Bi2212) are structură asemănătoare cu T12212. Această structură ideală este reprezentată în fig. 1.7. Conține două straturi Cu-O1 și două straturi Bi-O3 pe celulă. Straturile Cu-O1 sunt

separate între ele prin ioni de Ca și sunt separate de straturile Bi-O3 prin straturi Sr-O2. În locul cationilor de Ba din materialul cu Tl, în materialul cu Bi, pentru stabilizarea fazei sunt introduși cationi de Sr. Spre deosebire de structura T12212, în structura Bi2212, există deplasări interne mari. Ulterior, au fost raportate o serie de structuri de forma $Bi_2Sr_2Ca_{n-1}Cu_nO_{4+n}$ și $Tl_2Ba_2Ca_{n-1}O_{4+n}$, cu un T_c care crește cu creșterea indicelui n. Aceste structuri sunt analoge structurilor cu $n=2$ discutate mai sus cu excepția că există n strate de CuO_2 separate de ioni Ca^{+2} , pe celula unitate. Structura „părinte” a supraconductorilor cu oxid de cupru, este limita $n \rightarrow \infty$ a seriilor menționate mai sus. ea conține numai un strat de CuO_2 pe celula unitate, aceste strate fiind separate printr-un cation bivalent. Un exemplu de o asemenea structură, care a fost crescută sub formă de monocristal este $Ca_{1-x}Sr_xCuO_2$ cu $x = 0,14$. Această structură face parte din grupul P4/mmm (tetragonal simplu) cu parametrii rețelei $a = b = 3,8611 \text{ \AA}$; $c = 3,1995 \text{ \AA}$. Acest material este izolator antiferomagnetic cu $T_N = 540 \text{ K}$ [10]. Cititorul găsește o descriere detaliată a structurii electronice a acestor materiale în [11].

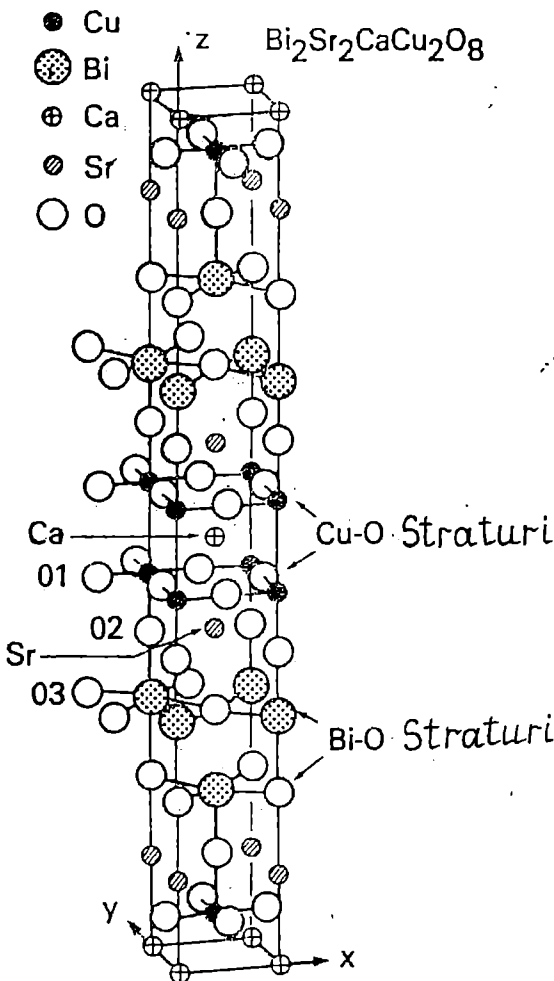


Fig. 1.7.

Din 1993 au fost sinterizați compușii pe bază de Hg [12-15] care au formula generală $\text{HgBa}_2\text{Ca}_{n-1}\text{Cu}_n\text{O}_{2n+2+x}$ unde, $n = 1, 2, 3$, reprezintă numărul de plane de CuO_2 din celula elementară. Compusul cu $n = 1$, $\text{HgBa}_2\text{CuO}_{4+x}$ notat și Hg-1201 are temperatura critică de 98K. Compusul cu $n=2$, $\text{HgBa}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{6+x}$ (Hg 1212) are două straturi de CuO_2 pe celula unitate, structură tetragonală cu parametrii rețelei $a = 3,82 \text{ \AA}$, $c = 12,707 \text{ \AA}$, temperatura de tranziție determinată din măsurători magnetice 112K înainte de oxigenare și 128K după oxigenare. Structura cu $n=3$, $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+x}$ (Hg-1223) conține trei straturi de CuO_2 pe celula unitate, are o structură ortorombică cu parametrii rețelei $a = 5,451 \text{ \AA}$, $b = 5,432 \text{ \AA}$, $c = 15,82 \text{ \AA}$, temperatura de tranziție determinată din măsurători magnetice de 120 K înainte de oxigenare și 135 K după oxigenare. În 1994 s-a obținut o creștere a temperaturii de tranziție sub presiune la aceste materiale. La o anumită valoare a presiunii aplicate, 30 GPa, temperatura critică se saturează cu creșterea presiunii. Valorile maxime obținute pentru T_c sunt 118,154 și 164 K pentru Hg 1201, Hg 1212 și, respectiv, Hg 1223 [16].

Din 1993 a apărut o categorie nouă de materiale supraconductoare, cuaternare, pe bază de carbon, care are câmpul critic H_{c1} de ordinul a 6T, cu multe ordine de mărime, mai mare decât al supraconductorilor oxidici menționați mai sus. Aceste materiale au formula R-T-B-C, unde R este un pământ rar iar T este Ni sau Pd.

De exemplu, $\text{YNi}_2\text{B}_2\text{C}$ are $T_c = 15 \text{ K}$ și $H_{c1} = 5,5 \text{ T}$ la 5 K [17]. În compusul Y-Pd-B-C s-a obținut temperatura $T_c = 23 \text{ K}$ [18].

În țara noastră se lucrează în multe centre de cercetare în acest domeniu. Menționăm grupurile tradiționale de la Institutul de Fizică și Tehnologia materialelor din București, condus de dr. L. Miu și de la Universitatea din Cluj-Napoca, condus de profesorul Emil Burzo [19, 20].

1.3. Efectul izotopic

Un rezultat experimental care a avut un impact semnificativ asupra teoriei supraconductibilității, este descoperirea efectului izotopic care constă în aceea că diferiți izotopi ai aceluiași element au temperaturi critice diferite. Rezultatele obținute în cadrul fiecărei serii de izotopi pot fi descrise cu ajutorul relației

$$T_c M^\alpha = \text{const}$$

unde T_c este temperatura de tranziție, M este masa izotopului și α are pentru fiecare serie de izotopi valorile prezentate în Tabela 3.1 [21].

De exemplu, așa cum se reprezintă în fig. 1.8, la mercur T_c variază de la 4,185 K până la 4,146 K, atunci când masa medie izotopică M variază de la 199,5 la 203,4 unități de masă. Dependența temperaturii critice de masa izotopului (adică de numărul de neutroni din nucleu), arată că fenomenul de supraconductibilitate depinde de vibrațiile rețelei cristaline, deoarece frecvența este invers proporțională cu $M^{1/2}$.

Tabela 3.1

Materialul	α	Materialul	α
Zn	0,45+0,05	Ru	0,00+0,05
Cd	0,32+0,07	Os	0,15+0,05
Sn	0,47+0,02	Mo	0,33
Hg	0,50+0,03	Nb_3Sn	0,08+0,02
Pd	0,40+0,02	Mo_3Ir	0,33+0,03
Tl	0,61+0,10	Zr	0,00+0,05

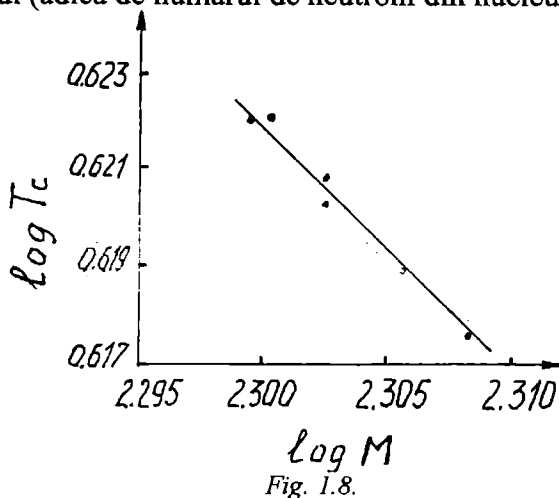


Fig. 1.8.

Efectul izotopic a fost pus în evidență și în compuşii oxidici, care au temperatură critică înaltă. În timp ce în supraconductorii convenționali efectul izotopic este corelat cu modificarea spectrului fononic, în supraconductorii oxidici acesta este corelat cu modificarea concentrației purtătorilor liberi: concentrația purtătorilor de sarcină liberi și deci T_c sunt afectate de substituția izotopică. În supraconductorii convenționali este satisfăcută aproximația adiabatică în care se presupune că electronii se mișcă în câmpul nucleelor care sunt considerate fixe (înghețate). În supraconductorul oxidic $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ nu este satisfăcută aproximația adiabatică, nu se poate separa mișcarea electronilor de cea a nucleelor și în acest caz transferul de sarcină apare ca un fenomen mai complex care implică mișcarea nucleelor și conduce la dependența concentrației purtătorilor de sarcină liberi și deci a T_c de masa izotopului (în cazul de față oxigenul; a se vedea paragraful anterior) [22, 23].

1.4. Circuite cu rezistență electrică nulă

Un circuit supraconductor închis, de exemplu un inel, prezintă proprietăți deosebite datorită faptului că are rezistența zero. Fluxul magnetic total care traversează suprafața închisă de acest circuit nu se modifică atâta timp cât rezistența sa rămâne zero. Să considerăm un inel dintr-un metal, situat într-un câmp magnetic B_a , pe care-l răcim sub temperatura de tranziție. Fluxul magnetic care străbate inelul este $\Phi = SB_a$ unde S este suprafața inelului. Dacă se modifică câmpul magnetic la o altă valoare atunci, conform legii lui Lenz, se induce un curent electric în inel care are valoarea și sensul astfel încât acesta generează un flux în interiorul inelului care să anuleze modificarea fluxului determinată de variația câmpului aplicat. Notăm că deși fluxul total rămâne constant în circuitul cu rezistență nulă, valoarea câmpului magnetic poate să difere de la un punct la altul. De exemplu în Fig. 1.9 a, distribuția câmpului este uniformă în timp ca în Fig. 1.9 b, câmpul este mai slab în centru și mai intens în apropierea firului.

În timpul modificării câmpului magnetic apare o tensiune electromotoare - SdB_a/dt și un curent i indus astfel că

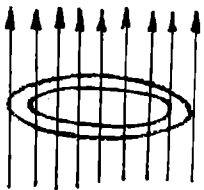
$$-S \frac{dB_a}{dt} = Ri + L \frac{di}{dt}$$

unde R și L sunt rezistența și, respectiv inductanța totală, ale circuitului. Într-un supraconductor $R = 0$ astfel că

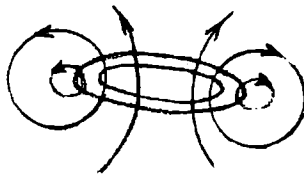
$$-S \frac{dB_a}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

și prin urmare,

$$L_i + SB_a = const$$



a)



b)

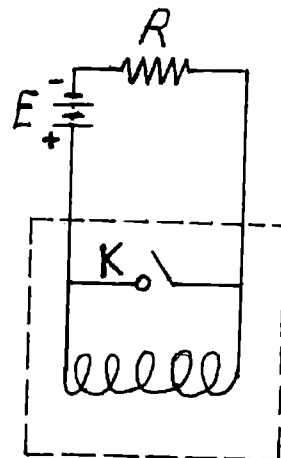


Fig. 1.10.

adică fluxul total care traversează circuitul se conservă. Chiar dacă câmpul magnetic aplicat este redus la zero (Fig. 1.9 b), fluxul este menținut la valoare constantă de către curentul indus, care circulă un timp nelimitat (infinit) dacă se menține starea supraconductoare. Această proprietate se utilizează pentru construcția de solenoizi din fir supraconductor, care să genere câmp magnetic. Un asemenea solenoid supraconductor este reprezentat în Fig. 1.10. Prin solenoid se stabilește un curent de la sursa de tensiune E, prin intermediul rezistenței R, astfel ca să se obțină câmpul magnetic dorit. Apoi se închide comutatorul K și solenoidul rămâne într-un circuit cu rezistență nulă (KS) după îndepărtarea sursei E și a rezistenței R.

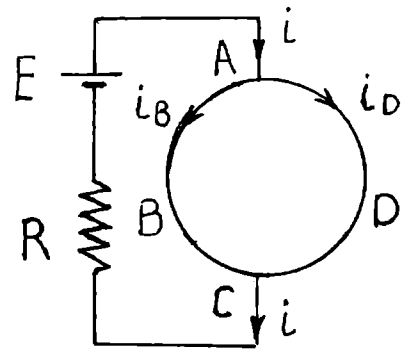


Fig. 1.11.

Câmpul magnetic se menține datorită curentului i care circulă prin circuitul cu rezistență nulă. Am observat că atunci când un circuit închis supraconductor este răcit sub temperatura de tranziție, în timp ce se află în câmp magnetic, fluxul magnetic total rămâne constant, indiferent de variația câmpului magnetic aplicat (chiar dacă $\Delta B_a = -B_a$). Pe de altă parte, dacă circuitul este răcit în absența câmpului magnetic, deci nu există un flux magnetic inițial în interior, și apoi se aplică un câmp magnetic extern, fluxul intern rămâne egal cu zero chiar în prezența câmpului magnetic extern. Pe această bază se construiesc ecrane magnetice din cilindri supraconductori goi în interior. Ecranarea este perfectă atunci când cilindrul este lung. Când acesta este scurt, de exemplu un inel, datorită distribuției neuniforme a câmpului numai fluxul total este nul iar densitatea de flux locală în interior poate să nu fie uniformă (să nu existe anulare locală completă).

Pentru a vedea distribuția curentilor într-o rețea supraconductoare, considerăm circuitul din fig. 1.11, în care inelul ABCD are rezistența nulă. Distribuția curentilor în acest inel este determinată de către inductanțe. Notăm cu L_B și L_D inductanțele ramurilor B și D și cu L_M inductanța mutuală dintre cele două ramuri. Diferențele de tensiune între A și C pe cele două ramuri sunt egale

$$L_B \frac{di_B}{dt} + L_M \frac{di_D}{dt} = L_D \frac{di_D}{dt} + L_M \frac{di_B}{dt}$$

Rescriem această expresie sub forma

$$(L_B - L_M) \frac{di_B}{dt} = (L_D - L_M) \frac{di_D}{dt}$$

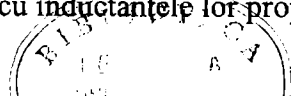
și integram. Se obține

$$(L_B - L_M)i_B = (L_D - L_M)i_D + const.$$

Dacă la $t = 0$ avem $i_B = i_D = 0$, atunci constant = 0 și rezultă

$$\frac{i_B}{i_D} = \frac{L_D - L_M}{L_B - L_M}$$

Dacă inductanța mutuală poate fi neglijată, rezultă că într-o rețea paralelă supraconductoare, curentii care circulă prin ramuri sunt invers proporționali cu inductanțele lor proprii.



1.5. Proprietățile magnetice

1.5.1. Efectul Meissner. Curenți superficiali

Meissner și Ochsenfeld au descoperit în anul 1933 [24] că un supraconductor răcit sub temperatura de tranziție expulsează din interiorul său liniile de câmp magnetic aplicat. Acesta este efectul Meissner și are loc indiferent dacă supraconductorul este răcit și trece în starea supraconductoare în prezența câmpului magnetic H sau acesta se aplică după ce materialul a trecut în starea supraconductoare (Fig. 1.12). Menționăm că această comportare a supraconductorului diferă de cea a unui conductor perfect cu rezistivitate nulă. Într-un conductor perfect cu rezistivitate nulă, liniile de câmp sunt expulzate din interiorul său numai dacă câmpul magnetic se aplică după ce acesta a fost răcit sub temperatura de tranziție în starea de rezistivitate nulă (Fig. 1.13). Dacă răcirea are loc în prezența câmpului magnetic, atunci liniile de câmp magnetic nu mai sunt expulzate din interior când materialul trece în starea de rezistivitate nulă. Pentru a explica această comportare a unui conductor „perfect”, observăm că din legea lui Ohm $\vec{E} = \rho \vec{j}$ rezultă că dacă \vec{j} este finit și ρ tinde la zero, atunci și \vec{E} trebuie să devină egal cu zero. Din ecuația lui Maxwell $d\vec{B} / dt = - \text{rot } \vec{E}$ rezultă că pentru $\vec{E} = 0$ se obține $d\vec{B} / dt = 0$, astfel că fluxul total într-un conductor perfect nu se modifică atunci când acesta efectuează tranziția în starea de rezistivitate nulă.

Efectul Meissner contrazice acest rezultat, ceea ce arată că diamagnetismul perfect este o proprietate esențială a stării supraconductoare. În acest caz, deoarece $B = 0$, rezultă

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{H} (1 + \chi) = \mu \vec{H} = 0 \quad (5.1)$$

de unde rezultă că într-un supraconductor, susceptibilitatea magnetică $\chi = -1$, adică acesta este un material diamagnetic ideal. În relația de mai sus, M este magnetizarea și μ este permeabilitatea magnetică. Deoarece H este diferit de zero, rezultă $\mu = 0$, adică permeabilitatea supraconductorului este nulă. Pe baza ecuației lui Maxwell $\Delta \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ rezultă că dacă în interiorul supraconductorului $\vec{B} = 0$ și $\vec{j} = 0$, adică prin volumul său densitatea curentului electric este nulă. Câmpul magnetic în afara supraconductorului poate fi diferit de zero (nu există nici o cauză ca acesta să fie egal cu zero), astfel că dacă trece un curent prin supraconductor, acesta circulă numai pe la suprafața

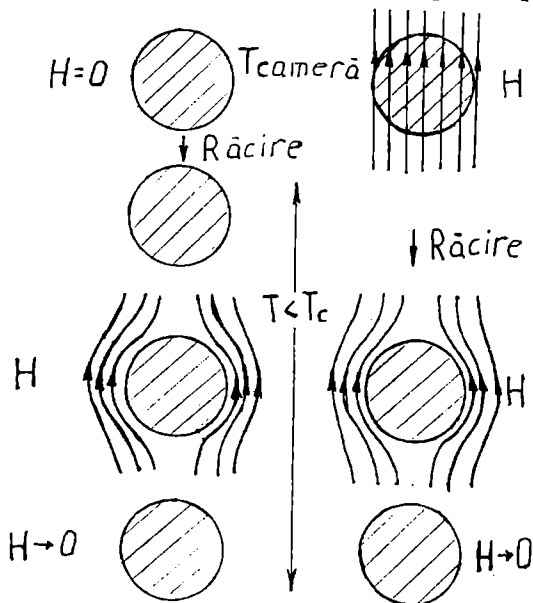


Fig. 1.12.

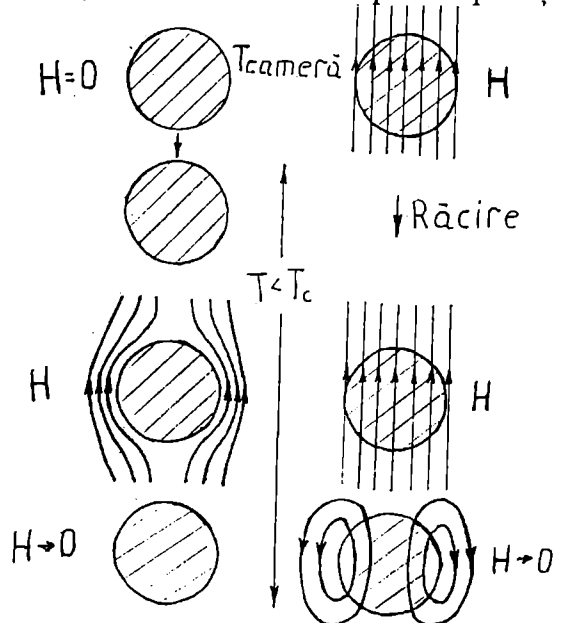


Fig. 1.13.

lui. Curentul de ecranare diamagnetic este, deci, un curent superficial. Prin urmare, dacă se aplică un câmp magnetic, atunci la suprafața supraconductorului (într-un strat subțire de lângă suprafață) va circula un curent electric de ecranare, astfel ca acesta să ecraneze pătrunderea fluxului magnetic în interiorul supraconductorului. Menționăm că, dacă supraconductorul este conectat la o sursă de curent, curentul este de asemenea transportat numai într-un strat subțire de la suprafața supraconductorului (este tot un curent superficial) și acesta va genera un flux magnetic în afară, dar nu în interiorul supraconductorului. Deci, curentul electric într-un supraconductor circulă numai pe la suprafața acestuia. Aceste probleme vor fi analizate în detaliu în capitolele care urmează.

1.5.2. Magnetizarea supraconductorilor. Supraconductori de speța I și supraconductori de speța II-a

În Fig. 1.14 este reprezentată dependența inducției magnetice B în interiorul unui cilindru supraconductor masiv, lung, atunci când se aplică un câmp magnetic H paralel cu axa cilindrului. Supraconductorul fiind un diamagnet ideal, $B = 0$ în intervalul $0 < H < H_c$ și $B = \mu_0 H$ pentru $H > H_c$. Pentru $H > H_c$, supraconductorul se comportă ca un metal normal. Pentru metalul normal, dependența $B = f(H)$ este o dreaptă ($B = \mu_0 H$) care este reprezentată prin dreapta punctată pe figură. Câmpul H_c la care dispare supraconductibilitatea se numește câmp magnetic critic. Procesul este reversibil, adică la micșorarea câmpului magnetic proba trece din nou în starea supraconductoare la câmpul critic H_c . Pentru H mai mic decât H_c , fluxul magnetic este expulzat din interiorul supraconductorului. În mod echivalent, se pot descrie proprietățile supraconductorului reprezentând curba $M = f(H)$ (Fig. 1.14 b), unde

$$M = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) H \quad (5.2)$$

Pentru starea normală, $\mu = \mu_0$ (adică $\mu_r = 1$), astfel că $M = 0$, adică magnetizarea metalului normal este nulă. Pentru supraconductor când $H = 0$ avem $M = 0$, iar când $H < H_c$ avem $M = -H$ (deoarece $\mu = 0$), adică magnetizarea este negativă, egală și de semn opus câmpului magnetic aplicat. Pentru $H > H_c$, supraconductorul trece în starea normală și magnetizarea este nulă. Supraconductorul care prezintă o curbă de magnetizare, ca cea prezentată în Fig. 1.14 b, se numește supraconductor de speța I („moale” sau ideal). El este un diamagnet perfect.

Există o clasă importantă de materiale supraconductoare în care nu are loc o expulzare completă a câmpului magnetic din volumul materialului în mod abrupt. Acestea sunt sub formă de aliaje, compuși metalici supraconductori, supraconductori ceramici cu T_c înaltă. Curbele $B = f(H)$ și $M = f(H)$ arată ca în Fig. 1.15 a și, respectiv, 1.15 b. Se observă că nu există un câmp magnetic critic bine definit (o tranziție abruptă ca la supraconductorii de speța I), ci tranziția de

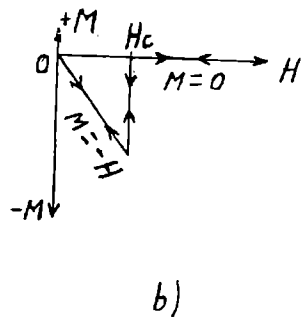
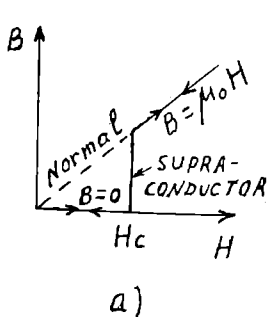


Fig. 1.14.

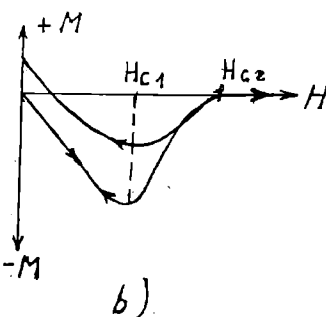
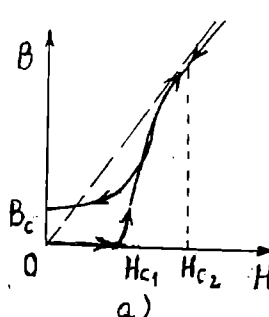


Fig. 1.15.

la starea supraconductoare la cea normală se întinde pe un domeniu larg al câmpului aplicat între H_{c1} și H_{c2} . Aceste materiale se numesc supraconductori de speța a II-a (tari sau neideali). Magnetizarea, așa cum se observă pe Fig. 1.15, nu este reversibilă, adică la creșterea și la descreșterea câmpului nu urmează aceeași curbă. Acesta este fenomenul de hysteresis. Când câmpul magnetic aplicat este redus la valoarea zero, rămâne o anumită magnetizare pozitivă a probei, un flux magnetic rezidual. Se spune că proba supraconductoare a captat flux magnetic. Nu toți supraconductorii de speța a II-a prezintă fenomenul de captare de flux magnetic. Curba $M = f(H)$, Fig. 1.15 b prezintă trei regiuni. Pentru $H < H_{c1}$ supraconductorul de speța a doua se comportă ca un material diamagnetic ideal, expulzând câmpul magnetic din interiorul său. Pentru $H_{c1} < H < H_{c2}$, fluxul magnetic penetrează gradat proba. Apare o nouă stare numită stare mixtă sau stare de vortexuri (vârtejuri). Supraconductorul este străbătut de filamente de flux magnetic (regiuni normale) numite vortexuri, de formă elicoidală, separate de regiuni supraconductoare. Pentru $H > H_{c2}$ supraconductorul trece în stare normală.

1.5.3. Dispariția supraconductibilității în câmp magnetic

Într-un supraconductor aflat la o temperatură sub temperatura critică T_c , faza supraconductoare dispăre dacă asupra lui se aplică un câmp magnetic de o anumită valoare; în această situație, rezistența electrică a supraconductorului se stabilește la mărimea corespunzătoare stării normale. Câmpul magnetic minim aplicat, la care dispăre supraconductibilitatea și în material se restabilește starea de conducție normală când acesta se găsește sub temperatura critică T_c se numește câmp magnetic critic și se notează cu H_c . Câmpul magnetic critic depinde de temperatură după legea

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (5.3)$$

stabilită experimental, unde H_0 este valoarea câmpului critic la OK și T_c este temperatura critică. Dependența $H_c(T)$ pentru Pb, Sn și Al este reprezentată în Fig. 1.16. Pentru fiecare metal, regiunea de sub curbă reprezintă starea supraconductoare, iar regiunea de deasupra reprezintă starea normală. Valorile câmpurilor critice pentru metalele supraconductoare sunt prezentate în Tabela 1.1. Câmpuri magnetice critice mari au materialele Nb_3Sn (8,8T), V_3Ga ($H_{c2} = 35T$),

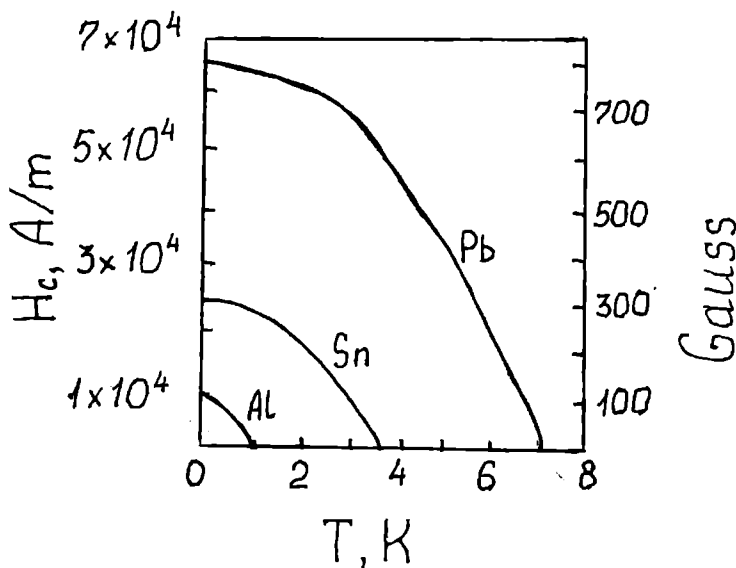


Fig. 1.16.

V_3Si ($H_{c2} = 15T$), aliajele Nb-Zr, Nb-Ti (10T), Pb-Bi (2T), $YBa_2Cu_3O_7$ ($H_{c2} = 210T$ pe direcțiile a,b și 35T pe direcția c). Aceste materiale se utilizează la construcția de solenoizi. Menționăm că existența $H_c(T)$ implică existența unei densități critice de curent j_c , care circulând prin supraconductor îl trece în stare normală (a se vedea paragraful următor).

Această densitate de curent este cea care produce câmpul magnetic critic H_c la suprafață.

În Fig. 1.17 se reprezintă un criotrom, care este un comutator controlat prin curent electric. El este construit dintr-o bară din tantal numită poartă prin care circulă curentul I ce trebuie controlat. Controlul se realizează cu ajutorul unei bobine din Nb care se înfășoară pe bară (izolată de aceasta) prin care circulă curentul i . Sistemul se imersează în He lichid la 4,2K, astfel încât că, atât Tantalul, cât și Niobiul se găsesc în stare supraconductoare. Prin trecerea unui curent electric prin bobina de Nb, se

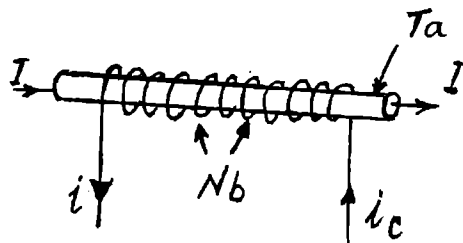


Fig. 1.17.

generează un câmp magnetic orientat în lungul barei de Tantal. Pentru o anumită valoare a acestui curent, se atinge valoarea câmpului critic la care dispare supraconductibilitatea prin bara de Tantal, aceasta trece în stare normală și curentul I este micșorat. Deoarece câmpul critic al Nb este mult mai mare decât al Ta, bobina rămâne în stare supraconductoare. Criotronul este analogul unui releu și poate fi utilizat în circuite digitale.

Într-un supraconductor de formă oarecare, câmpul magnetic intern diferă de câmpul aplicat datorită câmpului de demagnetizare. Astfel, în unele regiuni din supraconductor, câmpul intern poate fi fie mai mic, fie mai mare decât câmpul critic. Pentru înțelegerea lucrurilor, să considerăm o sferă supraconductoare situată într-un câmp magnetic extern H_c . Expulzarea câmpului magnetic din interior determină creșterea câmpului magnetic în regiunea ecuatorială a sferei, datorită suprapunerii peste câmpul magnetic aplicat a câmpului magnetic generat de către curenții superficiali. Efectul se caracterizează cu ajutorul unui factor de demagnetizare. Într-un câmp magnetic omogen H , o probă de formă elipsoidală prezintă o magnetizare omogenă M care, dacă axa principală a elipsoidului este paralelă cu câmpul aplicat, este de asemenea paralelă cu câmpul. Magnetizarea M modifică câmpul intern H_i , astfel că

$$\vec{H}_i = \vec{H} - n\vec{M}$$

unde n este factorul de demagnetizare. Câmpul de demagnetizare este $n\vec{M}$, dar, deoarece într-un supraconductor \vec{M} este negativ, câmpul intern crește. Inducția magnetică va fi $B = (H_i + M)\mu_0 = 0$, de unde rezultă $H_i = -M$, astfel că din relația de mai sus se obține

$$\vec{H}_i = \frac{\vec{H}}{1-n}$$

Factorul de demagnetizare n depinde de forma corpului. În exteriorul elipsoidului, câmpul magnetic H_e diferă de câmpul aplicat, deoarece liniile de câmp se deformează atât datorită formei corpului, cât și proprietăților sale magnetice. Deoarece în interior $\vec{B} = 0$ și $\text{div } \vec{B} = 0$, astfel că la suprafața corpului componentele tangențiale ale câmpului magnetic trebuie să fie continue $H_i^t = H_e^t$. Dacă se notează cu θ unghiul dintre câmpul magnetic H aplicat și normala la suprafață, atunci se poate scrie pe planul tangent la suprafață

$$H_e^t = \frac{1}{1-n} H \sin \theta$$

Pentru o sferă $n = 1/3$, rezultă $H_e^t = (3/2) H \sin \theta$. La ecuator ($\theta = \pi/2$), câmpul efectiv care acționează asupra sferei supraconductoare are valoarea maximă $H_e^t = (3/2)H$, iar la poli ($\theta = 0$) are valoarea minimă $H_e^t = 0$. Dacă $H = H_c$, adică câmpul magnetic aplicat are valoarea câmpului critic, atunci la ecuator câmpul magnetic efectiv depășește H_c și pătrunde în interiorul sferei pe o anumită adâncime, care devine stare normală. În Fig. 1.18 este reprezentat factorul de demagnetizare pentru un supraconductor de forma unui elipsoid de revoluție, atunci când câmpul magnetic se aplică perpendicular (\perp) și, respectiv, paralel (\parallel) cu această axă (de revoluție).

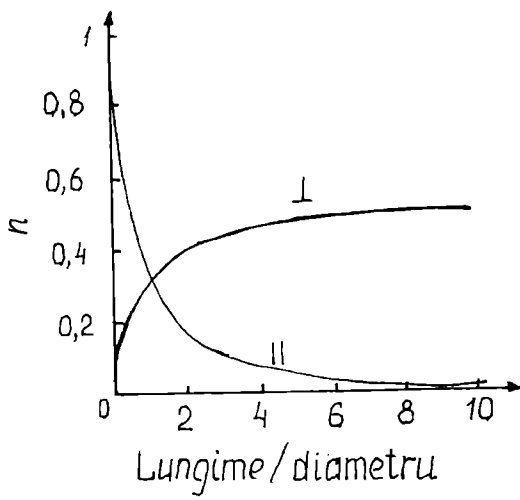


Fig. 1.18.

Să considerăm un elipsoid supraconductor asupra căruia se aplică un câmp magnetic crescător. Atunci când câmpul intern atinge valoarea H_c , ceea ce se întâmplă la valoarea câmpului aplicat egală cu $(1-n)H_c$, corpul ar trece în stare normală. Dar, când apare această stare, deoarece în starea normală susceptibilitatea magnetică este egală cu zero, magnetizarea este egală cu zero și am avea $H_i = H = (1-n)H_c$ care este mai mic decât H_c . Prin urmare, este imposibil ca pentru H_i mai mic decât H_c , întregul corp să se afle în stare normală. Paradoxul se rezolvă dacă admitem că corpul se filamentează în regiuni alternative supraconductoare și normale, așa cum se observă în Fig. 1.19, paralele cu câmpul magnetic aplicat. Unele din liniile de câmp traversează

prin regiunile normale, iar altele ocolesc elipsoidul. Starea în care se află supraconductorul pentru un câmp aplicat $(1-n)H_c < H < H_c$ se numește stare intermediară. În această stare coexistă domenii normale și domenii supraconductoare. Frontiera de separare dintre domenii este caracterizată printr-o energie de interfață $\sigma_{sn} > 0$, iar dimensiunile acestora sunt astfel încât energia minimă a sistemului să fie minimă. Detalii despre aceste probleme vom prezenta în cadrul teoriei fenomenologice Ginzburg Landau asupra supraconductibilității. În Fig. 1.19 se prezintă un model simplificat asupra structurii de domenii. În realitate, starea intermediară arată ca în Fig. 1.20, unde ariile hașurate reprezintă regiunile neutre. Existența stării intermediare a fost pusă în evidență experimental prin mai multe metode. De exemplu, distribuția din Fig. 1.19 a fost obținută prin măsurarea câmpului magnetic cu ajutorul unei probe de dimensiuni foarte mici din bismut, introdusă într-o deschizătură foarte îngustă dintre două semisfere din staniu cu diametrul de 4 cm. Rezistivitatea bismutului este foarte sensibilă cu câmpul magnetic. Proba de bismut pune în evidență câmpul local H_i în regiunea semisferei adiacentă cu ea; acest câmp este zero în regiunile domeniilor supraconductoare și egal cu H_c în regiunile normale. O altă metodă de a pune în evidență starea intermediară se bazează pe depunerea de pulbere de material diamagnetic, de exemplu, din Nb care este diamagnetic ideal, pe suprafața corpului. Deoarece particulele de Nb sunt respinse din regiunile normale, unde există intensitate mare a câmpului magnetic, ele se adună pe porțiunile suprafeței unde sunt dispuse domeniile supraconductoare. Aceste domenii au dimensiuni macroscopice, așa cum se observă pe Fig. 1.19. În ultimul timp, pentru asemenea studii se utilizează difracția cu neutroni.

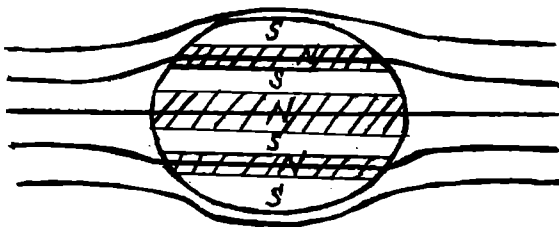


Fig. 1.19.

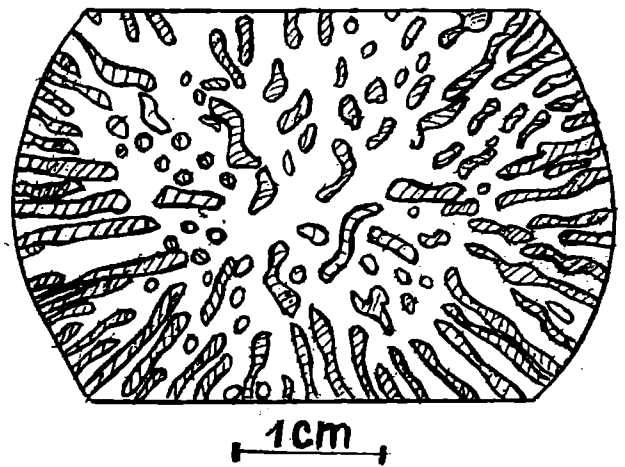


Fig. 1.20.

1.5.4. Curentul electric

S-a observat că există o valoare limită maximă a curentului electric care poate trece printr-un supraconductor, astfel ca acesta să nu prezinte rezistență electrică. Această valoare limită maximă a curentului se numește curent critic. Dacă curentul depășește această valoare critică, atunci apare o rezistență diferită de zero. Menționăm că această rezistență care apare în supraconductor este mai mică decât rezistența totală a materialului în stare normală. Așa după cum vom arăta în paragraful 1.7, curentul într-un supraconductor circulă pe la suprafața sa, într-un strat egal cu adâncimea de pătrundere London.

Pentru a evalua valoarea curentului critic, să considerăm un fir cilindric de rază r prin care trece un curent i . Acest curent va genera un câmp magnetic la suprafața firului, a cărui intensitate este dată de relația $H_s = i/2\pi r$. Curentul critic se obține atunci când câmpul generat de acesta este egal cu câmpul critic, adică

$$i_c = 2\pi r H_c$$

În absența unui câmp magnetic aplicat din exterior, această relație se verifică experimental. Pentru un fir de Pb cu diametrul egal cu 1 mm aflat la 4,2 K, unde câmpul critic este 550 G (44×10^4 A/m), se obține pentru curentul critic valoarea $i_c = 140$ A. Să considerăm acum că asupra firului prin care circulă curentul i se aplică un câmp magnetic, H , paralel cu axa cilindrului (Fig. 1.21). Curentul care trece prin fir va genera la suprafața acestuia un câmp magnetic tangent la circumferința firului egal cu $H_s = i/2\pi r$. Acest câmp face un unghi drept cu câmpul magnetic aplicat, astfel că câmpul magnetic rezultant H_t are intensitatea

$$H_t^2 = H^2 + (i / 2\pi r)^2$$

iar curentul critic se obține când $H_t = H_c$

$$H_c^2 = H^2 + \frac{i^2}{4\pi^2 r^2}$$

Cum H_c este constant, aceasta este ecuația unei elipse cu variabilele H și i .

Dacă câmpul magnetic se aplică normal pe axa firului și presupunem că acest câmp nu este suficient de intens ca supraconductorul să treacă în starea intermediară, atunci, așa cum se prezintă în Fig. 1.22, densitatea de flux nu este uniformă pe suprafața firului. În partea de sus (pe figură), la câmpul H_s dat de curentul electric se adună câmpul aplicat, însă multiplicat cu 2 datorită factorului de demagnetizare (egal cu 1/2 pentru un cilindru). Prin urmare, în această regiune

$$H_t = 2H + H_s = 2H + \frac{i}{2\pi r}$$

Conform regulii lui Silsbee, rezistența apare întâi în acea regiune de pe suprafață, unde câmpul magnetic total devine egal cu H_c și curentul critic este dat de expresia

$$i_c = 2\pi r (H_c - H)$$

Pentru $H = H_c/2$, curentul critic scade la zero. Conchidem că un supraconductor trece într-o stare cu rezistență diferită de zero, atunci când într-un punct oarecare de pe suprafață

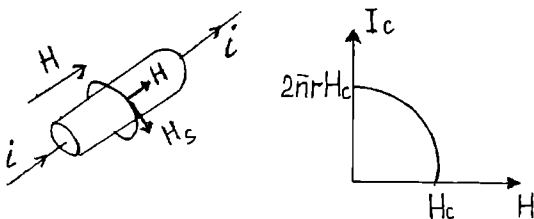


Fig. 1.21.

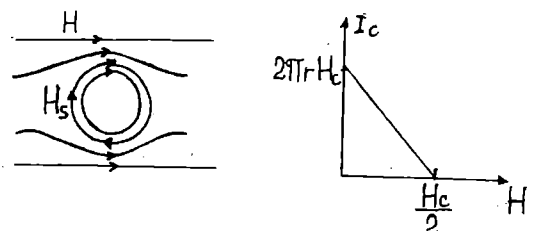


Fig. 1.22.

intensitatea câmpului magnetic total, datorată curentului de transport și câmpului magnetic aplicat depășește intensitatea câmpului magnetic critic. Cu creșterea curentului peste valoarea critică, rezistența supraconductorului crește gradat, apropiindu-se asimptotic de valoarea rezistenței din starea normală.

1.6. Termodinamica tranziției de fază

S-a demonstrat experimental că tranziția de la starea normală la starea supraconductoare este reversibilă termodinamic, asemănător cu tranziția de la faza lichidă la faza gazoasă, în cazul unei evaporări lente. Reversibilitatea tranziției este, de asemenea, sugerată de efectul Meissner. Tranziția metal-supraconductor fiind reversibilă, i se poate aplica termodinamica. Utilizând dependența câmpului magnetic critic de temperatură, se poate găsi diferența de entropie între starea normală și starea supraconductoare.

1.6.1. Energia liberă a unui material magnetic

Să considerăm un corp de volum V care se magnetizează uniform într-un câmp magnetic H , astfel că momentul său magnetic este M . Prin creșterea câmpului magnetic la valoarea $H+dH$, momentul magnetic se modifică cu dM . Pentru această creștere a câmpului și momentului magnetic la temperatură constantă, sistemul primește energia (de la bateria ce alimentează bobina care generează câmpul magnetic)

$$dW = Vd\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + V\mu_0 HdM$$

Primul termen din partea dreaptă reprezintă lucrul mecanic consumat pentru a crește câmpul magnetic în volumul ocupat de către corp; acest lucru mecanic apare indiferent dacă volumul respectiv este ocupat sau nu de către corpul considerat. Cel de al doilea termen $dW_M = V\mu_0 HdM$ reprezintă lucrul mecanic consumat pentru a crește momentul magnetic al corpului. Lucrul mecanic efectuat de către o presiune externă p , pentru a modifica volumul unui corp cu dV este egal cu $dW_p = -pdV$. Se observă că lucrul mecanic necesar pentru a magnetiza corpul are formă similară cu lucrul mecanic necesar pentru a modifica volumul corpului, dacă $\mu_0 H$ corespunde lui p și M corespunde lui $-V$. Semnul este schimbat, deoarece corpul primește lucrul mecanic pentru a-și crește magnetizarea și efectuează lucru mecanic, atunci când își mărește volumul împotriva presiunii externe. Ne amintim că energia liberă Gibbs a unui corp în absența unui câmp magnetic este dată de expresia

$$G = u - TS + pV$$

unde U este energia internă și S este entropia. În câmp magnetic trebuie să adăugăm la energia liberă termenul $-\mu_0 HM$, analogul termenului $+pV$, astfel că scriem

$$G = u - TS + pV - \mu_0 HM,$$

$$M_i = V \cdot M$$

Variația parametrilor conduce la variația lui G

$$dG = du - Tds - SdT + pdV + Vdp - \mu_0 HdM_i - \mu_0 M_i dH \quad (6.1)$$

În condiții de temperatură și presiune constante ($dT=0$, $dP=0$) se obține

$$dG = du - Tds + pdV - \mu_0 HdM_i - \mu_0 M_i dH$$

Pentru un corp magnetic, în aceleași condiții de temperatură și presiune constante, din primul principiu al termodinamicii, se obține variația energiei interne

$$du = Tds - pdV + \mu_0 HdM, \quad (6.2)$$

Ultimii doi termeni reprezintă lucrul mecanic efectuat asupra corpului. Din ultimele două relații se obține $dG = -\mu_0 M_t dH$, astfel că energia liberă a unui corp care capătă momentul magnetic M_t în câmpul magnetic H este

$$G(H) - G(0) = -\mu_0 \int_0^H M_t dH$$

1.6.2. Energia liberă a unui supraconductor

În orice sistem, starea stabilă corespunde energiei libere minime. Vom compara, în acest paragraf, contribuția magnetică la energia liberă a celor două faze: supraconductoare și normală. Considerăm o probă supraconductoare de forma unei bare lungi (pentru a neglija efectul de demagnetizare care se datorează terminalelor probei). Aplicând un câmp magnetic, apare o magnetizare negativă a supraconductorului care, dacă se neglijează penetrația câmpului magnetic, anulează fluxul câmpului aplicat, astfel că $M = -H$. Energia liberă pe unitatea de volum crește la valoarea

$$g_s(T, H) = g_s(T, 0) + \mu_0 \int_0^H |\bar{M}| dH$$

unde $g_s(T, H)$ este energia liberă a supraconductorului în prezența câmpului magnetic, iar $g_s(T, 0)$, în absența câmpului. Deoarece $|\bar{M}| = H$, se obține

$$g_s(T, H) = g_s(T, 0) + \mu_0 \frac{H^2}{2}$$

Dimpotrivă, starea normală este virtual nemagnetică, astfel că în câmp magnetic magnetizarea ei este neglijabilă. Prin urmare, aplicarea unui câmp magnetic nu modifică energia liberă $g_n(T, 0)$ a stării normale și $g_n(T, 0) = g_n(T, H)$. Impunând condiția de echilibru termodinamic, anume, ca energiile celor două faze să fie egale la câmpul critic

$$g_s(T, H_c) = g_n(T, H_c)$$

rezultă

$$\mu_0 \frac{H_c^2}{2} = g_n(T, 0) - g_s(T, 0) \quad (6.3)$$

Deoarece din această ecuație rezultă că $g_s(T, 0) < g_n(T, 0)$, adică energia liberă a stării supraconductoare este mai mică decât energia liberă a stării normale, se trage concluzia că starea supraconductoare este mai favorabilă din punct de vedere energetic. Mărimea $\mu_0 H_c^2/2$ se numește energie de condensare. În prezența unui câmp magnetic aplicat, diferența dintre energiile libere ale stării normale și supraconductoare este

$$g_n(T, 0) - g_s(T, H) = \frac{1}{2} \mu_0 (H_c^2 - H^2) \quad (6.4)$$

1.6.3. Entropia stării supraconductoare

Dacă se mențin constante presiunea și câmpul magnetic aplicat și se variază temperatura cu dT , atunci variația energiei libere (6.1) este

$$dG = du - Tds - SdT + pdV - \mu_0 HdM,$$

Din această relație și din primul principiu al termodinamicii (6.2) se obține

$$dG = -SdT; S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p, H$$

Entropia unității de volum este dată de relația

$$s = -\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_p, H$$

Utilizând relația (6.4) rezultă

$$s_n - s_s = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT} \quad (6.5)$$

deoarece H nu depinde de T . După cum s-a observat experimental (§ 1.5.3) câmpul magnetic critic scade cu creșterea temperaturii astfel că dH_c/dT este negativ și partea dreaptă a ec. (6.5) este pozitivă. Prin urmare, entropia stării supraconductoare este mai mică decât entropia stării normale, adică starea supraconductoare are un grad mai mare de ordonare decât starea normală. Pe această bază în teoria BCS s-a presupus că în supraconductor electronii sunt condensați în perechi. La $T = T_c$ câmpul magnetic critic este egal cu zero astfel că la această temperatură diferența dintre entropia stării normale și stării supraconductoare se anulează. De asemenea, această diferență este egală cu zero la $T = 0\text{K}$ conform principiului al III-lea al termodinamicii. Dependența de temperatură a entropiei în fazele normală și supraconductoare este prezentată în Fig. 1.23.

1.6.4. Capacitatea calorică și căldura latentă

Căldura latentă a unei tranzații dintre două faze caracterizate de entropiile s_n și s_s este dată de relația

$$\lambda = T(s_n - s_s) = -\mu_0 H_c \frac{dH_c}{dT} T > 0$$

unde am avut în vedere relația 6.5. Rezultă că dacă sistemul se găsește la o temperatură mai mică decât temperatura critică, unde $H_c > 0$, atunci tranzația în câmp magnetic la această temperatură (menținută constantă) are loc cu absorbție de căldură latentă deoarece entropia stării normale este mai mare decât a stării supraconductoare. Prin urmare, în câmp magnetic (la $T < T_c$) tranzația de la faza normală la faza supraconductoare este o tranzație de speța I deoarece deși g este continuu adică $g_n = g_s$ derivata $\partial g/\partial T$ este discontinuă.

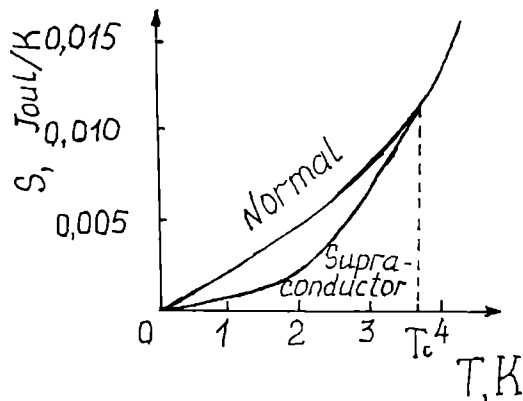


Fig. 1.23.

Tranzația în care $\partial g/\partial T$ este continuă se numește tranzație de speța a II-a. La temperatura critică $s_n = s_s$ astfel că

$$\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_n = \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_s$$

și deci tranzația de la faza normală la faza supraconductoare este o tranziție de speța a II-a. Acest tip de tranziție are două caracteristici importante: nu are căldură latentă și prezintă un salt al capacității calorice. Capacitatea calorică se definește prin relația $C = Tds/dT$ astfel că având în vedere (6.5) diferența dintre capacitatea

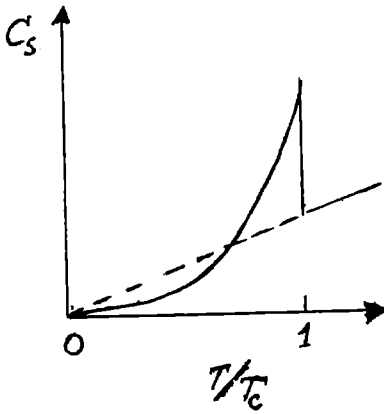


Fig. 1.24.

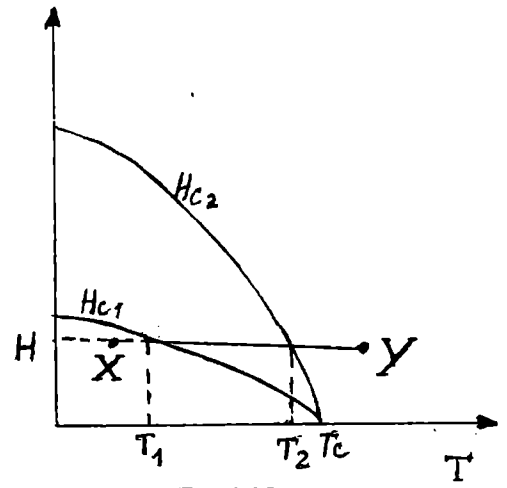


Fig. 1.25.

calorică din starea normală și starea supraconductoare se scrie

$$C_s - C_n = T \frac{d}{dT} (s_s - s_n) = T \mu_0 H_c \frac{d^2 H_c}{dT^2} + T \mu_0 \left(\frac{dH_c}{dT} \right)^2$$

La temperatura de tranziție $H_c = 0$ astfel că (în absența câmpului magnetic)

$$(C_s - C_n)_{T_c} = T_c \mu_0 \left(\frac{dH_c}{dT} \right)_{T_c}^2 \quad (6.6)$$

Prin urmare, din măsurarea pantei curbei câmpului critic se poate determina saltul capacității calorice. Dependența de temperatură a capacității calorice electronice se reprezintă în Fig. 1.24; se observă saltul la $T = T_c$. Relația (6.6) poartă numele de formula lui Rutgers. La staniu $\Delta C = 10,65 \text{ J/molK}$, iar la Pb este $41,8 \text{ J/molK}$. Notăm că relația (6.6) este valabilă în absența câmpului magnetic aplicat deoarece dH_c/dT determină o proprietate a materialului însuși, care nu depinde dacă este sau nu aplicat câmp magnetic.

1.6.5. Capacitatea calorică a supraconductorilor de speța a II-a

Așa cum s-a arătat în § 1.5.2. un supraconductor de speța a II-a prezintă două câmpuri critice H_{c1} și H_{c2} a căror dependență de temperatură este reprezentată în Fig. 1.25. Să aplicăm asupra probei un câmp magnetic $H < H_{c1}$, constant. Încălzind proba din starea X în starea Y (notate pe figură), la temperatura T_1 are loc tranzația din starea supraconductoare în starea mixtă iar la temperatura T_2 are loc tranziția din starea mixtă în starea normală. Dacă la H_{c1} magnetizarea are pantă infinită (Fig. 1.15) se poate arăta că la T_1 entropia este continuă dar derivata ei în raport cu temperatura este infinită. Absența disconținutității în entropie conduce la o tranzație de fază de speța a II-a iar valoarea infinită a derivatei în raport cu temperatura conduce la o anomalie a capacității calorice, de tip λ . La T_2 are loc de asemenea o tranzație de speța a II-a (de la starea mixtă la starea normală) și are loc o scădere a capacității calorice. În fig. 1.26 se reprezintă dependența de temperatură a capacității calorice pentru Niobiu. Se observă cele două tranziții de speța a II-a la T_1 și, respectiv, T_2 .

1.7. Electrodinamica supraconductibilității

1.7.1. Ecuațiile lui London

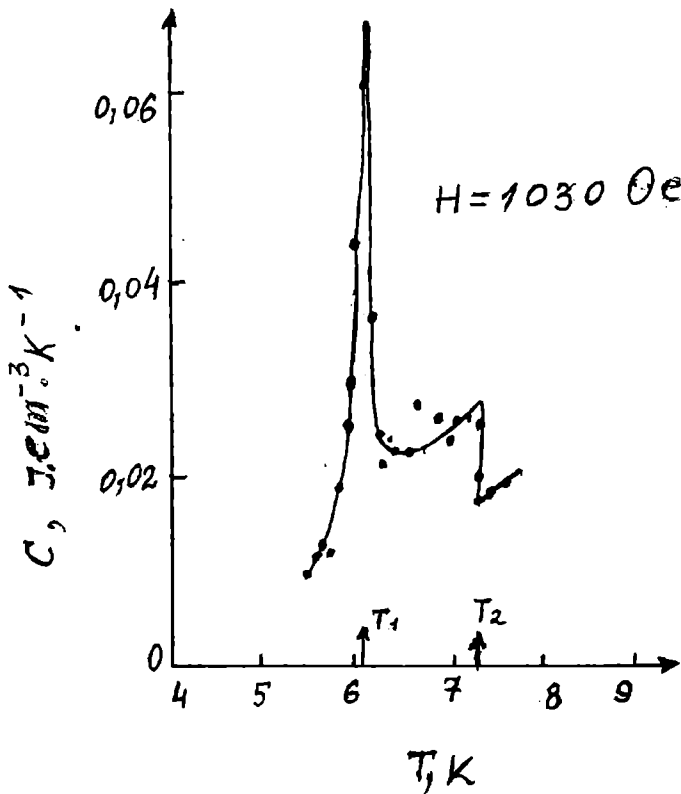


Fig. 1.26

Am văzut că supraconductorii prezintă proprietăți diferite de conductori normali: rezistența electrică nulă, efectul Meissner, existența curenților superficiali. Aceste proprietăți nu pot fi descrise numai cu ajutorul electrodinamicii conductorilor normali. De exemplu din legea lui Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ având în vedere că în supraconductor σ este infinit și \vec{j} este finit rezultă $\vec{E} = 0$ și din prima ecuație a lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7.1)$$

se obține $B = \text{constant}$. Dar efectul Meissner arată că în supraconductorii inducția magnetică nu este constantă ci este egală cu zero. Pentru a explica efectul Meissner și alte proprietăți electrodinamice ale supraconductorilor postulăm că în starea supraconductoare densitatea de curent este direct proporțională cu potențialul vector \vec{A} al câmpului magnetic local și scriem

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{A}, (S_L); \vec{j} = -\frac{c}{4\pi \lambda_L^2} \vec{A}, (CGS) \quad (7.2)$$

Aceasta este prima ecuație a lui London. Aplicând operatorul rotor acestei ecuații și având în vedere ecuația lui Maxwell (7.1) se obține a doua ecuație a lui London,

$$\nabla \times \vec{j}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B} \quad (7.3)$$

Pe baza celei de a doua ecuații a lui London și ecuației lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \quad (7.4)$$

se poate explica efectul Meissner. Aplicând operatorul rotor ultimei ecuații se obține

$$\nabla \times \nabla \times \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \nabla \times \vec{j}_s \quad (7.5)$$

unde am ținut cont de condiția $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. Având în vedere cea de a doua ecuație a lui London, ec. (7.5) devine

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B} = 0 \quad (7.6)$$

unde λ_L este adâncimea de penetrație London. Această ecuație nu permite o soluție uniformă în spațiu, astfel că într-un supraconductor nu poate exista un câmp magnetic uniform. $B(r) = B_0 = \text{constant}$ nu este o soluție a ec. (7.6) afară de cazul când câmpul constant $B_0 = 0$.

Ca exemplu să considerăm un supraconductor omogen infinit care ocupă semiplanul $x > 0$. Ec. (7.6) pentru cazul unidimensional

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} B$$

are soluția

$$B(x) = B(0)e^{-x/\lambda_L} \quad (7.7)$$

Deci câmpul magnetic scade rapid în interiorul supraconductorului (exponențial) așa cum se reprezintă în Fig. 1.27.

În § 1.5 s-a arătat că într-un supraconductor curentul circulă într-un strat de la suprafața acestuia, adică este un curent superficial.

Existența curentului superficial este de asemenea o consecință a ecuațiilor lui London. Pentru a arăta acest lucru să considerăm un câmp paralel cu suprafața în direcția Z, $B = (0, 0, B_z(x))$.

Din (7.4) se obține

$$\frac{-dB_z}{dx} = \mu_0 j_{sy}$$

și având în vedere (7.7) rezultă

$$j_{sy} = \frac{B(0)}{\mu_0 \lambda_L} \exp(-x/\lambda_L) = j_{sy}(0) \exp(-x/\lambda_L)$$

Deci curentul circulă numai în apropierea suprafeței, într-un strat limitat de adâncimea de penetrație London. Adâncimea de penetrație London variază cu temperatura după legea

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(0)}{\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^4\right]^{1/2}} \quad (7.8)$$

Această relație, găsită empiric, a fost ulterior dedusă pe baza teoriei microscopice. Dependența $\lambda(T)$ în staniu este reprezentată în Fig. 1.28, iar $\lambda(0)$ are următoarele valori în cm: $6,4 \times 10^{-6}$ în

In, 5×10^{-6} în Al, $3,9 \times 10^{-6}$ în Pb, 14×10^{-6} în $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, $14 - 20 \times 10^{-6}$ în $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+x}$.

Pentru a înțelege sensul fizic al ecuațiilor lui London scriem impulsul total al unei perechi de electroni

$$\vec{p} = m^* \vec{v}_s - q^* \vec{A}$$

În supraconductori se consideră că în absența unui câmp electric aplicat starea fundamentală are impulsul net egal cu zero (așa cum rezultă dintr-o teoremă a lui Bloch) deși în starea normală acesta este diferit de zero. Această

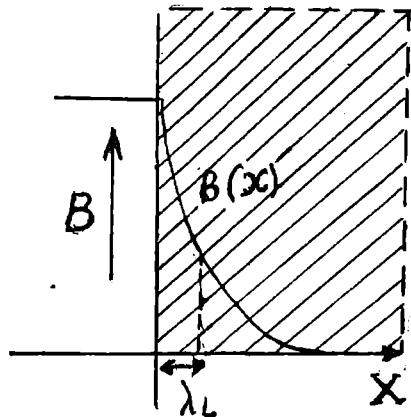


Fig. 1.27.

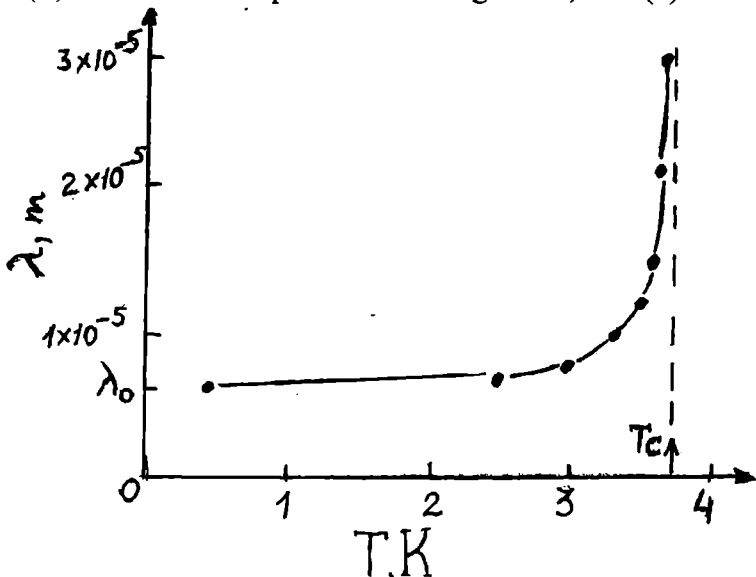


Fig. 1.28.

presupunere este valabilă dacă se postulează că din anumite motive funcția de undă a perechilor de electroni este „rigidă” și își menține forma ei din starea fundamentală cu $\langle \vec{p} \rangle = 0$. În această situație viteza medie locală este dată de expresia

$$\vec{v}_s = \langle \vec{v} \rangle = + \frac{q^* \vec{A}}{m^*}$$

iar curentul electric este

$$\vec{j}_s = -n_s q^* \vec{v}_s = - \frac{n_s q^{*2} \vec{A}}{m^*} \quad (7.9)$$

unde n_s este concentrația perechilor de electroni, $q^* = +2q$, $m^* = 2m$, $-q$ și m sunt sarcina și respectiv masa electronului liber. Comparând ec. (7.2) și (7.9) se obține pentru lungimea de penetrație London expresia

$$\lambda_L^2 = \frac{m^*}{\mu_0 n_s q^{*2}}, (SI); \lambda_L^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi n_s q^{*2}}, (CGS); \quad (7.10)$$

La limită, când toți electronii devin împerecheați, $n_s = n/2$ unde n este concentrația totală a electronilor de conducție. Aceasta are loc pentru $T \rightarrow 0$ și

$$\lambda(0) = \left(\frac{m}{\mu_0 n q^{*2}} \right)^{1/2}$$

Deoarece n_s scade cu creșterea lui T către T_c rezultă că $\lambda(T)$ crește cu creșterea temperaturii. Această creștere a adâncimii de penetrație London poate fi interpretată calitativ în modelul lui London admitând că există o rigiditate incompletă a funcției de undă astfel că n_s este mai mic decât $n/2$, însă o interpretare cantitativă a fenomenului necesită introducerea unei noi noțiuni: lungimea de coerență ξ .

Menționăm că London, așa cum am amintit într-un paragraf anterior, a propus modelul bifluid al electronilor: superelectroni și electroni normali [21]; mai târziu, Cooper, 1956, a stabilit că superelectronii sunt perechi de electroni (electronii din pereche au impulsurile precum și spinii de sens opus).

Noi vom utiliza și înainte de prezentarea teoriei microscopice noțiunea de pereche de electroni și nu de superelectroni.

Observăm că ec. (7.9) nu este invariantă la etalonare și ea este corectă numai dacă alegem o transformare de etalonare particulară. Această alegere se numește transformarea etalon London și impune condițiile $\text{div } \vec{A} = 0$, adică $\text{div } \vec{j} = 0$ și $\vec{A}_n = 0$, adică $\vec{j}_n = 0$ unde n indică componenta normală la suprafața supraconductorului. Ultima condiție precizează că la suprafața vid-supraconductor nu trebuie să treacă curent electric.

1.7.2. Electrodinamica nelocală a lui Pippard

Pippard a introdus noțiunea de lungime de coerență elaborând o teorie nelocală, care generalizează ecuația lui London (7.9). Pentru elaborarea teoriei sale a utilizat generalizarea nelocală a legii lui Ohm $\vec{j}(\vec{r}) = \sigma \vec{E}(\vec{r})$ de către Chambers:

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{3\sigma}{4\pi} \int \frac{\vec{R} [\vec{R} \cdot \vec{E}(\vec{r}') e^{-R/l}]}{R^4} d\vec{r}'$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. În scrierea acestei formule se presupune că într-un volum de rază l din jurul

punctului \vec{r} curentul în punctul \vec{r} depinde de câmpul \vec{E} (\vec{r}') din punctul \vec{r}' . Având în vedere acest model Pippard a presupus că funcția de undă a electronilor în supraconductor are o dimensiune caracteristică ξ_0 care poate fi estimată din principiul de incertitudine. Astfel, lungimea de coerență este corelată de variație corespunzătoare a impulsului prin relația $\xi_0 \cdot \Delta p \sim h$. La procesul de supraconductibilitate participă electronii situați în intervalul energetic kT_c de la suprafața Fermi, adică $v_F \Delta p = k_B T_c$ unde $v_F = p_F/m$ este viteza electronilor la suprafața Fermi. Rezultă pentru lungimea de coerență expresia

$$\xi_0 \approx \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}$$

După cum am văzut ulterior în teoria microscopică mărimea ξ_0 se poate considera că dimensiune tipică a perechilor Cooper de electroni care participă la supraconductibilitate. O altă caracteristică a supraconductibilității găsită în teoria microscopică este existența unei benzi interzise la energii mici de excitare. În cei mai mulți supraconductori pentru a despica o pereche de electroni normali este necesară o energie $E \geq 2\Delta$ unde Δ este banda de energie interzisă. Cunoscând lărgimea Δ a benzii interzise se poate determina o altă relație pentru ξ_0 . Valorile nepermise ale impulsului pentru despicierea unei perechi de electroni sunt situate în intervalul

$$F - \Delta \leq \frac{p^2}{2m} \leq F + \Delta$$

astfel că domeniul de variație al lui Δp este

$$\Delta p \cong \frac{p_F \cdot \Delta}{F}$$

Din relația de incertitudine rezultă

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta}$$

Dacă ξ_0 reprezintă dimensiunea cea mai mică a pachetului de unde asociat perechilor de electroni atunci ne putem aștepta la o slăbire a supracurentului dacă potențialul vector $\vec{A}(\vec{r})$ nu-și menține întreaga sa valoare în volumul de rază ξ_0 din jurul punctului considerat. Cu alte cuvinte ξ_0 joacă rolul drumului liber mijlociu al electronilor din cazul metalului normal. Evident că dacă drumul liber mijlociu ordinar este mai mic decât ξ_0 ne putem aștepta la o micșorare în plus a supracurentului într-un câmp magnetic aplicat. Pe baza acestor idei Pippard a propus substituirea ecuației lui London (7.9) cu următoarea relație

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{n_s q^2}{m} \cdot \frac{3}{4\pi\xi_0} \int \frac{\vec{R}[\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}')]]}{R^4} e^{-R/\xi} d\vec{r}' \quad (7.13)$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$, c este viteza luminii, iar lungimea de coerență ξ în prezența fenomenelor de împrăștiere este corelată cu lungimea de coerență din materialul pur prin relația

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l} \quad (7.14)$$

unde l este drumul liber mijlociu al electronilor normali. Relația lui Pippard stabilește o corelație între supracurentul indus și potențialul vector \vec{A} . În prezența unui câmp magnetic extern \vec{A} conține contribuția a doi termeni, a curentului extern și a lui \vec{j} însuși

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \vec{A} = -\nabla \times \vec{H} = -\vec{j}_{\text{tot}} = -(\vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}) \quad (7.15)$$

unde j_{ext} se datorează câmpului magnetic extern, iar j este dat de ecuația lui Pippard (7.13). Prin

urmare pentru a determina câmpul magnetic total trebuie să găsim soluția care să satisfacă simultan ec. (7.13) și (7.15).

Înainte de a trece la tratarea cazului general, găsim soluția exactă prin analiză Fourier, notăm că este posibil să ajungem la unele concluzii pe baza existenței a două lungimi caracteristice: o lungime caracteristică λ de penetrație a lui A, dependentă de temperatură, care poate să nu fie aceeași cu adâncimea de penetrație London λ_L (dată de ec. 7.6) și o lungime caracteristică ξ independentă de temperatură, care este ceva mai mică decât ξ_0 sau 1. Dacă $\xi \ll \lambda$, atunci potențialul vector variază slab și poate fi evaluat la $\vec{r}' = \vec{r}$. Se obține

$$\begin{aligned} \vec{j}_k(\vec{r}) &\equiv -\frac{n_s q^2}{m \xi_0} A_l(\vec{r}) \frac{3}{4\pi} \int d^3 R R_k R_l \frac{e^{-R/\xi}}{R^4} = \\ &= -\frac{n_s q^2}{m \xi_0} A_l(\vec{r}) \frac{3}{4\pi} \int dR \frac{R^2 R_k R_l}{R^4} e^{-R/\xi} \int \int \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= -\frac{n_s q^2}{m \xi_0} A_l(\vec{r}) \delta_{kl} \int_0^\infty dR e^{-R/\xi} \end{aligned}$$

sau

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{n_s q^2 l}{m(\xi_0 + l)} \vec{A}(\vec{r}), \xi \ll \lambda \quad (7.16)$$

Orice probă care satisface condiția locală $\xi \ll \lambda$ se numește supraconductor London deoarece ec. (7.16) reproduce forma ec. London (7.9) cu coeficientul micșorat cu factorul $1/(\xi + 1)$. La O K adâncimea de penetrație în cazul limitei locale, $\xi \ll \lambda$ este dată de expresia

$$\lambda(O) = \lambda_L(O) \left(\frac{\xi_0 + l}{l} \right)^{1/2} \quad (7.17)$$

Pentru un supraconductor London pur, $\xi_0 \ll 1$ și relația de mai sus se reduce la relația lui London. În realitate în multe materiale supraconductoare la temperaturi joase nu este satisfăcută condiția pentru un supraconductor London pur $\xi = \xi_0 \ll 1$. În mod uzual supraconductorii de tip London sunt aliaje puternic dopate în care lungimea ξ este determinată de l și nu de ξ_0 și în care este satisfăcută inegalitatea $\xi = 1 \ll \lambda$. În acest caz ec. 7.17 explică creșterea observată experimental a adâncimii de penetrație în aliajele impure în care $1 \ll \xi_0$. Dacă o probă este supraconductor de tip London la temperaturi joase, atunci ea se comportă ca atare la toate temperaturile $T < T_c$ având în vedere relația dependenței de temperatură (7.8) a adâncimii de penetrație. Tot din această relație rezultă că deoarece adâncimea de penetrație crește rapid când $T \rightarrow T_c$, la temperaturi foarte apropiate de T_c toți supraconductorii devin supraconductori de tip London.

Considerăm în continuare cazul nelocal $\xi \gg \lambda$.

În acest caz supraconductorul se numește de tip Pippard. Pentru a obține soluția exactă se procedează la analiza Fourier a lui \vec{j} și \vec{A} . Introducem transformatele Fourier tridimensionale

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{j}(\vec{q}) \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{A}(\vec{q}) \end{aligned}$$

și din condiția de etalonare London se obține

$$\vec{q} \cdot \vec{A}(\vec{q}) = 0 \quad (7.18)$$

Pentru a găsi transformata Fourier a ec. lui Pippard (7.13) scriem

$$\vec{j}(\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi} K(q) \vec{A}(\vec{q}) \quad (7.19)$$

Utilizând (7.13) și trecând la coordonate polare rezultă

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{q}) &= \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \vec{j}(\vec{r}) = \\ &= -\frac{n_s q_s^2}{m\xi_0} \cdot \frac{3}{4\pi} \vec{A}(\vec{q}) \iiint r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi e^{-iqr \cos\theta} \frac{r^2}{r^4} e^{-r/\xi} \sin^2\theta \end{aligned} \quad (7.20)$$

Am considerat \vec{j} și \vec{A} după direcția x și H după direcția y (deci toate situate într-un plan perpendicular pe axa z), astfel că $z = r \sin\theta$, $d^3r = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$. Efectuând integrala după φ se obține

$$\vec{j}(\vec{q}) = -\frac{n_s q_s^2}{m\xi_0} \cdot \frac{3}{4} \vec{A}(\vec{q}) \iint \sin^3\theta e^{-r/\xi} e^{-qr \cos\theta} d\theta dr$$

și efectuând apoi integrala după θ rezultă

$$\vec{j}(\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi} K(q) \vec{A}(\vec{q}) \quad (7.21)$$

unde

$$\begin{aligned} K(q) &= -\frac{3n_s q_s^2}{m\xi_0} 4\pi \int_0^\infty \frac{dr}{r^2} e^{-r/\xi} \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \frac{\sin qr}{qr} = \\ &= \frac{6\pi n_s q_s^2}{m\xi_0 q} \left\{ \frac{\arctg q\xi}{(q\xi)^2} [1 + (q\xi)^2] - \frac{1}{q\xi} \right\} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Transformata Fourier a ec. (7.15) este

$$-\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{A}(\vec{q}) = \mu_0 \int d^3\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} [\vec{j}_{\text{ext}} + \vec{j}(\vec{r})] \quad (7.23)$$

Având în vedere ec. (7.14) membrul stâng al acestei expresii devine

$$-\vec{q} \times \vec{q} \times \vec{A}(\vec{q}) = q^2 \vec{A}(\vec{q}) - \vec{q}[\vec{q} \cdot \vec{A}(\vec{q})] = q^2 \vec{A}(\vec{q})$$

De asemenea, ținând seama de expresia (7.19) a lui $\vec{j}(\vec{q})$ în funcție de $\vec{A}(\vec{q})$ ec. lui Maxwell (7.21) devine

$$q^2 \vec{A}(\vec{q}) = \mu_0 \vec{j}_{\text{ext}}(\vec{q}) - K(q) \vec{A}(\vec{q}) \quad (7.24)$$

Se obține

$$\vec{A}(\vec{q}) = \frac{\mu_0 \vec{j}_{\text{ext}}(\vec{q})}{K(q) + q^2} \quad (7.25)$$

Pentru a efectua calculul în continuare trebuie să scriem forma explicită a lui $\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{q})$. Considerăm o suprafață supraconductoare planară situată în planul xy și câmpul magnetic aplicat după direcția y, paralel cu suprafața. Câmpul magnetic pătrunde în supraconductor după direcția z astfel că j_x și A_x sunt funcții numai de z și deci este suficientă analiza Fourier unidimensională. Expresia obținută pentru $K(q)$ este valabilă numai pentru un mediu infinit de aceea pentru a fi aplicabilă această relație trebuie să apelăm la un artificiu matematic. Artificiul constă în a introduce un curent, alimentat de la o sursă externă, care circulă în interiorul unui mediu

supraconductor infinit, pentru a simula câmpul aplicat la suprafață. Adică se introduce un strat de curent

$$j_{x,ext} = -\frac{2}{\mu_0} B_0 \delta(z) \quad (7.26)$$

situat în planul xy , care este înconjurat de supraconductorul considerat infinit. Pentru a înțelege aceasta considerăm cazul în care electronii sunt reflectați ca într-o oglindă la suprafața supraconductorului așa cum se reprezintă în Fig. 1.29 a. Cu linie plină este arătată traiectoria electronului reflectat ca într-o oglindă iar cu linie întreruptă este reprezentată extensia acestei mișcări în cealaltă jumătate a spațiului, ceea ce simulează stratul de curent. Expresia (7.24) a curentului introduce o discontinuitate $2B_0$ în H_y . Aceasta poate fi luată simetrică față de zero astfel că H_y comută de la $-B_0$ la B_0 așa cum se reprezintă în Fig. 1,29 b.

Curenții diamagnetici ai supraconductorului vor ecrana câmpul pe o distanță λ (care trebuie determinată).

În schema simulată, electronul care trece prin planul $z = 0$, fără să fie împrăștiat de astădată, are traiectoria similară cu cea a electronului reflectat la suprafața supraconductorului (cazul real), determinată de potențialul vector reprezentat în Fig. 1.29 c deoarece $\vec{A}(z) = \vec{A}(-z)$. Prin urmare, supracurentul net din cazul simulat este același cu cel din cazul real.

Componenta Fourier a lui j_{ext} (7.24) este

$$j_{ext} = \int d^3r e^{-\vec{q}\cdot\vec{r}} \left(-\frac{2}{\mu_0} \right) B_0 \delta(z) = -\frac{B_0}{\pi\mu_0} \quad (7.27)$$

Substituind (7.25) în (7.23) se obține

$$A(q) = \frac{-B_0 / \pi}{K(q) + q^2} \quad (7.28)$$

Deoarece $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$, rezultă că $H_y(q) = -iqA_x(q)$. Pentru a afla $H(z)$ se integrează pe toate componentele Fourier

$$B(z) = \frac{B_0}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q e^{iqz} dz}{K(q) + q^2} = \frac{2B_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q \sin qz dq}{K(q) + q^2} = \mu_0 H(z) \quad (7.29)$$

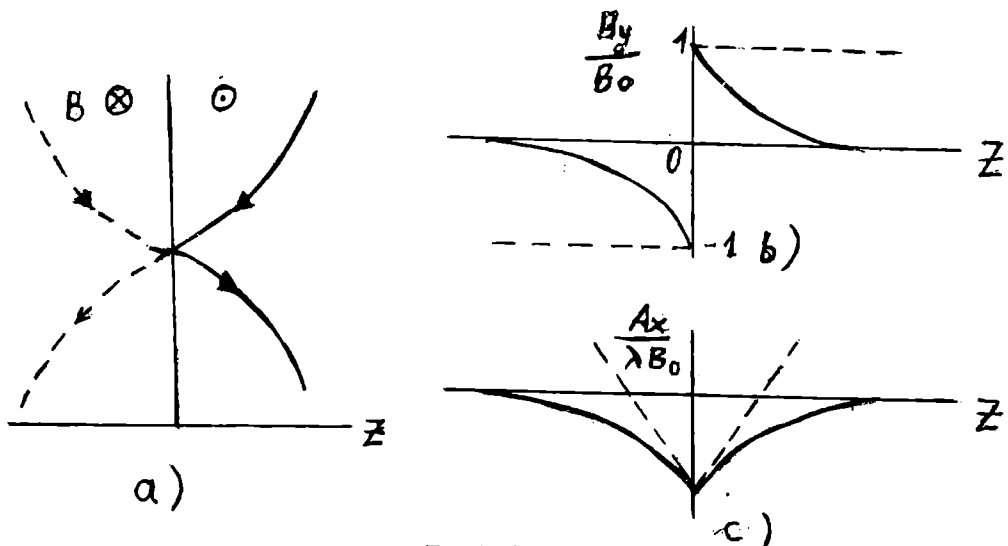


Fig. 1.29.

Pentru $K(q) = \text{constant}$ se obține o dependență exponențială a lui H de z , ca în teoria lui London. Adâncimea de penetrație a câmpului magnetic în supraconductor este definită de relația

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty B(z) dz}{B_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{q \sin qz dq}{K(q) + q^2}$$

$$\int_0^\infty q \sin qz dz = 1 - \cos qz$$

Pentru $Z \rightarrow \infty$ contribuția termenului $\cos qz$ la integrala totală este zero, astfel că

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{K(q) + q^2} \quad (7.30)$$

Cunoscând forma lui $K(q)$ se poate determina λ pentru orice model supraconductor. În teoria lui London $K(q) = 1/\lambda_L^2$ astfel că

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + \frac{1}{\lambda_L^2}} = \lambda_L$$

În teoria lui Pippard $K(q)$ este dat de expresia (7.20). Dependența lui $K(q)$ de $q\xi$ este reprezentată în Fig. 1.30 cu linie plină. Cazul $K(0)$ corespunde teoriei lui London iar cazul anomal (un caz nelocal) este cel corespunzător lui $q \rightarrow \infty$ unde $K(q)$ poate fi aproximată prin forma asimptotică

$$K(q) \equiv \frac{3\pi^2 n_s q_s^2}{mc^2 q \xi_0} \equiv \frac{a}{q}$$

Substituind această expresie în (7.28) se obține

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + (a/q)}$$

Se efectuează schimbarea de variabilă $\tau = q^2/a$ și rezultă

$$\lambda = \frac{2}{3\pi a^{1/3}} \int_0^\infty \frac{\tau^{-1/3} d\tau}{1 + \tau} = \frac{4}{3\sqrt{3}a^{1/3}} = \frac{8}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/3} (\lambda_L^2 \xi_0)^{1/3} \quad (7.31)$$

Deoarece această relație este dedusă în cazul limitei nelocale, $\lambda \ll \xi$, λ este independentă de drumul liber mijlociu al electronilor 1 deoarece integrala spațială este limitată de λ și nu de ξ .

Relațiile (7.17) și (7.29) constituie rezultatele importante ale teoriei lui Pippard. Ele explică creșterea adâncimii de penetrație a câmpului magnetic în aliaje supraconductoare și raportul egal cu 2-3 obținut experimental între λ măsurat și λ_L

$$\frac{\lambda}{\lambda_L} = \frac{8}{9} \left(\frac{\sqrt{3} \xi_0}{2\pi \lambda_L} \right)^{1/3}$$

După ce vom prezenta teoria microscopică a supraconductibilității vom prezenta deducerea dependenței de temperatură a lui λ care nu poate fi efectuată pe baza teoriei originale a lui Pippard.

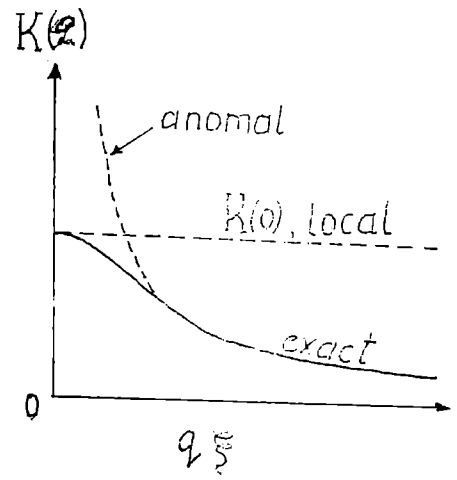


Fig. 1.30.

1.8. Penetrația câmpului magnetic și curentul critic în straturi subțiri

Să considerăm o probă de forma unei plăci paralelipipedice subțiri cu grosimea pe direcția x egală cu $2l$. Se aplică un câmp magnetic H în direcția y , paralel cu cele două fețe ale plăcii. Rezolvând ecuația lui London se obține în acest caz

$$B(x) = \mu_0 H \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(l/\lambda)}$$

unde ca origine a axei Ox s-a ales mijlocul grosimii $2l$. În Fig. 1.31 se reprezintă variația lui B cu distanța x într-o probă cu $2l \gg \lambda$ (Fig. 1.31 a) și într-o probă cu $l \sim \lambda$ (Fig. 1.31 b). Magnetizarea într-un punct este dată de expresia

$$M(x) = \frac{B(x)}{\mu_0} - H$$

iar magnetizarea pe unitatea de arie a plăcii se obține prin integrare

$$H = \int_{-l}^l \left[\frac{B(x)}{\mu_0} - H \right] dx = -2lH \left[1 - \frac{\lambda}{l} \tanh \frac{l}{\lambda} \right]$$

Scriem $M = -2l \beta H$ unde

$$\beta = \left[1 - \frac{\lambda}{l} \tanh \frac{l}{\lambda} \right]$$

este o mărime pozitivă și $\beta = -\chi_{ef}$ unde χ_{ef} reprezintă susceptibilitatea efectivă a probei. Se observă că datorită penetrației fluxului magnetic în probă χ_{ef} este diferit de -1 .

Dacă $\lambda = 0$ se obține $\chi_{ef} = -1$.

Contribuția magnetică la energia liberă Gibbs pe unitatea de arie este

$$F_m = -\frac{1}{2} \mu_0 M H = \mu_0 l \beta H^2$$

Notând cu G_n energia liberă Gibbs pe unitatea de arie a probei în stare normală și cu G_s în stare supraconductoare, se determină câmpul magnetic critic din relația

$$\mu_0 l \beta H_c^2 = G_n - G_s = 2l(g_n - g_s)$$

unde g_n, g_s sunt energiile libere corespunzătoare raportate la unitatea de volum. Atunci când penetrația câmpului în probă este neglijabilă față de dimensiunile probei, este îndeplinită relația

$$\frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 = g_n - g_s,$$

Din compararea ultimelor două relații se obține

$$H_{c1} = H_c \beta^{-1/2} = H_c \left[1 - \frac{\lambda}{l} \tanh \frac{l}{\lambda} \right]^{-1/2}$$

Prin urmare, datorită penetrației fluxului câmpul magnetic critic crește. Această relație poate fi simplificată în două cazuri limită. Pentru $l \ll \lambda$,

$$1 - \frac{\lambda}{l} \tanh \frac{l}{\lambda} \approx \frac{l^2}{3\lambda^2}$$

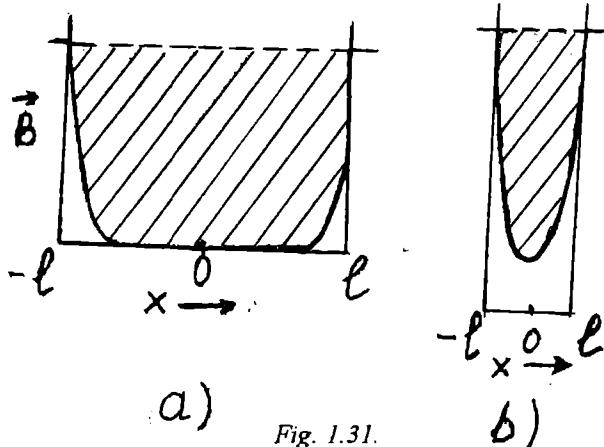


Fig. 1.31.

astfel că

$$H_{c1} \cong \sqrt{3} \frac{\lambda}{l} H_c$$

Pentru $\lambda_0 = 500 \text{ \AA}$ în apropierea temperaturii de tranziție și $l = 100 \text{ \AA}$, H_{c1} depășește cu un ordin de mărime pe H_c .

În celălalt caz limită, $l \gg \lambda$

$$\beta = 1 - \frac{\lambda}{l} \tanh \frac{l}{\lambda} \cong 1 - \frac{\lambda}{l}$$

și

$$H_{c1} = H_c \left(1 - \frac{\lambda}{l}\right)^{-1/2} \cong H_c \left(1 + \frac{\lambda}{2l}\right)$$

În acest caz $M = -2(1-\lambda)H$ și se poate considera că magnetizarea plăcii pe unitatea de volum este egală tot cu $-H$, însă grosimea plăcii se micșorează cu 2λ .

Densitatea de curent electric j_z se găsește din ecuația lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

care pentru geometria aleasă de noi devine

$$j_z = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{H \sinh(x/\lambda)}{\lambda \cosh(l/\lambda)}$$

Distribuția câmpului magnetic și a curentului electric prin probă este reprezentată în Fig. 1.32. Se observă că deși câmpul magnetic are același sens în ambele jumătăți ale probei, curentul electric este de sens opus. Densitatea curentului are valoarea maximă la suprafețele probei, egală cu $(H/\lambda) \tanh(l/\lambda)$. Pentru $l \gg \lambda$ se obține

$$j_x = \frac{H_c}{\lambda}$$

unde j_c este densitatea critică de curent și H_c , câmpul magnetic critic.

Să considerăm acum că nu aplicăm pe probă un câmp magnetic H , ci aplicăm un curent electric în direcția z de mărime j pe unitatea de lățime a probei în direcția y . În acest caz, din condiții de simetrie, curentul are același sens în ambele jumătăți ale plăcii iar B are sensuri opuse. Prin urmare, căutăm soluții ale ecuației London care să satisfacă condițiile

$$B(x) = -B(-x); j(x) = j(-x)$$

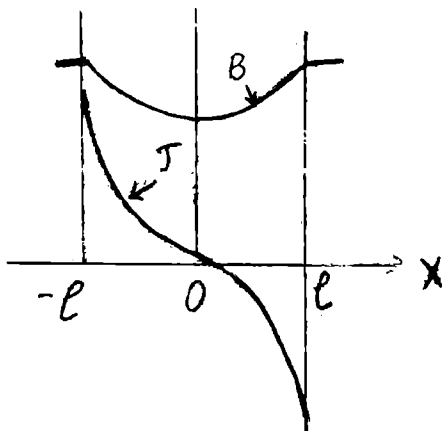


Fig. 1.32.

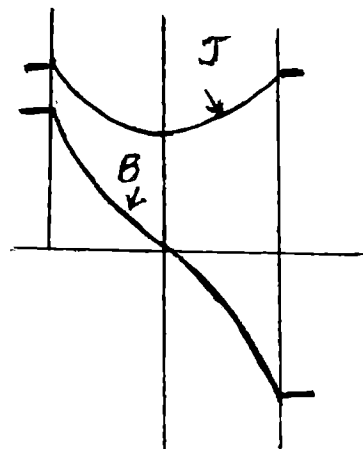


Fig. 1.33.

Se obține

$$j(x) = j(l) \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(l/\lambda)}$$

și

$$B = -\mu_0 \lambda^2 \frac{\partial j}{\partial x} = -\mu_0 \lambda j(l) \frac{\sinh(x/\lambda)}{\cosh(l/\lambda)}$$

unde $j(l)$ este corelat cu curentul total J pe unitatea de lățime a probei

$$J = \int_{-l}^l j(x) dx = 2\lambda j(l) \tanh(l/\lambda)$$

$B(x)$ și $J(x)$ sunt reprezentate în Fig. 1.33. Densitatea de curent este maximă la suprafață. Dacă presupunem că proba începe să treacă în starea normală când $j(l)$ are valoarea $j_c = H_c/l$ atunci curentul critic pe unitatea de lățime a probei este

$$J_c' = 2\lambda j_c \tanh(l/\lambda) = 2H_c \tanh(l/\lambda)$$

Pentru $l \gg \lambda$ se obține $J_c = 2H_c$ iar pentru $l \sim \lambda$ se obține

$$J_c' = 2H_c \tanh(l/\lambda) = J_c \tanh(l/\lambda)$$

Prin urmare, în proba subțire curentul critic se micșorează cu factorul $\tanh(l/\lambda)$.

CAPITOLUL II

TEORIA FENOMENOLOGICĂ GINZBURG-LANDAU

2.1. Ecuațiile Ginzburg-Landau

În 1937 Landau a propus o teorie generală a tranzițiilor de fază de ordinul II. La baza acestei teorii stau următoarele trei presupuneri fundamentale: (1) există un parametru de ordonare care la tranziție tinde la zero; (2) energia liberă poate fi descompusă în serie de puteri după acest parametru de ordonare; (3) coeficienții descompunerii sunt funcții uniforme de temperatura T . Ca parametru de ordonare în supraconductori se ia funcția de undă a perechilor de electroni $\psi(\vec{r})$ definită astfel că $|\psi(\vec{r})|^2$ reprezintă densitatea locală n_s a perechilor de electroni.

Dacă ψ este mic și variază slab cu coordonatele spațiale, densitatea energiei libere \mathcal{F} poate fi dezvoltată în serie astfel

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{no} + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q^* \vec{A} \right)^2 + \frac{M_0 H^2}{2} \quad (1.1)$$

unde pentru perechile de electroni $m^* = 2m$ și $q^* = -2q$; m și $-q$ sunt masa și, respectiv, sarcina unui electron. F_{no} este densitatea energiei libere a stării normale. Din relația de mai sus pentru $\psi = 0$ se obține densitatea de energie a stării normale $F_{no} + H^2/8\pi$ unde ultimul termen reprezintă energia magnetică. În aceste relații H este câmpul magnetic microscopic, local; cu B vom nota inducția magnetică: ea reprezintă valoarea medie a lui H , adică valoarea macroscopică. Vom nota câmpul magnetic aplicat cu H_a .

În absența câmpului magnetic și a gradientului se obține

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 \quad (1.2)$$

care reprezintă o dezvoltare în serie a lui \mathcal{F}_s după ψ^2 în care s-au reținut numai primii doi termeni. Această dezvoltare este valabilă în apropierea lui T_c unde $\psi^2 \rightarrow 0$; deci ca parametru de ordonare este indicat să considerăm $|\psi|^2$ sau n_s . O dezvoltare după puterile lui ψ este exclusă deoarece \mathcal{F} trebuie să fie reală. Dacă am lua în considerare numai partea reală a lui ψ nici atunci nu ar fi posibilă o asemenea dezvoltare (numai după ψ) deoarece \mathcal{F} nu trebuie să depindă de faza absolută a lui ψ . De asemenea sunt excluse dezvoltările după puterile impare ale lui $|\psi|$. Minimul energiei libere (1.2) în raport cu parametrul $|\psi|^2$ depinde de semnul lui α . Dacă α este pozitiv minimul energiei libere are loc la $|\psi|^2 = 0$ și deci corespunde stării normale (Fig. 2.1 a). Dacă α este negativ, energia liberă prezintă minim la

$$|\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} \quad (1.3)$$

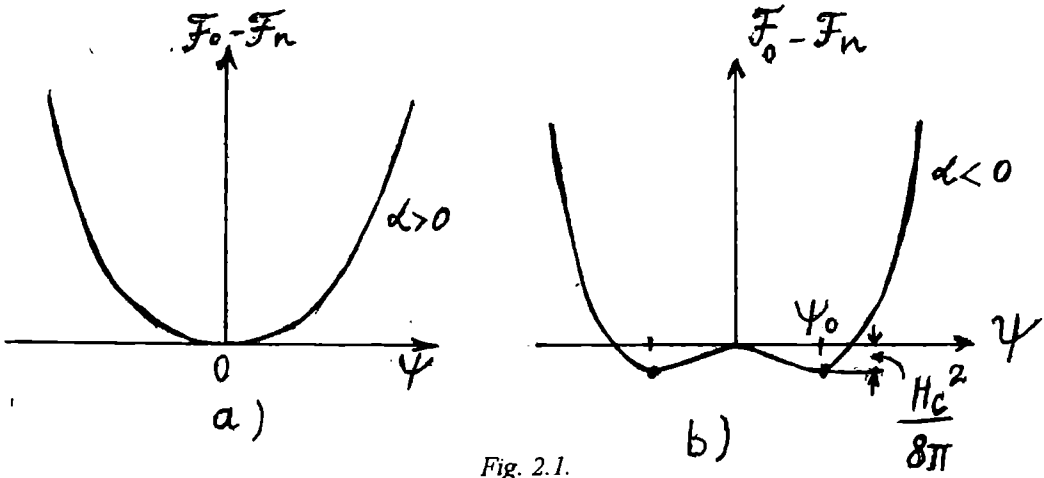


Fig. 2.1.

și are valoarea (Fig. 2.1 b)

$$F_s - F_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} \quad (1.4)$$

În Fig. 2.1, pentru simplitate, s-a considerat ψ real. Coeficientul α este negativ pentru $T < T_c$, în starea supraconductoare unde $F_s - F_n < 0$, trece prin valoarea zero la $T = T_c$ și devine pozitiv pentru $T > T_c$, când $F_s = F_n$ și materialul se găsește în stare normală. Prin urmare, în apropierea lui T_c , $\alpha(T)$ poate fi dezvoltat în serie și dacă ne oprim la primul termen al dezvoltării se poate scrie

$$\alpha(T) = (T - T_c) \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_{T=T_c} \quad (1.5)$$

($d\alpha/dT > 0$). Din (1.6.3) rezultă

$$F_s - F_n = -\frac{\mu H_c^2}{2\pi} \quad (1.6)$$

și având în vedere (1.4) se obține

$$H_c^2(T) = \frac{\alpha^2}{\mu_0 \beta} \quad (1.6a)$$

unde H_c este câmpul magnetic critic termodinamic. Prin urmare,

$$H_c(T) = 2H_c(O) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad (1.7)$$

unde am notat

$$H_c(O) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta \mu_0} \right)^{1/2} T_c \left(\frac{d\alpha}{dT} \right)_{T_c}$$

Această dependență este în acord cu dependența găsită empiric (1.5.3), deoarece dacă se are în vedere că teoria Ginzburg-Landau este valabilă pentru T apropiat de T_c se poate scrie

$$1 - \frac{T^2}{T_c^2} = \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \left(1 + \frac{T}{T_c} \right) \cong 2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)$$

Din (1.4) și (1.5) se obține $F_n - F_s \sim (T - T_c)^2$; acesta este un rezultat general al teoriei lui Landau pentru tranzițiile de fază de speța a II-a. În relația (1.1) coeficientul $\beta(T)$ este pozitiv și are aproximativ valoarea $\beta(T_c)$, adică

$$\beta(T) \equiv \beta(T_c) \quad (1.5b)$$

Considerăm acum expresia totală a energiei libere (1.1). Dacă scriem $\psi = |\psi| \exp(i\varphi)$, termenii de gradient și de câmp capătă forma

$$\frac{1}{2m^*} [\hbar^2 (\nabla|\psi|)^2 + (\hbar\nabla\varphi - q^* \bar{A})^2 |\psi|^2] \quad (1.8)$$

Primul termen dă energia asociată cu gradientul parametrului de ordonare, ca într-un perete de tranziție dintre o regiune normală și una supraconductoare, iar cel de al doilea termen dă energia cinetică asociată cu supracurentul. În etalonarea London, φ este constant și ultimul termen din (1,8) dă

$$\frac{q^{*2} A^2 |\psi|^2}{2m^*}$$

Egalând acest termen cu densitatea de energie pentru un supraconductor London $A^2/8\pi\lambda^2$, rezultă

$$\lambda^2 = \frac{m^*}{\mu_0 |\psi|^2 q^{*2}} \quad (1.9)$$

Dacă identificăm $|\psi|^2 = n_s$, aceasta coincide cu expresia uzuală a adâncimii de penetrație London. Termenul care reprezintă densitatea de energie cinetică mai poate fi scris sub forma $n_s(m v_s^2/2)$ unde

$$m^* \bar{v}_s = \bar{p}_s - q^* \bar{A} = \hbar\nabla\varphi - q^* \bar{A}$$

Notăm că termenul de energie asociat cu potențialul vector, scris sub forma (1.8) este valabil în aproximația electrodinamicii locale. Expresia generală a energiei libere în vecinătatea tranziției de ordinul al doilea este de forma

$$f = \int_{\Omega} F d\bar{r} \quad (1.10)$$

unde integrala se extinde pe întregul volum Ω și $F(\bar{r})$ este dat de expresia (1.1). Pentru a găsi minimumul energiei libere f relativ la variația parametrului de ordonare ψ și a potențialului vector \bar{A} scriem

$$\delta f = \int d\bar{r} \left\{ \alpha \psi \delta \psi^* + \beta |\psi|^2 \psi \delta \psi^* + \frac{1}{2m^*} [i\hbar\nabla - q^* \bar{A}] \nabla \psi^* [-i\hbar\nabla - q^* \bar{A}] \psi + c \cdot c \right\} + \\ + \int d\bar{r} \left\{ \frac{\bar{H}}{2} \nabla \times \delta \bar{A} - \frac{q^*}{2m^*} \psi \delta \bar{A} [-i\hbar\nabla - q^* \bar{A}] \psi + c \cdot c \right\}$$

unde prin c.c s-a notat expresia complex-conjugată. Efectuând unele transformări și luând integrala de suprafață egală cu zero

$$\int [\delta \psi^* (-i\hbar\nabla - q^* \bar{A}) \psi + c \cdot c] \bar{n} dS = 0 \quad (1.11)$$

unde \bar{n} este versorul normalei la suprafață, se obține

$$\delta f = \int d\bar{r} \left\{ \delta \psi^* \left[\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m^*} (-i\hbar\nabla - q^* \bar{A})^2 \psi \right] + c \cdot c \right\} + \\ + \int d\bar{r} \left\{ \delta \bar{A} \left(\frac{\nabla \times \bar{H}}{2} - \frac{q^{*2}}{2m^*} \psi^* \right) (-i\hbar\nabla - q^* \bar{A}) + c \cdot c \right\}$$

Pentru ca f să fie minim, adică $\delta f = 0$, din această ecuație rezultă ecuațiile Ginzburg-Landau

$$\frac{1}{2m^*} [-i\hbar\nabla - q^* \bar{A}]^2 \psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.12)$$

$$\bar{j} = \nabla \times \bar{H} = \frac{q^* \hbar}{2m^* i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q^{*2}}{m^*} \psi^* \psi \bar{A} \quad (1.13)$$

Ultima ecuație mai poate fi scrisă sub forma

$$\bar{j} = \frac{q^*}{m^*} |\psi|^2 (\hbar \nabla \varphi - q^* \bar{A}) = q^* |\psi|^2 \bar{v}_s \quad (1.13a)$$

Revenind la anularea integralei de suprafață (1.11) notăm că în problemele de calcul variațional aceasta are loc în mod uzual deoarece se consideră că variația este asociată cu condiția suplimentară că la suprafață $\psi^* = 0$ și deci $\delta \psi^* = 0$. Pentru un supraconductor această condiție nu este îndeplinită deoarece ar însemna ca într-un strat subțire să se formeze o undă staționară și temperatura critică să fie funcție oscilatorie de grosimi. De aceea Ginzburg și Landau în lucrarea lor originală au introdus condiția de frontieră

$$\bar{n}(-i\hbar\nabla - q^* \bar{A})\psi = 0 \quad (1.14)$$

pentru a explica anularea integralei de suprafață. Aceasta presupune că impulsul canonic perpendicular pe suprafața de separare a probei față de vid este nul. În absența câmpului (1.14) conduce la interpretarea simplă a anulării derivatei lui ψ normale pe suprafață. Generalizând, condiția de frontieră pentru ecuațiile Ginzburg-Landau este: curentul care trece prin suprafața probei este egal cu zero. Din ec. (1.12) rezultă că această condiție este echivalentă cu

$$\bar{n}(-i\hbar\nabla - q^* \bar{A})\psi = i\lambda\psi \quad (1.15)$$

Din această condiție nu rezultă (1.11). În lucrarea lor originală Ginzburg și Landau au considerat $\lambda = 0$ pentru a fi satisfăcută condiția (1.11). De Gennes [2] a arătat că condiția (1.14) este satisfăcută pentru o interfață supraconductor-izolator iar condiția (1.15) este satisfăcută pentru interfața supraconductor-metal normal.

2.2. Lungimea de coerență și adâncimea de pătrundere

Există unele soluții particulare simple ale ecuațiilor Ginzburg-Landau, pe care le prezentăm în cele ce urmează.

(a) $\psi = 0$, în care caz \bar{A} se determină numai din ec. $\bar{H} = \nabla \times \bar{A}$, și \bar{H} este câmpul magnetic aplicat \bar{H}_a . Această soluție descrie starea normală.

(b) $\psi = \psi_0 = (-\alpha/\beta)^{1/2}$ și $\bar{A} = 0$. Această soluție descrie starea supraconductoare obișnuită, cu efect Meissner ideal, când se neglijează efectele de suprafață. În acord cu (1.3) ψ_0 corespunde minimului energiei libere când $\alpha < 0$, adică atunci când $T < T_c$.

(c) $\psi = \psi_0$ și $\bar{A} \neq 0$, astfel că $\nabla \psi = 0$ și ec. (1.13) se reduce la ecuația lui London

$$\bar{j}_s = -\frac{q^{*2}}{m^*} |\psi_0|^2 \bar{A} = -\frac{n_s q^{*2}}{m^* c} \bar{A} \quad (1.16)$$

Aplicând operatorul rotor acestei ecuații se obține

$$\nabla \times \bar{j}_s = -\frac{q^{*2}}{m^*} \psi_0^2 \bar{H}$$

care este echivalentă cu ecuația London cu adâncimea de penetrație (1.9)

$$\lambda(T) = \left(\frac{m^* c^2}{\mu_0 \psi_0^2 q^{*2}} \right)^{1/2} \quad (1.17)$$

Am introdus astfel o a doua lungime caracteristică $\lambda(T)$, adâncimea de penetrație dependentă de temperatură, care determină domeniul de variație spațială a câmpului magnetic.

Din relațiile (1.3), (1.6 a) și (1.17) se obțin următoarele relații

$$\begin{aligned} \psi_0^2 &= \frac{m^*}{\mu_0 q^{*2} \lambda^2(T)} = \frac{m}{2\mu_0 q^2 \lambda^2(T)} \\ \alpha(T) &= -\frac{q^{*2} \mu_0^2}{m^*} H_c^2(T) \lambda^2(T) = -\frac{2q^2}{m} H_c^2(T) \lambda^2(T) \mu_0^2 \\ \beta(T) &= -\frac{q^{*2}}{m^* \mu_0} H_c^2(T) \lambda^4(T) = -\frac{4q^4}{m^2 \mu_0} H_c^2(T) \lambda^4(T) \end{aligned} \quad (1.18)$$

unde $\lambda(T)$ și $H_c(T)$ sunt mărimi măsurabile și care, de asemenea, se pot calcula pe baza teoriei microscopice. Dacă în relațiile de mai sus introducem relațiile empirice $H_c \sim (1-t^2)$ și $\lambda^{-2} \sim (1-t^4)$ unde $t = T/T_c$ rezultă:

$$\begin{aligned} \psi_0^2 &\sim 1-t^4 \cong 4(1-t) \\ \alpha &\sim \frac{1-t^2}{1+t^2} \cong 1-t \\ \beta &\sim \frac{1}{(1+t^2)^2} \cong \text{const} \end{aligned}$$

deoarece teoria este valabilă numai în apropierea T_c .

(d) $\psi \neq \psi_0$ și $\bar{A} = 0$ care să realizează atunci când câmpul magnetic este suficient de slab. În acest caz este de așteptat ca ψ să varieze foarte lent în apropierea valorii ψ_0 iar domeniul ei de variație poate fi dedus din prima ecuație Ginzburg-Landau presupunând $\bar{A} = 0$. Notând $f = \psi/\psi_0$ obținem următoarea ecuație, unde $\psi_0 = (-\alpha/\beta)^{1/2}$

$$\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0 \quad (1.19)$$

Deoarece f este adimensională, mărimea

$$\xi(T) = \left(\frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha(T)|} \right)^{1/2} \quad (1.19a)$$

are dimensiunea unei lungimi care caracterizează variația cu distanța de la suprafață a lui f (sau ψ). Utilizând condițiile de frontieră $f(0) = 0$ ($\psi(0) = 0$) și $f(\infty) = 1$ ($\psi(\infty) = \psi_0$) soluția ec. (1.19) este de forma,

$$f(x) = \tanh\left(\frac{x}{\xi\sqrt{2}}\right)$$

Lungimea $\xi(T)$ este lungimea de coerență dependentă de temperatură și deoarece $\alpha \sim (T-T_c)$ ea devine infinită la $T-T_c$, când supraconductorul trece în stare normală. Această lungime $\xi(T)$ este diferită de lungimea Pippard ξ_0 introdusă în electrodinamica nelocală deoarece în timp ce

$\xi(T)$ diverge pentru $T \rightarrow T_c$, ξ_0 este constantă. Semnificația lui ξ de lungime caracteristică a lui ψ (sau f) apare evidentă dacă în ec. (1.19)

$$\xi^2(T) \frac{d^2 f}{dx^2} + f - f^3 = 0 \quad (1.20)$$

presupunem $f(x) = 1 + g(x)$ unde $g(x) \ll 1$. Dacă ne oprim la primul ordin al lui g în dezvoltarea în serie, avem

$$\xi^2 g''(x) + (1+g) - (1+g+\dots) = 0$$

de unde

$$g' = \left(\frac{2}{\xi^2} \right) g$$

care prin soluția

$$g(x) \sim e^{\pm \sqrt{2}x/\xi} \quad (1.21)$$

ceea ce arată că o abatere a lui ψ față de ψ_0 va scădea cu o lungime caracteristică de ordinul $\xi(T)$. Substituind valoarea lui (1.18) în (1.19 a) se obține

$$\xi(T) = \frac{\Phi_0}{\pi \sqrt{2} H_c(T) \lambda(T) \mu_0} \quad (1.22)$$

unde $\Phi_0 = hc/2q$ este cuanta de flux magnetic. Din teoria BCS se cunoaște că lungimea de coerență Pippard este corelată cu parametrii intrinseci ai materialului prin relația (1.7.2)

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$$

iar energia de condensare

$$\frac{\mu_0 H_c^2(0)}{2} = \frac{1}{2} N(0) \Delta^2(0)$$

unde $N(0)$, $\Delta(0)$ și $H_c(0)$ reprezintă densitatea de stări, lărgimea benzii interzise și câmpul magnetic critic la OK. Din aceste două relații se obține

$$\Phi_0 = \left(\frac{2}{3} \right)^{1/2} \pi^2 \xi_0 \lambda_L(0) H_c(0) \quad (1.23)$$

Din (1.22) și (1.23) rezultă relația

$$\frac{\xi(T)}{\xi_0} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{H_c(0) \lambda_L(0)}{H_c(T) \lambda(T)} \quad (1.24)$$

$\lambda_L(0)$ este adâncimea de penetrație London la OK. Utilizând relațiile dintre $\lambda(T)$ și $\lambda_L(0)$ obținute în teoria nelocală a lui Pippard pentru supraconductorul pur și, respectiv, pentru supraconductorul cu impurități se obține în apropierea lui T_c

$$\xi(T) = 0,74 \frac{\xi_0}{(1-t)^{1/2}} \quad (1.25a)$$

pentru supraconductorul pur și

$$\xi(T) = 0,855 \frac{(\xi_0 l)^{1/2}}{(1-t)^{1/2}} \quad (1.25b)$$

pentru supraconductorul impur. Valorile precise ale coeficienților au fost determinate utilizând rezultatele exacte ale teoriei BCS la $T = T_c$ și anume

$$H_c(t) = 1,73H_c(O)(1-t)$$

$$\lambda_L(t) = \frac{\lambda_L(O)}{[2(1-t)]^{1/2}} \quad (1.25c)$$

și în cazul impur

$$\lambda(t) = \lambda_L(t) \left(\frac{\xi_0}{1,33l} \right)^{1/2}$$

Relația (1.25 a) care dă pe $\xi(T)$ în supraconductorii puri este valabilă numai într-un domeniu de temperatură extrem de îngust în jurul lui T_c unde este valabilă electrodinamica locală; în afara acestui domeniu ξ depinde de configurația probei. Relația (1.25 b) în supraconductorii impuri este valabilă pe un domeniu mai larg de temperatură deoarece aproximația locală se menține.

2.3. Condițiile de aplicabilitate ale teoriei Ginzburg-Landau

În teoria sa asupra tranzițiilor de ordinul al II-lea, Landau presupune că energia liberă poate fi dezvoltată în serie după puterile lui $|\psi|$ unde coeficienții α și β sunt definiți prin relațiile (1.5 a) și (1.5 b). În general această presupunere nu este valabilă mai ales în cazul efectelor de ordine de scurtă distanță, însă se poate arăta teoretic că ele sunt valabile în cazul supraconductorilor.

O altă condiție de valabilitate a ecuațiilor Ginzburg-Landau este aceea că ψ trebuie să fie o funcție lent variabilă pe o distanță de ordinul ξ_0 și prin urmare, este necesar ca

$$\xi(T) \gg \xi_0 \quad (3.1)$$

Gorkov [2] a dedus ecuațiile Ginzburg-Landau din teoria microscopică cu următoarele valori ale parametrilor α și β

$$\alpha = 1,83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{T - T_c}{T_c}$$

$$\beta = 0,35 \frac{1}{N(O)} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\xi_0^2} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{kT_c} \right)^2 \quad (3.2)$$

Din (1.19 a) și (3.2) rezultă relația (1.25 a) și condiția (3.1) este echivalentă cu

$$\frac{T_c - T}{T_c} \ll 1 \quad (3.3)$$

adică la câmp magnetic zero temperatura trebuie să fie foarte apropiată de temperatura critică.

Ecuațiile Ginzburg-Landau dau o relație locală între curent și potențialul vector. În acest caz curentul într-un punct este determinat de valoarea câmpului în același punct, adică relația între curent și câmp este o relație locală. Aproximația locală este valabilă numai dacă \vec{H} și \vec{A} sunt funcții variabile pe distanțe de ordinul ξ_0 . Această condiție se exprimă prin relația

$$\lambda(T) \gg \xi_0 \quad (3.4)$$

Comparând expresia (1.9) a lui $\lambda(T)$ cu adâncimea de penetrație London (1.7.10) la OK în care substituim

$$n_s = \frac{1}{3\pi^2} \left[\frac{2m}{\hbar^2} F \right]^{3/2} = \frac{2mv_F^2}{3} N(O)$$

precum și valorile (3.2) ale lui α și β se obține relația (1.25 c). Introducând această relație în (3.4) se obține condiția

$$\frac{T_c - T}{T_c} \ll \left[\frac{\lambda_L(O)}{\xi_0} \right]^2 \quad (3.5)$$

ceea ce impune din nou condiția ca T să fie foarte apropiat de T_c . Se pot considera două cazuri. Dacă $\lambda_L(O) \ll \xi_0$, supraconductorul este de speța I și limitarea mai drastică este dată de (3.5). Dacă $\lambda_L(O) \gg \xi_0$, supraconductorul este de speța a II-a și limitarea mai drastică este dată de (3.3); teoria este valabilă pe un interval de temperatură mult mai larg decât în cazul supraconductorilor de speța I. Teoria Ginzburg-Landau poate fi utilizată pentru a descrie supraconductibilitatea atât a supraconductorilor de speța I cât și a celor de speța a II-a pentru T apropiat de T_c . Se definește parametrul adimensional Ginzburg-Landau

$$\kappa(T) = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} \quad (3.6)$$

care rămâne finit pentru $T \rightarrow T_c$ deși $\lambda(T)$ și $\xi(T)$ în acord cu teoria lui Gorkov variază cu $(T_c - T)^{1/2}$ pentru $T \rightarrow T_c$. Utilizând relația (1.22) pentru $\xi(T)$ se poate scrie

$$\kappa(T) = \frac{\sqrt{2}\pi H_c(T) \lambda^2(T) \mu_0}{\Phi_0} \quad (3.7)$$

Se observă că se poate determina $\kappa(T)$ prin măsurarea lui $\lambda(T)$ la câmp magnetic slab și a câmpului magnetic critic termodinamic $H_c(T)$. Utilizând rezultatele numerice de mai sus se obține în apropierea lui T_c

$$\kappa = 0,96 \frac{\lambda_L(O)}{\xi_0} \quad (3.8)$$

pentru supraconductorul pur și

$$\kappa = 0,715 \frac{\lambda_L(O)}{l} \quad (3.9)$$

pentru supraconductorul impur. Așa cum vom discuta în detaliu în capitolul următor, $\kappa(T)$ poate fi utilizat pentru a face distincție între supraconductorii de speța I și supraconductorii de speța a II-a.

2.4 Energia de suprafață

Considerăm o regiune supraconductoare învecinată cu o regiune normală. Această situație poate apare de exemplu, într-un supraconductor situat într-un câmp magnetic de intensitate H_c . Fluxul magnetic penetrează pe distanța λ în regiunea supraconductoare și în acord cu conceptul de coerență în această regiune numărul de perechi n_s pe unitatea de volum crește lent pe o distanță egală cu lungimea de coerență ξ (Fig. 2.2). Să evaluăm energia liberă la frontieră. Dacă frontiera este stabilă, regiunile normală și supraconductoare trebuie să fie în echilibru, adică energia lor liberă pe unitatea de volum trebuie să fie aceeași. Există două contribuții care modifică energia liberă a stării supraconductoare față de regiunea normală.

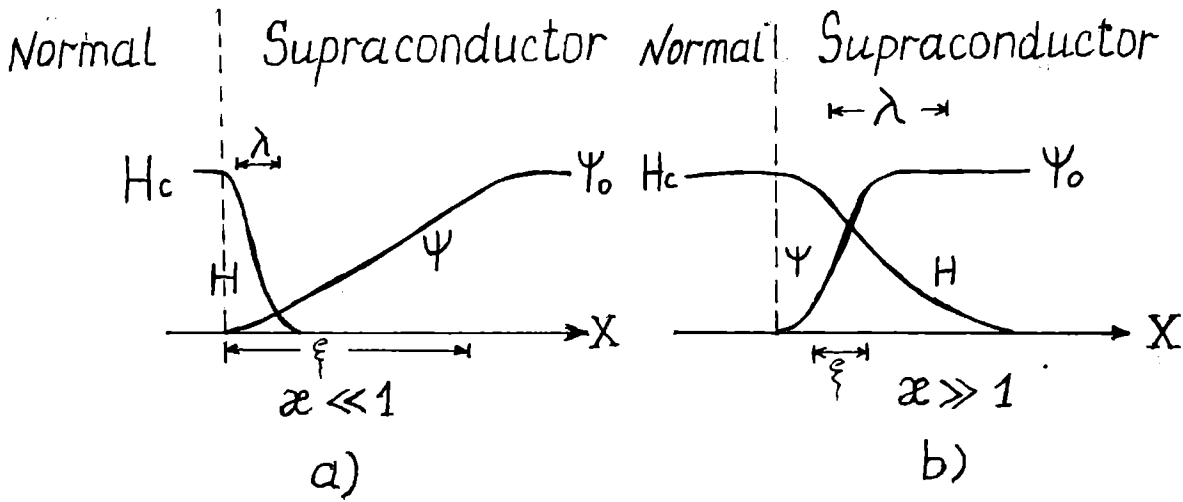


Fig. 2.2.

Datorită prezenței perechilor densitatea de energie a stării supraconductoare se micșorează cu $F_n - F_s$ și în plus, deoarece regiunea supraconductoare a căpătat o magnetizare care anulează fluxul în interior, există o contribuție „magnetică” pozitivă $H_c^2/8\pi$ la densitatea de energie liberă. La echilibru $H_c^2/8\pi = F_n - F_s$, astfel că în regiunea supraconductoare cele două contribuții se anulează și densitatea de energie liberă este aceeași ca și în regiunea normală învecinată. Totuși, la frontieră gradul de ordonare (adică numărul de perechi) crește gradat pe o distanță ξ , astfel că scăderea energiei libere datorită creșterii ordonării, are loc pe această distanță. Pe de altă parte, contribuția magnetică la energia liberă, crește pe o distanță de ordinul adâncimii de penetrație λ . În general, ξ și λ nu au aceeași valoare, astfel că cele două contribuții nu se anulează lângă frontieră. Dacă $\xi > \lambda$, energia liberă totală crește la suprafață, adică există o energie de suprafață pozitivă $\sigma_s = H_c^2 (\xi - \lambda)/8\pi$ pe unitatea de suprafață. Dacă $\xi < \lambda$ energia de suprafață este negativă.

Vom prezenta în continuare rezultatele calculului energiei de suprafață utilizând teoria Ginzburg-Landau. Să considerăm o probă infinită în care sunt satisfăcute următoarele condiții la frontiere: la $x = -\infty$ proba se află în stare normală și $\psi = 0$, iar $H = H_c$; la $x = +\infty$ proba se află în stare supraconductoare, $\psi = \psi_0$ și $H = 0$. La interfață, parametrul de ordine ψ și câmpul H vor varia gradual și va apare o barieră. Energia de suprafață (mai bine zis, în acest caz de interfață) va fi diferența dintre energia liberă a acestui sistem în câmp magnetic și energia liberă în absența câmpului. Energia liberă în câmp magnetic

$$G_{sH} = \mathcal{F}_{sH} - \mu_0 H H_c$$

unde

$$\mathcal{F}_{sH} = \int dv \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} |(-i\hbar\nabla - q^* \vec{A})\psi|^2 + \frac{\mu_0 H^2}{2} + \mathcal{F}_m \right\}$$

iar termenul $-H H_c/4\pi$ reprezintă lucrul mecanic efectuat de generator la câmp constant H_c . Energia de suprafață pe unitatea de arie este dată de expresia

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\mathcal{F}_{sH} - \mathcal{F}_{s0} - \mu_0 H H_c}{S} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar\nabla}{i} - q^* \vec{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mu_0 (H - H_c)^2}{2} \right\} dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

unde am utilizat relația $F_{no} - F_{so} = H_c^2/8\pi$; F_{so} este energia liberă a sistemului în absența H . Această relație poate fi simplificată. Dacă înmulțim ec. (1.12) cu ψ^* și integrăm după toate valorile lui ξ , prin părți, se obține relația

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar \nabla}{i} - q^* \bar{A} \right) \psi \right|^2 \right] dx = 0$$

Scăzând această identitate din (4.1) se obține

$$\sigma_s = \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\mu_0 (H - H_c)^2}{2} \right] dx \quad (4.2)$$

În unele cazuri se definește parametrul δ prin identitatea

$$\sigma_s = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \delta$$

Având în vedere (4.2) și (1.18) se obține expresia lui δ , care reprezintă o lungime

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{H}{H_c} \right)^2 - \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^4 \right] dx \quad (4.3)$$

Pentru a rezolva această integrală este necesar să substituim valorile lui H și ψ obținute din ecuațiile Ginzburg-Landau. În cazul general se utilizează soluțiile numerice ale lui H și ψ pentru a calcula această integrală. Soluții analitice se pot obține în următoarele două cazuri limită:

(a) cazul $\kappa \ll 1$

$$\delta = \frac{4\sqrt{2}}{3} \xi = 1,89\xi \quad (4.4)$$

(b) cazul $\kappa \gg 1$

$$\delta = -\frac{8(\sqrt{2}-1)\lambda}{3} = -1,104\lambda \quad (4.5)$$

În cazul $\kappa \ll 1$, adică $\lambda(T) \ll \xi(T)$ energia de suprafață este pozitivă. Acesta este cazul supraconductorilor de speța I. În cazul $\kappa \gg 1$, $\lambda(T) \gg \xi(T)$ energia de suprafață este negativă. Acesta reprezintă cazul supraconductorilor de speța a II-a.

Pentru a defini frontiera dintre supraconductorii de speța I și supraconductorii de speța a II-a trebuie să găsim valoarea lui κ care corespunde energiei de suprafață egală cu zero. Integrala (4.3) este egală cu zero dacă

$$\frac{H}{H_c} = 1 - \left(\frac{\psi}{\psi_0} \right)^2 \quad (4.6)$$

Calculul numeric arată că această condiție corespunde valorii lui $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Prin urmare, dacă $\kappa < 1/\sqrt{2}$, energia de suprafață (mai binezis de interfață sau a peretelui) este pozitivă și supraconductorul este de speța I; dacă $\kappa > 1/\sqrt{2}$, energia de suprafață este negativă și supraconductorul este de speța a II-a. Deoarece în supraconductorii de speța a II-a energia asociată interferenței dintre starea normală și starea supraconductoare este negativă este favorabil din punct de vedere energetic ca în prezența unui câmp magnetic acești supraconductori să se dividă într-un mare număr de regiuni normale și supraconductoare (starea mixtă). În acest caz este importantă contribuția energiei de interferență la energia liberă a sistemului. Dimpotrivă, în supraconductorii de speța I divizarea probei în regiuni normale și regiuni supraconductoare nu este favorizată deoarece energia de suprafață este pozitivă. Această diviziune are loc numai

atunci când proba are o anumită formă, cu un coeficient n de demagnetizare, astfel că este satisfăcută condiția

$$(1-n)H_c < H < H_c$$

În supraconductorii de speța I, această stare în care coexistă regiuni normale și regiuni supraconductoare se numește stare intermediară (§ 1.5.3). În Fig. 2.2 a este reprezentată dependența de distanța x a lui H și ψ la interfața regiune normală - regiune supraconductoare într-un supraconductor de speța I, cazul $\kappa \ll 1$, iar în Fig. 2.2 b este reprezentată aceeași dependență într-un supraconductor de speța a II-a, cazul $\kappa \gg 1$.

2.5. Curentul electric într-un fir sau într-un strat subțire.

Pentru $|\psi| = \psi_0$, care reprezintă valoarea lui $\psi(x)$ pentru $x \rightarrow \infty$, teoria Ginzburg-Landau se reduce la teoria lui London. Un caz particular interesant al aplicației teoriei Ginzburg-Landau este acela în care câmpul magnetic sau curentul intens modifică $|\psi|$ de la valoarea ψ_0 , însă $|\psi|$ păstrează aceeași valoare în întreg domeniul considerat. Așa stau lucrurile într-un fir subțire sau într-un strat subțire de grosime $d \ll \xi(T)$, în care un câmp magnetic aplicat este orientat astfel încât produce o modificare a lui ψ în întregul volum. Dacă această variație este mare, atunci la energia liberă aduce contribuția mare termenul proporțional cu $(\nabla|\psi|)^2$. În acest caz se poate aproxima $\psi(r)$ cu $|\psi|\exp(i\varphi(r))$ unde $|\psi|$ este constant și densitatea de curent și energia liberă au forma simplă

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= \frac{q^*}{m^*} |\psi|^2 (\hbar \nabla \varphi - q^* \vec{A}) = q^* |\psi|^2 n_s \\ F &= F_{no} + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + |\psi|^2 \frac{1}{2} m^* v_s^2 + \frac{\mu_0 H^2}{2} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Presupunem ce densitatea de curent prin probă este constantă. Energia totală datorată termenului magnetic, $H^2/8\pi$ este mult mai mică decât energia cinetică a curentului electric cu un factor egal cu raportul dintre aria secțiunii transversale a probei și λ^2 astfel că pentru o probă foarte subțire energia câmpului magnetic poate fi neglijată. Neglijăm în expresia energiei libere termenul datorat câmpului magnetic, efectuăm minimumul energiei în raport cu $|\psi|^2$ pentru un v_s dat și găsim valoarea optimă a lui $|\psi|^2$

$$|\psi|^2 = \psi_0^2 \left(1 - \frac{m^* v_s^2}{2|\alpha|} \right) = \psi_0^2 \left[1 - \left(\frac{\xi m^* v_s}{\hbar} \right)^2 \right] \quad (5.2)$$

iar curentul minim corespunzător este

$$j_s = q^* \psi_0^2 \left(1 - \frac{m^* v_s^2}{2|\alpha|} \right) v_s \quad (5.3)$$

Dependența lui $|\psi|^2$ și a lui j_s de viteza perechilor de electrini este reprezentată în Fig. 2.3. Curentul are un maxim când $dl_s/dv_s = 0$ care corespunde condițiilor

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m^* v_s^2 &= \frac{|\alpha|}{3} \\ \frac{|\psi|^2}{\psi_0^2} &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

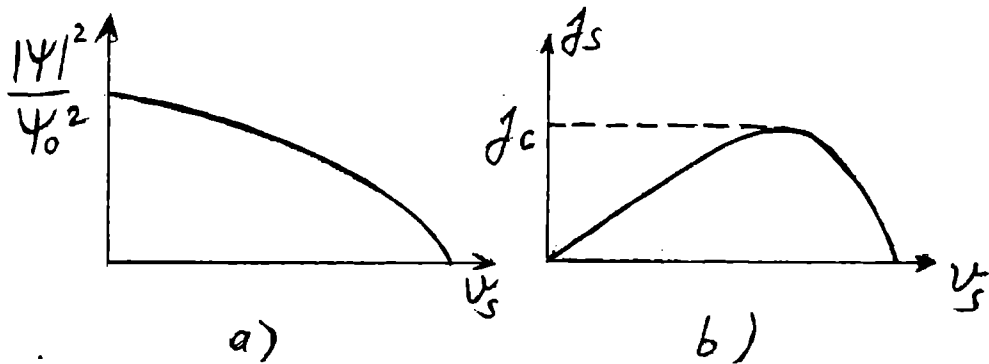


Fig. 2.3.

Curentul maxim este curentul critic și are valoare

$$j_s = q * \psi_0^2 \frac{2}{3} \left(\frac{2 |\alpha|}{3 m^*} \right)^{1/2} = \frac{c H_c(T)}{3 \sqrt{6} \pi \lambda(T)} \quad (5.5)$$

În apropierea lui T_c curentul critic depinde de temperatură după legea $(i-t)^{3/2}$. Impulsul critic corespunzător are valoarea

$$p_c = m^* v_c = \frac{\hbar}{\sqrt{3} \xi(T)} \quad (5.6)$$

Expresia (5.5) reprezintă curentul critic obținut în teoria Ginzburg-Landau. Pentru a găsi expresia curentului critic în teoria lui London egalăm energia cinetică cu energia de condensare

$$\frac{1}{2} n_s m^* v_s^2 = \frac{\mu_0}{2} \lambda^2 j_s^2 = \frac{\mu_0 H_c^2}{2}$$

și rezultă

$$j_c = \frac{c H_c}{4 \pi \lambda} \quad (\text{în CGS})$$

$$j_c = \frac{H_c}{\lambda} \quad (\text{în SI})$$

Acest curent este de $3\sqrt{6}/4 = 1.84$ ori mai mare decât curentul obținut (mai exact) în teoria GL (5.5) deoarece în teoria lui London nu se ia în considerare scăderea lui $|\psi|^2$ cu creșterea curentului. Curentul critic obținut experimental are valoare mult mai mică decât cel dat de expresia (5.5) deoarece este dificil să se obțină straturi subțiri de grosime și structură uniforme și, de asemenea, densitatea de curent prin probă în prezența câmpului magnetic este neuniformă. Neuniformitatea densității de curent se datorează faptului că fluxul magnetic extern este mai mare la marginile probei, unde supracurentul poate să dispară. Pentru a minimaliza aceste efecte se poate proceda astfel:

a) Se realizează un strat atât de subțire, încât produsul dintre grosimea d și lățimea w ale sale să fie mai mic decât λ^2 ; în acest caz j_s este aproximativ uniform chiar dacă $w > \lambda$.

b) Se utilizează o geometrie plană în care stratul subțire de studiat se depune pe un substrat supraconductor mai gros, fiind izolat de acesta printr-un strat izolator subțire. Stratul supraconductor forțează liniile de câmp să fie paralele cu stratul subțire supraconductor și deci densitatea de curent să fie uniformă.

c) Se utilizează un strat subțire de formă cilindrică în care densitatea de curent este uniformă. În aceste trei cazuri curentul critic obținut experimental diferă cu cel mult 10% de valoarea sa teoretică. Teoria poate fi verificată mai exact prin măsurători de efect tunel, care

permit determinarea lărgirii benzii interzise pentru $j < j_c$. În acord cu ecuația (5.2) $|\psi|$ și deci Δ descrește la curenți mici ca $(1-j^2)$ și la curenți mai mari are o dependență mai complicată. Această descreștere a fost pusă în evidență prin măsurarea conductanței diferențiale la tensiune zero și prin măsurarea densității de stări.

2.6. Cuantificarea fluxului magnetic

În 1950 F. London a arătat că fluxul captat de către un inel supraconductor este cuantificat. Aceasta este o particularitate foarte interesantă a stării supraconductoare.

Să considerăm un inel supraconductor sau un supraconductor care conține o regiune normală (Fig. 2.4) ori un cilindru supraconductor gol. Considerăm în inel un contur închis Γ reprezentat în figură prin curba punctată.

Cuantificarea fluxului poate fi pusă în evidență pe două căi. Prima cale constă în aplicarea regulii de cuantificare Bohr-Sommerfeld pentru perechile de electroni care se deplasează pe conturul închis în jurul regiunii normale. Această condiție se aplică în acest caz unei orbite macroscopice staționare, pe care perechile de electroni nu câștigă și nu pierd energie.

O a doua cale se bazează pe faptul că funcția de undă a perechilor de electroni trebuie să fie univocă de-a lungul oricărui drum închis care înconjoară regiunea normală, adică în fiecare punct la orice moment de timp trebuie să aibă o singură valoare. Aceasta înseamnă că variația fazei de-a lungul unui contur închis trebuie să fie egală cu $2\pi n$ unde este un număr întreg. Cele două căi sunt echivalente. Le prezentăm în cele ce urmează. Condiția de cuantificare Bohr-Sommerfeld se scrie

$$\oint \vec{p}_s \cdot d\vec{l} = 2\pi n \hbar = nh \quad (6.1)$$

Exprimăm viteza medie din densitatea curentului electric prin impulsul generalizat în câmp magnetic,

$$\vec{j}_s = nsq^* \vec{v}_s = nsq^* \frac{1}{m^*} (\vec{p}_s - q^* \vec{A})$$

Rezultă impulsul mediu

$$\vec{p}_s = q^* \left(\frac{m^*}{n_s q^{*2}} \vec{j}_s + \vec{A} \right)$$

Substituind valoarea lui \vec{p}_s în (6.1) se obține

$$\oint \frac{m^*}{n_s q^{*2}} \vec{j}_s \cdot d\vec{l} + \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \frac{nh}{q^*} \quad (6.2)$$

Având în vedere că

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{H} \cdot d\vec{S} = \overline{\Phi}$$

este fluxul magnetic, rezultă

$$\overline{\Phi} = \frac{m^*}{n_s q^{*2}} \oint_{\Gamma} \vec{j}_s \cdot d\vec{l} + \overline{\Phi} = \frac{nh}{q^*} \quad (6.3)$$

Partea stângă a acestei expresii a fost numită de către London fluxoidul limitat de către conturul

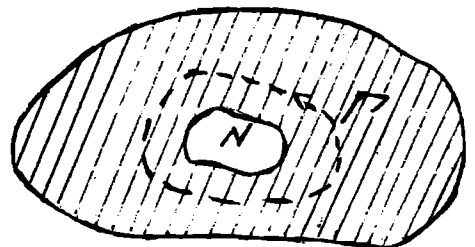


Fig. 2.4.

închis Γ . Prin urmare, fluxoidul este o mărime cuantificată exprimându-se printr-un număr întreg de cuante $\Phi_0 = hc/q^*$, care se numesc fluxoni

$$\Phi_0 = \frac{h}{q^*} = \frac{h}{2q} = 2 \times 10^{-7} \text{ G} \cdot \text{cm}^2 = 2 \times 10^{-15} \text{ Wb}$$

Din (6.3) se vede că în general $\tilde{\Phi} \neq \Phi$, adică fluxoidul $\tilde{\Phi}$ este diferit de fluxul magnetic Φ . Dacă conturul Γ se află față de regiunea normală la o distanță mare în comparație cu adâncimea de penetrație London, atunci curentul j_s scade rapid și fluxoidul devine egal cu fluxul magnetic. De aceea în locul propoziției reguroase „cuantificarea fluxoidului” se utilizează propoziția „cuantificarea fluxului”. Se poate scrie deci

$$\oint \vec{A} d\vec{l} = \Phi = n\Phi_0$$

atunci când $\vec{j}_s = 0$ sau \vec{j}_s este ortogonal cu $d\vec{l}$.

Utilizând a doua cale de demonstrație a cuantificării fluxului, scriem ecuația Ginzburg-Landau (5.1) sub forma

$$\vec{A} = -\frac{m^*}{q^{*2} |\psi|^2} \vec{j} + \frac{\hbar}{q^*} \nabla \varphi$$

Calculăm integrala liniară de-a lungul conturului

$$\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = -\frac{m^*}{q^{*2}} \int_{\Gamma} \frac{\vec{j}}{|\psi|^2} \cdot d\vec{l} + \frac{c\hbar}{q^*} \int_{\Gamma} \nabla \varphi d\vec{l}$$

și substituind $|\psi|^2 = n_s$, găsim rezultatul anterior având în vedere că $\int \nabla \varphi \cdot d\vec{l} = 2\pi n$, adică faza parametrului ψ variază cu $2\pi n$ la parcurgerea înrtegului contur Γ deoarece ψ este funcție univocă.

Cuantificarea fluxului a fost pusă în evidență în anul 1961 de către Faibank și de către Doll și Nobauer care au măsurat și cuanta de flux și au estimat sarcina electrică asociată fluxonului $q^* = 2q$, sarcina perechii Cooper.

În supraconductorul de speța I simplu conex (fără găuri) efectul Meissner este perfect și $n = 0$. Cuantificarea poate fi observată în supraconductorul de speța I multiplu conex, de exemplu, un inel (cu o singură gaură) este dublu conex. După ce este îndepărtat câmpul magnetic aplicat în inel rămâne captat fluxul egal cu $n\Phi_0$. (Menționăm că spre deosebire de cazul electronilor din atomi care se mișcă pe orbite staționare, pentru electronii normali (de conducție) din metal nu se poate vorbi de orbite staționare și impuls p care să nu se modifice pe distanță microscopică.)

Spre deosebire de supraconductorii de speța I, în supraconductorii de speța a II-a este de așteptat ca cuantificarea fluxului să existe chiar în geometria simplu conexă deoarece în starea mixtă regiunile supraconductoare înconjură regiuni în care câmpul penetrează și se formează un sistem de filamente de flux magnetic, multipluconex.

Cuantificarea fluxoidului în supraconductorii de speța I a fost pusă în evidență prin experiența Little-Parks [3]. Această experiență se desfășoară astfel. Se construiește un cilindru cu pereți subțiri de exemplu prin evaporarea unui strat subțire de staniu în jurul unui filament dintr-un material organic cu diametrul de $1 \mu\text{m}$. Se aplică un câmp magnetic H_a în direcția generatoarei cilindrului. Notând cu r generatoarea cilindrului fluxul prin cilindru este $\Phi = \pi r^2 H_a$. Utilizând expresia (6.3) cu $\tilde{\Phi} = n\Phi_0$ se obține viteza perechilor de electroni

$$v_s = \frac{\hbar}{m^* r} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \quad (6.4)$$

unde s-a utilizat ecuația

$$\frac{m^*}{n_s q^*} \oint_{\Gamma} \vec{j}_s \cdot d\vec{l} = \frac{m^*}{q^*} \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{m^*}{q^*} v_s \cdot 2\pi r$$

Așa cum se reprezintă în Fig. 2.5 v_s este funcție periodică de Φ/Φ_0 . Pe figură sunt prezentate și valorile corespunzătoare ale lui n (număr întreg sau zero) care se obțin din valoarea minimă a lui v_s pentru un Φ impus de un H dat în (6.4). De exemplu pentru $\Phi < \Phi_0$, $n = 0$, pentru $\Phi_0 < \Phi < 2\Phi_0$, $n_{\text{minim}} = 1$, etc. Cunoscând v_s , din (5.2) se poate determina $|\psi|^2$. Tranziția de fază are loc atunci când $|\psi|^2 = 0$, adică atunci când

$$\frac{1}{\xi^2} = \left(\frac{m^* v_s}{\hbar} \right)^2 = \frac{1}{r^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

Utilizând expresiile (1.25) care dau dependența lui $\xi^2(T)$ se poate scrie micșorarea lui T_c datorită acțiunii câmpului magnetic sub forma

$$\frac{\Delta T_c(H)}{T_c} = 0,55 \frac{\xi_0^2}{r^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

în supraconductorul pur și

$$\frac{\Delta T_c(H)}{T_c} = 0,74 \frac{\xi_0 l}{r^2} \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

în supraconductorul impur. Scăderea maximă a lui T_c are loc pentru

$$n - \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{1}{2}$$

și are valorile

$$\frac{\Delta T_c}{T_c} = 0,14 \frac{\xi_0^2}{r^2}$$

în supraconductorul pur și

$$\frac{\Delta T_c}{T_c} = 0,18 \frac{\xi_0 l}{r^2}$$

în supraconductorul impur. Pentru un strat subțire cilindric din staniu cu raza $r = 7 \times 10^{-5}$ cm, $\xi_0 = 2 \times 10^{-5}$ cm, $l = 10^{-6}$ cm se obține $(\Delta T_c)_{\text{max}} \sim 0,8 \times 10^{-3} T_c = 3 \times 10^{-3}$ K, valoare ce poate fi măsurată. Pentru această valoare a lui r , periodicitatea câmpului magnetic este $\Phi_0/\pi r^2 = 14$ G. Rezistența stratului subțire variază periodic cu variația lui H . Scăderea lui T_c și deci creșterea rezistenței în experiența Little-Parks este

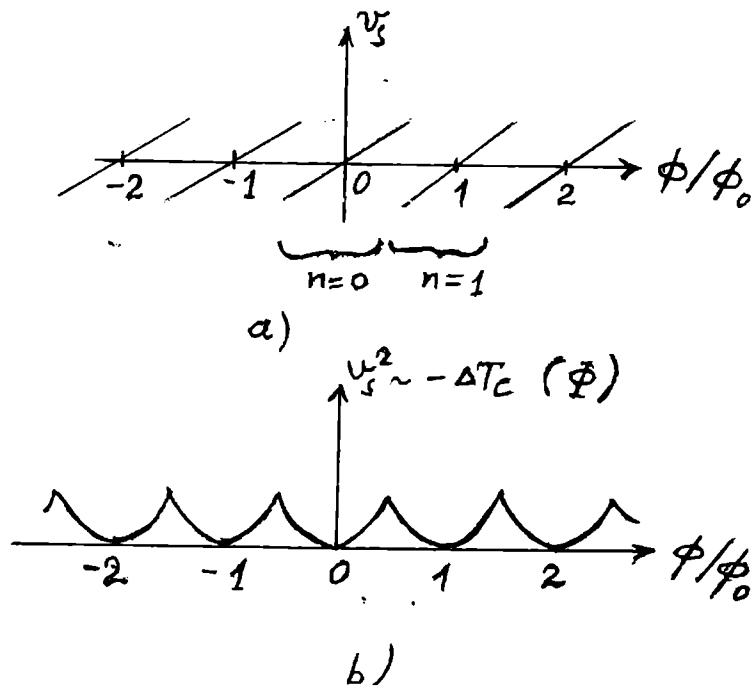


Fig. 2.5.

proporțională cu v_s^2 și deci arată ca în Fig. 2.5 b. Dacă dorim să convertim $\Delta R(H)$ în $\Delta T_c(H)$ trebuie să măsurăm dR/dT în regiunea de tranziție.

2.7. Nucleația în supraconductorii masivi. câmpul de nucleație H_{c2}

Să considerăm un supraconductor situat într-un câmp magnetic extern. Pentru o valoare mare a lui H_a supraconductibilitatea dispare și câmpul magnetic pătrunde uniform în întreaga probă. Cu scăderea câmpului H_a , la o anumită valoare H_{c2} , care este diferită de valoarea câmpului critic termodinamic H_c definit de relația (1.6 a), apare nucleația stării supraconductoare în volumul probei. Pentru a evalua valoarea lui H_{c2} , notăm că în apropierea acestei valori parametrul de ordonare ψ are modulul foarte mic și ec. GL(1.12) poate fi linearizată și devine

$$\left(-i\nabla - \frac{2\pi\vec{A}}{\Phi_0}\right)^2 \psi = -\frac{2m^* \alpha}{\hbar^2} \psi \equiv \frac{\psi}{\xi^2(T)} \quad (7.1)$$

Să considerăm o probă masivă situată într-un câmp $H_a \equiv \frac{B_a}{\mu_0}$ orientat după axa z și alegem $A_y = B_a x$. Ecuația de mai sus devine

$$\left[-\nabla^2 + \frac{4\pi i}{\Phi_0} A_a x \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{2\pi B_a}{\Phi_0}\right)^2 x^2\right] \psi = \frac{1}{\xi^2} \psi \quad (7.2)$$

Deoarece energia potențială efectivă depinde numai de x , soluția acestei ecuații este de forma

$$\psi = e^{ik_y y} e^{ik_z z} f(x) \quad (7.2a)$$

Substituind această soluție în ec. (7.2) se obține

$$-f''(x) + \left(\frac{2\pi B_a}{\Phi_0}\right)^2 (x - x_0)^2 f = \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right) f \quad (7.3)$$

unde am notat $x_0 = k_y \Phi_0 / 2\pi H_a$. Factorul $\exp(ik_y y)$ care apare în ψ determină numai o deplasare a minimumului energiei potențiale afective cu valoarea x_0 . Ec. (7.3) este ecuația oscilatorului și are valorile proprii

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_c = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{q^* B_a}{m^*}$$

Pe de altă parte din (7.3) (multiplicată cu $\hbar^2/2m^*$) rezultă

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right)$$

Din aceste ultime două relații se obține

$$B_a = \frac{\Phi_0}{2\pi(2n+1)} \left(\frac{1}{\xi^2} - k_z^2\right)$$

Ha are valoarea maximă pentru $k_z = 0$ și $n = 0$. Această valoare se notează cu $H_{c2} \equiv B_{c2}/\mu_0$

$$B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2(T)} \quad (7.4)$$

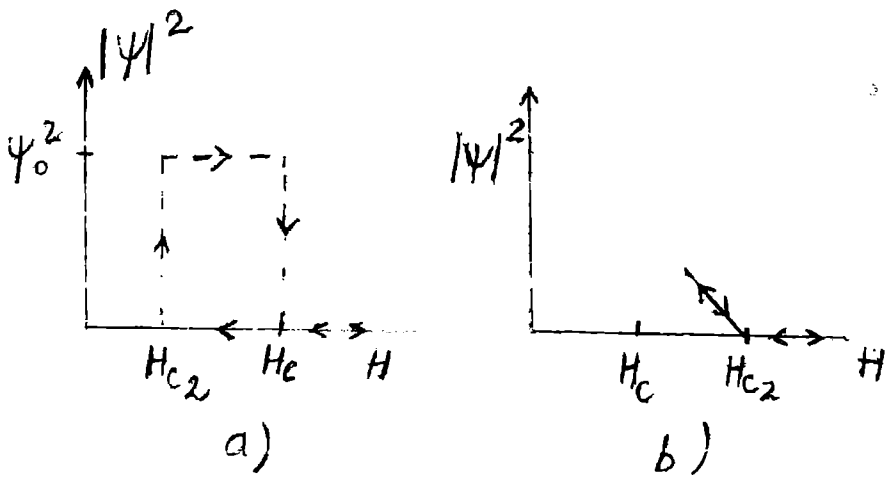


Fig. 2.6.

Ea reprezintă cea mai mare valoare a câmpului la care apare supraconductibilitatea într-o probă masivă situată într-un câmp magnetic exterior descrescător. Funcția proprie corespunzătoare a ec. (7.3) este

$$f(x) = \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\xi^2}\right] \quad (7.5)$$

ceea ce se poate verifica prin substituție. Utilizând expresiile (1.22) și (3.6) în (7.6) se obține o relație între câmpul critic H_{c2} și câmpul critic termodinamic H_c ,

$$B_{c2} = \frac{4\pi\lambda^2 B_c^2}{\Phi_0} = \sqrt{2}\kappa B_c \quad (7.6)$$

Din această relație reiese că valoarea $\kappa = 1/\sqrt{2}$ separă supraconductorii de speța a II-a care au $H_{c2} > H_c$ de supraconductorii de speța I care au $H_{c2} < H_c$. În Fig. 2.6 reprezentată dependența de H a parametrului de ordonare. Se observă comportarea de histerzis la supraconductorii de speța I (Fig. 2.6 a) și comportarea reversibilă la supraconductorii de speța a II-a (Fig. 2.6.b). Inegalitatea de mai sus exprimă semnificația de câmp de nucleație a lui H_{c2} . Cu micșorarea câmpului supraconductorii de speța a II-a trec în starea supraconductoare la $H_{c2} > H_c$; $|\psi|^2$ crește continuu de la valoarea zero și tranziția de fază este de speța a II-a. Dimpotrivă, cu scăderea lui H supraconductorul de speța I se suprarăcește rămânând în stare normală chiar sub H_c până când se atinge valoarea $H_{c2} < H_c$. În acest punct are loc nucleația stării supraconductoare, urmată de o tranziție discontinuă și ireversibilă a lui $|\psi|^2$ la ψ_0^2 . Datorită defectelor, suprarăcirea poate să se mențină până la valori ale lui H mai mici decât valoarea teoretică H_{c2} .

2.8. Nucleația la suprafață. Câmpul de nucleație H_{c3} .

2.8.1. Supraconductibilitatea de suprafață

S-a observat experimental că chiar dacă câmpul magnetic depășește valoarea H_{c2} , valoarea de la care materialul supraconductor ar trebui să se găsească în stare normală, prin aceasta continuă să circule un curent supraconductor până când câmpul magnetic atinge o valoare $H_{c3} = 1,7 H_{c2}$, de la care dispare complet. Această anomalie se manifestă atât în supraconductorii perfect puri și omogeni cât și în cei impuri și se datorează persistenței supraconductibilității într-un strat de lângă supraconductorul în contact cu un izolator (inclusiv cu vidul) chiar dacă

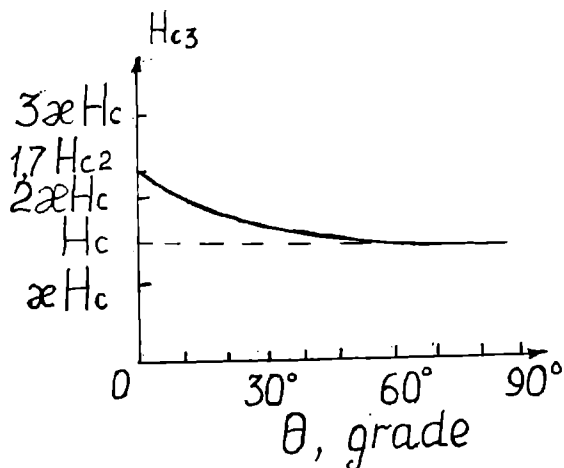


Fig. 2.7.

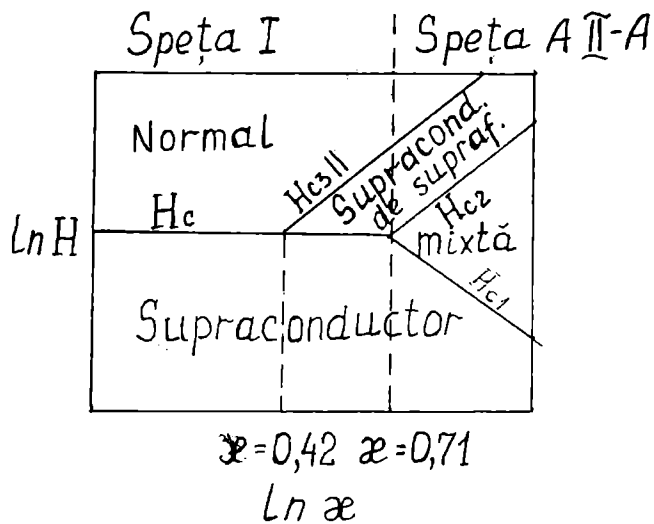


Fig. 2.8.

câmpul magnetic a atins intensitatea suficientă pentru ca volumul supraconductorului să treacă în stare normală [4]. Stratul supraconductor de suprafață există în materialele pentru care parametrul κ este mai mare decât 0,42. Întrucât în supraconductorii de speța a II-a $\kappa > 0,71$, efectul apare în aceștia precum și în supraconductorii de speța I cu $\kappa > 0,42$ (Reamintim că în supraconductorii de speța I, $\kappa < 0,71$). Valoarea celui de al treilea câmp critic H_{c3} la care dispare și supraconductibilitatea de suprafață depinde de unghiul pe care-l face câmpul magnetic extern cu suprafața. Ea este maximă atunci când câmpul magnetic aplicat este paralel cu suprafața; această valoare maximă este $H_{c3} = 2,4\kappa H_c = (1/0,42)\kappa H_c$ și este egală cu $1,7 H_{c2}$ pentru supraconductorul de speța a II-a. Cu creșterea unghiului dintre câmpul aplicat și suprafața H_{c3} scade și atinge valoarea minimă $H_{c3} = \sqrt{2}\kappa H_c$ (egală cu H_{c2} pentru supraconductorul de speța a II-a) atunci când câmpul magnetic este perpendicular pe suprafață (Fig. 2.7). În Fig. 2.8 este reprezentată diagrama caracteristicilor supraconductorilor în funcție de parametrul κ . Pentru $\kappa < 0,42$ supraconductorul este de speța I și se găsește în stare supraconductoare dacă câmpul aplicat are valoarea mai mică decât câmpul critic termodinamic H_c și în stare normală pentru $H_a > H_c$. Pentru $\kappa > 0,42$ există un strat supraconductor subțire de suprafață până la o valoare a câmpului egală cu H_{c3} . Pentru $\kappa > 0,71$ supraconductorul este de speța a II-a și poate exista în următoarele patru stări posibile: supraconductoare, mixtă, normală, cu supraconductibilitate de suprafață și complet normală. La metalele pure κ crește ușor cu scăderea temperaturii astfel că este posibil ca un metal să-și modifice tipul de supraconductibilitate cu variația temperaturii. De asemenea, supraconductibilitatea de suprafață apare numai la interfața supraconductor-izolator (sau vid) și nu la interfața supraconductor-metal. Prin urmare, dacă proba supraconductoare este acoperită cu un strat de metal normal supraconductibilitatea de suprafață dispare. Prezentăm în continuare calcule detaliate pentru un mediu semiinfinit și apoi pentru o probă de dimensiuni finite.

2.8.2. Câmpul H_{c3}

Am văzut în § 2.1 că la ecuațiile GL se sdaugă condiția de frontieră

$$\vec{n} \cdot \left(-i\nabla - \frac{2\pi\vec{A}}{\Phi_0} \right) \psi = 0 \quad (8.1)$$

unde \vec{n} este normala la suprafață. Această condiție asigură absența unui curent care ar intra (sau ar ieși) prin suprafața supraconductorului. Evident că această condiție implică existența unei

raze a curbării suprafeței mult mai mare decât $\xi(T)$. În cele ce urmează vom studia consecințele condiției (8.1) asupra suprafeței supraconductorului pentru două cazuri: (1) câmpul aplicat este perpendicular pe suprafața probei, (2) câmpul aplicat este paralel cu suprafața probei.

2.8.2.1. Câmpul aplicat este perpendicular pe suprafața probei

Considerăm un supraconductor semiinfinit care este mărginit de planul $z = 0$ și umple semispațiul $z > 0$. Semispațiul $z < 0$ este umplut de un izolator (sau vid). Pentru valoarea câmpului magnetic aplicat $\vec{B}_a = \nabla \times \vec{A}$, apropiat de valoarea câmpului de nucleație, parametrul de ordonare este mic astfel că prima ecuație GL se poate liniariza și devine de forma (7.1). Considerăm câmpul magnetic aplicat paralel cu axa z astfel că $A_x = 0$, $A_y = H_a x$, $A_z = 0$ și ec. (7.1) devine

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left[-i \frac{\partial}{\partial y} - \frac{2\pi B_a y}{\Phi_0} \right]^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\frac{2m^* \alpha}{\hbar^2} \psi \equiv \frac{\psi}{\xi^2(T)} \quad (8.2)$$

cu condiția de frontieră la $z = 0$, $\partial\psi/\partial z = 0$. Soluția generală a ec. (8.2) este de forma

$$\psi(x, y, z) = \psi(x, y) \cos k_z z$$

unde $\psi(x, y)$ trebuie să fie o funcție mărginită. Valoarea maximă a câmpului magnetic se obține pentru valoarea minimă a valorii proprii

$$-\alpha = \frac{q^* \hbar}{m^*} B_a \quad (8.3)$$

care dă

$$B_a = B_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} \quad (8.3)$$

Prin urmare, aplicarea unui câmp magnetic perpendicular pe suprafață nu modifică câmpul de nucleație, care rămâne egal cu H_{c2} . Funcția proprie este

$$\psi(x, y) = e^{ik_y y} e^{-(x-x_0)^2/2\xi^2(T)} \quad (8.4)$$

unde

$$x_0 = \frac{\hbar}{q^* B_a} k_y = \frac{\hbar_y \Phi_0}{2\pi B_a} \quad (8.5)$$

2.8.2.2. Câmpul magnetic este aplicat paralel cu suprafața supraconductorului.

Considerăm și în acest caz axa z orientată în direcția câmpului magnetic H_a (presupunem că supraconductorul semiinfinit umple semispațiul $x > 0$) astfel că ec. (7.1) are de asemenea forma (8.2) însă condiția de frontieră se modifică la $x = 0$

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \quad (8.6)$$

Soluția ec. (8.2) este de forma (7.2 a). Considerăm cazul $k_y = 0$, pentru care obținem cea mai mică valoare a valorii proprii a ec. (8.2) care devine

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + \left(\frac{2\pi B_a}{\Phi_0} \right)^2 (x - x_0)^2 f = \frac{1}{\xi^2} f \quad (8.7)$$

unde x_0 este dat de relația (8.5) și condiția de frontieră (8.6) devine: la $x = 0$, $\partial f / \partial x = 0$. Ec. (8.7) este ecuația oscilatorului armonic de frecvență $\omega^0 = 2\pi B_a / \Phi_0$ care are poziția de echilibru localizată în punctul x_0 . Condiția de frontieră impune valoarea proprie

$$-\alpha = \eta \frac{q^* \hbar}{m^* c} B_a \quad (8.8)$$

unde η este un număr care depinde de valoarea lui x_0 . Câmpul magnetic de nucleație trebuie să aibă valoarea maximă obținută din (8.8) astfel că η trebuie să aibă valoare minimă

$$\frac{d\eta}{dx_0} = 0 \quad (8.9)$$

Prin urmare, pentru a găsi valoarea câmpului de nucleație trebuie să găsim valoarea minimă a lui η . Considerăm inițial două cazuri speciale $x_0 \gg \xi(T)$ și $x_0 = 0$. Pentru $x_0 \gg \xi(T)$ funcția oscilatorului armonic (8.4) este aproape zero la $x = 0$ și deci condiția de frontieră este îndeplinită. Funcția proprie este încă dată de (8.4) și valoarea proprie de (8.5) astfel că $\eta = 1$. Pentru $x_0 = 0$, funcția oscilatorului armonic (8.4) este încă soluție și are un extremum la $x = x_0$ și deci $\eta = 1$. Pentru valori intermediare ale lui x_0 , $\eta < 1$, adică valoarea proprie este mai mică. În apropierea suprafeței există o valoare a lui x_0 pentru care η este minim ceea ce arată că în vecinătatea suprafeței nucleația (corespunzătoare tranziției de fază) se face cu mai multă ușurință. În cele ce urmează prezentăm calculul valorilor proprii ale lui x_0 și η . În acest scop scriem ec. (8.7) sub formă adimensională

$$-\frac{d^2 f}{dx^2} + (K - bX)^2 f = f \quad (8.10)$$

unde am utilizat mărimile adimensionale $X = x/\xi(T)$, $K = \xi(T)ky$, $b = (q^* B_a / \hbar) \xi^2(T)$, $\xi^2(T) = -\hbar^2 / 2m^* \alpha$. Condiția de frontieră se scrie $df/dX = 0$ la $X = 0$. Se efectuează o nouă schimbare de variabilă

$$s = X\sqrt{b} - \frac{K}{\sqrt{b}}$$

astfel că ec. (8.10) devine

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 f}{ds^2} + s^2 f &= \frac{1}{b} f = \eta f \\ \frac{df}{ds} &= 0 \text{ la } s = -\mu = -\frac{K}{\sqrt{b}} \end{aligned} \quad (8.11)$$

deoarece

$$\eta = -\frac{m^* \alpha}{q^* \hbar B_a} = \frac{1}{b}$$

Soluția ec (8.11) este o combinație de funcții Weber

$$f(s) = AW(s) + BW(-s)$$

unde

$$W(s) = e^{s^2/2} \int_0^\infty v^{-(1+\eta)/2} e^{-(v-s)^2} dv$$

Coefficienții A și B se determină din condițiile de frontieră $s \rightarrow \infty, W(s) \rightarrow \infty, W(-s) \rightarrow 0$, de unde rezultă $A = 0$. Pentru $X = 0$ adică $s = -\mu$, condiția de frontieră $df/ds = 0$ devine

$$\int_0^{\infty} (2v - \mu) v^{-(1+\eta)/2} e^{-(v-\mu)^2} dv = 0 \quad (8.12)$$

sau

$$2I_1 - \mu I_0 = 0$$

unde

$$I_n(\mu) = \int_0^{\infty} v^n v^{-(1+\eta)/2} e^{-(v-\mu)^2} dv$$

Relația (8.12) este o relație implicită între η și μ adică între câmpul magnetic H_a și x_0 . Cea mai mică valoare proprie se obține pentru $d\eta/d\mu = 0$, adică

$$4I_2 - 6\mu I_1 + (2\mu^2 - 1)I_0 = 0$$

Utilizând relația de recurență

$$2I_2 = 2\mu I_1 + \frac{1-\eta}{2} I_0$$

se obține

$$\eta = \mu^2 \quad (8.13)$$

unde μ este un număr a cărui valoare se obține din ecuația

$$\int_0^{\infty} (2v - \mu) v^{-(1+\mu^2)/2} e^{-(v-\mu)^2} dv = 0$$

Această valoare este

$$\eta = \mu^2 = 0,59010$$

și

$$b = \frac{1}{0,5901} = 1,6946$$

Câmpul de nucleație corespunzător este

$$B_{c3} = 1,695 \frac{\hbar}{q * \xi^2(T)} = 1,695 B_{c2} = 1,695 \sqrt{2} \kappa B_c \quad (8.14)$$

Din relația (8.13) rezultă $K = 1$, adică $k_y = 1/\xi(T)$, astfel că minimumul energiei potențiale este localizat la

$$x_0 = \frac{\hbar}{q * H_{c3}} k_y = \mu^2 \xi(T) \quad (8.15)$$

Funcția proprie a ec. (8.10) este de expresia

$$\psi(x, y) = e^{y/\xi} e^{\frac{1}{2}[(x-\mu^2\xi)/\mu\xi]^2} \int_0^{\infty} e^{-(1+\mu^2)/2} e^{-[v+(x-\mu^2\xi)/\mu\xi]^2} dv$$

și reprezintă de fapt parametrul de ordonare. Dependența de x a parametrului de ordonare este reprezentată în Fig. 2.9. Se vede că acesta variază pe o distanță, măsurată de la suprafață, de ordinul $\mu\xi(T)$.

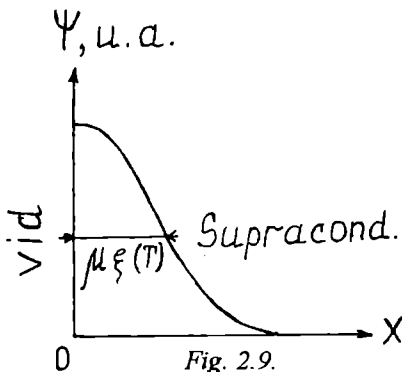


Fig. 2.9.

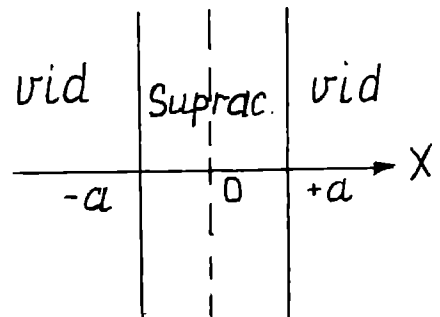


Fig. 2.10.

2.8.3. Proba de dimensiuni finite

Considerăm o probă supraconductoare de grosime $2a$ (Fig. 2.10). Condițiile de frontieră se scriu $\partial\psi/\partial x = 0$ la $x = \pm a$

Introducem următoarele mărimi adimensionale

$$X = \frac{x}{a}, Y = \frac{y}{a}, Z = \frac{z}{a}, b = \frac{q^* B_a}{\hbar} a^2 = \frac{2\pi a^2}{\Phi_o} B_a$$

$$\varepsilon = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} a^2 = \frac{a^2}{\xi^2(T)} = \frac{2\pi a^2}{\Phi_o} B_{c2}$$

Prima ecuație GL devine

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \left(i \frac{\partial}{\partial Y} + bX \right)^2 \psi = \varepsilon \psi \quad (8.16)$$

cu condițiile de frontieră

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0 \text{ la } X = \pm 1$$

$\psi(X, Y, Z)$ este o funcție mărginită și normală. Scriem soluția ec. (8.16) sub forma

$$\psi(X, Y, Z) = e^{ik_z z} e^{ik_y y} f(X) \quad (8.17)$$

Deoarece cea mai mare valoare a câmlului de nucleație se obține pentru cea mai mică valoare a lui ε/b , considerăm cazul $k_z = 0$ și ecuațiile se scriu

$$-\frac{d^2 f}{dX^2} + (k_y - bX)^2 f = \varepsilon f \quad (8.18)$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ la } X = \pm 1$$

Pentru a rezolva ec. (8.18) introducem o nouă variabilă

$$s = \sqrt{2b} \left[X - \frac{k_y}{b} \right] \quad (8.19)$$

astfel că obținem

$$-\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{s^2}{4} f = \frac{\varepsilon}{2b} f \quad (8.20)$$

cu condițiile de frontieră

$$\frac{df}{ds} = 0 \text{ la } s = \sqrt{2b} \left[\pm 1 - \frac{k_y}{b} \right]$$

Ec. (8.19) este o ecuație de tip Weber și are soluția generală

$$f(s) = A_\nu D_\nu(s) + B_\nu D_\nu(-s)$$

unde A_ν și B_ν sunt constante, $D_\nu(s)$ este funcția Weber și

$$\frac{\varepsilon}{b} = 2\nu + 1 \quad (8.21)$$

Relația dintre v și k_y se găsește scriind cele două condiții de frontieră (8.20). Din acestea două rezultă următoarea relație implicită

$$D'_v \left[\sqrt{2b} \left(1 - \frac{k_y}{b} \right) \right] D'_v \left[\sqrt{2b} \left(1 + \frac{k_y}{b} \right) \right] = D'_v \left[-\sqrt{2b} \left(1 + \frac{k_y}{b} \right) \right] \times \times D'_v \left[-\sqrt{2b} \left(1 - \frac{k_y}{b} \right) \right] \quad (8.22)$$

unde $D'_v(s)$ este derivata lui D_v în raport cu s . Pentru fiecare valoare a lui b și a lui k_y se obține din această ecuație un set infinit de valori distincte ale lui v . Se găsește valoarea minimă v_0 a lui v , se determină valoarea k_0 a lui k_y corespunzătoare. Se introduce această valoare în (8.21) și se obține valoarea lui ϵ/b pentru un b dat sau invers, valoarea lui b ca funcție de $\epsilon = a^2/\xi^2(T)$. Astfel, câmpul de nucleație H este funcție de raportul $a/\xi(T)$. Dependența $b(\epsilon)$ astfel obținută este reprezentată în Fig. 2.11 [4]. Ea reprezintă de fapt dependența câmpului de nucleație de grosimea probei. Se observă din grafic că în cazul $\epsilon \ll 1$, adică $a^2/\xi^2(T) \ll 1$, raportul ϵ/b tinde la infinit ceea ce înseamnă că raportul H/H_{c2} tinde la infinit. Pentru $\epsilon \gg 1$, adică $a^2/\xi^2(T) \gg 1$, raportul ϵ/b tinde la valoarea 1,69 adică $H/H_{c2} = 1,69$; în acest ultim caz comportarea este asemenea unui mediu semiinfinit. Concordanța dintre teorie și experiență este foarte bună și din măsurarea simultană a lui H_{c2} (adică a lui $\xi(T)$) și a lui H se poate determina valoarea lui a . Pentru a găsi parametrul de ordonare scriem soluția ec. (8.16) sub forma

$$\psi(X, Y) = A e^{ik_0 Y} f_{k_0}(X) + R e^{-ik_0 Y} f_{k_0}(-X) \quad (8.23)$$

unde k_0 este valoarea lui k_y corespunzătoare valorii minime pentru un b dat. Relația (8.22) nu se modifică atunci când k_y se substituie cu $-k_y$ și deci k_0 se substituie cu $-k_0$. Deci pentru o pereche de valori ale lui b și v corespund două valori k_y și $-k_y$ iar ec. (8.19) pentru f este invariantă când se schimbă k_y cu $-k_y$ și X cu $-X$. Celei mai mici valori proprii v_0 îi corespund valorile $+k_0$ și $-k_0$ și deci două funcții degenerate $f_{k_0}(X)$ și $f_{-k_0}(X)$.

$$f_{-k_0}(X) = A_{v_0} D_{v_0} \left[\sqrt{2b} \left(X - \frac{k_0}{b} \right) \right] + R_{v_0} D_{v_0} \left[-\sqrt{2b} \left(X - \frac{k_0}{b} \right) \right]$$

Din condițiile de frontieră se determină raportul A_{v_0}/R_{v_0}

$$\frac{A_{v_0}}{R_{v_0}} = \frac{D'_{v_0} \left[-\sqrt{2b} \left(1 - k_y / b \right) \right]}{D'_{v_0} \left[\sqrt{2b} \left(1 - k_y / b \right) \right]} = \frac{D'_{v_0} \left[\sqrt{2b} \left(1 + k_y / b \right) \right]}{D'_{v_0} \left[-\sqrt{2b} \left(1 + k_y / b \right) \right]} \quad (8.24)$$

Dacă se schimbă k_0 cu $-k_0$ se schimbă rolurile lui A_{v_0} și R_{v_0} astfel că

$$f_{k_0}(-X) = A_{v_0} D_{v_0} \left[-\sqrt{2b} \left(X + \frac{k_0}{b} \right) \right] + + R_{v_0} D_{v_0} \left[\sqrt{2b} \left(X + \frac{k_0}{b} \right) \right] \quad (8.25)$$

și

$$f_{-k_0}(X) = f_{k_0}(-X) \quad (8.26)$$

Deoarece planul $X = 0$ este un plan de simetrie este de așteptat ca modulul

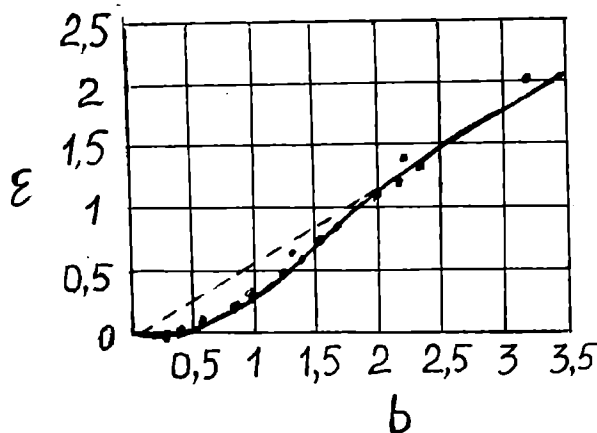


Fig. 2.11

lui ψ să prezinte simetrie

$$|\psi(X, Y)| = |\psi(-X, Y)| \quad (8.27)$$

astfel că

$$|A| = |R|$$

Scriem $A = A_0 \exp(i\theta)$ și parametrul de ordonare devine

$$\psi(x, y) = A_0 \left[e^{i(k_0 Y + \theta)} f_{k_0}(X) + e^{-i(k_0 Y + \theta)} f_{k_0}(-X) \right] \quad (8.28)$$

A_0 este o constantă complexă și θ este o fază arbitrară. Se observă că $\psi(X, Y)$ se anulează pentru

$$\begin{aligned} \cos(k_0 Y + \theta) \left[f_{k_0}(X) + f_{k_0}(-X) \right] &= 0 \\ \sin(k_0 Y + \theta) \left[f_{k_0}(X) - f_{k_0}(-X) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

având în vedere (8.25) și (8.24), soluțiile ec. (8.29) sunt

$$\begin{aligned} X &= 0 \\ Y &= -\frac{\Phi_0}{k_0} + (2p+1) \frac{\pi}{2k_0} \end{aligned} \quad (8.30)$$

Parametrul de ordonare se anulează în planul $X = 0$ în punctele date de (8.30b). Deci există o rețea ordonată de vortexuri cu diferența $L = \pi a/k_0$ între ele (Fig. 2.12). Vortexurile apar la o valoare dată a lui $b = b_0$, valoare la care apare supraconductibilitatea de suprafață (k_0 este funcție de b_0). Nucleația completă a supraconductibilității de suprafață se obține pentru $a \geq 2\xi(T)$.

2.9. Starea de vortexuri la H_{c2} . Rețele planare de vortexuri

Am văzut în paragraful anterior că la suprafață există două soluții degenerate ale ecuației GL liniare la H_{c3} . De asemenea, am văzut în § 2.7 că la H_{c2} există într-o probă suficient de groasă un număr infinit de soluții de forma

$$\psi_k = e^{iky} f(X) = e^{iky} \exp \left[-\frac{(X - X_k)^2}{2\psi^2} \right] \quad (9.1)$$

unde am notat k_y cu k și

$$X_k = \frac{k\Phi_0}{2\pi B_a} \quad (9.2)$$

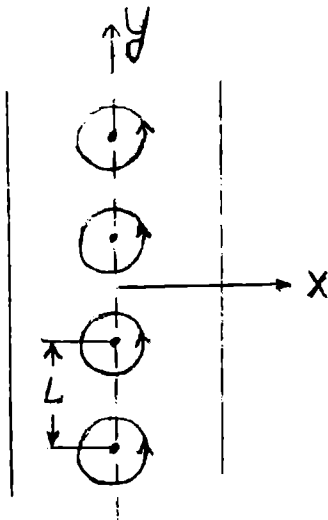


Fig. 2.12.

Reamintim că am considerat $k_z = 0$, ceea ce corespunde celei mai mari valori posibile a lui H_{c2} . Fiecare soluție este valabilă la H_{c2} și toate dau aceeași valoare a lui H_{c2} . De asemenea, fiecare soluție reprezintă o regiune supraconductoare de formă gaussiană. Deoarece factorii $\exp(iky)$ sunt diferiți între ei toate aceste funcții sunt ortogonale. Ca și în cazul unui strat subțire prin micșorarea lui H sub valoarea H_{c2} energia liberă minimă are aceeași valoare în întreaga probă și se găsește prin condiția de minim a termenului $\beta|\psi|^4$ precum și a termenilor care reprezintă energia cinetică și magnetică. În cazul unui strat subțire, existența a două soluții conduce automat la existența unei periodicități în direcția y , adică

a unei rețele de vortexuri. Este natural să considerăm că rețeaua planară de vortexuri corespunde unei valori minime a energiei și să forțăm periodicitatea chiar pentru soluțiile (funcțiile de undă) din interiorul probei, așa cum există pentru cele de la suprafață. În acest scop impunem restricția ca vectorul de undă k să aibă valori discrete

$$k_n = nK_1 \quad (9.3)$$

Având în vedere (9.1) această restricție impune o periodicitate a funcției de undă (parametrul de ordonare) după y cu perioada

$$\Delta y = \frac{2\pi}{k_1} \quad (9.4)$$

Având în vedere relația (9.2) rezultă o periodicitate după x deoarece soluțiile de formă gaussiană sunt localizate în planul (x,y) la

$$X_n = \frac{k_n \Phi_0}{2\pi B_a} = \frac{nk_1 \Phi_0}{2\pi B_a} \quad (9.5)$$

Prin urmare, dacă toți ψ_n au aceeași pondere va exista o periodicitate în direcția x cu perioada

$$\Delta x = \frac{k_1 \Phi_0}{2\pi B_a} = \frac{\Phi_0}{B_a \Delta y} \quad (9.6)$$

Rezultă

$$B_a \Delta x \Delta y = \Phi_0 \quad (9.7)$$

astfel că fiecare celulă unitate a rețelei de vortexuri conține o cantitate de flux. Deși această relație a fost dedusă la $H = H_{c2}$ ea este valabilă și la valori mai mici ale câmpului magnetic dacă substituim pe B_a cu B . Aceasta rezultă din condiția $j_s = 0$ la frontiera dintre două celule identice ale rețelei de vortexuri, în condițiile cuantificării fluxoidului. Mai general, considerăm soluția generală a ec. GL linearizate la H_{c2}

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n = \sum_n C_n \exp(ink_1 y) \exp\left[-\frac{(X - X_n)^2}{2\xi^2}\right] \quad (9.8)$$

care este periodică în y prin construcție. Ea este de asemenea periodică în x dacă C_n este funcție periodică în n adică $C_{n+v} = C_n$. Mai sus am tratat calitativ rețeaua rectangulară de vortexuri a lui Abrikosov, unde perioada în x este dată de (9.6). Această rețea se obține pentru $v = 1$, când toți C_n sunt egali între ei. Pentru $v = 2$ rezultă o rețea triunghiulară. În acest caz $C_1 = iC_0$. Evident că la H_{c2} sunt posibile toate soluțiile de forma (9.8). Soluția cea mai favorabilă este determinată de parametrul (unde $\langle \rangle$ semnifică media spațială)

$$\eta = \frac{\langle \psi^4 \rangle}{\langle \psi^2 \rangle^2}$$

care este independent de normarea lui ψ . Parametrul η are valoarea unitate dacă ψ este constant și crește cu localizarea funcției, adică ψ este constant pe o fracțiune p din volum și în rest este zero. În ultimul caz $\eta \sim p^{-1} \gg 1$. Parametrul η apare în diferența dintre energia stării supraconductoare și a celei normale. Pentru a arăta acest lucru considerăm cazul simplu în care ψ variază spațial așa de încet încât în expresia energiei libere se pot neglija termenii care conțin gradientul lui ψ și curentul electric, astfel că

$$\mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n = \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \quad (9.9)$$

Scriem $\psi(\vec{r}) = cf(\vec{r})$. Introducând această expresie în (9.9) și efectuând minimumul în raport cu c^2 se obține

$$c^2 = -\frac{\alpha \langle f^2 \rangle}{\beta \langle f^4 \rangle}$$

care introdusă în (9.9) dă

$$\langle \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n \rangle = \frac{\alpha^2 \langle f^2 \rangle}{2\beta \langle f^4 \rangle} = -\frac{\alpha^2}{2\beta \eta} \quad (9.10)$$

Pentru $f = \text{constant}$, $\eta = 1$ astfel că se obține valoarea uzuală a energiei de condensare, $-\alpha^2/2\beta$. Dacă f nu este constant $\eta > 1$ și cu cât crește η cu atât starea energetică supraconductoare este mai puțin favorabilă. Dacă funcția de undă este localizată numai într-un spațiu restrâns, care reprezintă o fracțiune p din volumul total al probei, $\eta = 1/p$ și energia de condensare reprezintă numai fracțiunea p din energia de condensare din cazul când funcția de undă umple întregul volum și $\eta = 1$. Dacă la energia de condensare (9.9) adăugăm și termenul gradient al lui $|\psi|$

$$\frac{1}{2m^*} \hbar^2 (\nabla |\psi|)^2$$

și repetăm calculul de mai sus, apare un termen adițional și (9.10) devine

$$\langle \mathcal{F}_s - \mathcal{F}_n \rangle = -\left(\frac{\alpha^2}{2\beta}\right) \frac{1}{\eta} \left[1 - \xi^2 \frac{\langle |\nabla f|^2 \rangle}{\langle f^2 \rangle} \right] \quad (9.11)$$

La punctul de tranziție de fază de speța a II-a, unde f satisface ecuația GL linearizată, termenul adițional devine egal cu zero. Noua temperatură de tranziție în prezența gradientului este mai mică decât T_c (când $\alpha > 0$) și se determină egalând cu zero factorul cuprins în parantezele drepte din (9.11)

$$\xi^2(T) = \frac{\langle f^2 \rangle}{\langle |\nabla f|^2 \rangle}$$

Dacă în expresia energiei libere se iau în plus în considerare termenul determinat de câmpul magnetic și cel determinat de curentul electric soluția selfconsistentă este mai complexă. Ultimul factor din (9.11) este același pentru orice combinație liniară a soluțiilor (9.8) pentru același H_{c2} , astfel că soluția optimă se reduce la a găsi setul coeficienților C_n pentru care η are valoarea cea mai mică. Calculul numeric efectuat de Abrikosov pentru o rețea pătrată de $\eta = 1,18$, iar pentru o rețea triunghiulară (unde $iC_{2n+1} = C_{2n} = \text{constant}$) dă $\eta = 1,16$. Ar rezulta că rețeaua pătrată este mai stabilă. Un calcul mai corect [5] arată că de fapt situația este inversă: rețeaua de vortexuri triunghiulară este mai favorabilă. Cele două tipuri de rețele sunt reprezentate în Fig. 2.13. Cu linie întreruptă se reprezintă perimetrul celulei unitate de bază. Pentru celula pătrată, fluxul în celula elementară

$$\Phi_o = Ba_p^2$$

de unde rezultă că distanța la cel mai apropiat vecin este

$$a_p = \sqrt{\frac{\Phi_o}{B}} \quad (9.12)$$

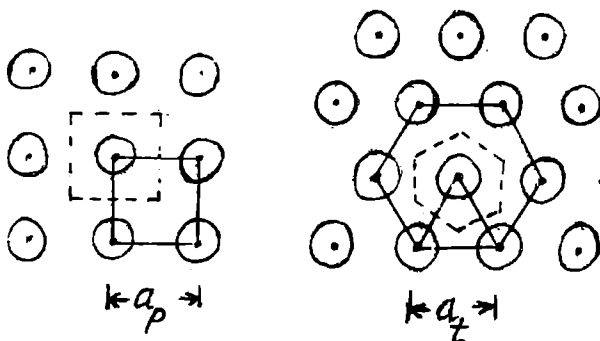


Fig. 2.13.

Rețeaua triunghiulară este o rețea de împachetare compactă în care fiecare vortex este înconjurat de o rețea hexagonală de alte vortexuri. Fluxul prin celula elementară triunghiulară este

$$\Phi_o = \sqrt{\frac{3}{4}} a_t^2 B$$

de unde rezultă pentru distanța la cel mai apropiat vecin expresia

$$a_t = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \left(\frac{\Phi_o}{B}\right)^{1/2} = 1,075 \left(\frac{\Phi_o}{B}\right)^{1/2} \quad (9.13)$$

Din aceste considerente simple rezultă că este mai favorabilă structura triunghiulară deoarece are distanța dintre cei mai apropiați vecini mai mare decât structura pătrată ($a_t > a_p$) și deci repulsia mutuală dintre două vortexuri vecine mai mică. Experimental se observă în general rețeaua triunghiulară însă în unele materiale structura cristalină este dominantă și se observă rețele pătrate și chiar rectangulare de vortexuri. Prezența impurităților distruge rețeaua ordonată de vortexuri și aceasta devine dezordonată, asemănătoare dezordinii particulelor într-un lichid. Forma exactă a rețelei de vortexuri nu prezintă importanță, de aceea nu prezentăm teoria detaliată a lui Abrikosov asupra acestei probleme. În multe situații vom aproxima celula elementară a rețelei de vortexuri cu un cerc de aceeași arie așa cum aproximăm celula Wigner-Seitz cu o sferă de același volum. Valorile ce se obțin pentru η pentru celulele triunghiulară, pătrată și circulară diferă între ele decât cu câteva procente.

CAPITOLUL III

PROPRIETĂȚILE MAGNETICE ALE SUPRACONDUCTORILOR DE SPEȚA A II-A

În capitolul precedent s-a arătat că în supraconductorii de speța a II-a ecuațiile GL au soluție $|\psi| > 0$ până la un câmp magnetic $H_{c2} > H_c$. Peste H_{c2} dispare starea supraconductoare. Soluția Abrikosov (2.9) corespunde unei rețele ordonate de vortexuri de curenți care înconjoară liniile nodale ale lui ψ . Fluxul cuprins într-o celulă unitate a rețelei este egal cu o unitate de flux $\Phi_0 = hc/2q$.

În acest capitol vom studia comportarea supraconductorilor de speța a II-a în câmp magnetic de la valoarea zero la H_{c2} . Vom găsi astfel un câmp $H_{c1} < H_{c2}$ la care primul filament de flux penetrează supraconductorul (într-o probă lungă, subțire și cu factor de demagnetizare egal cu zero). Vom studia curbele de magnetizare $M(H)$ și $B(H)$ pentru H de la zero la H_{c1} și în continuare de la H_{c1} la H_{c2} . Apoi vom prezenta deplasarea vortexurilor sub acțiunea forței Lorentz datorată curentului de transport, unele proprietăți speciale ale supraconductorilor ceramici și tranziția de fază Berezinskii - Kosterlitz - Thouless.

3.1. Câmpul critic inferior H_{c1} .

Câmpul critic H_{c1} este valoarea minimă a câmpului magnetic la care apare primul filament de flux (fluxon). Acest prim filament reprezintă primul flux magnetic care penetrează proba, presupusă lungă, subțire și cu factor de demagnetizare egal cu zero, și astfel în probă apare starea mixtă. Un filament are un miez care conține fluxul magnetic. Acest miez este înconjurat de un vortex de perechi de electroni. Vortexul reprezintă curentul de perechi de electroni indus de către fluxul magnetic care a penetrat proba, care circulă în jurul acestui flux numit miez. Pentru simplitate să considerăm că sistemul se găsește la OK și că lungimea de coerență ξ este mai mică decât adâncimea de penetrație λ , adică $\xi < \lambda$. Miezul filamentului este în stare normală și are raza de ordinul lungimii de coerență, care reprezintă raza frontierei dintre fazele normală și supraconductoare. Energia miezului (care se află în stare normală) este mărită față de energia fazei supraconductoare cu valoarea, pe unitatea de lungime a fluxului.

$$\mathcal{F}_{miez} = \frac{\mu_0 H_c^2}{2} \pi \xi^2$$

care reprezintă produsul dintre densitatea de energie de condensare și suprafața miezului. De asemenea, în jurul miezului, într-un strat subțire de grosime λ , la frontiera cu faza supraconductoare energia scade cu valoarea

$$\ddot{o}_{mag} = \frac{\mu_0 H^2}{2} \pi \lambda^2$$

pe unitatea de lungime, datorită pătrunderii câmpului magnetic din regiunea normală în regiunea supraconductoare. Pentru un singur vortex, energia totală pe unitatea de lungime este

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{miez} - \mathcal{F}_{mag} = \frac{\pi \mu_0}{2} (H_c^2 \xi^2 - H^2 \lambda^2) \quad (1.1)$$

Miezul va fi stabil, adică formarea filamentului de flux (vortexului) va fi favorizată dacă $\mathcal{F} \leq 0$. Câmpul magnetic aplicat $H = H_{c1}$, la care apare vortexul se obține din condiția $\mathcal{F} = 0$ și din (1.1) rezultă

$$\frac{H_{c1}}{H_c} \sim \frac{\xi}{\lambda} \quad (1.2)$$

unde H_c este câmpul critic termodinamic. Câmpul critic H_{c1} , numit și câmpul critic inferior, desparte starea de energie de interfață pozitivă ($H < H_{c1}$) de starea de energie de interfață negativă ($H > H_{c1}$). Un calcul mai exact al lui H_{c1} a fost efectuat de către Abrikosov [1]. O expresie exactă a lui H_{c1} va fi dedusă în paragraful care urmează.

3.2. Structura unui vortex izolat

Prin structura vortexului înțelegem dependența spațială a lui ψ și H în interiorul vortexului precum și energia sa liberă. Calculul mărimilor ψ , H și \mathcal{F} pentru valori arbitrare ale lui c se poate efectua numai numeric. O soluție analitică se poate obține numai în cazul supraconductorilor de speța a II-a în care $\kappa = \lambda/\xi \gg 1$. Simplificarea apare deoarece în acest caz ψ poate să crească de la zero la o valoare limită în interiorul unui miez de rază $\sim \xi$. Dacă vortexul este izolat această valoare a lui ψ este ψ_0 . Din aceste motive pe cea mai întinsă regiune din vortexul, de rază $l > \xi$, supraconductorul se comportă ca un supraconductor de tip London ordinar (adică $\psi = \psi_0$). Înainte de a lua în considerare aceste presupuneri restrictive vom analiza soluția completă a ecuațiilor GL (2.1.12, 2.1.13). Scriem funcția de undă a vortexului sub forma

$$\Psi = \Psi_0 f(r) e^{i\theta} \quad (2.1)$$

care include simetria axială și faptul că faza lui ψ variază cu 2π la efectuarea unui circuit complet, ceea ce corespunde unei singure cuante de flux asociată unui vortex. Componenta radială a potențialului vector este

$$A(r) = \frac{1}{r} \int_0^r r' H(r') dr'$$

$A = A(r)\hat{i}$ unde \hat{i} este un versor. Aceasta are o expresie simplă în apropierea centrului vortexului

$$A(r) = \frac{B(o)r}{2} \quad (2.2)$$

Deoarece fluxul total conținut într-un vortex este

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 2\pi r A_\infty = \Phi_0$$

departe de centrul filamentului izolat

$$A_\infty = \frac{\Phi_0}{2\pi r} \quad (2.3)$$

Introducând (2.1) în (2.1.12) obținem

$$f - f^3 - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right)^2 f - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \right] = 0 \quad (2.4)$$

Ec. (2.1.13) devine

$$j = -\frac{dH(r)}{dr} = -\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rA \right] = \frac{qh}{m^*} \Psi_0^2 f^2 \left[\frac{1}{r} - \frac{2\pi A}{\Phi_0} \right] \quad (2.5)$$

Aceste două ecuații diferențiale au soluțiile simultane $f(r)$ și $A(r)$ pe care ne propunem să le analizăm. Soluțiile generale necesită un calcul numeric. Vom analiza soluțiile analitice care se obțin în cazuri particulare: (a) cazul $r \rightarrow 0$ și (b) cazul $\kappa \gg 1$. Primul caz se referă la centrul vortexului și analizăm întâi acest caz. Substituind (2.2) în (2.4) se obține

$$f - f^3 - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\pi B(o)r}{\Phi_0} \right)^2 f - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) \right] = 0 \quad (2.6)$$

Soluția acestei ecuații (pentru $r \rightarrow 0$) este de forma

$$f = kr^n, \quad n \geq 0$$

Substituind în (2.6) se obține

$$kr^n - k^3 r^{3n} - \xi^2 \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\pi B(o)r}{\Phi_0} \right)^2 kr^n - n^2 kr^{n-2} \right] = 0$$

Pentru $r \rightarrow 0$ termenul principal din această ecuație este proporțional cu $r^{n-2}(1-n^2)$. Acest termen se anulează pentru $n = 1$ și lângă origine f este proporțional cu r . Dacă filamentul conține m cuante de flux, $\psi \sim \exp(im\theta)$ și pentru $r \rightarrow 0$ se obține $f \sim r^m$. Structura ec. (2.6) arată că în dezvoltarea lui f nu intervin decât puteri impare în r . Reținând numai primii doi termeni în puterea lui r (adică numai termenul liniar în f) se găsește

$$f = kr \left\{ 1 - \frac{r^2}{8\xi^2} \left[1 + \frac{H(o)}{H_{c2}} \right] \right\} \quad (2.7)$$

De la $r = 2\xi$, $f(r)$ începe să se satureze. Pentru un vortex izolat se găsește pentru constanta k valoarea $k = 1/2\xi$ (Pentru calculul constantei k se ia în considerare și termenul f^3 din ecuație). Cu această valoare a lui k seria (2.7) se racordează cu soluția la distanța unde $f \rightarrow 1$. Pe întregul domeniu de variație a lui r soluția aproximativă este de forma

$$f \equiv \tanh \frac{\gamma r}{\xi} \quad (2.8)$$

unde γ este o constantă ~ 1 . Această dependență este reprezentată în Fig. 3.1. Rezultă că în afara miezului vortexului de rază $\sim \xi$ se poate considera $f = 1$ și în acest caz câmpul magnetic și curentul electric sunt determinate de ecuațiile lui London. Evident că problema are sens pentru $\lambda \gg \xi$, adică $\kappa \gg 1$. Vom trata în continuare acest caz. În acest caz în afara miezului scriem ecuația lui London.

$$\lambda^2 \nabla \times \vec{j}_s + \vec{H} = 0 \quad (2.9)$$

Deoarece în acord cu această relație fluxoidul pe orice circuit (trajectorie) închis este zero, o corectăm adăugând un termen care să ia în considerație prezența miezului și anume

$$\mu_0 \lambda^2 \nabla \times \vec{j}_s + \vec{B} = \hat{z} \Phi_0 \delta_2(\vec{r}) \quad (2.10)$$

unde $\delta_2(\vec{r})$ este o funcție δ bidimensională localizată în miez și \hat{z} este versorul orientat în direcția fluxului. Ec. (2.10) se poate obține direct prin aplicarea operatorului rotor ec. (2.5). Utilizând ecuația lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

ec. (2.10) devine

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{B} + \vec{B} = \hat{z} \Phi_0 \delta_2(\vec{r})$$

Deoarece $\text{div } \vec{H} = 0$ se obține

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = -\frac{\Phi_0}{\lambda^2} \hat{z} \delta_2(\vec{r}) \quad (2.11)$$

care are soluție exactă

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \mathbf{K}_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \hat{z} \quad (2.12)$$

unde $\mathbf{K}_0(r/\lambda)$ este funcția Hankel de ordinul zero de argument imaginar. La distanță mare această funcție variază ca $\exp(-r/\lambda)$ iar pentru $r \rightarrow 0$ diverge ca $\ln(\lambda/r)$. În realitate această divergență este stopată la $r = \xi$ unde $|\psi|^2$ începe să scadă la zero. Astfel $H(r)$ arată că în Fig. 3.1 a. În Fig. 3.1 b, este reprezentată distribuția curentului din vortex. Cele două forme limită ale (2.12) sunt

$$B(r) \simeq \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left[\ln \frac{\lambda}{r} + 0,12 \right], \quad \xi \ll r \ll \lambda \quad (2.13)$$

$$B(r) \rightarrow \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2r} \right)^{1/2} e^{-r/\lambda}, \quad r \rightarrow \infty$$

În continuare prezentăm un calcul, mai precis decât cel prezentat în primul paragraf, al energiei libere a vortexului și al câmpului critic H_c . Dacă neglijăm contribuția miezului, energia liberă (pe unitatea de lungime) a vortexului este formată din energia câmpului magnetic și energia cinetică a curentului

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\mu_0}{2} \int (H^2 + \lambda^2 (\nabla \times \vec{H})^2) \cdot d\vec{s} = \frac{\mu_0}{2} \int (\vec{H} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \vec{H}) \cdot \vec{H} d\vec{S} + \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} \int (\vec{H} \times \nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{l} = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \int \vec{H} \Phi_0 \delta_2(\vec{r}) \cdot d\vec{S} + \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} \int (\vec{H} \times \nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (2.14)$$

unde am utilizat o identitate vectorială. Integrala liniară se efectuează în jurul vortexului, în afara ariei de integrare. Primul termen din relația de mai sus este nul deoarece miezul este exclus din integrală. La infinit, al doilea termen este egal cu zero, însă pe un cerc în jurul miezului are o valoare finită dată de

$$\mathcal{F} = \frac{\mu_0 \lambda^2}{2} \left[H \frac{dH}{dr} 2\pi r \right]_{\xi}$$

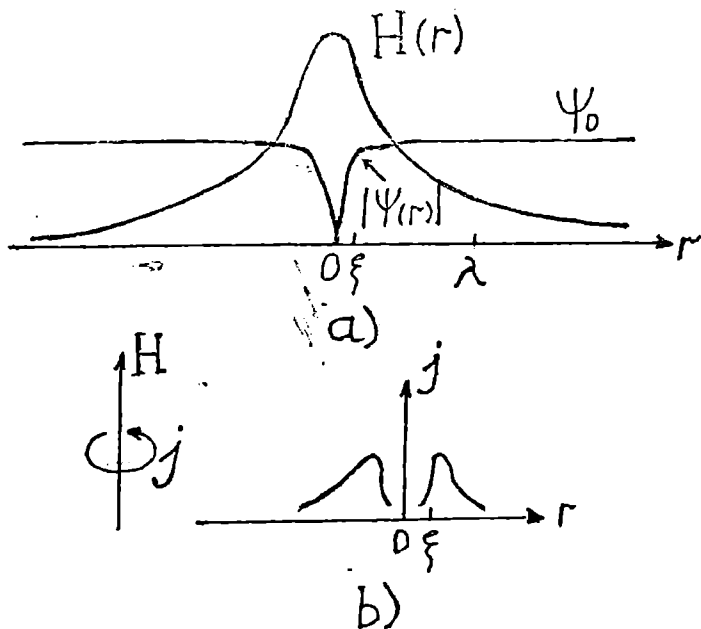


Fig. 3.1.

Din (2.13 a) se obține

$$\frac{dB}{dr} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2 r}$$

astfel că

$$\mathcal{F}_1 = \frac{\Phi_0}{2} H(\xi) - \frac{\Phi_0}{2} H(0) \quad (2.15)$$

unde $H(\xi) = H(0)$ deoarece în miez $f \rightarrow 0$ și deci, $j_s \rightarrow 0$. Această relație apare de asemenea din primul termen al relației (2.14) dacă nu excludem miezul din integrală. Introducem în (2.15) $H(0) = H(\xi)$ din (2.13) și rezultă

$$\ddot{o}_1 \simeq \frac{1}{4\pi\mu_0} \left(\frac{\Phi_0}{\lambda} \right)^2 \ln \kappa \quad (2.16)$$

unde am exclus termenul 0,12 deoarece este nesemnificativ întrucât am limitat integrala la ξ . Utilizând relațiile (2.3.6) și (2.3.7) se poate scrie

$$\Phi_0 = \sqrt{2\pi\lambda\xi} H_c \quad (2.17)$$

și prin urmare

$$\ddot{o}_1 = \frac{H_c^2}{2} \mu_0 \pi \xi \ln \kappa \quad (2.18)$$

Rezultă că energia filamentului este egală cu energia de condensare pierdută în miez, înmulțită cu factorul 4 $\ln \kappa$. De asemenea \mathcal{F}_1 este de ordinul de mărime al energiei totale a câmpului magnetic $\mu_0 H^2/2$, deoarece $H = \Phi_0/\pi\lambda^2$ și acesta se integrează pe o arie $\sim \pi\lambda^2$, obținându-se $\Phi_0^2/2\mu_0\pi\lambda^2$ care diferă de expresia (2.16) prin factorul $(1/2)\ln \kappa \simeq 1$. Calculăm în continuare câmpul critic H_{c1} la care pătrunde primul filament de flux magnetic în supraconductorul de spețe a II-a. Pentru $H > H_{c1}$ apare o rețea rară de vortexuri distribuite în probă. Dacă distanța dintre acestea este mai mare decât l , acestea nu vor interacționa între ele astfel încât fiecare vortex poate fi tratat izolat. Vortexul posedă simetrie axială și caracterizarea lui se reduce la aflarea lui $\psi(r)$ și $H(r)$, așa cum s-a procedat mai sus. Cunoscând aceste mărimi a fost posibil să calculăm energia liberă \mathcal{F}_1 a vortexului (externă miezului său), raportată la unitatea de lungime a acestuia. Pentru a determina H_{c1} se procedează astfel. La $H = H_{c1}$ energia liberă Gibbs, G_s , trebuie să aibă aceeași valoare atât fără vortex cât și în prezența primului vortex (prin definiție). Deci, la H_{c1}

$$G_{s, \text{ fără vortex}} = G_{s, \text{ primul vortex}}$$

Deoarece

$$G = \mathcal{F} - \mu_0 H_a \int H dr$$

relația de mai sus se scrie

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 L - \mu_0 H_{c1} \int H dr = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 L - H_{c1} \Phi L$$

unde L este lungimea vortexului în probă. Se obține

$$H_{c1} = \frac{\mathcal{F}_1}{\Phi_0} \simeq \frac{1}{2} H(0) \simeq \frac{\Phi_0}{\mu_0 \lambda^2} \ln \kappa = \frac{H_c}{\sqrt{2\kappa}} \ln \kappa \quad (2.19)$$

Astfel, exceptând $\ln \kappa$, $H_c/H_{c1} = H_{c2}/H_c = \sqrt{2\kappa}$ astfel că H_c este aproximativ media geometrică între H_{c1} și H_{c2} .

3.3. Curbele de magnetizare

Comportarea supraconductorilor de speța a II-a în câmp magnetic depinde de intensitatea acestuia. Pentru valori ale câmpului aplicat între H_{c1} și H_{c2} se disting trei regiuni diferite: (1) Pentru H în apropierea lui H_{c1} densitatea vortexurilor $N/S = B/\Phi$ este mică, adică $\Phi_0/B \gg \lambda^2$, vortexurile sunt separate la o distanță mai mare decât λ , astfel că acestea pot fi considerate izolate între ele. (2) Pentru $H_{c1} < H < H_{c2}$, (dar nu în apropierea acestor valori), este regiunea intermediară în care $\xi_2 \ll \Phi_0/B \ll \lambda^2$ densitatea de vortexuri este mai mare și se consideră că acestea interacționează între ele. Se pot neglija și în acest caz detaliile miezului. (3) Pentru H în apropierea lui H_{c2} , densitatea de vortexuri este mare, $\xi^2 = \Phi_0/B$, astfel că miezurile vortexurilor aproape se suprapun. În acest caz trebuie să considerăm în detaliu miezul vortexului. În primele două cazuri creșterea energiei Gibbs pe unitatea de volum este

$$G - G_{s0} = \mathcal{F} - BH_a = \sum_i \mathcal{F}_i + \sum_{i>j} \mathcal{F}_{ij} - BH_a \quad (3.1)$$

unde \mathcal{F}_i este energia vortexului i iar \mathcal{F}_{ij} este energia de interacție dintre vortexul i și vortexul j . Notând $B/\Phi_0 = N/S$ numărul de vortexuri pe unitatea de suprafață normală pe câmp, primul termen din partea dreaptă a ec. (3.1) se scrie

$$\sum_i \mathcal{F}_i = \frac{B}{\Phi_0} \mathcal{F}_1$$

unde \mathcal{F}_1 este dat de relația (2.16). Pentru a găsi $B = f(H_a)$ scriem

$$\frac{\partial G}{\partial B} = 0 = \frac{\mathcal{F}_1}{\Phi_0} - H_a + \frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} \mathcal{F}_{ij}$$

astfel că B se determină din relația

$$\frac{\partial}{\partial B} \sum_{i>j} \mathcal{F}_{ij} = H_a - H_{c1} \quad (3.3)$$

unde am utilizat (2.19). Vom descrie comportarea supraconductorului în cele ce urmează.

3.3.1. Comportarea supraconductorului la valori ale lui H în apropierea lui H_{c1}

Să considerăm că mărim puțin valoarea câmpului magnetic peste valoarea lui H_{c1} , la care apare primul vortex. Concentrația vortexurilor va crește. Presupunem că distanța dintre vortexuri rămâne totuși, mai mare decât raza miezului. Scriem ecuația lui London

$$\bar{B} + \lambda^2(T) \nabla \times \nabla \times \bar{B} = \Phi_0 \hat{z} \sum_i \delta_2(\bar{r} - \bar{r}_i) \quad (3.4)$$

unde \bar{r}_i este poziția miezului vortexului i . Fie două miezuri \bar{r}_1 și \bar{r}_2 caracterizate de câmpurile interne $\bar{H}_1(\bar{r})$ și $\bar{H}_2(\bar{r})$. Dacă este satisfăcută condiția $|\bar{r}_1 - \bar{r}_2| \gg \xi(T)$ atunci câmpul \bar{H} se obține prin superpoziția câmpurilor \bar{H}_1 și \bar{H}_2 ale celor două vortexuri separate

$$\bar{H} = \bar{H}_1 + \bar{H}_2$$

$$B_1(\bar{r}) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2(T)} K_0 \left(\frac{|\bar{r} - \bar{r}_1|}{\lambda(T)} \right) \quad (3.5)$$

Energia liberă pe unitatea de lungime a vortexului este

$$\mathcal{F} = \frac{\mu_0}{2} \int \left[H^2 + \lambda^2(T) |\nabla \times \vec{H}|^2 \right] dV = \frac{\mu_0 \lambda^2(T)}{2} \int \left[\vec{H} \times \nabla \times \vec{H} \right] d\vec{\sigma}$$

Integrala de suprafață se efectuează pe suprafața celor două miezuri $|\vec{r} - \vec{r}_1| \equiv \xi(T)$, $|\vec{r} - \vec{r}_2| \equiv \xi(T)$. Scriem expresia energiei sub forma

$$\mathcal{F} = \frac{\mu_0 \lambda^2(T)}{2} \int \left[d\vec{\sigma}_1 + d\vec{\sigma}_2 \right] \left[(\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \times (\nabla \times \vec{H}_1 + \nabla \times \vec{H}_2) \right]$$

care poate fi separată în trei contribuții distincte (a) Energia vortexurilor individuale

$$\mathcal{F}_{11} + \mathcal{F}_{12} = \frac{\mu_0 \lambda^2(T)}{2} \left[\int d\vec{\sigma}_1 (\vec{H}_1 \times \nabla \times \vec{H}_1) + \int d\vec{\sigma}_2 (\vec{H}_2 \times \nabla \times \vec{H}_2) \right]$$

care a fost calculată în paragraful precedent, (b) Termenul

$$\int (\vec{H}_1 + \vec{H}_2) \cdot (\nabla \times \vec{H}_1 \times d\vec{\sigma}_2 + \nabla \times \vec{H}_2 \times d\vec{\sigma}_1)$$

care, pentru $\xi(T) \ll \lambda(T)$, tinde la zero deoarece \vec{H}_1 și $\nabla \times \vec{H}_1$ sunt mărimi finite pe domeniul de integrare $d\vec{\sigma}_2$ (c) Energia de interacție

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{\mu_0 \lambda^2(T)}{2} \int \left\{ [\vec{H}_1 \times \nabla \times \vec{H}_2] \cdot d\vec{\sigma}_2 + [\vec{H}_2 \times \nabla \times \vec{H}_1] \cdot d\vec{\sigma}_1 \right\} \quad (3.6)$$

Această energie de interacție este finită deoarece, pentru $|\vec{r} - \vec{r}_2| \ll \lambda(T)$, $|\nabla \times \vec{H}_2|$ este proporțional cu $1/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Utilizând expresia (3.5) pentru \vec{H} se obține

$$\mathcal{F}_{12} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\mu_0 \lambda^2(T)} K_0 \left[\frac{r_{12}}{\lambda(T)} \right], \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (3.7)$$

Această energie de interacție este repulsivă și scade la distanță mare după legea

$$\frac{1}{\sqrt{r_{12}}} \exp[-r_{12} / \lambda(T)]$$

iar la distanță scurtă se comportă ca

$$\ln[\lambda(T) / r_{12}]$$

Să considerăm o rețea ordonată de vortexuri, fiecare vortex având un număr de Z vecini, cei mai apropiați, aflați unul de altul la distanța a . Pentru o rețea pătrată $a_p = (\Phi_0/B)^{1/2}$ și $Z_p = 4$. Pentru o rețea triunghiulară $a_t = 1,075 (\Phi_0/B)^{1/2}$ și $Z_t = 6$. Având în vedere scăderea exponențială a lui \mathcal{F}_{ij} (3.7) la distanță mare, vom lua în considerare numai interacția cu vecinii cei mai apropiați, astfel că în expresia energiei Gibbs (3.1) devine

$$\sum_{i>j} \ddot{o}_{ij} = \left(\frac{B}{\Phi_0} \right)^Z \frac{\Phi_0^2}{2 \cdot 2\pi\mu_0 \lambda^2} K_0 \left(\frac{a}{\lambda} \right) \frac{BZ\Phi_0}{4\pi\mu_0 \lambda^2} \left(\frac{\pi\lambda}{2a} \right)^{1/2} e^{-a/\lambda} \quad (3.8)$$

Dacă B este suficient de mic, deoarece energia de interacție variază exponențial cu a și liniar cu Z , rezultă că rețeaua triunghiulară are energia de interacție mai mică decât rețeaua pătrată. Din (3.8) și (3.3) se determină curba $B(H_a)$. Se obține

$$B = \frac{2\Phi_0}{\sqrt{3}\lambda^2} \left\{ \ln \left[\frac{3\Phi_0}{4\pi\mu_0 \lambda^2 (H_a - H_{c1})} \right] \right\}^{-2} \quad (3.9)$$

Se observă că B este continuu în apropierea lui H_{cl} , corespunzând unei tranziții de fază de ordinul doi, dar crește la H_{cl} cu o pantă inițială infinită. Magnetizarea M se determină din relația

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_a$$

În continuare determinăm condiția de echilibru static al vortexurilor. În cazul uzual interacția dintre vortexuri este repulsivă, atunci când fluxurile au același sens în ambele vortexuri. Forța care apare datorită acestei interacții se calculează efectuând derivata lui F_{12} . Forța care acționează asupra vortexului 2 în direcția x , utilizând expresia (3.7) este

$$f_{2x} = \frac{\partial \mathcal{F}_{12}}{\partial x_2} = -\Phi_0 \frac{\partial H_1(\vec{r}_2)}{\partial x_2} = \Phi_0 J_{1y}(\vec{r}_2) \quad (3.10)$$

unde am avut în vedere (3.5) precum și ecuația lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Scriind (3.10) sub formă vectorială, forța pe unitatea de lungime a vortexului 2 este

$$\vec{f}_2 = \vec{J}_1(\vec{r}_2) \times \vec{\Phi}_0 \quad (3.11)$$

unde direcția lui $\vec{\Phi}_0$ este paralelă cu fluxul. Generalizând, pentru o rețea arbitrară

$$\vec{f} = \vec{J}_s \times \vec{\Phi}_0 \quad (3.12)$$

unde \vec{J}_s reprezintă densitatea totală de supracurent datorită tuturor celorlalte vortexuri (inclusiv curentul net de transport) în locul unde se găsește miezul vortexului considerat. Echilibrul static al vortexului se obține atunci când $\vec{f} = 0$ adică acțiunea supracurentului dat de toate celelalte surse este egală cu zero. Vom vedea din paragrafele următoare că dacă fluxul nu este captat într-un loc ce reprezintă o neomogeneitate, se deplasează sub acțiunea acestei forțe, adică f nu este zero.

3.3.2. Regiunea intermediară

În acest domeniu, $H_{cl} \lesssim B < H_{c2}$, adică densitatea fluxului este în domeniul $\Phi_0/\lambda^2 \lesssim B \ll \Phi_0/\xi^2$. Utilizăm și în acest caz ecuația London modificată (3.4) însă includem expresia energiei Gibbs (3.1) sumarea și pe vecinii mai depărtați (adică nu ne rezumăm numai primii vecini). Pentru a calcula această energie este mai comod să transformăm sumarea într-o sumă pe rețeaua reciprocă. În acest scop utilizăm următoarea dezvoltare în serie Fourier

$$B_z(\vec{r}) = \sum_q B_q e^{i\vec{q}\vec{r}} \quad (3.13)$$

unde \vec{q} ia valori în rețeaua reciprocă a rețelei considerate (rețeaua reală bidimensională de vortexuri o considerăm situată în planul (x, y) perpendicular pe câmpul magnetic). Considerăm o rețea periodică de formă arbitrară. Pentru a determina coeficienții B_q impunem condiția ca $H(x, y)$ să satisfacă ecuația London modificată (3.4). Introducând (3.13) în (3.4) se obține

$$\sum_q \left(B_q + \lambda^2 q^2 B_q \right) e^{i\vec{q}\vec{r}} = B \sum_q e^{i\vec{q}\vec{r}} \quad (3.14)$$

Membrul din dreapta acestei relații a fost obținut alegând originea coordonatelor în centrul vortexului și considerând aria celulei unitate egală cu Φ_0/B . Din (3.14) se determină H_q

$$B_q = \frac{B}{1 + \lambda^2 q^2}$$

astfel că

$$B_z(\vec{r}) = B \sum_q \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}}{1 + \lambda^2 q^2} \quad (3.15)$$

Cunoscând $H(r)$ se poate calcula creșterea de energie pe unitatea de lungime (neglijând ca și în cazul 1 contribuția miezului)

$$\mathcal{F} = \frac{\mu_0}{2} \int [H^2 + \lambda^2 |\nabla \times \vec{H}|^2] dS \quad (3.16)$$

Utilizând aceeași transformare vectorială pe caream utilizat-o la obținerea ecuației (2.15) sau (3.7) această ecuație se reduce la

$$\mathcal{F} = \frac{\Phi_0}{2} \sum_i H(\vec{r}_i) \quad (3.17)$$

unde $H(r_i)$ este câmpul total în miezul unui vortex care este format din câmpul propriu plus câmpurile date de celelalte vortexuri. Având în vedere că există B/Φ_0 vortexuri pe unitatea de suprafață și considerând $H(r_i) = H(0)$ pentru oricare vortex, relația (3.17) devine

$$\mathcal{F} = \frac{BH(0)}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \sum_q \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2}$$

Sumarea depinde de structura concretă a rețelei de vortexuri (q este constanta rețelei reciproce). Constanta rețelei reciproce este de ordinul $1/a$, astfel că pentru $q \neq 0, \lambda^2(T) q^2 \gg 1$ deoarece $N/S \gg 1/\lambda^2(T)$. Se poate deci neglija unitatea la numitorul expresiei de mai sus și scrie

$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B^2}{2\mu_0} \sum_{q \neq 0} \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2} \quad (3.18)$$

unde am separat termenul cu $q = 0$. Această energie depinde de structura concretă a rețelei. Totuși se pot trage concluzii calitative substituind suma printr-o integrală

$$\sum_q \frac{1}{q^2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{(N/S)} \int \frac{d\vec{q}}{q^2} = \frac{1}{2\pi(N/S)} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{q dq}{q^2} = \frac{1}{2\pi(N/S)} \frac{q_{max}}{q_{min}}$$

unde am utilizat relația $d\vec{q} = 2\pi q dq$. În ecuația de mai sus q_{min} este de ordinul $1/a$ iar q_{max} este de ordinul $1/\xi$ deoarece excludem miezul vortexului (de fapt excludem componenta Fourier a miezului vortexului, deci mai mare decât $1/\xi$ care ar conduce la o divergență în expresia energiei). Prin urmare \mathcal{F} se scrie

$$\mathcal{F} = \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{B}{2} H_{cl} \frac{\ln[\alpha a / \xi(T)]}{\ln[\lambda(T) / \xi(T)]} \quad (3.19)$$

unde constanta numerică α este de ordinul unității. Am utilizat de asemenea relația $N/S = B/\Phi_0 =$ densitatea vortexurilor. Energia Gibbs

$$G = \mathcal{F} - BH_a$$

are minim $\partial G / \partial B = 0$, la

$$B_a = B + B_{c1} \frac{\ln[\alpha' a / \xi(T)]}{\ln[\lambda(T) / \xi(T)]}, \quad \alpha' = \alpha e^{-1/2}$$

Magnetizarea este dată de expresia

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_a = -H_{c1} \frac{\ln\left\{[\alpha' / \xi(T)] \left(2\Phi_0 \sqrt{3} B\right)^{1/2}\right\}}{\ln\{\lambda(T) / \xi(T)\}} \quad (3.20)$$

Dependența logaritmică a lui M de H este în bună concordanță cu rezultatele experimentale.

3.3.3. Regiunea din apropierea lui H_{c2}

În apropierea lui H_{c2} densitatea de vortexuri este foarte mare, astfel că nu se mai poate utiliza teoria lui London modificată. În acest caz se utilizează teoria lui Abrikosov pentru ecuația GL linearizată a cărei soluție este dată de expresia (2.9.8). Abrikosov a arătat că M este proporțională cu $\langle \psi^2(r) \rangle$. În tranziția de fază de ordinul al doilea la H_{c2} , $\langle \psi^2(r) \rangle$ tinde la zero liniar, ca expresia $(H_{c2} - H_a)$. Prin urmare și M tinde la zero după aceeași lege. Se găsește expresia

$$M = \frac{B}{\mu_0} - H_a = \frac{2(H_a - H_{c2})}{\eta(2\kappa^2 - 1)}, \quad \frac{H_{c2} - H_a}{H_{c2}} \ll 1 \quad (3.19)$$

unde $\eta = \langle \psi^4 \rangle / \langle \psi^2 \rangle^2 \geq 1$, este un parametru care caracterizează dependența spațială a lui ψ . Magnetizarea se anulează la $H_a = H_{c2}$ și tranziția este de ordinul al doilea. În relația de mai sus intervine la numitor factorul $2\kappa^2 - 1$ care este egal cu zero la $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Pentru $\kappa < 1/\sqrt{2}$ supraconductorul este de speța I și prezintă o tranziție de speța I la H_c , unde M are o discontinuitate. Pentru $\kappa > 1/\sqrt{2}$ supraconductorul este de speța a II-a și prezintă tranziții de speța a II-a la H_{c1} și H_{c2} . Curbele de magnetizare pentru cele două tipuri de supraconductori sunt reprezentate în Fig. 2.15. Deși curbele diferă între ele ca formă, aria de sub curbă este în toate cazurile egală cu energia de condensare $H_c^2 \mu_0 / 2$. Trebuie de asemenea avut în vedere că teoria GL este valabilă în apropierea lui T_c .

Panta magnetizării

$$\frac{dM}{dH_a} = \frac{1}{\eta(2\kappa^2 - 1)}$$

poate fi utilizată pentru determinarea lui κ dacă se cunoaște η și invers.

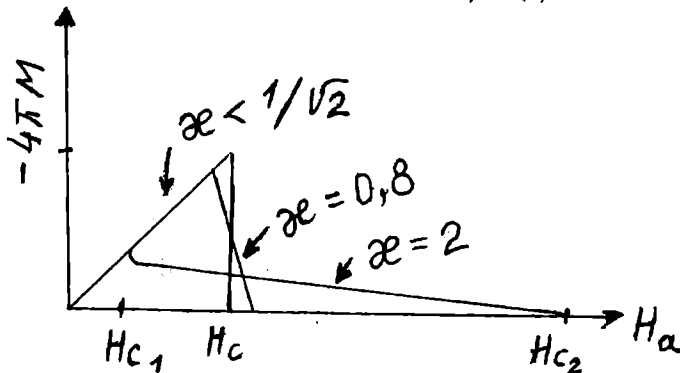


Fig. 3.2.

3.3.4. Concluzii

Tranziția unui supraconductor de speța a II-a în stare normală în prezența unui câmp magnetic, la o temperatură mai mică decât temperatura de tranziție, are loc astfel: La câmpuri magnetice mai mici decât H_{c1} (câmpul magnetic critic inferior), câmpul magnetic nu pătrunde în interiorul supraconductorului și $M = -H_a$. În cazul unui eșantion de formă cilindrică, după ce se atinge valoarea câmpului critic H_{c1} , câmpul magnetic exterior începe să pătrundă în volumul eșantionului sub forma unor vortexuri izolate și foarte depărtate unul de altul. Fiecare vortex conține o cuantă de flux magnetic. În centrul vortexului câmpul este maxim și are aproximativ valoarea $2H_{c1}$, iar parametrul de ordonare este egal cu zero. Pe măsura depărtării de axa centrală a vortexului, parametrul de ordonare crește și la distanța de ordinul ξ atinge valoarea ψ_0 corespunzătoare temperaturii date la $H=0$. La distanțe de ordinul λ_L , câmpul scade până la zero. Pe măsură ce câmpul extern crește, crește densitatea de vortexuri până ce centrele lor se apropie la distanța de ordinul ξ între ele. În cazul ideal, vortexurile formează o structură periodică bidimensională cu celula elementară un triunghi echilateral. Cu creșterea în continuare a câmpului magnetic, vortexurile nu se mai apropie în continuare unul de altul, câmpul magnetic în regiunile supraconductoare crește monoton până când atinge valoarea câmpului extern și la H_{c2} (câmpul critic superior) întregul eșantion trece în stare normală. Însă, într-un supraconductor sub formă de strat subțire, de grosime aproximativ egală cu ξ , supraconductibilitatea dispare la un câmp $H_{c3} = 1,7 H_{c2}$, câmpul la care dispare supraconductibilitatea de suprafață, atunci când H se aplică paralel cu suprafața.

3.4. Structura de vortexuri în supraconductorii cu temperatură critică înaltă

Materialele supraconductoare cu temperatură critică înaltă sunt puternic anizotrope. Ele pot fi considerate ca o succesiune de straturi de CuO_2 puternic conductoare, separate de alte straturi de atomi. De exemplu, celula elementară a $Tl_2Ba_2CaCu_2O_8$ ($Tl2212$) sau $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ ($Bi2212$) conține două plane de CuO_2 separate prin ioni de Ca . Fiecare grup de două plane CuO_2 este separat de următorul prin strate izolatoare de BaO , SrO , TlO și, respectiv,

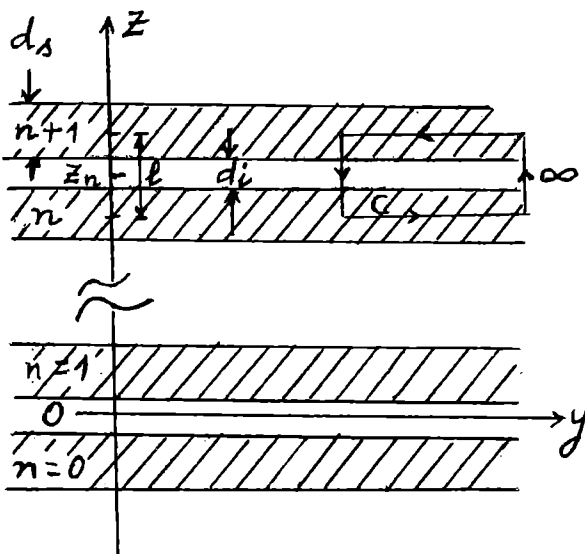


Fig. 3.3.

BiO . În $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ($Y123$) celula elementară conține două plane de CuO separate, de asemenea, de următoarele două plane (ale altei celule elementare) prin strate izolatoare de BaO . Așa cum se reprezintă în Fig. 2.16, considerăm straturile paralele cu planul (xy) (planul (ab)) cu centrele straturilor izolatoare la $z=z_n=ns$, $n=0,1,2,\dots$. Straturile supraconductoare (planele duble de CuO_2) au grosimea d_s , iar straturile izolatoare au grosimea d_i (acestea sunt straturile izolatoare amintite mai sus), $d_s+d_i=1$ =perioada structurii. Valoarea lui 1 depinde de structura materialului și este, în general, $\sim 10 \text{ \AA}$. În $Y123$, 1 corespunde constantei c a rețelei, pe când în $Bi2212$, $1=c/2$. În toate cazurile, s-a

observat o supraconductibilitate puternică într-o direcție paralelă cu straturile și o supraconductibilitate mult mai slabă în direcția perpendiculară pe acestea. Supraconductibilitatea în structuri compuse din straturi alternative supraconductoare și izolatoare a fost studiată de Lawrence și Doniach [2] care au considerat această structură ca o suprapunere de straturi supraconductoare cuplate Josephson. Supraconductibilitatea în interiorul straturilor, care este bidimensională, se studiază utilizând teoria *GL*.

Dacă lungimea de coerență este mare în comparație cu perioada 1 a structurii, atunci structura discretă se comportă ca una continuă și pentru studiul ei se aplică teoria *GL* pentru un mediu continuu anizotrop. Dacă lungimea de coerență ξ_c perpendiculară pe straturi devine mai mare decât perioada structurii, nu se mai poate aplica teoria *GL* pentru medii anizotrope, ci în acest caz se aplică teoria Lawrence-Doniach a straturilor cuplate Josephson. În acest ultim caz, un vortex este o suprapunere de vortexuri bidimensionale conectate prin efect Josephson [3]. În cele ce urmează, vom prezenta aceste două modele.

3.4.1. Teoria Ginzburg-Landau pentru medii anizotrope

În cele prezentate până aici am utilizat teoria *GL* pentru medii izotrope. Deși, teoria *GL* este justificată pe baza teoriei *BCS* numai la temperaturi foarte apropiate de T_c [4], ea se utilizează și în afara acestui domeniu de valabilitate pentru a obține estimări numerice (cu o precizie mai bună de 25%) ale câmpurilor critice H_{c1} și H_{c2} . În absența câmpului magnetic și a curentului electric, parametrul de ordonare *GL*, ψ poate fi considerat ca o mărime ψ_0 reală și pozitivă, dependentă de temperatură. Atunci când sunt prezenți un câmp magnetic local H și un curent j , ψ este o mărime complexă și poate fi scrisă $\psi = f \exp(i\theta)$, unde f și θ sunt mărimi reale. La echilibru ($H=0$), $f=1$, însă pentru H și j diferiți de zero, f este în general mai mic decât unitatea. În supraconductorii oxidici cu T_c înaltă κ este de ordinul 100. Deoarece aceste materiale sunt puternic anizotrope, trebuie să luăm în considerare această anizotropie în teoria *GL*. Cea mai simplă cale este să generalizăm teoria *GL* prin introducerea unui tensor anizotrop al masei efective.

Într-un sistem de referință cu axele principale x_i ($i=1,2,3=a,b,c$), tensorul masei efective este diagonal și elementele diagonale sunt normate, astfel că $m_1 m_2 m_3 = 1$. Ecuațiile *GL* se modifică, astfel că parametrul de ordonare de-a lungul lui x_i are lungimea de coerență $\xi_i = \xi / \sqrt{m_i}$. În mod analog, adâncimea de penetrație asociată cu j_p componenta curentului de ecranare care circulă de-a lungul lui x_p este $\lambda_i = \lambda \sqrt{m_i}$. Sunt satisfăcute relațiile

$$\begin{aligned} (\xi_1 \xi_2 \xi_3)^{1/3} &= \xi \\ (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{1/3} &= \lambda \end{aligned} \quad (4.1)$$

și

$$H_c = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \pi \sqrt{2} \lambda \xi} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \pi \sqrt{2} \lambda_i \xi_i} \quad (4.2)$$

ca și în cazul izotrop. Câmpul critic termodinamic H_c din volum este o mărime scalară, definit prin densitatea de energie de condensare $\mu_0 H_c^2 / 2$. S-a găsit experimental că în Y123 adâncimile de penetrație sunt în raportul $\lambda_a : \lambda_b : \lambda_c = 1,2 : 1,5,5$ [5-6]. Rezultă că $m_a = 0,4$, $m_b = 0,3$, $m_c = 8,8$. Se observă că adâncimile de penetrație λ_a și λ_b sunt mult mai mici decât λ_c , deoarece curenții de

ecranare de-a lungul planelor CuO_2 (în direcția a sau b) circulă mult mai ușor decât în direcția c . Mai mult decât atât, λ_b în Y123 este ceva mai mic decât λ_a , deoarece curentul paralel cu planele CuO_2 circulă mai ușor de-a lungul șirurilor CuO (în direcția b) decât perpendicular pe aceste șiruri (în direcția a). În Bi2212 anizotropia este mai mare decât în Y123. S-a găsit [7] $m_a = m_b$ și $m_c/m_a = 3000$, de unde $m_a = 0,07$, $m_c = 200$. Este important să menționăm că adâncimea de penetrație depinde de densitatea supracurentului de ecranare j , nu de direcția câmpului magnetic local H . Considerăm un monocristal clivat normal pe axa principală cu suprafața plană în planul (xy). Aplicarea unui câmp magnetic slab H_a de-a lungul unei axe principale paralelă cu suprafața generează un curent de ecranare de densitate j de-a lungul celeilalte axe principale, adică paralel cu suprafața. Această componentă a lui j și câmpul său local corespunzător \vec{H} ($\vec{j} = \nabla \times \vec{H}$) scad exponențial cu $\exp(-x/\lambda_j)$, unde x este distanța în probă, iar indicele i se referă la axa de-a lungul căreia circulă curentul j . În teoria GL cu masă efectivă anizotropă, penetrația câmpului magnetic este guvernată de ecuațiile lui Maxwell și de cea de a doua ecuație GL

$$j = \frac{f^2}{\mu_0 \lambda_i^2} A_{st}$$

care reprezintă corelația dintre componenta i ($i=1,2,3,=x,y,z$) a densității \vec{j} a supercurentului și componenta potențialului vector invariant la etalonare $\vec{A}_s = \vec{A} + (\Phi_0/2\pi)\nabla\theta$. Ca și în cazul izotrop, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ și θ este faza parametrului de ordine redus $(\psi/\psi_0)=f \exp(i\theta)$, care încă poate fi considerat funcția de undă a perechii Cooper. Pentru un vortex centrat pe axa x expresia pentru câmpului magnetic în modelul London, presupunând $f=1$ în afara miezului este [8]

$$B_x(y, z) = \frac{2\Phi_0}{\lambda_b \lambda_c} K_0(R) \quad (4.3)$$

$$R = \left[\left(\frac{y}{\lambda_c} \right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_b} \right)^2 \right]^{1/2}$$

unde K_0 este funcția Bessel de ordinul zero. Scăderea cu distanța în direcția axei y (axa b) este aproximativ exponențială, cu adâncimea de penetrație λ_c . Motivul pentru care adâncimea de penetrație este λ_c și nu λ_b este că lungimea de scădere este asociată cu direcția curentului de ecranare și pentru câmpul care pătrunde (scăzând) pe axa y , acești curenți sunt îndreptați în direcția z . În mod analog, de-a lungul axei z (axa c) curenții de ecranare circulă paralel cu direcția b și, deci, câmpul magnetic scade exponențial cu λ_b . Contururile cu H_x constat, ca și liniile de curent j , sunt elipse

$$\left(\frac{y}{\lambda_c} \right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_b} \right)^2 = const$$

În Fig. 2.17 este reprezentată o secțiune transversală printr-un astfel de vortex, pentru raportul maselor efective aproximativ egal cu cel din Y123. Miezul vortexului în modelul London este definit aproximativ de elipsa

$$\left(\frac{y}{\lambda_c} \right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda_b} \right)^2 = \left(\frac{\xi_x}{\lambda_c} \right)^2 = \left(\frac{\xi_c}{\lambda_b} \right)^2 = \frac{m_a}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa_a^2}$$

Densitatea supracurentului atinge valoarea maximă la marginea miezului. $\kappa = \lambda/\xi$ este parametrul GL și $\kappa_a = \kappa/\sqrt{m_a}$ este un κ efectiv al vortexului aliniat de-a lungul direcției a . Semiaxa majoră de-a lungul axei y (axa b) este ξ_b și semiaxa minoră de-a lungul axei z (axa c) este ξ_c . Raportul

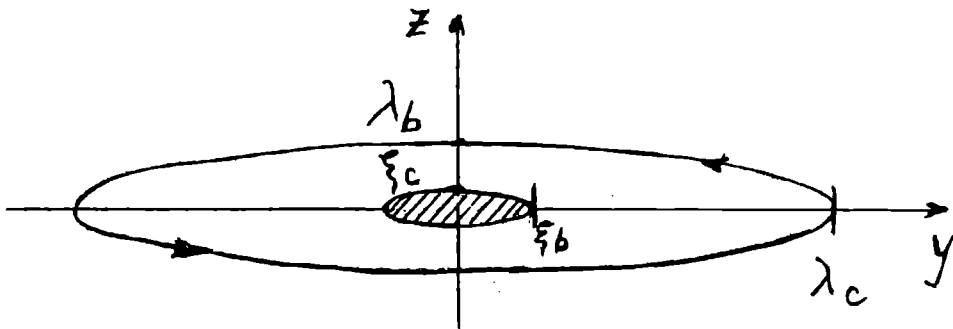


Fig. 3.4.

$\xi_b/\xi_c = (m_c/m_b)^{1/2}$. În interiorul miezului $H_x = \text{constant}$ și $f=0$ în acord cu modelul London. În teoria GL, f scade ușor la zero și are valoarea zero numai pe axa vortexului. În Fig. 2.17 fluxul este aliniat de-a lungul axei x (direcția a). Elipsa exterioară reprezintă conturul cu $H_x = \text{constant}$ care este, de asemenea, linia de curent \vec{j} (săgeata indică sensul curentului). Aria hașurată din centru reprezintă miezul Abrikosov, unde parametrul de ordonare este micșorat semnificativ. Axa z (direcția c) este normală pe planele CuO_2 și lungimile de coerență λ_b și λ_c sunt de 100 de ori mai mici decât adâncimile de penetrație λ_c și λ_b . Teoria GL pentru mediu anizotrop se aplică numai când este îndeplinită condiția $\lambda_c \gg 1$ (distanța dintre straturi). Atunci când $\kappa_a \gg 1$, energia pe unitatea de lungime a vortexului situat de-a lungul axei a este $\mathcal{F}_{1a} = \Phi_0/H_{c1a}$, unde H_{c1a} este dat în teoria GL pentru mediu anizotrop, de expresia [9]

$$H_{c1a} = \frac{\Phi_0}{\mu_0 \lambda_b \lambda_c} (\ln \kappa_a + 0,50) \quad (4.4)$$

Dacă vortexul este centrat de-a lungul axelor y sau z , expresiile corespunzătoare pentru H_i și H_{cli} (ec. 4.3 și 4.4) se obțin prin permutări ciclice ($x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ sau $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$).

În cele de mai sus, am considerat vortexurile situate de-a lungul axelor principale. Atunci când acestea nu sunt situate de-a lungul axelor principale, problema este ceva mai complexă. Atât diagrama reprezentată în Fig. 2.17, cât și câmpul critic H_{c1} dat de ecuație (4.4), în care la argumentul logaritmului apare $\kappa_a = \lambda_c/\xi_b = \lambda_b/\xi_c$ sunt valabile numai când $\xi_c \gg 1$. Pentru $\xi_c < 1$ se utilizează aproximația Lawrence-Doniach.

3.4.2. Modelul Lawrence-Doniach

Atunci când $\xi_c < 1$, se poate spune că miezul vortexului alunecă între strate. În acest caz, nu mai este valabil modelul mediului anizotrop continuu (ξ_c nu poate apare în nici o expresie teoretică ce descrie fenomenul) și trebuie utilizat un model teoretic în care straturile sunt considerate discrete. Acesta este modelul Lawrence-Doniach. Calculul rețelei de vortexuri, pe baza acestui model [3], dă pentru distribuția supracurentului rezultatul reprezentat în Fig. 2.18. În această figură se reprezintă un singur vortex (distribuția curentului) situat în regiunea barierei joncțiunii Josephson centrate într-o structură de tip Lawrence-Doniach infinită. Straturile supraconductoare sunt hașurate, iar straturile izolatoare (ale joncțiunilor Josephson) sunt nehașurate. Fluxul este paralel cu axa x (direcția a perpendiculară pe hârtie). Adâncimile de penetrație λ_b și λ_c caracterizează scăderea componentelor supracurentului în direcțiile c și, respectiv, b . Liniile de curent care, de asemenea, reprezintă contururi de câmp magnetic constant ar fi elipse dacă nu ar exista straturile izolatoare. Dacă valoarea calculată a lui ξ_c este ceva mai mică decât 1, perioada straturilor, se poate presupune cu siguranță că valoarea

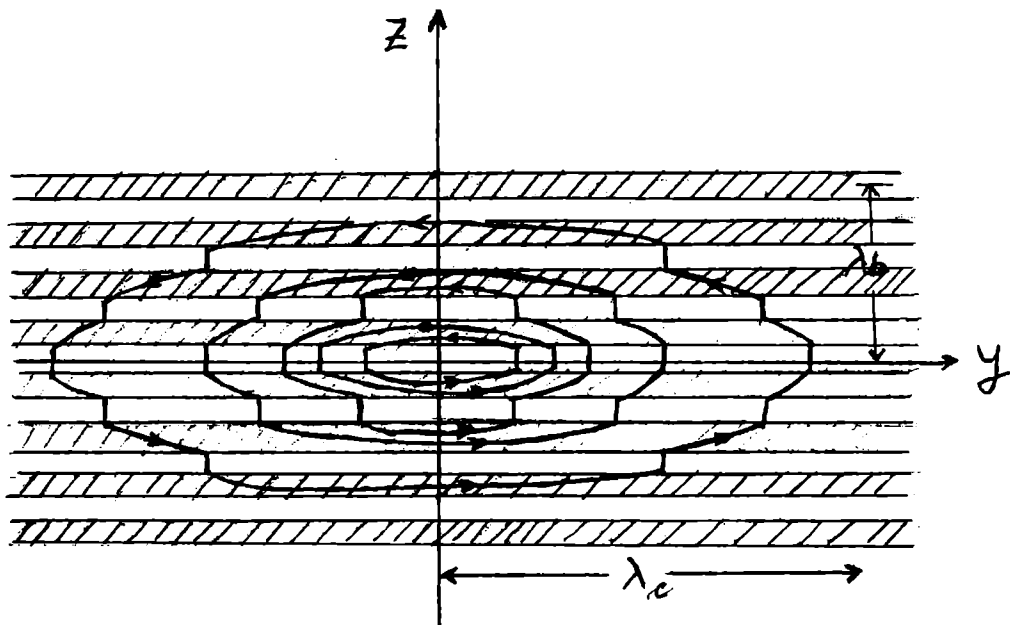


Fig. 3.5.

parametrului de ordonare este constantă pe toate straturile supraconductoare. Câmpul magnetic de-a lungul axei x pentru vortexul reprezentat în Fig. 2.18 este [10]

$$\mu_0 H_x(y, z) = \frac{2\Phi_0}{\lambda_b \lambda_c} K_0(\tilde{R}) \quad (4.5)$$

unde K_0 este funcția Bessel de ordinul zero și

$$\begin{aligned} \tilde{R} &\equiv (\tilde{u}_0^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)^{1/2} \\ \tilde{y} &\equiv y / \lambda_c, \quad \tilde{z} \equiv z / \lambda_b, \quad \tilde{u}_0 \equiv l / 2\lambda_0 \ll 1 \end{aligned}$$

Densitatea de curent prin fiecare joncțiune Josephson are numai o componentă z dată de $J_z = J_0 \sin \Delta\theta$, unde $\Delta\theta$ este diferența de fază pe joncțiunea Josephson. În stratul central ($z=0$) curentul este dat de expresia

$$J_z(y, 0) = J_0 \left(l / \lambda_b \right) K_1(\tilde{R}_0) (\tilde{y} / \tilde{R}_0) \quad (4.6)$$

unde $\tilde{R}_0 = (\tilde{u}_0^2 + \tilde{y}^2)^{1/2}$. Pentru $|\tilde{y}| \ll 1$, se obține

$$J_z(y, 0) = 2J_0 \tilde{u}_0 \tilde{y} / (\tilde{u}_0^2 + \tilde{y}^2) \quad (4.7)$$

care este maxim la $\tilde{y} = \tilde{u}_0$ sau $y = y_{max} = (1/2)(\lambda_b / \lambda_c)$, unde $J_z(y_{max}, 0) = J_0$, densitatea maximă a curentului Josephson. Deoarece densitatea de curent atinge valoarea sa maximă de-a lungul axei y la $y = +y_{max} = \pm(1/2)(\lambda_c / \lambda_b)$ și de-a lungul axei z la $z = +1/2$, ne putem imagina miezul Josephson având secțiunea transversală sub forma unei elipse cu semiaxa majoră $(1/2)(\lambda_c / \lambda_b)$ și semiaxa minoră $1/2$. Raportul dintre aceste semiaxe este $\lambda_c / \lambda_b = (m_c / m_b)^{1/2}$, același raport ca și pentru miezul Abrikosov reprezentat în Fig. 2.17. Energia pe unitatea de lungime a vortexului Josephson de-a lungul axei a , reprezentat în Fig. 3.4 este dată de expresia [11-12]

$$\begin{aligned} E_{1a} &= \Phi_0 H_{c1a} \\ \mu_0 H_{c1a} &= \frac{\Phi_0}{\lambda_b \lambda_c} \left[\ln \left(\frac{\lambda_b(T)}{l} \right) + 1,12 \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Se observă că, în timp ce pentru vortexul Abrikosov argumentul logaritmului (în ecuația (4.4)) este $\kappa = \lambda_b / \xi_c$, relația (4.8) conține ca limită inferioară, în locul lui ξ_c , distanța 1 dintre straturi. Comparând structura reprezentată în Fig. 3.2 cu compusul ceramic Y123, identificăm straturile supraconductoare cu straturile duble de CuO_2 care înconjoară straturile de Y. Straturile izolatoare sunt straturile rămase de CuO , precum și straturile de BaO . Dacă fluxul este orientat de-a lungul axei z, nu de-a lungul axei x, densitatea de curent circulă după elipsa paralel cu planul xy. Nu există densitate de curent în direcția z și cuplajul Josephson nu joacă nici un rol. Câmpul magnetic generat de un astfel de vortex calculat pe baza modelului London anizotrop se obține din ecuația (4.3) prin permutări ciclice

$$H_z(x, y) = \frac{2\Phi_0}{\mu_0 \lambda_a \lambda_b} K_0(R)$$

$$R = \left[\left(\frac{x}{\lambda_b} \right)^2 + \left(\frac{y}{\lambda_a} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Această relație este valabilă la distanță de miezul Abrikosov. Pentru un vortex tridimensional, se poate arăta că o asemenea relație se obține prin suprapunerea vectorială a câmpurilor generate de vortexuri bidimensionale (unul în fiecare strat) cuplate Josephson [3]. Studiul simetriei rețelei de vortexuri s-a făcut prin experiențe de decorare [13], precum și prin tehnica reflexiei de neutroni la unghiuri mici [14].

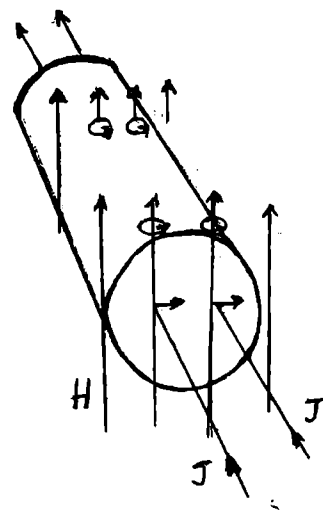


Fig. 3.6.

3.5. Captarea fluxului magnetic în supraconductorii de speța a II-a

Am văzut că, într-un inel supraconductor fluxul magnetic se menține chiar dacă se îndepărtează câmpul magnetic aplicat. Acesta este fenomenul de captare a fluxului magnetic și apare în inel, indiferent dacă materialul este supraconductor de speța I sau supraconductor de speța a II-a. Însă, experimental, s-a pus în evidență acest fenomen chiar în supraconductorul de speța a II-a simplu conex (adică fără găuri) și o manifestare a sa o reprezintă ireversibilitatea curbei de magnetizare (Fig. 3.2). Efectul de captare se datorează imperfecțiunilor (impurități, dislocații etc.) care au dimensiunile comparabile cu lungimea de coerență. Ireversibilitatea (histerezisul) curbei de magnetizare se manifestă în toți supraconductorii de speța a II-a între H_{c1} și H_{c2} (unde aceștia se găsesc în stare mixtă). În unele probe, din materiale cu valoare mică a lui κ , histerezisul se manifestă și între H_{c2} și H_{c3} , datorită unui curent persistent indus la suprafața supraconductorului prin modificarea câmpului extern. Efectul este redus dacă suprafața se face rugoasă, pentru a împiedica circulația curentului de suprafață. Captarea fluxului a condus la ideea existenței unor puncte de străpungere de către flux în volumul supraconductorului. Nu se cunoaște încă exact cauza fizică a străpungerii. Se crede că această cauză ar fi forța imagine atractivă care ar exista la frontiera supraconductor-incluziune și ar conduce la străpungerea incluziunii de către flux. De asemenea, tensiunea asociată defectelor rețelei poate conduce la această străpungere. Deoarece diametrul miezului vortexului (unde fluxul a străpuns materialul) se întinde pe o lungime de ordinul unei lungimi de coerență ξ în regiunea supraconductorului, rezultă că vor fi străpunse de către flux și vor da naștere la vortexuri numai acele incluziuni sau

defecte care au diametrul mai mare decât ξ . Lungimea de coerență variază de la 1000 Å în Nb la 50 Å în V_3Ga și la 12-18 Å în Y123 și 20-40 Å în Bi2212. Prin urmare, datorită variației lui ξ de la un material la altul și dimensiunile defectelor de la care poate apare străpungerea vor diferi. Energia liberă în regiunea incluziunii este mai mare decât în restul materialului (deoarece aceasta este o regiune normală sau cu temperatură critică mai mică) și deci, ea va avea un efect repulsiv asupra perechilor de electroni. Prin urmare, vortexul în incluziune se va afla în echilibru stabil. Într-un supraconductor de speța a II-a, în care s-a stabilit o stare mixtă (de vortexuri), sub acțiunea unui câmp magnetic extern curentul nu circulă numai la suprafață, ca în supraconductorul de speța I, ci în întreg volumul materialului. Considerăm un supraconductor de speța a II-a situat într-un câmp magnetic transversal (pe lungimea sa) mai mare decât H_{c1} și prin care trece un curent (de transport) I , Fig. 3.5. Curentul J de transport prin probă este, evident, diferit de curenții circulatori din jurul miezurilor vortexurilor. Supraconductorul se află în stare mixtă și deci, el este străbătut de vortexuri ale căror miezuri se găsesc în stare de conducție normală. Între vortex și curentul electric se exercită forța Lorentz, F_L , care este perpendiculară atât pe direcția curentului de transport, cât și pe direcția fluxului. Fie lungimea probei supraconductoare egală cu l și aria secțiunii transversale egală cu S . Prin probă trece un curent electric I și se aplică un câmp magnetic de inducție B , care face unghiul α cu direcția curentului. Forța Lorentz care acționează asupra probei este $BIl \sin\alpha$. Fiecare vortex conține o cantitate de flux Φ_0 și dacă n este numărul de vortexuri pe unitatea de arie a suprafeței perpendiculare pe B , atunci $B = n\Phi_0$ și, prin urmare, forța Lorentz se scrie $n\Phi_0 Il \sin\alpha$. Numărul total de vortexuri este egal cu nA și forța Lorentz pe unitatea de lungime a unui vortex este $\Phi_0 (I/A) \sin\alpha$. Dacă notăm densitatea medie de curent $J = I/A$, atunci forța Lorentz care acționează pe unitatea de lungime a unui vortex este

$$\mathcal{F}_L = J\Phi_0 \sin\alpha \quad (5.1)$$

Liniile de flux captate sunt menținute în stare staționară datorită unei forțe de captare \mathcal{F}_c care se opune forței Lorentz. Forța de captare este definită, de asemenea, pe unitatea de lungime a vortexului. Ea este determinată de tensiunea mecanică din jurul incluziunii, calculându-se din relația $\mathcal{F}_c = -dU/dx$, unde U este variația energiei mecanice datorită prezenței vortexului. Curentul critic J_c este curentul care produce o forță Lorentz suficientă pentru a deplasa vortexul din centrul de captare și este definit de relația

$$J_c \Phi_0 \sin\alpha = \mathcal{F}_c \quad (5.2)$$

Se desprind următoarele concluzii: (1) Valoarea curentului critic depinde de unghiul dintre curent și câmpul magnetic. Notăm că în relația (5.2), J_c reprezintă densitatea curentului critic. (2) Curentul critic este cu atât mai mare cu cât numărul de imperfecțiuni din probă este mai mare (deoarece forța de captare medie pe vortex este mai mare).

Procentul de flux captat în probă depinde de temperatură, după relația

$$p(T) = p(0) \left\{ \frac{\gamma + \lambda(T) - \xi(T)}{\gamma + \lambda(0) - \xi(0)} \right\} \quad (5.3)$$

unde γ este o dimensiune caracteristică a canalului prin care a pătruns fluxul, λ este adâncimea de penetrație a câmpului magnetic și ξ este lungimea de coerență. Relația (5.3) este scrisă presupunând că aria efectivă de captare a unui canal crește datorită penetrației câmpului magnetic în regiunea înconjurătoare și scade datorită efectului de coerență la interfața canalului cu regiunea înconjurătoare (supraconductoare). Dacă se notează circumferința canalului cu C , atunci modificarea efectivă a ariei secțiunii sale este $C(\lambda - \xi)$ și aria efectivă de captare se poate scrie $A_e = A_0 + C(\lambda - \xi)$, unde A_0 este aria metalurgică a incluziunii (sau dislocației). Pe baza acestor supoziții se poate scrie relația (5.3). Dependența de temperatură a procentului de flux captat depinde de raportul $\lambda(T)/\xi(T) = \kappa$. Astfel, pentru $\kappa \geq 2$, p crește cu creșterea T , iar pentru $\kappa < 2$, scade.

În ultimul timp s-au intensificat cercetările în direcția creșterii densității curentului critic în materialele supraconductoare ceramice prin creșterea densității imperfecțiunilor de captare a

fluxului. Aceasta s-a obținut în două cazuri: (a) apariția frontierelor de tip „alunecare” (twin care este caracteristică materialului Y123 [15] și (b) producerea artificială a defectelor columnare prin iradiere cu ioni grei [16]. O frontieră de „alunecare” (twin) este reprezentată în Fig. 3.7. Pozițiile atomilor dintr-o parte a frontierei se obțin prin reflexia pozițiilor atomilor din cealaltă parte a frontierei într-un

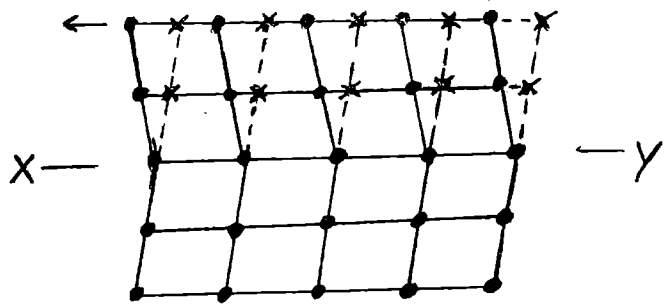


Fig. 3.7.

plan de simetrie al cristalului (pe figură, planul XY).

Cu alte cuvinte, o regiune a cristalului este imaginea în oglindă a celeilalte. Frontierele de tip twin apar în procesul de creștere a cristalului sau prin deformarea acestuia. Ele apar în materialele care au o energie mică de formare a defectelor, ceea ce implică o energie mică pentru o deplasare (mică) a atomului. Defectele columnare sunt cilindri din material nesupraconductor de diametru ξ (dimensiunea miezului vortexului). Creșterea densității curentului critic apare nu numai datorită creșterii numărului de acest tip de defecte, ci și datorită creșterii energiei de captare în raport cu alte defecte. Cititorul găsește un studiu detaliat asupra acestor probleme în [17].

3.6. Deplasarea fluxului

Am arătat în paragraful precedent că, dacă se mărește curentul de transport prin probă deasupra valorii critice, astfel că forța Lorentz depășește forța care menține vortexul blocat în canalul de străpungere, atunci vortexul se deplasează prin probă. Această deplasare poate fi lentă sau în salt, ultimul caz fiind specific materialului cu densitate mare de defecte. Deplasării vortexului în material i se opune o forță de „vâscozitate”, ceea ce determină un consum de lucru mecanic de către sursa care generează curentul de transport. Apare o tensiune electrică de-a lungul probei, care se pune în evidență experimental. Una din cauzele existenței forței de vâscozitate este apariția unor curenți turbionari generați de tensiunea electrică indusă de deplasarea fluxului magnetic (a vortexurilor), în acord cu legile generale ale electromagnetismului, apariția tensiunii electrice pe probă corespunde la situații diferite în supraconductorii de speța I, față de supraconductorii de speța a II-a. În supraconductorii de speța I, atunci când se depășește valoarea curentului critic, tensiunea care apare se datorează curentului de transport care trece prin regiunile cu conducție normală, care cuprind întreaga probă. Dimpotrivă, în supraconductorul de speța a II-a, chiar atunci când vortexurile se deplasează (la valori ale curentului deasupra curentului critic), materialul rămâne încă în stare mixtă cu regiuni supraconductoare care sunt continue de-a lungul întregii probe, separate de regiunile normale ale vortexurilor. La o valoare dată a curentului de transport, tensiunea care apare este independentă de timp, ceea ce arată că vortexurile se deplasează cu o viteză constantă și deci, forțele care acționează asupra unui vortex se echilibrează. Notând viteza de deplasare a vortexului cu v , forța de vâscozitate din partea materialului care se opune deplasării vortexului este

$$\vec{F}_v = -\eta \vec{v} \quad (6.1.)$$

unde η este coeficientul de vâscozitate. Notăm cu \vec{v}_i viteza cu care se deplasează electronii din curentul de transport. Datorită forței de vâscozitate, vortexurile se vor deplasa cu o viteză \vec{v}_v mai mică decât \vec{v}_i , adică în direcția curentului de transport va exista o viteză relativă a vortexurilor

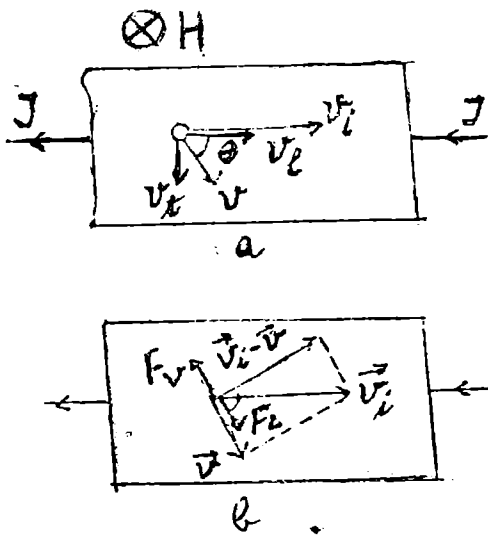


Fig. 3.8.

față de electronii din curentul de transport. Va apare o forță Lorentz care va acționa asupra vortexului și-i va imprima o viteză \vec{v}_i normală pe conductor (Fig. 3.8 a). Viteza \vec{v} rezultantă cu care se vor deplasa vortexurile face un unghi θ cu direcția curentului de transport. Dacă notăm cu $(\vec{v}_i - \vec{v})$ viteza relativă a curentului de transport față de vortex, forța Lorentz care deplasează vortexul în direcția v în unghi drept față de $\vec{v}_i - \vec{v}$ (Fig. 3.8 b) are mărimea

$$\mathcal{F}_L = n_s q |\vec{v}_i - \vec{v}| \Phi_0 \quad (6.2)$$

unde n_s este concentrația perechilor de electroni. Pentru ca viteza vortexurilor să fie constantă, este necesar ca $\mathcal{F}_L + \mathcal{F}_v = 0$, de unde se obține

$$|\vec{v}_i - \vec{v}| = \frac{\eta v}{n_s q \Phi_0} \quad (6.3)$$

iar unghiul θ pe care direcția de deplasare a vortexurilor îl face cu curentul electric este dat de relația

$$\text{tg} \theta = \frac{\eta}{n_s q \Phi_0} \quad (6.4)$$

Cu cât η este mai mare, cu atât q este mai aproape de 90° . Măsurătorile de efect Hall pe supraconductori de speța a II-a au arătat că θ este foarte apropiat de 90° (unghiul Hall este $90^\circ - \theta$). Între capetele probei apare o tensiune indusă de deplasarea vortexurilor. Dacă se conectează un voltmetru între capetele probei (în direcția curentului de transport) situate la distanța d între ele, atunci tensiunea măsurată este dată de expresia

$$V = n \Phi_0 v_i d \equiv \frac{d\Phi}{dt} \quad (6.5)$$

unde n este numărul de vortexuri pe unitatea de arie, v_i este viteza transversală de deplasare a vortexurilor, Φ_0 este fluxul magnetic din interiorul unui vortex (egal cu o cuantă de flux). Expresia (6.5) reprezintă rata de variație a fluxului între cele două contacte. Această tensiune este aceeași cu tensiunea rezistivă dată de curentul I , deoarece consumul de putere este suplinit de către sursa de curent. Menționăm că această tensiune (6.5) apare datorită deplasării vortexurilor, indiferent de cauza care produce această deplasare. De exemplu, dacă prin probă se stabilește un gradient de temperatură, apare de asemenea o deplasare a vortexurilor și o tensiune electrică (perpendiculară pe direcția gradientului de temperatură) și a câmpului magnetic). Pentru coeficientul de vâscozitate s-a găsit relația empirică

$$\eta = \frac{1}{2} \pi \hbar H_{c2} \sigma / q$$

unde σ este conductivitatea materialului normal [18].

3.7. Modelul Anderson-Kim pentru deplasarea vortexurilor

În supraconductorii reali, la densități de curent mai mici decât o anumită valoare numită densitate critică de curent (j_c) și la temperaturi joase (sub T_c), vortexurile sunt fixate de către neomogeneitățile din material datorită scăderii energiei libere prin poziționarea miezului

normal al vortexului în centrul de fixare. La temperaturi finite, energia termică permite deplasarea vortexurilor dintr-un punct de fixare în altul [19].

În supraconductorii clasici, acest fenomen este observat doar lângă T_c , pe când în supraconductorii cu temperatură de tranziție ridicată, datorită valorii mari a energiei termice $k_B T$, fenomenul se manifestă pe un interval mare de temperatură, sub T_c . Într-un cilindru gol sau într-un solenoid supraconductor în care există curent persistent, fenomenul se pune în evidență prin scăderea în timp (după o lege logaritmică) a fluxului captat (ne referim la supraconductorii de speța a II-a). Dacă fenomenul de deplasare prin activare termică a vortexurilor are loc într-un supraconductor prin care trece curent electric, atunci acesta este pus în evidență prin apariția unei tensiuni electrice, care este proporțională cu viteza de deplasare a vortexurilor (ecuația (6.5)). În modelul Anderson-Kim se presupune că grupuri izolate de vortexuri efectuează salturi între centre de fixare adiacente. Un grup de vortexuri acționează ca o unitate datorită interacțiunii dintre ele. În absența unui curent de transport (deci, a forței de tip Lorentz), grupul de vortexuri, de volum v_c numit volum de corelație, se găsește într-o vale de potențial de formă dreptunghiulară de înălțime U_o . Datorită activării termice apar salturi de flux magnetic peste barieră, cu frecvența v dată de o lege de tip Arrhenius

$$v = v_o e^{-u_o/k_B T} \quad (7.1)$$

unde v_o este o frecvență caracteristică de vibrație a vortexurilor. Deplasarea netă a vortexurilor este nulă, deoarece nu există direcții privilegiate. Dacă se aplică un curent de transport, densitatea forței Lorentz $\vec{J} \times \vec{B}$ determină micșorarea barierei de potențial, în sensul ei, și creșterea barierei, în sens invers. Ca urmare, se modifică și ratele salturilor vortexurilor în cele două sensuri și rezultă o rată netă de deplasare diferită de zero

$$v_+ - v_- = v_o e^{-\frac{U_o - BJv_c x}{k_B T}} - v_o e^{-\frac{U_o + BJv_c x}{k_B T}}$$

unde x este lărgimea văii de potențial. La o valoare J_o a curentului electric, bariera se anulează în sensul forței Lorentz și vortexurile încep să se deplaseze lent (să se „târnască“, de aceea în literatura străină acest fenomen se numește „flux creep“). Menționăm, de asemenea, că saltul de flux (saltul vortexului) dintr-o vale de potențial în alta se numește în literatura străină „flux jump“. Peste valoarea J_o a densității de curent, caracteristica I-V devine cuasiliniară. Se pot face următoarele notații

$$U_- = U_o - BJv_c x = U_o BJv_c x \frac{J}{J_o} = U_o \left(1 - \frac{J}{J_o}\right)$$

deoarece la $J=J_o$, $U_- = 0$. De asemenea,

$$U_+ = U_o + BJv_c x = U_o \left(1 + \frac{J}{J_o}\right) \quad J_o = \frac{U_o}{Bv_c x}$$

Am substituit, astfel, parametrii microscopici x și v_c cu parametrul macroscopic J_o , măsurabil. Câmpul electric este proporțional cu rata de deplasare a vortexurilor

$$\xi(J) = \rho J = Bv = (v_+ - v_-)xB$$

Căderea de tensiune pe probă este proporțională cu câmpul electric, astfel că se exprimă caracteristica I-V, astfel

$$= V_o \left[e^{-\frac{U_o}{k_B T}(1-I/I_o)} - e^{-\frac{U_o}{k_B T}(1+I/I_o)} \right]$$

unde V_o este un parametru fenomenologic corespunzând pe caracteristica I-V curentului I_o la care începe deplasarea fluxului. Unii autori au substituit valea de potențial dreptunghiulară cu o vale lent variabilă, de exemplu, sinusoidală [20].

În cazul unui cilindru gol în care este captat un flux magnetic de densitate B se poate scrie prin analogie cu cele de mai sus

$$\frac{dB}{dt} \sim -C e^{B/B_0}$$

astfel că

$$B = \text{const} - B_0 \ln t$$

și prin urmare curentul persistent ce circulă prin cilindru scade în timp după această lege logaritmică. Un calcul detaliat în acest caz cititorul îl găsește în [G 7].

În afara acestui model al deplasării grupurilor de vortexuri există și un model care ia în considerare dinamica colectivă a vortexurilor [21].

În încheiere facem câteva observații asupra rețelei de vortexuri. Formarea rețelei de vortexuri este rezultatul echilibrului a două interacțiuni: interacțiunea repulsivă vortex-vortex care tinde să plaseze fiecare vortex într-unul din nodurile unei rețele periodice triunghiulare și interacțiunea vortex-centru de fixare care tinde să poziționeze fiecare vortex în minimumul local al potențialului de fixare. Ordinea la distanță a vortexuri lor este distrusă de potențialul de fixare (de pe centrele de fixare) care este distribuit aleatoriu. Aranjamentul periodic, ordonat, al vortexurilor este păstrat doar într-o regiune restrânsă, numită volum de corelație, care depinde de valoarea potențialului de fixare și de elasticitatea rețelei de vortexuri. Dacă interacțiunea vortex-vortex este slabă (la câmpuri mici, puțin mai mari decât H_{c1}) și interacțiunea vortex-centru de fixare este puternică, vortexurile tind să fie fixate pe centrele de fixare, iar rețeaua de vortexuri este puternic deformată. Forța necesară pentru eliberarea unui vortex este egală cu forța de fixare. Energia termică determină vibrații ale vortexului în jurul poziției centrului de fixare. La câmpuri magnetice intermediare, unde domină interacțiunea vortex-vortex, se menține ordinea locală a vortexurilor într-un volum de corelație și nu există ordine de mare distanță.

3.8. Tranzistorul cu supraconductori cu transport de flux.

Tranzistorul cu supraconductori cu transport de flux funcționează pe principiul controlului cu ajutorul unei linii de control (poartă) altransportului de flux magnetic într-o rețea de punți supraconductoare. Se obțin în acest fel caracteristici curent-tensiune asemănătoare tranzistorului convențional [22-23]. S-au construit asemenea tranzistori din straturi subțiri de Y 123 și T 12212 [24]. Pe un substrat de exemplu din MgO se depune un strat subțire de Y 123 de 150 nm grosime. Utilizând metoda fotolitografiei și gravării cu ioni de argon se decupează din stratul supraconductor pe o anumită direcție regiuni de dimensiuni $10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ rămânând între aceste goluri regiuni supraconductoare de dimensiuni $5 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$. Acestea din urmă constituie construcțiile punților supraconductoare. Canalul de transport de flux are $105 \mu\text{m}$ lungime și $10 \mu\text{m}$ lățime și conține 5 găuri și 6 construcții. Construcțiile sunt destul de largi astfel că nu apare efect Josephson. La $10 \mu\text{m}$ distanță de intrarea canalului este construită o linie de control de $10 \mu\text{m}$ lățime izolată de acesta. În canal se induc vortexuri de către câmpul magnetic generat de către curentul de control I_c (Fig. 3.9). Vortexurile sunt puse în mișcare de către forța Lorentz care apare între vortex și curentul de polarizare I_p , astfel acestea se deplasează în lungul canalului. Așa cum se reprezintă pe figura curentului I_p circulă în direcția perpendiculară pe canal. În Fig. 3.10 se reprezintă curentul de polarizare I_p perpendicular pe canal, în funcție de tensiunea de transport de flux V_f măsurată de-a lungul canalului, pentru diverse valori ale curentului de control I_c , măsurate la 77 K. Se observă asemănarea cu caracteristicile de ieșire ale tranzistorului convențional. Se observă că tensiunea V_f de-a lungul canalului crește cu creșterea curentului de

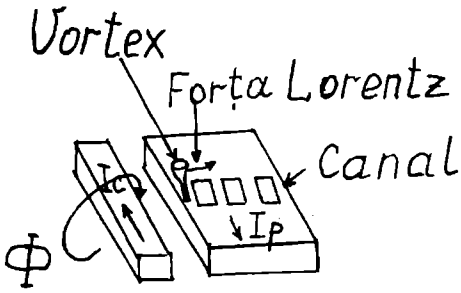


Fig. 3.9.

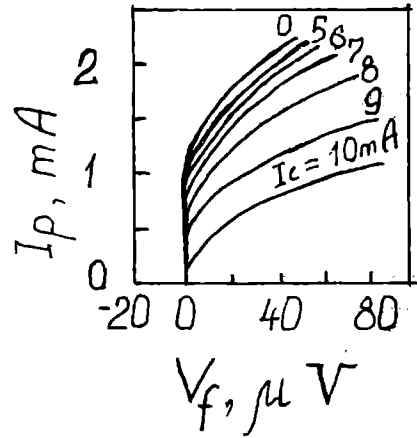


Fig. 3.10.

control. Notăm că există o tensiune de control chiar la $I_c = 0$, pentru o anumită valoare a curentului de polarizare I_p . Aceasta se datorează faptului că însuși curentul de polarizare I_p generează flux magnetic în jurul marginii canalului, care induce vortexuri în canal (vortexuri autoinduse). Viteza de deplasare a vortexurilor de-a lungul canalului se obține din dependența de câmpul magnetic a caracteristicii I-V

$$V_f = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu H \frac{\Delta S}{\Delta t} = \mu H v_x d$$

unde V_f - tensiunea pe canal, Φ - fluxul în canal, t - timpul, μ - permeabilitatea, H - câmpul magnetic, S - aria canalului, v_x - viteza de deplasare a vortexurilor, d - lățimea canalului. Câmpul magnetic la marginea de la intrarea vortexului în canal poate fi calculat din relația

$$B(G) = \mu H = \frac{\mu I_c}{2\pi s} \log\left(\frac{a_0 + w}{a_0}\right) = 0,13 I_c \text{ (mA)}$$

unde a_0 este distanța dintre linia de control și canal. Linia de control are secțiunea de formă rectangulară de lățime w și grosime s iar lungimea este considerată infinită. În dispozitivul prezentat $a_0 = s = 10 \mu\text{m}$ și prin urmare $B(G) = 0,13 I_c \text{ (mA)}$. În această evaluare nu s-a luat în considerare efectul de demagnetizare la marginea canalului. Din cele două relații de mai sus se obține o dependență liniară $V_f = f(I_c)$, pentru o valoare dată a lui I_p . Reprezentând această dreaptă din panta ei se determină viteza v_x de deplasare a vortexurilor prin canal. La $I_p = 4 \text{ mA}$ se găsește $v_x = 5 \times 10^5 \text{ m/s}$. De fapt se reprezintă $V_f - V_{f_0} = f(I_c)$ pentru I_p ca parametru, unde V_{f_0} este tensiunea pe canal la valoarea dată a lui I_p pentru $I_c = 0$. Se obține că v_x crește cu creșterea curentului I_p de polarizare. Această expresie a lui v_x este determinată numai de către vortexurile induse de către câmpul magnetic și nu se ia în considerare activarea termică. Pentru a găsi numărul de vortexuri din canal scriem

$$f = \mu H v_x d = v_x n \Phi_0$$

unde Φ_0 este cuanta de flux și n este numărul de vortexuri pe unitatea de lungime a canalului. $\mu H d = \Phi = n \Phi_0$ reprezintă fluxul pe unitatea de lungime a canalului. La valori mici ale lui I_p s-a obținut că V_x crește liniar cu I_p adică se poate scrie $v_x = \alpha I_p$ și deci $dV_f/dI_p = \alpha n \Phi_0$. La valori mari ale lui I_c dV_f/dI_p este direct proporțional cu I_c , adică numărul de vortexuri care se deplasează prin canal este direct proporțional cu I_c .

3.9. Elasticitatea rețelei de vortexuri

În supraconductorii convenționali precum și în cei cu temperatură critică înaltă, rețeaua de vortexuri (RV) nu este perfectă. Atunci când distorsiunile RV sunt mici, cum sunt cele cauzate de defecte structurale sau fluctuații termice, energia de distorsiune se calculează utilizând teoria liniară a elasticității. Atunci când deformațiile RV sunt mari (plastice) se aplică rezultatele teoriilor London și Ginzburg-Landau pentru supraconductorii anizotropi și teoria Lawrence-Doniach pentru supraconductorii stratificați.

Pentru a studia elasticitatea rețelei de vortexuri considerăm o RV situată într-un câmp magnetic static H_s de valoare mare și un câmp variabil $H(t)$ de amplitudine H_0 foarte mică. Vortexurile vor oscila reversibil în valea de potențial de captare cu aceeași frecvență ca a lui $H(t)$. Dacă vortexurile nu sunt fixe în văile de captare atunci oscilațiile lor vor avea loc între aceste văi de potențial. Ne vom referi la cazul când vortexurile sunt fixate în văile de potențial de captare într-un supraconductor izotrop. Un vortex va fi supus la o forță de revenire (restabilire) în poziția inițială, forța elastică F_{el} , care va fi proporțională cu deplasarea $u(r)$ a vortexului în interiorul văii de potențial, precum și forței Lorentz. În primă aproximație forța elastică este proporțională cu deplasarea $u(r)$ a vortexului

$$F_{el} = \frac{F_0}{r_p} u(r)$$

unde r_p este raza văii de potențial de captare iar F_0 este forța maximă de captare; $F_0/r_p = \sigma =$ constanta elastică. Densitatea (pe unitatea de volum) a forței Lorentz este

$$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B}$$

Pentru forța pe un singur vortex aceasta se scrie

$$\vec{f}_L = \vec{J} \times \Phi_0$$

Datorită forței Lorentz vortexurile tind să se deplaseze în direcție transversală pe direcția curentului. Dacă acestea se deplasează cu viteza \vec{v} , se induce un câmp electric

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}$$

care este paralel cu densitatea de curent \vec{J} . Scriem ecuația lui Maxwell care leagă densitatea de curent de rotorul câmpului magnetic

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Se obține

$$\vec{F}_L = (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{B}$$

Pentru un supraconductor de formă cilindrică de rază R (introdus într-un solenoid) se poate scrie

$$J = \frac{dH}{dr}$$

și deci

$$F_L = |\vec{F}_L| = B \frac{dH}{dr} \sim \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{\mu_0} \right)$$

Egalând forța elastică cu forța Lorentz rezultă

$$F_{el} = \frac{F_0}{r_p} u(r) = B \frac{dH}{dr} = BJ(r)$$

La această ecuație se adaugă condiția de conservare a fluxului care, pentru simetrie cilindrică, este de forma [26]

$$B_s 2\pi \left[(r_2)^2 - (r_1)^2 \right] = [B_s + B(r)] 2\pi \left[\left\{ r_2 - u(r_2) \right\}^2 - \left\{ r_1 - u(r_1) \right\}^2 \right]$$

După unele simplificări se obține

$$H(r) = H_s \frac{\partial u}{\partial r}$$

unde $r = (r_1 + r_2)/2$ și $\partial r = r_2 - r_1 \ll r$. Derivând această ecuație încăodată în raport cu r și introducând în (9.1) se obține pentru câmpul magnetic indus de $H(t)$ expresia

$$H(r) = H(R) \exp \left[-\frac{R-r}{\lambda_{el}} \right], \quad H_s \gg H$$

$$H(r) = \frac{H(R)}{1-n}$$

unde n este factorul de demagnetizare și R este raza cilindrului supraconductor iar

$$\lambda_{el} = \left[\frac{H_s r_p}{J} \right]^{1/2}, \quad H_s \gg H, \quad \lambda_{el} \gg \lambda \quad (9.3)$$

este lungimea de penetrație Campbell [25]. Expresia generalizată a adâncimii de penetrație Campbell, care ia în considerare și adâncimea de penetrație London este

$$\lambda_{el}^2 = \lambda^2 + \lambda_c^2$$

unde λ_c este dată de expresia (9.3). Aceasta este adâncimea de penetrație a câmpului magnetic în câmp magnetic alternativ. Dacă se ia în considerare deplasarea vortexurilor, activată termic, și în consecință și forța de vâscozitate, atunci

$$\lambda_{-}^2 = \lambda^2 + \lambda_c^2 \frac{(1-i/\omega\tau)}{1+i\omega\tau_0}$$

unde τ este un timp de relaxare, $\tau = \tau_0 \exp(U/k_B T)$, datorită vâscozității și U este o energie de activitate. În acest caz se modifică și relația (9.2) iar $H(r)$ devine $H(r, t)$ [26].

În supraconductorul anizotrop, pentru diverse configurații ale Câmpului static H_s , câmpul alternativ $H(t)$, axelor cristaline și suprafeței probei se obțin următoarele rezultate [26]

(1) $\vec{H}(t) \parallel \vec{H}_s \parallel \vec{c}$ cu suprafața probei.

$$\lambda_{el}^2 \simeq \lambda_{ab}^2 + \left(\frac{H_s r_p}{J_{ab,c}} \right)^2, \quad H_s \gg H_{c1}$$

unde λ_{ab} este adâncimea de penetrație London în planul (ab) , curentul $J_{ab,c}$ este curentul paralel cu planul ab atunci când câmpul magnetic este paralel cu axa c și forța Lorentz este paralelă cu planul ab . Atunci când $H \rightarrow H_{c1}$ adâncimea de penetrație Campbell tinde la zero și λ_{el} tinde la λ_{ab}

(2) $\vec{H}(t) \perp \vec{H} \parallel \vec{c}$ cu suprafața probei

$$\lambda_{el}^2 \simeq \lambda_{ab}^2 + \left(\frac{H_s r_p}{4\pi J_{ab,c}} \right)^2, \quad \text{dacă } H_s \gg H_{c1}$$

Atunci când $H \rightarrow H_{c1}$ adâncimea de penetrație Campbell nu tinde la zero și λ_{el} rămâne mai mare decât λ_{ab} . Prin urmare, efectele elastice sunt mai importante în cazul geometriei transversale ca de exemplu în experiențele de torsione, *RMN*, *RPE*, plăcuță vibratorie, decât în cazul măsurătorilor ordinare de susceptibilitate. Alte configurații sunt studiate în detaliu în [26].

3.10. Rezistivitatea electrică a supraconductorilor de speța a II-a.

În supraconductorii de speța a II-a densitatea curentului electric este dată de expresia

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$$

Trei contribuții sunt importante la transportul curentului electric: (a) curenții de suprafață în stratul superficial de grosime λ ; (b) gradientul densității de vortexuri, (c) curbarea liniilor de flux. Ultimele două contribuții apar clar în evidență dacă scriem $\nabla \times \vec{H} = \nabla \vec{H} \times \hat{z}_0 + H \nabla \times \hat{z}_0$ unde $\hat{z}_0 = \vec{H} / H$. În probele masive domină termenul cu gradient, $J \equiv \nabla H$, iar în straturile subțiri curentul este determinat aproape în întregime de curbarea liniilor de flux [27].

Considerăm inițial cazul ideal când nu are loc captarea liniilor de flux și acestea se deplasează sub acțiunea forței Lorentz

$$\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B}$$

căreia i se opune forța de vâscozitate $-\eta \vec{v}$. Egalând cele două forțe se obține viteza de deplasare a vortexurilor (a liniilor de flux)

$$\vec{v} = J \times \frac{\vec{B}}{\eta}$$

unde η este coeficientul de vâscozitate raportat la unitatea de volum. Deplasarea vortexurilor induce un câmp electric

$$\vec{\epsilon} = \vec{B} \times \vec{v} = \vec{B} \times \vec{J} \times \frac{\vec{B}}{\eta} = \left(\frac{B^2}{\eta} \right) \vec{J}_\perp = \rho \vec{J}_\perp \quad (10.1)$$

unde \vec{J}_\perp este componenta densității de curent perpendiculară pe \vec{B} și $\rho = \rho_{DF} = B^2/\eta$ este rezistivitatea în cazul deplasării fluxului. Din ec. (10.1) și legea inducției

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{\epsilon}$$

se găsește ecuația de variație a lui \vec{B} [28]

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B} \times \vec{J} \times \frac{\vec{B}}{\eta} = \nabla \times \vec{B} \times \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \times \frac{\vec{B}}{\eta} = D \nabla^2 \vec{B} + \rho \nabla \times \vec{J}_\perp + 0 \left(|\vec{B} - \langle \vec{B} \rangle|^2 \right) \quad (10.2)$$

Rezultă că atunci când componenta $\vec{J}_{\perp 11}$ a curentului, paralelă cu B se anulează, vortexurile difuzează liniar cu un coeficient de difuzie $D = \rho/\mu_0$, cu condiția ca $B = \langle B \rangle$ să varieze lent. În § 3.7 am analizat modelul Kim-Anderson care presupune că la $T = 0$ și $J < J_c$, vortexurile sunt captate de către neomogeneitățile materialului; însă la o temperatură T finită, apare o delocalizare a vortexurilor, activată termic. În supraconductorii convenționali acest efect se observă numai în apropierea temperaturii T_c ca o deplasare lentă a vortexurilor (flux creep). Ceea ce apare nou în supraconductorii cu temperatură critică înaltă este că deplasarea fluxului asistată termic cu o rezistivitate ρ liniară (ohmică) apare chiar la densități mici de curent $J \ll J_c$. Ambele efecte, deplasarea lentă la $J = J_c$ și deplasarea fluxului asistată termic la $J \ll J_c$, sunt cazuri limită ale expresiei generale Kim-Anderson (7.3) pentru saltul vortexurilor, activat termic, din centrele de captare. Rescriem ec. (7.3) sub forma

$$\epsilon(J) = 2\rho_0 J_0 \left[e^{-\frac{U_0}{k_B T} \left(I - \frac{J}{I_0} \right)} - e^{-\frac{U_0}{k_B T} \left(I + \frac{J}{I_0} \right)} \right] \quad (10.3)$$

unde ρ_0 este rezistivitatea la curentul J_0 . La curent mare $J \cong J_0$, se obține din (10.3)

$$\rho = \rho_0 \exp \left[\frac{U_0}{k_B T} \left(\frac{J}{J_0} - 1 \right) \right] \quad (10.4)$$

deoarece $U_0 \gg k_B T$ (în cazul deplasării lente). La curenți mici $J \ll J_0$, în cazul deplasării asistată termic a fluxului, se obține din (10.3)

$$\rho_{DTF} \frac{2\rho_0 U_0}{k_B T} \exp \left(-\frac{U_0}{k_B T} \right) \quad (10.5)$$

În cazul $J \gg J_0$, deplasarea fluxului (neactivată termic) s-a obținut [29]

$$\rho = \rho_{DF} \left(1 - J_0^2 / J^2 \right)^{1/2} \simeq \rho_{DF} = \frac{B^2}{\eta} = \rho_n \frac{H}{H_{c2}} \quad (10.6)$$

Pentru a găsi expresia rezistivității în curent alternativ calculăm din ecuațiile lui Maxwell densitatea de curent și câmpul electric în supraconductor.

$$J(x) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H(x)}{\lambda_-}$$

$$\epsilon(x) = i\omega \lambda_- B(x)$$

unde, pentru un strat supraconductor cu $-d/2 \leq x \leq d/2$

$$B(x) = B(0) \frac{\cosh(x / \lambda_-)}{\cosh(d / 2\lambda_-)}$$

\vec{J} și $\vec{\epsilon}$ sunt orientați de-a lungul axei y și \vec{B} este orientat de-a lungul axei z . Astfel, rezistivitatea ohmică este dată de expresia

$$\rho_- = \frac{\xi}{J} = i\omega \lambda_- \mu_0 \lambda_- = \mu_0 i\sigma\omega \lambda_-^2$$

Având în vedere definiția lui λ_-^2 (9.5) se poate scrie

$$\rho(\omega) = \mu_0 i\omega \lambda_-^2 + \rho_{DTF} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + i\omega\tau_0} \quad (10.7)$$

unde

$$\rho_{DTF} = \rho_{DF} (\tau_0 / \tau) = \rho_{DF} \exp(-U_0 / k_B T) \ll \rho_{DF}$$

Se disting trei regiuni

(a) $\omega \ll 1/\tau$ (deplasarea fluxului asistată termic)

$$\rho(\omega) \simeq \rho_{DTF} \ll \rho_{DF} \quad (10.8)$$

unde ρ_{DTF} este dată de expresia (10.5)

(b) $1/\tau \ll \omega \ll 1/\tau_0$

$$\rho(\omega) = \mu_0 i\omega (\lambda_-^2 + \lambda_c^2) \quad (10.9)$$

are caracter inductiv.

(c) $1/\tau_0 \ll \omega$, deplasare de flux

$$\rho(\omega) \simeq \rho_{DF} \quad (10.10)$$

care este dată de expresia (10.6). Prin urmare, atât la frecvențe joase cât și la frecvențe înalte rezistivitatea este reală și independentă de ω ; fluxul se deplasează prin difuzie cu coeficientul $D = \rho / \mu_0$. În acest caz adâncimea de penetrație a câmpului alternativ este adâncimea de penetrație peliculară $\delta = (2D/\omega)^{1/2}$ ca în metalul normal. La frecvențe intermediare, ρ este imaginar (inductiv) și este direct proporțional cu ω ; curenții superficiali circulă aproape fără pierderi datorită

elasticității puternice a vortexurilor în centrele de captare. Ecranarea în acest caz este ca în starca Meissner dar cu o adâncime de penetrație mai mare, $(\lambda^2 + \lambda'^2)^{1/2}$. Evident, din (10.7) rezultă că există totdeauna o atenuare liniară slabă chiar în starea de ecranare (10.9), când

$$R_c\{\rho\} = \rho_{DTF} + \rho_{DF} \omega^2 \tau_0^2 \ll I_m\{\rho\}$$

Însă, la măsurătorile în curent alternativ de mare sensibilitate sunt puse adese în evidență atenuări mai mari, neliniare, datorate unor fenomene de delocalizare a vortexurilor.

3.11. Impedanța unei bobine care conține în interiorul său un eșantion supraconductor.

3.11.1. Eșantion de formă cilindrică

Considerăm un eșantion de formă cilindrică introdus într-o bobină. Densitatea de curent în supraconductor este egală cu suma dintre densitatea de curent \vec{J}_n a electronilor normali și densitatea de supracurent \vec{J}_{sc}

$$\vec{J} = \vec{J}_n + \vec{J}_{sc}$$

\vec{J}_n se determină din legea lui Ohm

$$\vec{J}_n = \rho \vec{E} \quad (11.1)$$

iar \vec{J}_{sc} , din ecuațiile

$$\frac{\partial \vec{J}_{sc}}{\partial t} = \frac{\vec{E}}{\mu_0 \lambda^2} \quad (11.2)$$

$$\nabla \times \vec{J}_{sc} = -\frac{\vec{H}}{\lambda^2}$$

Pentru a determina impedanța unei bobine în care se găsește eșantionul supraconductor ce umple complet bobina se procedează astfel. Din ecuațiile lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_{sc} + \vec{J}_n + i\omega \epsilon \vec{E} \quad (11.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \mu_0 \vec{H} \quad (11.4)$$

unde se presupune o variație sinusoidală în timp de forma $\exp(i\omega t)$ și $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ se obține ecuația diferențială pentru H . Aplicând operatorul rotor în ambii membri ai ec. (11.3) se obține

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_{sc} + \nabla \times \vec{J}_n + i\omega \epsilon \nabla \times \vec{E} \quad (11.5)$$

Substituind ec. (11.2) și (11.4) în ec. (11.5) și utilizând relația $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ rezultă

$$\nabla^2 \vec{H} = \left(\frac{1}{\lambda^2} + i\omega \mu_0 \rho - \omega^2 \mu_0 \epsilon \right) \vec{H} \quad (11.6)$$

În coordonate polare ec. (11.6) devine

$$\frac{d^2 H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dH}{dr} = \Gamma^2 H \quad (11.7)$$

unde dacă se neglijează curentul de deplasare reprezentat prin termenul $\omega^2\mu\epsilon$, Γ este dat de ecuația

$$\Gamma^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2i}{\delta^2} \quad (11.8)$$

$i = \sqrt{-1}$ și δ este adâncimea de penetrație peliculară

$$\sigma = \left(\frac{2}{\omega\mu_0\sigma} \right)^{1/2} \quad (11.9)$$

ω este frecvența și τ este conductivitatea normală imediat deasupra temperaturii T_c . Soluția ec. (11.7) este

$$\vec{H}(r) = \frac{H_0}{J_0(i\Gamma r_0)} J_0(i\Gamma r) \quad (11.10)$$

unde $H_s = NI/l$ este câmpul magnetic la suprafața cilindrului (paralel cu generatoarea sa), r_0 este raza cilindrului, N este numărul de spire. I este curentul electric care circulă prin bobină (generator al câmpului magnetic) și l este lungimea bobinei. $J_0(ix)$ este funcția Bessel (nu densitatea de curent) de ordinul zero și de speța I. De asemenea, $J_0(ix)$ se notează prin $I_0(x)$, funcția Bessel modificată. Tensiunea indusă în acord cu legea lui Faraday $-d\Phi/dt = e$, unde fluxul Φ este dat de expresia

$$\Phi = N2\pi \int_0^{r_0} B(r)rdr \quad (11.11)$$

este [30]

$$e = i\omega 2\pi N^2 \mu_0 I \frac{r_0}{l} \frac{I_1(\Gamma r_0)}{I_0(\Gamma r_0)}$$

unde $I_1(x)$ este funcția Bessel modificată de ordinul I . Dezvoltarea în serie a funcțiilor Bessel modificate este de forma

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \dots$$

Pentru δ foarte mare rezultă $\Gamma = 1/\lambda$ și $e = i\omega LI$ unde

$$L = 2\pi r_0 \lambda \frac{N^2 \mu_0}{l} \frac{I_1(r_0/\lambda)}{I_0(r_0/\lambda)} \quad (11.12)$$

Utilizând dezvoltarea asimptotică pentru $x \gg 1$

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \approx I_1(x)$$

se obține

$$L = 2\pi r_0 \lambda \frac{N^2 \mu_0}{l} \quad (11.13)$$

În acest caz limită, așa cum apare din ec. (11.12) și (11.13) supraconductorul se comportă ca un inductor pur. În această prezentare se neglijează apariția vortexurilor. Dacă, pe de altă parte, λ devine foarte mare în comparație cu δ atunci acesta din urmă devine factorul de limitare și Γ se

reduce la valoarea corespunzătoare unui conductor normal $\Gamma = \sqrt{2i}/\delta$. Deoarece argumentul funcției Bessel este complex este de dorit să separăm expresia lui J_0 în partea sa reală și partea imaginară. Aceasta se poate obține cu ajutorul identității

$$J_0(x\sqrt{i}) = \text{ber } x + i \text{bei } x \quad (11.14)$$

unde pentru cazul nostru $x = r_0\sqrt{2}/\delta$ și părțile reală și imaginară ale funcției Bessel sunt

$$\begin{aligned} \text{ber } x &= 1 - \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(x/2)^8}{(4!)^2} - \dots \\ \text{bei } x &= \frac{(x/2)^2}{1} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \frac{(x/2)^{10}}{(5!)^2} - \dots \end{aligned}$$

Aceste funcții sunt tabelate. Introducând (11.13) în (11.10) și utilizând relațiile

$$\begin{aligned} \int_0^{x_0} x \text{ber } dx &= x_0 \text{bei}' x_0 \\ \int_0^{x_0} x \text{bei } dx &= -x_0 \text{ber}' x_0 \end{aligned} \quad (11.15)$$

se obține [30]

$$e = i\omega \frac{2\pi N^2 I \mu_0 r_0 \delta}{l \sqrt{2}} \frac{\text{bei}' x_0 - i \text{ber}^2 x_0}{\text{ber } x_0 + i \text{bei } x_0} = I(R + iL\omega)$$

Rezultă,

$$L = \frac{2\pi N^2 \mu_0 r_0 \delta}{l \sqrt{2}} \frac{\text{ber } x_0 \text{bei}' x_0 - \text{bei } x_0 \text{ber}' x_0}{(\text{ber } x_0)^2 + (\text{bei } x_0)^2} \quad (11.16)$$

$$R = \frac{2\pi N^2 \mu_0 \omega r_0 \delta}{l \sqrt{2}} \frac{\text{bei } x_0 \text{bei}' x_0 - \text{ber } x_0 \text{ber}' x_0}{(\text{ber } x_0)^2 + (\text{bei } x_0)^2} \quad (11.17)$$

Când frecvența se apropie de zero, δ tinde la infinit și x tinde la zero. În acest caz în funcțiile Bessel se rețin numai primii termeni din dezvoltarea în serie pentru valoare mică a argumentului

$$\begin{aligned} \text{ber } x_0 &= 1 & \text{bei } x_0 &= \frac{x_0^2}{4} \\ \text{ber}' x_0 &= -\frac{x_0^3}{16} & \text{bei}' x_0 &= \frac{x_0}{2} \end{aligned} \quad (11.18)$$

Substituirea acestor expresii aproximative în expresiile lui L și R conduce la

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r_0^2$$

o relație binecunoscută, și

$$R = \omega \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r_0 \frac{3}{4} \left(\frac{r_0}{\delta} \right)^2 \approx 0$$

deoarece $(r_0/\delta) \rightarrow 0$.

La frecvențe suficient de înalte, δ devine foarte mic și x foarte mare. În acest caz, funcțiile Bessel pot fi approximate prin expresiile simplificate și se poate arăta ușor că pentru termenul rezistiv

$$\frac{ber x_0 bei' x_0 + ber x_0 ber' x_0}{(ber x_0)^2 + (bei x_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (11.19)$$

Astfel, la frecvențe înalte, rezistența de suprafață devine

$$R_{hf} = \omega \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r_0 \delta \quad (11.20)$$

Același rezultat ca în (11.19) se obține pentru funcțiile Bessel din termenul reactiv și rezultă

$$L = \frac{R_{hf}}{\omega} = \frac{\mu_0 N^2}{l} \pi r_0 \delta \quad (11.21)$$

Prin urmare, la înaltă frecvență termenul reactiv este egal cu cel rezistiv.

3.11.2. Eșantion de formă paralelipipedică

Utilizând ec. (11.6) inductanța unei bobine care conține o probă sub formă de placă este dată de expresia [31-32]

$$L = \frac{2N^2}{l} \frac{W \mu_0}{\Gamma} \tanh(\Gamma d / 2) \quad (11.22)$$

Placa introdusă în bobină are grosimea d , lățimea w și lungimea l . Când adâncimea de penetrație λ este foarte mică în comparație cu δ , cea dintâi limitează penetrația câmpului magnetic în supraconductor. Cu alte cuvinte, considerând valoarea lui δ foarte mare din ec. (11.8) se obține $\Gamma=1/\lambda$ și

$$L = \frac{2N^2}{l} W \lambda \mu_0 \tanh(d / 2\lambda) \quad (11.23)$$

care, pentru d mult mai mare decât λ se reduce la

$$L = \frac{2N^2}{l} W \lambda \mu_0 \quad (11.24)$$

Se observă că pentru acest caz limită supraconductorul se comportă ca un inductor pur și nu disipă energie. Dacă în supraconductor curentul de conducție normală este mic dar nu complet neglijabil, Γ poate fi rescris subforma

$$\Gamma^{-1} = \lambda \left(1 + 2i \frac{\lambda^2}{\delta^2} \right)^{-1/2} \simeq \lambda \left(1 - i \frac{\lambda^2}{\delta^2} \right)$$

unde am dezvoltat în serie și am reținut numai primii doi termeni. Se obține

$$i\omega L' = i\omega L + R_{hf}$$

unde L este dat de relațiile (11.23), (11.24) și

$$R_{hf} = \frac{\omega L \lambda^2}{\delta^2} \quad (11.25)$$

reprezintă pierderile prin conducție normală care, dacă $d \gg \lambda$ sunt foarte mici.

3.12. Supraconductori cu structură granulară

Considerăm un material cu structură granulară în care granulele supraconductoare sunt cuplate slab între ele. Energia de cuplaj Josephson este $E_J = (\Phi/2\pi)I_0$ unde Φ_0 este cuanta de flux și I_0 este curentul maxim Josephson care circulă între două granule adiacente. Granulele sunt considerate supraconductoare cu energia de condensare $E_g = H_{cg}^2 v \mu_0 / 2$ care este mult mai mare decât energia de cuplaj E_J dintre granule (H_{cg} este câmpul critic termodinamic al granulelor și v este volumul unei granule). În acest caz, care se aplică supraconductorilor oxidici cu structură granulară, curentul în material este limitat de energia de cuplaj E_J și nu de anularea parametrului de ordonare din interiorul granulelor. Adâncimea de penetrație a câmpului magnetic în interiorul unei granule o notăm cu λ_g , pe care o considerăm mărime scalară. Deoarece cuplajul dintre granule este slab, câmpul magnetic va penetra mai adânc în intervalul dintre granule, pe o adâncime λ_p de-a lungul frontierelor granulelor. Formulele pentru adâncimea de penetrație dintre granule λ_p , lungimea de coerență în intervalul dintre granule ξ_p , câmpurile critice Josephson inferior H_{c1J} și superior H_{c2J} în funcție de λ_J și ξ_J sunt date în (33-34). Considerăm un eșantion de formă cilindrică de rază R sub forma unei rețele de granule cilindrice de rază r_0 . Inițial presupunem că nu există cuplaj între granule. Presupunând că o fracțiune f_n din aria secțiunii transversale a probei este permeabilă la câmpul magnetic (aceasta este regiunea intergranulară), pe aria secțiunii transversale a eșantionului pot fi aranjate un număr de granule egal cu

$$n_0 = \frac{(1 - f_n)S}{\pi r_0^2}$$

În această situație, inductanța probei care conține eșantionul, fiind complet plină, este dată de expresia

$$L' = \frac{N^2 \mu_0 f_n S}{l} + n_0 L \quad (12.1)$$

unde L este dată de una din expresiile din §3.11 și $\lambda = \lambda_g$. Atunci când există cuplaj între granule, prin eșantion circulă curenți de ecranare. În cele ce urmează vom considera cuplajul slab astfel că $\lambda_J \gg \lambda_g$. Mai mult, presupunem $\lambda_J \gg r_0$, astfel că vom trata sistemul ca un mediu continuu. Dacă proba nu conține vortexuri captate inițial (intergranulare sau intragranulare), într-un câmp magnetic aplicat mai mic decât H_{c1J} , inductanța bobinei este dată de relația (12.1) unde S se substituie cu

$$\frac{2\pi R I_1(\Gamma_1 R)}{\Gamma_1 I_0(\Gamma_1 R)}$$

unde Γ_1 este dat de ec. (11.8) cu $\lambda \equiv \lambda_J$. Prin urmare, inductanța poate fi scrisă [30]

$$L' = \frac{2\pi R I_1(\Gamma_1 R)}{\Gamma_1 I_0(\Gamma_1 R)} \frac{N^2 \mu_0}{l} \left[f_n + \frac{1 - f_n}{\pi r_0^2} \frac{2\pi R I_1(\Gamma r_0)}{\Gamma I_0(\Gamma r_0)} \right] \quad (12.2)$$

Pentru δ foarte mare, rezultă $\Gamma = 1/\lambda_g$, $\Gamma_1 = 1/\lambda_J$, astfel că

$$L' = 2\pi R \lambda_J \frac{I_1(R/\lambda_J)}{I_0(R/\lambda_J)} \frac{N^2 \mu_0}{l} \left[f_n + \frac{1 - f_n}{\pi r_0^2} 2\pi r_0 \lambda_g \frac{I_1(r_0/\lambda_g)}{I_0(r_0/\lambda_g)} \right] \quad (12.3)$$

Dacă $\lambda_j \gg R$, această ecuație se reduce la ec. (12.1). Dacă în ec. (12.1) f_n poate fi neglijat, pentru $r_0 \gg \lambda_g$ se obține

$$L' = \frac{N^2 \mu_0}{l} \frac{S}{\pi r_0^2} 2\pi r_0 \lambda_g \quad (12.4)$$

Atunci când $R \gg \lambda_j$ ec. (12.3) devine

$$L' = 2\pi R \lambda_j \frac{N^2 \mu_0}{l} \left[f_n + \frac{1-f_n}{\pi r_0^2} 2\pi r_0 \lambda_g \frac{I_1(r_0 / \lambda_g)}{I_0(r_0 / \lambda_g)} \right] \quad (12.5)$$

care pentru $r_0 \gg \lambda_g$ are forma

$$L' = \frac{N^2 \mu_0}{l} 2\pi R \lambda_j \left[f_n + \frac{1-f_n}{\pi r_0^2} 2\pi r_0 \lambda_g \right] \quad (12.6)$$

Dacă în această ecuație se poate neglija f_n , se obține

$$L' = \frac{N^2 \mu_0}{l} \frac{2\pi R}{\pi r_0^2} 2\pi r_0 \lambda_j \lambda_g \quad (12.7)$$

Dacă se utilizează o altă geometrie pentru granule și frontierele acestora, expresiile de mai sus se modifică. Considerăm planul xy paralel cu secțiunea transversală a eșantionului (și de asemenea a bobinei) și direcția z de-a lungul lungimii bobinei (această direcție este paralelă cu câmpul magnetic aplicat). Dacă considerăm eșantionul ca o rețea de bariere izolatoare toate paralele cu planul xz , cu periodicitatea a_0 și grosimea d_i în direcția y , ec. (12.2) se modifică

$$L' = \frac{2\pi R}{\Gamma_1} \frac{I_1(\Gamma_0 R)}{I_0(\Gamma_1 R)} \frac{N^2 \mu_0}{l} \left[f_n + \frac{1-f_n}{d^2} \frac{2d \tanh(\Gamma d / 2)}{\Gamma} \right] \quad (12.8)$$

pentru un eșantion cilindric de raz. R , unde $d = a_0 - d_i$. Pentru un eșantion de forma unei plăci de grosime D și lățime W această expresie devine

$$L^2 = \frac{2N^2}{l} \frac{W \mu_0}{\Gamma_1} \tanh(\Gamma_1 D / 2) \left[f_n + \frac{1-f_n}{d^2} \frac{2d \tanh(\Gamma d / 2)}{\Gamma} \right] \quad (12.9)$$

Când $D \gg \lambda_j$ și $a_0 \gg \lambda_g$ obținem din ec. (12.8) și (12.9)

$$L' = \frac{N^2 \mu_0}{l} 2\pi R \lambda_j \left[f_n + \frac{1-f_n}{d^2} 2d \lambda_g \right] \quad (12.10)$$

și, respectiv

$$L' = \frac{N^2 \mu_0}{l} 2W \lambda_j \left[f_n + \frac{1-f_n}{d^2} 2d \lambda_g \right] \quad (12.11)$$

Dependența de temperatură a impedanței bobinei ce conține eșantionul supraconductor depinde de dependența de temperatură a lui λ_j și λ_g . Pentru supraconductorul impur

$$\left[\frac{\lambda_g(0)}{\lambda_g(T)} \right]^2 = \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\right)$$

se obține în apropierea lui T_c

$$\lambda_g(T) = \lambda_g^0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \quad (12.12)$$

unde $\lambda'_0 = 0,613 \lambda_g(0)$ și $\Delta(T)$ este banda interzisă dependentă de temperatură. Când $r_o, a_o < \lambda_g$ se obține [35]

$$\lambda_j = \left(c\Phi_0 / 8\pi^2 a_o J_o \right)^{1/2} \quad (12.13)$$

și când $r_o, a_o > \lambda_g$ se obține [33]

$$\lambda_j = \left(c\Phi_0 / 8\pi^2 a_o J_o \mu_{ef} \right)^{1/2} \quad (12.14)$$

unde μ_{ef} este termenul conținut în parantezele drepte din ecuațiile de mai sus, de exemplu ec. (12.2) și (12.9) adică

$$\mu_{ef} = f_n + \frac{1 - f_n}{\pi r_o^2} \frac{2\pi r_o I_1(\Gamma r_o)}{\Gamma I_0(\Gamma r_o)}$$

și, respectiv

$$\mu_{ef} = f_n + \frac{1 - f_n}{\pi r_o^2} \frac{2d \tanh(\Gamma d / 2)}{\Gamma}$$

J_o este densitatea maximă de curent în joncțiunea Josephson. Dependența de temperatură a lui λ_j este determinată de dependența de temperatură a lui J_o și a lui μ_{ef} care depinde de λ_g

În acord cu teoria Ambegaokar- Baratoff [36]

$$I_o(T) = \frac{\pi \Delta(0)}{qR_n} \frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)}\right)$$

unde R_n este rezistența de tunelare a joncțiunii în stare normală și $I_o = J_o a_o^2$. În apropierea lui T_c rezultă $J_o(T) = C(1 - T/T_c)$. Când $\lambda_g \ll a_o$ se obține

$$\lambda_j(T) = C_1 \left(J_o \lambda_g \right)^{-1/2} = \lambda_j(0) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^{-1/4} \quad (12.15)$$

S-a presupus că temperatura critică a joncțiunii Josephson, T_{cJ} , care este ceva mai mică decât temperatura critică T_c a stării supraconductoare (a granulelor), este foarte apropiată de T_c . În general impedanța bobinei care conține un eșantion supraconductor de formă granulară este dată de expresia

$$\begin{aligned} L &= L_o P_J \left[f_n + (1 - f_n) P_g \right] \\ L_o \frac{\mu_o N^2 S}{l}; \quad P_i &= \frac{2 I_1(x_i)}{x_i I_0(x_i)} \\ x_g &= \Gamma r_o, \quad x_J = \Gamma R_o \end{aligned} \quad (11.16)$$

unde $i = J, g$. Dacă scriem

$$L = \mu_r L_o$$

atunci

$$\mu_r = P_J \left[f_n + (1 - f_n) P_g \right] \quad (11.17)$$

este permeabilitatea relativă efectivă a bobinei ce conține eșantionul considerat.

3.13. Tranziția de fază Berezinskii-Kosterlitz-Thouless

Tranziția de fază Berezinskii-Kosterlitz-Thouless este o tranziție care are loc într-un sistem de spini bidimensional planar. Sub o anumită temperatură, în sistem există perechi legate vortex-antivortex, iar peste această temperatură perechile se disociază. Fenomenul se pune în evidență prin variația abruptă a răspunsului sistemului la câmp magnetic aplicat (37,38). Aceasta este o tranziție de fază generală într-un sistem bidimensional și apare și în supraconductori. Pentru fixarea problemei să considerăm un sistem planar de spini a cărui energie totală este

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \bar{s}_i \cdot \bar{s}_j \quad (13.1)$$

unde $J_{ij} = J$ între doi vecini cei mai apropiați i și j și este zero în rest, S_i este un vector planar unitate, adică $S_i = (S_{ix}, S_{iy})$ și $S_{ix}^2 + S_{iy}^2 = 1$. Acesta este așa-numitul model XY. Notăm $S_{ix} = \cos \theta_i$ și $S_{iy} = \sin \theta_i$ și rezultă

$$\bar{s}_i \cdot \bar{s}_j = \cos(\theta_i - \theta_j)$$

Dacă presupunem că unghiurile între doi vecini cei mai apropiați sunt aproximativ aceleași, atunci

$$\cos(\theta_i - \theta_j) \simeq 1 - \frac{1}{2}(\theta_i - \theta_j)^2$$

Notând cu R poziția unui vector, atunci ec. (13.1) se poate scrie

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} J \sum_{\bar{R}} \sum_{\bar{a}} [\theta(\bar{R}) - \theta(\bar{R} + \bar{a})]^2 + constant \quad (13.2)$$

unde $R+a$ este vecinul cel mai apropiat al lui R (a este constanta reelei). La $T=OK$ toți spinii sunt paraleli. La o temperatură finită, $k_B T \ll J$, apar fluctuații ale direcțiilor spinilor în planul XY. Aceste fluctuații sunt mici astfel încât doi spini vecini (de ordinul l) pot fi considerați aproape paraleli. Un vortex este reprezentat în Fig. 3.11. Într-o zonă depărtată de centrul O , adică la $R \gg a$, $\delta(R)$ este o funcție lent variabilă. Însă în apropierea centrului vortexului nu mai este îndeplinită această condiție: cei patru vectori din apropierea lui O au o diferență de $\pi/2$ între doi vecini. Pentru $R \gg a$ (deci departe de O)

$$\frac{1}{2} \sum_{\bar{a}} [\theta(\bar{R}) - \theta(\bar{R} + \bar{a})]^2 \equiv a(\nabla\theta)^2 = a^2 \frac{1}{R^2} \quad (13.3)$$

\bar{R} se măsoară din originea O a vortexului. Substituind (13.3) în (13.1) se găsește energia unui vortex

$$\mathcal{H} = \frac{J}{2} a^2 \sum_{\bar{R}} (\Delta\theta)^2 = \frac{J}{2} \int d^2 R (\Delta\theta)^2 \simeq \pi J \ln\left(\frac{L}{a'}\right) \quad (13.4)$$

unde πL^2 este aria corpului. Deoarece ec. (13.3) nu este justă pentru $R \equiv a$, în relația (13.4) a' este puțin diferit de a . O analiză precisă arată că dacă utilizăm

$$\frac{a}{a'} = 2\sqrt{2}e^c, \quad c = 0,577$$

atunci (13.4) este o aproximație foarte bună pentru o rețea pătrată. Dacă efectuăm un ciclu pe un contur închis în jurul vortexului obăinem că $\theta(R)$ variază cu 2π , adică

$$\oint \nabla\theta \cdot d\bar{R} = 2\pi \quad (13.5)$$

$$\theta(R) \text{ este soluție a ecuației } \nabla^2\theta = 0 \quad (13.6)$$

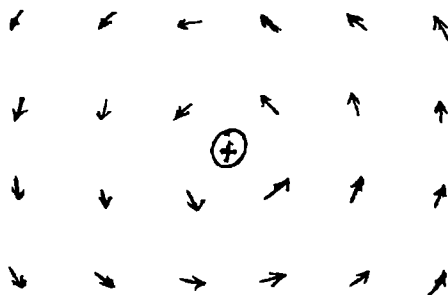


Fig. 3.11.

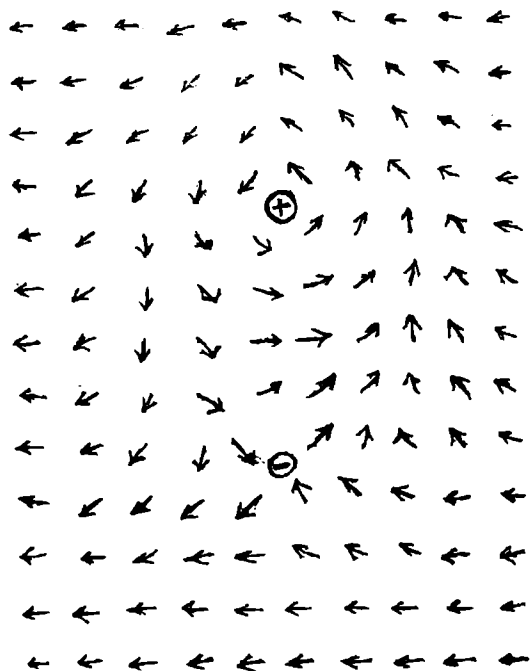


Fig. 3.12

Din (13.4) se observă că energia unui vortex crește ca $\ln L$. Considerăm acum o pereche vortex-antivortex, legată, Fig. 3.12. Energia de legătură va depinde de distanța dintre ele. În acest caz $\theta(R) = \alpha(\bar{R}) - \alpha(\bar{R} + \bar{r})$, unde $\alpha(R)$ este unghiul dintre \bar{R} și orizontală. Pentru energia perechii vortex-antivortex se obține

$$\mathcal{H}' = 2\pi J \ln\left(\frac{r}{a'}\right) \quad (13.7)$$

unde \bar{r} este distanța dintre centrele vortexului și antivortexului. Dacă se iau în considerare mai multe vortexuri atunci

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} q_i q_j \ln\left(\frac{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|}{d}\right) \quad (13.8)$$

unde \bar{R}_i este poziția centrului vortexului și

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi J}} q_i = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \theta \cdot d\bar{R} \quad (13.9)$$

este integrala în jurul lui \bar{R}_i și se numește tăria vortexului. Semnificația ec. (13.8) este următoarea. În jurul fiecărui punct \bar{R}_i decupăm o suprafață de rază mică a' și rezolvăm în planul cu aceste găuri ec. (13.6). Soluția acestei ecuații este o funcție lentă și substituind-o în

$$\mathcal{H}' \simeq \frac{1}{2} J \int d^2 r (\nabla \theta)^2 \quad (13.9a)$$

se calculează energia și se obține (13.8). Există o condiție care trebuie îndeplinită pentru fiecare gaură și anume membrul drept al integralei (13.9) trebuie să fie un număr întreg. La aceasta se mai adaugă condiția de neutralitate

$$\sum_i q_i = 0 \quad (13.10)$$

Pentru a calcula fluctuațiile $\Delta\theta$ ale lui θ și funcția de corelația $C(R)$ dintre spini procedăm astfel. Descompunem $\theta(R)$ în serie Fourier

$$\begin{aligned} \theta(\bar{R}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\bar{k}} \theta_{\bar{k}} e^{+i\bar{k} \cdot \bar{R}} \\ \theta_{\bar{k}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\bar{R}} \theta(\bar{R}) e^{-i\bar{k} \cdot \bar{R}} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Substituind în (13.2) se obține

$$\begin{aligned} &= \frac{J}{2} \sum_{\bar{k}} J_{\bar{k}} |\theta_{\bar{k}}|^2 \\ J_{\bar{k}} &= J \sum_{\bar{a}} |1 - e^{-i\bar{k}\bar{a}}|^2 = 2J \sum_{\bar{a}} (1 - \cos \bar{k}\bar{a}) \end{aligned} \quad (13.12)$$

Din ec. (13.12) se observă că fiecare θ_k este independent. Din legea echipartiției energiei se obține

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{k_B T}{J_k} \quad (13.13)$$

Abateră pătratică medie este

$$\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \langle [\theta(\vec{R}) - \theta(0)]^2 \rangle = \frac{2}{N} \sum_k \frac{k_B T}{J_k} (1 - \cos \vec{k} \cdot \vec{R}) \quad (13.14)$$

Pentru R foarte mare sunt importanți termenii cu valori mici ale lui k . Scriem pentru k mic, $J_k = \alpha k^2 a^2$, astfel că

$$\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \frac{2k_B T}{N\alpha} \sum_k \frac{1}{a^2 k^2} (1 - \cos \vec{k} \cdot \vec{R}) = \frac{k_B T}{\pi\alpha} \ln \frac{R}{a} \quad (13.15)$$

Funcția de corelație a spinilor

$$c(\vec{R}) = \langle \vec{s}(\vec{R}) \cdot \vec{s}(0) \rangle = \langle \cos(\theta(\vec{R}) - \theta(0)) \rangle = R_\rho \langle e^{i(\theta(\vec{R}) - \theta(0))} \rangle = e^{-\langle (\Delta\theta)^2 \rangle / 2} = \left(\frac{R}{a}\right)^{-k_B T / 2\pi\alpha} \quad (13.16)$$

Funcția de corelație scade cu creșterea temperaturii și la o anumită temperatură starea condensată trece într-o stare dezordonată.

În cazul supraconductorilor în locul spinului introducem parametrul de ordonare $\psi = |\psi|e^{i\theta}$ unde vom considera $|\psi|=1$ și scriem Hamiltonianul generic

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i,j} \psi(\vec{R}_i) \psi(\vec{R}_j) = -J \sum_{i,j} \cos[\theta(\vec{R}_i) - \theta(\vec{R}_j)] = \frac{J}{2} \int d^2 R (\nabla\theta)^2 \quad (13.17)$$

Ec. (13.17) este similară cu ec. (13.4) scrisă în domeniul continuu, având în vedere că faza ψ a funcției de undă variază lent. Pentru un strat subțire de grosime d

$$\frac{J}{2} = \frac{\hbar^2 |\psi|^2}{2m} d \equiv \frac{\varepsilon_0 d}{2\pi} \quad (13.18)$$

unde mărimea ε_0 este definită prin ultima identitate. Pentru o probă supraconductoare de formă circulară, cu raza $R \ll \lambda_{ef}$, energia unui vortex singular așezat în centrul ei este dată de expresia

$$E = \varepsilon_0 d \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) \quad (13.19)$$

unde ε_0 este definit de (13.18) și ξ este lungimea de coerență GL . Dacă $R \gg \lambda_{ef}$ în probă există mai multe vortexuri și apare efectul de ecranare care limitează interacția logaritmică dintre vortexuri la o distanță $\lambda_{ef} = 2\lambda^2/d$, unde λ este adâncimea de penetrație GL . Pentru $R \gg \lambda_{ef}$

$$E = \varepsilon_0 d \ln\left(\frac{\lambda_{ef}}{\xi}\right)$$

Energia de interacție a unei perechi vortex-antivortex este

$$U = 2\varepsilon_0 d \ln\left(\frac{r}{\xi}\right) \quad (13.20)$$

unde r este distanța dintre centrele lor. Prin analogie cu (13.16) din cazul spinilor, se introduce și în acest caz funcția de corelație a parametrului de ordonare

$$C(\vec{R}) = \langle \psi^*(\vec{R})\psi(0) \rangle = e^{-\langle [\theta(\vec{R}) - \theta(0)]^2 \rangle / 2} \quad (13.21)$$

unde funcția de corelație a fazei este

$$\langle [\theta(\vec{R}) - \theta(0)]^2 \rangle = \frac{2k_B T}{v_s J} \int \frac{d^2 \vec{K}}{(2\pi)^2} \frac{1 - \cos \vec{K}\vec{R}}{K^2} = \frac{k_B T}{\pi v_s J} \ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

și deci

$$C(\vec{R}) = \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-\eta}; \quad \eta = \frac{k_B T}{2\pi v_s J} \quad (13.22)$$

unde R_0 este o distanță de limitare care poate fi considerată egală cu lungimea de coerență ξ . În această relație s-a introdus un factor de cuplaj de renormare $v_s J$ în locul lui J , unde $0 < v_s < 1$ și v_s devine egal cu zero la temperaturi mai mari decât temperatura de tranziție BKT . În acest sens în toate relațiile de mai sus se substituie $\varepsilon_0 d \equiv \pi J$ cu $v_s \varepsilon_0 d$.

Există două metode simple de a determina temperatura de tranziție BKT . În prima metodă se scrie energia liberă F_1 a unui singur vortex într-o probă de rază R , unde R este mult mai mare decât ξ și d și mult mai mic decât λ_{ef}

$$F_1 = U_1 - TS = U_1 - k_B T \ln N_1$$

unde N_1 este numărul de posibilități independente de a plasa un vortex într-o probă, $N_1 \equiv R^2/\xi^2$. Prin urmare,

$$F_1 = \varepsilon_0 d \ln\left(\frac{R}{\xi}\right) - 2k_B T \ln\left(\frac{R}{\xi}\right)$$

Se observă că F_1 este negativă la temperaturi mai mari decât o temperatură T_1 determinată din relația

$$\varepsilon_0 d - 2k_B T_1 = 0 \quad (13.23)$$

Acest calcul arată că la o temperatură mai mare decât T_1 pot exista vortexuri libere în echilibru termodinamic.

În cea de a doua metodă se consideră energia de interacție (13.20) vortex-antivortex, cu distanța r dintre centrele lor. Dacă într-o probă de dimensiuni infinite considerăm o singură pereche vortex-anticortex se poate calcula valoarea medie a lui r^2 . Astfel,

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_{\xi}^{\infty} 2\pi r dr [r^2 \exp\{-\beta u(r)\}]}{\int_{\xi}^{\infty} 2\pi r dr [\exp\{-\beta u(r)\}]} = \xi^2 \frac{\int_1^{\infty} d\left(\frac{r}{\xi}\right) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{3-2\varepsilon_0 d/k_B T}}{\int_1^{\infty} d\left(\frac{r}{\xi}\right) \left(\frac{r}{\xi}\right)^{1-2\varepsilon_0 d/k_B T}} = \xi^2 \frac{2-2\varepsilon_0 d/k_B T}{4-2\varepsilon_0 d/k_B T}$$

Distanța medie crește cu creșterea temperaturii până când diverge la o temperatură T_2 care se obține egalând cu zero numitorul expresiei de mai sus

$$4k_b T_2 - 2\varepsilon_0 d = 0 \quad (13.24)$$

Prin urmare, perechile disociază la aceeași temperatură la care energia liberă a unui singur vortex devine egală cu zero. În ambele metode s-a neglijat prezența altor vortexuri (sau perechi de vortexuri) și prin urmare, ele sunt valabile pentru un sistem cu o densitate mică de vortexuri. La densitate mare de vortexuri, efectele de ecranare conduc la renormarea, prin micșorare, a constantei de cuplaj de la J la $v_s(T)J$. Dacă substituim constanta de cuplaj J prin constanta de cuplaj renormată $v_{so}J$ în ec. (13.23) sau (13.24) obținem pentru temperatura de tranziție *BKT* expresia

$$T_{BKT} = \frac{\pi}{2} v_{so} J, \quad v_{so}(T_{BKT}) > 0 \quad (13.25)$$

Sub temperatura de tranziție T_{BKT} sistemul se află în fază ordonată topologic cu funcția de corelație dată de ec. (13.22) unde η depinde de temperatură și la T_{BKT} are valoarea universală $\eta = 1/4$. În această fază vortexurile sunt cuplate în perechi vortex-antivortex. La T_{BKT} s-a găsit [39]

$$\lambda_{ef}(T_{BKT}) = \frac{\Phi_0^2}{16\pi^2 T_{BKT}} = \frac{2 \text{ cm}}{T_{BKT} (\text{în K})} \quad (13.26)$$

S-au stabilit, de asemenea, relațiile

$$T_{BKT}(T) \simeq T_{co} \left[1 - \frac{2T_{co}}{v_{so} d \varepsilon_0(o)} \right] \quad (13.27)$$

$$\xi_{BKT}(T) \simeq \xi(T) \exp \left(b \frac{T_{co} - T}{T - T_{BKT}} \right)$$

unde T_{co} este temperatura de tranziție la starea normală și b este un parametru care în straturile subțiri are valorile cuprinse între 2 și 16.

Un efect important care apare în supraconductori este disocierea perechilor de vortexuri legate, în prezența unui curent $J = jd$, aplicat la temperaturi joase. Energia liberă a unei perechi vortex-antivortex separate la o distanță r și orientate perpendicular pe direcția vortexului este

$$F(r) = 2v_s \varepsilon_0 d \left(\ln \frac{r}{\xi} - \frac{J r}{J_o \xi} \right) \quad (13.28)$$

$$J_o = \frac{v_s 3\sqrt{3}}{2} j_o d$$

J_o are valoarea de ordinul valorii curentului critic de despicare a perechilor de vortexuri. Distanța critică de legătură vortex-antivortex este

$$R_c \simeq \omega \frac{J_o}{J} \quad (13.29)$$

și energia de activare (a despicării)

$$U_c \simeq 2v_s \varepsilon_0 d \ln \frac{J_o}{J} \quad (13.30)$$

Rata de generare a vortexurilor este $\Gamma \sim \exp(-U_c/k_B T)$ iar anihilarea mutuală a acestora este determinată de ecuația

$$\frac{dn_v}{dt} = \Gamma - \frac{\xi^2}{\tau} n_v^2 \quad (13.31)$$

unde ξ^2/τ este parametrul de recombinare. În condiții staționare se obține numărul de vortexuri $n_v \sim \Gamma^{1/2}$. Utilizând formula Bardeen-Stephen pentru rezistivitate în cazul deplasării fluxului se găsește

$$\rho = 2\pi\xi_2\xi_n n_v \sim \left(\frac{J}{J_0}\right)^{\nu_0 \epsilon_0 d / k_B T} \quad (13.32)$$

unde ρ_n este rezistivitatea stratului subțire în stare normală. Caracteristica I-V este

$$V = \rho I \sim \left(\frac{J}{J_0}\right)^\alpha \quad (13.33)$$

$$\alpha(T) = 1 + \frac{v_s \epsilon_0 d}{k_B T}$$

și $\alpha(T_{BKT}) = 3$. Densitatea de vortexuri libere $n_v \sim \xi_{BKT}^{-2}$ deasupra temperaturii de tranziție, induce o comportare ohmică la densități mici de curent $J < J_x$,

$$\frac{\rho(T)}{\rho_n} \sim 2\pi \left(\frac{\xi}{\xi_{BKT}}\right)^2 \quad (13.34)$$

unde ξ_{BKT} este dat de relația (13.27) și exponentul α face un salt la valoarea egală cu unitatea. J_x este dat de expresia

$$J_x \sim J_0 \frac{\xi}{\xi_{BKT}}$$

La curenții $J > J_x$ vortexurile sunt încă legate însă caracteristica I-V (13.23) este neohmică. Această tranziție de fază a fost pusă în evidență experimental [40-41].

În supraconductorii ceramici cu structură stratificată energia de interacție a unei perechi vortex-antivortex într-un strat individual este de formă logaritmică (ec. 13.20) pentru r oricât de mare ($\xi < r < \infty$). Este de așteptat ca în asemenea straturi să apară tranziția BKT. Ceea ce apare nou față de cele prezentate mai sus este cuplajul Josephson între straturile supraconductoare. Datorită acestui cuplaj dependența logaritmică a energiei de interacție dintre cele două vortexuri din pereche este înlocuită cu o dependență liniară pentru $r > \lambda_j$ unde λ_j este adâncimea de penetrație Josephson,

$$\frac{U(r)}{2d\epsilon_0} = \begin{cases} \ln \frac{r}{\xi}, & \xi < r < \lambda_j \\ \frac{r}{\lambda_j} - \frac{\lambda_j}{4R}, & \lambda_j < r < \frac{\lambda}{\epsilon} \\ \frac{r}{\lambda_j}, & \lambda/\epsilon < r \end{cases}$$

unde ϵ este parametrul de anizotropie. Ca rezultat tranziția BKT este limitată la lungimea λ_J . S-a găsit următoarea relație

$$T_c = T_{BKT} + \frac{b(T_{co} - T_{BKT})}{\left\{ \ln \left[\lambda_J / \xi(T_{BKT}) \right] \right\}}$$

unde T_c este temperatura de tranziție 3D care apare atunci când $\xi_{BKT} = \lambda_J$ [42]. Estimările numerice pentru Bi2212, care este un supraconductor puternic stratificat, sunt: $T_{co} = 100 \text{ K}$, $d = 15 \text{ \AA}$, $\xi = 25 \text{ \AA}$, $\lambda = 2000 \text{ \AA}$, $\epsilon = 1/150$, $\epsilon(0)d = 1500 \text{ K}$, $v_s = 1$, $T_{co} - T_{BKT} = 13 \text{ K}$, $T_c - T_{BKT} = b \text{ K}$.

Comportarea de mai sus a sistemului de vortexuri are loc în absența unui câmp magnetic aplicat din exterior. Dacă se aplică un câmp magnetic într-un supraconductor stratificat se obține de la o anumită valoare B_{2D} o tranziție de la starea 3D la starea 2D. În starea 2D domină interacțiunea planară între vortexurile (sub formă de discuri) dintr-un strat supraconductor. La $B < B_{2D}$ există linii de vortexuri, adică vortexurile se extind și între straturile supraconductoare (în direcția axei c) prin cuplaj Josephson, așa cum se prezintă în paragraful 3.4.

CAPITOLUL IV

TEORIA MICROSCOPICĂ A SUPRACONDUCTIBILITĂȚII

Teoria microscopică trebuie să explice următoarele rezultate experimentale:

1. Tranziția într-un interval de temperatură foarte scurt (aproape abruptă) la rezistivitatea zero de la o valoare finită. De aici rezultă că trebuie să aibă loc o tranziție de fază abruptă a purtătorilor de sarcină în solid.

2. Sub temperatura T_c de tranziție, câmpul magnetic este exclus din interiorul supraconductorului (efectul Meissner-Ochsenfeld). Aceasta arată că purtătorii de sarcină în supraconductor au spin zero sau au caracter diamagnetic.

3. Fluxul magnetic închis în interiorul unui inel supraconductor este cuantificat, fiind un multiplu întreg de $h/2q$. Acest rezultat conduce la concluzia că purtătorii de sarcină în supraconductor sunt perechi de electroni.

4. S-a găsit că temperatura de tranziție este invers proporțională cu rădăcina pătrată din masa ionilor rețelei (efectul izotopic). Aceasta sugerează că mecanismul cel mai probabil în fenomenul de supraconductibilitate este interacția electron-electron prin intermediul fononilor.

5. Capacitatea calorică electronică în supraconductori crește exponențial cu temperatura, ceea ce arată că electronii sunt excitați termic și că există o bandă interzisă (energie de activare).

4.1. Interacțiunea electron-rețea

În 1950 Frölich [1] a arătat că interacția electron-fonon poate conduce la cuplarea a doi electroni. Cuplarea apare prin aceea că un electron emite un fonon, care este imediat absorbit de celălalt electron. În anumite substanțe această interacție poate fi atractivă și mai puțernică decât repulsia coulombiană (ca de exemplu în metalele cu rezistivitate mare în stare pură ca Pb, Sn etc.), ceea ce conduce la formarea unei stări legate electron-electron. Interacția Frölich poate fi prezentată schematic ca în Fig. 4.1 unde, cu linie dreaptă se reprezintă traiectoria electronului,

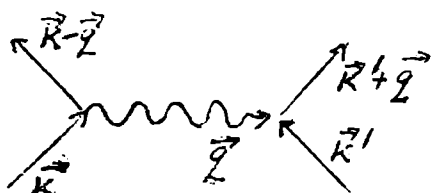


Fig. 4.1.

iar cu linie ondulată se reprezintă fononul. Electronul cu vectorul de undă \bar{k} interacționând cu rețeaua, produce o perturbație emițând un fonon cu vector de undă \bar{q} și trece în starea $\bar{k} - \bar{q}$. Un al doilea electron, de vector de undă \bar{k}' , aflat la o anumită distanță de primul, suferă acțiunea perturbației și absoarbe fononul emis de primul electron,

trecând în starea $\vec{k}' + \vec{q}$. Deci cei doi electroni interacționează între ei schimbând fononi. Impulsul total se conservă: $\vec{k} + \vec{k}' = (\vec{k} - \vec{q}) + (\vec{k}' + \vec{q})$. Deși energia se conservă între stările inițială și finală, ea nu se conservă între starea inițială (în care primul electron a emis un fonon) și starea intermediară) înainte ca cel de al doilea electron să absoarbă fononul emis) sau între starea intermediară și starea finală. Această situație se datorează existenței relației de incertitudine între energie și timp $\Delta E \cdot \Delta t \sim \hbar$. Dacă timpul de viață Δt a stării intermediare este foarte scurt, va exista o nedeterminare mare ΔE în energia sa, astfel că energia nu se conservă în procesele de emisie sau absorbție a fononilor. Asemenea procese în care energia nu se conservă se numesc procese virtuale și emisia virtuală a unui fonon este permisă numai dacă este disponibil un al doilea electron care să-l absoarbă pe acesta aproape imediat. Fie E_1 și E'_1 energiile primului electron înainte și, respectiv, după emisia virtuală a fononului de energie $\hbar\omega$; E'_1 este energia stării intermediare. Dacă $E_1 - E'_1 < \hbar\omega$, atunci rezultatul mediu al emisiei și absorbției de fononi este apariția unei atracții între cei doi electroni. Dacă această atracție depășește repulsia Coulomb, atunci interacția netă dintre cei doi electroni este atractivă. Faptul că la baza fenomenului de supraconductibilitate stă interacția electron-fonon este susținut de următoarele două rezultate experimentale: (a) efectul izotopic, (b) supraconductorii sunt conductori slabi în stare normală. De exemplu, la plumb, care are temperatură critică mare, trebuie să existe o interacție electron-fonon puternică (tare) și de aceea el este conductor slab la temperatura camerei, pe când la metalele nobile, ca aurul și argintul, care sunt bune conducătoare la temperatura camerei, interacția electron-fonon este slabă și nu prezintă supraconductibilitate până la temperaturile cele mai joase obținute până în prezent. Bednorz și Müller [2] au investigat și au găsit supraconductibilitate la temperaturi înalte, la oxizii metalelor de tranziție, deoarece aceștia prezintă efecte polaronice (interacție electron-fonon) puternice.

4.2. Perechi Cooper

Într-un metal normal, probabilitatea ca o stare de energie să fie ocupată cu un electron este dată de funcția de distribuție Fermi-Dirac.

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-F)/k_B T} + 1}$$

unde F este energia Fermi. La zero absolut funcția Fermi-Dirac este o funcție treaptă și punctele care reprezintă vectorii de undă ai electronilor (și deci impulsurile) în spațiul \vec{k} tridimensional, ocupă o sferă de rază \vec{k}_F numită „marea Fermi” unde

$$k_F = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mF} \quad (2.1)$$

După descoperirea lui Frölich că interacția electron-electron se poate realiza prin intermediul fononilor, o nouă idee a fost emisă de Cooper în 1956 și anume că dacă între electroni dispuși în apropierea suprafeței Fermi apare o interacție de atracție chiar foarte slabă aceasta dă naștere unei perechi de electroni legați. Perechea de electroni legați poartă numele de pereche Cooper. Cei doi electroni din pereche au impulsurile de semn contrar și de asemenea spinii de semn contrar. Cooper a făcut ipoteza că starea supraconductoare este determinată de existența perechilor de electroni. El a studiat ce se întâmplă cu doi electroni când aceștia se adaugă unui metal situat la zero astfel că ei sunt forțați de către principiul lui Pauli să ocupe stările cu $\vec{k} > \vec{k}_F$. El a arătat că dacă între acești doi electroni există o atracție oricât de slabă ei formează o stare legată astfel

că energia lor totală este mai mică decât $2F$. Vom prezenta în continuare această problemă. Considerăm în continuare doi vectori de undă \vec{k}_1 și \vec{k}_2 care nu interacționează între ei și care au vectorii de poziție \vec{r}_1 și \vec{r}_2 . Funcția de undă care descrie cei doi electroni care nu interacționează între ei este egală cu produsul funcțiilor de undă ale celor doi electroni considerați separat

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2) \quad (2.2)$$

Trecem la coordonatele mișcării relative $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ și centrului de masă $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) / 2$. Deoarece energia potențială de interacție dintre electroni depinde numai de coordonata relativă $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, mișcarea se separă în cea a centrului de masă și cea relativă. Cum ne interesează numai starea fundamentală, adică starea fără curent, vom considera perechile Cooper în repaus și deci funcția de undă va depinde numai de \vec{r} , adică $\psi = \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Dacă există interacțiune între electronii din pereche, atunci funcția de undă se prezintă ca o mixtură a funcțiilor de undă corespunzătoare diferitelor stări ale perechii

$$\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \sum_{i,j} a_{ij} \psi(\vec{k}_i, \vec{k}_j) = \sum_{i,j} a_{ij} \psi(\vec{k}_i)\psi(\vec{k}_j) \quad (2.3)$$

Scrierea funcției de undă în acest fel arată că cei doi electroni se împrăștie în mod repetat unul de altul astfel încât impulsurile lor individuale se schimbă în mod constant și $|a_{ij}|^2$ este probabilitatea de a avea la orice moment dat doi electroni impulsurile individuale $\hbar\vec{k}_i$ și, respectiv, $\hbar\vec{k}_j$. La orice act de împrăștiere impulsul total al celor doi electroni se conservă adică $\vec{k}_i + \vec{k}_j = \vec{K} = \text{constant}$. Prin procesul de împrăștiere cu schimb de fononi se realizează o interacțiune reciprocă între cei doi electroni și dacă această interacțiune este atractivă energia potențială rezultată de interacțiune este negativă. Dacă se face medierea acestei energii de interacție pe o perioadă de timp în care au loc mai multe evenimente, energia celor doi electroni se micșorează cu această energie medie a cărei valoare este proporțională cu numărul de evenimente, adică cu numărul de moduri în care se pot alege cei doi termeni din funcția de undă ψ (2.3). Se presupune că fiecare act de împrăștiere contribuie cu aceeași cantitate, $-V$, la energia potențială. Așa după cum vom arăta în Anexă $-V$ este elementul de matrice al interacției dintre cei doi electroni care au aceeași valoare a impulsului total și se presupune că acesta este independent de impulsurile individuale ale electronilor. De asemenea, așa cum vom vedea din teoria detaliată probabilitatea de împrăștiere este apreciabilă dacă $E_1 - E'_1 = \hbar\omega$. Considerăm un metal la temperatura $0 K$. Toate stările proprii cu energiile cinetice până la valoarea F sunt ocupate cu electroni, astfel că stările E_1 și E'_1 se găsesc deasupra lui F . Cele mai mici valori E_1 și E'_1 care se găsesc deasupra lui F satisfac în același timp relația $E_1 - E'_1 = \hbar\omega$ se găsesc într-un interval energetic $\hbar\omega_0$ situat deasupra energiei Fermi unde ω_0 este o frecvență medie a fononilor egală în general cu jumătate din valoarea frecvenței Debye, ω_D . Notând $E_1 = \hbar^2 k_1^2 / 2m$, $E'_1 = \hbar^2 k_1'^2 / 2m$, \vec{k}_1 și \vec{k}_1' trebuie să se găsească în domeniul $\Delta k = m\omega_0 / \hbar k_F$ deasupra vectorului de undă Fermi \vec{k}_F . Valorile permise ale lui \vec{k} trebuie să satisfacă egalitatea $\vec{k}_1 + \vec{k}_j = \vec{K}$ și acestea se pot găsi utilizând construcția reprezentată în Fig. 4.2. Din două puncte O_1 și O_2 situate la distanța \vec{K} unul de altul ducem două sfere de raze \vec{k}_F înconjurate de păturile de grosime Δk . Toți vectorii de undă care satisfac relația $\vec{k}_1 + \vec{k}_j = \vec{K}$ încep sau se termină în regiunile hașurate rezultate din intersecția celor două pături sferice. Numărul perechilor de electroni este proporțional cu volumul inelului hașurat și are un maxim ascuțit la $\vec{K} = 0$, în care caz inelul devine pătură sferică completă de grosime Δk . Prin

urmare cel mai mare număr de procese de împrăștiere permise care conduc la cea mai mare scădere a energiei se obțin prin împerecherea electronilor cu impulsuri egale și de semn contrar:

$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2$. De asemenea, din mecanica cuantică reiese că scăderea de energie are valoarea cea mai mare când cei doi electroni au și spinii opuși. Situația este analoagă stării fundamentale a moleculei de hidrogen. Sistemul de doi electroni poate să aibă spinul total egal cu 0 sau 1. Funcția de undă totală este egală cu produsul dintre funcția de undă spațială și funcția de undă spinorială. Funcția de undă totală a sistemului trebuie să fie antisimetrică. Dacă spinul total este egal cu 1, funcția spinorială este simetrică iar cea spațială este antisimetrică. Dacă spinul total este egal cu zero funcția de undă spinorială este antisimetrică și cea spațială este simetrică. Starea cu funcția spațială simetrică relativ la schimbarea poziției electronilor, cum este starea perechii Cooper, posedă energia cea mai joasă. De aceea în această stare spinii electronilor sunt antiparaleli. Intuitiv acest fenomen poate fi înțeles astfel. Să ne închipuim electronii ca niște sfere cu sarcini negative care se rotesc în jurul axelor proprii de rotație (spinul). Din legea lui Laplace se cunoaște că doi curenți de același sens se atrag iar doi curenți de semn contrar se resping (invers decât la interacția Coulomb dintre sarcini). Așa cum se observă în partea de jos din Fig. 4.2 curenții marginali generați de cele două sfere în mișcare (pe figură sunt reprezentate proiecțiile acestora pe planul perpendicular pe axele de rotație) sunt de același sens când cele două sfere au mișcări de rotație de semn contrar, cu alte cuvinte atunci când spinii electronilor sunt de semn opus. Prin urmare apare o energie de inetrație Laplace atractivă care diminuează energia repulsivă Coulomb și se adaugă la energia atractivă de interacție cu schimb de fononi. De fapt interacția Laplace atractivă stă la baza principiului lui Pauli.

Funcția de undă care descrie o pereche Cooper se scrie

$$\psi = \sum_i a_i \psi(\vec{k}_{i\uparrow}, -\vec{k}_{i\downarrow}) \quad (2.4)$$

unde

$$\psi(\vec{k}_{i\uparrow}, -\vec{k}_{i\downarrow}) = \psi(\vec{k}_{i\uparrow})\psi(-\vec{k}_{i\downarrow})$$

$\vec{k} \uparrow$ însemnează impuls pozitiv, spin sus, $-\vec{k} \downarrow$ însemnează impuls negativ, spin jos.

Prezentăm în continuare problema Cooper care constă în aflarea energiei celor doi electroni în interacțiune.

Scriem funcția de undă a perechii sub forma unei suprapuneri a funcțiilor de undă ale stărilor pereche cu impulsuri de semn contrar, astfel încât toate stările să se găsească într-un strat subțire de grosime Δk în exteriorul suprafeței Fermi. (O astfel de alegere lasă toate celelalte stări neschimbate). Valoarea medie a energiei unei astfel de stări, în absența interacțiunii între electroni, este mai mare decât cea a stării normale datorită energiei suplimentare pe care o posedă stările situate deasupra suprafeței. Totuși în prezența interacțiunii, așa cum vom arăta mai jos se poate obține și o stare cu o energie mai mică decât cea normală. Scriem funcția de undă a perechii de electroni în interacțiune sub forma

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{\vec{k}} g(\vec{k}) e^{i\vec{k}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} \quad (2.5)$$

unde am schimbat pe a_i din (2.4) cu $g(\vec{k})$ și sumarea după i cu sumarea după \vec{k} .

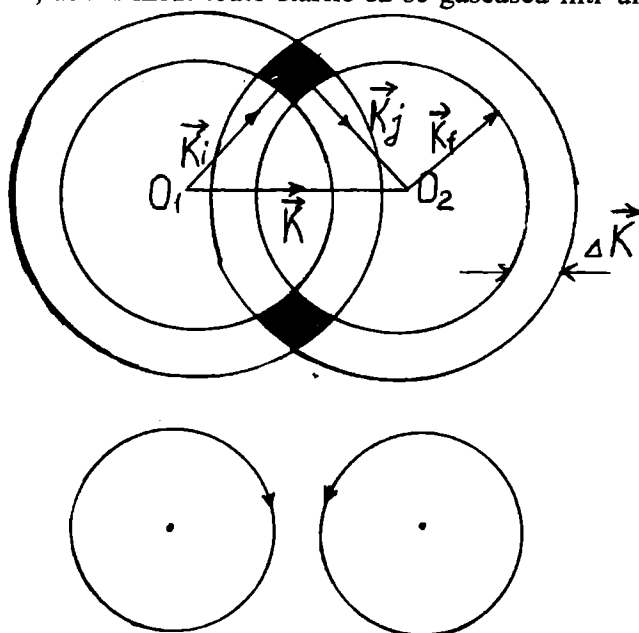


Fig. 4.2.

Am scris deci funcția de undă a perechii de electroni în interacțiune sub forma unei descompunerii generale după diferitele stări ale perechii. $g(\vec{k})$ este amplitudinea de probabilitate ca electronul 1 să se găsească în starea \vec{k} și electronul 2 în starea $-\vec{k}$. Datorită faptului că stările cu $\vec{k} < \vec{k}_F$ sunt ocupate, principiul lui Pauli impune condiția $g(\vec{k}) = 0$ pentru $\vec{k} < \vec{k}_F$, adică aceste stări sunt interzise pentru perechea de electroni. În prezența unei energii potențiale de interacție $V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$, ecuația lui Schrodinger cei doi electroni este

$$\frac{-\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2)\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (E + 2E_F)\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.6)$$

unde $2E_F$ este energia celor doi electroni independenți la suprafața Fermi. Înmulțind la stânga cu complex-conjugata $\psi^*(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ a funcției (5) și integrând după $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ se obține

$$\frac{\hbar}{m}k^2 g(\vec{k}) + \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') V_{\vec{k}\vec{k}'} = (E + 2E_F)g(\vec{k}) \quad (2.7)$$

unde

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = \frac{1}{\Omega} \iint V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) e^{i(\vec{k}' - \vec{k})(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.8)$$

este transformata Fourier a potențialului de interacție și Ω este volumul sistemului. Ecuația (2.7) are un spectru continuu de soluții pentru $E > 0$. Cooper a arătat că totuși există stări legate, pentru $E < 0$, cu condiția ca V să fie atractivă, oricare ar fi mărimea acestei interacțiuni. Cel mai simplu model presupune că $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ este o mărime constantă într-un mic interval energetic $\hbar\omega_D$ din apropierea suprafeței Fermi și zero în afara sa, adică

$$V_{\vec{k}\vec{k}'} = -\frac{V}{\Omega} \text{ pentru } \begin{cases} E_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \\ E_F < \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D \end{cases} \quad (2.9)$$

$V_{\vec{k}\vec{k}'} = 0$ în restul intervalului. Interacția $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ este atractivă ($V > 0$), ω_D este frecvența de limitare. Ec. (2.7) se scrie

$$\left(\frac{\hbar^2}{m} k^2 - E - 2E_F \right) g(\vec{k}) = \frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') \quad (2.10)$$

unde sumarea după \vec{k}' este mărginită la intervalul $\hbar\omega_D$ deasupra lui E_F . Notăm

$$C = \frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{k}'} g(\vec{k}') \quad (2.11)$$

Din (2.10) scriem

$$g(\vec{k}) = \frac{C}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E - 2E_F} \quad (2.12)$$

Substituind (2.12) în (2.11) obținem ecuația de selfconsistență,

$$1 = \frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{k}} \frac{C}{\frac{\hbar^2 k^2}{m} - E - 2E_F} \quad (2.13)$$

cu condiția

$$E_F < \frac{\hbar^2 k^2}{2m} < E_F + \hbar\omega_D$$

Notăm, $E_k = (\hbar^2 k^2 / 2m) - E_F$ și trecem în (2.13) de la sumă la integrală

$$1 = \frac{V}{\Omega} \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{2\varepsilon_k - E} = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{k d\varepsilon_k}{2\varepsilon_k - E}$$

Deoarece $\hbar \omega_D \ll E_F$, k poate fi înlocuit cu k_F și obținem

$$1 = \frac{mV k_F}{2\pi^2 \hbar^2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{2\varepsilon_k - E} = \frac{1}{2} V N(0) \ln \left| \frac{E - 2\hbar\omega_D}{E} \right| \quad (2.14)$$

unde $N(0) = m k_F / 2\pi^2 \hbar^2$ este densitatea de stări la suprafața Fermi. Se obține [3]

$$E = \frac{-2\hbar\omega_D}{\exp[2 / N(0)V] - 1} < 0 \quad (2.15)$$

adică energia perechii în interacție $E + 2E_F$ este mai mică decât energia electronilor independenți $2E_F$, deci perechea se află într-o stare legată cu energia de legătură $|E|$. Prin urmare starea cu electroni împerecheați este mai favorabilă din punct de vedere energetic. Gazul de electroni cu o astfel de interacție (atractivă) tinde să treacă prin formarea de perechi în starea de energie mai joasă ceea ce corespunde unei tranziții de fază cu eliberarea energiei $|E|/2$ pentru fiecare electron. Pentru un potențial V oricât de mic rezultă $E \neq 0$. În limita cuplajului slab ($N(0)V \ll 1$) se scrie

$$E = -2\hbar\omega_D e^{-2/N(0)V} \quad (2.16)$$

Pentru a găsi raza medie a perechii ($\langle r^2 \rangle$)^{1/2} se utilizează relația

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int |\psi(\vec{r})|^2 r^2 d\vec{r}}{\int |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r}}$$

unde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Utilizând (2.5) relația de mai sus se scrie

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\sum_{\vec{k}} |\nabla_{\vec{k}} g(\vec{k})|^2}{\sum_{\vec{k}} |g(\vec{k})|^2}$$

Introducând în această relație expresia (2.12) a lui $g(\vec{k})$ și efectuând integrarea în aceleași aproximații ca mai sus se obține

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\hbar v_F}{|E|} \quad (2.17)$$

unde $v_F = \hbar k_F / m$ este viteza la suprafața Fermi. Raza medie a perechii este de fapt lungimea de coerență ξ .

În calculele de mai sus principiul de exclusiune al lui Pauli a fost luat în considerare între electronul (\vec{r}_1) și electronii de la suprafața Fermi și între electronul (\vec{r}_2) și electronii de la suprafața Fermi. Funcția de undă a perechii trebuie să fie simetrică în raport cu schimbarea coordonatelor (\vec{r}_1, \vec{r}_2). În acord cu ec. (2.5) $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ este simetrică și funcția de undă de spin trebuie să fie antisimetrică. Aceasta, după câte am amintit mai înainte, conduce la concluzia că electronii din pereche pe lângă faptul că au impulsurile egale și de semn contrar au și spinii antiparaleli. Dacă interacțiunea $V_{kk'}$ depinde de unghiul dintre \vec{k} și \vec{k}' (deci nu are forma simplă presupusă prin ec. (2.9) atunci apar următoarele două aspecte: (a) există câteva stări legate, (b) partea spațială a funcției de undă trebuie să fie anizotropă și partea spinorială mult mai complicată.

Cel mai important rezultat al analizei Cooper este că la formarea unei perechi de electroni cu impulsurile egale și de semn contrar, micșorarea energiei potențiale datorită interacțiunii depășește ca valoare mărimea energiei cinetice în exces față de $2E_F$.

4.3. Starea supraconductoare fundamentală

Problema examinată de Cooper se referă la cazul ideal al unei singure perechi de electroni în interacțiune. Interacțiunea celor doi electroni cu electronii din marea Fermi se ia în considerare numai prin aceea că, conform principiului lui Pauli, acești electroni nu pot ocupa stări cu $k < k_F$. Un pas important înainte în elaborarea unei teorii microscopice a supraconductibilității a fost făcut în anul 1957 de către Bardeen, Cooper și Schrieffer [4] care au arătat că rezultatul simplu obținut de Cooper poate fi extins prin luarea în considerare a interacțiilor dintre toți electronii din sistem. Adică se tratează problema multielectronică deoarece într-un metal există în medie 10^{23} electroni de conducție pe cm^3 și nu se poate neglija interacțiunea dintre ei. Presupunerea fundamentală a teoriei Bardeen-Cooper-Schrieffer (numită în mod uzual teoria BCS) este că interacțiile în starea supraconductoare sunt numai acelea dintre oricare doi electroni care în mod aleatoriu formează o pereche Cooper și efectul tuturor celorlalți electroni asupra oricărei perechi constă numai în a limita, conform principiului lui Pauli, stările în care pot fi împrăștiate perechile în interacțiune, deoarece unele stări sunt deja ocupate. Pentru clarificare să scriem funcția de undă multielectronică a stării fundamentale sub forma unui determinant Slater, ca un produs antisimetrizat de funcții de undă ale perechilor Cooper

$$\psi_n = A \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \alpha(1) \beta(2) \psi(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \alpha(3) \beta(4) \dots \psi(\vec{r}_{n-1}, r_n) \alpha(n-1) \beta(n) \quad (3.1)$$

unde A este operatorul de antisimetrie, $n/2$ este numărul total de perechi, $\alpha(i)$ și $\beta(j)$ sunt funcțiile de undă de spin sus și, respectiv, jos. Substituind funcția de undă (2.5) a perechii Cooper rezultă

$$\begin{aligned} \psi_n = & \sum_{\vec{k}_1} \dots \sum_{\vec{k}_{n/2}} g(\vec{k}_1) g(\vec{k}_2) \dots g(\vec{k}_{n/2}) A e^{i\vec{k}_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)} e^{i\vec{k}_2(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)} \dots \times \\ & \times e^{i\vec{k}_{n/2}(\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_n)} \alpha(1) \beta(2) \alpha(3) \beta(4) \dots \alpha(n-1) \beta(n) \end{aligned} \quad (3.2)$$

unde de exemplu $g(k_1)$ reprezintă amplitudinea de probabilitate ca electronul 1 să se găsească în starea $k_1 \uparrow$, iar electronul 2 să se găsească în starea $-k_1 \downarrow$ ș.a.m.d. Funcția de undă ψ_n descrie un sistem cu un număr fix de particule, $n/2$ perechi. Din punct de vedere statistic este incomod de tratat un astfel de sistem întrucât atunci când se calculează mediile pe ansamblu este necesar să se țină cont separat de faptul că n este fix. Pentru a evita acest lucru se lucrează cu un sistem cu număr variabil de particule, în care caz funcția de undă se poate scrie

$$\psi = \sum_n \lambda_n \psi_n \quad (3.3)$$

care este o suprapunere de stări $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ cu 0, 1, 2, ... particule. Ideea fundamentală a teoriei BCS, pe care am enunțat-o mai înainte, constă în scrierea funcției de undă (3.3) sub forma

$$\psi_{BCS} = C \prod_{\vec{k}} \left[\psi_0 + g(\vec{k}) \psi_{\vec{k}} \right] \quad (3.4)$$

unde C este o constantă de normare, ψ_0 este starea fără nici o particulă, iar $\psi_{\vec{k}}$ este starea ocupată cu o pereche ($k \uparrow, -k \downarrow$). De asemenea se poate scrie

$$\psi_{BCS} = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} \psi_0 + v_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}} \right) \quad (3.5)$$

$|v_k|^2$ reprezintă probabilitatea ca starea $(\vec{k}\uparrow, -\vec{k}\downarrow)$ să fie ocupată cu o pereche, iar $|u_k|^2$ reprezintă probabilitatea ca această stare să fie neocupată. Este îndeplinită relația $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$, ceea ce asigură și normarea funcției de undă. Se poate considera pentru simplitate că u_k și v_k sunt numere reale. Notăm că în lucrarea lor originală Bardeen, Cooper și Schrieffer au notat $v_k^2 = h_k$ și în consecință $u_k^2 = 1 - h_k$ iar funcția de undă se poate scrie și sub forma

$$\psi_{BCS} = \prod_{\vec{k}} \left[(1 - h_k)^{1/2} \psi_0 + h_k^{1/2} \psi_{\vec{k}} \right] \quad (3.6)$$

Pentru a clarifica aceste probleme înainte de a face prezentarea teoretică să considerăm inițial un metal situat la OK astfel încât funcția de distribuție a electronilor arată ca în Fig. 4.3a. Se poate forma o stare cu energie mai joasă îndepărtând doi electroni cu k foarte puțin mai mic decât k_F și admițând că aceștia formează o pereche Cooper. Dacă admitem formarea unei perechi atunci putem admite formarea a mai multor perechi și micșorarea energiei în continuare. Aceasta este posibilă deoarece mai mult decât o pereche de electroni poate fi reprezentată prin aceeași funcție de undă exprimată prin relația (2.5). Funcția de undă multielectronică (3.2) care este egală cu produsul funcțiilor perechilor individuale, în care toate perechile individuale sunt reprezentate de funcții de forma (2.5), arată că nu există limită a numărului perechilor Cooper care pot fi reprezentate de funcții de forma (2.5) și că se poate reprezenta perechea ca fiind o particulă compusă la care nu se poate aplica principiul lui Pauli în forma sa simplă; perechile sunt considerate ca fiind particule Bose. Această proprietate a perechilor Cooper de a se afla toate în aceeași stare cuantică cu aceeași energie este de mare importanță în elaborarea teoriei BCS. La prima vedere s-ar părea că nu există limită a numărului de electroni care pot pleca din starea $k < k_F$ și forma perechii Cooper, cu micșorarea energiei totale, astfel încât ne-am putea aștepta în final ca toți electronii să aibă $k > k_F$. Desigur că un asemenea rezultat ar fi absurd. Pentru ca o pereche de electroni să se poată împrăștia din stările $(\vec{k}_i\uparrow, -\vec{k}_i\downarrow)$ în stările $(k_j\uparrow, -k_j\downarrow)$ trebuie întâi ca stările $(\vec{k}_i\uparrow, -\vec{k}_i\downarrow)$ să fie ocupate, iar stările $(k_j\uparrow, -k_j\downarrow)$ să fie libere.

Cu cât se formează mai multe perechi Cooper cu $\vec{k} > \vec{k}_F$, probabilitatea de a găsi stări $(k_j\uparrow, -k_j\downarrow)$ libere devine mai mică astfel că numărul de procese de împrăștiere se micșorează și în consecință scade valoarea energiei potențiale negative. Eventual se atinge o condiție în care micșorarea energiei potențiale este insuficientă pentru a egala creșterea energiei cinetice și nu mai este în continuare posibilă micșorarea energiei potențiale a electronilor prin formarea perechilor Cooper. Există o situație optimă corespunzătoare celei mai mici valori a energiei totale și această situație este caracterizată de probabilitatea h_i ca stările $(\vec{k}_i\uparrow, -\vec{k}_i\downarrow)$ din funcția de undă ψ_n să fie ocupate. În cele ce urmează vom găsi și valoarea lui $h_k \leq 1$. Energia stării supraconductoare se determină efectuând medierea

$$\langle \psi_{BCS} | H_0 + H_{int} | \psi_{BCS} \rangle = E \quad (3.7)$$

unde H_0 este operatorul energiei cinetice a electronilor și H_{int} este energia de interacție. Pentru

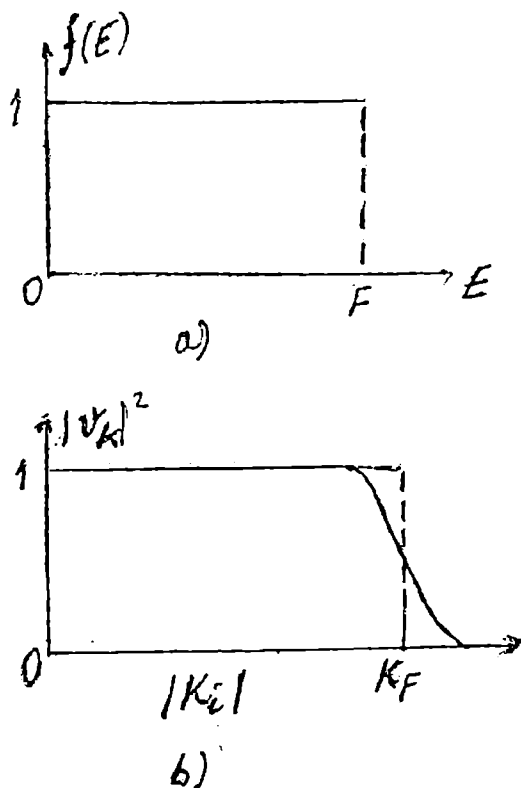


Fig. 4.3.

evaluarea elementelor de matrice Bardeen, Cooper și Schrieffer au scris ψ_{BCS} sub forma descompusă a două componente

$$\psi = v_k \psi_1 + u_k \psi_0 \quad (3.8)$$

unde ψ_0 descrie starea neocupată de către perechi, iar ψ_1 descrie starea ocupată de către o pereche. Funcțiile ψ sunt normate. Forma (3.8) a funcției de undă este utilizată pentru calculul elementului de matrice al operatorului energiei cinetice H_0 . Pentru a evalua elementul de matrice al energiei potențiale H_I se utilizează o descompunere similară a funcției de undă ψ și anume

$$\psi = v_k v_{k'} \psi_{11} + v_k u_{k'} \psi_{10} + u_k v_{k'} \psi_{01} + u_k u_{k'} \psi_{00} \quad (3.9)$$

unde ψ_{11} descrie stările în care ambele stări \bar{k} și \bar{k}' ale perechii sunt ocupate, ψ_{10} descrie stările în care \bar{k} este ocupată iar \bar{k}' este neocupată, ψ_{01} descrie stările în care \bar{k} este neocupată și \bar{k}' este ocupat, iar ψ_{00} descrie stările în care atât \bar{k} cât și \bar{k}' sunt neocupate. Se obține energia stării supraconductoare

$$E = 2 \sum_k \epsilon_k h_k - \frac{V}{\Omega} \sum_{k,k'} [h_k (1-h_k) h_{k'} (1-h_{k'})]^{1/2} \quad (3.10)$$

unde elementul de matrice se alege ca și în problema Cooper de forma

$$V_{\bar{k},\bar{k}'} = \begin{cases} -\frac{V}{\Omega}, & \text{pentru } |\epsilon_{\bar{k}}|, |\epsilon_{\bar{k}'}| \leq \hbar\omega_D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (3.11)$$

iar $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m - E_f$, Ω este volumul cristalului. Pentru a găsi starea fundamentală trebuie să găsim valoarea lui h_k pentru care energia E este minimă. Efectuând $\partial E / \partial h_k = 0$ se obține

$$\frac{\partial E}{\partial h_k} = 0 = \sum_k \left[2\epsilon_k - \frac{V}{\Omega} \sum_{k'} \{h_{k'} (1-h_{k'})\}^{1/2} \right] \frac{1-2h_k}{h_k^{1/2} (1-h_k)^{1/2}}$$

adică

$$\frac{h_k^{1/2} (1-h_k)^{1/2}}{1-2h_k} = \frac{V}{\Omega} \sum_{k'} \frac{[h_{k'} (1-h_{k'})]^{1/2}}{2\epsilon_{k'}} \quad (3.12)$$

care mai poate fi scrisă

$$\frac{[h_k (1-h_k)]^{1/2}}{1-2h_k} = \frac{\Delta}{2\epsilon_k} \quad (3.13)$$

unde

$$\Delta = \frac{V}{\Omega} \sum_{k'} [h_{k'} (1-h_{k'})]^{1/2} \quad (3.14)$$

Ecuția (3.12) poate fi rescrisă astfel

$$(\Delta^2 + \epsilon_k^2) h_k^2 - (\Delta^2 + \epsilon_k^2) h_k + \frac{\Delta^2}{4} = 0$$

sau

$$E_k^2 h_k^2 - E_k^2 h_k + \frac{\Delta^2}{4} = 0 \quad (3.15)$$

unde E_k este energia cuasielectronilor măsurată de la marginea benzii și este dată de expresia

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \quad (3.16)$$

Din (3.15) se obține

$$h_k = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\Delta^2}{E_k^2} \right\}^{1/2}$$

sau

$$h_k = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\epsilon_k}{E_k} \right] \quad (3.17)$$

Semnul pozitiv reprezintă probabilitatea ca stările perechii să fie ocupate, iar semnul minus reprezintă preabilitatea ca stările perechii să fie neocupate. Substituind (3.17) în (3.14) rezultă

$$\Delta = \frac{V}{\Omega_k} \sum_k [h_k(1-h_k)]^{1/2} = \frac{V}{\Omega_k} \sum_k \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \right]^{1/2} = \frac{V}{2\Omega_k} \sum_k \left[1 - \frac{\epsilon_k^2}{E_k^2} \right]^{1/2} = \frac{V}{2\Omega_k} \sum_k \frac{\Delta}{(\Delta^2 + \epsilon_k^2)^{1/2}}$$

sau

$$\frac{V}{2\Omega_k} \sum_k \frac{1}{(\epsilon_k^2 + \Delta^2)^{1/2}} = 1$$

Trecând de la sumare la integrare

$$\frac{V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} N(\epsilon_k) \frac{d\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} = 1 \quad (3.18)$$

Dacă presupunem că densitatea de stări $N(E) \equiv N(0) =$ densitatea de stări la nivelul Fermi, ec. (3.18) devine

$$\begin{aligned} \frac{2}{N(0)V} &= \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} = \ln \left(\epsilon_k + \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \right) \Big|_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} = \ln \left[\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2} \right] - \\ &- \ln \left[-\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2} \right] = \ln \frac{\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2}}{\sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2} - \hbar\omega_D} \end{aligned}$$

Această ecuație poate fi scrisă

$$\exp \left(- \frac{2}{N(0)V} \right) = \frac{\sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2} - \hbar\omega_D}{\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2}}$$

În limita cuplajului slab, când $\Delta \ll \hbar\omega_D$ rezultă

$$\exp \left(- \frac{2}{N(0)V} \right) = \frac{\hbar\omega_D \left[\sqrt{1 + (\Delta/\hbar\omega_D)^2} - 1 \right]}{\hbar\omega_D \left[1 + \sqrt{1 + (\Delta/\hbar\omega_D)^2} \right]} \approx \left(\frac{\Delta}{2\hbar\omega_D} \right)^2$$

sau

$$\Delta \approx 2\hbar\omega_D \exp \left(- \frac{1}{N(0)V} \right) \quad (3.19)$$

Δ este banda interzisă a supraconductorului, iar $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}$ este energia de excitare a unui electron normal. Această semnificație rezultă din cele ce urmează. Excitarea unui singur electron înseamnă că în starea fundamentală starea $\vec{k}_1 \uparrow$ este ocupată, iar starea $-\vec{k}_1 \downarrow$ este neocupată. Este posibilă, de asemenea, excitarea perechilor pentru care este necesară o energie de excitare de două ori mai mare decât pentru excitarea unui singur electron. Variația energiei cinetice datorită excitării unui singur cuasielectron se poate deduce pe cale intuitivă. Dacă avem numai un cuasielectron în starea \vec{k}_1 energia sa va fi ϵ_{k_1} . În starea fundamentală se poate găsi o pereche de electroni în starea \vec{k}_1 cu probabilitatea h_{k_1} și deci această stare va avea energia $2h_{k_1} \epsilon_{k_1}$. Așadar

$$E_c \text{ (stare excitată)} - E_c \text{ (stare fundamentală)} = \epsilon_{k_1}(1 - 2h_{k_1}). \quad (3.20)$$

Variația energiei potențiale reprezentată prin ultimul termen din (3.10)

$$U = -\frac{V}{\Omega} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} \left[h_k (1 - h_{k'}) h_{k'} (1 - h_k) \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

se poate găsi pe baza următoarelor considerații. În starea excitată există un electron în starea \vec{k}_1 , astfel că nu există pereche de electroni în această stare. Aceasta înseamnă că în relația (3.21) vom omite toți termenii care implică \vec{k}_1 pentru stările excitare

$$U(\text{stare excitată}) - U(\text{stare fundamentală}) = 2 \sum_k \frac{V}{\Omega} u_k v_k u_{k_1} v_{k_1} \quad (3.22)$$

Prin urmare, energia de excitație este

$$\begin{aligned} E(\text{stare de excitație}) - E(\text{stare fundamentală}) &= \epsilon_{k_1} \left(1 - 2v_{k_1}^2 \right) + 2\Delta_{k_1} u_{k_1} v_{k_1} = \\ &= \epsilon_{k_1} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_{k_1}}{\sqrt{\epsilon_{k_1}^2 + \Delta_{k_1}^2}} \right) \right] + 2\Delta_{k_1} \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\epsilon_{k_1}^2}{E_{k_1}^2} \right)} = \frac{\epsilon_{k_1}^2}{\sqrt{\epsilon_{k_1}^2 + \Delta_{k_1}^2}} + \Delta_{k_1} \frac{\sqrt{E_{k_1}^2 - \epsilon_{k_1}^2}}{E_{k_1}} = \\ &= \frac{\epsilon_{k_1}^2 + \Delta_{k_1}^2}{E_{k_1}} = E_{k_1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Am avut în vedere relațiile

$$\begin{aligned} h_k &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \\ v_k^2 &= h_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \\ u_k^2 &= 1 - h_k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Din relația (3.23) rezultă că un cuasielectron excitat are energia $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_k^2}$ și că Δ_k reprezintă banda interzisă de excitare a unui cuasielectron deoarece $|E_k| \geq \Delta_k$. Existența benzii interzise este

o consecință directă a interacțiunii electronilor din pereche și se anulează atunci când această interacțiune dispare. Menționăm că banda interzisă totală este 2Δ deoarece întotdeauna cuasielectronii sunt excitați în perechi. Prima stare excitată a supraconductorului este starea BCS cu $(n/2) - 1$ perechi și o pereche despiciată, cu cei doi parteneri în stările \vec{k}_1 și \vec{k}'_1 . Diferența de energie dintre această stare și starea fundamentală BCS cu $n/2$ perechi este în acord cu (3.23)

$$E_{ex} - E_{BCS} = E_{k_1} + E_{k'_1} \quad (3.25)$$

unde E_{k_1} și $E_{k'_1}$ sunt de forma (3.16). Deoarece energiile electronilor excitați depind de Δ , ceea ce arată că ei au fost mai înainte în interacțiune, aceștia se numesc cuasielectroni. Cuasielectronii devin electroni normali dacă $|\epsilon_k| \gg \Delta$ și deci $E_k = |\epsilon_k|$ atunci când energia de excitație este mare față de energia Fermi. Energia minimă de excitație se obține prin despicierea unei perechi formată din electronii de la suprafața Fermi ($\epsilon_{k_1} = \epsilon_{k'_1} = 0$)

$$(E_{ex} - E_{BCS}) = 2\Delta$$

2Δ este energia minimă necesară pentru despicierea unei perechi. În Fig. 4.4a se reprezintă spectrul de energie a electronilor în metalul normal, iar în Fig. 4.4.b se reprezintă spectru cuasielectronilor și energia stării fundamentale BCS (de perechi de electroni) într-un supraconductor. În Fig. 4.5 se reprezintă modelul semiconductor al stărilor de excitație adică spectrul de energie al cuasielectronilor în supraconductor. Prezența benzii interzise apare și mai clar dacă se calculează densitatea de stări $N_s(E_k)$ a cuasielectronilor în supraconductor. Deoarece prin trecerea de la starea normală la cea supraconductoră nu dispar stări energetice, rezultă că

$$N(\epsilon_k) d\epsilon_k = N_s(E_k) dE_k$$

unde $N(\epsilon_k)$ este densitatea de stări de energie din metalul normal. Se obține

$$N_s(E_k) = N(\epsilon_k) \frac{d\epsilon_k}{dE_k}$$

Având în vedere (3.16)

$$\frac{dE}{d\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} = \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{E}$$

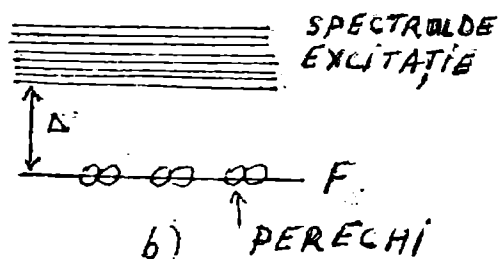
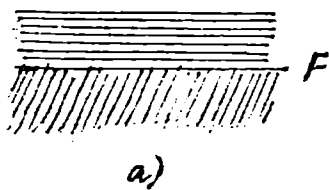


Fig. 4.4

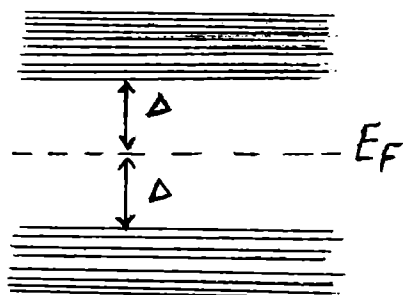


Fig. 4.5.

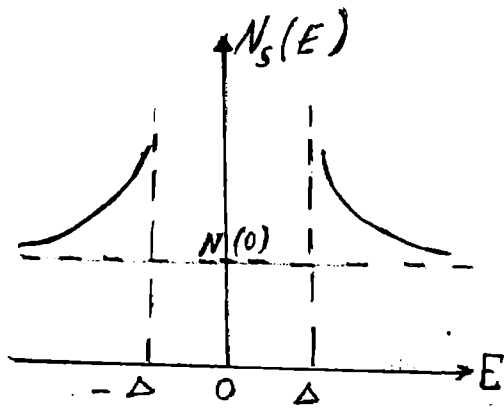


Fig. 4.6.

astfel că

$$N_s(E) \approx N(0) \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, \quad |E| > \Delta$$

și $N_s(E) = 0$ dacă $|E| < \Delta$. Am omis indicele k și am considerat $N(E) = N(0) =$ densitatea de stări la suprafața Fermi. Densitatea de stări a cuasielectronilor în supraconductor este reprezentată în Fig. 4.6. Se observă că densitatea de stări prezintă singularitate la $E = \Delta$. Revenind la starea fundamentală BCS, energia acesteia dată de expresia (3.10) în care utilizăm

expresia (3.17) a lui h_k și expresia (3.14) pentru Δ , este

$$\begin{aligned} E_s^o &= 2 \sum_k \epsilon_k h_k - \Delta \sum_k \{h_k (1 - h_k)\}^{1/2} = \sum_k \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right] = \\ &= \sum_k \left[E_k - \frac{\epsilon_k^2}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Trecând de la sumare la integrală, în limita cuplajului slab se obține

$$E_s^o = N(0) \left[\int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \epsilon_k d\epsilon_k - \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\epsilon_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} d\epsilon_k - \frac{\Delta^2}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\epsilon_k^2}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} d\epsilon_k \right] \approx -\frac{1}{2} N(0) \Delta^2 \quad (3.28)$$

Calculăm în continuare energia de condensare. Energia de condensare este diferența dintre energia stării fundamentale a stării (fazei) normale (adică atunci când electronii nu interacționează între ei) și energia stării fundamentale a fazei supraconductoare

$$E_n^o - E_s^o = \sum_{(\epsilon_k < 0)} 2\epsilon_k - \sum_k \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right]$$

Divizăm cea de a doua sumă, una pentru $\epsilon_k < 0$ și cealaltă pentru $\epsilon_k > 0$, astfel

$$E_n^o - E_s^o = \sum_{(\epsilon_k < 0)} 2\epsilon_k - \sum_{(\epsilon_k < 0)} \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right] - \sum_{(\epsilon_k > 0)} \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} \right]$$

Grupând primii doi termeni rezultă

$$E_n^o - E_s^o = \sum_{(\epsilon_k < 0)} \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} + \frac{\Delta^2}{2E_k} \right] + \sum_{(\epsilon_k > 0)} \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} + \frac{\Delta^2}{2E_k} \right]$$

Se observă că porima sumă este egală cu cea de a doua sumă dacă se substituie ϵ_k cu $-\epsilon_k$ și viceversa, astfel că se poate scrie

$$E_n^o - E_s^o = 2 \sum_{\substack{k \\ (\epsilon_k > 0)}} \left[\frac{\epsilon_k (\epsilon_k - E_k)}{E_k} + \frac{\Delta^2}{2E_k} \right] = \sum_{\substack{k \\ (\epsilon_k > 0)}} E_k \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right)^2$$

Trecem de la sumă la integrală

$$E_n^o - E_s^o = N(o) \int_0^{\hbar\omega_D} \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \right) d\epsilon_k = N(o) (\hbar\omega_D)^2 \left[\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{(\hbar\omega_D)^2}} - 1 \right] \quad (3.29)$$

unde am aproximat densitatea de stări cu valoarea ei la suprafața Fermi. Utilizând expresia (3.9) se obține, având în vedere că interacțiunea electron-fonon este slabă,

$$E_n^o - E_s^o + 2N(o) (\hbar\omega_D)^2 e^{-2/N(o)V} = \frac{1}{2} N(o) \Delta^2 \quad (3.30)$$

Se observă că energia stării fundamentale BCS este mai mică decât energia stării normale, astfel că starea supraconductoare este starea stabilă care se realizează efectiv dacă interacțiunile electron-electron sunt atractive.

4.4. Supraconductibilitatea la temperaturi finite

În paragraful precedent am studiat starea fundamentală supraconductoare și ce se întâmplă când o pereche se despică în doi cuasielectroni, de exemplu sub acțiunea radiației. Dacă se crește temperatura sistemului deasupra temperaturii de OK, unele perechi se despică în cuasielectroni datorită agitației termice. La o anumită temperatură, numărul de cuasielectroni este dat de legile mecanicii statistice. Însă lărgimea benzii interzise Δ scade cu creșterea temperaturii, deoarece Δ este proporțională cu energia V de interacțiune care scade cu scăderea numărului de perechi. Cu creșterea temperaturii crește numărul de cuasielectroni și scade numărul de perechi și de asemenea scade Δ astfel că la o anumită temperatură, lărgimea benzii interzise este egală cu zero. Aceasta este temperatura critică T_c și peste această temperatură nu mai există perechi de electroni. Funcția de distribuție a cuasielectronilor pe starea k de energie este funcția de distribuție Fermi-Dirac

$$f_k = \frac{1}{e^{\epsilon_k/k_B T} + 1} \quad (4.1)$$

unde se alege energia Fermi egală cu zero. (De fapt, potențialul chimic nu apare, deoarece numărul total de particule nu se conservă). Ca și în cazul stării fundamentale la $T = OK$ energia $E(T)$ conține un termen cinetic și un termen de interacție. Termenul cinetic se scrie

$$E_c = 2 \sum_k \left| \epsilon_k \right| \left[f_k + (1 - 2f_k) h_k \right] \quad (4.2)$$

și conține energia cinetică a cuasielectronilor (excitați) și energia cinetică a perechilor. Factorul 2 apare deoarece se sumează numai pe jumătatea din zona Brillouin (adică sumarea după k corespunde sumării după numărul stărilor perechilor distincte). Termenul $2 \sum_k \left| \epsilon_k \right| f_k$ corespunde energiei cinetice a cuasielectronilor (excitați). Termenul $2 \sum_k \left| \epsilon_k \right| (1 - 2f_k) h_k$ corespunde energiei cinetice a stărilor perechilor. Factorul $(1 - 2f_k)$ apare deoarece stările \vec{k} , $-\vec{k}$ sunt ocupate cu perechi

și nu cu cuasielectroni (excitați). Din considerente similare se obține pentru energia potențială de interacțiune expresia

$$U = \sum_{k,k'} V_{k,k'} \left[h_k (1-h_k) h_{k'} (1-h_{k'}) \right]^{1/2} (1-2f_k) (1-2f_{k'}) \quad (4.3)$$

unde apar în plus ultimii doi factori față de cazul prezentat la OK. Acești doi factori arată că nu pot fi ocupate cu perechi stările care conțin cuasielectroni (excitați). Pentru $f_k = 0$ expresiile (4.2) și (4.3) se reduc la cele obținute în paragraful precedent la $T = OK$. Pentru a găsi funcțiile termodinamice ale sistemului trebuie să calculăm energia liberă și valoarea sa minimă. Energia liberă este dată de expresia $F = E_i - TS$, iar energia internă E_i este egală cu suma dintre energia cinetică și energia potențială

$$F = E_c + U - TS \quad (4.4)$$

Deoarece electronii împerechiați se găsesc în starea cea mai înaltă de ordonare, nu aduc contribuție la entropie, astfel că entropia se exprimă în modul uzual în funcție de probabilitatea f_k de ocupare a stărilor excitate, care sunt distribuite aleatoriu

$$TS = -2k_B T \sum_k \left[f_k \ln f_k + (1-f_k) \ln(1-f_k) \right] \quad (4.5)$$

Factorul 2 apare din aceleași motive ca și mai sus. La echilibru termodinamic energia liberă este minimă. Calculăm minimumul lui F în raport cu h_k

$$\frac{\partial F}{\partial h_k} = 0 \quad (4.6)$$

și în raport cu f_k

$$\frac{\partial F}{\partial f_k} = 0 \quad (4.7)$$

Observăm că h_k nu apare în termenul TS astfel că din (4.6) rezultă

$$2\varepsilon_k (1-2f_k) = -\sum_{k'} V_{k,k'} \left[h_k (1-h_{k'}) \right]^{1/2} (1-2f_k) (1-2f_{k'}) \frac{1-2h_k}{\left[h_k (1-h_k) \right]^{1/2}}$$

sau

$$\frac{\left[h_k (1-h_k) \right]^{1/2}}{1-2h_k} + \frac{\sum_{k'} V_{k,k'} \left[h_k (1-h_{k'}) \right]^{1/2} (1-2f_{k'})}{2\varepsilon_k} \quad (4.8)$$

Notând

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{k,k'} \left[h_k (1-h_{k'}) \right]^{1/2} (1-2f_{k'}) \quad (4.9)$$

soluția ec. (4.8) este asemănătoare cu cea obținută în cazul $T = OK$

$$h_k = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right) \quad (4.10)$$

$$E_c = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}$$

cu deosebire că Δ depinde de temperatură așa cum rezultă din expresia (4.9). Efectuând operația (4.7) (minimumul lui F în raport cu f_k) se obține

$$2\varepsilon_k (1-2h_k) - \sum_{k'} \left[h_k (1-h_{k'}) h_k (1-h_k) \right]^{1/2} (1-2f_{k'}) + 2k_B T \ln \left[f_k (1-f_k) \right] = 0$$

Utilizând (4.9)-(4.10), această ecuație devine

$$E_k = -k_B T \ln \frac{f_k}{1-f_k}$$

de unde rezultă

$$f_k = \frac{1}{e^{E_k/k_B T} + 1}$$

funcția Fermi, ceea ce demonstrează că cuasielectronii se comportă ca fermioni independenți a căror energie este dată de legea de dispersie (4.10). Se presupune că interacția dintre electroni este atractivă, adică

$$V_{kk'} = \begin{cases} -\frac{V}{\Omega}, & |\epsilon_k| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

și

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta, & |\epsilon_k| < \hbar\omega_D \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

adică la procesul de supraconductibilitate participă numai electronii din apropierea suprafeței Fermi. Rescriem ec. (4.9) sub forma

$$\Delta = \frac{V}{\Omega} \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \right]^{1/2} \left[1 - \frac{2}{1 + \exp(E_k / k_B T)} \right]$$

sau

$$\Delta = \frac{V}{\Omega} \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k^2}{E_k^2} \right)^{1/2} \frac{\exp(E_k / k_B T) - 1}{\exp(E_k / k_B T) + 1} \right] = \frac{V}{2\Omega} \sum_{k'} \left[\frac{\Delta}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right) \right]$$

sau, trecând de la sumă la integrală

$$\frac{1}{N(o)V} = \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \left[\left(\epsilon_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2} / 2k_B T \right] d\epsilon_k}{2 \left(\epsilon_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2}}$$

sau

$$\frac{1}{N(o)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \left[\left(\epsilon_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2} / 2k_B T \right] d\epsilon_k}{\left(\epsilon_k^2 + \Delta^2 \right)^{1/2}} \quad (4.11)$$

Aceasta este integrala BCS care dă variația benzii interzise cu temperatura. La $T = OK$ această expresie se reduce la (3.18) din care se deduce explicit $\Delta_0 = \Delta (T = OK)$. Pentru o valoare a lui T mai mare decât o anumită temperatură critică T_c , ec.(4.11) nu are soluție și metalul revine la starea normală, fără bandă interzisă. Temperatura T_c se obține din (4.11) luând $\Delta = 0$, adică

$$\frac{1}{N(o)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh(\epsilon_k / 2k_B T)}{\epsilon_k} d\epsilon_k \quad (4.12)$$

Integrând prin părți, se obține

$$\frac{1}{N(o)V} = \ln \frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} \tanh \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c} - \int_0^{\hbar\omega_D/k_B T_c} dx \ln x \frac{d}{dx} [\tanh(x/2)]$$

unde am notat $x = \epsilon/k_B T$. În limita cuplajului slab $k_B T_c \ll \hbar\omega_D$ (sau $N(o)V \ll 1$) se obține $\tanh(\hbar\omega_D/2k_B T_c) = 1$ și limita integralei poate fi extinsă la infinit. Integrala devine în acest caz egală cu $-\ln(2\gamma/\pi)$ unde $2\gamma/\pi = 0,88$ (γ este constanta lui Euler). Se obține

$$\frac{1}{N(o)V} = \ln \left(\frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} \right) - \ln 0,88 = \ln \left(1,14 \frac{\hbar\omega_D}{k_B T_c} \right)$$

și temperatura critică se determină din relația

$$k_B T_c = 1,14 \hbar\omega_D \exp \left(\frac{1}{N(o)V} \right)$$

Utilizând expresia (3.19) a lui Δ la $0k$, pe care o notăm Δ_0 rezultă

$$\Delta_0 = \frac{\pi}{\gamma} k_B T_c \approx 1,76 k_B T_c \quad (4.14)$$

La temperaturi intermediare $\Delta(T)$ se calculează numeric din relația (4.11). Variația lui Δ cu temperatura poate fi aproximată prin expresia

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta_0} = \tanh \left(\frac{T_c \Delta(T)}{T \Delta_0} \right) \quad (4.15)$$

cu excepția vecinătății lui T_c . În apropierea lui T_c , Δ variază după legea

$$\Delta(T) = 3,1 k_B T_c \left(1 - \frac{T_c}{T} \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

Dependența de temperatură a lărgimii benzii interzise este reprezentată în Fig. 4.7; cu linie întreruptă este reprezentată dependența teoretică BCS iar punctele corespund rezultatelor experimentale obținute pentru Pb [5]. Deoarece frecvența Debye ω_D este invers proporțională cu rădăcina pătrată din masa atomului din cristal din relația (4.13) rezultă

$$T_c \sim M^{-1/2}$$

ceea ce explică efectul izotopic.

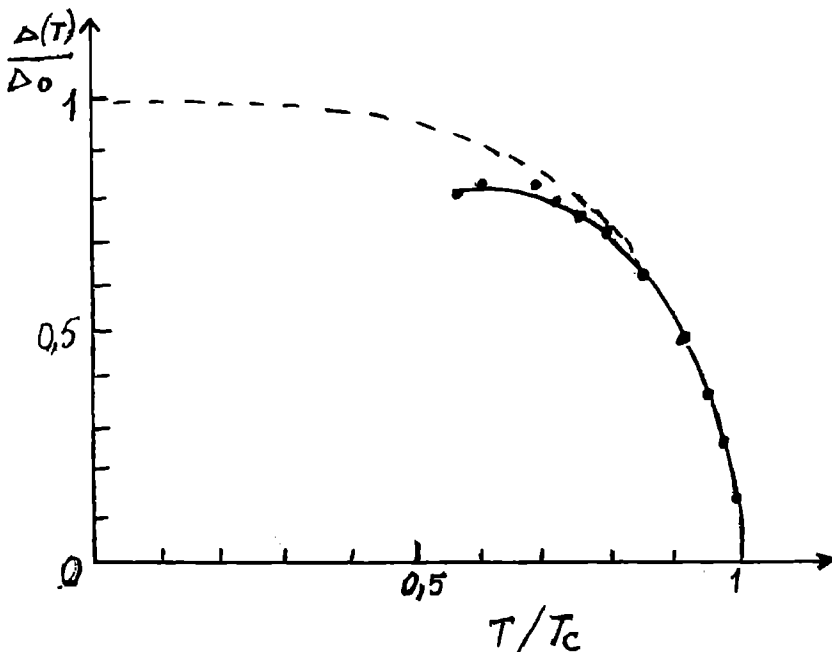


Fig. 4.7.

4.5. Câmpul magnetic critic și capacitatea calorică

Într-o probă masivă câmpul magnetic critic se determină din diferența dintre energiile libere ale stărilor normală și respectiv supraconductoare, utilizând relația

$$\mu_0 \frac{H_c^2}{2} = F_n - F_s \quad (5.1)$$

unde H_c este câmpul magnetic critic termodinamic. Energia liberă a stării normale este egală cu

$$\begin{aligned} F_n &= E_i - TS = \sum_k 2\varepsilon_k f_k + 2k_B T \sum_k \left\{ f_k \ln f_k + (1 - f_k) \ln(1 - f_k) \right\} = \\ &= \sum_k 2\varepsilon_k f_k + 2k_B T \sum_k \left\{ f_k \ln f_k + \ln(1 - f_k) - f_k \ln(1 - f_k) \right\} = \\ &= \sum_k 2\varepsilon_k f_k + 2k_B T \sum_k \left[f_k \ln \left(\frac{f_k}{1 - f_k} \right) + \ln(1 - f_k) \right] = \\ &= \sum_k 2\varepsilon_k f_k + 2k_B T \sum_k \left[\frac{-\varepsilon_k}{k_B T} f_k - \ln(1 + e^{-\varepsilon_k/k_B T}) \right] = -2k_B T \ln(1 + e^{-\varepsilon_k/k_B T}) \end{aligned}$$

unde funcția $f_k = [\exp(\varepsilon_k/k_B T) + 1]^{-1}$ este funcția de distribuție Fermi a electronilor în metalul în stare normală. Trecând de la sumă la integrală,

$$F_n = -4N(o)k_B T \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{-\varepsilon_k/k_B T}) d\varepsilon_k = -\frac{1}{3} \pi^2 N(o) (k_B T)^2 \quad (5.2)$$

Pentru starea supraconductoare energia liberă F_s în acord cu (4.4) este dată de suma celor trei termeni (4.2), (4.3) și (4.5). Considerăm întâi termenul (4.5) care conține entropia, introducem funcția Fermi (4.1) unde E_k este dată de expresia (4.10) și astfel

$$-TS = -2k_B T \sum_k \left[\ln(1 + e^{-E_k/k_B T}) + \frac{E_k}{k_B T} f_k \right] \quad (5.3)$$

Sumarea termenilor (4.2) și (4.3) dă

$$\begin{aligned} &2 \sum_k \varepsilon_k \left[f_k + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k}{E_k} \right) (1 - 2f_k) \right] - \sum_k \Delta \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varepsilon_k^2}{E_k^2} \right)^{1/2} (1 - 2f_k) = \\ &= \sum_k \left[2\varepsilon_k f_k + \varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{E_k} - 2\varepsilon_k f_k + \frac{2\varepsilon_k^2}{E_k} f_k - \frac{\Delta^2}{2E_k} + \frac{\Delta^2}{E_k} f_k \right] = \\ &= \sum_k \left[\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{E_k} + \frac{2\varepsilon_k^2}{E_k} f_k - \frac{\Delta^2}{2E_k} + \frac{\Delta^2}{E_k} f_k \right] \quad (5.4) \end{aligned}$$

Adunând (5.3) cu (5.4) se obține

$$F_s = -2k_B T \sum_k \ln(1 + e^{-E_k/k_B T}) + \sum_k \left[\varepsilon_k - \frac{\varepsilon_k^2}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} - \frac{\Delta^2 f(E_k)}{E_k} \right] \quad (5.5)$$

Trecând de la sumă la integrală

$$F_s = -2k_B TN(o) \int_{-h\omega_D}^{h\omega_D} \ln(1 - e^{-\epsilon_k/k_B T}) d\epsilon_k + N(o) \int_{-h\omega_D}^{h\omega_D} \left[\epsilon_k - \frac{\epsilon_k^2}{E_k} - \frac{\Delta^2}{2E_k} - \frac{\Delta f(E_k)}{E_k} \right] d\epsilon_k \quad (5.6)$$

se obține

$$F_n - F_s = \frac{1}{2} N(o) \Delta^2 + N(o) \Delta^2 \ln\left(\frac{\Delta_o}{\Delta}\right) + 4N(o)k_B T \int_{-h\omega_D}^{h\omega_D} d\epsilon_k \ln(1 + e^{\epsilon_k/k_B T}) - \frac{1}{3} \pi^2 N(o) (k_B T)^3 \quad (5.7)$$

unde am utilizat (5.3) și (5.6). La $T = OK$, $\Delta = \Delta_o$ și din (5.7) obținem

$$F_n - F_s \Big|_{T=OK} = \frac{1}{2} N(o) \Delta_o^2 = \frac{H_c^2}{8\pi}$$

astfel că la OK câmpul critic are valoarea

$$H_c(o) = 2\Delta_o \sqrt{\pi N(o)} \quad (5.8)$$

La temperaturi diferite de zero, dar apropiate de OK substituind în expresia (5.7) $\Delta = \Delta_o$ și neglijând integrala deoarece este proporțională cu $\exp(-\Delta_o/k_B T)$, se obține

$$F_n - F_s = \frac{H_c^2}{8\pi} - \frac{1}{2} N(o) \Delta_o^2 - \frac{1}{3} \pi^2 N(o) (k_B T)^2 \quad (5.9)$$

Din (5.8) și (5.9) se obține următoarea dependență de temperatură a câmpului critic

$$H_c(T) = H_c(o) \left[1 - 1,06 \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad T \rightarrow 0 \quad (5.10)$$

În apropierea lui T_c deoarece $\Delta \ll k_B T$ pentru diferența energiilor libere se obține expresia

$$F_n - F_s \approx \frac{1}{2} N(o) (\pi k_B T_c)^2 \left(1 - \frac{T}{T_c} \right)^2 \quad (5.11)$$

și pentru câmpul critic

$$H_c(T) = 1,74 H_c(o) \left(1 - \frac{T}{T_c} \right) \quad (5.12)$$

Această dependență diferă puțin de dependența $1 - (T/T_c)^2$ găsită empiric.

Capacitatea calorică electronică se calculează din relațiile

$$C = T \frac{\partial S}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (5.13)$$

Prin urmare utilizăm fie relația entropiei fie relația energiei libere. Diferența capacităților calorice din starea normală și respectiv supraconductoare este

$$C_s - C_n = T \frac{\partial(S_s - S_n)}{\partial T} = -T \frac{\partial^2(F_n - F_s)}{\partial T^2} \quad (5.14)$$

În domeniul temperaturilor joase limita superioară a integralei (5.7) poate fi extinsă la infinit deoarece $\hbar\omega_D \gg k_B T$ și deoarece $\Delta = \Delta_0 \gg k_B T$ se poate scrie

$$\int_0^{\hbar\omega_D} d\varepsilon_k \ln \left[1 + \exp \left(\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2} / k_B T \right) \right] \simeq \int_0^{\gamma} d\varepsilon_k \exp \left[- \frac{\sqrt{\varepsilon_k^2 + D^2}}{k_B T} \right] \simeq \exp \left[-D_0 / k_B T \right] \int_0^{\gamma} \exp \left[-\varepsilon_k^2 / 2k_B T \Delta_0 \right] d\varepsilon_k = \frac{1}{2} \left(2\pi k_B T \Delta_0 \right)^{1/2} e^{-D_0 / k_B T}$$

astfel că la temperaturi joase se obține

$$C_s - C_n \simeq 2N(o)\Delta_0 k_B (2\pi)^{1/2} \left(\frac{\Delta_0}{k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\Delta_0 / k_B T \right] - \frac{2}{3} \pi^2 N(o) k_B^2 T \quad (5.15)$$

unde după derivare au fost reținuți numai termenii cu puterile cele mai mici în $(1/T)$. Ultimul termen din (5.15) reprezintă capacitatea calorică electronică în metalul normal

$$C_n = \frac{2}{3} \pi^2 N(o) k_B^2 T = \gamma T \quad (5.16)$$

iar primul termen din (5.15) reprezintă capacitatea calorică electronică în supraconductor

$$C_s = 2N(o)\Delta_0 k_B (2\pi)^{1/2} \left(\frac{\Delta_0}{k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\Delta_0 / k_B T \right] \quad (5.17)$$

Dependența exponențială de temperatură a lui C_s , cu energia de activare Δ_0 confirmă existența benzii interzise în spectrul energetic al supraconductorului. În apropierea temperaturii critice, integrala din (5.7) nu mai poate fi aproximată ca mai sus deoarece $\Delta \ll k_B T$. Un calcul exact dă în acest caz, pentru diferența energiilor libere, expresia (5.11). Prin derivarea acestei expresii în raport cu temperatura se găsește diferența capacităților calorice

$$C_s - C_n = N(o) \left(\pi k_B \right)^2 T, \quad \frac{T_c - T}{T_c} \ll 1 \quad (5.18)$$

Saltul capacității calorice la $T = T_c$ este

$$\Delta C = C_s - C_n \Big|_{T=T_c} = N(o) \left(\pi k_B \right)^2 T_c = \frac{3}{2} \gamma T_c \quad (5.19)$$

În măsurătorile experimentale se obține capacitatea calorică totală C_t care este compusă din capacitatea calorică electronică prezentată mai sus și capacitatea calorică a rețelei C_r . Pentru metalul normal scriem

$$C_m = C_n + C_r$$

iar pentru supraconductor

$$C_{is} = C_s + C_r$$

Din experiență se cunoaște că în cele două faze capacitatea calorică a rețelei este aceeași, $C_m = C_{rs}$ și, prin urmare

$$C_{is} - C_m = C_s - C_n = C_s - \gamma T \quad (5.20)$$

Dependența de temperatură a capacității calorice electronice este reprezentată în Fig. 4.8. Rezultatele experimentale sunt în bună concordanță cu teoria. Dacă se reprezintă grafic $\ln(C_s/\gamma T_c)$ în funcție de (T/T_c) se obține o dreaptă din panta căreia se determină lărgimea benzii interzise a supraconductorului [G7].

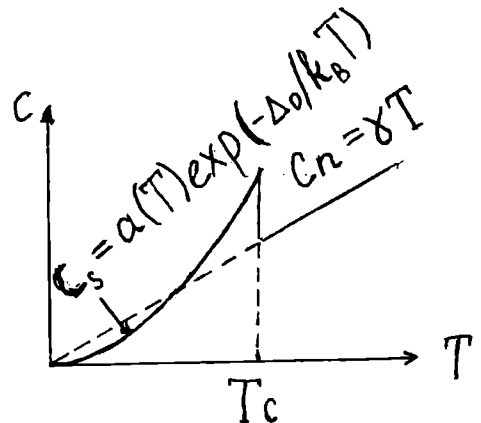


Fig. 4.8.

4.6 Transportul curentului electric.

În cele prezentate până aici am considerat că electronii au distribuție perfect izotropă în spațiul impulsurilor și deci că nu circulă curent electric. Presupunem acum că fiecare pereche Cooper nu are impulsul zero ci are un impuls $\hbar\vec{K}$ care este același pentru toate perechile. În această situație starea unei perechi o vom nota prin

$$\left[\left(\vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2} \right) \uparrow, \left(-\vec{k}_i + \frac{\vec{K}}{2} \right) \downarrow \right]$$

și nu prin $(\vec{k}_i \uparrow, -\vec{k}_i \downarrow)$. Vectorii de undă sunt distribuți pe o sferă de rază k_F al cărei centru X este

deplasat cu $K/2$ față de originea O (regiunea hașurată în Fig. 4.9). \vec{K} este vectorul de undă total al unei perechi Cooper. Atunci când nu trece curent electric sfera este centrată în originea O . Desigur că chiar în condițiile în care este transportat curentul electric au loc procese de împrăștiere

a perechilor din starea $\left[\left(\vec{k}_i + \vec{K}/2 \right) \uparrow, \left(-\vec{k}_i + \vec{K}/2 \right) \downarrow \right]$ în starea $\left[\left(\vec{k}_j + \vec{K}/2 \right) \uparrow, \left(-\vec{k}_j + \vec{K}/2 \right) \downarrow \right]$.

Dacă ne situăm la OK și deci nu există cuasielecetri excitați, atunci în timpul transportului curentului electric energia sistemului de electroni crește cu energia cinetică

$$W_1 = n_s \frac{\hbar^2 \vec{K}^2}{8m} \quad (6.1)$$

unde n_s este numărul total al electronilor împerechiați. Funcția de undă a perechii de electroni devine

$$\Psi_{\vec{K}} = \psi e^{i\vec{K}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2}$$

unde ψ este funcția de undă a perechii (2.5). Termenul exponențial reprezintă mișcarea centrului de masă al perechii cu vectorul de undă total \vec{K} . Dacă se notează cu $\vec{r} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) / 2$ poziția centrului de masă al perechii, atunci

$$\Psi_{\vec{K}} = \psi e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}}$$

Electronii care formează o pereche Cooper se împrăștie constant unul de altul, însă deoarece impulsul total rămâne constant într-un astfel de proces, nu există nici o modificare a curentului electric. Singurul proces de împrăștiere care micșorează curentul electric este acela în care se modifică și impulsul total al unei perechi în direcția curentului. Acesta este procesul în care o pereche se despică în doi cuasielecetri. Această despărțire necesită o energie 2Δ care trebuie luată de undeva. La valori mici ale curentului electric nu există această posibilitate astfel că

neexistând asemenea procese de împrăștiere nu există rezistență electrică. Densitatea curentului electric se exprimă prin relația $\vec{j} = qn\hbar\vec{K} / 2m$, unde q este sarcina

și m este masa electronului. Cu creșterea lui \vec{j} distribuția impulsurilor, reprezentată în Fig. 4.9 se deplasează tot mai mult astfel că devine posibil ca o pereche să se despică în doi cuasielecetri. Vectorii de undă ai acestor doi cuasielecetri sunt reprezentați prin punctele A și B pe suprafața sferei deplasate. Pentru a găsi relația dintre curentul critic j_c , valoarea curentului peste care are loc despărțirea perechilor și deci apariția rezistenței electrice, și parametrii intrinseci ai materialului să facem bilanțul

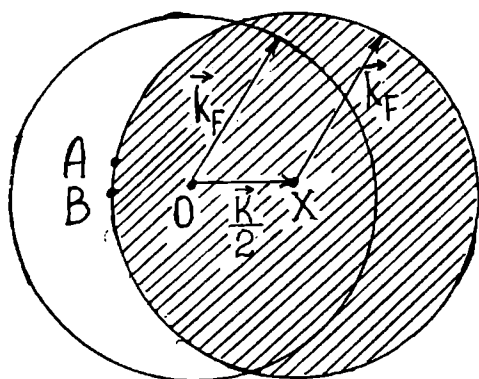


Fig. 4.9.

energiilor electronilor în cele două situații. Să considerăm că supraconductorul are energia zero atunci când toți electronii sunt împerechiați și nu circulă curent ($\vec{K}=0$). Atunci când circulă curent dar nu există cuasielectroni ci numai perechi, energia sistemului are valoare W_1 dată de expresia (6.1) și reprezintă energia cinetică a celor n electroni împerechiați cu impulsul (fiecare) $\hbar\vec{K}/2$. Dacă în supraconductorul prin care circulă curent se despică o pereche în doi cuasielectroni atunci energia sistemului va fi

$$W_2 = 2\Delta + (n_s - 2) \frac{\hbar^2 K^2}{8m} + 2 \left\{ \frac{\hbar \left(\vec{k}_F - \frac{\vec{K}}{2} \right)^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \vec{k}_F^2}{2m} \right\} \quad (6.2)$$

Primul termen din membrul drept reprezintă energia necesară pentru a despica o pereche, cel de al doilea termen reprezintă energia cinetică a celor $(n_s - 2)$ electroni rămași împerechiați și cel de al treilea termen reprezintă energia cinetică a cuasielectronilor. Pentru ca perechea să se despică este necesar ca $W_1 > W_2$ de unde rezultă

$$\frac{\hbar^2 k_F K}{m} > 2\Delta$$

adică

$$K > \frac{2m\Delta}{\hbar^2 k_F}$$

și având în vedere expresia curentului se găsește pentru densitatea curentului critic valoarea

$$j_o = \frac{qn_s \hbar K_o}{m} = \frac{qn_s \Delta}{\hbar k_F} \quad (6.3)$$

unde $K_o = 2m \Delta / \hbar^2 k_F$. La o temperatură diferită de OK o parte din perechi se despică în cuasielectroni chiar dacă curentul care circulă prin supraconductor are o valoare mai mică decât curentul critic. Cuasielectronii se comportă aproape ca electronii normali și vor da naștere unei rezistențe. Însă în același timp coexistă și perechile de electroni, care au rezistența zero, astfel că prin supraconductor circulă două fluide: cuasielectroni, pe care i-am numit electroni normali în tot cuprinsul acestui volum, și perechi de electroni, care au fost numite de către London superelectroni.

CAPITOLUL V

APLICAȚII ALE TEORIEI MICROSCOPICE

5.1. Tranziții cu absorbție de energie. Fenomene cu coerență.

Efectul unei perturbații externe asupra electronilor dintr-un metal se exprimă cu ajutorul Hamiltonianului de interacție

(1.1)

$$\mathcal{H}_i = \sum_{k\sigma, k'\sigma'} B_{k'\sigma', k\sigma} C_{k'\sigma'}^* c_{k\sigma}$$

unde $B_{k'\sigma', k\sigma}$ sunt elementele de matrice ale operatorului de perturbație între stările electronice ordinare ale metalului normal. În aproximația electronilor independenți în metal se poate scrie

$$B_{k'\sigma', k\sigma} = \int \psi_{k'\sigma'}^*(\vec{r}) H_p(\vec{r}) \psi_{k\sigma}(\vec{r}) d\vec{r}$$

unde $\psi_{k\sigma}$ sunt funcții Bloch incluzând și funcțiile de spin și \vec{r} include de asemenea și variabila de spin. În starea normală fiecare termen din suma (1.1) este independent și pătratul fiecărui $B_{k'\sigma', k\sigma}$ este proporțional cu probabilitatea de tranziție corespunzătoare. În faza supraconductoare situația este diferită datorită efectelor de coerență care nu apar în cazul stării normale. În starea normală împrăștierea din \vec{k}, σ în \vec{k}', σ' este total independentă de împrăștierea din $-\vec{k}', -\sigma'$ în $-\vec{k}, -\sigma$ ca și față de toate celelalte tranziții. Probabilitatea primului eveniment este proporțională cu $|B_{k\sigma, k'\sigma'}|^2$

și a celui de al doilea este proporțională cu $|B_{-k', -\sigma', -k, -\sigma}|^2$. În supraconductor aceste două contribuții sunt coerente și elementele de matrice trebuie să se adune înainte de a se ridica la pătrat, ceea ce determină o diferență semnificativă față de metalul normal. Pentru a înțelege acest fenomen de coerență să considerăm elementul de matrice de interacție (independentă de spin) între două stări excitate ale unui supraconductor. Presupunem că în starea inițială este ocupată starea $\vec{k}' \uparrow$ (singură) iar în starea finală este ocupată starea $\vec{k} \downarrow$ (singură). Dacă nu există alți electroni prezenți în perechile \vec{k} sau \vec{k}' atunci $B_{k\uparrow, k'\downarrow}$ este elementul de matrice al acestei tranziții. Totuși în starea inițială vor exista configurații în care stările $\vec{k}' \uparrow, -\vec{k}' \downarrow$ sunt ocupate de o pereche (și va exista de asemenea o stare singulară în $\vec{k}' \uparrow$). În acest caz dacă o particulă este împrăștiată din $-\vec{k}' \downarrow$ al perechii în $-\vec{k} \downarrow$ aceasta va conduce de asemenea la o stare finală în care starea excitată este în $\vec{k}' \uparrow$ (singulară) și perechea este acum în $\vec{k} \uparrow, -\vec{k} \downarrow$. De această dată elementul de matrice al tranziției este $B_{-k'\downarrow, -k\downarrow}$. În ambele procese are loc împrăștierea din $k\downarrow$ în $k'\uparrow$ a

particulei excitate deoarece se suprapun funcțiile de undă ale configurațiilor cu sau fără perechi. Utilizând transformarea canonică Bogoliubov se poate arăta că termenii $c_{k\sigma}^+, c_{k\sigma}$ și $c_{-k,\sigma}^+, c_{-k,-\sigma}$ conectează aceleași stări uniparticulă. Astfel,

$$\begin{aligned} c_k^+ c_k &= u_k u_k \gamma_k^+ \gamma_k - v_k v_k \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} + u_k v_k \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}^+ + v_k u_k \gamma_{-k} \gamma_k \\ c_{-k}^+ c_{-k} &= v_k v_k \gamma_k^+ \gamma_k + u_k u_k \gamma_k^+ \gamma_k + u_k v_k \gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + v_k u_k \gamma_{-k} \gamma_{-k} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Notăm că pentru semnul plus al lui \vec{k} avem spin sus adică avem $\vec{k} \uparrow$ și pentru semnul minus al lui \vec{k} avem spin jos, adică $-\vec{k} \downarrow$, dar pentru simplitatea scrierii nu mai punem semnul \uparrow sau \downarrow . Elementele de matrice din (1.1) corespunzătoare celor doi termeni (1.2) trebuie să se adune înainte de a se ridica la pătrat deoarece ele se adună coerent. În general

$$\left| B_{k\sigma, k\sigma} \right| = \left| B_{-k, -\sigma, -k', -\sigma} \right|$$

deoarece variația numărului de undă este aceeași în ambele cazuri. Cele două elemente de matrice pot diferi cel mult numai prin semn care depinde de natura interacțiunii, a lui \mathcal{H}_p . Prin urmare (1.1) se poate scrie

$$B_{k\sigma, k\sigma} \left(c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} \pm c_{-k, -\sigma}^+ c_{-k, -\sigma} \right) \quad (1.3)$$

În teoria BCS se arată că există două cazuri distincte. Cazul I corespunde semnelui plus în relația de mai sus și corespunde interacțiunii electronului cu un potențial de deformare scalar. În acest caz interacțiunea depinde numai de variația impulsului, este independentă de sensul lui \vec{k} sau σ , cele două elemente de matrice au același semn și se adună coerent. Acesta este cazul interacțiunii electron-foton responsabilă pentru atenuarea ultrasunetelor. Cazul II corespunde semnelui negativ al relației (1.3) și este caracteristic interacțiunii electronului cu câmpul electromagnetic, care este caracterizată de termenul $\vec{p} \cdot \vec{A}$ care își schimbă semnul atunci când se substituie \vec{k} cu $-\vec{k}$. În aceste două cazuri considerate nu intervine spinul, adică am considerat $\sigma = \sigma'$. În cazul interacțiunii hiperfinită a electronului cu nucleul apare o variație de spin care în teoria BCS se ia în considerare prin introducerea factorului $\theta_{\sigma\sigma'}$ care are valoarea +1 pentru $\sigma = \sigma'$ și -1 pentru $\sigma = -\sigma'$. În acest caz (1.3) se scrie [1].

$$B_{k\sigma, k\sigma} = \left[(u_k u_k \mp v_k v_k) \left(\gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{k\sigma} \pm \theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k, -\sigma}^+ \gamma_{-k', -\sigma'} \right) + (v_k u_k \pm u_k v_k) \left(\gamma_{k\sigma}^+ \gamma_{-k, -\sigma}^+ \pm \theta_{\sigma\sigma'} \gamma_{-k, -\sigma}^+ \gamma_{k, \sigma} \right) \right] \quad (1.4)$$

Factorul $\theta_{\sigma\sigma'}$ nu afectează mărimea probabilității de tranziție ci faza relativă a elementelor de matrice nediagonale care conectează stările disparate. Când se calculează probabilitățile de tranziție elementele de matrice se multiplică cu „factorii de coerență”: $(u_k u_k \pm v_k v_k)^2$ când are loc împrăștierea cuasiparticulelor și $(v_k u_k \pm u_k v_k)^2$ când are loc generarea sau anihilarea a două cuasiparticule. Am scris relațiile de mai sus considerând cazurile BCS:

$$\text{cazul I: } B_{k\sigma, k\sigma} = +\theta_{\sigma\sigma'} B_{-k, -\sigma, -k', -\sigma'}$$

$$\text{cazul II: } B_{k\sigma, k\sigma} = -\theta_{\sigma\sigma'} B_{-k, -\sigma, -k', -\sigma'}$$

Dacă în tranziție spinul nu schimbă de sus atunci $\theta_{\sigma\sigma'} = 1$ iar dacă schimbă de semn atunci $\theta_{\sigma\sigma'} = -1$. În relația (1.4) semnul inferior este pentru cazul II. Având în vedere relațiile (5.7.6) explicităm factorii de coerență în funcție de energie astfel

$$\begin{aligned} (u_k u_{k'} \mp v_k v_{k'})^2 &= \frac{1}{4} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \left(1 + \frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} \right) \right]^{1/2} \mp \left[\left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right) \left(1 - \frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} \right) \right]^{1/2} \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 + \frac{\epsilon_k}{E_k} + \frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} + \frac{\epsilon_k \epsilon_{k'}}{E_k E_{k'}} \right) + \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} - \frac{\epsilon_{k'}}{E_{k'}} + \frac{\epsilon_k \epsilon_{k'}}{E_k E_{k'}} \right) \mp 2 \left[\left(1 - \frac{\epsilon_k^2}{E_k^2} \right) \left(1 - \frac{\epsilon_{k'}^2}{E_{k'}^2} \right) \right]^{1/2} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon_k \epsilon_{k'}}{E_k E_{k'}} \mp \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

În mod analog,

$$(v_k u_{k'} \pm u_k v_{k'})^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k \epsilon_{k'}}{E_k E_{k'}} \pm \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}} \right) \quad (1.6)$$

Factorul (1.5) se referă la fenomenul de împrăștiere în care sistemul câștigă sau pierde energia ($E_{k'} - E_k$) pe când factorul (1.6) se referă la generarea și anihilarea de perechi fenomen care are loc cu variația de energie ($E_{k'} + E_k$). Deoarece E_k este funcția pară de ϵ_k toți termenii care implică ϵ_k/E_k se anulează când se sumează pe \pm valorile lui ϵ_k . Astfel cele două relații de mai sus devin: factorul de coerență de împrăștiere

$$(u_k u_{k'} \mp v_k v_{k'})^2 = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}} \right) \equiv F_s \quad (1.7)$$

și factorul de generare și anihilare a perechilor de cuasiparticule

$$(v_k u_{k'} \pm u_k v_{k'})^2 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}} \right) \equiv F_p \quad (1.8)$$

Presupunem că în aceste procese are loc o emisie sau absorbție de energie $\hbar\omega$ astfel că în cazul împrăștierii $\pm\hbar\omega = E_{k'} - E_k$ iar în cazul generării și anihilării de perechi $\pm\hbar\omega = E_{k'} + E_k$. În cazul împrăștierii la energie joasă, când $\hbar\omega \ll \Delta$ nu se generează și nici nu se anihilează cuasiparticule astfel că E_k și $E_{k'}$ au același semn. În această situație în cazul I factorul de coerență $F_s \ll 1$ (cazul atenuării ultrasunetelor) iar în cazul II, $F_s = 1$ (cazul relaxării nucleare). Situația este inversă atunci când procesele au loc la energie mare adică $\hbar\omega \geq 2\Delta$, când se generează perechi de cuasiparticule. În această situație $F_p = 1$ pentru procesele de tipul I și $F_p \ll 1$ pentru procesele de tip II. Dacă $E_k, E_{k'} \gg \Delta$, coerența în supraconductor devine neimportantă deoarece există o mică diferență între cazurile I și II. Să considerăm rata netă de tranziție între nivelele E și $E' = E + \hbar\omega$, unde am suprimat indicii k și respectiv k' . Rata de tranziție de pe nivelele E pe nivelele $E + \hbar\omega$, este

$$\alpha_1 = \int |M|^2 F(\Delta, E, E + \hbar\omega) N_s(E) f(E) N_s(E + \hbar\omega) [1 - f(E + \hbar\omega)] dE$$

unde M este valoarea elementului de matrice pentru tranziția unui electron, $N_s(E)$ este densitatea de stări uniparticulă din supraconductor, $N_s(E)f(E)$ reprezintă numărul de stări inițiale ocupate

iar $N_S(E + \hbar\omega) [1 - f(E + \hbar\omega)]$ și reprezintă numărul de stări libere pe care are loc tranziția. Rata de tranziție inversă, de pe nivelele $E + \hbar\omega$ pe nivelele E este

$$\alpha_2 = \int |M|^2 F(\Delta, E, E + \hbar\omega) N_s(E + \hbar\omega) f(E + \hbar\omega) N_s(E) [1 - f(E)] dE$$

Rata netă de tranziție este egală cu diferența acestor două rate

$$\alpha_s = \int |M|^2 F(\Delta, E, E + \hbar\omega) N_s(E) N_s(E + \hbar\omega) [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE$$

În final efectuăm raportul dintre rata de tranziție din cazul stării normale, de aceea nu discutăm elementul de matrice, care este același în ambele cazuri. Introducem expresiile explicite ale lui F (ec. 1.7) și N_S (ec. 4.3.26) și relația de mai sus devine

$$\alpha_s = |M|_2 N^2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E(E + \hbar\omega) \pm \Delta^2| [f(E) - f(E + \hbar\omega)]}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} dE \quad (1.9)$$

unde se subînțelege că sunt excluse din integrală domeniile $|E| < \Delta$ sau $|E + \hbar\omega| < \Delta$. În starea normală $\Delta = 0$ și

$$\alpha_n = |M|^2 N^2(0) \hbar\omega \quad (1.10)$$

Raportul α_s/α_n este

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|E(E + \hbar\omega) \pm \Delta^2| [f(E) - f(E + \hbar\omega)]}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} dE \quad (1.11)$$

Semnul - se referă la procesele de tip I iar semnul + se referă la procesele de tip II. În continuare prezentăm câteva cazuri particulare.

5.2. Atenuarea ultrasunetelor.

În experiențele cu ultrasunete frecvența undelor acustice este mai mică decât 10^9 Hz astfel că $\hbar\omega \leq 10^{-2} \Delta(0)$. De asemenea $\hbar\omega \ll k_B T$. Considerăm undele acustice longitudinale, pentru simplitate, deoarece în cazul undelor acustice transversale se generează curenți și fenomenul devine mai complex. Procesul de interacție este de tip I astfel că în factorul de coerență din expresia (1.11) se ia semnul minus. În cazul limită $\hbar\omega \rightarrow 0$ se obține

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = \lim_{\hbar\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar\omega} \int [f(E) - f(E + \hbar\omega)] dE = - \int \frac{\partial f}{\partial E} dE$$

Întegrala se efectuează de la $-\infty$ la $-\Delta$ și de la Δ la ∞ , astfel că rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_s}{\alpha_n} &= f(-\infty) - f(\Delta) + f(\Delta) - f(\infty) = \\ &= 2f(\Delta) = \frac{2}{1 + e^{\Delta/k_B T}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Această expresia este reprezentată în funcție de T/T_c în Fig. 6.1. unde se ia evident în considerare dependența de temperatură a lui $\Delta(T)$ (Fig. 5.1). Deoarece $\Delta(T)$ are panta infinită la T_c raportul α_s/α_n scade cu o pantă infinită. Această pantă abruptă (verticală) se deosebește de scăderea rezultată din modelul Gorter-Casimir, care nu este verticală. În modelul Gorter-Casimir α_s/α_n scade cu $(T/T_c)^4$ deoarece numai electronii normali absorb energia de

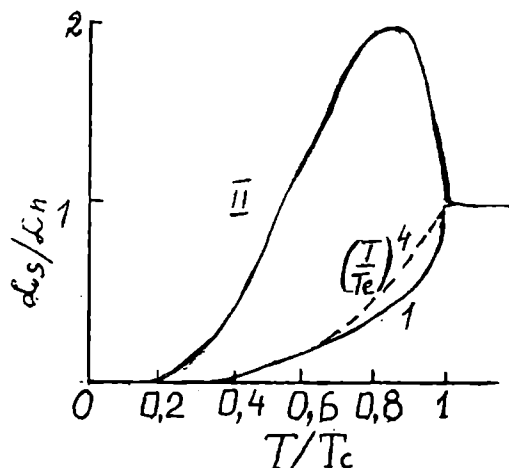


Fig. 5.1.

la undele acustice de frecvență joasă. Scăderea lui α_s/α_n cu scăderea lui T observată experimental este atât de abruptă astfel că nu poate fi explicată pe baza modelului Gorter-Cazimir. În acord cu teoria microscopică scăderea abruptă este determinată de factorul de coerență din elementul de matrice. Acest factor anulează maximul din densitatea de stări la marginea benzii interzise care astfel ar atenua scăderea. Determinarea lui Δ din rezultatele experimentale α_s/α_n este în bună concordanță cu teoria microscopică.

5.3. Relaxarea nucleară.

În cazul relaxării nucleare de spin prin interacțiunea cu cuasiparticulele, în factorul de coerență (1.7) se ia semnul plus corespunzător cazului II de interacțiune. Considerăm cazul $\hbar\omega = \hbar\gamma H$ mult mai mic decât Δ și decât $k_B T$. Nu se poate obține un rezultat atât de simplu ca în cazul atenuării ultrasunetelor deoarece în cazul II de coerență $\alpha_s/\alpha_n \rightarrow \infty$ când $\omega \rightarrow 0$. Totuși se poate face o simplificare utilizând derivata funcției Fermi astfel că se poate scrie

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2 \int_{-\Delta}^{\infty} \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE$$

unde am utilizat relația

$$f(E) - f(E + \hbar\omega) \approx -\hbar\omega \frac{\partial f}{\partial E}$$

iar pentru α_n am utilizat expresia (1.10). Factorul 2 apare deoarece integrala pe domeniul negativ al energiei ($E + \hbar\omega \leq -\Delta$) dă exact aceeași contribuție cu integrala pe domeniul pozitiv al energiei, $E \geq \Delta$. Considerând $\omega = 0$ rezultă

$$\frac{\alpha_s}{\alpha_n} = 2 \int_{-\Delta}^{\infty} \frac{E^2 + \Delta^2}{E^2 - \Delta^2} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) dE$$

care are o divergență logaritmică la limita Δ de forma $1n(\Delta/\hbar\omega)$. La frecvențe finite, pentru valorile uzuale ale lui ω divergența se înlocuiește cu un factor de ordinul $1n(\Delta/\hbar\omega) \sim 10$. Așa după cum se observă în Fig. 5.1 unde este trasată curba teoretică $\alpha_s/\alpha_n = f(T/T_C)$, la curba II imediat sub T_C rata de relaxare nucleară inițial crește cu scăderea temperaturii și la temperaturi mai joase scade exponențial la zero ca $\exp(-\Delta/k_B T)$. Această comportare se deosebește complet de atenuarea ultrasunetelor (curba 1) care scade vertical imediat sub T_C . Această diferență se datorează factorului de coerență care în cazul relaxării nucleare are semnul plus (cazul II). Acest rezultat este de asemenea un triumf al teoriei microscopice și este în bună concordanță cu rezultatele experimentale. Revenind la divergența logaritmică menționăm că aceasta nu se observă experimental, Experimental se observă că α_s/α_n crește imediat cu scăderea temperaturii sub T_C de aproximativ două ori înainte de a începe să scadă cu scăderea temperaturii la temperaturi mai joase. Prin urmare experimental se observă că $1n(\Delta/\hbar\omega) = 2$, nu 10 și nici infinit (singularitate). Originea singularității lui α_s imediat sub T_C se datorează prezenței produsului a două densități de stări uniparticulă care prezintă maxim la marginea benzii interzise, Δ . Pentru a explica rezultatele experimentale s-a presupus că maximul densității de stări uniparticulă la Δ se lărgeste datorită anizotropiei lui Δ în cristalele reale. O altă explicație ar fi că există un timp finit de interacțiune a particulelor cu fononii care de asemenea lărgeste maximul densității de stări, conform cu principiul de incertitudine.

5.4. Absorbția radiației electromagnetice

Pentru descrierea absorbției radiației electromagnetice la frecvențe joase se utilizează rezultatele obținute la relaxarea nucleară deoarece în acest caz Hamiltonianul de interacție $\bar{p} \cdot \bar{A}$ corespunde cazului II pentru factorii de coerență. Însă raportul α_s/α_n se înlocuiește cu raportul σ_{1s}/σ_n deoarece în câmpul \bar{e} absorbția energiei electromagnetice pe unitatea de volum este $\sigma_1 \epsilon^2$ unde σ_1 este partea reală a conductivității complexe $\sigma_1(\omega) + j\sigma_2(\omega)$. Astfel, pentru $\hbar\omega \ll \Delta$, σ_{1s}/σ_n prezintă inițial o creștere cu scăderea temperaturii sub T_C , urmată de o scădere așa cum se reprezintă în Fig. 5.1., cazul II. Spre deosebire de cazul relaxării nucleare în cazul absorbției radiației electromagnetice se pot utiliza frecvențe destul de mari astfel încât să se genereze perechi de cuasiparticule. Acest proces apare la $\hbar\omega \geq 2\Delta$. Evident că la OK nu există cuasiparticule excitate și singurul proces de absorbție a energiei este cel cu despicare de perechi. Utilizând (1.9) în care considerăm funcția de distribuție Fermi la OK se obține

$$\left. \frac{\sigma_{1s}}{\sigma_n} \right|_{T=0} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\Delta-\hbar\omega}^{\Delta} \frac{[E(E+\hbar\omega) + \Delta^2] dE}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E+\hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{\Delta}^{\hbar\omega-\Delta} \frac{[E(\hbar\omega - E) - \Delta^2] dE}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2} [(E-\hbar\omega)^2 - \Delta^2]^{1/2}} \quad (4.1)$$

Această integrală a fost calculată de Mattis și Bardeen [2] care au găsit

$$\left. \frac{\sigma_{1s}}{\sigma_n} \right|_{T=0} = \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) E(k) - \frac{4\Delta}{\hbar\omega} K(k), \quad \hbar\omega \geq 2\Delta \quad (4.2)$$

unde

$$K = \frac{\hbar\omega - 2\Delta}{\hbar\omega + 2\Delta}$$

și $E(k)$ și $K(k)$ sunt integrale eliptice complete care sunt tabelate. σ_{1s}/σ_n în funcție de frecvență este reprezentată în Fig. 6.2. Așa cum se observă pe figură σ_{1s}/σ_n crește de la valoarea zero la $\hbar\omega = 2\Delta$, cu o pantă finită și se apropie de unitate la $\hbar\omega \gg 2\Delta$. Cu linie plină este reprezentată situația la OK iar cu linie întreruptă este reprezentată dependența la $T = T_C/2$. La temperatură finită $\Delta(T) < \Delta(0)$ și la absorbție contribuie și cuasiparticulele excitate termic, având deci loc absorbție și la $\hbar\omega < 2\Delta$. La $\hbar\omega \rightarrow 0$ există dependența logaritmică discutată mai sus. Pe grafic este reprezentată absorbția la OK pentru $\hbar\omega > 2\Delta$ dacă acesta ar satisface regula de coerență din cazul I. Se observă că în acest caz comportarea lui σ_{1s}/σ_n este cu totul diferită față de cazul II. Efectul se datorează schimbării semnului lui Δ^2 de la numărătorul expresiei (4.1). Dacă considerăm energia radiației puțin mai mare decât 2Δ adică $\hbar\omega = 2\Delta + \delta$ astfel încât integrala se extinde numai de la $E = \Delta$ la $(\Delta + \delta)$ numărătorul este acum egal aproximativ cu $2\Delta^2$ iar numitorul rămâne neschimbat. Astfel, în loc ca σ_{1s}/σ_n să aibă o creștere la început limitată cu $(\hbar\omega - 2\Delta)$, apare o discontinuitate în α_s/α_n (o creștere mai mare decât 1) urmată de o scădere lentă către valoarea unitate. Integrarea arată că aria situată deasupra

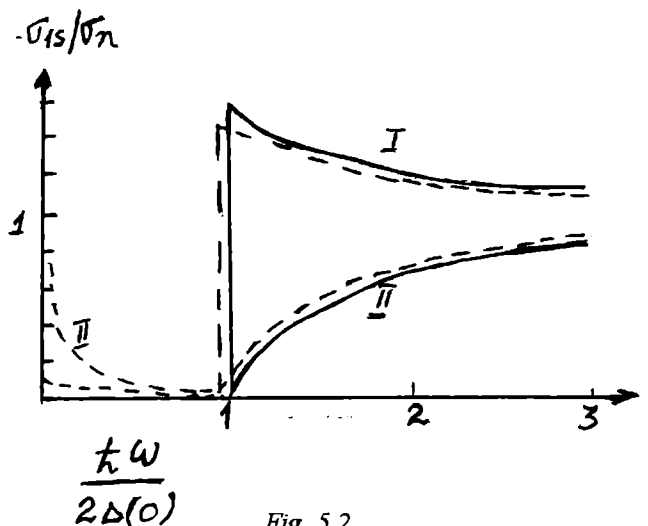


Fig. 5.2.

lui $\alpha_s/\alpha_n = 1$ pentru $\hbar\omega > 2\Delta$ compensează exact aria care este neinclusă pentru cazul $\hbar\omega < 2\Delta$. Deci în cazul I aria totală se conservă ceea ce nu se întâmplă în cazul II de coerență, care reprezintă cazul real pentru absorbția radiației în supraconductori. Pentru calculul absorbției electromagnetice noi am utilizat relația (1.9) dedusă pentru cazul împrăștierii cuasiparticulelor în care s-a utilizat factorul de coerență (1.7). Pentru absorbția radiației la $\hbar\omega \geq 2\Delta$ trebuie utilizat în relația (1.9) factor de coerență pentru generarea și anihilarea perechilor (1.8). Însă se poate utiliza relația (1.7) în locul relației (1.8) dacă considerăm că procesul de generare a cuasiparticulelor de energie $|E|$ și $|E'|$ poate fi privit ca o împrăștiere din $-|E|$ în $|E'|$, proces care necesită aceeași energie $\hbar\omega$. Dacă introducem aceste valori în (1.7) obținem (1.8). Prin urmare, se poate scrie pentru toate cazurile

$$|M|^2 \sim |B_{kk'}|^2 \left[1 \mp \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}} \right]$$

unde semnul minus este pentru cazul I și semnul plus pentru cazul II de coerență, ceea ce justifică utilizarea relației (1.9).

5.5. Ecuațiile Bogoliubov-de Gennes.

Bogoliubov a generalizat ecuațiile Hartree-Fock la cazul supraconductoarelor. Pentru a obține ecuațiile Bogoliubov introducem operatorii ψ [G1]

$$\psi(\vec{r}\sigma) = \sum_k e^{i\vec{k}\vec{r}} C_{k\sigma} \quad (5.1)$$

$$\psi^+(\vec{r}\sigma) = \sum_k e^{-i\vec{k}\vec{r}} C_{k\sigma}^T$$

Acești operatori satisfac următoarele relații de anticomutare

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}\sigma)\psi(\vec{r}'\sigma') + \psi(\vec{r}'\bar{\sigma}')\psi(\vec{r}\sigma) &= 0 \\ \psi^+(\vec{r}\sigma)\psi^+(\vec{r}'\sigma') + \psi^+(\vec{r}'\bar{\sigma}')\psi^+(\vec{r}\sigma) &= 0 \\ \psi^+(\vec{r}\sigma)\psi(\vec{r}'\sigma') + \psi(\vec{r}'\bar{\sigma}')\psi^+(\vec{r}\sigma) &= \delta_{\sigma\sigma'}\delta(\vec{r}-\vec{r}') \end{aligned} \quad (5.2)$$

Operatorul asociat cu numărul de particule se scrie

$$N = \sum_{k\sigma} C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} = \sum_{\sigma} \int d\vec{r} \psi^+(\vec{r}\sigma)\psi(\vec{r}\sigma) \quad (5.3)$$

În funcție de ψ și ψ^+ Hamiltonianul se scrie sub forma

$$\begin{aligned} H &= H_o + H_i \\ H_o &= \int d\vec{r} \sum_{\sigma} \psi^+(\vec{r}\sigma) \left[\frac{(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} + U_o(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}\sigma) \\ H_i &= -\frac{1}{2} V \int d\vec{r} \psi^+(\vec{r}\sigma)\psi^+(\vec{r}\sigma')\psi(\vec{r}\sigma')\psi(\vec{r}\sigma) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$U_o(r)$ este o energie potențială externă arbitrară iar V este energia potențială de interacție electron-electron. Se mai definesc mărimile

$$H_o - E_F N = \sum_{\sigma} \psi^+(\vec{r}\sigma) H_e \psi(\vec{r}\sigma) d\vec{r} \quad (5.5)$$

unde

$$H_e = \frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q\vec{A})^2 + U_o(\vec{r}) - E_F$$

În continuare substituim energia potențială de interacție $V\psi^+\psi^+\psi\psi$ cu o energie potențială medie a unui singur electron (adică să conțină numai doi operatori ψ sau ψ^+). Introducem astfel un Hamiltonian efectiv de forma

$$H_{ef} = \int d\vec{r} \left\{ \sum_{\sigma} \psi^+(\vec{r}\sigma) H_e(\vec{r}) \psi(\vec{r}\sigma) + U(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}\sigma) \psi(\vec{r}\sigma) + \right. \\ \left. + \Delta(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}\uparrow) \psi^+(\vec{r}\downarrow) + \Delta^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}\downarrow) \psi(\vec{r}\uparrow) \right\} \quad (5.6)$$

Termenul $U(r)$ anihilează și generează un electron și prin urmare conservă numărul de particule. Termenul Δ crește sau descrește numărul de particule cu două. Presupunem momentan că cunoaștem H_{ef} și ne propunem să găsim funcțiile proprii și valorile proprii. H_{ef} este o funcție quadratică în ψ și ψ^+ . Pentru a-l diagonaliza efectuăm următoarea transformare unitară

$$\psi(\vec{r}\uparrow) = \sum_n \gamma_{n\uparrow} f_n(\vec{r}) - \gamma_{n\downarrow}^+ g_n^*(\vec{r}) \\ \psi(\vec{r}\downarrow) = \sum_n \gamma_{n\downarrow} f_n(\vec{r}) + \gamma_{n\uparrow}^+ g_n^*(\vec{r}) \quad (5.7)$$

unde γ și γ^+ sunt noii operatori care satisfac încă relațiile de comutare fermionice

$$\gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{m\sigma'} + \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma'}^+ = \delta_{nm} \delta_{\sigma\sigma'} \\ \gamma_{n\sigma} \gamma_{m\sigma'} + \gamma_{m\sigma} \gamma_{n\sigma'} = 0 \quad (5.8)$$

Transformarea (5.7) trebuie să diagonalizeze H_{ef} astfel că

$$H_{ef} = E_g + \sum_{n\sigma} E_n \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{n\sigma} \quad (5.9)$$

unde E_g este energia stării fundamentale și E_n este energia stării excitate, n . Această condiție mai poate fi scrisă considerând comutatorii lui H_{ef} cu $\gamma_{n\sigma}$ și $\gamma_{n\sigma}^+$

$$[H_{ef}, \gamma_{n\sigma}] = -E_n \gamma_{n\sigma} \\ [H_{ef}, \gamma_{n\sigma}^+] = E_n \gamma_{n\sigma}^+ \quad (5.10)$$

Pentru a găsi f și g calculăm comutatorul $[H_{ef}, \psi]$ utilizând definiția (5.7) a lui H_{ef} și proprietățile de anticomutare ale lui ψ . Se obține

$$[\psi(\vec{r}\uparrow), H_{ef}] = [H_e + U(\vec{r})] \psi(\vec{r}\uparrow) + \Delta(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}\downarrow) \\ [\psi(\vec{r}\downarrow), H_{ef}] = [H_e + U(\vec{r})] \psi(\vec{r}\downarrow) - \Delta^*(\vec{r}) \psi^+(\vec{r}\uparrow) \quad (5.11)$$

În aceste ecuații substituim ψ în funcție de γ conformcu relațiile (5.7) aplicăm relațiile de comutare (5.10). Comparând coeficienții lui γ_n și γ_n^+ din cei doi membri ai unei ecuații se obțin ecuațiile lui Bogoliubov-de Gennes [G1]

$$E_f(\vec{r}) = [H_e + U(\vec{r})] f(\vec{r}) + \Delta(\vec{r}) g(\vec{r}) \\ E_g(\vec{r}) = [H_e^* + U(\vec{r})] g(\vec{r}) + \Delta^*(\vec{r}) f(\vec{r}) \quad (5.12)$$

Se arată că pentru ca energia liberă a sistemului să fie staționară energiile potențiale efectivă sunt de forma

$$U(\vec{r}) = -V \langle \psi^+(\vec{r}\uparrow) \psi(\vec{r}\uparrow) \rangle = -V \langle \psi^+(\vec{r}\downarrow) \psi(\vec{r}\downarrow) \rangle \quad (5.13)$$

(rezultatul Hartree-Fock standard pentru o interacție punctuală) și

$$\Delta(\vec{r}) = -V \langle \psi^+(\vec{r}\downarrow) \psi(\vec{r}\uparrow) \rangle = V \langle \psi(\vec{r}\uparrow) \psi(\vec{r}\downarrow) \rangle \quad (5.14)$$

Dacă substituim pe ψ în funcție de γ conform cu relațiile (5.7) și utilizăm regulile de mediere

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{n\sigma}^+ \gamma_{m\sigma'} \rangle &= \delta_{nm} \delta_{\sigma\sigma'} f_{no} \\ \langle \gamma_{n\sigma} \gamma_{m\sigma'} \rangle &= 0 \\ f_{no} &= \frac{1}{e^{E_n/k_B T} + 1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

se obține

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -V \sum_n \left[|f_n(\vec{r})|^2 f_{no} + |g_n(\vec{r})|^2 (1 - f_{no}) \right] \\ \Delta(\vec{r}) &= V \sum_n g_n^*(\vec{r}) f_n(\vec{r}) (1 - 2f_{no}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Aceste condiții asigură faptul că energiile potențiale $U(\vec{r})$ și $\Delta(\vec{r})$ sunt selfconsistente.

5.6. Electroni și goluri. Reflexia Andreev.

Într-un metal normal $\Delta = 0$, prima ecuație (5.12) se transformă în ecuația Schrödinger pentru electron iar de a doua ecuație (5.12) se transformă în ecuația Schrödinger inversă (time-reversed) pentru electron. Deoarece un electron care satisface ecuația Schrödinger inversă se comportă asemenea unui gol vom adopta în acest paragraf această terminologie. Pentru $\Delta \neq 0$, funcțiile de undă ale electronului și golului se cuplează între ele, ceea ce conduce la două consecințe majore. Prima consecință este apariția unei benzi interzise în relația E în funcție de \vec{k} , la fel ca în teoria BCS. A doua consecință care apare din relația $E(k)$ este că la marginea benzii interzise viteza de grup $v_g = dE/d\hbar k$ devine zero în timp ce viteza de fază rămâne apropiată de valoarea normală. Pentru a arăta existența benzii interzise Δ considerăm că E_F , Δ și U_0 sunt mărimi constante și $\vec{A} = 0$. De asemenea, presupunem $f = ue^{ikx}$, $g = ve^{ikx}$. Substituind în (5.12) și având în vedere (5.5) pentru $U_0 = 0$ se obține

$$\begin{aligned} E_k u &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \right) u + \Delta v \\ E_k v &= \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \right) v + \Delta u \end{aligned} \quad (6.1)$$

Acest sistem de ecuații omogene are soluție nebanală dacă determinantul său este egal cu zero. Se obține

$$E_k^2 = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - E_F \right)^2 + \Delta^2 \quad (6.2)$$

Există două soluții pentru E_k , corespunzător celor două rădăcini, și pentru \vec{k} valorile corespunzătoare. Ne interesează numai soluțiile pentru $E_k \geq 0$. Se obține

$$\begin{aligned} k_e &= k_F \left[1 + \delta \sqrt{(E_k / \Delta)^2 - 1} \right] \\ k_h &= k_F \left[1 - \delta \sqrt{(E_k / \Delta)^2 - 1} \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

pentru $E_k > \Delta$ și

$$\begin{aligned} k_e &= k_F \left[1 + i\delta \sqrt{1 - (E_k / \Delta)^2} \right] \\ k_h &= k_e^* \\ k_F &= \frac{\sqrt{2mE_F}}{\hbar}, \delta = \frac{\Delta}{E_F} \end{aligned} \quad (6.4)$$

pentru $E_k < \Delta$. Utilizând notația

$$\psi = \begin{bmatrix} f(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

se poate scrie

$$\begin{aligned} \psi_{I_e}^+ &= \begin{bmatrix} u e^{i\theta} \\ v \end{bmatrix} e^{ikx} \\ \psi_{I_e}^- &= \begin{bmatrix} v e^{i\theta} \\ u \end{bmatrix} e^{-ikx} \end{aligned} \quad (6.5)$$

iar forma restrânsă a ecuațiilor Bogoliubov-de Gennes este

$$\begin{bmatrix} H_0 & \Delta(x) \\ \Delta^*(x) & -H_0 \end{bmatrix} \psi = E_k \psi \quad (6.6)$$

unde $H_0 = (p_x^2/2m) - E_F + U(x)$ este Hamiltonianul unui electron. ψ este reprezentarea în spațiul coordonator a transformării lui Bogoliubov

$$\gamma_k^+ = u_k C_{k\uparrow}^+ - v_k C_{-k\downarrow} \quad (6.7)$$

Excitațiile descrise de această ecuație sunt un electron generat la $+k$ (adică termenul $u_k C_{k\uparrow}^+$) și un gol generat la $-k$ (adică termenul $v_k C_{-k\downarrow}$ anihilarea unui electron la $-k$). Din relațiile (6.1), (6.2) se obțin pentru u și v expresiile

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(\frac{\Delta}{E_k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \\ v^2 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\Delta}{E_k} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

pentru orice sistem cu excitații fermionice, energia totală a sistemului poate fi scrisă

$$H = E_g + \sum_k E_k \gamma_k^+ \gamma_k + E_F N \quad (6.9)$$

unde sumarea se efectuează peste toate excitațiile și am adăugat la expresia (5.9) termenul $E_F N$ pe care l-am scăzut când am definit (5.5), deoarece am calculat energia sistemului relativ la nivelul Fermi. E_g este energia stării fundamentale și sumarea se efectuează peste toate excitațiile cu $E_k \geq 0$. Am introdus nivelul Fermi (potențialul electrochimic) în mod explicit deoarece ne interesează tratarea proceselor în care modificarea numărului N de electroni într-un subsistem dat este ± 1 . Reiese din (6.9) că energia necesară pentru a genera o excitație cu sarcina $-q$ (electron) este $E_{ek} = E_F + E_k$ iar pentru a excita un gol (o excitație cu sarcina $+q$) este

$E_{hk} = E_k - E_F = -(E_F - E_k)$. Există relația $E_{ek} = E_{hk} + 2E_F$, adică energia electronului este egală cu energia golului plus energia unei perechi de electroni. Într-un supraconductor izolat energia de excitare a unui electron și a unui gol este

$$(E_k + E_F) + (E_{k'} + E_F) = E_k + E_{k'} \geq 2\Delta$$

Pe de altă parte, într-un proces de tunelare în care electronul este transferat din metalul 1 în metalul 2, conservarea energiei este dată de relația

$$(E_{k_1} - E_{F_1}) + (E_{k_2} - E_{F_2}) = 0$$

astfel că

$$E_{k_1} + E_{k_2} = (E_{F_1} - E_{F_2}) = qV_{12} \quad (6.10)$$

unde V_{12} este tensiunea aplicată. Pentru a înțelege în ce constă reflexia Andreev să considerăm o structură supraconductor-metal normal-supraconductor, așa cum se reprezintă în Fig. 5.3. Reflexia Andreev la suprafața metal normal-supraconductor are loc astfel [3-5]. Un electron care vine de la stânga la dreapta în regiunea normală, cu energia mai mică decât Δ , la interfața cu supraconductorul se transformă într-un gol care se deplasează de la dreapta la stânga. Golul când ajunge la interfața opusă se transformă într-un electron care se deplasează de la stânga la dreapta, ș.a.m.d. Aceasta corespunde unui sens al curentului prin structură. Pentru sensul invers al curentului, electronul se deplasează de la dreapta la stânga și golul de la stânga la dreapta, având loc reflexia Andreev la cele două interfețe NS , adică electronul se transformă în gol și invers. Atât în primul cât și în al doilea caz se stabilesc unde staționare care determină cuantificarea nivelelor de energie a electronilor în metalul normal. Atunci când trece curent electric prin structura SNS (supraconductor-metal normal-supraconductor) transportul are loc astfel. O pereche de electroni în supraconductorul 1 se deplasează de la stânga la dreapta (pentru un anumit sens al curentului electric). La interfața SN perechea se despică într-un electron care se deplasează prin metalul normal de la stânga la dreapta iar celălalt electron din pereche anihilează un gol din metalul normal. Electronul care sosește la interfața NS cu supraconductorul 3 trece în supraconductor împerechindu-se cu un alt electron din metalul normal a cărui extracție generează un gol în metalul normal, care se deplasează de la dreapta la stânga. Perechea de electroni în supraconductorul 3 se deplasează de la stânga la dreapta. Astfel se închide circuitul curentului electric. Este de asemenea posibilă reflexia normală: adică un electron care se deplasează de la stânga la dreapta în N se reflectă la suprafața NS și se deplasează tot ca electron de la dreapta la stânga. Amplitudinea acestei reflexii este de ordinul Δ/E_F . Această reflexie cuplează cele două stări (pentru sensurile opuse ale curentului). Efectul acestui cuplaj este notabil când energia nivelelor Andreev se apropie de valoarea zero, ceea ce are loc atunci când diferența de fază dintre cei doi supraconductori $\theta = \pm \pi$. Vom vedea că această reflexie introduce în spectrul nivelelor Andreev o bandă interzisă egală cu Δ^2/E_F . Discutăm în continuare spectrul de energie

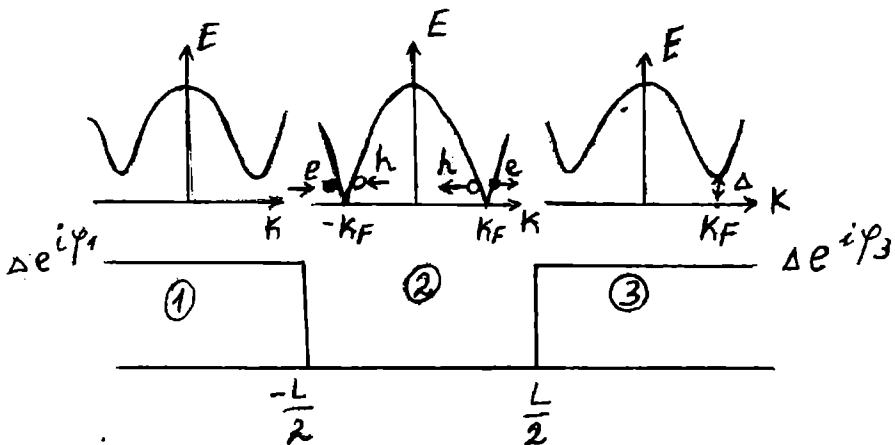


Fig. 5.3.

Andreev și transportul curentului electric prin structură. Funcțiile de undă ale electronilor și golurilor sunt date de ec. (6.5) în supraconductorul 1. Funcțiile de undă în supraconductorul 3 sunt date de ec.(6.5) în care se substituie indicele 1 cu 3 și x cu $-x$. Forma funcțiilor ψ_1 și ψ_3 asigură o comportare descrescătoare pentru $|x| \rightarrow \infty$. În metalul normal ($\Delta = 0$) astfel că funcțiile de undă soluții ale ec. (6.6) sunt

$$\psi_{2,e}^{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp(\pm i q_e x), q_e = k_F \sqrt{1 + E_k / E_F}$$

$$\psi_{2,h}^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(\pm i q_h x), q_h = k_F \sqrt{1 - E_k / E_F}$$
(6.11)

Energia electronului și, respectiv, golului în metalul normal în funcție de k_x este reprezentată în Fig. 5.4. În Fig. 5.3 această diagramă este prezentată simplificat. Se observă, așa cum am prezentat mai sus, că $E_{ek} = E_k + E_F$ și $E_{hk} = E_k - E_F$ astfel că $E_{ek} = E_{hk} + 2E_F$. Scriem funcțiile de undă în cele trei regiuni ale structurii SNS astfel

$$\psi\left(|x| < \frac{L}{2}\right) = A_2 \psi_{2,e}^+ + B_2 \psi_{2,h}^- + C_2 \psi_{2,e}^- + D_2 \psi_{2,h}^+$$

$$\psi\left(x < -\frac{L}{2}\right) = C_1 \psi_{1,e}^+ + D_1 \psi_{1,h}^-$$

$$\psi\left(x > \frac{L}{2}\right) = A_3 \psi_{3,e}^- + B_3 \psi_{3,h}^+$$
(6.12)

Egalând funcțiile și derivatele acestora la cele două interfețe NS , $|x| = L/2$, din rezolvarea acestor ecuații se găsește pentru $0 \leq E \leq \Delta$ soluția [5]

$$E_k(\theta) = \frac{\Delta}{2} \left\{ 3 + \cos\theta + 2\delta^{-2} \left[1 - \sqrt{1 + \delta^2 (1 - \cos\theta)} \right] \right\}^{1/2}$$
(6.13)

Această dependență este reprezentată în Fig. 5.5. Sunt înserate de asemenea două grafice $E(\theta = 0)$ și $E(\theta = \pi)$ în funcție de L . Pentru toate curbele s-a considerat $\delta = 1/5$ și $T = 0K$. Se observă că cu creșterea lungimii L a regiunii normale apar mai multe nivele Andreev. Relația de dispersie (6.13) arată că există o minibandă interzisă la $\delta = \pi$ (Fig. 6.5). Evaluând această relație pentru d mic la $\theta = \pi$ se obține minibanda interzisă

$$E_i = E_k(\pi) = \frac{\Delta^2}{2E_F}$$

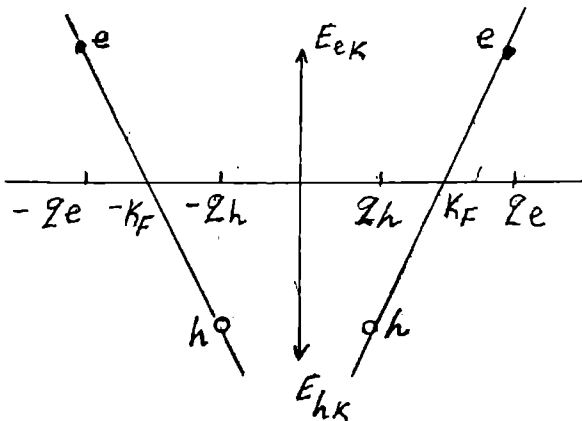


Fig. 5.4.

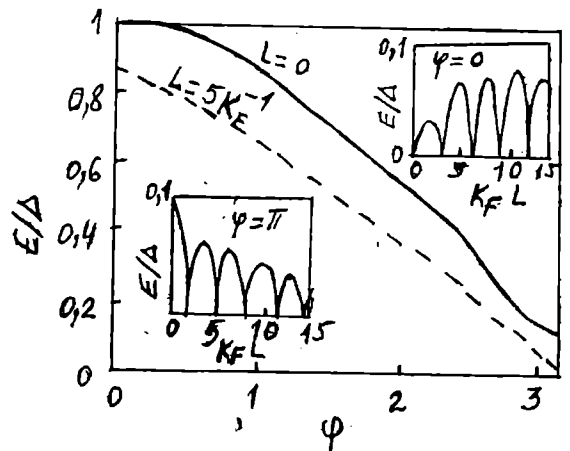


Fig. 5.5.

În aproximația Andreev, $k_e = k_h = q_e = q_h = k_F$ se obține

$$2 \arccos(E_k / \Delta) - (q_e - q_h)L \pm \theta = n2\pi$$

unde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. În limita $L \rightarrow 0$ se găsește $E = \Delta \cos(\theta/2)$. Pentru $E < \Delta$ curentul electric este dat de expresia [6]

$$I = -\frac{2q}{\hbar} \sum_k \tanh(E_k / 2k_B T) \frac{dE_k}{d\theta} \quad (6.14)$$

unde $\theta = \theta_1 - \theta_3$. Pentru δ mic se obține valoarea curentului critic

$$I_c = \frac{q\Delta}{\hbar} \left(1 - \frac{\Delta}{2E_F} \right)$$

Pentru $E > \Delta$ spectrul de energie este continuu și reflexia Andreev devine neglijabilă; în acest caz electronul din metal este transmis în supraconductor ca un cuasielectron uniparticulă în spectrul de energie uniparticulă din supraconductor. În toate cele expuse am neglijat efectul de vecinătate (proximity effect). Reflexia Andreev apare de asemenea în structuri supraconductor-semiconductor-supraconductor [7].

5.7. Supraconductibilitatea fără bandă interzisă

S-a observat experimental că impuritățile magnetice micșorează temperatura de tranziție și banda interzisă într-un supraconductor. Mai mult, la o anumită concentrație a impurităților magnetice banda interzisă devine zero deși temperatura critică este diferită de zero, adică electronii rămân încă împerecheați. În acest caz fenomenul de supraconductibilitate poartă numele de supraconductibilitate fără bandă interzisă. În general dacă o perturbație determină o tranziție de ordinul doi de la starea supraconductoare la starea normală supraconductorul trece printr-o stare fără bandă interzisă înainte de a deveni normal. În supraconductorul fără bandă interzisă densitatea de stări prezintă un minim la nivelul Fermi. Pentru $\Delta \rightarrow 0$, considerăm Δ ca o perturbație și rezolvăm ecuațiile Bogoliubov-de-Gennes (5.12) prin metoda perturbațiilor. Funcțiile $f_n(\vec{r})$ și $g_n(\vec{r})$ sunt corelate cu funcția φ_n a electronului în metalul normal. Pentru $\Delta = 0$, adică în metalul normal,

$$f_n^o(\vec{r}) = \varphi_n(\vec{r}), g_n^o = 0, \text{ pentru } \varepsilon_n > 0$$

$$f_n^o(\vec{r}) = 0, g_n^o(\vec{r}) = \varphi_n^*(\vec{r}), \text{ pentru } \varepsilon_n < 0$$

Energiile de excitare corespund electronului pentru $\varepsilon_n > 0$ și golul pentru $\varepsilon_n < 0$. ε_n este valoarea proprie a energiei electronului în metalul normal, care în acord cu (6.1) are valoarea $\hbar^2 k^2 / 2m - E_F$. În aproximația de prim ordin în Δ scriem

$$f_n = f_n^o + \sum_{m \neq n} a_{nm} \varphi_m \quad (7.1)$$

$$g_n = g_n^o + \sum_{m \neq n} b_{nm} \varphi_m^*$$

Coeficienții a_{nm} și b_{nm} se obțin prin metoda uzuală a perturbațiilor

$$a_{nm} = 0; b_{nm} = \frac{-1}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \int d\vec{r} \varphi_n(\vec{r}) \Delta(\vec{r}) \varphi_m(\vec{r}), \varepsilon_n < 0 \quad (7.2)$$

$$b_{nm} = 0; a_{nm} = \frac{-1}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \int d\vec{r} \varphi_n^*(\vec{r}) \Delta(\vec{r}) \varphi_m^*(\vec{r}), \varepsilon_n > 0$$

În aproximația de ordinul doi în Δ se obțin valorile proprii ale energiei

$$E_n = \varepsilon_n + \sum_{m \neq n} \frac{\left| \int d\vec{r} \varphi_n^*(\vec{r}) \Delta(\vec{r}) \varphi_m^*(\vec{r}) \right|^2}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \quad (7.3)$$

Rezultatul este puțin diferit de cel obținut în teoria obișnuită a perturbațiilor în sensul că apare steluță și la φ_m^* iar la numitor semnul plus, deoarece perturbația în Hamiltonianul total este $\Delta(\vec{r})\psi+(\vec{r})\psi+(\vec{r})$. Pentru a obține elementul de matrice în (7.3) introducem operatorul K ce transformă φ_n în φ_n^*

$$K\varphi_n(\vec{r}\uparrow) = \varphi_n^*(\vec{r}\downarrow)$$

$$K\varphi_n(\vec{r}\downarrow) = \varphi_n^*(\vec{r}\uparrow)$$

astfel că

$$\int \varphi_n^*(\vec{r})\Delta(\vec{r})\varphi_m^*(\vec{r})d\vec{r} = \int \varphi_n^*(\vec{r})\Delta(\vec{r})K\varphi_m(\vec{r})d\vec{r} = \langle n|\Delta(\vec{r})K|m \rangle$$

și (7.3) devine

$$E_n = \varepsilon_n + \sum_{m \neq n} \frac{|\langle n|\Delta(\vec{r})K|m \rangle|^2}{\varepsilon_n + \varepsilon_m} \quad (7.4)$$

Examinăm două cazuri care sunt calitativ diferite.

(a) În Hamiltonianul metalului normal nu există contribuția câmpului magnetic ($A = 0$). În acest caz K comută cu H_0 . (7.5)

$$\left[\frac{P^2}{2m} + U(\vec{r}) \right] K = K \left[\frac{P^2}{2m} + U(\vec{r}) \right]$$

Funcțiile proprii $\varphi_n(\vec{r})$ ale acestui Hamiltonian sunt foarte complicate însă se pot construi perechi Cooper considerând două funcții $\varphi_n(\vec{r})$ și $K\varphi_n(\vec{r})$ care corespund aceleiași energii ε_n . În acest caz termenul de perturbație din (7.4) se poate dezvolta în serie astfel (7.6)

$$E_n = \varepsilon_n + \frac{\langle n|\Delta(\vec{r})|n \rangle^2}{2\varepsilon_n} + \sum_{\substack{m \neq n \\ m \neq k_n}} \frac{|\langle n|\Delta(\vec{r})K|m \rangle|^2}{\varepsilon_n + \varepsilon_m}$$

În general valoarea medie $\langle n|\Delta(\vec{r})|n \rangle$ este diferită de zero astfel că expresia de sus diverge atunci când $\varepsilon_n \rightarrow 0$. În cazul particular BCS $\Delta(\vec{r}) = \Delta$, ultima sumă este egală cu zero și

$$E_n = \varepsilon_n + \frac{\Delta^2}{2\varepsilon_n}$$

ceea ce rezultă din (6.2) scrisă sub forma

$$E_n = (\varepsilon_n^2 + \Delta^2)^{1/2}$$

pentru $\Delta \ll \varepsilon_n$. Astfel, când K comută cu H_0 , adică atunci când nu există efecte magnetice, sistemul prezintă o bandă interzisă Δ .

(b) Hamiltonianul H_0 conține termenul magnetic și nu mai comută cu K. Se introduce intensitatea spectrală [8]

$$I(\omega) = \sum_m \overline{|\langle n|\Delta(\vec{r})K|m \rangle|^2} \delta(\varepsilon_m - \varepsilon_n - \hbar\omega)$$

unde media se efectuează peste toate stările $|n \rangle$ de energie ε_n fixă. Transformata Fourier a lui $I(\omega)$ are forma (7.7)

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \overline{\Delta^*[\vec{r}(0)]K(0)\Delta[\vec{r}(t)]K(t)}$$

unde K(t) și r(t) sunt operatorii Heisenberg care descriu variația lui K și r în starea normală.

Ecuția care descrie variația lui K(t) este (7.8)

$$\frac{dK}{dt} = i[H_0, K] = iq \left\{ \frac{\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{p}}{mc} \right\} K$$

și

$$K(t) = e^{i\theta(t)} K(0)$$

unde

$$\theta(t) = \frac{2q}{mc} \int \vec{A} \cdot \vec{p} dt = \frac{2q}{\hbar c} \int \vec{A} d\vec{l}$$

Prin urmare

$$I(t) = \langle \Delta^*[\vec{r}(0)] e^{i\theta(t)} \Delta[\vec{r}(t)] \rangle \quad (7.9)$$

Medierea se efectuează peste toate traiectoriile clasice ale electronului. Din comportarea lui $I(t)$ la valori ale lui t mari se pot vedea dacă există sau nu bandă interzisă în spectrul de energie a electronilor. Se disting două cazuri:

- (1) $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \eta \neq 0$, situația neergodică
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$, situația ergodică

În cazul (1), $I(\omega)$ prezintă o singularitate la $\omega = 0$ și expresia (7.4) diverge pentru valori mici ale lui ϵ_n . Există deci bandă interzisă în spectrul de energie a electronilor, ceea ce corespunde cazului BCS studiat mai sus. În cazul (2) $I(\omega)$ nu prezintă singularitate pentru $\omega = 0$. Cele două energii ϵ_n și ϵ_m care apar în (7.4) nu pot fi niciodată egale între ele și seria este convergentă. Spectrul de energie nu diferă calitativ de cel al unui metal normal și supraconductorul este fără bandă interzisă. În acest caz

$$I(t) = \langle |\Delta(\vec{r})|^2 \rangle e^{-t/\tau} \quad (7.10)$$

unde $\tau > 0$ și $\tau(T)$ depinde de temperatură. Această stare în care este valabilă ecuația (7.10) se numește stare ergodică marcoffiană. Din (7.4) se găsește

$$E_n = \epsilon_n + \frac{2 \langle \Delta \rangle^2 \epsilon_n}{2\epsilon_n^2 + (\hbar/\tau)^2} \quad (7.11)$$

$$\Delta\tau/\hbar \ll 1$$

Această lege de dispersie este reprezentată în Fig. 5.6.

Pentru $\epsilon_n \gg \hbar/\tau$, $E_n = \epsilon_n + \Delta^2/2\epsilon_n \cong (\Delta^2 + \epsilon_n^2)^{1/2}$ care este rezultatul BCS pentru supraconductorul convențional. Pe de altă parte, dacă $\epsilon_n \rightarrow 0$ $E_n \rightarrow \epsilon_n [1 + 2(\tau\Delta/\hbar)^2]$ tinde liniar la zero și nu există bandă interzisă în spectrul de excitare. În Fig. 5.6, în regiunea S_1 materialul este supraconductor cu bandă interzisă, în regiunea S_2 (dintre cele două curbe) materialul este

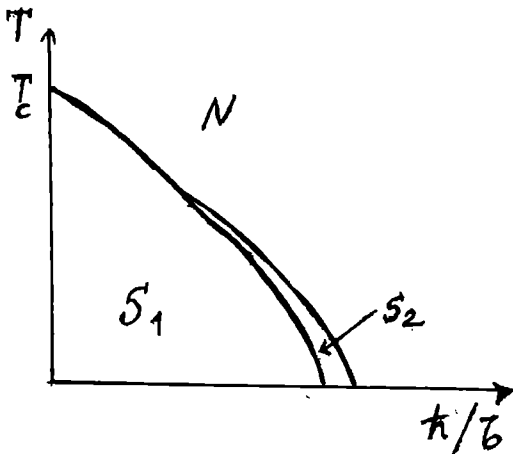


Fig. 5.6.

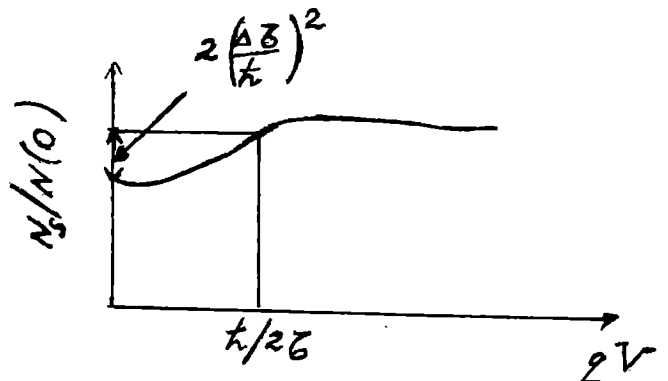


Fig. 5.7.

supraconductor fără bandă interzisă, iar în regiunea N materialul este în stare normală. Densitatea de stări se calculează din expresia

$$N_s(\epsilon_n) = N(o) \frac{d\epsilon_n}{dE_n} = N(o) \left[1 + 2 \left(\frac{\tau \Delta}{\hbar} \right)^2 \frac{(2\epsilon_n)^2 - (\hbar / \tau)^2}{[(2\epsilon_n)^2 + (\hbar / \tau)^2]^2} \right] \quad (7.12)$$

Așa cum se observă în Fig. 5.7, pentru $\epsilon_n < \hbar/2\tau$, N_s este mai mic decât în starea normală, dar are valoare finită. Starea supraconductoare fără bandă interzisă se întâlnește în supraconductorii cu impurități magnetice la o concentrație a acestora $0,95 C_r < C < C_r$, unde C_r este concentrația la care temperatura de tranziție este zero, într-un strat subțire supraconductor depus peste un strat subțire din metal normal la un câmp magnetic aplicat paralel cu suprafața de valoare apropiată de valoarea câmpului critic, într-un supraconductor impur într-un câmp magnetic apropiat de valorile critice H_{c2} sau H_{c3} etc.

5.8. Efectul tunel în structuri metal-normal-izolator-supraconductor

Considerăm două metale normale separate printr-un strat izolator suficient de subțire (10^{-7} cm) astfel ca să poată fi posibil procesul de tunelare a electronilor [9]. La OK fără tensiune aplicată (Fig. 5.8) nu este posibilă tunelarea: toate stările cu $E < F$ sunt ocupate cu electroni, iar stările cu $E > F$ sunt libere (F este nivelul Fermi în metal). Dacă se aplică o tensiune pe structură (Fig. 5.8 b) atunci electronii din domeniul de energie qV vor participa la tunelare. Numărul de stări care participă la tunelare este proporțional cu diferența de potențial aplicată și dacă posibilitatea de tunelare este constantă (ceea ce se întâmplă la tensiuni mici de polarizare) curentul crește liniar cu tensiunea aplicată (Fig. 5.8 c). Inițial prezentăm deducerea caracteristicii I-V a structurii metal normal-izolator-metal normal. Notăm densitatea de stări a electronilor în metalul din stânga (Fig. 6.8) cu $N_1(E)$ și funcția de distribuție pe stări cu $f(E)$, iar pentru metalul din dreapta notăm $N_2(E - qV)$ și, respectiv, $f(E - qV)$. Curentul tunel prin această structură este dat de relația

$$J \sim \int N_1(E) N_2(E - qV) [f(E) - f(E - qV)] dE \quad (8.1)$$

unde T este probabilitatea de tunelare a electronilor pe care am considerat-o aceeași, atât de la stânga la dreapta, cât și de la dreapta la stânga și, de asemenea, am considerat-o independentă de energie, ceea ce este just la tensiuni mici. În plus, din acest ultim motiv se poate considera că densitățile de stări variază slab cu energia și în ecuațiile de mai sus se pot folosi valorile lor de la nivelul Fermi $N_1(E) = N_1(0)$, $N_2(E - qV) = N_2(E) = N_2(0)$. Cu aceste aproximații se obține

$$J = AN_1(o)N_2(o) \int [f(E) - f(E - qV)] dE$$

unde A este o constantă care include T și geometria joncțiunii. Pentru tensiuni mici dezvoltăm funcția Fermi în serie și rezultă

$$f(E) - f(E - qV) = qV \frac{df}{dE}$$

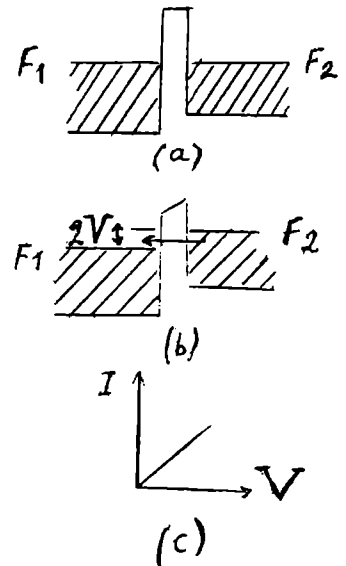


Fig. 5.8.

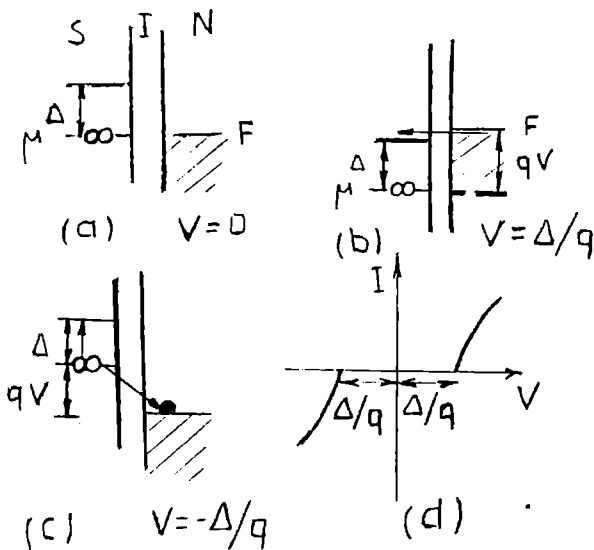


Fig. 5.9

energetic). La o tensiune aplicată (Fig. 5.9 b) pot tunela electronii din intervalul $qV - \Delta$ (de la dreapta la stânga) deoarece numai acești electroni au stări energetice permise pe partea opusă. Curentul apare la tensiunea $qV = \Delta$ (Fig. 5.9 d) ceea ce permite determinarea cu precizie a lărgimii benzii interzise a supraconductorului.

Creșterea rapidă a curentului la $qV = \Delta$ se datorează prezenței unei densități mari de stări energetice ale electronilor normali în supraconductor lângă banda interzisă așa cum reiese din relația (3.26). Dacă supraconductorul este polarizat negativ față de metal (Fig. 5.9 c), apare de asemenea, un curent tunel de la tensiunea $V = -\Delta/q$. La această valoare a tensiunii o pereche se despică în doi electroni, un electron tunelează eliberând energia Δ pe care o absoarbe perechea sa și trece într-o stare excitată de uniparticulă, în supraconductor. Numărul de perechi care se pot despică în acest mod crește cu creșterea tensiunii de polarizare deoarece crește numărul de stări disponibile și curentul electric crește de asemenea. datorită electronilor excitați termic la o temperatură finită apare un curent și la $qV < \Delta$. Curentul în structura NIS este dat de relația (8.1) cu deosebirea că se înlocuiește $N_1(E)$ cu densitatea de stări uniparticulă din supraconductor, dată în teoria BCS de ecuația (3.26). Prin urmare,

$$J_{NS} = AN_1(0)N_2(0) \int \frac{|E|}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} [f(E) - f(E - qV)] dE \quad (8.2)$$

unde integrarea se face pe toate energiile. La $T = 0K$ avem

$$f(E) - f(E - qV) = \begin{cases} 1, & E < qV \\ 0, & E < 0, E > qV \end{cases}$$

Astfel, pentru $qV < \Delta$ rezultă $J_{NS} = 0$ iar pentru $qV > \Delta$ rezultă

$$J_{NS} = AN_1(0) \int_{\Delta}^{qV} \frac{EdE}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} = AN_1(0) [(qV)^2 - \Delta^2]^{1/2}$$

Conductanța diferențială la $0K$ se obține prin derivarea acestei expresii în raport cu tensiunea

$$\frac{dJ_{NS}}{dV} = \begin{cases} AN_1(0)N_2(0) \frac{qV}{[(qV)^2 - \Delta^2]^{1/2}}, & qV > \Delta \\ 0, & qV < \Delta \end{cases} \quad (8.3)$$

La temperaturi joase $-df/dE$ poate fi aproximată printr-o funcție δ și se obține

$$J = AN_1(0)N_2(0)qV$$

adică o relație liniară între curent și tensiune (ca în legea lui Ohm) așa cum se obține experimental (Fig. 5.8 c).

Considerăm acum o joncțiune Al-Al₂O₃-Pb în care stratul izolator este Al₂O₃. Temperatura de tranziție pentru Al este 1,18 K iar pentru Pb este 7,193 K. Între aceste temperaturi structura se comportă ca o joncțiune NIS (metal normal-izolator-supraconductor). Când nu se aplică tensiune, diagrama energetică se prezintă ca în Fig. 5.9 a (nivelurile Fermi se află la același nivel

Se observă că dJ_{NS}/dV este proporțional cu densitatea de stări a electronilor normali în supraconductor, ceea ce s-a presupus inițial. Mărirea dJ_{NS}/dV se poate obține direct prin modularea lui J_{NS} cu un curent oscilant de valoare mică și măsurarea tensiunii datorată modulării cu un amplificator lock-in. În acest fel se poate determina cu foarte mare exactitate densitatea de stări energetice uniparticulă în supraconductor. În Fig. 5.10 se reprezintă rezultatele experimentale pentru staniu supraconductor în comparație cu teoria BCS utilizând joncțiunea Sn-SnO-Mg (Sn are temperatura de tranziție 3,722 K iar Mg sub limita celor mai joase temperaturi realizate). Se observă că concordanța cu teoria este cu atât mai bună cu cât temperatura este mai scăzută [10].

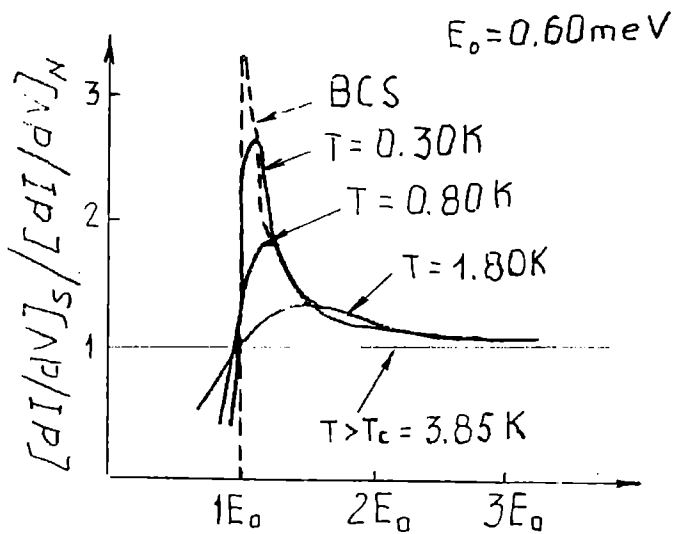


Fig. 5.10

Se observă că concordanța cu teoria este cu atât mai bună cu cât temperatura este mai scăzută [10]. Primul care a realizat asemenea ezperiențe de efect-tunel în structuri NIS, prin care se verifică structurile importante ale teoriei BCS (existența unei benzi interzise în spectrul de energie a electronilor uniparticulă și a singularității în densitatea de stări a acestora la $E = \Delta$) a fost Giaever [11]. La $T \neq 0K$ calculul integralei (8.2) este mai complicat [10, 11]. la temperaturi suficient de joase și la tensiuni mici se obține $J_{NS}/J_{NN} \exp(-\Delta/k_B T)$ de unde se poate determina Δ [11].

5.9. Efectul tunel

în structuri supraconductor-izolator-supraconductor

În Fig. 5.11 este reprezentată curba experimentală obținută pentru structura Al-Al₂O₃-Pb la 1K unde atât Al cât și Pb sunt supraconductori. Se observă că o structură SIS prezintă la o temperatură finită o caracteristică IV cu rezistență negativă, de tip N. Aceasta se datorează tunelării uniparticulă. Menționăm că toate considerațiile din acest paragraf se referă la o joncțiune unel cu stratul izolator nu chiar atât de subțire (20 Å), astfel încât faza funcției de undă a perechii dintr-un supraconductor este independentă de faza funcției de undă din celălalt supraconductor, tunelarea perechilor fiind nefavorizată. Deoarece rata de tunelare este proporțională cu densitatea de stări se poate înțelege ușor apariția rezistenței negative în asemenea structuri. Diagrama energetică a structurii SIS fără tensiune aplicată este reprezentată în Fig. 5.12 a. La o temperatură mai mare decât 0K stările uniparticulă sunt parțial ocupate și există procese de tunelare

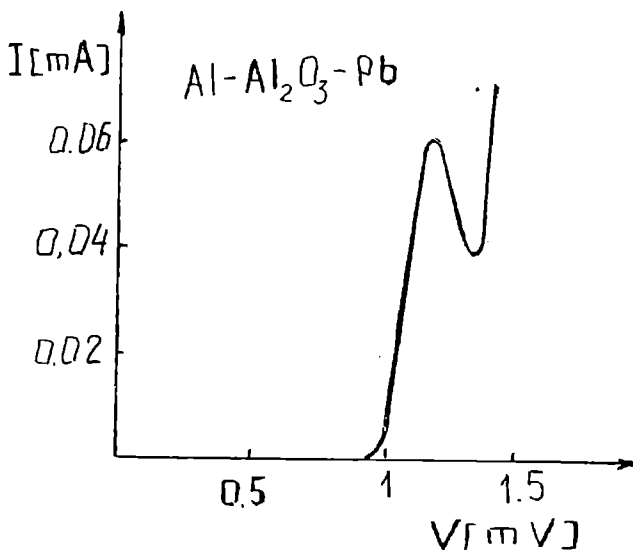


Fig. 5.11

și există procese de tunelare

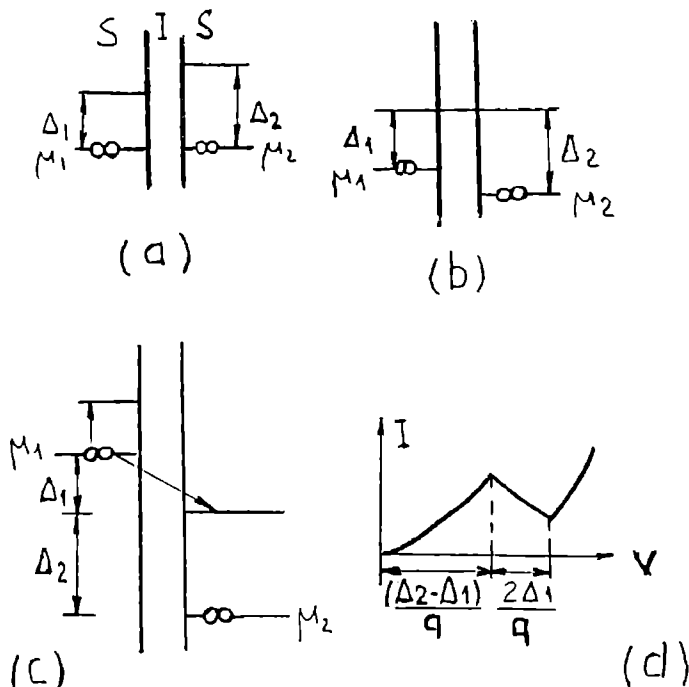


Fig. 5.12

uniparticulă în ambele sensuri. La polarizare zero, curentul datorat tunelării de la stânga la dreapta este egal cu curentul datorat tunelării de la dreapta la stânga, astfel încât curentul net prin joncțiune este nul. La o tensiune $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/q$ (Fig. 5.12 b) marginile superioare ale benzilor interzise ale celor doi supraconductori sunt la același nivel energetic și electronii tunelează de la marginea benzii permise din supraconductorul 1 în marginea benzii permise din supraconductorul 2, conservându-se energia în procesul de tunelare. Deoarece într-un supraconductor densitatea de stări la marginea benzii permise (de lângă banda interzisă) este foarte mare (infinită în modelul BCS) este de așteptat ca curentul tunel la tensiunea

de mai sus să fie mai mare decât la tensiuni mai mari sau mai mici decât aceasta. Prin urmare curentul trebuie să prezinte un maxim la tensiunea $(\Delta_2 - \Delta_1)/q$ și valoarea curentului de pic trebuie să scadă cu scăderea temperaturii, deoarece scade concentrația electronilor normali. Tensiunea de pic depinde de asemenea de temperatură deoarece banda interzisă depinde de temperatură (crește cu scăderea temperaturii). În Fig. 5.12 c tensiunea de polarizare are valoarea $V = (\Delta_2 - \Delta_1)/q$, care corespunde valorii minime a curentului. Valoarea curentului tunel pentru $0 < qV < (\Delta_2 + \Delta_1)$ poate fi micșorată oricât de mult prin micșorarea temperaturii; la OK nu există curent în acest domeniu de tensiune deoarece nu există electroni normali excitați termic. La tensiunea $V = (\Delta_2 + \Delta_1)/q$ apare un proces adițional, care implică desplicarea perechilor de electroni. Unul din electronii din pereche tunelează în supraconductorul din dreapta ocupând starea normală cea mai joasă. Acest proces este însoțit cu pierderea energiei Δ_1 . Al doilea electron, pierzându-și partenerul, trece în starea normală în supraconductorul 1 câștigând energia Δ_1 . Astfel, procesul are loc cu conservarea energiei. Densitatea mare de stări la marginea benzii permise ca și concentrația mare de perechi conduc la creșterea abruptă a curentului la această tensiune așa cum se observă pe caracteristica IV (Fig. 5.12 d și 5.11). Deoarece la temperaturi joase curentul tunel la tensiuni $V < (\Delta_2 + \Delta_1)/q$, depinde de concentrația de electroni normali, care variază cu temperatura după legea $\exp(-\Delta/kT)$, curentul tunel va avea aceeași dependență de temperatură, ceea ce dă posibilitatea ca joncțiunea tunel supraconductoare să poată fi utilizată ca termometru criogenic foarte sensibil. Domeniul de temperatură în care se utilizează termometrul este $0,2 T_c - 0,9 T_c$. În acest caz structura SIS conține în ambele părți același supraconductor ($\Delta_2 = \Delta_1$). Pentru calculul teoretic al caracteristicii I-V a structurii SIS se utilizează expresia (8.1) în care se folosesc densitățile de stări uniparticulă din supraconductor [9].

5.10. Efectul tunel cu participarea fotonilor și fononilor în structuri tunel cu supraconductori

Într-un supraconductor, la o temperatură mai mică decât T_c există un echilibru dinamic între concentrația perechilor de electroni și concentrația electronilor uniparticulă. Perechile se desplică în electroni prin absorbția de fononi cu energie egală sau mare decât 2Δ , iar electronii normali recombinează unul cu altul și formează perechi, emițând fononi de energie 2Δ . La echilibru

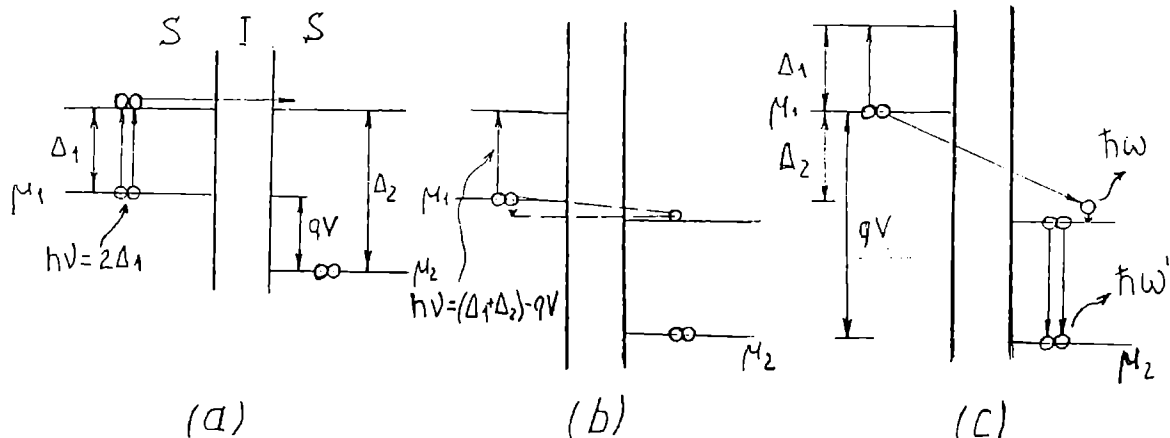


Fig. 5.13

ratele celor două procese sunt egale între ele. Prin urmare o joncțiune tunel poate fi utilizată ca generator și detector de unde de frecvență foarte mare (frecvența corespunzătoare a Sn este 290 GHz iar a Pb este 650 GHz). Pe de altă parte dacă un supraconductor este expus la o radiație cu $h\nu \geq 2\Delta$, ea va fi absorbită de către perechi care se vor despică în electroni normali, conducând la creșterea concentrației acestora din urmă. Limita de absorbție în acest caz se află în domeniul undelor milimetrice și infraroșu îndepărtat. De exemplu, lungimea de undă pentru Al ($T_c = 1,2$ K) este de 3,9 mm, iar pentru Pb ($T_c = 7,2$ K) este de 0,46 mm. În Fig. 5.13 a, se reprezintă cum crește numărul de electroni normali prin absorbție de fotoni sau fononi de energie 2Δ , ceea ce determină creșterea curentului tunel în joncțiunea polarizată. Menționăm că acest proces nu se numește proces de tunelare cu participarea fotonilor sau fononilor, deoarece energia absorbită servește la generarea electronilor normali care tunelează fără „să știe” că au fost mai înainte împerecheați. În Fig. 6.13 b este reprezentat procesul de tunelare cu participarea fotonilor sau fononilor (absorbția). Datorită valorii tensiunii aplicate energia radiației incidente poate fi mai mică decât 2Δ . Procesul are loc la tensiunea dată de $qV = \Delta_1 + \Delta_2 - h\omega$. radiația incidentă pe supraconductorul 1 despică o pereche: un electron trece în starea normală din acest supraconductor iar celălalt tunelează în supraconductorul 2. Electronul care tunelează pierde energia $qV - \Delta_2 = \Delta_1 - h\omega$, iar celălalt electron câștigă energia $qV - \Delta_2 + h\omega = \Delta_1$, adică energia necesară pentru a deveni normal. Este ca și cum în supraconductorul 1 un electron din pereche ar trece pe o stare virtuală prin pierderea energiei $qV - \Delta_2 = \Delta_1 - h\omega$ și apoi ar tunela, tunelarea de astă dată având loc la același nivel energetic (linie-punct pe Fig. 5.13 b). Dacă joncțiunea este polarizată la tensiunea $V = (\Delta_1 + \Delta_2 + h\omega)/q$, atunci are loc tot o tunelare cu participarea fotonilor sau fononilor, însă cu emisia acestora (Fig. 5.13 c). La tensiunea $V > (\Delta_1 + \Delta_2)/q$, la despicarea perechii în supraconductorul 1, un electron devine normal absorbind energia Δ_1 , celălalt electron din pereche tunelează cedând energia $qV - \Delta_2 = \Delta_1 + h\omega$, din care Δ_1 a fost absorbită de către primul electron, iar energia $h\omega$ este cedată sub formă de foton sau fonon (astfel, legea conservării energiei este satisfăcută). Emisia fotonilor are loc stimulat, adică în prezența radiației de energie $h\omega$. Absorbția și emisia de fotoni se manifestă prin apariția unor vârfuri în caracteristica I-V la tensiuni $qV = \Delta_1 + \Delta_2 + h\omega$. Experiențele au arătat că în prezența unui câmp de radiație apar trepte ale curentului electric la $qV = \Delta_1 + \Delta_2 \pm nh\omega$, ceea ce indică existența proceselor de absorbție și emisie multifotonică. În Fig. 5.14 sunt prezentate rezultatele experimentele pentru curentul tunel cu participarea fotonilor într-o joncțiune Sn-SnO-Pb la 1,4 K. În absența radiației efectul tunel apare la $qV = \Delta_1 + \Delta_2 = 1,9$ m eV. Temperatura este suficient de mică astfel că curentul datorat electronilor excitați termic ce ar apărea la $qV < \Delta_1 + \Delta_2$ este neglijabil. În

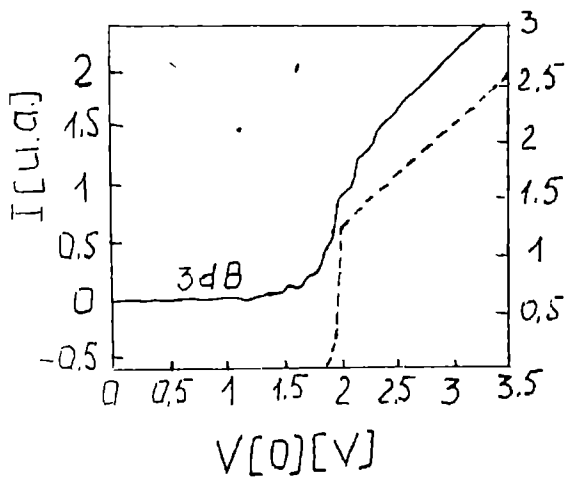


Fig. 5.14

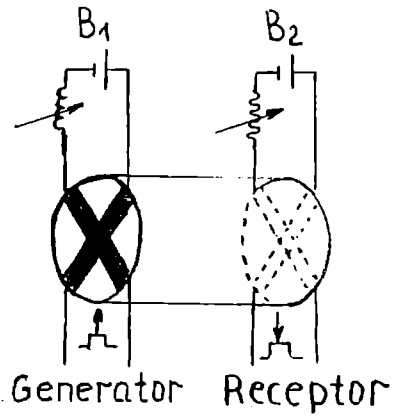


Fig. 5.15

prezența radiației apar trepte de curent atât la $qV < \Delta_1 + \Delta_2$ (absorbție de fotoni) cât și la $qV > \Delta_1 + \Delta_2$ (emisie de fotoni) [12].

Spectrul fononilor emiși datorită relaxării electronilor care tunează (Fig. 5.13 c) se întinde pe domeniul de energie de la zero la $qV - (\Delta_1 + \Delta_2)$. În plus pot apărea fononi de energie $2\Delta_2$ datorită recombinării în supraconductorul 2 a unui electron care a tunelat cu un alt electron excitat termic, formându-se o pereche Cooper ($\hbar\omega'$ pe Fig. 5.13 c).

Așadar, apar fononi atât datorită relaxării, cât și datorită recombinării electronilor. Timpul de relaxare este de ordinul 10^{-9} s, iar timpul de recombinare este de ordinul 10^{-7} s, astfel încât spectrele fononilor de relaxare și de recombinare sunt distincte. Emisia fononilor în procesele de relaxare și recombinare este neglijabilă în comparație cu emisia fononilor; după cum am văzut, ea crește prin emisie stimulată în prezența unui câmp de radiație. Pe baza proceselor descrise mai sus, joncțiunea tunel poate fi utilizată ca generator și detector de fononi. Un asemenea sistem este reprezentat în Fig. 5.15 [13]. El constă din două joncțiuni tunel identice din Sn-SnO-Sn depuse prin evaporare la un capăt și la altul ale unei bare cilindrice de safir de 1 cm lungime și 1 cm diametru. Aceste joncțiuni se realizează astfel. Se depune întâi, prin evaporare în vid, o bandă de cositor de 1 mm lățime și 1000 Å grosime. Suprafața benzii este, astfel, oxidată, obținându-se un strat de SnO de aproximativ 20 Å. După aceea, se depune a doua bandă de Sn perpendicular pe prima. O joncțiune servește ca generator, iar cealaltă ca detector de fononi. Joncțiunea generator este polarizată la tensiunea $V \geq 2\Delta/q$, iar joncțiunea detector la $V < 2\Delta/q$. Fononii, de energie $(qV - 2\Delta)$, generați de prima joncțiune pe baza procesului prezentat în Fig. 6.13 c se propagă prin bara de safir și sunt absorbiți în joncțiunea detector unde produc disocierea perechilor, conducând la apariția unui curent suplimentar, așa cum se reprezintă în Fig. 5.13 b. Și în cazul detecției undelor acustice apar trepte de curent la tensiuni $qV = 2\Delta - n$ [14]. Rezultatul este similar cu cel prezentat în Fig. 5.14 pentru absorbție de fotoni. S-a sugerat că o joncțiune tunel Pb (masiv)-PbO-Pb poate fi utilizată pentru detecția particulelor α și razelor γ . Mecanismul de detecție implică disocierea perechilor și tunelarea electronilor rezultați, ceea ce conduce la apariția unui curent adițional. Deducerea expresiilor curentului electric se găsește în [9].

5.11. Electrocinematica supraconductibilității

Considerăm că asupra unui supraconductor aplicăm un câmp magnetic specificat prin potențialul vector $\vec{A}(\vec{r})$. Deoarece efectul Meissner și celelalte efecte sunt practic independente de frecvență până la frecvențe de ordinul celei caracteristice benzii interzise (Δ/\hbar),

considerăm câmpul magnetic static. Vom lua în considerare numai termenul perturbativ liniar din Hamiltonian

$$H_1 = \frac{ie\hbar}{2m} \sum_i (\nabla_i \vec{A} + \vec{A} \nabla_i)$$

unde sumarea se face pe toți electronii. Dezvoltând $A(\mathbf{r})$ în serie Fourier

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_q \vec{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\vec{r}}$$

se poate scrie

$$\mathcal{H}_{\square} = -\frac{e\hbar}{m} \sum_{k,q} \vec{k} \cdot \vec{a}(\vec{q}) C_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}^{\dagger} C_{k\sigma} \quad (11.1)$$

Am luat în considerare că în câmp transversal $\vec{q} \cdot \vec{a}(\vec{q}) = 0$. Indicele de spin nu se modifică, deoarece interacția dominantă este asociată mișcării orbitale. Forma explicită a lui (11.1) poate fi găsită comparând cu forma explicită a lui (1.1). Deoarece elementul de matrice al interacției electronului cu câmpul magnetic este proporțional cu k , ne situăm în cazul II de interacție tratat în § 5.1, astfel că, având în vedere ecuația (1.4), se scrie

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & -e\hbar \sum_{k,q} \vec{k} \cdot \vec{a}(\vec{q}) \left[(u_k u_{k+q} + v_k v_{k+q}) (\gamma_{k+q,0}^{\dagger} \gamma_{k0} - \gamma_{k1}^{\dagger} \gamma_{k+q,1}) + \right. \\ & \left. + (v_k u_{k+q} - u_k v_{k+q}) (\gamma_{k+q}^{\dagger} \gamma_{k1}^{\dagger} - \gamma_{k+q,l} \gamma_{k0}) \right] \quad (11.2) \end{aligned}$$

În § 5.4 am calculat energia absorbită datorată acestui operator de perturbație. În cele ce urmează, vom calcula curentul electric indus de către acest operator. În prezența potențialului vector

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} - e\vec{A}$$

și curentul electric $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = n_0 \vec{v}$ are două componente \vec{j}_1 și \vec{j}_2 . A doua componentă este chiar ecuația lui London

$$\vec{j}_2 = -\frac{ne^2}{m} \vec{A} \quad (11.3)$$

dacă notăm cu n concentrația perechilor de electroni. Primul termen, \vec{j}_1 , se numește adesea curent paramagnetic, deoarece el tinde să anuleze curentul diamagnetic \vec{j}_2 . Componenta Fourier a lui \vec{j}_1 este

$$\vec{j}_1(\vec{q}) = \frac{e\hbar}{m} \sum_k \vec{k} c_{k-q}^{\dagger} c_k \quad (11.4)$$

care poate fi scrisă, în mod similar, cu ecuația (11.2), dacă se utilizează operatorii γ . Pentru curentul corespunzător diverselor componente Fourier ale potențialului vector, se utilizează o notație standard

$$\vec{j}(\vec{q}) = -K(\vec{q}) \vec{a}(\vec{q}) \quad (11.5)$$

5.11.1. Limita locală (modelul London)

Dacă scriem ecuația lui London

$$\vec{j}(\vec{r}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{A}(\vec{r}) \quad (11.6)$$

se observă că este independentă de \vec{q} și, prin urmare,

$$K_L(\vec{q}) = K_L(o) = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(T)}$$

unde λ_L este adâncimea de penetrație London.

Pentru a găsi dependența de temperatură a lui $\lambda_L(T)$, trebuie să găsim dependența de temperatură a lui $K(O, T)$ corespunzătoare cazului $q=0$, adică lungimii de undă infinită. Pentru $q=0$, factorul de coerență din al doilea termen din expresia (11.2) este zero, iar primul termen este egal cu unitatea. De asemenea, pentru $q=0$, $\gamma_{k+q,0}^+ \gamma_{k,0}$ devine un operator numeric $\gamma_{k,0}^+ \gamma_{k,0}$. În aceste condiții, operatorul de perturbație (11.2) deplasează energiile cuasiparticulelor excitate, astfel

$$E_{k_0} \rightarrow E_{k_0} - \frac{e\hbar}{m} \vec{k} \cdot \vec{a}(0) \quad (11.7)$$

$$E_{k_1} \rightarrow E_{k_1} + \frac{e\hbar}{m} \vec{k} \cdot \vec{a}(0)$$

În aceleași condiții, (11.4) devine (pentru $q=0$)

$$\vec{j}_1(o) = \frac{e\hbar}{m} \sum_k \vec{k} (\gamma_{k,0}^+ \gamma_{k,0} - \gamma_{k,1}^+ \gamma_{k,1}) \quad (11.8)$$

având în vedere că $\gamma_{k,0}^+ \gamma_{k,0} = f_{k,0}$ și $\gamma_{k,1}^+ \gamma_{k,1} = f_{k,1}$, sunt funcțiile Fermi corespunzătoare energiilor deplasate (11.7), se poate scrie

$$\vec{j}_1(o) = \frac{e\hbar}{m} \sum_k \vec{k} (f_{k,0} - f_{k,1}) \quad (11.9)$$

Pentru valori mici ale lui $a(0)$, efectuând o dezvoltare în serie Taylor, se obține

$$f_{k,0} - f_{k,1} \approx - \left(\frac{\partial f_0}{\partial E_k} \right) \frac{2e\hbar}{mc} \vec{k} \cdot \vec{a}(o)$$

și

$$\vec{j}_1(o) = \frac{2e^2 \hbar^2}{m^2} \sum_k [\vec{a}(o) \cdot \vec{k}] \vec{k} \left(- \frac{\partial f}{\partial E_k} \right) \quad (11.10)$$

Din condițiile de simetrie rezultă că $\vec{j}_1(o)$ este paralel cu $\vec{a}(o)$ și media pătratului componenteii lui \vec{k} după \vec{j}_1 (sau \vec{a}) este $k_F^3/3$, deoarece pe o sferă media lui $\cos^2\theta$ este egală cu 1/3. Din (11.10) se obține

$$K_1(0, T) = - \frac{\vec{j}_1(o)}{\vec{a}(o)} = - \left(\frac{ne^2}{m} \right) \left(\frac{4E_F}{3n} \right) \sum_k \left(- \frac{\partial f}{\partial E_k} \right)$$

Trecând de la sumă la integrală $\sum_k \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} N_s(E) dE$ și având în vedere relația (3.26)

$$N_s(E) = N(o) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, \quad |E| > \Delta$$

și că $N(0) = 3n/4E_F$, se obține

$$K_1(0, T) = - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(o)} 2 \int_{\Delta}^{\infty} \left(- \frac{\partial f}{\partial E} \right) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} dE$$

unde

$$\lambda_L^2(o) = \frac{m}{\mu_0 n e^2}$$

Dacă luăm în considerare și \bar{j}_2 și

$$K_2(0, T) = \frac{-\bar{j}_2(0)}{\bar{a}(o)} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(o)}$$

se poate scrie

$$\begin{aligned} K(0, T) &= K_1(0, T) + K_2(0, T) = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(o)} [1 + \lambda_L^2(o) K_1(0, T)] = \\ &= \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(o)} \left[1 - 2 \int_{\Delta}^{\infty} \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} dE \right] \equiv \frac{1}{\lambda_L^2(T) \mu_0} \end{aligned} \quad (11.11)$$

La $T > T_c$ starea normală, $\Delta=0$, $f(0)=1/2$ și $K(0, T > T_c)=0$. În acest caz, nu apare efect Meissner, deoarece curentul paramagnetic \bar{j}_1 anulează curentul diamagnetic \bar{j}_2 . Pentru $T \rightarrow 0$, $\lambda_L(T)$ se reduce la $\lambda_L(0)$, deoarece cu scăderea lui T , $\Delta(T)/kT$ crește, integrala devine din ce în ce mai mică, scăzând exponențial la zero. Această comportare este reprezentată în Fig. 5.16. K_1 se datorează cuasiparticulelor excitate care dau un curent net în direcția inversă lui \bar{j}_2 pentru a-l anula pe acesta. Aceasta este aproximația locală, corespunzătoare modelului lui London.

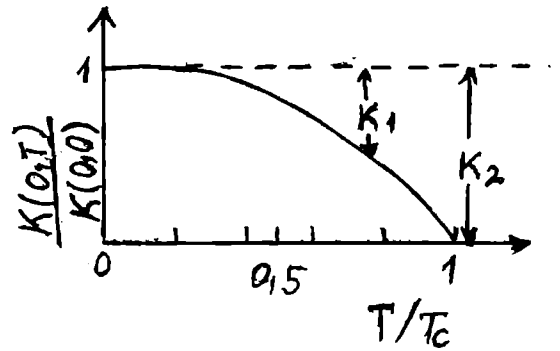


Fig. 5.16

5.11.2. Limita nelocală (modelul Pippard).

K este dependent de \bar{q}

Limita locală (modelul London) tratată anterior corespunde cazului $q \xi_0 \ll 1$, pentru care am ales pentru simplitate $q=0$. Limita nelocală corespunde cazului $q \xi_0 \gg 1$, modelul Pippard. Pentru simplitate, vom analiza dependența de q a lui K la $T=OK$. La $T=OK$ toți electronii se găsesc în starea fundamentală BCS $|\psi_0\rangle$. În prezența câmpului magnetic, funcția de undă a stării perturbate a electronilor se scrie

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle - \sum_n \frac{\langle \psi_n | H_1 | \psi_0 \rangle}{E_n} |\psi_n\rangle$$

unde n sunt stările excitate de energie E_n și H_1 este dat de expresia (11.2). Valoarea lui $\bar{j}_1(q)$ pe stările $|\psi\rangle$ este

$$\langle \psi | \bar{j}_1(\bar{q}) | \psi \rangle = \langle \psi_0 | \bar{j}_1(\bar{q}) | \psi_0 \rangle - 2R_e \sum_n \frac{\langle \psi_0 | \bar{j}_1(\bar{q}) | \psi_n \rangle \langle \psi_n | \bar{j}_1(\bar{q}) | \psi_0 \rangle}{E_n}$$

Primul termen din dreapta este egal cu zero, deoarece toți electronii au impulsurile egale și de semn contrar. În al doilea termen, aduc contribuție numai stările ψ_n care conțin

două cuasiparticule generate de termenul $\gamma_{k+q_0}^+ \gamma_{k_1}$ din expresia (11.2) a lui H_1 . În final, se obține

$$\langle \psi | \vec{j}_1(\vec{q}) | \psi \rangle = \frac{2e^2 \hbar^2}{m^2} \sum_k \frac{(v_k u_{k+q} - u_k v_{k+q})^2}{E_k + E_{k+q}} [\vec{k} \cdot \vec{a}(\vec{q})] \vec{k} \quad (11.12)$$

Rezultă că chiar la $T=OK$ apare un curent paralel cu \vec{A} , care reduce parțial curentul diamagnetic \vec{j}_2 . Procedând, prin analogie, cu cele prezentate în paragraful anterior, se poate scrie

$$K(q, 0) = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2(0)} \left\{ 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_k u_{k+q} - u_k v_{k+q})^2}{E_k + E_{k+q}} d\epsilon_k \right\}$$

unde

$$d\epsilon_k = \frac{E_k}{\sqrt{E_k^2 - \Delta^2}} dE_k$$

Pentru q mic, factorul de coerență de la numărător poate fi scris sub forma $(\epsilon_{k+q} - \epsilon_k) \partial(u_k - v_k) / \partial \epsilon_k$ și primul factor din integrală este de ordinul $\hbar v_F q$, iar cel de-al doilea este proporțional cu $1/\Delta(0)$. Cu creșterea lui q de la valoarea zero, $K(q, 0)$ scade cu mărimea $\sim q^2 \xi^2$, unde în teoria BCS

$$\xi_0 \equiv \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta(0)}$$

Pentru $q \xi_0 \gg 1$, se obține

$$K(q, 0) = K(0, 0) \frac{3\pi}{4q \xi_0} \quad (11.13)$$

Calculul detaliat dă [15]

$$K(q) = \frac{3\pi^2}{m} \frac{ne^2}{q \xi_0} \frac{\Delta(T)}{\Delta_0} \tanh \left[\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right] \quad (11.14)$$

Pentru un material în stare normală la $T=OK$, se obține în limita $\Delta(0) \rightarrow 0$, $\xi_0 \rightarrow \infty$ și $K(q, 0) = 0$ pentru orice valoare a lui q . În Fig. 5.17 este reprezentată dependența de q a lui $K(q, 0)$. În această aproximație, $\xi_0/\lambda_L(0) \rightarrow \infty$, pentru adâncimea de pătrundere se obține

$$\lambda(T) = \lambda(0) \left[\frac{\Delta(T)}{\Delta_0} \tanh \left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T} \right) \right]^{-1/3} \quad (11.15)$$

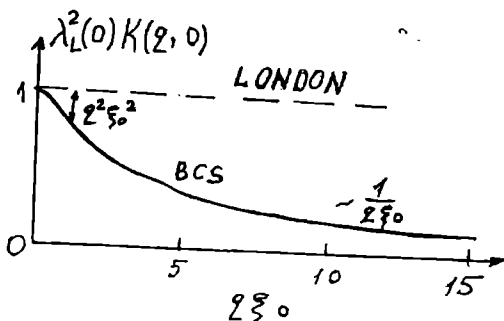


Fig. 5.17

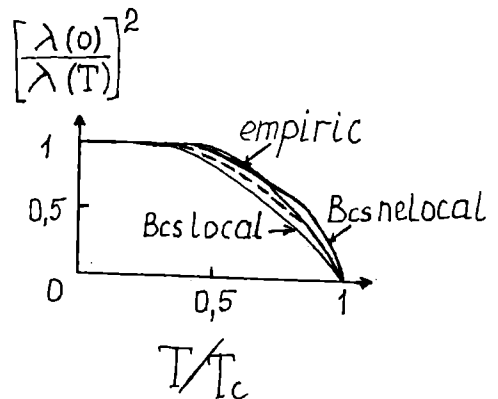


Fig. 5.18

unde

$$\lambda(0) = \frac{8}{9} \left(\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \right)^{1/3} [\xi_0 \lambda_L(0)]^{1/3} \quad (11.16)$$

În Fig. 5.18 este reprezentată dependența de T a lui λ_L obținută în teoria BCS nelocală (ecuația 11.15), cea obținută în teoria BCS locală (ecuația 11.11) și cea obținută semiempiric

$$\frac{\lambda(T)}{\lambda(0)} = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-1/2} \quad (11.17)$$

5.11.3. Electrodinamica nelocală în spațiul coordonatelor

Scriem relația nelocală a lui Pippard sub forma

$$\vec{j}(\vec{r}) = D \int \frac{\vec{R}[\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}')]]}{R^4} F(R) d\vec{r}' \quad (11.18)$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ și D este o constantă. Utilizând $\vec{A}(\vec{r}) \sim \exp(iq \cdot \vec{r})$, se găsește

$$K(q) = \frac{16\pi^2 D}{3} \int_0^\infty \left[\frac{3}{qR} J_1(qR) \right] F(R) dR \quad (11.19)$$

unde $J_1(z) = z^{-2} \sin z - z^{-1} \cos z$ este funcția Bessel sferică. Funcția $3z^{-1} J_1(z)$ este o funcție oscilatorie amortizată, care are valoarea unitate la $z=0$. Deci

$$K(0) = \frac{16\pi^2 D}{3} \int_0^\infty F(R) dR \quad (11.19a)$$

depinde de integrala din factorul $F(R)$. Pentru $q \rightarrow \infty$ se găsește

$$K(q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{16\pi^2 D}{3} \frac{F(0)}{2} \int_0^\infty \frac{3}{z} j_1(z) dz = \frac{4\pi^3 D F(0)}{q} \quad (11.19b)$$

și deci, $K(q \rightarrow \infty)$ depinde numai de valoarea în origine a lui $F(R)$. Se notează

$$s = \frac{\int F(R) dR}{F(0)}$$

care reprezintă o măsură a domeniului spațial al lui $F(R)$ în spațiul real. Astfel, din relațiile de mai sus se poate scrie

$$\frac{K(q)}{K(0)} \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \frac{3\pi}{4qs} \quad (11.19c)$$

În starea supraconductoare $s = \xi_0$. Dacă se cunoaște $K(q, T)$, se poate găsi corespondentul în spațiul real, notat în teoria BCS cu $J(R, T)$, efectuând transformarea Fourier, inversul transformării care a condus la expresia (11.19). Valoarea calculată în teoria BCS a lui $F(R, T)$ la $T=OK$ și la T_c este reprezentată în Fig. 5.19, în funcție de R/ξ_0 . Se observă că dependența este similară cu forma exponențială $\exp(-R/\xi_0)$ propusă de Pippard. În teoria BCS , $J(R, T)$ este normată prin relația

$$\int_0^\infty J(R, T) dR = \xi_0 = \int_0^\infty e^{-R/\xi_0} dR \quad (11.20)$$

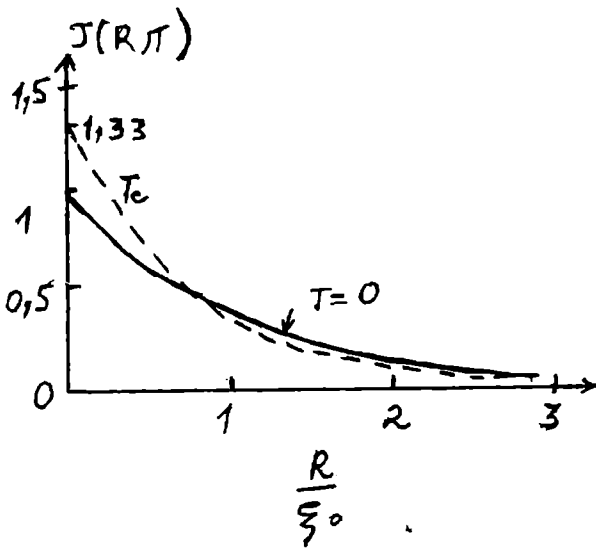


Fig. 5.19

(11.21) se reduce la ecuația lui London (11.6). Dacă, însă, $\bar{A}(\bar{r})$ se modifică semnificativ pe distanța ξ_0 , se ia în considerare electrodinamica nelocală.

Efectul impurităților se ia în considerare multiplicând factorul $J(R, T)$ cu factorul $\exp(-R/l)$, unde l este drumul liber mijlociu al electronilor. Dacă l este mic în comparație cu distanța pe care \bar{A} variază semnificativ, atunci problema devine locală și expresia curentului este dată de ecuația London (11.6), cu deosebirea că în locul lui λ_L se introduce o adâncime de penetrație efectivă λ_{ef} care se găsește din relația

$$\frac{\lambda_L^2(R)}{\lambda_{ef}^2(l, T)} = \frac{K(0, T, l)}{K(0, T, \infty)} = \frac{\int_0^\infty J(R, T) e^{-R/l} dR}{\xi_0} \quad (11.22)$$

În scrierea acestei expresii s-a utilizat relațiile (11.19 a) și (11.20). La limita impurificării extreme, $l \ll \xi_0$, integrala de la numărător se reduce la $J(0, T)l$, astfel că

$$\lambda_{ef}(l, T) = \lambda_L(T) \left(\frac{\xi_0}{l} \right)^{1/2} [J(0, T)]^{-1/2} \quad (11.23)$$

Dacă în relația (11.22) substituim pe $J(R, T)$ cu relația lui Pippard $\exp(-R/l)$, integrala de la numărător dă valoarea ξ unde

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{\xi_0} + \frac{1}{l}$$

și

$$\lambda_{ef}(l, T) = \lambda_L(T) \left(\frac{\xi_0}{\xi} \right)^{1/2} = \lambda_L(T) \left(1 + \frac{\xi_0}{l} \right)^{1/2} \quad (11.24)$$

Pentru $l \ll \xi_0$ (limita impurificării extreme), această expresie nu conduce la expresia (11.23) și de aceea se substituie $J(T, T)$ nu cu $\exp(-R/\xi_0)$, ci cu $J(0, T)\exp(-J(0, T)R/\xi_0)$. Se obține

$$\lambda_{ef}(l, T) = \lambda_L(T) \left[1 + \frac{\xi_0}{J(0, T)l} \right]^{1/2} \quad (11.25)$$

care la limită se reduce la (11.23). La $T=OK$, această expresie se reduce la (11.24), iar la T_c se reduce la relația

$$\lambda_{ef}(l, T) = \lambda_L(T) \left[1 + 0,75 \frac{\xi_0}{l} \right]^{1/2} \quad (11.26)$$

Dependența de temperatură a lui $\lambda_{ef}(l, T)$ este reprezentată în Fig. 5.18.

unde $\xi_0 = \hbar v_p / \pi \Delta_0$. Substituind (11.13) în (11.19 b) și având în vedere definiția $K(0, T) = 1/\lambda_L^2(T)$, în teoria BCS relația nelocală (11.18) a lui Pippard se scrie sub forma

$$\bar{j}(\bar{r}) = \frac{3}{4\pi\mu_0\xi_0\lambda_L^2(T)} \int \frac{\bar{R}[\bar{R} \cdot \bar{A}(\bar{r}')] }{R^4} J(R, T) d\bar{r}' \quad (11.21)$$

unde $\bar{R} = \bar{r} - \bar{r}'$. Dacă se substituie $J(R, T)$ cu $\exp(-R/\xi_0)$, se obține relația lui Pippard. Deducerea expresiei nelocale a lui $\bar{j}(\bar{r})$ și a lui $J(R, T)$ pe baza teoriei BCS, cititorul o găsește în [15]. Dacă pe un domeniu de ordinul lui ξ_0 , $\bar{A}(\bar{r})$ este constant, relația

5.12. Conductivitatea electrică complexă

În câmp electromagnetic periodic se definește o conductivitate electrică complexă proporțională cu $K(q, \omega, T)$, unde ω este frecvența câmpului electromagnetic. Egalând expresia curentului

$$\vec{j}(q, \omega, T) = \alpha(q, \omega, T) \vec{e}(q, \omega)$$

cu expresia curentului

$$\vec{j}(q, \omega, T) = -K(q, \omega) \vec{A}(q, \omega)$$

se obține expresia conductivității complexe

$$\alpha(q, \omega, T) = \frac{i}{\omega} K(q, \omega, T) \quad (11.27)$$

în funcție de $K(q, \omega, T)$. În deducerea relației (11.27) s-a avut în vedere relația

$$\vec{e} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -i\omega \vec{A}$$

Conductivitatea complexă se scrie $\sigma = \sigma_1 - i\sigma_2$.

Forma explicită a lui σ_2 la $T=OK$, prin analogie cu σ_1/σ_n (ec. 4.2) este

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) E(k') - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2\Delta}{\hbar\omega} \right) K(k') \quad (11.28)$$

unde

$$k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$k = \frac{|2\Delta - \hbar\omega|}{2\Delta + \hbar\omega}$$

Dependența de frecvență a lui σ_2/σ_n este reprezentată în Fig. 6.20. Se observă, pe figură, că pentru $\hbar\omega \ll 2\Delta$, $\sigma_2 \sim 1/\omega$, ceea ce demonstrează că în acest domeniu de frecvență $K(q, \omega)$ este independent de frecvență și, de asemenea, adâncimea de penetrație este independentă de frecvență. Notăm că σ_2 reprezintă conductanța datorată supracurentului. Pentru $\hbar\omega > 2\Delta$, σ_2 scade mai lent cu creșterea lui ω până la frecvențe de ordinul microundelor. Pentru $T > 0$, calculul lui σ_2/σ_n se face numeric. Totuși, la frecvențe joase se obține o formă analitică și anume

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} = \frac{\pi\Delta}{\hbar\omega} \tanh \frac{\Delta}{2k_B T}, \quad \hbar\omega \ll 2\Delta \quad (11.29)$$

care conduce la următoarele expresii simple

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_n} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\Delta}{\hbar\omega}, & T \ll T_c \\ \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{k_B T \hbar\omega}, & T \sim T_c \end{cases} \quad (11.30)$$

În teoria lui London

$$\sigma_{2L} = \frac{n_s e^2}{m\omega} \quad (11.31)$$

Din compararea celor două expresii rezultă că $n_s \sim \Delta$ pentru $T \ll T_c$ și $n_s \sim \Delta^2$ pentru $T \equiv T_c$. Ultimul caz corespunde rezultatului obținut în teoria Ginzburg-Landau $n_s \sim |\psi|^2$ dacă $\psi \sim \Delta$.

CAPITOLUL VI

EFFECTUL JOSEPHSON

6.1. Ce este efectul Josephson

În Fig. 6.1 a se reprezintă schematic un supraconductor masiv în care starea condensată este descrisă de funcția $\psi(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)| \exp[i\theta(\vec{r}, t)]$. În absența câmpului magnetic și a curentului electric, faza θ a funcției de undă este constantă în întreg supraconductorul. Considerând doi supraconductori complet izolați unul de altul, se poate modifica faza θ a fiecărui supraconductor separat, astfel că fazele celor doi supraconductori pot diferi între ele (Fig. 6.1 b). Considerăm acum doi supraconductori separați printr-o barieră izolatoare (Fig. 6.1 c). Cu reducerea grosimii acesteia la zero, proprietățile sistemului variază continuu de la cele a doi supraconductori izolați la cele ale unui singur supraconductor. Există o energie de cuplaj a celor două părți care crește cu micșorarea grosimii barierei și îndată ce această energie depășește energia fluctuațiilor termice ale sistemului, cei doi supraconductori devin cuplați în fază. Dacă acest cuplaj este finit, dar foarte slab, are loc efectul descris pentru prima dată de către Josephson [1]. De exemplu, este posibil acum ca perechile Cooper să tuneleze prin barieră dintr-un supraconductor în celălalt și să treacă, astfel, prin structură un supracurent (curent de perechi de electroni). Pentru aceasta, este necesar ca stratul izolator care separă cei doi supraconductori să fie suficient de subțire ($\sim 10 \text{ \AA}$), astfel încât să apară o corelație a perechilor Cooper din cele două părți ale joncțiunii (Fig. 6.1c). Vom prezenta în acest paragraf rezultatele teoriei microscopice a efectul Josephson. Este cunoscut faptul că variația în timp a funcției de undă este dată de ecuația lui Schrödinger $\partial\psi/\partial t = (-i/\hbar)E\psi$.

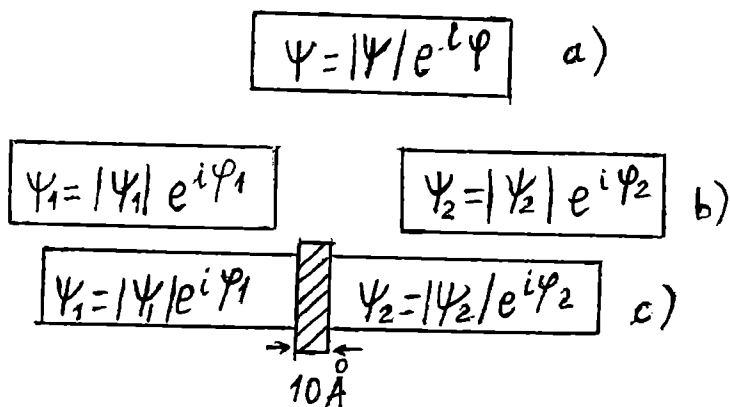


Fig. 6.1

Deoarece perechile de electroni au aceeași energie, 2μ (μ este potențialul chimic), și deoarece toate perechile participă în același fel la orice proces (coerența în fază), rata de variație a funcției de undă care descrie starea condensată (de perechi) trebuie să fie aceeași cu rata de variație a funcției de undă care descrie o singură pereche, adică $\partial\psi/\partial t = 2(-i/\hbar)\mu\psi$. Când cei doi supraconductori sunt cuplați, există o probabilitate oarecare ca funcția de

undă din supraconductorul 1 să se modifice datorită trecerii unui electron din acest supraconductor în supraconductorul 2 prin tunelare sau alt proces, și viceversa. Matematic, acest lucru poate fi scris astfel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial t} &= (-i / \hbar) [2\mu_1 \psi_1 + \xi \psi_2] \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} &= (-i / \hbar) [2\mu_2 \psi_2 + \xi \psi_1]\end{aligned}\quad (1.1)$$

unde μ_1 și μ_2 sunt potențialele chimice ale celor doi supraconductori, iar ξ este o constantă de cuplaj. Densitatea perechilor Cooper este $\rho = |\psi|^2$, astfel că se poate scrie $\psi_1 = \sqrt{\rho_1} \exp(i\theta_1)$ și $\psi_2 = \sqrt{\rho_2} \exp(i\theta_2)$. Substituind în prima ecuație de mai sus, se obține

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} \dot{\rho}_1 + i\sqrt{\rho_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} [2\mu_1 \sqrt{\rho_1} + \xi \sqrt{\rho_2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)}] \\ \frac{1}{2\sqrt{\rho_1}} \dot{\rho}_1 + i\sqrt{\rho_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} &= -\frac{i}{\hbar} 2\mu_1 \sqrt{\rho_1} - \frac{i}{\hbar} \sqrt{\rho_2} [\cos(\theta_2 - \theta_1) + i \sin(\theta_2 - \theta_1)]\end{aligned}$$

Egalând între ele părțile reale și, respectiv, imaginare, se obține presupunând $\rho_1 = \rho_2 = \rho$

$$\dot{\rho} = \frac{2\xi\rho}{\hbar} \sin\theta \quad (1.2)$$

și

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\frac{2\mu_1}{\hbar} - \frac{\xi}{\hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.3)$$

Relații similare se obțin din cea de a doua ecuație (1.1)

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\frac{2\mu_2}{\hbar} - \frac{\xi}{\hbar} \cos(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.4)$$

Scăzând membru cu membru, relațiile (1.3) și (1.4) se obține

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2qV}{\hbar} \quad (1.5)$$

unde $\theta = \theta_2 - \theta_1$; $qV = \mu_1 - \mu_2$; $-q$ este sarcina electronului. Variația în timp a densității de sarcină este corelată cu curentul electric prin relația de continuitate, astfel încât prin joncțiunea Josephson trece un curent electric dat de expresia

$$I = I_0 \sin\theta, \quad I_0 = \frac{2\xi\rho}{\hbar} \quad (1.6)$$

Este de așteptat ca valoarea lui ξ să depindă de proprietățile celor doi supraconductori și de grosimea stratului izolator. Ecuațiile (1.5) și (1.6) se numesc ecuațiile de constituție ale efectului Josephson. I_0 este curentul maxim pe care-l poate susține bariera, numit curent critic, iar $\theta = \theta_2 - \theta_1$ este diferența de fază dintre cei doi supraconductori (Fig. 6.2). Caracteristica I-V a joncțiunii Josephson este reprezentată în Fig. 6.3: Pentru valorile lui $I < I_0$ curentul circulă ca un supracurent continuu și nu apare nici o cădere de tensiune pe joncțiune (ceea ce este caracteristic unui supracurent). Acesta este efectul Josephson în curent continuu. Diferența de fază care există între cei doi supraconductori este

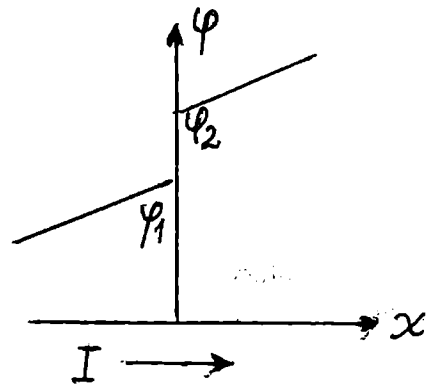


Fig. 6.2

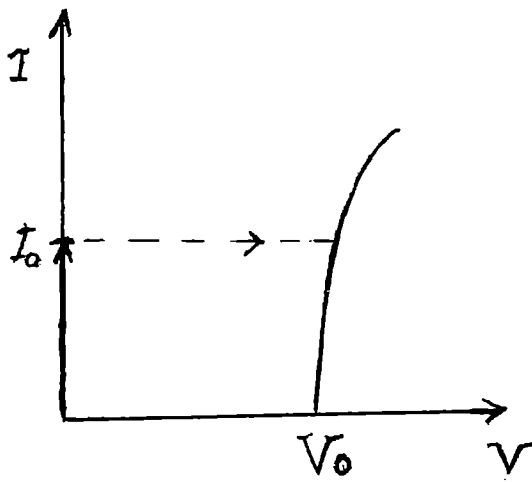
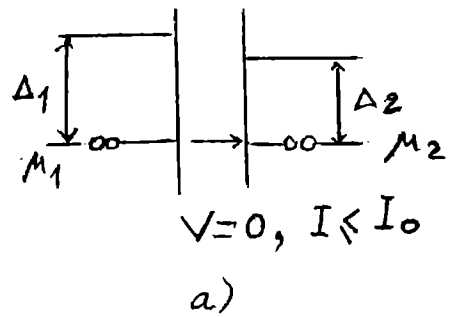


Fig. 6.3

determinată de curentul I care trece prin jonctiune, așa cum reiese din ecuația (1.6). Noi alimentăm, în general, o jonctiune Josephson de la o sursă de curent, astfel că mărim curentul prin circuit când acesta atinge valoarea I_0 ,

diferența de fază devine egală cu $\pi/2$. Peste valoarea I_0 jonctiunea nu mai poate susține un curent de perechi de electroni. În accepțiunea că jonctiunea Josephson ar fi un supraconductor slab, I_0 ar fi valoarea curentului care ar distruge supraconductibilitatea acestuia. I_0 se numește curent critic. Așa cum se observă pe caracteristica I-V (Fig. 6.3), de la valoarea I_0 curentul sare pe curba de tunelare uniparticulă și pe structură se stabilește o tensiune electrică. Curentul continuu de perechi circulă atunci când nivelele Fermi (potențialele chimice) din cei doi supraconductori se află la același nivel energetic (Fig. 6.4 a). Prin urmare, conform ecuațiilor (1.5) și (1.6), dacă se stabilește o diferență de energie între potențialele chimice ale celor doi supraconductori, apare prin jonctiune un curent alternativ de perechi de electroni. Știm că între două puncte trece un curent alternativ atunci când o sarcină se deplasează alternativ într-un sens și invers între aceste puncte ca într-un conductor sau, numai, sarcinile celor două puncte își schimbă alternativ semnul ca într-un condensator. Între aceste două puncte, câmpul electric își schimbă alternativ semnul. Însă, pe jonctiunea Josephson nu se stabilește din exterior un câmp electric variabil în timp, ci o diferență de potențial V de la o sursă de curent continuu, astfel că $qV = \mu_1 - \mu_2 = \Delta\mu$. Amintim că $\Delta\mu$, în afară de potențialul electrostatic, mai poate conține contribuția altor surse ca, efectul Bernoulli, gradient de temperatură, tensiune mecanică; de aceea, noi vorbim, în general, de diferența dintre potențialele chimice și nu de diferența de potențial electrostatică pe jonctiune. În Fig. 6.4 b și c este reprezentată jonctiunea la o tensiune V finită, atunci când diferența dintre potențialele chimice $\Delta\mu < \Delta_1 + \Delta_2$ (Δ_1 și Δ_2 sunt lărgimile benzilor interzise ale celor doi supraconductori), astfel ca tunelarea uniparticulă să poată fi neglijată. Este posibil ca perechile să tuneleze de la stânga la dreapta, fiecare pereche emițând un foton de energie $h\nu = 2\Delta\mu$ și, în acest caz, ar trece un curent continuu de perechi. Trecerea unui curent continuu de perechi ar presupune $\Delta\mu = 0$. Dacă o pereche a trecut de la stânga la dreapta emițând un foton de energie $h\nu$, acest foton poate fi absorbit de către o pereche care trece de la dreapta la stânga (Fig. 6.4). Dar, dacă trec permanent dintr-o parte în cealaltă perechi în număr egal, curentul net este egal cu zero. Aici intervine faptul că procesele au loc cu emisie și absorbție de cuante de energie. Dacă o particulă trecând de la stânga la dreapta și-ar pierde energia în mod continuu și cea trecând în sens invers ar câștiga, în mod continuu, energia pierdută de prima, ele ar ajunge într-o parte și, respectiv, în cealaltă în același timp și sistemul nu ar suferi nici o schimbare. Să ne amintim de



a)

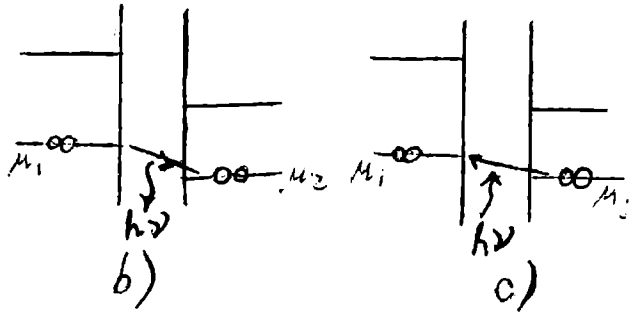


Fig. 6.4

ce lungimea de coerență ξ într-un supraconductor este de ordinul 10^{-4} cm, în timp ce interacția electron-foton are loc pe o distanță scurtă, de ordinul distanței interatomice (10^{-8} cm); pentru că un electron venind de la distanța $v_F/\omega \cong 10^{-5}$ cm (unde ω este frecvența unghiulară a fononilor optici și v_F este viteza electronilor la suprafața Fermi) poate încă să simtă perturbația produsă de perechea sa. Tot astfel credem că se desfășoară procesul și aici. Perechea din dreapta poate să absoarbă fotonul emis de perechea din stânga după un timp τ și deci, ea să treacă de la dreapta la stânga mai târziu, cu timpul τ , decât perechea care a trecut de la stânga la dreapta. Prin urmare, curentul trece un timp τ de la stânga la dreapta și un timp τ de la dreapta la stânga ș.a.m.d. Această stare este echivalentă cu trecerea unui curent alternativ de frecvență $\nu=2qV/h=500$ MHz/ μV . Prin urmare, există un curent de perechi la tensiune finită, însă, acesta este alternativ, de frecvență foarte mare, și pentru $qV < \Delta_1 + \Delta_2$ curentul continuu (media acestui curent alternativ) este zero (Fig. 6.3). Conchidem că efectul Josephson în curent alternativ se datorează naturii întârziate a interacțiunii cu schimb de fotoni între perechile din cele două părți ale joncțiunii. S-ar putea ca acest fenomen să nu se desfășoare așa cum credem noi, însă, aceasta poate fi o cale de înțelegere a lui. Așa cum vom vedea mai departe, efectul Josephson în curent alternativ se poate pune în evidență stimulând trecerea perechilor dintr-o parte în cealaltă în număr mai mare decât în sens invers, obținând astfel un curent continuu net în care apar trepte la tensiunile $V_n = nhv/2q$.

6.2. Efectul Josephson în curent continuu. Influența câmpului magnetic

Efectul Josephson în curent continuu apare atunci când diferența de fază pe joncțiune este independentă de timp. Din ecuația (1.5) se obține $V=0$, în cazul $\theta=\text{constant}(t)$. Curentul Josephson este dat de relația (1.6). Sub acțiunea câmpului magnetic se modifică diferența de fază pe joncțiune și, de asemenea, și curentul Josephson. În prezența câmpului magnetic, operatorul impuls pentru perechea de electroni este dat de expresia $\vec{p} = -i\hbar\nabla - 2q\vec{A}$, unde A este potențialul vector. Aplicând acest operator funcției de undă a perechilor $\sqrt{\rho} \exp(i\theta)$, se obține valoarea impulsului $\vec{p} = \hbar\nabla q - 2q\vec{A}$, de unde rezultă expresia gradientului fazei perechilor într-un supraconductor

$$\nabla\theta = \frac{2}{\hbar}(m\vec{v} + q\vec{A}) \quad (2.1)$$

unde $v=p/2m$ este viteza perechilor și m este masa electronului. $\nabla\theta$ variază, astfel încât v să fie invariant la transformarea de etalonare. Din teoria electromagnetismului se cunosc relațiile

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

unde \vec{B} , \vec{E} și V sunt inducția magnetică, câmpul electric și, respectiv, potențialul electric. Invarianța la etalonare înseamnă că starea fizică a unui sistem rămâne neschimbată dacă se fac modificările $\vec{A} = \vec{A}' + \nabla\chi$ și $V = V' - \partial\chi/\partial t$, unde χ este o mărime scalară arbitrară. Într-un supraconductor densitatea de curent este definită de relația $\vec{J} = 2q\rho\vec{v}$, astfel că gradientul fazei funcție de curent și de potențialul vector se poate scrie

$$\nabla\theta = \frac{2q}{\hbar} \left\{ \left(\frac{m}{2\rho q^2} \right) \vec{J} + \vec{A} \right\} \quad (2.2)$$

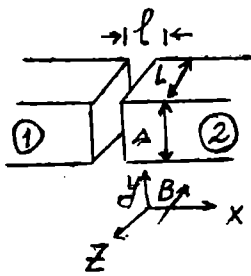


Fig. 6.5

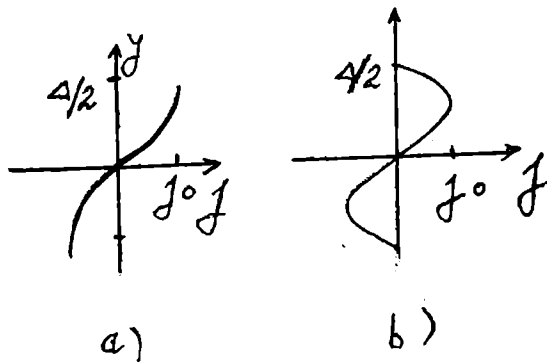


Fig. 6.6

În scrierea acestei relații s-a presupus că raza ciclotronică a centrului de masă al perechii de electroni este mult mai mare decât lungimea decoerență. Considerăm o joncțiune tunel normală pe axa Ox (Fig. 6.5), cu grosimea stratului izolator 1 și notăm cu λ adâncimea de penetrație a câmpului magnetic în supraconductor. Notăm, de asemenea, lungimea joncțiunii după direcția y cu s și cea după direcția z cu L . Aplicăm un câmp magnetic uniform după direcția z și considerăm $\vec{A} = By\hat{n}$, unde \hat{n} este versorul după direcția x . Diferența de fază între două puncte ale joncțiunii este dată de expresia

$$\theta = \theta_2 - \theta_1 + \left(\frac{2q}{\hbar} \right) \int_1^2 A dx \quad (2.3)$$

unde $\theta_2 - \theta_1$ este diferența de fază în absența câmpului magnetic, iar J are aceeași valoare în fiecare punct. Relația (2.3) arată că un câmp magnetic modifică diferența de fază Josephson. Diferența de fază datorată câmpului magnetic este dată de expresia

$$\frac{2q}{\hbar} \int_1^2 A dx = \frac{2q}{\hbar} B(2\lambda + l)y \quad (2.4)$$

Pentru a observa efectul câmpului magnetic, să considerăm cazul când prin joncțiune curentul net este zero. Deoarece la $y=0$ diferența de fază datorată câmpului magnetic este zero (ecuația 2.4), atunci condiția $\bar{j} = 0$ implică $(\theta_2 - \theta_1) = 0$ (ecuația 2.2). Întrucât $(\theta_2 - \theta_1) = 0$ este egal cu zero, înseamnă că în absența câmpului magnetic este egal cu zero peste tot. Densitatea de curent, în acest caz, se reduce la

$$J = J_0 \sin \left[\frac{2q}{\hbar} B(2\lambda + l)y \right] \quad (2.5)$$

Se observă că valoarea curentului depinde de y . Dacă circuitul exterior este deschis, nu trece nici un curent, ceea ce implică faptul că densitatea de curent trebuie să fie simetrică față de centrul joncțiunii unde are valoarea zero. Două asemenea situații sunt prezentate în Fig. 6.6 a și b. În cazul reprezentat în Fig. 6 a, $B = (\hbar/2q) 1/2s(2\lambda + 1)$ și densitatea de curent este maximă la margini. Dacă câmpul crește la valoarea $B = (\hbar/2q)(1/s(2\lambda + 1))$, curentul devine zero la margini, (Fig. 6.6 b) ș.a.m.d., astfel încât întotdeauna curentul net va fi zero. Prin urmare, prin joncțiune circulă un curent închis în interiorul ei. Curentul circulator ecranază interiorul joncțiunii și câmpul magnetic în centrul ei va fi mai mic decât cel aplicat. Ecranarea este neglijabilă dacă fluxul indus de curent este mult mai mic decât unitatea de flux $h/2q$; fluxul indus este egal cu produsul dintre inductanța $\mu_0 s\lambda/L$ și curentul indus $J_0 sL$ și, prin urmare, această condiție se scrie $(\mu_0 s\lambda/L)(J_0 sL) \ll h/2q$. De aici se obține dimensiunea critică a joncțiunii după direcția y , sub a cărei valoare efectul de ecranare este neglijabil. Ea se notează cu λ_j și se numește adâncime de pătrundere Josephson

$$s = \lambda_j = \sqrt{\frac{\hbar}{2q} \frac{1}{J_0 d \mu_0}}, \quad d = 2\lambda + l \quad (2.6)$$

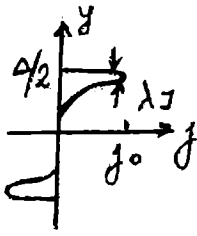


Fig. 6.7

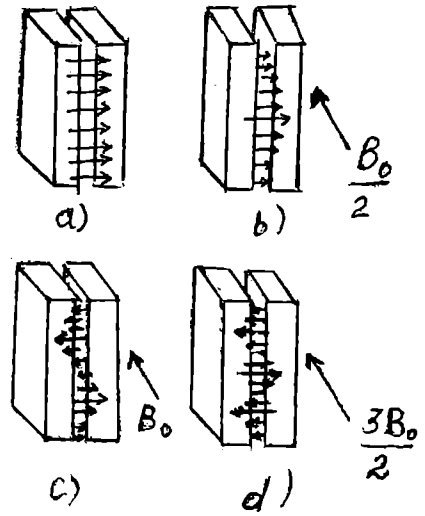


Fig. 6.8

μ_0 este permeabilitatea și λ este adâncimea de penetrație London. Pentru joncțiunile tipice, λ_J este de ordinul milimetrilor. Atunci când $s \gg \lambda_J$, la câmp magnetic slab, trece curent numai pe la margini, pe distanța λ_J , Fig. 6.7, iar curentul net este egal cu zero. Cu creșterea câmpului magnetic crește curentul indus, prin inducție Faraday, care ecranează aria internă a joncțiunii. Însă, deoarece intensitatea curentului este limitată la valoarea maximă (critică) J_0 , peste o anumită valoare critică a câmpului magnetic acesta nu mai este ecranat și începe să pătrundă în interiorul joncțiunii. Valoarea critică a câmpului B_c se obține pentru valoarea critică a curentului I_0 , astfel că se poate scrie

$$B_c \lambda s = (\text{Inductanța}) \times I_0 = \frac{\mu_0 \lambda s}{L} \lambda_J J_0 L$$

de unde se obține $B_c = (h/2q)(1/\lambda \lambda_J)$. Pentru joncțiunile uzuale, $B_c = 1 G$. În deducerea acestei relații am considerat $1 \ll \lambda$, astfel că $d \cong 2\lambda$. Să considerăm acum cazul când prin joncțiune trece un curent finit. Densitatea de curent Josephson este dată de expresia

$$J = J_0 \sin\left(\theta_2 - \theta_1 + \frac{2qd}{\hbar} By\right) \quad (2.7)$$

unde am notat $d=2\lambda+1$. Dacă prin joncțiune trece un curent finit, atunci în absența câmpului magnetic, curentul are aceeași valoare în orice punct al joncțiunii, ceea ce se reprezintă prin săgeți de aceeași mărime în Fig. 6.8 a; el are valoarea maximă (curentul critic) când $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$. În prezența câmpului magnetic, la $y=0$, unde diferența de fază datorată câmpului magnetic este egală cu zero, curentul are aceeași valoare ca în Fig. 6.8 a și deci, $\theta_2 - \theta_1 \neq 0$. Notând $B_0 = (1/ds)(h/2q)$, pentru valoarea câmpului $B = B_0/2$, curentul este zero la marginile joncțiunii (Fig. 6.8 b) și valoarea curentului total este mai mică decât în absența câmpului magnetic. Pentru $B = B_0$ curentul își schimbă o dată sensul în interiorul joncțiunii (Fig. 6.8 c), astfel încât curentul net prin joncțiune este zero. Pentru $B = 3B_0/2$ (Fig. 6.8 d), curentul își schimbă de două ori sensul în interiorul joncțiunii, însă, de această dată, trece un curent net prin joncțiune, dar mai mic decât în cazul $B = B_0/2$. În general, pentru $B = nB_0$, curentul total este nul pentru n întreg și are valoare maximă pentru n semiîntreg; valoarea maximă a curentului scade cu creșterea lui n . Se pune întrebarea, cum variază curentul total pentru valorile lui n cuprinse între k și $k+1$ (k întreg). Am văzut că pentru $n+k$, curentul este nul. Cu creșterea lui n de la k la $k+1/2$, curentul crește, la $k+1/2$ atinge valoarea maximă din domeniul $k < n < k+1$ și mai departe cu creșterea lui k curentul scade, până când la $n=k+1$ capătă din nou valoarea zero. Dacă se măsoară valoarea curentului critic prin joncțiune în prezența câmpului magnetic, atunci în acord cu cele de mai sus, acesta va prezenta fenomenul de difracție în funcție de câmpul magnetic. Un asemenea

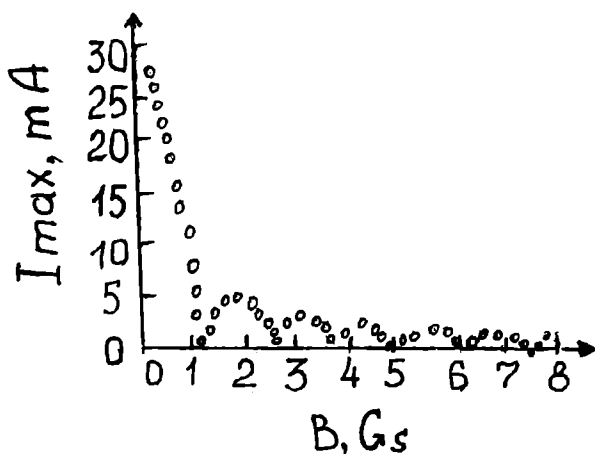


Fig. 6.9.

curentul este zero și pentru un număr semiîntreg, curentul este maxim. De asemenea, curentul este maxim pentru $B=0$, unde are valoarea cea mai mare. Din definiția lui $B_0 = (1/ds)(h/2q)$ rezultă că fluxul prin joncțiune $\Phi_j = dsB_0 = h/2q$, este egal cu o cuantă de flux magnetic. Deci, se poate spune că ori de câte ori joncțiunea conține un număr întreg de unități de flux, curentul total prin joncțiune este nul.

Curentul total prin joncțiune se obține efectuând integrala densității de curent (ec. 2.7) pe aria joncțiunii

$$I = J_0 L \int_{-s/2}^{s/2} \sin \left[\theta_2 - \theta_1 + \frac{2qd}{\hbar} By \right] dy$$

și rezultă

$$I = I_0 \frac{\sin \Phi}{\Phi} \sin(\theta_2 - \theta_1); \quad \Phi = dsB(q/\hbar) = (q/\hbar)\Phi_j$$

Curentul maxim se obține pentru $\theta_2 - \theta_1 = \pi/2$, care corespunde curentului critic în absența câmpului magnetic ($I_{max} = I_0$), iar $I_{max} = I_0 \sin \Phi/\Phi$ este valoarea curentului critic al joncțiunii în prezența câmpului magnetic și este reprezentat în Fig. 6.9. Aceste relații au fost deduse în presupunerea că dimensiunea s a joncțiunii este mult mai mică decât adâncimea d de penetrație Josephson λ_j . În caz contrar curentul Josephson generează și el un câmp magnetic, care trebuie luat în considerare. Dacă în relația (2.8) notăm constanta de flux $\Phi_0 = h/2q$, se poate scrie $\Phi = \pi\Phi_j/\Phi_0$.

În încheierea acestui paragraf prezentăm o deducere matematică a expresiei (2.6) a adâncimii de pătrundere Josephson λ_j . În acest scop presupunem că nu se aplică câmp magnetic din exterior și că prin joncțiune trece un curent J . Acest curent generează un câmp magnetic $B'(y)$ conform ecuației lui Maxwell

$$\nabla \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{J}(y)$$

Această ecuație este scrisă în condiții staționare, când $d\epsilon/dt = 0$. Dacă presupunem că joncțiunea este infinit de lungă în direcția z astfel încât toate derivatele după z vor fi zero, ecuația de mai sus se simplifică

$$\frac{\partial B'}{\partial y} = \mu_0 J \quad (2.9)$$

Diferențiind ecuația (2.3) de două ori în raport cu y , obținem

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{2\pi(l+2\lambda)}{\Phi_0} \frac{\partial B'(y)}{\partial y}$$

rezultat experimental este reprezentat în Fig. 6.9 pentru o joncțiune Sn-I-Sn (I reprezintă stratul izolator). Pentru a se obține acest grafic, se trasează caracteristica I-V pentru fiecare valoare a câmpului magnetic și se notează valoarea curentului la care caracteristica comută. Acestea sunt valorile curentului critic pentru valorile date ale lui B și reprezintă puncte pe Fig. 6.9. Există anumite valori ale lui B , depinzând de dimensiunile joncțiunii, pentru care curentul critic este nul. În cazul reprezentat în Fig. 6.9, dimensiunea joncțiunii după direcția y este $s=0,25$ mm și $B_0=1,25$ G. Se observă că pentru un număr întreg de B_0 (1,25 G),

Substituind (2.9) în această ecuație se obține

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{2\pi(l + 2\lambda)}{\Phi_0} \mu_0 J_0 \sin \theta \quad (2.10)$$

unde am utilizat expresia curentului continuu Josephson în funcție de diferența de fază. Notând

$$\lambda_J = \left[\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 J_0 (l + 2\lambda)} \right]^{1/2}$$

și având în vedere că pentru $\theta \ll 1$ termenul $\sin \theta \approx \theta$, ec. (2.10) devine

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\theta}{\lambda_J^2}$$

care are soluția

$$\theta(|y|) = \theta(s/2) \exp\left[(s/2 - |y|) / \lambda_J \right]$$

Deci faza scade exponențial de la marginile joncțiunii către centru (în direcția y) cu lungimea caracteristică λ_J . Datorită simetriei $\theta(x) = \theta(-x)$. De asemenea curentul Josephson are o dependență spațială similară tinzând să ecraneze interiorul joncțiunii față de câmpul magnetic. Prin urmare λ_J este o măsură a distanței până la care curentul Josephson continuu este confinat față de margini. Ea apare ca o consecință a curentului de ecranare datorat câmpului magnetic generat de către curentul de perechi.

6.3. Interferometrul cuantic cu supraconductori

Considerăm două joncțiuni Josephson conectate în paralel așa cum se reprezintă în Fig. 6.10. Acesta este un dispozitiv de interferență cuantică cu supraconductori (DICS) consacrat în literatura străină sub numele de SQUID (Superconducting Quantum Interference Device). Notând cu I_1 curentul care trece prin joncțiunea 1 și cu I_2 curentul care trece prin joncțiunea 2, curentul total $I = I_1 + I_2$. Dacă joncțiunile sunt identice $I_1 = I_2$ și având în vedere relația (2.8) se poate scrie

$$I = I_0 \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left[\sin(\theta_a - \theta_b) + \sin(\theta_c - \theta_d) \right] \quad (3.1)$$

iar curentul maxim se obține pentru $\theta_a - \theta_b = \theta_c - \theta_d = \pi/2$ și a are valoarea $I = 2I_0$. Relația (3.1) se mai poate scrie

$$I = 2I_0 \frac{\sin \Phi}{\Phi} \cos \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_c + \theta_d - \theta_b) \sin \frac{1}{2}(\theta_a - \theta_b + \theta_c - \theta_d) \quad (3.2)$$

În absența câmpului magnetic, dacă nu există modulare a vitezei perechilor în cele două fire supraconductoare care conectează cele două joncțiuni, avem $\theta_a - \theta_c = \theta_b - \theta_d = 0$. În prezența câmpului magnetic

$$\theta_a - \theta_c = \frac{2q}{\hbar} \int_c^a \vec{A} d\vec{l}; \quad \theta_b - \theta_d = \frac{2q}{\hbar} \int_d^b \vec{A} d\vec{l} \quad (3.3)$$

Dacă lărgimile joncțiunilor sunt mici în comparație cu lungimea interferometrului, atunci

$$\theta_a - \theta_c + \theta_d - \theta_b = \frac{2q}{\hbar} \oint \vec{A} d\vec{l} \quad (3.4)$$

unde \oint reprezintă integrală pe circuitul închis al interferometrului (Fig. 6. 10). Când prin cele două joncțiuni

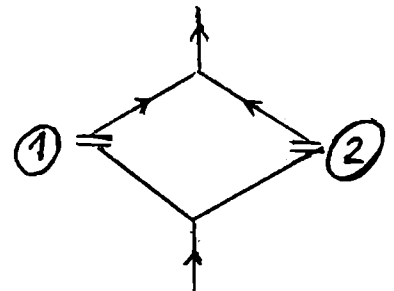


Fig. 6.10

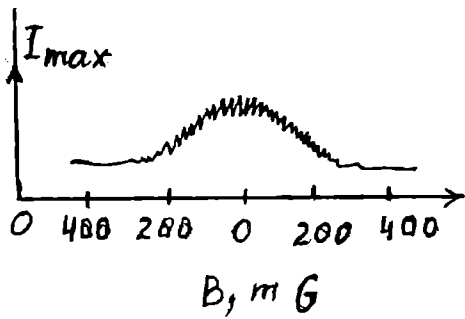


Fig. 6.11

curentul este maxim ($\theta_a - \theta_b = \theta_c - \theta_d = \pi/2$) din relațiile (3.2) și (3.4) rezultă pentru valoarea curentului maxim prin interferometru în prezența câmpului magnetic expresia

$$I_{\max} = 2I_0 \left| \frac{\sin \Phi}{\Phi} \right| \cos \frac{q}{\hbar} \int \vec{A} d\vec{l} \quad (3.5)$$

unde $\int \vec{A} d\vec{l} = \Phi_T$ este fluxul închis de interferometru în cazul când câmpul magnetic este aplicat perpendicular pe suprafața sa; $\int = (2q/\hbar) \Phi_J = \pi \Phi_J / \Phi_0$ unde Φ_J este

fluxul închis de către o joncțiune, iar Φ_0 este cuanta de flux magnetic $\Phi_0 = h/2q$. Astfel, argumentul funcției cosinus mai poate fi scris $(q/\hbar) \int \vec{A} d\vec{l} = \pi \Phi_T / \Phi_0$. Astfel, curentul prin interferometru este modulat de către efectul de difracție prin $\sin(\pi \Phi / \Phi_0) / (\pi \Phi / \Phi_0)$, iar de către efectul de interferență prin $\cos(\pi \Phi_T / \Phi_0)$. Deoarece aria interferometrului poate fi făcută mult mai mare decât aria unei joncțiuni, perioada cosinusului poate fi făcută mult mai mică decât perioada sinusului. Un rezultat experimental este prezentat în fig. 6.11. Așa cum reiese și din fig. 6.9 perioada sinusului este de ordinul 1G. Perioada cosinusului poate fi făcută de ordinul 10^{-10} G și prin urmare cu un interferometru pot fi detectate și măsurate câmpuri magnetice de valori chiar mai mici. Spectrul de interferență reprezentat în Fig. 6.11 este centrat pe maximul de difracție al joncțiunii cuprins în domeniul ± 350 mG.

6.4. Efectul Josephson în curent alternativ

Așa cum am observat în § 6.1 curentul Josephson alternativ poate fi pus în evidență dacă stimulăm tercierea perechilor dintr-o parte în alta în număr mai mare decât în sens contrar. Acesta este efectul de emisie stimulată cunoscut la laseri. Efectul poate avea loc atât în prezența cât și în absența unui câmp de radiație. În ambele cazuri se obțin trepte de curent la tensiuni $V = n(hv/2q)$, unde n este număr întreg. Vom analiza pe rând aceste două cazuri.

6.4.1. Prezența câmpului de radiație

Prezența unui câmp de radiație monocromatică într-un sistem care se află la echilibru conduce la creșterea emisiei de fotoni de aceeași energie cu a radiației (dacă sistemul este virtual capabil de a emite asemenea fotoni). Prin urmare, dacă o joncțiune Josephson este polarizată la o tensiune V atunci într-un câmp de radiație de energie $h\nu = 2qV$ se va stimula emisia de fotoni de energie $h\nu$ ceea ce înseamnă că numărul de perechi care trec de la stânga la dreapta și emit fotoni (Fig. 6.4b) va fi mai mare decât numărul de perechi care trec de la dreapta la stânga și absorb fotoni (Fig. 6.4b) și deci prin joncțiune la o tensiune dată va trece un curent continuu net. Ideea folosirii radiației de microunde pentru a se pune în evidență efectul Josephson în curent alternativ a fost emisă de însuși Josephson și realizată experimental de către Shapiro. Un asemenea rezultat experimental este reprezentat în Fig. 6.12. Curba cea mai de jos este obținută în absența câmpului de microunde și se datorează tunelării uniparticulă. Celelalte trei curbe sunt trasate pentru trei valori ale intensității radiației de microunde care are $\nu = 10$ GHz. În regiunea $qV < 2\Delta$ curentul crește cu creșterea intensității radiației în timp ce în regiunea $qV > 2\Delta$, scade. Acesta este un fenomen de redresare a semnalului de microunde de către caracteristica neliniară a joncțiunii. Interesantă este apariția unor trepte de curent induse de microunde; pentru claritate, în stânga sus pe figură este reprezentată la scară mărită o porțiune dintr-o curbă. Treptele de

curent apar la tensiuni $V_n = nhv/2q$ unde v este frecvența radiației și n reprezintă numărul de fotoni emiși sau absorbiți. Dacă se consideră că puterea radiației de microunde adaugă o componentă alternativă, $v_1 \cos(\omega_1 t + \theta_0)$ la tensiunea continuă V_0 , atunci tensiunea totală pe joncțiune este

$$= V_0 + v_1 \cos(\omega t + \theta_0) \quad (4.1)$$

Introducând această expresie în ecuația (1.5) și integrând se găsește o dependență de timp a fazei joncțiunii de forma

$$\theta(t) = \theta_2(t) - \theta_1(t) = (2qV_0 / \hbar)t + (2qv_1 / \hbar\omega) \sin \omega t + \theta_0 \quad (4.2)$$

unde θ_0 este o constantă, iar densitatea de curent Josephson este dată de expresia

$$J(t) = J_c \sin \left[\frac{2qV_0 t}{\hbar} + \frac{2qv_1}{\hbar\omega} \sin \omega t + \theta_0 \right] \quad (4.3)$$

Notăm $2qV_0/\hbar = \omega_0$. Expresia (4.3) poate fi scrisă

$$J(t) = J_c \left[\sin(\omega t + \theta_0) \cos(\gamma \sin \omega t) + \cos(\omega_0 t + \theta_0) \sin(\gamma \sin \omega t) \right]$$

unde

$$\gamma = \frac{2qv_1}{\hbar\omega}$$

Dezvoltăm funcțiile $\cos(\gamma \sin \omega t)$ și $\sin(\gamma \sin \omega t)$ în seria Fourier

$$\cos(\gamma \sin \omega t) = J_0(\gamma) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(\gamma) \cos(2k\omega t)$$

$$\sin(\gamma \sin \omega t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(\gamma) \cos[(2k+1)\omega t]$$

unde $J_k(x)$ sunt funcțiile Bessel de ordinul k . Expresia curentului devine

$$J(t) = J_c \left\{ J_0(\gamma) \sin(\omega_0 t + \theta_0) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(\gamma) \cos(2k\omega t) \times \sin(\omega_0 t + \theta_0) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(\gamma) \sin[(2k+1)\omega t] \cos(\omega_0 t + \theta_0) \right\}$$

Utilizând relațiile trigonometrice se obține

$$J(t) = J_c \left\{ J_0(\lambda) \sin(\omega_0 t + \theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\gamma) \left[\sin[(n\omega + \omega_0)t + \theta_0] + (-1)^n \sin[(n\omega - \omega_0)t + \theta_0] \right] \right\} \quad (4.4)$$

unde J_n este funcția Bessel de ordinul n . Atunci când frecvența Josephson $\omega_0 = 2qV_0/\hbar$ este egală cu un multiplu întreg al frecvenței de microunde, $n\omega$, adică $\omega_0 = \pm n\omega$, media temporală a lui $J(t)$ este diferită de zero, adică există o componentă continuă a curentului Josephson

$$J_{cc} = (-1)^n J_c J_n \left(\frac{2qv_1}{\hbar\omega} \right) \sin \theta_0 \quad (4.5)$$

de unde rezultă o serie de vârfuri în curentul continuu la tensiunile $V_n = \pm n\hbar\omega/2q$ și deci rezistența negativă. Însă, deoarece în practică se utilizează o sursă de curent (adică de impedanță mare) în loc de vârfuri vor fi induse trepte de curent fără regiuni de rezistență negativă (Fig. 6.12). Relația (4.1) a fost scrisă în presupunerea că atât curentul continuu cât și microundele sunt obținute de la surse de impedanță mică. Din relația (4.5) se observă că densitatea de curent a treptei n poate varia continuu pe domeniul cuprins între $\pm |J_c J_n(2qv_1/\hbar\omega)|$ la tensiunea constantă $n\hbar\omega/2q$ și faza variază de la $-\pi/2$ la $+\pi/2$, ceea ce arată că joncțiunea emite și absoarbe radiație. Valoarea pozitivă a treptei de curent corespunde tunelării perechilor cu emisie de fotoni, iar valoarea negativă corespunde tunelării cu absorbție de fotoni. Dimensiunile treptelor cresc cu

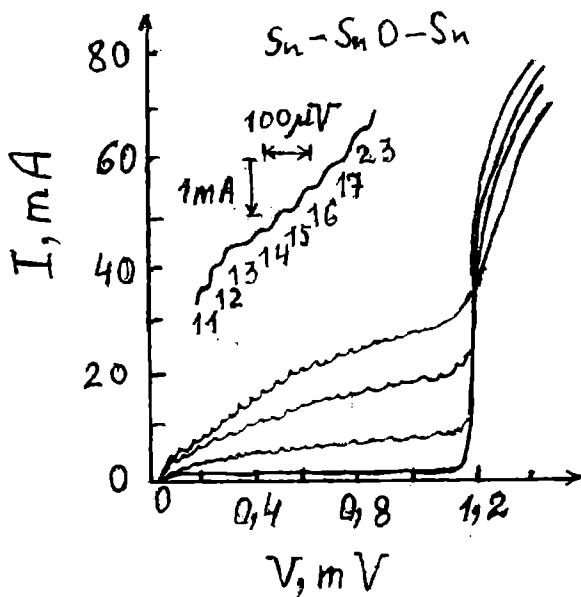


Fig. 6.12

6.4.2. Trepte de curent autoinduse. Emisia de radiație.

O a doua cale de a observa curentul Josephson în curent alternativ constă în obținerea treptelor de curent autoinduse (în absența unui câmp de radiație extern) când are loc o emisie de radiație. Fenomenul este analog cu excitarea modurilor electromagnetice într-un laser cu joncțiuni semiconductoare. Pentru ca o joncțiune semiconductoare în care are loc emisia radiană să devină generator trebuie să i se asigure o reacție, adică o parte din energia radiantă să rămână în sistem. Acest lucru se realizează printr-o construcție specială a joncțiunii astfel că o dimensiune a ei pe o direcție din planul joncțiunii, perpendiculară pe direcția de transport al curentului electric, să fie multiplu întreg de $\lambda/2$ (λ este lungimea de undă a radiației emise). Un asemenea proces de autostimulare se poate realiza și în joncțiunea Josephson, unde apar moduri de undă la frecvențele determinate de egalarea unei dimensiuni a joncțiunii (dimensiunea în planul joncțiunii perpendiculară pe direcția de transport al curentului electric - în Fig. 6.5., dimensiunea s după direcția y) cu un multiplu întreg de jumătăți de lungime de undă. În prezența câmpului magnetic amplitudinea curentului Josephson variază sinusoidal de-a lungul joncțiunii după direcția y , așa cum se reprezintă în fig. 6.8. Ca rezultat amplitudinea curentului Josephson alternativ are forma unei unde cu lungimea de undă determinată de câmpul magnetic aplicat. Am văzut că dacă se aplică pe joncțiune o tensiune continuă faza variază în timp (ec. 4.2), iar dacă se aplică un câmp magnetic uniform, faza prezintă dependență spațială (ec. 2.3). Dacă se aplică în același timp și tensiune V_0 și câmp magnetic B , faza joncțiunii este

$$\theta = \omega_0 t + ky + \theta_0; \quad \omega_0 = \frac{2qV_0}{\hbar}; \quad k = \left(\frac{2qd}{\hbar} \right) B \quad (4.6)$$

Ca urmare, densitatea de curent Josephson

$$J = J_0 \sin(\omega_0 t + ky + \theta_0)$$

este o undă cu viteza de fază $\bar{c} = \omega_0/k = V_0/Bd$. Când această viteză de fază coincide cu viteza de fază a modurilor electromagnetice care pot fi excitate în joncțiune are loc excitarea puternică a acestor moduri, adică emisia de radiație. Cu alte cuvinte aceasta se întâmplă când lungimea de undă $\lambda = \bar{c}/\nu$ corespunde unei lungimi de undă caracteristică a joncțiunii, ceea ce se obține prin

creșterea intensității radiației de microunde. Comportarea ca o funcție Bessel a amplitudinii treptelor de curent nu este satisfăcută foarte bine în structurile supraconductor-oxid-supraconductor ci în structurile cu contact punctiform deoarece în acest ultim caz se face mai ușor cuplajul între unda electromagnetică și ghidul de unde [2]. Treptele de curent au fost puse în evidență și în alte legături slabe unde s-au observat trepte și la subarmonice, adică la tensiuni $V_0 = (n/m)(\hbar\nu/2q)$. Efectele subarmonice apar când este permisă emisia sau absorbția a n fotoni de către m perechi.

ajustarea lui B . Modurile electromagnetice vor fi excitate la tensiuni determinate de relația $s = n(\lambda/2)$, care au valorile

$$V_n = n \left(\frac{\pi \hbar}{2qs} \right) \quad (4.7)$$

La aceste tensiuni apar trepte în caracteristica I-V așa cum se observă în Fig. 6.13. O asemenea curbă se trasează utilizând o sursă de curent continuu variabil. Rolul câmpului magnetic extern este de a controla cuplajul curentului Josephson cu modurile electromagnetice. Cuplajul este optim atunci când variația spațială a curentului Josephson (obținută prin ajustarea valorii câmpului

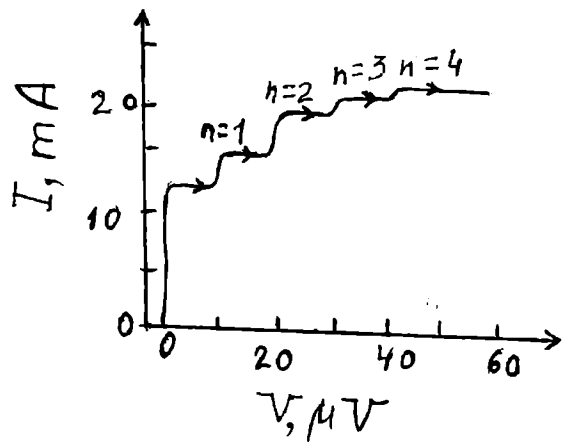


Fig. 6.13

magnetic) coincide cu variația spațială a câmpului electromagnetic al unui mod rezonant. Puterea radiată este foarte mică; pentru joncțiunile obișnuite este de ordinul 10^{-11} W. Într-un laser cu joncțiune asemănătoare nu este necesară modularea spațială a curentului în joncțiune. Probabil că în joncțiunea Josephson acest lucru este necesar deoarece perechile Cooper sunt particule Bose (ca și fotonii). Una din aplicațiile evidente ale efectului Josephson în curent alternativ este generarea de radiație coerentă în domeniul 5 - 100 GHz. Pentru o radiație de 10 GHz lărgimea liniei de radiație este mai mică decât 1 kHz. De asemenea, joncțiunea Josephson se folosește pentru determinarea caracteristicilor radiațiilor din domeniul microundelor și infraroșu îndepărtat, fiind posibilă și măsurarea frecvenței acestora deoarece treptele de curent apar la o tensiune legată de frecvență prin relația $2qV = nhv$. Această relație dă posibilitatea să se măsoare q/h cu o precizie mult mai mare decât prin orice altă metodă cunoscută până în prezent și de asemenea să se stabilească etaloane de tensiune electrică pe baza etaloanelor lungimii de unde a radiației. Înainte de a prezenta rezultatele teoretice ale dependenței amplitudinii treptelor de tensiune și de câmpul magnetic în acest caz, vom prezenta joncțiunea Josephson ca linie de transmisie.

6.4.3. Joncțiunea Josepson ca linie de transmisie.

O joncțiune tunel, prezentată în fig. 6.14, formată din două straturi subțiri supraconductoare, separate de un strat dielectric subțire poate fi considerată ca o linie de transmisie de unde electromagnetice. Câmpul electric este confinat în interiorul stratului de oxid de grosime l . Câmpul magnetic, datorită penetrației în supraconductori, ocupă o regiune de grosime mai mare $d = 1 + \lambda_1 + \lambda_2$ (unde este adâncimea de penetrație London). Datorită acestei configurații

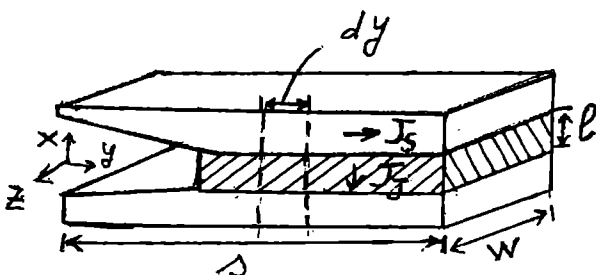


Fig. 6.14

a câmpului viteza de propagare a undei este mai mică decât într-o linie de transmisie cu straturi nesupraconductoare. Presupunem câmpul electric orientat în direcția x , câmpul magnetic în direcția z și că ambele sunt uniforme în direcția z . Densitatea de curent are o componentă diferită de zero pe direcția y în regiunile supraconductoare și o

componentă diferită de zero pe direcția x în regiunea stratului de oxid (curent uniparticulă și curent Josephson). Scriem ecuațiile lui Maxwell

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{j} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}$$

care în condițiile simplificatoare de mai sus devin

$$-\frac{\partial}{\partial y} H_z(x, y, t) = \varepsilon \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + j_x(y, t) \quad (4.8a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} H_z(x, y, t) = j_j(y, t) \quad (4.8b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x(y, t)}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial t} \quad (4.8c)$$

unde ε este permitivitatea și μ este permeabilitatea mediului. Integrăm ambii membri ai ec. (4.8c) pe o suprafață din planul x, y delimitată de două linii drepte separate prin distanța dy și paralele cu axa x

$$\int \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} d\sigma = -\mu \int \frac{\partial H_z}{\partial t} d\sigma$$

Deoarece ε_x este confinat în regiunea stratului de oxid și presupunând că nu depinde de x în această regiune, avem

$$-\frac{\partial}{\partial y} \varepsilon(y, t) l dy = \mu dy \left[\frac{\partial}{\partial t} H(y, t) l + \int_{l/2}^{\infty} dx \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial t} + \int_{l/2}^{\infty} dx \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial t} \right]$$

Utilizând expresia adâncimii de penetrație a câmpului magnetic

$$\lambda_{1,2} = \frac{l}{H(y, t)} \int_{l/2}^{\infty} dx H_z(x, y, t)$$

expresia de mai sus se poate scrie

$$l \frac{\partial \varepsilon(y, t)}{\partial y} = -\mu d \frac{\partial H(y, t)}{\partial t} \quad (4.9)$$

unde

$$d = l + \lambda_1 + \lambda_2 \quad (4.10)$$

Integrăm acum ec. (4.8b) pe o suprafață situată într-un plan perpendicular pe axa y care este o bandă de lățime L extinsă în direcția x de la 0 la ∞ . Se obține

$$\int_{-w/2}^{w/2} dz \int_0^{\infty} dx \frac{\partial H_z(x, y, t)}{\partial x} = \int d\sigma j_j(y, t)$$

sau

$$W \int_0^{\infty} dx \frac{\partial H_z}{\partial x} = I(y, t)$$

În final

$$H(y, t) = \frac{1}{W} I(y, t) \quad (4.11)$$

$I(y, t)$ este curentul în punctul y în electrodul supraconductor. Din (4.9) și (4.11) rezultă

$$\frac{\partial V(y, t)}{\partial y} = -\frac{\mu d}{W} \frac{\partial I(y, t)}{\partial t} \quad (4.12)$$

unde $V(y, t) = 1(y, t)$ este căderea de tensiune pe joncțiune. Substituind (4.11) în (4.8a) se obține

$$\frac{\partial I(y, t)}{\partial y} = -\frac{\epsilon W}{l} \frac{\partial V(y, t)}{\partial t} - W j_x(y, t) \quad (4.13)$$

Neglijând curentul prin stratul de oxid ($j_x = 0$) și definind capacitatea și inductanța pe unitatea de lungime

$$C' = \frac{\epsilon W}{l}, \quad L' = \mu \frac{d}{W}$$

ecuațiile (4.12) și (4.13) devin

$$\frac{\partial V(y, t)}{\partial y} = -L' \frac{\partial I(y, t)}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial I(y, t)}{\partial y} = -C' \frac{\partial V(y, t)}{\partial t}$$

Ele pot fi interpretate ca relațiile curent-tensiune ale unei linii de transmisie fără pierderi. Viteza undei într-o asemenea linie de transmisie este dată de expresia

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{C'L'}} = c \sqrt{\frac{l}{\epsilon_r d}} \quad (4.15)$$

unde c este viteza luminii în vid. Pentru $l = 2A$, $d = 1000 A$, $\epsilon_r = 4$ se obține $\bar{c} = 0,05 c$. Dacă grosimea unuia din straturile subțiri supraconductoare, δ , este comparabilă cu adâncimea de penetrație London expresia (4.15) se modifică

$$\bar{c} = c \left\{ \frac{l}{\epsilon_r (l + \lambda_1 + \lambda_2 \coth(\delta / \lambda_2))} \right\}^{1/2}$$

6.4.4. Moduri rezonante în joncțiunea cu factor de calitate Q mic.

Calculul treptelor de curent auroinduse

O joncțiune tunel de lungime finită în direcția de propagare a undelor se comportă ca o linie de transmisie rezonantă datorită reflexiei undelor la terminalele sale. Apar în aceasta moduri rezonante ale câmpului electromagnetic. Pentru linia de transmisie la circuit deschis tensiune undei staționare a modului este dată de expresia

$$v_n(y, t) = v_1 e^{i\omega_n t} \cos \frac{n\pi y}{s} \quad (4.16)$$

unde s este lungimea joncțiunii și

$$\omega_n = \frac{n\pi \bar{c}}{s} \quad (4.17)$$

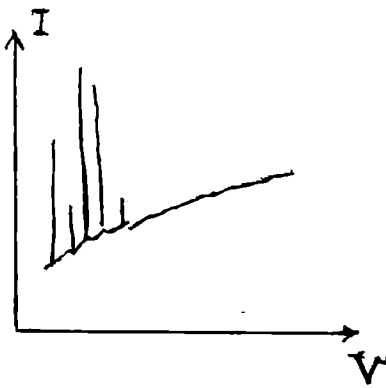


Fig. 6.15

Dacă prin probă trece un curent Josephson la o tensiune finită atunci se generează în joncțiune radiație electromagnetică de frecvență $\omega = 2qV/\hbar$. Această radiație excită modurile rezonante ale cavității, care interacționează cu curentul Josephson. Când frecvența Josephson ($2qV/\hbar$) este egală cu frecvența ω_n a unui mod al joncțiunii, apare un curent de frecvență zero. Așa cum am discutat în § 6.4.2 și cum vom vedea și în cele ce urmează pentru a există o interacțiune mai puternică (cuplaj strâns) trebuie să realizăm o modulare spațială a curentului Josephson în direcția y . Pentru joncțiuni de dimensiuni mici ($s \ll \lambda_j$) această modulare se obține numai prin aplicarea unui câmp magnetic perpendicular pe această

direcție. Prin urmare în câmp magnetic extern vor exista singularități în caracteristica $I - V$ la tensiunile date de relația (4.7).

$$V_n = \frac{\hbar}{2q} \omega_n = \frac{\hbar}{2q} \frac{\pi c}{s} n$$

Aceste singularități au fost puse în evidență pentru prima dată de Fiske [3]. Însă deoarece joncțiunea este polarizată de la sursă de curent aceste singularități apar în general sub forma unor trepte în caracteristica $I - V$ (Fig. 6.13). Dacă peste sursa de curent continuu variabil se suprapune o sursă de curent alternativ de joasă frecvență pentru trasarea caracteristicii la osciloscop se obține pe ecran o caracteristică de forma reprezentată în Fig. 6.15 [G8]. Fiecare singularitate s-a obținut prin ajustarea curentului continuu. Acest procedeu permite o detecție mai bună a singularităților, independent de localizarea și de amplitudinea lor relativă. În continuare prezentăm calculul amplitudinii treptelor, dependența acestora de tensiune și de câmpul magnetic. Presupunem o joncțiune unidimensională simplă ca cea reprezentată în Fig. 6.14 de dimensiuni mici și care are amplitudinea unei trepte de curent mai mică decât curentul maxim Josephson [4, 5]. Presupunem că prin barieră trece un curent astfel că ec. (4.16) sunt de forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(y,t)}{\partial y} &= -L' \frac{\partial I(y,t)}{\partial y} \\ \frac{\partial I(y,t)}{\partial y} &= -C' \frac{\partial V(y,t)}{\partial y} - W j_x(y,t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Derivând ambii membri ai primei ecuații în raport cu y și ținând cont de cea de a doua ecuație se obține o ecuație de ordinul doi în V

$$\frac{\partial^2 V(y,t)}{\partial y^2} = L' C' \frac{\partial^2 V(y,t)}{\partial t^2} + L' W \frac{\partial j_x(y,t)}{\partial t} \quad (4.19)$$

Utilizând (4.15) și definiția lui L' ec. (4.19) devine

$$\frac{\partial^2 V(y,t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V(y,t)}{\partial t^2} = \mu d \frac{\partial j_x(y,t)}{\partial t} \quad (4.20)$$

Presupunem

$$(y,t) = V_0 + v(y,t) \quad (4.21)$$

unde $v(y, t) \ll V_0$. Densitatea curentului total este egală cu suma dintre densitatea de curent Josephson și densitatea de curent de uniparticule $j_x = j_J + j_u$. Curentul de cuasiparticule este dat de expresia

$$j_u = \frac{1}{R(V_0)} V(y, t) \quad (4.22)$$

$R(V_0) = 1/\sigma_0(V_0)$ este rezistența joncțiunii tunel dependentă (neliniară) de tensiune. Curentul Josephson este dat de expresia

$$J_J = J_c \sin \theta(y, t) \quad (4.23)$$

unde $\theta(y, t)$ este dată de expresia (4.6)

$$\begin{aligned} \theta(y, t) &= \omega_0 t + ky + \theta_0(y, t) \\ \omega_0 &= \frac{2q}{\hbar} V_0, \quad k = \frac{2qd}{\hbar} B_a = \frac{2\pi d}{\Phi_0} B_a \end{aligned}$$

unde B_a este câmpul magnetic constant aplicat din exterior. Între $\theta_0(y, t)$ și $v(y, t)$ există relația

$$v(y, t) = \frac{\hbar}{2q} \frac{\partial \theta(y, t)}{\partial t} \quad (4.24)$$

Substituind în (4.20) relațiile (4.21), (4.22), (4.23) și (4.24) se obține următoarea ecuație pentru θ_0

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial y^2} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial t^2} - \mu \frac{d}{R} \frac{\partial \theta_0(y, t)}{\partial t} \right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2q}{\hbar} \mu d J_c \sin \theta \right) \quad (4.25)$$

care poate fi scrisă (efectuând integrarea după timp)

$$\frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{CR} \frac{\partial \theta_0(y, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin \theta \quad (4.26)$$

unde λ_J este adâncimea de penetrație Josephson (3.11) și C este capacitatea pe unitatea de arie. S-a presupus constanta de integrare egală cu zero deoarece suntem interesați în soluția asimptotică ($t \rightarrow \infty$) a ec. (4.26) care este independentă de condițiile inițiale datorită prezenței termenului de atenuare. Pentru a deduce expresia lui $\theta_0(y, t)$ din ec. (4.26) considerăm în primă aproximație θ_0 ca o mică perturbație și-l neglijăm în termenul din dreapta a acestei ecuații. Notând $\beta = 1/RC$, în această aproximație ec. (4.26) devine

$$\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 \theta_0}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \theta_0}{\partial t} \right) = \frac{1}{\lambda_J^2} \sin(\omega_0 t + ky) \quad (4.27)$$

$\theta_0(y, t)$ este direct legată de $v(y, t)$ astfel că poate fi dezvoltată în serie în funcție de tensiunea modurilor normale (4.16)

$$\theta_0(y, t) = I_m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{i\omega_n t} \cos \frac{n\pi y}{s} \right\} \quad (4.28)$$

unde g_n sunt numere complexe. Această alegere a dependenței de y impune condițiile la limită [6]

$$\left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right)_0 = \left(\frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right)_s = 0 \quad (4.29)$$

Din relația dintre diferența de fază θ și câmpul magnetic

$$B(y) = \frac{\hbar}{2qd} \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.30)$$

rezultă că ec. (4.30) implică la frontiere condiția: câmpul magnetic este egal cu câmpul magnetic aplicat B_a . Prin urmare nu se ia în considerare contribuția câmpului magnetic autoindus ceea ce este justificat de lungimea mică a joncțiunii $s \ll \lambda_J$. Pentru a găsi θ_0 introducem (4.28) în (4.27)

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{i\omega_n t} \cos \frac{n\pi y}{s} \left\{ -\left(\frac{n\pi}{s}\right)^2 + \frac{\omega_n^2}{\bar{c}^2} - i \frac{\omega_n \beta}{\bar{c}^2} \right\} = \frac{1}{\lambda_J^2} e^{i\omega_0 t} e^{iky} \quad (4.31)$$

unde am utilizat notația exponențială. Presupunem că dependența de timp a lui $\theta_0(y, t)$ este determinată de termenul de forță $\omega_n = \omega_0$ și prin urmare relația (4.31) devine

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{i\omega_n t} \cos \frac{n\pi y}{s} \left\{ \frac{\omega_0^2}{\bar{c}^2} - \left(\frac{n\pi}{s}\right)^2 - j \frac{\omega_0 \beta}{\bar{c}^2} \right\} = \frac{1}{\lambda_J^2} e^{i\omega_0 t} e^{iky}$$

Multiplicăm cu $\cos(n\pi y/s)$ și integrăm. Obținem astfel expresia coeficientului g_n

$$g_n = \frac{\bar{c}^2}{\lambda_J^2 [\omega_0^2 - (n\pi/s)^2 - i\omega_0\beta]} \frac{2}{s} \int_0^s dy \cos \frac{n\pi y}{s} (\cos ky + i \sin ky) \quad (4.32)$$

care poate fi rescrisă

$$g_n = \frac{\bar{c}^2}{\omega^2 \lambda_J^2} \frac{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2 + i / Q_n]}{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2 + 1 / Q_n^2]} [B_n(k) + i C_n(k)]$$

unde $Q_n = \omega_n / \beta = \omega_n C'R$ este factorul de calitate al circuitului care depinde de tensiune prin intermediul lui R, iar coeficienții B_n și C_n sunt definiți prin relațiile

$$\begin{aligned} B_n(k) &= \frac{2}{s} \int_0^s \cos \frac{n\pi y}{s} \cos ky \, dy \\ C_n(k) &= \frac{2}{s} \int_0^s \cos \frac{n\pi y}{s} \sin ky \, dy \end{aligned} \quad (4.33)$$

Părțile reală și imaginară ale lui g_n sunt date de expresiile

$$\begin{aligned} R_e g_n(\omega_0, k) &= \frac{\bar{c}^2 / \omega_0^2 \lambda_J^2}{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2 + 1 / Q_n^2]} \left\{ B_n(k) \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2 \right] - \frac{C_n(k)}{Q_n} \right\} \\ I_m g_n(\omega_0, k) &= \frac{\bar{c}^2 / \omega_0^2 \lambda_J^2}{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2]^2 + \frac{1}{Q_n^2}} \left\{ \frac{B_n(k)}{Q_n} + C_n(k) \left[1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega_0}\right)^2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Curentul Josephson continuu este dat de expresia

$$J_{cc} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{s} \int_0^s dy J_c \sin[\omega_0 t + ky + \theta_0(y, t)] \quad (4.35)$$

Considerând θ_0 ca o perturbație se dezvoltă $\sin \theta_0$ în serie după θ_0 și ne oprim la termenii de prim ordin în θ_0 :

$$\begin{aligned} J_c \sin(\omega_0 t + ky + \theta_0) &= J_c \sin(\omega_0 t + ky) \cos \theta_0(y, t) + J_c \cos(\omega_0 t + ky) \sin \theta_0(y, t) \approx \\ &\approx J_c \sin(\omega_0 t + ky) + J_c \theta_0(y, t) \cos(\omega_0 t + ky) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Substituind această expresie în (4.35) și având în vedere că

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{s} \int_0^s dy J_c \sin(\omega_0 t + ky) = 0$$

se obține

$$\begin{aligned} J_{cc}(V_0, B_a) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{s} \int_0^s J_c \cos(\omega_0 t + ky) \theta_0(y, t) = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{s} \int_0^s dy J_c [\cos \omega_0 t \cos ky - \sin \omega_0 t \sin ky] \theta_0(y, t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

unde

$$\theta_0(y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [R_n g_n(\omega_0, k) \sin \omega_0 t + \text{Im } g_n \cos \omega_0 t] \cos \frac{n\pi y}{s}$$

Se obține relația finală

$$J_{cc}(V_0, B_a) = J_c \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4} B_n(k) \text{Im } g_n(\omega_0, k) - \frac{1}{4} C_n(k) R_n g_n(\omega_0, k) \right\} \quad (4.38)$$

În deducerea acestei expresii s-au utilizat următoarele rezultate

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega_0 t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_0 t \cos \omega_0 t = 0 \end{aligned}$$

Utilizând relațiile (4.34) expresia (4.38) devine

$$J_{cc}(V_0, B_a) = \frac{\bar{c}^2 J_c}{4\omega_0^2 \lambda_J^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/Q_n}{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2]^2 + 1/Q_n^2} [B_n^2(k) + C_n^2(k)] \quad (4.39)$$

Pentru a găsi dependența de câmpul magnetic a lui J_c trebuie să calculăm coeficienții B_n și C_n , dați de expresiile (4.33). Se poate scrie

$$B_n^2 + C_n^2 = \left[\frac{2}{s} \int_0^s dy e^{-iky} \cos \frac{n\pi y}{s} \right]^2 = F_n^2(k) \quad (4.40)$$

Accastă integrală se efectuează cu ușurință și rezultă

$$\begin{aligned} F_n^2(k) &= \left[\frac{4ks \cos(ks/2)}{k^2 s^2 - (n\pi)^2} \right]^2, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ F_n^2(k) &= \left[\frac{4ks \sin(ks/2)}{k^2 s^2 - (n\pi)^2} \right]^2, \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

Utilizând notația $ks = 2\pi\Phi/\Phi_0 = 2\pi\gamma$, aceste relații devin

$$\begin{aligned} F_n^2(\gamma) &= \left[\frac{2\gamma \cos \pi\gamma}{\pi[\gamma^2 - (n/2)^2]} \right]^2, \quad n = 1, 3, 5, \dots \\ F_n^2(\gamma) &= \left[\frac{2\gamma \sin \pi\gamma}{\pi[\gamma^2 - (n/2)^2]} \right]^2, \quad n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned}$$

$$J_{cc}(V_0, B_a) = \frac{\bar{c}^2 J_c}{4\omega_0^2 \lambda_J^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/Q_n}{[1 - (\omega_n / \omega_0)^2]^2 + 1/Q_n^2} F_n^2(\gamma) \quad (4.41)$$

Pentru o valoare dată a câmpului magnetic extern această expresie este o sumă de multe linii Lorentz centrate la tensiunile

$$V_n = -\frac{\hbar}{2q} \omega_n = \frac{\hbar m}{2q} \bar{c} / 2s$$

Amplitudinea maximă a treptei n se obține din (4.41) pentru

$$J_n^M(\gamma) = J_c \left(\frac{s}{\lambda_J} \right)^2 \frac{Q_n}{4\pi^2 n^2} F_n^2(\gamma) \quad (4.42)$$

Indicele n atașat lui Q arată că Q_n este dependent de tensiune prin R(V₀). Relațiile (4.41) și (4.42) sunt valabile în condițiile

$$\left(\frac{s}{\lambda_J} \right)^2 \frac{Q_1}{4\pi^2} \ll 1 \quad (4.43)$$

Ec. (4.40) poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$F_n^2(\gamma) = \left\{ \frac{2\gamma}{\gamma + n/2} \frac{\sin(\pi\gamma - n\pi/2)}{\pi\gamma - n\pi/2} \right\}$$

unde F_n(γ) este exprimat ca produsul a două funcții. În Tabela 7.1 se reprezintă valorile maxime ale lui F_n(γ) pentru n = 1, 2, 3, 4, 5 împreună cu valorile corespunzătoare ale lui γ la care au loc aceste maxime

Tabela 7.1

	n = 1	n = 2	n = 3	n = 4	n = 5
F _n (γ)	1,091	1,031	1,015	1,008	1,006
	0,70	1,15	1,60	2,05	2,55

Pentru valori mari ale lui n, maximul principal tinde să aibă loc la γ = n/2. Așa cum am menționat treptele de curent autoinduse au fost puse în evidență pentru prima dată de către Fiske. Rezultate asemănătoare au fost obținute și de alți autori [4.7]. În cazul joncțiunii cu lungime infinită (s → ∞) nu se stabilesc unde staționare ale câmpului electric în linia de transmisie supraconductoare. În acest caz se obține numai o rezonanță în caracteristica I-V. Pentru a arăta aceasta rescriem ec. (4.27) dub forma

$$\frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial y^2} - \frac{1}{\bar{c}^2} \left[\frac{\partial^2 \theta_0(y, t)}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \theta_0(y, t)}{\partial t} \right] = \frac{1}{\lambda_J^2} \text{Im} e^{i(\omega x + \beta y)}$$

Considerăm soluția sub forma unei unde progresive

$$\theta_0(y, t) = \text{Im} \Gamma(k, \omega) e^{i(\omega x + \beta y)}$$

unde Γ este un număr complex. Substituind această soluție în ecuația de mai sus se obține valoarea lui Γ

$$\Gamma(k, \omega) = \frac{1/\lambda_J^2}{\omega_0^2 / \bar{c}^2 - k^2 - i(\omega\beta / \bar{c}^2)}$$

și deci

$$\theta_0(y, t) = \text{Im} \left\{ \frac{\bar{c}^2}{\omega_0^2 \lambda_J^2} \frac{1 - k^2 \bar{c}^2 / \omega_0^2 - 1/Q}{(1 - k^2 \bar{c}^2 / \omega_0^2)^2 + 1/Q^2} e^{i(\omega t + ky)} \right\} \quad (4.44)$$

Curentul continuu Josephson este dat de expresia

$$J_{cc} = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{1}{s} \int_0^s dy J_c \cos(\omega t + ky) \theta_0(y, t)$$

Substituind în această integrală expresia (4.44) a lui Q_0 se obține

$$J_{cc}(V_0, B_a) = J_c \frac{\bar{c}^2 J_c}{2\omega_0^2 \lambda_J^2} \frac{1/Q_n}{[1 - k^2 \bar{c}^2 / \omega_0^2]^2 + 1/Q^2}$$

de unde se observă că în cazul joncțiunii infinite există numai o rezonanță în caracteristica I-V la $\omega_0/k = \bar{c}$. Această condiție arată că viteza de fază a distribuției densității de curent Josephson ω_0/k este egală cu viteza \bar{c} a undelor electromagnetice în joncțiune. Având în vedere că $\omega_0 = 2qV/\hbar$, $k = (2\pi d/\Phi_0)B_a$, se găsește, pentru tensiunea V_M la care are loc rezonanța curentului expresia

$$V_M = d\bar{c}B_a \quad (4.45)$$

Menționăm că o relație asemănătoare se găsește și în cazul joncțiunii de dimensiuni finite analizat mai înainte, pentru n mare. Astfel, din relația lui F_n^2 se observă că maximum treptei n pentru n mare are loc la

$$\gamma_n = \frac{dsB_a}{\Phi_0} = \frac{n}{2}$$

Maximumul tensiunii se găsește la

$$\omega_0 \equiv \frac{2q}{\hbar} V_n = \omega_n \equiv \frac{n\pi\bar{c}}{s}$$

Se obține

$$V_n = \frac{\hbar}{2q} \frac{n\pi\bar{c}}{s} = d\bar{c}B_a$$

relație identică cu (4.45). Rezultatele experimentale pentru o probă de dimensiune infinite sunt reprezentate în Fig. 6.16. S-a utilizat o joncțiune Pb-Pb cu dimensiunile 0,25 x 0,25 mm².

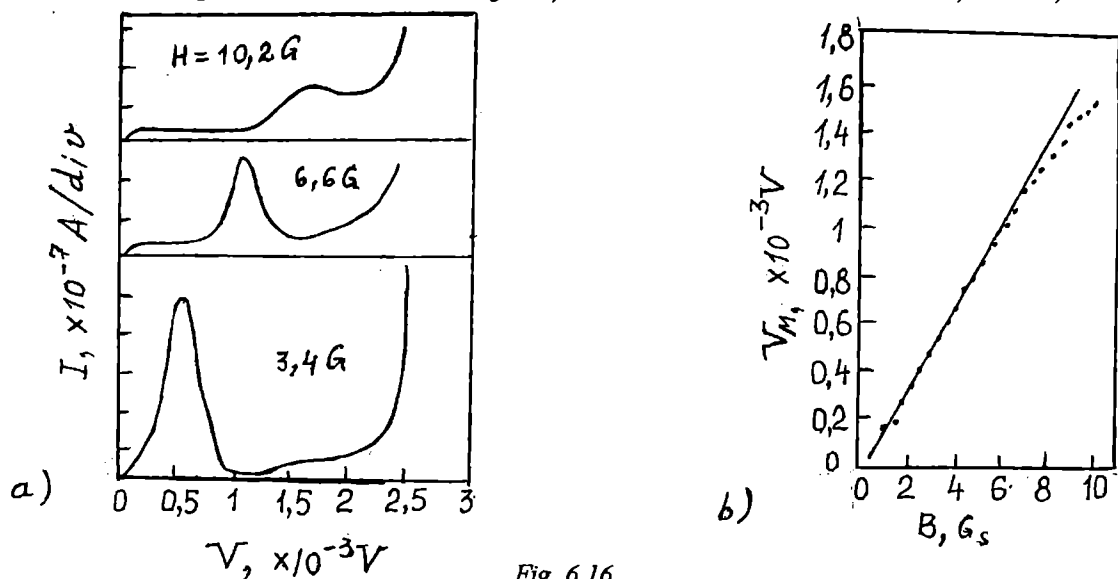


Fig. 6.16

Rezultatele obținute sunt în bună concordanță cu modelul liniei de transmisie de lungime infinită deși joncțiunea are dimensiuni finite. Această comportare se datorează neuniformităților din barierea de oxid. Când distanțele dintre aceste neuniformități din oxid sunt comparabile cu lungimea de undă a radiației, nu mai are loc reflexia la marginile liniei și deci nu se mai stabilesc unde staționare. În acest caz joncțiunea se comportă ca o linie de lungime infinită. În Fig. 6.16 se reprezintă dependența poziției maximului, V_M de câmpul magnetic aplicat. Se observă că este satisfăcută relația liniară (4.46) cu o abatere la valori mari ale tensiunii aplicate datorită dependenței de frecvență a lui c prin adâncimea de penetrație. În scrierea factorului de calitate al circuitului am luat în considerare numai pierderile datorate tunelării unielectronilor prin barieră. În dispozitivele reale există și alte mecanisme de pierderi ca rezistența de suprafață, în straturile supraconductoare, neuniformitățile geometrice, radiația din joncțiune. Dacă notăm cu Q_i factorul de calitate corespunzător unui mecanism, atunci factorul total de calitate Q_r se determină din expresia

$$\frac{1}{Q_r} = \sum_i \frac{1}{Q_i}$$

Teoria prezentată mai sus pentru treptele Fiske este valabilă în cazul

$$\frac{J_n^M(\gamma)}{J_c} = \left(\frac{s}{2\pi\lambda_{J,n}} \right)^2 Q_n \ll 1$$

adică

$$Q_i \ll 4\pi^2 \left(\frac{\lambda_J}{s} \right)^2$$

S-au efectuat, de asemenea, calcule pentru joncțiuni Josephson cu valori mari ale lui Q [6] și s-a găsit o dependență complexă a amplitudinii unei trepte de câmpul magnetic aplicat. Au fost puse de asemenea în evidență singularitățile ale curentului în caracteristica I-V la câmp magnetic zero, în joncțiuni cu dimensiuni mai mari decât λ_J .

6.4.5. Efectul dimensiunilor finite

Să considerăm o joncțiune care are dimensiunile mult mai mici decât lungimea de penetrație Josephson λ_J , comparabile cu lungimea de undă a radiației aplicate. Fie s lungimea joncțiunii și W lățimea ei. Semnalul de microunde se propagă de-a lungul direcției s și câmpul electric este perpendicular pe planul joncțiunii. Se alege lungimea de undă λ a semnalului de microunde aplicat în interiorul stratului de oxid astfel încât să satisfacă condiția

$$s = \frac{1}{2} n\lambda$$

unde n este un număr întreg. Deoarece se stabilesc unde staționare pentru tensiunea de-a lungul direcției s , se poate scrie

$$V(t) = V_0 + v(y) \cos \omega t$$

unde

$$v(y) = V_m \cos \left[\left(\frac{n\pi}{s} \right) y \right]$$

s este situat de-a lungul axei y . Densitatea de curent $J(t)$ este dată de relația analogă cu (4.4) cu deosebirea că variabila g este acum o funcție spațială dependentă

$$\gamma(y) = \frac{2qV_m}{\hbar\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{s}y\right)$$

Amplitudinea treptei n induse este dată de expresia

$$I_n(V_m) = J_c W \int_0^s dy \operatorname{Im} \left[\frac{2qV_m}{\hbar\omega} \cos\left(\frac{n\pi}{s}y\right) \right]$$

Utilizând proprietatea funcției Bessel

$$\int_0^{\pi/2} J_{2n}(2x \sin z) dz = \frac{\pi}{2} J_n^2(x)$$

se poate arăta că [8]

$$I_n(V_m) = \begin{cases} 0, & n \text{ impar} \\ J_c W s J_{n/2}^2\left(\frac{qV_m}{\hbar\omega}\right), & n \text{ par} \end{cases}$$

Efectul a fost observat în caracteristica I-V a joncțiunilor $Pb-Pb$ și $Nb-Nb$; treptele de număr impar au o amplitudine mai mică și în unele cazuri chiar dispar. Dimensiunile probei sunt $W = 0,2$ mm, $s = 0,5$ mm; frecvența radiației de microunde 10 GHz și, utilizând valoarea tipică $c/c = 0,038$, se obține $\lambda = 1,1$ mm.

6.4.6. Trepte Shapiro de valori foarte mari în rețele de joncțiuni Josephson bidimensionale

Am văzut în paragraful precedent că o consecință importantă a efectului Josephson este prezența unor trepte în caracteristica I-V atunci când prin joncțiune trece un curent [9]

$$I = I_c + I_a \sin[2\pi vt]$$

Tensiunile la care apar treptele Shapiro sunt cuantificate

$$V_n = n \frac{h\nu}{2q}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.46)$$

Această relație este valabilă atunci când capacitatea joncțiunii poate fi neglijată. Dacă această capacitate nu poate fi neglijată atunci apar trepte la subarmonice. Treptele Shapiro se datorează oscilațiilor coerente ale curentului Josephson în rezonanță cu curentul alternativ extern. Frecvențele ν sunt în domeniul microundelor iar tensiunile sunt de ordinul nanovoltilor. Mai târziu s-a arătat că dacă se realizează o rețea de joncțiuni Josephson se poate mări V_n [10, 11]. Pentru o rețea pătrată de joncțiuni Josephson treptele în caracteristica I-V sunt date de expresia

$$V_n = n \frac{N h \nu}{2q}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.47)$$

unde N este numărul total de joncțiuni de-a lungul direcției de circulație a curentului extern. Acestea au fost denumite trepte Shapiro gigant și se datorează faptului că dacă joncțiunile în serie oscilează coerent, efectul Shapiro este aditiv (tensiunea unei trepte a rețelei de joncțiuni este egală cu suma tensiunilor treptelor joncțiunilor considerate fiecare separat). Până în prezent s-a obținut o creștere a lui V_n cu factorul $N = 10^3$ [12]. Rețeaua constă din joncțiuni SNS și se construiește astfel. Pe un substrat de safir se depune un strat subțire de cupru de 0,3 mm grosime.

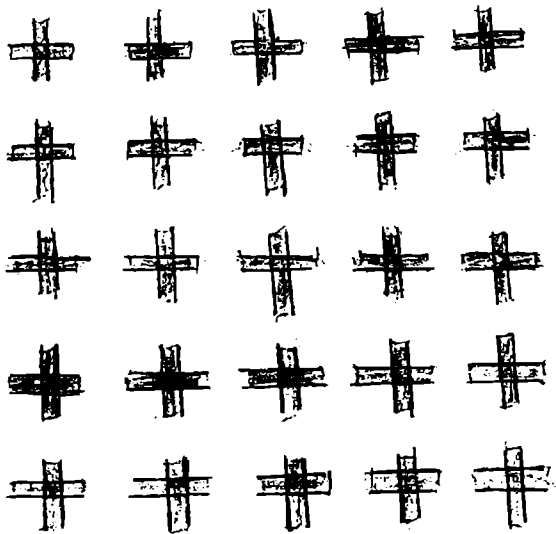


Fig. 6.17

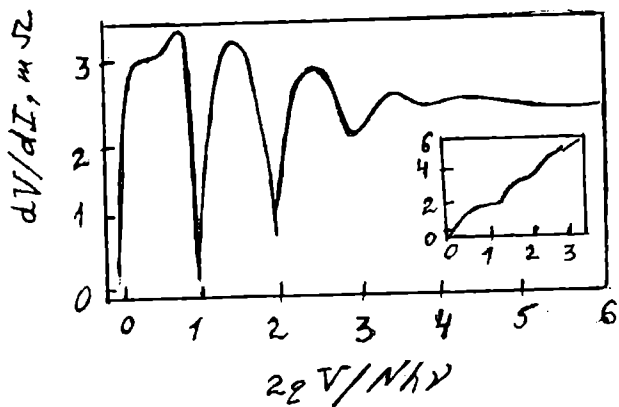


Fig. 6.18

Utilizând o mască litografică a cărei secțiune este reprezentată în Fig. 6.17, se decupează cu faciculul de ioni zonele hașurate sub formă de cruce din stratul de cupru și apoi în aceste zone se depune stratul supraconductor (Niobiu) de grosime 0,2 mm. Distanța de separare dintre două insule supraconductoare este de 2 mm iar constanta rețelei de joncțiuni (lungimea de separare plus lungimea unui strat supraconductor) este de 10 mm. Cuplajul între insulele supraconductoare (care sunt sub formă de cruce) se realizează prin stratul de cupru, care, sub acestea este continuu. Rezistența în stare normală a rețelei de joncțiuni este de $2\text{m}\Omega$. Măsurătorile se efectuează prin metoda celor patru puncte utilizând un amplificator lock-in. S-a măsurat caracteristica I-V și rezistența dinamică dV/dI a rețelei în funcție de tensiunea continuă aplicată, la diverse frecvențe rf, amplitudini ale curentului rf și temperaturi. Curentul critic al rețelei de joncțiuni este curentul corespunzător maximului rezistenței dinamice din curba $dV/dI = f(I)$. În Fig. 6.18 se reprezintă rezistența dinamică dV/dI în funcție de tensiunea normală pentru o rețea de joncțiuni 1000×1000 , la $T = 3\text{ K}$, $\nu = 0,73\text{ MHz}$, $I_c = 0,79\text{ mA}$. Axa tensiunilor a fost normată la $N\hbar\nu/2q$ astfel că atunci când rețeaua se află la treapta giganta n , aceasta are valoarea $n = 2qV/N\hbar\nu$. Este inserată de asemenea caracteristica I-V măsurată. În acord cu (4.47) minimele din rezistența dinamică corespund treptelor giganta ale tensiunii. Această comportare arată că cele N joncțiuni din fiecare coloană a rețelei se găsesc toate la aceeași treaptă și sunt la rezonanță cu curentul rf.

Atunci când asupra rețelei de joncțiuni se aplică un câmp magnetic constant situația se schimbă semnificativ. Când raportul dintre fluxul magnetic Φ aplicat și cuanta de flux Φ_0 este de forma $f = \Phi/\Phi_0 = k/p$, cu k și p numere prime între ele, caracteristicile rețelei nu mai pot fi explicate prin caracteristica unei singure joncțiuni ci ele se explică prin comportarea sistemului ca întreg. Din studiul rețelelor de joncțiuni $Nb-Cu-Nb$ cu $10^3 \times 10^3$ joncțiuni în câmp magnetic constant cu $f = 0,1/2$ și respectiv $1/3$, s-a găsit că apar trepte giganta la subarmonice corespunzătoare fracției N/p cu

$$V_n = n \frac{N\hbar\nu}{p^2 q}, \quad n=1,2,3,\dots; \quad p=1,2,3,\dots$$

Acestea au fost denumite trepte Shapiro giganta fracționare și sunt determinate de dinamica vortexurilor fluxului captat în rețea. Detalii asupra acestor probleme cititorul le găsește în [13].

6.5 Teoria microscopică a efectului Josephson.

Prezentăm în acest paragraf teoria microscopică a efectului Josephson bazându-ne pe modelul lui Ambegaokar și Baratoff [14] care descrie procesul de tunelare a perechilor utilizând teoria perturbațiilor dependente de timp [G8]

6.5.1. Metoda Hamiltonianului de tunelare.

Considerăm joncțiunea tunel reprezentată în Fig. 6.19. Mișcarea electronilor în joncțiunea tunel este descrisă de următorul Hamiltonian [15]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_T \quad (5.1)$$

unde \mathcal{H}_1 și \mathcal{H}_2 reprezintă Hamiltonienii care descriu starea electronilor în metalul 1 și, respectiv, 2 care comută cu operatorii numărului de particule N_1 și respectiv N_2 definiți prin relațiile

$$N_1 = \sum_{k,\sigma} a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma}, \quad N_2 = \sum_{q,\sigma} b_{q\sigma}^+ b_{q\sigma} \quad (5.2)$$

unde a_k^+ (a_k) este operatorul de generare (anihilare) a unui electron de impuls hk și spin σ în metalul 1 iar b_q^+ (b_q) este operatorul de generare (anihilare) a unui electron de impuls hq și spin σ în metalul 2. \mathcal{H}_T reprezintă Hamiltonianul de interacție tunel, de transfer al electronilor dintr-un metal în celălalt

$$\mathcal{H}_T = \sum_{kq\sigma} [T_{kq} a_{k\sigma}^+ b_{q\sigma} + T_{kq}^* b_{q\sigma}^+ a_{k\sigma}] \quad (5.3)$$

unde T_{kq} este elementul de matrice al probabilității de tranziție a unui electron din starea k din metalul 1 în starea q în metalul 2. Dacă se neglijează dependența de energie a probabilității de tunelare, se găsește în aproximația *WKB* [16]

$$|T_{kq}|^2 \sim k_x q_x \exp\left[-\frac{2}{\hbar} l \sqrt{2mU}\right] \delta_{k_y q_y} \delta_{k_z q_z}$$

U și l sunt înălțimea și lărgimea barierei, k_x și q_x sunt componentele normale pe barieră ale vectorilor de undă. Simbolul Kronecker ia în considerare conservarea vectorului de undă paralel cu planul joncțiunii. Tensiunea aplicată pe o joncțiune Josephson este mică, până la câțiva mV , astfel că aproximația de mai sus este justificată. Scrierea Hamiltonianului total sub forma (5.1) ca suma a doi Hamiltonieni a două metale care nu interacționează și unul de interacțiune, \mathcal{H}_T , necesită existența unui set de funcții electronice φ_k și χ_q pentru metalul 1 și, respectiv, 2. Aceste două funcții trebuie să aibă următoarele două proprietăți: a) φ_k și χ_q trebuie să formeze împreună un sistem complet ortonormat; b) funcția de undă a unui electron din metalul 1 se exprimă numai în funcție de φ_k iar cea a unui electron din metalul 2 numai în funcție de χ_q . Din păcate aceste două cerințe nu pot fi satisfăcute simultan. Totuși este posibil să se procedeze astfel. Stările φ_k sunt definite presupunând că bariera se întinde până la $+\infty$ iar stările χ_q sunt definite presupunând că bariera se întinde până la $-\infty$. În aceste condiții φ_k și χ_q posedă o „coadă” exponențială în regiunea barierei și nu sunt ortogonale. Prin urmare, operatorii a_k și b_q nu comută în sensul riguros. În presupunerea unei tunelări speculare între stări de energie egală se poate presupune că pentru cel mai mic ordin în \mathcal{H}_T sunt satisfăcute relațiile de anticomutare $\{a_k^+, b_q\} = \{a_k, b_q^+\}$ [17] Expresia (5.3) pentru Hamiltonianul de tunelare nu ia în considerare nici procesele care implică „spin flip” (cuplarea operatorilor de generare și anihilare de spin egal) și

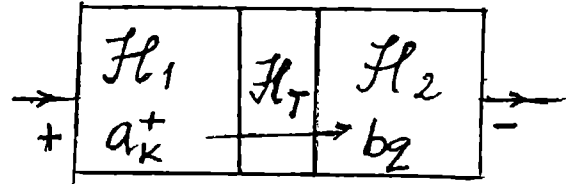


Fig. 6.19

nici procesele de tunrlareacompaniate de absorbția sau emisia de energie ($a_k + b_q$ acționează în același timp, adică tunelarea are loc instantaneu). În plus simetria de inversare implică

$$T_{-k,-q}^* = T_{k,q} \quad (5.4)$$

Se aplică pe joncțiune o tensiune V_1 cu semnul pozitiv la electrodul 1. Se presupune că întreaga tensiune se găsește pe regiunea badierei și deci potențialele chimice ale celor două materiale se vor deplasa unul față de altul, adică $\mu_1 - \mu_2 = qV$. Această deplasare poate fi descrisă adăugând o energie adițională electronilor din materialul 1, astfel că Hamiltonianul care descrie mișcarea electronilor din acest electrod poate fi scris

$$\mathcal{H}_1(V) = \mathcal{H}_1(O) - qVN_1$$

unde N_1 este dat de expresia (5.2). Notăm cu $a_{k\sigma}$ și cu $\hat{a}_{k\sigma}$ operatorul de anihilare a unui electron în metalul 1 la $V = 0$ și, respectiv $V \neq 0$. Ecuțiile de mișcare ale acestor operatori în reprezentarea Heisenberg sunt

$$i\hbar \frac{d}{dt} a_{k\sigma} = [a_{k\sigma}, \mathcal{H}_1(O)]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{a}_{k\sigma} = [\hat{a}_{k\sigma}, \mathcal{H}_1(V)] = [\hat{a}_{k\sigma}, \mathcal{H}_1(O)] + qV\hat{a}_{k\sigma}$$

Notând

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2q}{\hbar} V$$

din aceste relații se obține

$$\hat{a}_{k\sigma} = a_{k\sigma} e^{i\theta/2} \quad (5.5)$$

Curentul electric este definit prin relația

$$I(V, T) = -q \langle \dot{N}_2 \rangle = +q \langle \dot{N}_1 \rangle \quad (5.6)$$

unde \dot{N} este derivata în raport cu timpul a lui N și

$$\langle \dot{N} \rangle = \frac{\text{Tr} \{ e^{-\mathcal{H}/\hbar\beta} \dot{N} \}}{\text{Tr} \{ e^{-\mathcal{H}/\hbar\beta} \}} \quad (5.7)$$

\mathcal{H} este Hamiltonianul total al sistemului, k_B este constanta lui Boltzmann și $\text{Tr} \{ \}$ reprezintă urma operatorului cuprins în paranteze. Expresia (5.6) reprezintă definiția cunoscută a curentului electric, ca rată de variație a numărului de electroni. Se presupune că sensul pozitiv al curentului este de la stânga la dreapta. Deoarece N_2 comută cu \mathcal{H}_1 și \mathcal{H}_2 din ecuația de mișcare pentru N_2 rezultă

$$\dot{N}_2 = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}, N_2] = \frac{i}{\hbar} [\mathcal{H}_T, N_2]$$

și ținând cont de expresia (5.3) a lui \mathcal{H}_T se obține

$$\dot{N}_2 = \frac{i}{\hbar} [T_{kq} \hat{a}_{k\sigma}^+ b_{q\sigma} - T_{kq}^* b_{q\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma}] \quad (5.8)$$

În scrierea acestei relații s-au utilizat relațiile de comutare

$$[b_{q\sigma}^+ b_{q\sigma}, b_{q\sigma}] = -\hbar_{q\sigma}; [b_{q\sigma}^+ b_{q\sigma}, b_{q\sigma}^+] = \hbar_{q\sigma}$$

care se obțin din relațiile de anticomutare ale lui a_k și b_q . Dacă se ia în considerare relația

$$T_{kq}^* \langle b_{q\sigma}^+ \hat{a}_{k\sigma} \rangle = \{ T_{kq} \langle \hat{a}_{k\sigma}^+ b_{q\sigma} \rangle \}^*$$

din (5.6) și (5.8) se obține expresia curentului tunel

$$I(V, T) = \frac{2q}{\hbar} \text{Im} \left\{ \sum_{k,q} T_{kq} \langle \hat{a}_{k\sigma}^+ b_{q\sigma} \rangle \right\} \quad (5.9)$$

Această expresie a curentului se evaluează fără dificultate dacă ne mărginim la termenii de prim ordin în H_T (răspuns liniar). Termenul \mathcal{H}_T este considerat ca o perturbare a Hamiltonianului și se poate considera că dependența de timp a operatorilor este determinată de Hamiltonianul neperturbat $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_1(V) + \mathcal{H}_2$, în timp ce dependența de timp a stărilor proprii este determinată de termenul de perturbare H_T . Notăm cu $|\psi(t)\rangle$ funcția proprie a Hamiltonianului total $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T$, cu $|\psi(\infty)\rangle$ funcția proprie a Hamiltonianului neperturbat \mathcal{H}_0 ; restrângându-ne la primul ordin în \mathcal{H}_T se poate scrie

$$|\psi(t)\rangle \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\tau} \mathcal{H}_T(\tau) \right) |\psi(\infty)\rangle$$

Factorul $e^{i\tau}$ implică faptul că perturbarea este inițiată adiabatic pornind de la $t = -\infty$. De asemenea $\eta \rightarrow 0+$ adică η tinde la zero prin valori pozitive. În această aproximație relația (5.9) devine

$$I = \frac{2q}{\hbar} \text{Im} \sum_{kq\sigma} T_{kq} \left\{ \langle \hat{a}_{k\sigma}^+ b_{q\sigma} \rangle_0 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\tau} \langle [a_{k\sigma}^+(t) b_{q\sigma}(t), \mathcal{H}_T(\tau)] \rangle_0 \right\}$$

unde simbolul $\langle \rangle_0$ reprezintă valoarea medie referitoare la Hamiltonianul neperturbat \mathcal{H}_0 . Primul termen din această relație se anulează deoarece el reprezintă curentul când \mathcal{H}_T este zero, astfel că

$$I = -\frac{2q}{\hbar^2} \text{Re} \sum_{kq\sigma} T_{kq} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\tau} \langle [a_{k\sigma}^+(t) b_{q\sigma}(t), \mathcal{H}_T(\tau)] \rangle_0$$

Utilizând expresia (5.3) a lui \mathcal{H}_T se obține

$$I = -\frac{2q}{\hbar^2} \sum_{\substack{kq\sigma \\ k'q'\sigma'}} T_{kq} \int_{-\infty}^t d\tau e^{i\tau} \left\{ T_{k'q'} \langle [\hat{a}_{k\sigma}^+(t) b_{q\sigma}(t), \hat{a}_{k'\sigma'}^+(\tau) b_{q'\sigma'}(\tau)] \rangle_0 + T_{k'q'}^* \langle [\hat{a}_{k\sigma}^+(t) b_{q\sigma}(t), b_{q'\sigma'}^+(\tau) \hat{a}_{k'\sigma'}(\tau)] \rangle_0 \right\} \quad (5.10a)$$

6.5.2. Curentul tunel

Definiția funcției $S(t - \tau)$ și $R(t - \tau)$ prin relațiile [G3]

$$S(t - \tau) = -2i \frac{q}{\hbar^2} D(t - \tau) \sum_{\substack{kq\sigma \\ k'q'\sigma'}} T_{kq} T_{k'q'}^* \left\{ \langle a_{k\sigma}^+(t) a_{k'\sigma'}(\tau) \rangle_0 \langle b_{k\sigma}(t) b_{k'\sigma'}^+(\tau) \rangle_0 - \langle b_{k'\sigma'}^+(\tau) b_{k\sigma}(t) \rangle_0 \langle a_{k'\sigma'}(\tau) a_{k\sigma}^+(t) \rangle_0 \right\} \quad (5.11)$$

$$R(t - \tau) = -2i \frac{q}{\hbar^2} D(t - \tau) \sum_{\substack{kq\sigma \\ k'q'\sigma'}} T_{kq} T_{k'q'}^* \left\{ \langle a_{k\sigma}^+(t) a_{k\sigma}^+(\tau) \rangle_0 \langle b_{q'\sigma'}(\tau) b_{q\sigma}(t) \rangle_0 - \langle a_{k'\sigma'}^+(\tau) a_{k'\sigma'}^+(t) \rangle_0 \langle b_{q\sigma}(t) b_{q'\sigma'}(\tau) \rangle_0 \right\}$$

unde $D(x)$ este funcția treaptă definită astfel

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Valorile medii se evaluează pe Hamiltonianul neperturbat adică se referă la cei doi electrozi separat. Dacă considerăm cei doi electrozi ca doi supraconductori omogeni de dimensiuni

infinite atunci în $S(t - \tau)$ sunt diferiți de zero numai termenii diagonali $\bar{k} = \bar{k}', \bar{q} = \bar{q}'$. Utilizând notațiile (5.11) și relația (5.5), curentul total (5.10a) se poate scrie

$$I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\eta\tau} \left\{ e^{-\frac{i}{2}[\theta(t)-\theta(\tau)]} s(t-\tau) + e^{-\frac{i}{2}[\theta(t)+\theta(\tau)]} R(t-\tau) \right\} \quad (5.12)$$

Funcția $S(t - \tau)$ mai poate fi scrisă sub forma

$$S(t - \tau) = -4i \frac{q}{\hbar^2} D(t - \tau) \sum_{kq} |T_{kq}|^2 \{ G^-(k, \tau - t) G^+(q, t - \tau) - G^-(q, t - \tau) G^+(k, \tau - t) \}$$

unde am introdus funcțiile Green [18]

$$G^+(\bar{k}, \tau - t) = -i \langle a_k(\tau) a_k^+(t) \rangle; \quad G^-(k, \tau - t) = i \langle a_k^+(t) a_k(\tau) \rangle$$

$$G^+(\bar{q}, t - \tau) = -i \langle b_q(t) b_q^+(\tau) \rangle; \quad G^-(q, t - \tau) = i \langle b_q^+(\tau) b_q(t) \rangle$$

În expresia $S(t - \tau)$ s-a efectuat sumarea după spini utilizând proprietatea $\langle a_{k\uparrow}^+ a_{k\uparrow} \rangle = \langle a_{k\downarrow}^+ a_{k\downarrow} \rangle$.

În funcția $R(t - \tau)$ rămân numai termenii în care $\bar{k}' = -\bar{k}, \bar{q}' = -\bar{q}, \sigma' = -\sigma$ care descriu perechile Cooper în volumul supraconductorului. Dacă se utilizează funcțiile Green anormale [19] de perechi

$$\tilde{F}_{\uparrow\downarrow}^+(\bar{k}, t - \tau) = \langle a_{k\uparrow}^+(t) a_{-k\downarrow}^+(\tau) \rangle; \quad \tilde{F}_{\downarrow\uparrow}^-(\bar{k}, t - \tau) = -\langle a_{-k\downarrow}^+(\tau) a_{k\uparrow}^+(t) \rangle$$

$$F_{\downarrow\uparrow}^+(\bar{q}, \tau - t) = \langle b_{-q\downarrow}(\tau) b_{q\uparrow}(t) \rangle; \quad F_{\uparrow\downarrow}^-(\bar{q}, \tau - t) = -\langle b_{q\uparrow}(t) b_{-q\downarrow}(\tau) \rangle$$

atunci $R(t - \tau)$ se poate scrie sub forma

$$R(t - \tau) = 4i \frac{q}{\hbar^2} D(t - \tau) \sum_{k,q} |T_{kq}|^2 \{ \tilde{F}^+(k, t - \tau) F^-(q, \tau - t) - \tilde{F}^-(\bar{k}, t - \tau) F^+(\bar{q}, \tau - t) \}$$

unde s-a efectuat sumarea după spin și s-au utilizat relațiile

$$F_{\uparrow\downarrow}^\pm = -F_{\downarrow\uparrow}^\pm; \quad \tilde{F}_{\downarrow\uparrow}^\pm = -\tilde{F}_{\uparrow\downarrow}^\pm$$

Introducem transformatele Fourier ale funcțiilor Green $G^\pm(\bar{k}, \omega), \tilde{F}^\pm(\bar{k}, \omega), F^\pm(\bar{k}, \omega)$ definite prin

$$G^\pm(\bar{k}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} G^\pm(\bar{k}, \omega)$$

ș.a.m.d. și funcțiile spectrale corespunzătoare $A(\bar{k}, \omega)$ și $B(\bar{k}, \omega)$

$$G^\pm(\bar{k}, \omega) = \pm i A(\bar{k}, \omega) f^\pm(\omega)$$

$$\tilde{F}^\pm(\bar{k}, \omega) = \pm e^{i\theta_1} B_1(\bar{k}, \omega) f^\pm(\omega)$$

$$F^\pm(\bar{q}, \omega) = \pm e^{i\theta_2} B_2(\bar{q}, \omega) f^\pm(\omega)$$

unde

$$f^\pm(\omega) = \frac{1}{e^{\mp\beta\omega} + 1}$$

$$f^+(\omega) = 1 - f^-(\omega)$$

unde $\beta = \hbar/k_B T$. În expresiile \tilde{F}^\pm și F^\pm au fost exprimați explicit factorii de fază. Efectuând schimbarea de variabilă $t' = t - \tau$ expresia (5.12) a curentului electric se scrie

$$I(t) = \text{Im} \left\{ e^{-i\theta(t)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{\eta(t-t')} \left[e^{i\theta(t-t')/2} S(t') + e^{-i\theta(t-t')/2} e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} R'(t') \right] \right\} \quad (5.13)$$

unde s-a efectuat substituția

$$R(t) = e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} R'(t)$$

$S(t)$ și $R'(t)$ pot fi exprimate în raport cu funcțiile spectrale introduse mai sus astfel

$$S(t) = -i \frac{4q}{\hbar^2} D(t) \sum_{kq} |T_{kq}|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega-\omega')t} A_1(k, \omega) \times \right. \\ \left. \times A_2(\bar{q}, \omega) [f^-(\omega) - f^-(\omega')] \right\} \quad (5.14)$$

$$R'(t) = i \frac{4q}{\hbar^2} D(t) \sum_{kq} |T_{kq}|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} e^{-i(\omega-\omega')t} B_1(k, \omega) \times \right. \\ \left. \times B_2(q, \omega) [f^-(\omega') - f^-(\omega)] \right\}$$

Factorul de fază $e^{-i(\theta_1 - \theta_2)}$ din expresia lui $R(t)$ a fost introdus formal. Pentru a exprima curentul funcție de frecvență introducem transformatele Fourier ale lui $S(t)$ și $R'(t)$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt S(t) e^{i\omega t}; \quad R'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt R'(t) e^{i\omega t}; \quad (5.15)$$

și descompunerea spectrală [20]

$$e^{-i\theta(t)/2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} W(\omega) e^{-i\omega t}$$

Cu aceste transformări expresia (5.13) a curentului electric devine

$$I(t) = \text{Im} \left\{ \int_{\eta \rightarrow 0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' [W(\omega) W^*(\omega') e^{-i(\omega-\omega')t} S(i\eta - \omega') + \right. \\ \left. + e^{-i\theta_0} W(\omega) W(\omega') e^{-i(\omega+\omega')t} R'(i\eta + \omega')] \right\} \quad (5.16)$$

unde $\theta_0 = \theta_1 - \theta_2$ și reprezintă partea independentă de timp a diferenței de fază. Presupunem că coeficienții din dezvoltarea (5.15) sunt reali, condiție care este satisfăcută în cazuri de interes fizic. Utilizând notațiile

$$I_{\text{ap}}(\omega) = \text{Im} S(i\eta - \omega); \quad I_{J_2}(\omega) = \text{Im} R'(i\eta + \omega) \\ I_{\text{ap}_1}(\omega) = \text{Re} S'(i\eta - \omega); \quad I_{J_1} = -\text{Re} R'(i\eta + \omega) \quad (5.17)$$

relația (5.16) se poate scrie

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' W(\omega) W(\omega') \left\{ [I_{\text{ap}}(\omega') \cos(\omega - \omega')t - \right. \\ \left. - I_{\text{ap}_1}(\omega') \sin(\omega - \omega')t] + [I_{J_2}(\omega') \cos(\theta_0 + (\omega + \omega')t) + \right. \\ \left. + I_{J_1}(\omega') \sin(\theta_0 + (\omega + \omega')t)] \right\} \quad (5.18)$$

Această expresie este scrisă pentru o tensiune $V(t)$ variabilă în timp. În acest caz în expresia curentului $I(t)$ intră atât partea reală cât și partea imaginară a lui $S(\omega)$ și respectiv $R'(\omega)$. Deoarece $S(t)$ și $R'(t)$ sunt ambele reale și se anulează pentru $t < 0$ rezultă că sunt îndeplinite următoarele condiții

$$S(-\omega) = S^*(\omega); \quad R'(-\omega) = R'^*(\omega)$$

De aici rezultă că părțile reale și imaginare ale lui $S(\omega)$ și $R'(\omega)$ sunt corelate prin relațiile de dispersie Kramers-Kronig

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S(\omega) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Im} S(\omega')}{\omega' - \omega} \\ \operatorname{Im} S(\omega) &= -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\operatorname{Re} S(\omega')}{\omega' - \omega} \end{aligned} \quad (5.19)$$

P indică partea principală a integralei. Relații asemănătoare cu (5.19) pot fi scrise pentru $\operatorname{Re} R'(\omega)$ și $\operatorname{Im} R'(\omega)$. În cazul unei tensiuni constante sau slab variabilă temenului $I_{J2}(\omega)$ nu aduce nici o contribuție, fiind nul [21]

6.5.3. Curentul tunel la tensiune constantă.

Pentru $V = V_0 = \text{constant}$

unde $\omega_0 = (2q/h)V_0$. În acest caz în dezvoltarea (5.15) coeficienții Fourier sunt

$$W(\omega) = W^*(\omega) = \delta\left(\omega - \frac{\omega_0}{2}\right)$$

și expresiile (5.16) și (5.18) devin

$$I(t) = \operatorname{Im} \left\{ S\left(i\eta - \frac{\omega_0}{2}\right) + e^{-\beta(t)} R\left(i\eta + \frac{\omega_0}{2}\right) \right\} \quad (5.20)$$

și respectiv

$$I(t, V_0, T) = I_{qp}(V_0, T) + I_{J1}(V_0, T) \sin \theta(t) + I_{J2}(V_0, T) \cos \theta(t) \quad (5.21)$$

unde $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$. Se observă că curentul tunel total conține trei contribuții principale: curentul tunel I_{qp} de uniparticule, care este corelat cu $S(t)$ precum și curenții $I_{J1} \sin \theta$ și $I_{J2} \cos \theta$ care sunt corelați cu $R(t)$ și descriu tunelarea de perechi coerente în fază. Definim conductivitățile

$$\sigma_0(V_0, T) V_0 = I_{qp}(V_0, T); \quad \sigma_1(V_0, T) V_0 = I_{J2}(V_0, T) \quad (5.22)$$

și rescriem expresia (5.21) sub forma

$$I(t, V_0, T) = I_{J1}(V_0, T) \sin \theta(t) + [\sigma_1(V_0, T) \cos \theta(t) + \sigma_0(V_0, T)] V_0 \quad (5.23)$$

Dacă $V_0 = 0$ rezultă $I_{qp} = I_{J2} = 0$ și curentul total este dat de $I_{J1}(0, T) \sin \theta$, care reprezintă curentul Josephson continuu. Dacă $V \neq 0$ termenii dependenți de fază descriu curentul Josephson alternativ de frecvență $\omega_0 = (2q/h)V_0$. În continuare calculăm contribuțiile I_{qp1} , I_{qp} , I_{J1} , I_{J2} (5.17) la curentul total în cazul unei tensiuni V_0 constante aplicată pe joncțiune. În acest scop trebuie să calculăm inițial transformatele Fourier ale $S(t)$ și $R'(t)$ definite de (5.14). Presupunând transmisie speculară și neglijând dependența de energie a lui $|T_{kq}|^2$, integrând pe componentele lui \vec{k} și \vec{q} paralele cu planul barierei, relațiile (5.14) devin

$$\begin{aligned} S(t) &= -iD(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(\omega-\omega')t} A_1(\epsilon, \omega) \times \\ &\quad \times A_2(\epsilon', \omega') [f(\omega) - f(\omega')] \\ R'(t) &= iD(t) \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i(\omega-\omega')t} B_1(\epsilon, \omega) \times \\ &\quad \times B_2(\epsilon', \omega') [f(\omega') - f(\omega)] \end{aligned}$$

unde

$$R_N = \frac{\hbar^3}{4\pi q^2 N_2(O) N_1(O) \langle |T|^2 \rangle}$$

$N_1(0)$ și $N_2(0)$ sunt densitățile de stări la nivelul Fermi în electrodul din stânga și, respectiv, din dreapta. Am omis semnul minus de la simbolul funcțiilor Fermi. Introducem densitatea de unielectroni $n(\omega)$ și densitatea de perechi $p(\omega)$ definite astfel

$$\begin{aligned} n(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon A(\varepsilon, \omega) \\ p(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon B(\varepsilon, \omega) \end{aligned} \quad (5.24)$$

astfel că se poate scrie

$$\begin{aligned} S(t) &= -i \frac{D(t)}{R_N} \frac{\hbar}{\pi q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{i(\omega-\omega')t} n_1(\omega) n_2(\omega') [f(\omega) - f(\omega')] \\ R'(t) &= i \frac{D(t)}{R_N} \frac{\hbar}{\pi q} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i(\omega-\omega')t} n_1(\omega) n_2(\omega') [f(\omega') - f(\omega)] \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pentru a determina pe I_{qp} și I_{qp1} (5.17) trebuie să efectuăm transformata Fourier a lui $S(t)$ în variabila $i\eta - \omega_1/2$ pentru $\eta \rightarrow 0^+$. Aceasta este

$$\begin{aligned} S(i\eta - \omega_1) &= -i \frac{\hbar}{\pi q R_N} \int_{-\infty}^{\infty} dt D(t) e^{-i(\omega_1 - i\eta)t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{i(\omega-\omega')t} \times \\ &\quad \times n_1(\omega) n_2(\omega') [f(\omega) - f(\omega')] \end{aligned}$$

unde am utilizat notația $\omega_1 = \omega_0/2$. Integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt D(t) e^{i(\omega-\omega'-\omega_1+i\eta)t} = \frac{1}{i(\omega-\omega'-\omega_1+i\eta)}$$

și

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\eta} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x) \quad (5.26)$$

unde P reprezintă partea principală a restului integralei. Astfel,

$$\begin{aligned} S(i\eta - \omega_1)_{\eta \rightarrow 0^+} &= \frac{\hbar}{\pi q R_N} \left\{ P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' n_1(\omega) n_2(\omega') [f(\omega) - f(\omega')] - \right. \\ &\quad \left. - i\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \delta(\omega - \omega' - \omega_1) n_1(\omega) n_2(\omega') [f(\omega) - f(\omega')] \right\} \end{aligned}$$

și prin urmare,

$$I_{qp} = \text{Im} S(i\eta - \omega_1) = \frac{\hbar}{q R_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_1(\omega) n_2(\omega - \omega_1) [f(\omega) - f(\omega - \omega')] \quad (5.27)$$

$$I_{qp1} = \text{Re} S(i\eta - \omega_1) = \frac{\hbar}{q R_N} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{n_1(\omega) n_2(\omega')}{\omega - \omega' - \omega_1} [f(\omega) - f(\omega - \omega')] \quad (5.28)$$

$\text{Re}S(i\eta - \omega_1)$ diverge pentru $\omega_1 \rightarrow 0$ ($V_0 \rightarrow 0$), deoarece părțile reală și imaginară ale lui $S(i\eta - \omega_1)$ sunt corelate prin relațiile Kramers-Kronig (5.19) și curentul de unielectroni I_{qp} crește linear cu ω_1 pentru $\omega_1 \rightarrow \infty$. Pentru a elimina divergența se definește $S(i\eta - \omega_1)$ scăzând $[\text{Re}S(i\eta - \omega_1)]_{\omega_1=0}$.

Aceasta nu afectează curentul de unielectroni deoarece acesta este corelat numai cu partea imaginară a lui $S(i\eta - \omega_1)$. Presupunem că cei doi electrozi se găsesc în stare normală. Atunci

$$n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A_0(\varepsilon, \omega) = 1$$

și

$$I_{qp} = I_{NN} = \frac{-\hbar}{qR_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega [f(\omega) - f(\omega - \omega_1)] = \frac{V}{R_N}$$

unde R_N este rezistența joncțiunii când ambii electrozi se găsesc în stare normală. Această relație coincide cu cea obținută de noi în capitolul anterior. Pentru obținerea ei în cazul de față am utilizat rezultatele

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega [f(\omega) - f(\omega - \omega_1)] = -\omega_1$$

și

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2} = \frac{qV_0}{\hbar}$$

Pentru a calcula termenii I_{J1} și I_{J2} calculăm transformata Fourier a lui $R'(t)$ în raport cu $(i\eta + \omega_1)$

$$R'(i\eta + \omega_1) = i \frac{\hbar}{q\pi R_N} \int_{-\infty}^{\infty} dt D(t) e^{i(\omega_1 + i\eta)t} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' e^{-i(\omega - \omega')t} p_1(\omega) p_2(\omega') [f(\omega') - f(\omega)]$$

Procedând în mod similar ca la $S(i\eta - \omega_1)$ se poate scrie

$$R'(i\eta + \omega_1)_{\eta \rightarrow 0^+} = \frac{\hbar}{\pi q R_N} \left\{ P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{p_1(\omega) p_2(\omega')}{\omega - \omega' - \omega_1} [f(\omega') - f(\omega)] + \right. \\ \left. + i\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \delta(\omega - \omega' - \omega_1) p_1(\omega) p_2(\omega') [f(\omega') - f(\omega)] \right\}$$

Prin urmare, din (5.17) rezultă

$$I_{J_1} = - \operatorname{Re} R'(i\eta + \omega_1)_{\eta \rightarrow 0^+} = - \frac{\hbar}{\pi q R_N} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{p_1(\omega) p_2(\omega')}{\omega - \omega' - \omega_1} [f(\omega') - f(\omega)] \quad (5.29)$$

$$I_{J_2} = - \operatorname{Im} R'(i\eta + \omega_1)_{\eta \rightarrow 0^+} = \frac{\hbar}{q R_N} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega p_1(\omega) p_2(\omega - \omega') [f(\omega - \omega') - f(\omega)] \quad (5.30)$$

Deoarece nu am făcut nici o restricție asupra expresiilor lui $n(\omega)$ și $p(\omega)$ relațiile de mai sus sunt valabile și în cazul cuplajului tare. Terenul $I_{J_1} \sin \theta$ reprezintă tunelarea coerentă a perechilor. Termenul $I_{J_2} \cos \theta$ descrie tunelarea de unielectroni care implică despicierea perechilor și concomitent formarea perechilor într-o parte și respectiv în cealaltă parte a barierei; sunt implicate prin urmare efecte de coerență în fază.

6.5.4. Curentul tunel în aproximația BCS.

În aproximația BCS densitatea de unielectroni n_i și densitatea de perechi p_i sunt date de expresiile

$$n_i(\omega) = \frac{|\hbar\omega|}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_i^2}} D(|\hbar\omega| - |\Delta_i|) \quad (5.31)$$

$$p_i(\omega) = \frac{|\Delta_i|}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_i^2}} \operatorname{sgn}(\hbar\omega) D(|\hbar\omega| - |\Delta_i|)$$

unde

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x < 0; \end{cases} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Aceste densități sunt reprezentate în Fig. 7.20. Introducerea relațiilor (5.13) în expresiile (5.29) și (5.30) și efectuăm schimbarea de variabile

$$\begin{aligned} \hbar\omega_1 &= \Delta_1 \cosh \xi; & \varepsilon_1 &= \Delta_1 \sinh \xi \\ \hbar\omega_2 &= \Delta_2 \cosh \xi; & \varepsilon_2 &= \Delta_2 \sinh \xi \end{aligned}$$

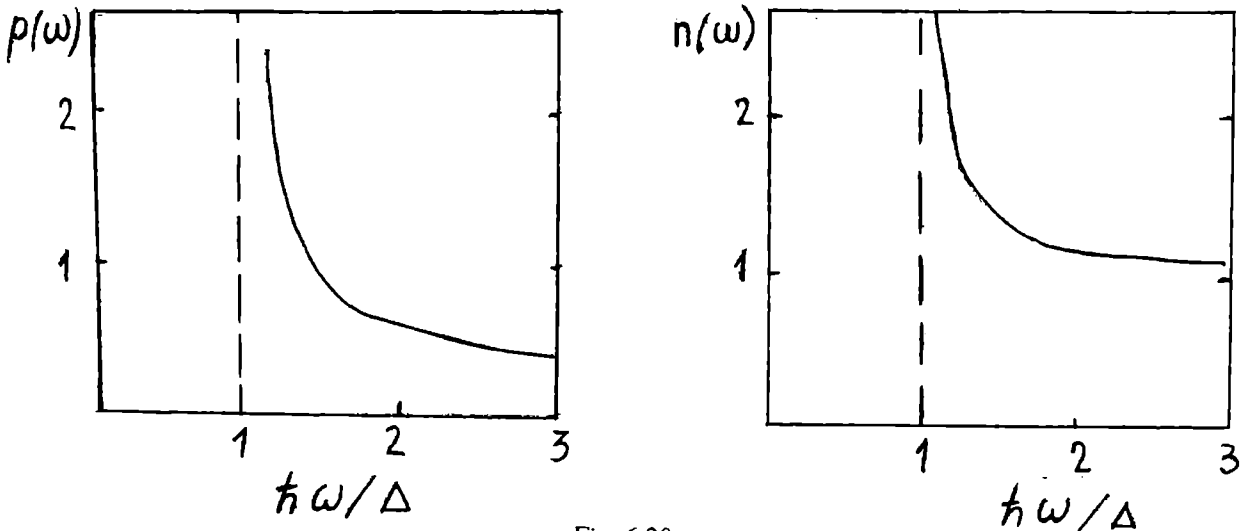


Fig. 6.20

unde

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_1^2}; \quad \varepsilon_2 = \sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_2^2}$$

Pentru $\Delta_1 = \Delta_2$ și $T = 0\text{K}$ se obține [20]

$$I_{J_1}(\omega_1, 0) = \begin{cases} -\frac{\hbar\Delta}{qR_N} K(z), & 0 \leq z \leq 1 \\ -\frac{\hbar\Delta}{qR_N} \frac{1}{z} K(z), & z \geq 1 \end{cases} \quad (5.32)$$

$$I_{J_2}(\omega_1, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq 1 \\ -\frac{\hbar\Delta}{qR_N} \frac{1}{z} K\left[\left(\frac{z^2 - 1}{z^2}\right)^{1/2}\right] \operatorname{sgn}(\omega_1), & z \geq 1 \end{cases}$$

unde $z = |\hbar\omega_1|/2\Delta$ și $K(z)$ este integrala optică completă de ordinul întâi. Procedând în mod similar cu expresia lui I_{qp} (5.27) se obțin

$$I_{\varphi}(\omega_1, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq 1 \\ \frac{\hbar\Delta}{qR_N} \left\{ 2zE \left[\frac{z^2-1}{z^2} \right]^{1/2} - \frac{1}{z} K \left[\left(\frac{z^2-1}{z^2} \right)^{1/2} \right] \right\} \text{sgn}(\omega_0), & z \geq 1 \end{cases} \quad (5.33)$$

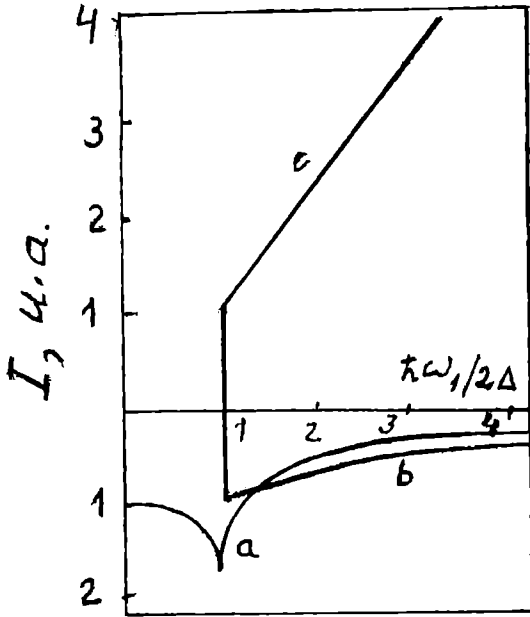


Fig. 6.21

unde $E(z)$ este integrala eliptică completă de ordinul al doilea. În Fig. 6.21 se reprezintă I_{J1} (curba a), I_{J2} (curba b) și I_{qp} (curba c) în funcție de $\hbar\omega_1/2\Delta$ la $T = 0K$; curbele sunt normate la $I_{J1}(0, 0)$. Pentru $qV \geq \Delta_1 + \Delta_2$, I_{J1} și I_{J2} au același semn și I_{qp} are semn opus. Din figură se observă că $I_{J1}(0, 0) = I_{J2}(2\Delta, 0) = I_{qp}(2\Delta, 0) = \pi\hbar\Delta/2qR_N$. De asemenea se observă că I_{J1} prezintă o singularitate la $V = 2\Delta/q$ deoarece integrala eliptică completă $K(1) = \infty$. Această singularitate se numește maximul Riedel [22] și este corelată cu singularitatea în densitatea de stări în supraconductori la $\hbar\omega = \Delta$. O asemenea singularitate la Δ prezintă și $p(\omega)$. S-a sugerat că maximul Riedel poate fi interpretat ca o rezonanță

a curentului de unielectroni cu cel de perechi. La temperaturi finite ($T > 0$) expresiile (5.26), (5.27) se calculează numeric [23]. Utilizând un formalism puțin diferit de cel prezentat mai sus, Larkin și Ovkinikov [21] au obținut expresiile mărimilor I_{J1} , I_{J2} , I_{qp} , I_{qp1} similare cu (2.56), (2.57). În aproximația BCS expresiile obținute de ei pentru I_{J1} și I_{qp1} conțin o singură integrală

$$I_{J1}(V_0, T) = \frac{\hbar}{qR_N} \frac{\Delta_1\Delta_2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega) \left\{ \left[\frac{D(\Delta_1 - \hbar|\omega - \omega_1|)D(\hbar\omega - \Delta_2)}{\sqrt{\Delta_1^2 - \hbar^2(\omega - \omega_1)^2} \sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_2^2}} + \frac{D(\hbar\omega - \Delta_1)D[\Delta_2 - \hbar(\omega + \omega_1)]}{\sqrt{\hbar^2\omega^2 - \Delta_1^2} \sqrt{\Delta_2^2 - \hbar^2(\omega + \omega_1)^2}} \right] [1 - 2f(|\hbar\omega|)] \right\} \quad (5.34)$$

$$I_{qp1}(V_0, T) = \frac{\hbar}{qR_N} \int_{-\infty}^{\infty} d(\omega) \left\{ \left[\frac{\hbar(\omega - \omega_1)D(\Delta_1 - \hbar|\omega - \omega_1|)D(\hbar\omega - \Delta_2)}{\sqrt{\Delta_1^2 - \hbar^2(\omega - \omega_1)^2} \sqrt{\hbar^2\omega^2 - \Delta_2^2}} + \frac{\hbar(\omega + \omega_1)D(\hbar\omega - \Delta_1)D[\Delta_2 - \hbar|\omega - \omega_1|]}{\sqrt{\hbar^2\omega^2 - \Delta_1^2} \sqrt{\Delta_2^2 - \hbar^2(\omega + \omega_1)^2}} \right] \hbar\omega [1 - 2f(|\omega|)] \right\}$$

Se poate arăta că pentru $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ și $qV_0 \ll \Delta$ sau $k_B T$

$$I_{sp} = \frac{\hbar}{qR_N} \frac{\Delta}{4 \cosh^2(\Delta / 2k_B T)} \frac{V_0}{k_B T} \ln \left(\frac{\min(k_B T, \Delta)}{V_0} \right) \quad (5.35)$$

Deci aici rezultă că conductanțele $\sigma_0(V, T)$ și $\sigma_1(V, T)$ definite prin relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_0(V_0, T) V_0 &= I_{sp}(V, T) \\ \sigma_1(V_0, T) V_0 &= I_{J2}(V, T) \end{aligned}$$

tind la infinit când $V \rightarrow 0$. Singularitatea logaritmică la $qV = \Delta_1 + \Delta_2$ se menține și la temperaturi finite. Cititorul găsește detalii asupra acestor probleme în [G3].

6.5.5. Curentul Josephson la tensiune zero. Dependența de temperatură a curentului critic.

Rescriem expresia curentului total într-o structură Josephson

$$I(t, V_0, T) = I_{sp}(V_0, T) + I_{J1}(V_0, T) \sin \theta(t) + I_{J2}(V_0, T) \cos \theta(t)$$

Ne vom ocupa în acest paragraf de termenul I_{J0} din fața lui $\sin \theta$ în cazul $V = 0$. După cum am amintit $|I_{J1}(0, T)| \equiv I_1(T)$ este curentul maxim de perechi de electroni, numit curent critic. Pentru a deduce expresia lui $I_1(t)$ pornim de la expresia (5.29) scrisă pentru $V = 0$ (adică $\omega_1 = 0$)

$$I_1(T) = \frac{\hbar}{\pi q R_N} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega) - f(\omega')}{\omega - \omega'} p_1(\omega) p_2(\omega') \quad (5.37)$$

unde P se referă la partea principală a integralei. Separând contribuțiile frecvențelor (energiilor) pozitive și negative aceasta relație poate fi scrisă sub forma

$$I_1(T) = \frac{2\hbar}{\pi q R_N} P \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} d\omega' p_1(\omega) p_2(\omega') \left[\frac{f(\omega) - f(\omega')}{\omega - \omega'} + \frac{1 - f(\omega) - f(\omega')}{\omega + \omega'} \right] \quad (5.38)$$

unde am utilizat relațiile $f(-\omega) = 1 - f(\omega)$ și $p(-\omega) = -p(\omega)$. Această expresie este valabilă în toate cazurile (cuplaj slab sau tare) cu condiția ca densitatea de perechi $p(\omega)$ să fie exprimată prin formula care să descrie corect starea supraconductoare a electrozilor. În aproximația BCS $p(\omega)$ este dat de relația (5.31) care pentru $\omega > 0$ se scrie

$$p_i(\omega) = \frac{|\Delta_i|}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_i^2}} D(|\hbar\omega| - \Delta_i) \quad (5.39)$$

Însă, o tratare realistă a interacțiunii electron-fonon în supraconductorii conduce la faptul că banda este o funcție complexă de energie, în contrast cu aproximația BCS. În acest caz general densitatea de perechi de electroni este dată de expresia

$$p_i(\omega) = R_e \left[\frac{\Delta_i(\omega)}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_i^2(\omega)}} \right] \quad (5.40)$$

unde $\Delta_i(\omega)$ este banda interzisă care este funcție complexă de energie și este deci dependentă de ω . În Fig. 6.22 se reprezintă părțile reală Δ_r și imaginară Δ_i ale lui $\Delta(\omega)$ pentru plumb care este un supraconductor cu cuplaj tare [24]. Presentăm mai întâi

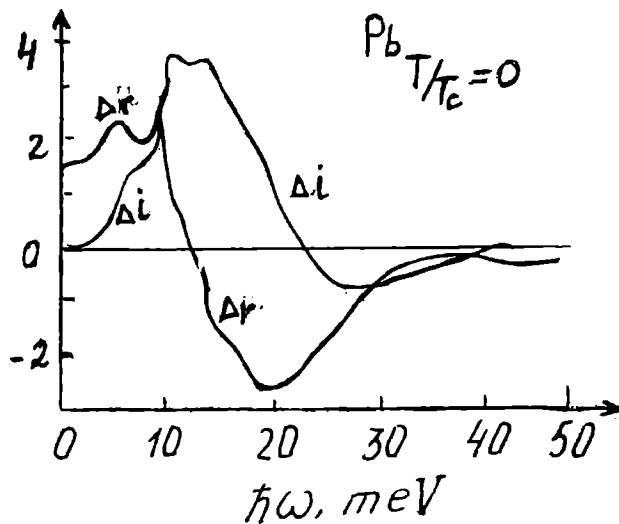


Fig. 6.22

calculul curentului critic în aproximația BCS. Introducând (5.40) în (5.38) se obține

$$I_1(T) = \frac{\hbar}{\pi q R_N} 2\Delta_1 \Delta_2 P \int_{\Delta_1}^{\infty} \int_{\Delta_2}^{\infty} d\omega' d\omega \frac{1}{\sqrt{(\hbar\omega)^2 - \Delta_1^2} \sqrt{(\hbar\omega')^2 - \Delta_2^2}} \times \left[\frac{1}{\omega + \omega'} + \frac{2\omega f(\omega)}{\omega^2 - \omega'^2} - \frac{2\omega' f(\omega')}{\omega^2 - \omega'^2} \right] \quad (5.41)$$

care se poate scrie sub forma

$$I_1(T) = \frac{2\hbar\Delta_1\Delta_2}{\pi q R_N} P \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{E_1} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_2}{E_2} \left[\frac{1}{E_1 + E_2} + \frac{2E_2 f(E_1)}{E_1^2 - E_2^2} - \frac{2E_1 f(E_2)}{E_1^2 - E_2^2} \right] \quad (5.42)$$

în urma efectuării schimbării de variabilă

$$E_1^2 = \hbar^2 \omega^2 = \varepsilon_1^2 + \Delta_1^2; \quad E_2^2 = \hbar^2 \omega'^2 = \varepsilon_2^2 + \Delta_2^2$$

$$d(\hbar\omega) = \frac{\varepsilon_1}{\hbar\omega} d\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{\hbar^2 \omega^2 - \Delta_1^2}}{\hbar\omega} d\varepsilon_1; \quad d(\hbar\omega') = \frac{\varepsilon_2}{\hbar\omega'} d\varepsilon_2 = \frac{\sqrt{(\hbar\omega')^2 - \Delta_2^2}}{\hbar\omega'} d\varepsilon_2$$

Expresia (5.42) a fost dedusă inițial de Ambegaokar și Baratoff [14]. Să evaluăm relația (5.42) în cazul $T = 0$ K. Deoarece energiile se măsoară de la nivelul Fermi, în acest caz $f(E) = 0$ pentru $E > 0$ (poziția nivelului Fermi), astfel că al doilea și al treilea termen din (5.42) nu aduc nici o contribuție. Prin urmare,

$$I_1(0) = \frac{2\hbar\Delta_1\Delta_2}{\pi q R_N} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_1}{E_1} \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_2}{E_2} \frac{1}{E_1 + E_2} \quad (5.43)$$

Efectuând substituțiile [25]

$$E_{1,2} = \Delta_{1,2} \cosh \theta_{1,2}; \quad \varepsilon_{1,2} = \Delta_{1,2} \sinh \theta_{1,2}$$

integrala (5.43) devine

$$\int_0^{\infty} d\theta_1 \int_0^{\infty} d\theta_2 \frac{1}{\Delta_1 \cosh \theta_1 + \Delta_2 \cosh \theta_2}$$

care, prin schimbare de variabile

$$u = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \quad v = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$$

și utilizarea relațiilor

$$\cosh \theta_1 \pm \cosh \theta_2 = \frac{2 \cosh u \cosh v}{2 \sinh u \sinh v}$$

se reduce după integrarea în raport cu v la expresia

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\Delta_1^2 \Delta_2^2 + 2\Delta_1 \Delta_2 \cosh u}}$$

Pentru efectuarea integralei în raport cu v s-a efectuat substituția $y = e^v$. Dacă în ultima integrală se efectuează substituția $\cosh 2u = x$ atunci ea se aduce la o formă standard a unei integrale eliptice complete de ordinul întâi, astfel că

$$I_1(0) = \frac{2\hbar}{q R_N} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} K \left(\frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{\Delta_2 + \Delta_1} \right) \quad (5.44)$$

unde $K(x)$ este integrala eliptică completă de ordinul întâi. Utilizând dezvoltarea asimptotică $K(x) = \pi/2$ pentru $x \rightarrow 0$, din (5.44) se obține, pentru $\Delta_1 = \Delta_2$

$$I_1(O) \equiv \frac{\pi \hbar}{qR_N} \frac{\Delta_1 \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2} \quad (5.45)$$

Această expresie aproximativă poate fi utilizată pentru $\Delta_1 \neq \Delta_2$ cu un factor de până la valoarea 3. Pentru $\Delta_1 = \Delta_2$ din (5.44) se obține soluția exactă

$$I_1(O) = \frac{\pi}{2} \frac{\hbar \Delta}{qR_N} \quad (5.46)$$

Această expresie permite evaluarea aproximativă a curentului maxim continuu Josephson. Relațiile deduse mai sus sunt valabile la $T = 0K$. Pentru $T > 0$, integrala (5.42) poate fi transformată într-o sumă în jurul polilor funcției Fermi ($f(F)$). Pentru efectuarea calculului pornim de la expresia (5.34) a lui I_n care conține o singură integrală. La tensiune zero, $\omega_1 = 0$, introducând schimbarea de variabilă

$$y_i(\omega) = \frac{\hbar \omega}{\Delta_i}, \quad \bar{i} = 1, 2$$

expresia (5.34) devine

$$I_{J_1}(O, T) = -\frac{\hbar}{qR_N} \int_0^\infty d\omega \tanh\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) \operatorname{Im} \left[\frac{1}{\sqrt{y_1^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{y_2^2 - 1}} \right] \quad (5.47)$$

unde s-au utilizat relațiile

$$1 - 2f(\omega) = \tanh\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right)$$

și

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}, & a > 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{1 - a^2}}, & a < 1 \end{cases}$$

Expresia (5.46) este echivalentă cu expresia

$$-\frac{1}{2i} \int_{\Gamma_0} dz \frac{f(z)}{\sqrt{y_1^2(z) - 1} \sqrt{y_2^2(z) - 1}}$$

unde conturul Γ_0 este reprezentat în Fig. 6.23. Funcția Fermi $f(z) = (e^{\beta z} + 1)^{-1}$ are poli la $z_n = i\omega_n = i(\pi/\beta)(2n+1)$ cu reziduul $-1/\beta$ unde $\beta = \hbar/k_B T$. Prin urmare, integrala poate fi calculată deformând conturul Γ_0 în conturul Γ pentru a include acești poli, așa cum se reprezintă în Fig. 6.23. Astfel, relația (5.46) devine

$$I_1(T) = \frac{\Delta_1(T) X_2(T)}{qR_N} \frac{\pi \hbar}{3} \sum_{l=0, \pm 1, \pm 2} \left\{ [\hbar^2 \omega_l^2 + \Delta_2^2(T)] [\hbar^2 \omega_l^2 + \Delta_1^2(T)] \right\}^{-1/2}$$

și pentru $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$ se obține

$$I_1(T) = \frac{\Delta^2(T)}{R_N} \frac{\pi}{\beta} \sum_{l=0, \pm 1, \pm 2} [\hbar^2 \omega_l^2 + \Delta^2(T)]^{-1}$$

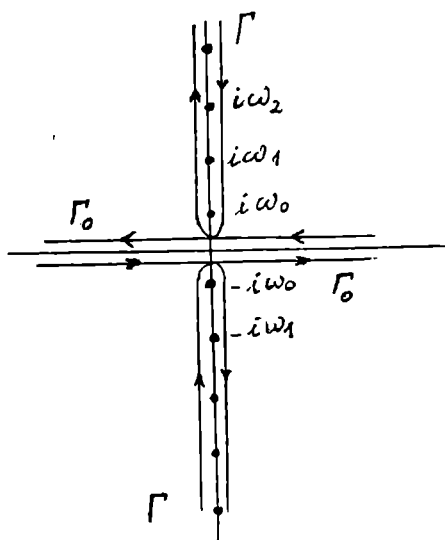


Fig. 6.23

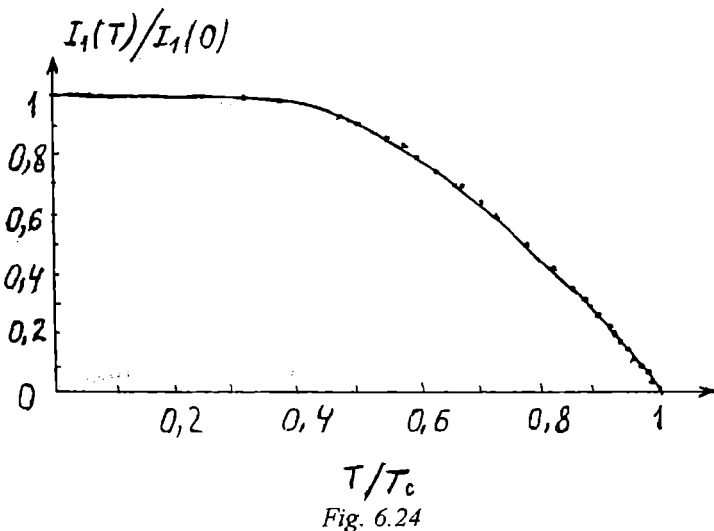


Fig. 6.24

Un calcul analitic dă

$$I_1(T) = \frac{\pi \Delta(T)}{2 R_N} \tanh\left(\frac{\Delta(T)}{2k_B T}\right) \quad (5.48)$$

În Fig. 6.24 se reprezintă raportul $I_1(T)/I_1(0)$ obținut experimental pentru joncțiunea simetrică Sn-SnO-Sn și comparat cu curba teoretică [26]. Pentru $\Delta_1 \neq \Delta_2$ acest raport $I_1(T)/I_1(0)$ este dat de raportul expresiilor (5.47) și (5.44). Introducând în (5.47) mărimile adimensionale $\delta_i = \Delta_i(T)/\Delta_i(0)$ și $t_i = T/T_{ci}$, $i=1,2$ unde T_{ci} este temperatura critică a electrodului i , raportul $I_1(T)/I_1(0)$ este dat de expresia

$$\frac{I_1(T)}{I_1(0)} = \frac{2\pi t_1 T_{c1} \delta_1(T_1) \delta_2(T_2)}{\frac{2\Delta_1(0)\Delta_2(0)}{\Delta_1(0) + \Delta_2(0)} K\left(\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\Delta_1 + \Delta_2}\right)} \sum_{l=0,1,2} \left\{ \prod_{i=1}^2 \left[\frac{(2l+1)^2 \pi^2 t_i^2}{(\Delta_1(0)/T_{ci})^2} + \delta_i^2(t_i) \right] \right\}^{-1/2} \quad (5.49)$$

Această expresie poate fi calculată numeric având ca parametri T_{ci} și $\Delta_i(0)$. În cazul cuplajului tare se utilizează expresia (5.39) pentru densitatea de perechi de electroni în (5.38). Pentru o joncțiune simetrică se obține

$$I_1(T) = \frac{\pi \hbar \Delta_0}{2 q R_N} \left[\frac{\tanh(\Delta_0 / 2k_B T)}{1 - \Delta_1'} \right] - \frac{\hbar}{q R_N} \int_{\Delta_0}^{\infty} d(\hbar\omega) \tanh \frac{\hbar\omega}{2k_B T} J_n \left[\frac{\Delta^2(\omega)}{\hbar^2 \omega^2 - \Delta^2(\omega)} \right]$$

unde

$$\Delta_1(\omega) = \text{Re}[\Delta(\omega)]; \quad \Delta_1'(\omega) = \frac{d\Delta_1(\omega)}{d(\hbar\omega)}$$

iar Δ_0 este valoarea lui $\hbar\omega$ egală cu Δ_1 . Calculul numeric conduce la concluzia că în cazul cuplajului tare curentul critic este mult mai mic decât în cazul cuplajului slab. Prezența impurităților paramagnetice în stratul izolator sau în electrozii supraconductori determină micșorarea curentului Josephson.

6.5.6. Maximul Riedel

În § 6.5.4. am studiat efectul Josephson la o tensiune V dependentă de timp, această dependență fiind de formă arbitrară. Am observat că curentul maxim Josephson, I_{J1} , prezintă o singularitate la $V = 2\Delta/q$, numită maxim Riedel (Fig. 6.21), care se datorează singularității în densitatea de perechi de electroni la $qV = \Delta$ (Fig. 6.20). În acest paragraf vom arăta cum apare maximul Riedel atunci când tensiunea dependentă de timp este de formă sinusoidală, adică atunci când joncțiunea se găsește într-un câmp de radiație. Rescriem expresia (5.13) a curentului total când pe joncțiune se aplică o tensiune $V(t)$ dependentă de timp

$$I(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ e^{-\theta(t)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\eta t'} \left[e^{i(2)\theta(t-t')} S(t') + e^{-R_0} e^{-i(2)\theta(t-t')} R'(t') \right] \right\} \quad (5.49)$$

Tensiunea totală aplicată pe joncțiune este de forma

$$V(t) = V_0 + v \cos \omega t$$

și

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2q}{\hbar} V(t)$$

Prin integrarea acestei relații se găsește factorul de fază

$$\theta(t) = \omega_0 t + \frac{2qv}{\hbar \omega} \sin \omega t + \theta'_0 \quad (5.50)$$

unde $\omega_0 = 2qV_0/\hbar$. Substituind (5.50) în (5.49) se obține

$$I(t) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ e^{-i(\alpha/2) \sin \alpha t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-\eta t'} \left[e^{-i(\omega_0/2)t'} e^{i(\alpha/2) \sin \alpha(t-t')} S(t') + e^{-i(\omega_0/2)t'} e^{-i(\alpha/2) \sin \alpha(t-t')} e^{-\theta'_0} R'(t') \right] \right\} \quad (5.51)$$

Dezvoltând în serie Fourier termenul care conține $\sin \omega t$

$$e^{i(\alpha/2) \sin \alpha t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\alpha t} \quad (5.52)$$

unde $\alpha = 2qv/\hbar \omega$. Coeficienții dezvoltării (5.52) se exprimă prin funcții Bessel de ordin întreg, $J_n(x)$

$$C_n = C_n^* = J_n(\alpha/2) \quad (5.53)$$

Substituind (5.52) și (5.53) în (5.51) și transformările Fourier ale lui $S(t)$ și $R'(t)$ se obține

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha/2) J_l(\alpha/2) \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left\{ e^{i(l-n)\omega t} S(i\eta - \frac{\omega_0}{2} - l\omega) + e^{-i[(l+n)\omega t + \omega_0 t + \theta]_0} R'(i\eta + \frac{\omega_0}{2} + l\omega) \right\} \quad (5.54)$$

unde am notat $\theta = \theta_0 + \theta'_0$. Introducând mărimile $I_{qp}(\omega)$, $I_{qp1}(\omega)$, $I_{j1}(\omega)$, $I_{j2}(\omega)$ în (5.17), care sunt corelate cu părțile reală și imaginară ale lui $S(\omega)$ și $R'(\omega)$ relația de mai sus poate fi scrisă

$$I(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) J_l\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left\{ I_{qp}\left(-\frac{\omega_0}{2} - l\omega\right) \cos[(l-n)\omega t] + I_{qp1}\left(-\frac{\omega_0}{2} - l\omega\right) \sin[(l-n)\omega t] + I_{j2}\left(\frac{\omega_0}{2} + l\omega\right) \cos[(n+l)\omega t + \theta] + I_{j1}\left(\frac{\omega_0}{2} + l\omega\right) \sin[(n+l)\omega t + \theta] \right\} \quad (5.55)$$

Pentru $v = 0$ și $\omega = 0$ această ecuație se reduce la ec. (5.21). În această situație, așa după cum am observat, termenul I_{qp1} nu aduce contribuție. În expresia generală (5.55) a curentului tunel neglijăm termenii care conțin I_{qp1} și I_{j2} (termenul cu $\cos q$) și obținem

$$I(t, \omega_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) J_l\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left\{ I_{\varphi}\left(\frac{\omega_o}{2} + l\omega\right) \cos[(l-n)\omega t] + I_{j_1}\left(\frac{\omega_o}{2} + l\omega\right) \sin[(n+l)\omega + \omega_o]t + \theta \right\} \quad (5.56)$$

Primul termen reprezintă curentul de uniparticule iar cel de al doilea reprezintă curentul de perechi. Să exprimăm în cele ce urmează componenta continuă a curentului dat de această expresie. Componenta continuă a primului termen este dată de toți termenii din sumă pentru care este satisfăcută condiția $l = n$ (deoarece în acest caz cosinusul are valoare unitate). Prin urmare, componenta continuă a curentului de uniparticulă este dată de expresia

$$\bar{I}_q(V_o) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) I_{\varphi}\left(\frac{\omega_o}{2} + n\omega\right) \quad (5.57)$$

Acest curent de uniparticulă prezintă trepte la valori ale tensiunii

$$V_{on} = \frac{2\Delta}{q} \pm n \frac{\hbar\omega}{q}$$

cu amplitudinea unei trepte proporționale cu $J_n^2(\alpha/2)$. Aceste trepte apar deoarece $I_{\varphi}(\omega)$ are o discontinuitate la $\hbar\omega = 2\Delta$; ele corespund tunelării uniparticulă cu participarea fotonilor [27, 28]. Componenta continuă a celui de al doilea termen din expresia (5.56) se obține pentru

$$\omega_o = \pm(n+l)\omega$$

și reprezintă contribuția tunelării de perechi la curentul continuu. Ea are valoarea

$$\bar{I}_j(V_o) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) J_{N-n}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \left[\left(1 - \frac{N}{2}\right) \omega \right] \sin \theta \delta(\omega_o \pm N\omega)$$

unde

$$\delta(\omega_o \pm N\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_o \pm N\omega \neq 0 \\ 1, & \omega_o \pm N\omega = 0 \end{cases}$$

și $N = n + 1$. Prin urmare, amplitudinea maximă a treptei n induse de radiofrecvență este

$$\bar{I}_j(V_N) = \left| \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l\left(\frac{\alpha}{2}\right) J_{N-l}\left(\frac{\alpha}{2}\right) I_{j_1}\left[\left(1 - \frac{N}{2}\right)\omega\right] \right| \quad (5.59)$$

unde $V_N = \hbar N\omega/2q$. Numărul de trepte observate experimental crește cu creșterea puterii de microunde. Dependența amplitudinii unei trepte de puterea radiației de microunde este reprezentată în Fig. 6.25 a. pentru o treaptă Josephson ($N = 3$) și în Fig. 6.25 b, pentru aceeași treaptă ($N = 3$) însă a curentului de uniparticule [29]. Liniile pline reprezintă curbele teoretice (5.59) și, respectiv, (5.57). Datorită prezenței singularității în $I_{j1}[(1-N/2)\omega]$ variația amplitudinii treptei Josephson are o mică variație de la dependența $|J_N(\alpha)|$ dată de (4.5). Pentru a estima valoarea lui v la care apar evident efectul singularității Riedel, procedăm astfel. Notăm cu M numărul treptei corespunzătoare aproximativ lărgimii benzii interzise. Valoarea lui M se găsește din condiția $M\hbar\omega = 2\Delta$.

Prima contribuție semnificativă în suma (5.59) la care argumentul lui $I_{j1}[(1-N/2)\omega]$ este în vecinătatea singularității este dată de termenul n la care satisface relațiile

$$\frac{\alpha}{2} \geq n; \quad \left(n - \frac{N}{2}\right)\omega \equiv \frac{2\Delta}{\hbar}$$

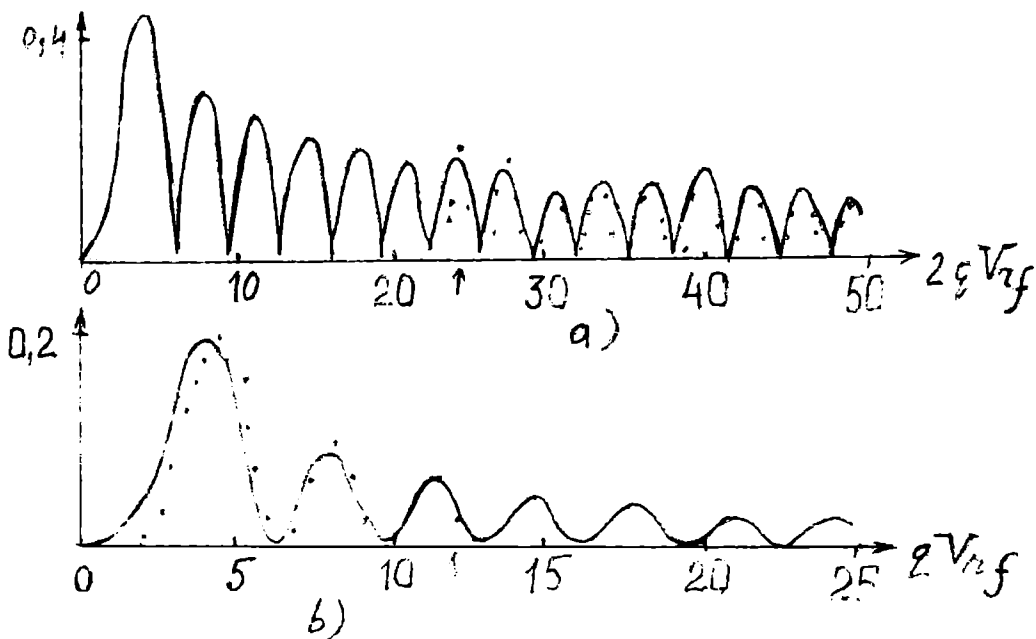


Fig. 6.25

Din aceste relații și relația (5.60) se obține

$$v \geq \frac{\hbar\omega}{2q} \left(M + \frac{N}{2} \right)$$

Pentru a determina valoarea lui $I_J(\omega)$ în vecinătatea lui $(n-N/2)\omega = 2\Delta/\hbar$ se măsoară amplitudinea treptei în funcție de frecvență și amplitudinea tensiunii radiației de microunde. În Fig. 6.26 se reprezintă rezultatele măsurătorilor raportului $I_J(\omega)/I_J(0)$ obținute în joncțiuni de dimensiuni foarte mici din Sn-SnO_x-Sn. Măsurătorile au fost efectuate la $T \sim 1K$ și frecvența radiației aplicate de 20-26 GHz. Se observă maximul Riedel la $\hbar\omega/2\Delta = 1$, egal cu $3 I_J(0)$; cu linie plină este reprezentată curba teoretică.

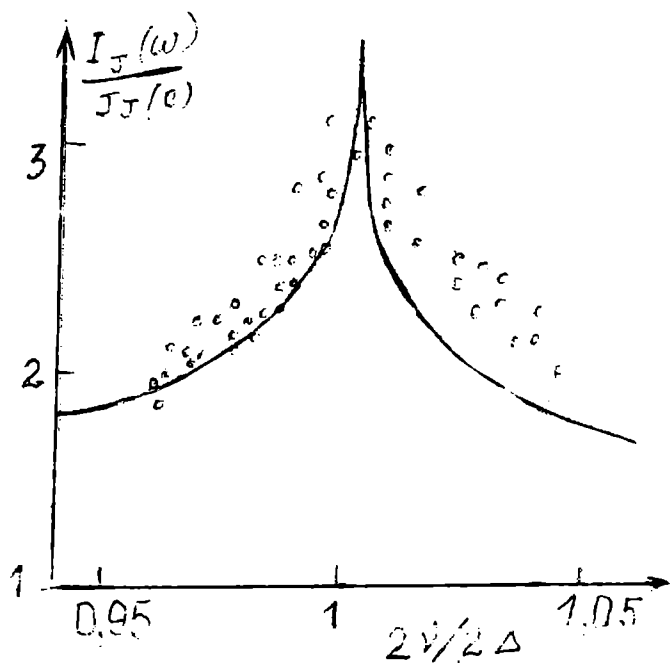


Fig. 6.26

6.6. Caracteristicacurent-tensiune

6.6.1. Legături slabe

Joncțiunea Josephson este o structură supraconductor-izolator supraconductor (Fig. 6.27) și prezintă caracteristica I-V de forma reprezentată în Fig. 6.3. Pentru apariția efectului Josephson este necesară existența unui cuplaj slab între cei doi supraconductori. În joncțiunea Josephson acest cuplaj slab se realizează prin tunelarea perechilor de electroni. Totuși există și alte configurații la care se realizează un cuplaj slab între doi supraconductori. Avestea sunt

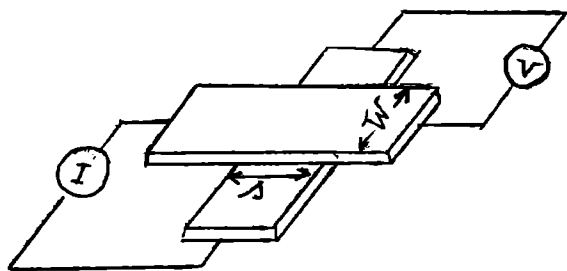


Fig. 6.27

reprezentate în Fig. 6.28. Puntea Dayem (Fig. 6.28 a) constă dintr-un strat supraconductor care este divizat în două regiuni printr-o constricție foarte îngustă (1 mm). Pentru ca prin constricție să aibă loc transportul de perechi de electroni, coerent, trebuie ca lărgimea ei maximă L să satisfacă condiția $L < \xi$ unde ξ este lungimea de coerență în supraconductorul considerat. Deoarece ξ depinde de temperatură această condiție este deci satisfăcută într-un anumit domeniu de

temperatură. Caracteristica I-V a acestei structuri arată ca în Fig. 6.29 și este deci diferită de a joncțiunii Josephson prin aceea că la tensiune diferită de zero curentul se continuă de la valoarea critică I_0 . În Fig. 6.28 b este reprezentată o punte Notarys-Mercereau în care, peste constricție se depune un strat de metal normal și constricția nu mai este necesar să fie atât de îngustă ca în puntea Dayem. În Fig. 28 c este reprezentată structura cu contact punctiform. În Fig. 6.28 d este reprezentată structura cu bobită a lui Clarke, iar în Fig. 6.28 e, este reprezentată o structură alcătuită din două supraconductoare suprapuse în cruce. Aceste structuri au caracteristica I-V ca cea reprezentată în Fig. 6.29. Multe din proprietățile caracteristicii I-V a unei legături slabe pot fi exprimate pe baza circuitului echivalent, reprezentat în Fig. 6.30, care constă dintr-un element Josephson nelinier în paralel cu o capacitate și cu conductanța asociată transportului unielectronilor.

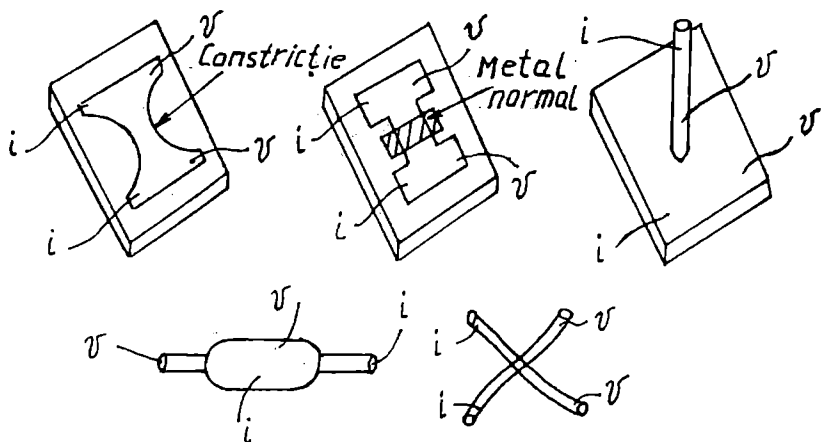


Fig. 6.28

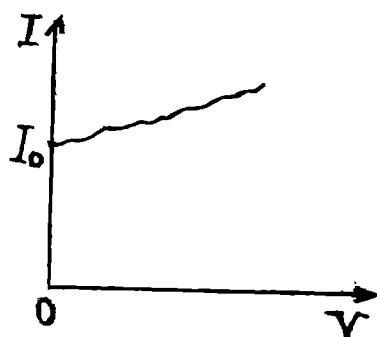


Fig. 6.29

6.6.2. Modelul joncțiunii șuntată rezistiv

Reprezentăm o legătură slabă prin circuitul echivalent reprezentat în Fig. 6.30. Deoarece impedanța dispozitivului este în mod uzual mult mai mică decât impedanța sursei, presupunem că circuitul este alimentat de la o sursă de curent constant. Presupunem de asemenea, că circuitul numai curent continuu, I_{ci} . Curentul prin circuit este dat de expresia

$$I_{cc} = C \frac{dV(t)}{dt} + GV(t) + I_c \sin \theta(t) \quad (6.1)$$

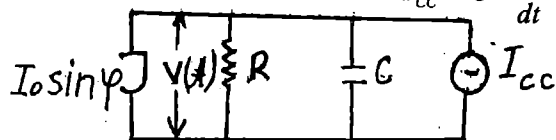


Fig. 6.30

unde Cdv/dt este curentul de deplasare prin capacitorul C , GV este curentul prin rezistorul R de conductanță $G = 1/R$ și $I_c \sin \theta$ este curentul de perechi Josephson. $V(t)$

este căderea de tensiune pe dispozitiv care este corelată cu diferența de fază $\theta(t)$ prin relația cunoscută

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2qV}{\hbar} \quad (6.2)$$

Considerăm că diferența de fază θ nu prezintă variație spațială pe structură. Substituim ultima relație în (6.1) aceasta devine

$$I_{cc} = \frac{\hbar}{2q} C \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\hbar}{2q} \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dt} + I_c \sin \theta \quad (6.3)$$

Notăm

$$\omega_J = \left(\frac{2q}{\hbar} \frac{I_c}{C} \right)^{1/2}$$

care este frecvența plasmei și introducem variabilele adimensionale

$$\tau = \omega_J t; \quad \beta_J = \frac{1}{\omega_J R C}$$

$$\eta(\tau) = \beta_J \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{V}{R I_c}; \quad \alpha = \frac{I_{cc}}{I_c}$$

Ecuția (6.3) se scrie

$$\alpha = \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \beta_J \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta \quad (6.4)$$

În general ecuația nu poate fi rezolvată analitic cu excepția cazului $C \rightarrow 0$ când poate fi neglijat termenul ce conține derivata a doua a lui θ . În acest ultim caz ec. (6.4) se simplifică

$$\alpha = \beta_J \frac{d\theta}{d\tau} + \sin \theta \quad (6.5)$$

Pentru $|I_{cc}| > I_c$ are soluția

$$\theta(\tau) = 2 \arctg \left[\left(\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \right)^{1/2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi \tau}{T} \right) - \alpha \right] \quad (6.6)$$

unde perioada T este dată de relația

$$T = \frac{2\pi\beta_J}{(\alpha^2 - 1)^{1/2}}$$

Media în timp a lui $d\theta/d\tau$ este

$$\overline{\frac{d\theta}{d\tau}} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\theta}{d\tau} d\tau = \frac{2\pi}{T}$$

Tensiunea continuă pe dispozitiv este proporțională cu această medie astfel că relația curent-tensiune se scrie

$$\frac{\bar{V}}{R I_c} = \beta_J \frac{\overline{d\theta}}{d\tau} = \sqrt{\alpha^2 - 1} \quad (6.7)$$

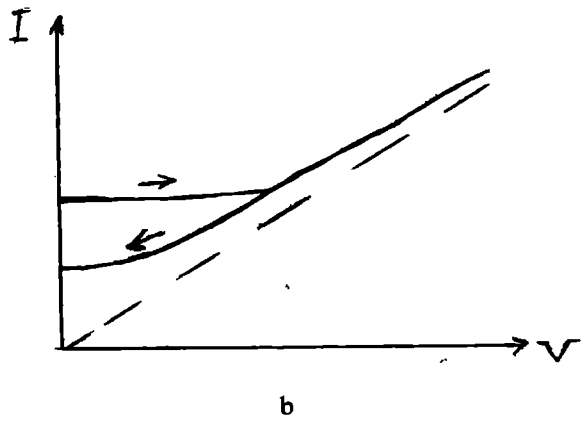
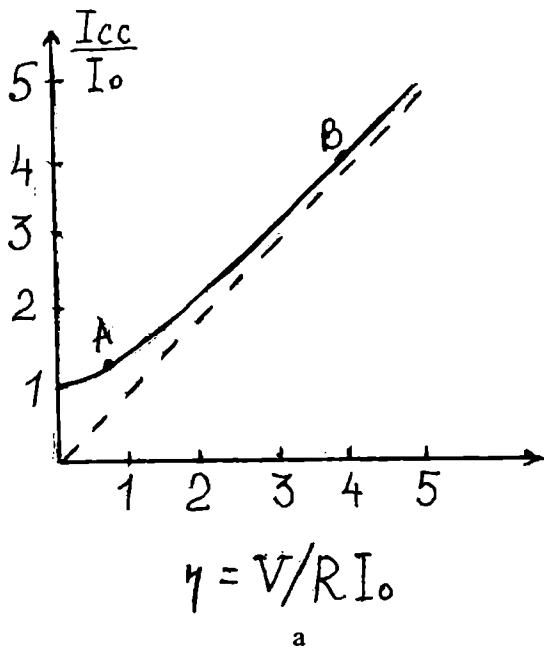


Fig. 6.31

Această caracteristică este reprezentată în Fig. 6.31. Se observă că pentru I_{cc} mai mic decât curentul critic I_c ($\alpha < 1$) tensiunea mediată în timp este egală cu zero. Dacă nu efectuăm medierea în timp obținem din (6.6) și (6.7) tensiunea în curent alternativ

$$\frac{V(\tau)}{R I_0} = \frac{(\alpha^2 - 1) / \alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi\tau}{T}\right) + \frac{1}{a^2} \left(\sqrt{\alpha^2 - 1} \sin\frac{\pi\tau}{T} - \cos\frac{\pi\tau}{T} \right)^2}$$

În Fig. 6.32 se reprezintă dependența de timp a lui $V(\tau)$ pe joncțiune pentru $\beta_J = 20$ și $I_{cc}/I_c = 1,2$ (curba a), $I_{cc}/I_c = 4$ (curba b). Dacă capacitatea joncțiunii nu este neglijabilă, ec. (6.4) poate fi rezolvată numeric și se găsește cum caracteristica I-V poate să prezinte histerzis, astfel că drumul parcurs la creșterea I nu este identic cu cel de la descreșterea I. Această comportare este reprezentată în Fig. 31 b. Efectul are loc atunci când este satisfăcută condiția $\beta_c = 2\pi I_c R^2 C / \Phi_0 > 1$; $\beta_c = 1/\beta_J$ este numit parametru de histerzis.

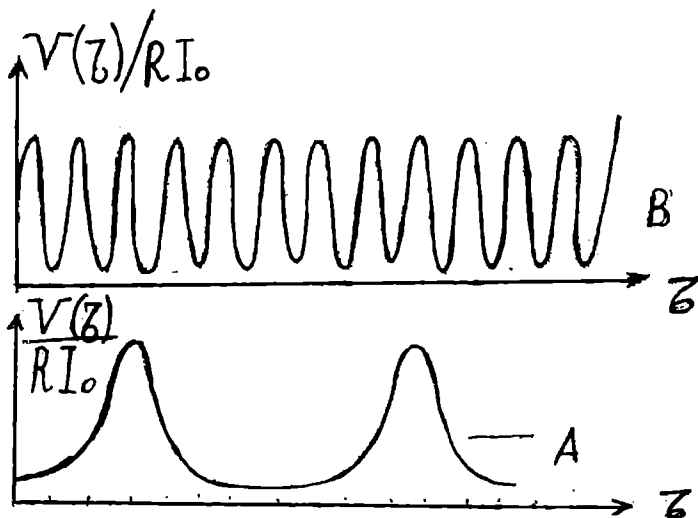


Fig. 6.32

6.6.3. Joncțiunea tunel alimentată de la sursă de curent

În paragraful precedent am prezentat modelul joncțiunii șunțată rezistiv la care elementul Josephson a fost descris prin relația sinusoidală simplă $I = I_0 \sin \theta$ iar conductanța unielectronilor a fost luată în considerare printr-o rezistență paralel. Totuși, pentru o joncțiune

tunel noi am dedus în capitolul precedent pe baza teoriei microscopice o expresie mult mai generală pentru curent care cuprinde atât curentul de unielectroni cât și curentul de perechi. Acest curent este dat de expresia (5.49)

$$I(t) = I \left\{ e^{n'} e^{-i\theta(t)/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-n't'} \left[e^{i\theta(t-t')} S(t') + e^{-i\theta(t-t')/2} R'(t') \right] \right\} \quad (6.8)$$

Această relație poate fi scrisă într-o formă echivalentă

$$I(\theta, t) = \int_0^{\infty} dt' \left[S(t') \sin \frac{\theta(t-t') - \theta(t)}{2} - R'(t') \sin \frac{\theta(t-t') + \theta(t)}{2} \right] \quad (6.8a)$$

$S(t)$ și $R'(t')$ sunt funcții reale descrescătoare oscilatorii cu frecvența $2\Delta/\hbar$ [30.31]. În capitolul precedent, am analizat cazul când joncțiunea este polarizată la tensiune constantă. Am observat că la valori finite ale tensiunii, curentul de perechi nu aduce o contribuție observabilă la curentul total. Presupunem acum că tensiunea este alimentată de la o sursă de curent constant I_{cc} și că are capacitatea C . Circuitul echivalent este reprezentat în Fig. 6.33 și curentul electric este dat de relația

$$I_{cc} = \frac{\hbar}{2q} C \frac{d^2\theta}{dt^2} + I(\theta) \quad (6.9)$$

unde $I(\theta)$ este dat de ecuația (6.8). Pentru a determina caracteristica I-V mediată în timp, trebuie să rezolvăm ecuația (6.9). Prezentăm acest calcul în aproximația adiabatică. Relația (6.2) dintre fază și tensiune poate fi

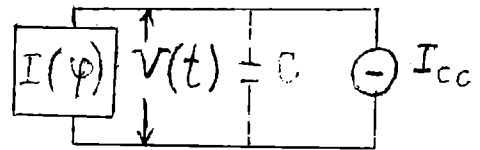


Fig. 6.33

scrisă sub forma

$$\theta(t) = \frac{2q}{\hbar} \int_0^t V(t') dt'$$

Se presupune că tensiunea $V(t)$ este mică în comparație cu Δ/q și astfel se poate face următoarea aproximație

$$\int_{t_0}^t V(t') dt' \equiv V(t)(t - t_0) + \text{termeni de ordin superior} \quad (6.10)$$

și deci, factorii de fază se pot scrie

$$\theta(t) = V(t)(t - t_0); \quad \theta(t - t') = V(t)(t - t_0) - V(t')t'$$

Utilizând aceste expresii în (6.8), rezultă

$$I(t) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i(n-1/2)V(t)t'} S(t') + e^{-i(n-1/2)V(t)t'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i(n-1/2)V(t)t'} R'(t') \right\}$$

Utilizând transformatele Fourier ale lui $S(t)$ și $R'(t')$ și definițiile (5.17), ecuația (6.9) devine

$$I_{cc} = \frac{\hbar}{2q} C \frac{d^2\theta}{dt^2} + I_{ap}(V(t)) + I_{j_2}(V(t)) \cos \theta(t) + I_{j_1}(V(t)) \sin \theta(t)$$

Aceasta este expresia curentului în aproximația adiabatică. Ea este valabilă, evident, și în cazul $V(t) = V_0 = \text{constant}$, în care aproximația (6.10) este satisfăcută. Utilizând notațiile

$$I_{ap}(V) = GV; \quad I_{j_2}(V) = \varepsilon GV; \quad I_{j_1}(V) = I_c \quad (6.11)$$

ecuația (6.10) poate fi scrisă

$$I_{cc} = \frac{\hbar}{2q} C \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\hbar}{2q} G(1 + \varepsilon \cos \theta) \frac{d\theta}{dt} + I_c \sin \theta$$

Pentru $\varepsilon=0$, această ecuație se reduce la ecuația (6.3) dedusă în modelul joncțiunii cu rezistență șunt, model empiric. Menționăm că relația (6.11) a fost obținută din teoria microscopică. Apariția, în acest caz, a termenului $\cos\theta$ se datorează luării în considerare a efectului interferenței unielectronilor cu perechile. Un calcul numeric, în cazul general, al ecuațiilor (6.9) și (6.8), fără a utiliza aproximația adiabatică, efectuat la OK, au scos în evidență următoarele proprietăți ale caracteristicii I-V [32]:

(a) Pentru valori mici ale raportului RCA/\hbar , curentul continuu este mare la valori ale tensiunii mai mici decât Δ/q ; acesta este în principal curentul de perechi de electroni.

(b) Apare o singularitate a curentului continuu la tensiunea $V=2\Delta/q$ (maximul Riedel).

(c) Apar, de asemenea, singularități la tensiunile $V_n=2\Delta/qn$; aceste subarmonice au fost puse în evidență, de asemenea, experimental.

(d) La capacități mici, $RCA/\hbar \rightarrow 1$, contribuția la curent o aduce, în principal, curentul de cuasiparticule (unieletroni); acest rezultat este similar cu cazul când joncțiunea este polarizată de la o sursă de tensiune.

6.6.4. Modelul sursei de curent când joncțiunea se află în câmp de radiație electromagnetică

În cap. 6.4. am studiat efectul Josephson în curent alternativ (în prezența unui câmp de radiație), utilizând configurația cu joncțiunea alimentată de la sursă de tensiune. Însă, în afară de cazul când se utilizează un circuit de acord, impedanța sursei de radiofrecvență este mai mare decât impedanța joncțiunii, astfel că este mai adecvat să se utilizeze modelul cu sursă de curent constant. Dacă utilizăm modelul joncțiunii cu rezistență șunt, atunci la curentul continuu I_c trebuie să adăugăm în prezența câmpului de radiație un curent alternativ $I_1 \sin\omega t$. În cazul când capacitatea joncțiunii este egală cu zero, dependența de timp a diferenței de fază pe structură este dată de ecuația

$$\frac{I_1}{I_c} \sin\Omega\tau + \frac{I_{cc}}{I_c} = \frac{d\theta}{d\tau} + \sin\theta \quad (6.12)$$

unde τ este un timp adimensional

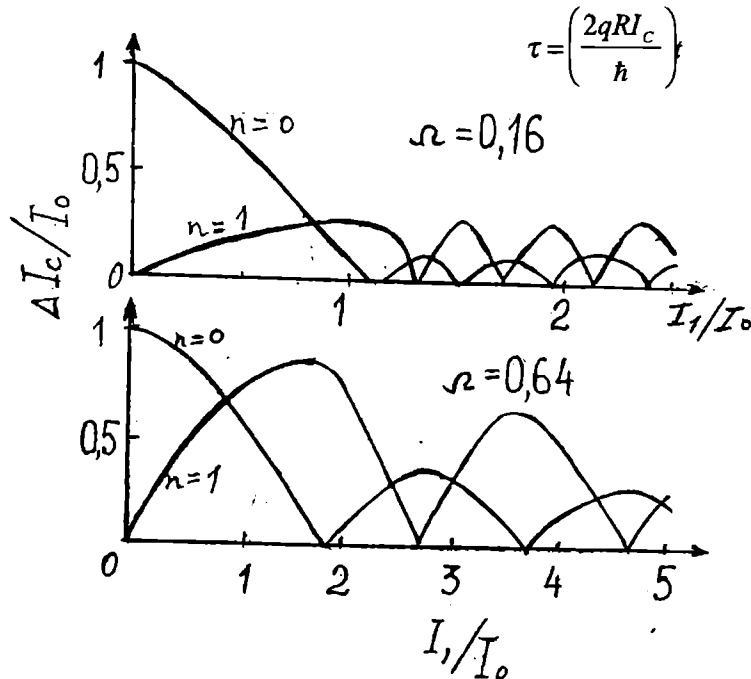


Fig. 6.34

și Ω este o frecvență adimensională

$$\Omega = \frac{\hbar\omega}{2qRI_c}$$

Ecuația (6.12) a fost rezolvată, utilizând mașini de calcul. Astfel, s-a calculat amplitudinea treptelor induse de radiație în caracteristica I-V în funcție de amplitudinea I_1 (și deci, de putere) a radiației. Aceasta depinde de Ω . La valori mici ale lui Ω , dependența de puterea radiației se deosebește de comportarea unei funcții Bessel obținută în cazul modelului ca sursă de tensiune. În Fig. 6.34 se

reprezintă dependența de puterea radiației, de fapt de I_1/I_0 , a curentului la tensiune zero ($n=0$) și a primei trepte induse ($n=1$) pentru două valori ale lui W . Aceste rezultate au fost verificate experimental pe legături slabe ca puntea Dayem și structura cu contact punctiform [G8]. Rezultatele experimentale evidențiază creșterea curentului la tensiune zero, în prezența câmpului de radiație.

6.6.5. Măsurarea caracteristicii curent-tensiune

Caracteristica I-V se poate trece pe hârtie, utilizând un inscriptor X-Y în circuitul reprezentat în Fig. 6.35. Pe Y se înregistrează tensiunea de pe rezistența de sarcină R_s , care este direct proporțională cu curentul din circuit, iar pe X se înregistrează tensiunea pe structură.

Joncțiunea este imersată în Helium sau în azot lichid, după caz. Un circuit complex pentru trasarea caracteristicii I-V la oscilograf este reprezentată în Fig. 6.36 [26]. Ca sursă de curent se utilizează un generator de unde triunghiulare de frecvență joasă (50-100 Hz). Pentru limitarea curentului se utilizează rezistorul R_L (în trei trepte) și rezistorul șunt R_s (de asemenea, în trei trepte). Tensiunea de pe R_s este proporțională cu curentul și se aplică la intrarea Y a oscilografului. La intrarea X se aplică tensiunea de pe joncțiune. Ambele semnale care se aplică la intrările osciloscopului sunt amplificate

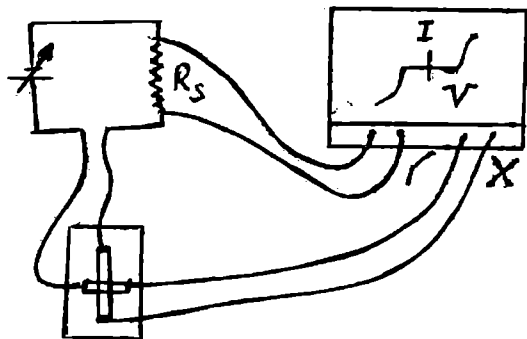


Fig. 6.35

cu ajutorul a două amplificatoare diferențiale de zgomot mic, pentru a decupla proba de aparatele externe. De asemenea, la intrarea Y a osciloscopului împreună cu tensiunea de pe R_s se aplică o tensiune de referință V_R care poate fi modificată manual. Pe osciloscop apare caracteristica I-V a joncțiunii și o linie orizontală corespunzătoare lui V_R . Pentru măsurarea curentului critic, se aduce linia V_R să coincidă cu capătul liniei verticale a curentului de perechi; V_R se măsoară cu un voltmetru digital. O altă cale pentru a măsura curentul maxim Josephson continuu este de a introduce la intrarea Y a osciloscopului un comparator diferențial. Acest comparator dă o tensiune continuă V_c care se adaugă diferențial la tensiunea semnalului de intrare (provenită de la R_s) și din comparație se poate determina curentul maxim Josephson.

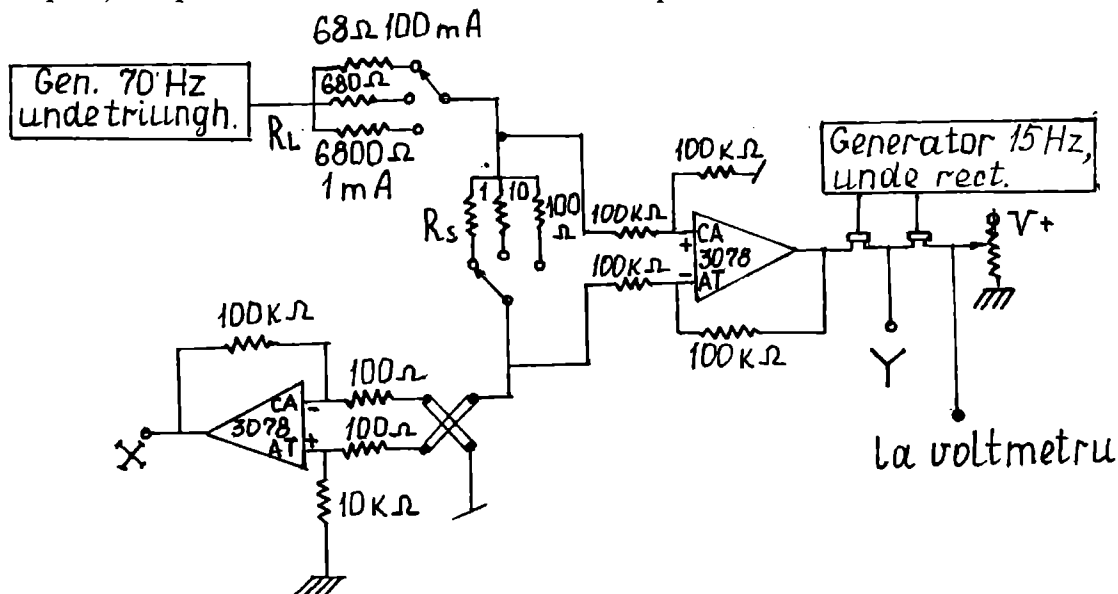


Fig. 6.36

6.6.6. Micropunți cu supraconductori

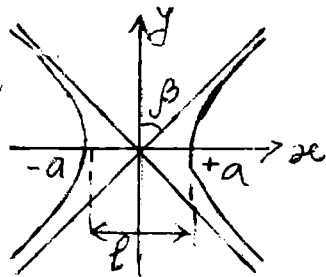


Fig. 6.37

O punte cu supraconductori este reprezentată în Fig. 6.28 a. Atunci când lățimea și grosimea punții sunt mici în comparație cu adâncimea de penetrație London, dar mari în comparație cu lungimea de coerență, aceasta funcționează în regim de transport de flux. Aceste dimensiuni sunt cuprinse între 50 nm și 200 nm [33,34]. Distribuția curentului și fazei perechilor se poate calcula, în acest caz, cu ajutorul ecuației Ginzburg-Landau în aproximația bidimensională. Să considerăm că puntea are forma hiperbolică

reprezentată în Fig. 6.37, cu lățimea 1. Hiperbola are focarele situate la $(-a,0)$ și $(a,0)$, iar $a=1/2 \sin\beta$ (unghiul β este definit pe figură). Densitatea de curent prin punte este descrisă de ecuația Ginzburg-Landau

$$\vec{J} = \frac{2q}{m} |\psi|^2 (\hbar \Delta \theta - 2q \vec{A})$$

Deoarece acțiunea transversală a punții este foarte mică, energia cinetică a curentului este mult mai mare decât energia câmpului, cu un factor de ordinul $\lambda^2/1D$, unde D este grosimea stratului subțire (al punții). Prin urmare, în expresia curentului se poate neglija termenul de câmp. Presupunem în continuare că atât câmpul, cât și curentul sunt astfel de mici că $|\psi|$ se poate înlocui cu ψ_∞ peste tot. Astfel, teoria GL se poate reduce la teoria lui London și deci

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2\mu_0 q \lambda^2} \Delta \theta$$

Faza perechilor de electroni se deduce din ecuațiile

$$\Delta^2 \theta = 0; \quad \partial \theta / \partial n = 0$$

deoarece $\text{div } J=0$. Presupunem că prin punte trece un curent dat I_c . Se pune problema să se calculeze densitatea de curent J_t și faza θ_t în punte. În acest scop, se utilizează metoda transformărilor conforme. Un punct $z=(x,y)$ este reprezentat prin $z=x+iy$. În această metodă, o constricție hiperbolică se transformă în benzi și plane. Într-o punte hiperbolică fără vortexuri se obțin următoarele rezultate

$$\theta(t) = \frac{I_c}{I_c} \frac{\pi}{2\beta} R_c \left\{ \ln \left(z/a + \sqrt{z^2/a^2 - 1} \right) \right\}$$

$$J_t(z) = i \frac{I_c}{\pi D} \frac{\pi}{2\beta} (a^2 - z^2)^{-1/2}$$

Cu creșterea lui β concentrarea curentului către marginile punții este mai pronunțată. În prezența vortexurilor densitatea totală de curent este egală cu suma dintre densitatea de curent extern J_t și densitatea de curent de vortexuri J_v [35]

$$J = J_t + \sum_{i=1}^n J_v i \tag{6.1}$$

unde n este numărul de vortexuri prezente în punte. Calculul se efectuează, de asemenea, prin utilizarea metodei transformărilor conforme [35]. Existența vortexurilor într-o punte poate fi pusă în evidență cel mai ușor prin măsurarea caracteristicii I-V. Această caracteristică este divizată în două părți principale. Prima regiune a caracteristicii este cea în care curentul este mai mic decât curentul critic I_0 . În acest caz există vortexuri, însă, acestea sunt fixate (captate) de bariera de suprafață sau de centre de captare din interiorul punții. Valoarea curentului critic depinde de bariera de suprafață, precum și de intensitatea și de distribuția centrelor de captură și ambele depind de materialul din care este construită puntea, precum și de tehnica de preparare. Dacă se aplică un curent continuu mai mare decât curentul critic, apare o tensiune între terminalele

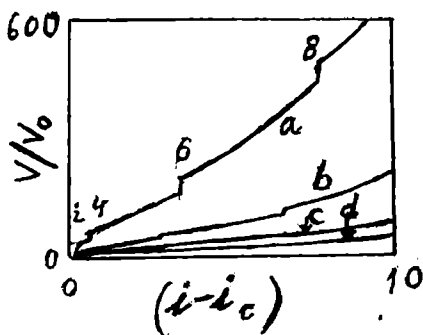


Fig. 6.38

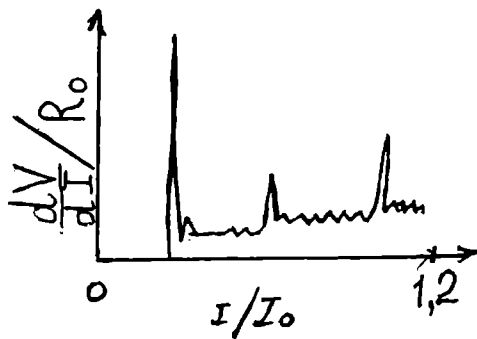


Fig. 6.39

punții, ceea ce arată că vortexurile încep să se deplaseze prin punte. Tensiunea care apare între punctele z_1 și z_2 se poate calcula, utilizând a doua ecuație a lui Josephson și variația fazei la z_1 și z_2 . Când se măsoară caracteristica I-V se aplică un curent continuu lent crescător. Terminalele de la care se culege tensiunea electrică sunt situate departe de centrul punții și pentru simplitate presupunem că sunt localizate la $\pm \infty$ pe axa y și simetric față de $x=0$. Cu aceste presupuneri se obține o expresie simplă pentru tensiune, care depinde de poziția z_j și de viteza dz_j/dt a vortexului

$$V_m = \frac{\hbar}{2q} \frac{\pi}{\beta} \sum_{j=1}^n R_c \left\{ \frac{\dot{z}_j}{\sqrt{a^2 - z_j^2}} \right\} \quad (6.2)$$

Din această ecuație și ecuația de mișcare [35] se poate calcula numeric valoarea medie a tensiunii pentru diverse valori ale curentului extern. În Fig. 6.38 se reprezintă caracteristica I-V pentru perechi de vortexuri de sens opus (vortex și antivortex) generate simultan în două părți opuse ale unei punți de 45° . Calculul s-a efectuat pentru micropunți cu diverse valori ale lățimii l și lungimea de coerență ξ fixă; $\xi=5\text{nm}$, $l=100\text{nm}$ (a), 200nm (b), 333nm (c), 500nm (d). Pentru $l < 50 \xi$ apariția unor noi perechi de vortexuri se pune în evidență clar prin apariția unor trepte în caracteristica I-V. Aceste tranziții sunt vizibile mai clar în caracteristica dV/dI , așa cum rezultă din Fig. 6.39. Înălțimea treptelor crește cu creșterea raportului ξ/l . Pentru $\xi/l=0.01$ treptele sunt practic invizibile. Calculele au fost făcute pentru valori ale lui I până la $I-I_0=10 I_0$. Valoarea

maximă corespunde la 8 vortexuri care se deplasează în coloană și interacționează între ele. La curenți mai mari decât $10 I_0$ se consideră că vortexurile se deplasează pe trasee paralele. În Fig. 6.40 se reprezintă rezistența diferențială $dV/dI=f(I)$ măsurată la diverse temperaturi în domeniul 50-85 K pentru o punte din Y123 cu lățimea $l=225\text{nm}$ [36]. Puntea este sub formă de strat subțire, obținut prin ablațiune laser pe substrat de ZrO_2 cu suprafața orientată (100), de grosime 85 nm. Lungimea punții este în jur de 70 nm. Rezistența diferențială s-a măsurat cu un detector standard sensibil la fază la un curent de modulare cu frecvența de 120 Hz și amplitudinea de

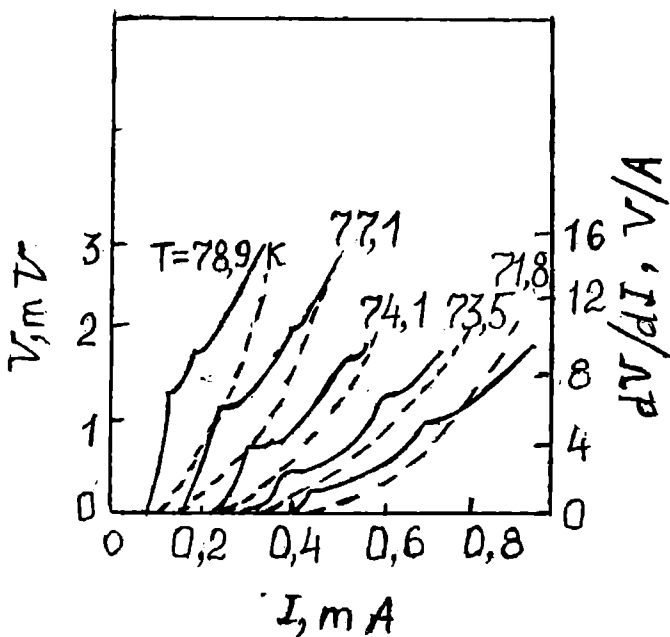


Fig. 6.40

5 μA . Pe aceeași figură sunt trasate și caracteristicile V-I (cu linie întreruptă) obținute prin integrarea numerică a curbelor diferențiale. La marginile opuse ale punții, presupusă simetrică, se generează perechi vortex-antivortex, care se deplasează către centrul punții, unde se anihilează unul pe altul. La dispariția unei perechi vortex-antivortex apare o nouă pereche și pentru ca aceasta să se formeze, este necesar un salt de tensiune pentru a învinge bariera de nucleație, datorită interacției repulsive dintre vortexurile și antivortexurile care se formează și cele existente în punte. Apare o treaptă în caracteristica V-I și un maxim în caracteristica dV/dI -I. Din teoria lui Aslamazov și Larkin [34], valoarea curentului la care apare treapta în caracteristica V-I este dată de expresia

$$I_k = \frac{\Phi_0 D}{4\mu_0 \lambda^2} \left(\frac{l}{\xi_{ab}} \right)$$

unde $\Phi_0 = h/2q$ și ξ_{ab} este lungimea de coerență în planul ab. Relația dintre viteza de deplasare a vortexului la treaptă și tensiunea V_m (la treaptă) este

$$v_k = IV_k / 2\Phi_0$$

Curbele din Fig. 6.40 satisfac relația

$$I^2 \frac{dV}{dI} = I_0 V \quad (6.3)$$

unde I_0 este un curent caracteristic de activare care scade cu creșterea temperaturii. Dependența de temperatură poate fi înțeleasă astfel. Vortexul se află într-o vale de potențial $U(I, T)$. Datorită activării termice apar salturi de flux magnetic peste barieră cu o frecvență ν dată de o lege de tip Athenius

$$\nu = \nu_0 e^{-U_0 / k_B T}$$

unde ν_0 este o frecvență caracteristică de vibrație a liniilor de flux. La aplicarea unui curent electric de transport de densitate J densitatea forței Lorentz, $\vec{J} \times \vec{B}$, determină micșorarea barierei de potențial în direcția ei și creșterea barierei în direcție opusă. Astfel, se modifică și ratele salturilor fluxului în cele două sensuri, rezultând o rată netă nenulă a salturilor

$$\nu = \nu_j - \nu_s = \nu_0 e^{-\frac{U_0 - BJv_c x}{k_B T}} - \nu_0 e^{-\frac{U_0 + BJv_c x}{k_B T}}$$

unde x este lățimea văii de potențial. Cu creșterea curentului de transport se mărește asimetria văii de potențial și la o anumită valoare J_0 a densității de curent bariera se anulează pe direcția forței Lorentz și fluxul începe să se deplaseze pe această direcție. Reținând numai primul termen din expresia de mai sus, se poate scrie

$$\nu = \nu_0 e^{-U(I, T) / k_B T} \quad (6.10)$$

unde am notat $U(I, t) = U_0 - BJv_c x$. Având în vedere ecuația lui Josephson, $V = (\hbar/2q)d\Phi/dt$, și că fiecare vortex produce o schimbare a fazei $\Delta\Phi = 2\pi$ la traversarea punții între cei doi electroni, tensiunea mediată în timp pe punte se poate scrie

$$V = \Phi_0 \nu_0 e^{-U(I, T) / k_B T} \quad (6.11)$$

Diferențiind această ecuație și ținând seama de ecuația (6.9), se obține

$$\ln(\nu_0) = \ln\left(\frac{V}{\Phi_0}\right) + \frac{IV}{V \ln 10}$$

de unde se poate determina ν_0 .

6.7. Emisia și detecția de radiație

6.7.1. Emisia de radiație

Am arătat că în prezența unei tensiuni continue V_o , prin joncțiune circulă un curent alternativ. Acesta este un proces de conversie a energiei în curent continuu în energie în curent alternativ. Puterea radiantă maximă emisă poate fi evaluată în presupunerea că întreaga putere în curent continuu poate fi convertită în putere în curent alternativ (a radiației). În modelul joncțiunii șuntată rezistiv prezentat în capitolul precedent pentru $\beta_j \gg 1$ (Fig. 6.31) un punct de polarizare un punct de polarizare adecvat este cel caracterizat de parametrii $I=I_c$, $V_o=I_c R_N$, unde I_c este curentul critic și R_N este rezistența în stare normală. Puterea maximă radiată, în acest caz, este

$$P \cong R_N I_c^2$$

Pentru dispozitivele uzuale $R_N I_o = 0,3 \Delta = 1$ mV. Presupunând $I_o = 1$ mA, se obține $P = 10^{-7}$ W. Pentru a detecta o putere atât de mică, trebuie să se realizeze un cuplaj bun al dispozitivului cu sistemul de măsură, o adaptare a celor două impedanțe. Coeficientul de transmisie a puterii de la joncțiune la circuitul extern se cunoaște din teoria liniilor de transmisie

$$T = \frac{4Z_d Z_j}{(Z_d + Z_j)^2}$$

unde Z_d este impedanța sistemului de detecție, iar Z_j este impedanța joncțiunii tunel care, după cum s-a arătat în § 4.3, poate fi considerată ca linie de transmisie. Puterea detectată este $P_d = P \cdot T$. Impedanța caracteristică a joncțiunii tunel pentru transmisia undelor electromagnetice este dată de relația [37]

$$Z_j = \frac{c}{\bar{c}} \left(\frac{l}{\epsilon_r W} \right) Z_o$$

unde $Z_o = 377 \Omega$ este impedanța spațiului liber (vidului), W este lățimea joncțiunii, l este grosimea stratului izolator. Pentru valorile uzuale $\bar{c}/c = 0,03$; $l = 3 \times 10^{-9}$ m, $W = 10^{-4}$ m, $\epsilon_r = 4$ se obține

$$Z_j \cong 10^{-4} Z_o$$

Presupunând $Z_s = Z_o$, puterea de radiație maximă care cade pe detector este

$$P_d \cong 4 \frac{Z_j}{Z_s} P \cong 4 \times 10^{-11} W \quad (7.1)$$

Pentru o cercetare calitativă a fenomenului de emisie se poate utiliza ca detector tot o joncțiune tunel cuplată cu prima prin stratul izolator sau printr-un strat subțire supraconductor. Generarea de radiație de către o joncțiune este pusă în evidență prin apariția unor trepte în caracteristica I-V a celeilalte joncțiunii. Deoarece impedanța caracteristică a joncțiunii Z_j este mult mai mică decât impedanța spațiului liber Z_o , puterea emisă este mult diminuată datorită dezacordului de impedanță. Puterea de emisie poate fi mult mărită, realizând un acord între impedanța joncțiunii și a spațiului liber sau a unui ghid de unde prin utilizarea unui transformator de microunde. Astfel, joncțiunea tunel se cuplează la o cavitare de microunde și ca receptor se utilizează un detector heterodină. În caracteristica I-V a joncțiunii apar singularități la valori ale tensiunii corelate cu frecvențele de rezonanță ale cavității. Când joncțiunea este polarizată la tensiunea continuă corespunzătoare unei singularități, se obține puterea radiantă maximă. Dezavantajul, în acest caz, este că se emite într-o bandă îngustă. A doua limitare serioasă (prima limitare este dezacordul de impedanță) este lățimea mare a liniei radiației emise. Pentru o joncțiune la o temperatură T care are o rezistență șunt R în stare normală există fluctuații ale tensiunii datorită

zgomotului Johnson, care se suprapun peste tensiunea de polarizare aplicată care modulează în frecvență curentul de perechi alternativ. Valoarea pătratică medie a fluctuației tensiunii este

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle = 4k_B TR \Delta v$$

unde Δv este lărgimea liniei care este corelată, de asemenea, cu $\langle \Delta V^2 \rangle^{1/2}$ prin expresia

$$\Delta v = \langle (\Delta V)^2 \rangle^{1/2} \frac{2q}{h}$$

Din ultimele două expresii se obține

$$\Delta v = \frac{4k_B TR}{\Phi_0^2} \quad (7.2)$$

unde $\Phi_0 = h/2q$. Pentru o joncțiune care funcționează la He lichid (4,2 K) cu rezistența de 1 Ω , lărgimea liniei este de ordinul 1 MHz. Ea poate fi redusă semnificativ prin cuplarea joncțiunii la o cavitate rezonantă cu Q mare. Cavitatea rezonantă micșorează rezistența diferențială a joncțiunii la tensiunea de polarizare la care frecvența generată este apropiată de frecvența de rezonanță a cavității sau o armonică a acesteia. În acest mod, lărgimea liniei poate fi micșorată de 1 kHz. O posibilitate de a mări puterea emisă constă în cuplarea unui număr de joncțiuni, polarizate la aceeași tensiune. Dacă cele n joncțiuni radiază incoerent, puterea totală este de n ori puterea emisă de o singură joncțiune. Dacă cele n joncțiuni sunt cuplate astfel încât să emită în fază (coerent), atunci se adună amplitudinile câmpurilor și puterea de ieșire este de n^2 ori mai mare decât puterea unei singure joncțiuni. (Menționăm că puterea este proporțională cu pătratul amplitudinii câmpului). Există cel puțin două mecanisme de cuplare în fază. (a) Cuplarea prin intermediul unui câmp electromagnetic a joncțiunilor separate prin spațiul liber (de exemplu, joncțiunile se fixează separate între ele în aceeași cavitate de microunde). În acest caz, pe lângă faptul că dimensiunile rețelei de joncțiuni trebuie să fie mult mai mici decât lungimea de undă a radiației electromagnetice în spațiul liber, apar dificultăți datorită deplasării spațiale a fazei între două părți diferite ale rețelei. (b) Cuplarea directă a parametrului de ordonare din regiunile supraconductoare corespunzătoare fiecărei joncțiuni. Acest mod de cuplare nu este încă suficient studiat.

6.7.2. Detecția radiației

Radiația de microunde determină micșorarea curentului critic al joncțiunii Josephson, așa cum reiese din Fig. 6.34 (cazul $n=0$). Pe acest principiu funcționează detectorul video în bandă largă. În plus, dacă două semnale de microunde sau din infraroșu îndepărtat cad pe o joncțiune Josephson polarizată la o tensiune finită, ambele vor influența curentul alternativ de perechi. Deoarece caracteristica joncțiunii este extrem de neliniară, mixarea celor două frecvențe este foarte eficientă. Pe baza acestui mecanism funcționează detectorul heterodină cu bandă îngustă și mixerul de armonice înalte.

6.7.2.1. Detectorul de bandă largă

În prezența unui câmp de radiație de amplitudine mică curentul critic I_c (la tensiune zero) are o scădere pătratică cu amplitudinea I_1 a radiației. O joncțiune Josephson utilizată ca detector video după legea pătratică se polarizează la un curent I_{cc} ceva mai mare decât curentul critic I_c . Dacă aceasta este iradiată cu un semnal rf de amplitudine I_1 foarte mică, curentul la tensiune zero (treapta $n=0$) scade pătratic la orice frecvență rf, așa cum se reprezintă în

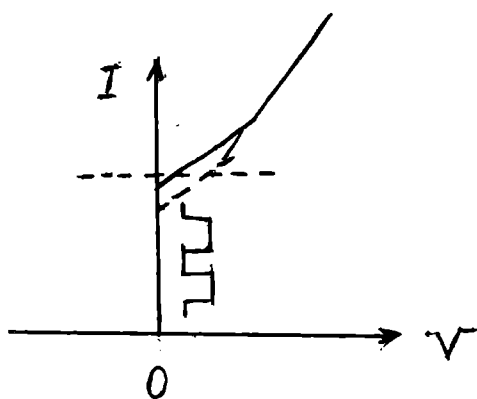


Fig. 6.41

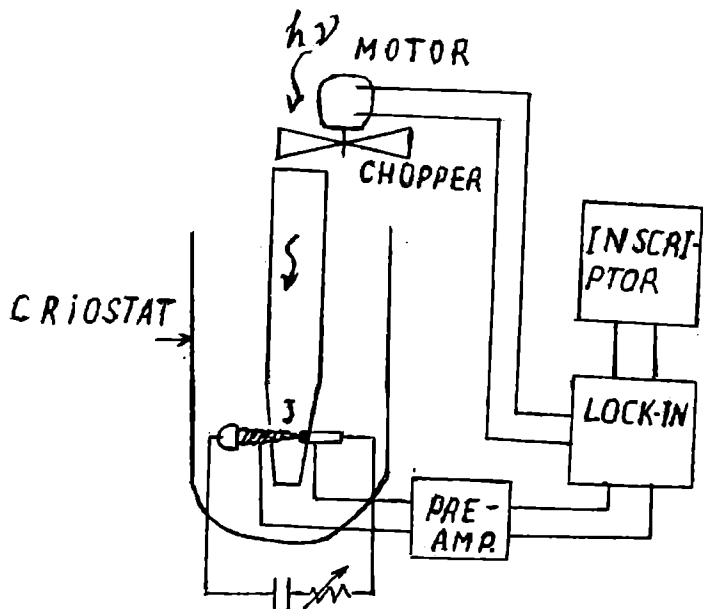


Fig. 6.42

Fig. 6.34. Când jonțiunea este alimentată de la o sursă de curent, această dependență poate fi scrisă

$$I_c(I_1) = I_c(0)(1 - \gamma I_1^2) \quad (7.1)$$

unde γ este o constantă. Variația curentului continuu Josephson sub acțiunea radiației poate fi detectată prin măsurarea tensiunii dezvoltată pe jonțiune. Pe Fig. 6.41 linia plină reprezintă caracteristica în absența radiației, iar linia întreruptă reprezintă caracteristica în prezența radiației. Un montaj experimental pentru detecția radiației din infraroșu îndepărtat cu ajutorul unei jonțiuni cu contact punctiform este reprezentat în Fig. 6.42 [38]. Dacă pe structură se aplică un semnal de amplitudine modulată (de exemplu, cu un choper), atunci tensiunea pe structură măsurată pe frecvența de modulare este

$$V_1 = R_d \Delta I = -\gamma I_c(0) I_1^2 R_d \quad (7.2)$$

unde $R_d = dV/dI$ este rezistența dinamică în punctul de polarizare. În presupunerea că impedanța sursei de radiație este mult mai mare decât impedanța în radiofrecvență a dispozitivului, R_1 , puterea absorbită de către detector este

$$P = \frac{1}{2} I_1^2 R_1 \quad (7.3)$$

Responsivitatea la tensiune a dispozitivului, S , se definește ca raportul dintre tensiunea de ieșire și puterea aplicată

$$S = \frac{V_1}{P} = -2\gamma I_1 \frac{R_d}{R_1} \quad (7.4)$$

Conform cu relația (4.5)

$$I_c(I_1) = I_c(0) J_0 \left(\frac{2qV_1}{\hbar\omega} \right) \quad (7.5)$$

unde $J_0(x)$ este funcția Bessel de ordinul zero. Pentru valori mici ale argumentului, adică la frecvențe înalte $\Omega = \omega/2qRI_c \gg 1$, funcția Bessel poate fi aproximată cu

$$J_0 \left(\frac{2qV_1}{\hbar\omega} \right) \cong 1 - \left(\frac{2qV_1}{\hbar\omega} \right)^2 \quad (7.6)$$

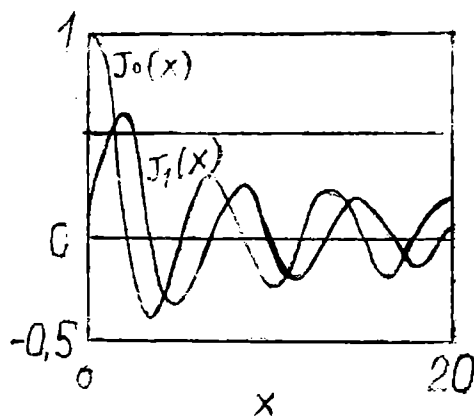


Fig. 6.43

Pentru înțelegerea comportării curentului în câmp de radiofrecvență, care este sub forma unei funcții Bessel, în Fig. 6.43 se reprezintă dependența de x a funcției Bessel de ordinul zero $J_0(x)$ și a celei de ordinul întâi $J_1(x)$. Comparând (7.5), (7.6) cu (7.1), se obține valoarea lui γ

$$\gamma = \frac{q^2 R^2}{\hbar^2 \omega^2} = \frac{1}{4I_c^2(O)\Omega^2}$$

unde se presupune $V_1 = RI_1$. În condiția $\Omega \gg 1$, responsivitatea este dată de expresia

$$S = \frac{R_d}{2I_c R \Omega^2} \quad (7.7)$$

O analiză mai detaliată dă pentru V_1 expresia

$$V_1 = \frac{I_1^2 R}{4 I_c} \left(\frac{I_b^2}{I_c^2} - 1 \right)^{-3/2} \frac{\omega_o^2}{\omega^2 - \omega_o^2}$$

unde I_b este curentul de polarizare și $\omega_o = (2q/h)V_o$. Detectorii cu bandă largă cu joncțiuni cu contact punctiform se utilizează în astronomie pentru detecția radiației din infraroșu și ca bolometre pentru măsurarea temperaturii [G8].

6.7.2.2. Detectorii video cu bandă îngustă

Pentru a obține un detector cu bandă îngustă, se cuplează o joncțiune cu contact punctiform la o cavitate rezonantă. Aceasta determină apariția unor trepte în caracteristica I-V a joncțiunii. Dacă joncțiunea este polarizată la o tensiune în apropierea unei trepte, răspunsul spectral la radiația incidentă prezintă un maxim într-o bandă îngustă în jurul frecvenței de rezonanță a sistemului [39]. Notăm că, totuși, în practică se utilizează detectorii super-Schottky, care sunt mai sensibili decât detectorii Josephson.

6.7.3. Detecția heterodină și mixerii de armonice înalte

Nelinearitatea caracteristicii I-V a joncțiunii Josephson este utilizată în detecția heterodină ca mixer. Într-un asemenea dispozitiv, semnalul pe frecvența ω_s este mixat cu un alt semnal de frecvență ω_l puțin diferită de ω_s , care provine de la un oscilator local. Rezultă un semnal pe frecvența intermediară ω_i care este detectat utilizând un amplificator de frecvență intermediară. Există două moduri de funcționare: cu oscilator extern și cu oscilator intern. În cel de-al doilea mod, semnalul de oscilator local este generat de însăși elementul Josephson (adică, acesta joacă rol și de oscilator local). Avantajul principal al dispozitivelor Josephson față de diodele semiconductoare convenționale este acela că, deoarece au o relație sinusoidală curent-fază, procesul de mixare este foarte eficient și pot fi generate armonice de ordin înalt ale semnalului incident. De exemplu, este posibil să se producă mixarea liniei din infraroșu îndepărtat (891 GHz) într-un laser HCN cu a 825-a armonică a unui oscilator de microunde pe 1,08 GHz [40]. Cu mixerii convenționali este dificil să se genereze chiar armonică a 10-a. Dispozitivele Josephson au nivel de zgomot mic, astfel că acest proces de mixare poate fi utilizat în detecția heterodină unde puterea necesară a oscilatorului local este foarte mică și deci, se poate utiliza în domeniul undelor milimetrice. Vom descrie, în continuare, principiul de funcționare al mixerului

Josephson cu oscilator local extern. Acesta este modul de funcționare utilizat în mod uzual. Circuitul echivalent al mixerului Josephson este reprezentat în Fig. 6.43. Curentul de radiofrecvență aplicat pe elementul Josephson este

$$I_1(t) = I_s \sin \omega_s t + I_L \sin \omega_L t$$

Presupunem că $|\omega_s - \omega_L| \ll \omega_L$ și că amplitudinea semnalului ce trebuie detectat este mult mai mică decât amplitudinea oscilatorului local, adică $I_s \ll I_L$. În această aproximație, curentul rf aplicat pe joncțiune este

$$I_1(t) = [I_L + I_s \cos \omega_i t] \sin \omega_i t$$

unde $\omega_i = \omega_s - \omega_L$.

Din această relație reiese că semnalul de detectat modifică amplitudinea semnalului oscilatorului local cu o frecvență care este mult mai mică decât frecvențele celor două semnale aplicate (ω_s și ω_L). Acest semnal modifică curentul critic Josephson la tensiune zero, așa cum rezultă din Fig. 6.34. Amplitudinea I_L a semnalului oscilatorului local este aleasă astfel ca să micșoreze curentul Josephson continuu la valoarea $\sim I_c(0)/2$. În jurul acestui punct $I_c(I_1)$ variază liniar cu amplitudinea semnalului rf aplicat, adică

$$\Delta I_c = I_c S \cos \omega_i t$$

unde

$$S = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_1} \right)_{I_L}$$

este panta dependenței lui I_c de I_1 (Fig. 6.34) pentru $I_1 = I_L$. Dacă joncțiunea este alimentată de la o sursă de curent constant între starea de tensiune zero și prima treaptă indusă de microunde, atunci amplitudinea variației tensiunii detectată pe frecvența ω_i este $V_i = R_d S I_s$, unde R_d este rezistența dinamică în punctul de polarizare în curent continuu (s-a presupus că nu prezintă histerezis caracteristica I-V). Prin urmare, procesul de mixare este similar cu procesul de detecție în bandă largă prezentat în paragraful anterior. Ca figuri de merit, se definesc parametrul adimensional α și eficiența de conversie η

$$\alpha = \left(\frac{\partial I_c}{\partial I_s} \right) R / R_s$$

care dă o măsură a variației curentului de ieșire pe frecvența intermediară pentru o variație a curentului semnalului I_s . R_s este impedanța sursei, iar R este rezistența stării normale a joncțiunii. α este funcție de frecvența redusă $\Omega = \omega \Phi_0 / 2\pi I_c R$ și are valorile

$$\alpha = 1, \quad \Omega \ll 1$$

$$\alpha \cong \frac{0,1}{\Omega^2}, \quad \Omega \gg 1$$

Eficiența de conversie η este egală cu raportul dintre puterea eliberată pe frecvența intermediară (la intrarea amplificatorului) și puterea semnalului de detectat

$$\eta = \frac{C_i \alpha^2 R_d}{R}$$

unde C_i este o eficiență de cuplaj la amplificatorul de frecvență intermediară, R_d și R sunt rezistența dinamică și, respectiv, a stării normale a elementului Josephson. R_d este puternic dependentă de tensiunea de polarizare și de zgomotul termic. În practică s-a găsit că $R < R_d < 5R$. Rezultă din ultimele trei relații că cel puțin la frecvențe reduse (Ω) mici, eficiența de conversie poate fi mai mare decât unitatea. Un asemenea rezultat a fost confirmat experimental pe o joncțiune cu contact punctiform din niobiu și un semnal pe frecvența de 33 GHz [41]. Radiația de microunde este cuplată rezonant la joncțiunea cu contact punctiform cu ajutorul unui piston cu constricție și

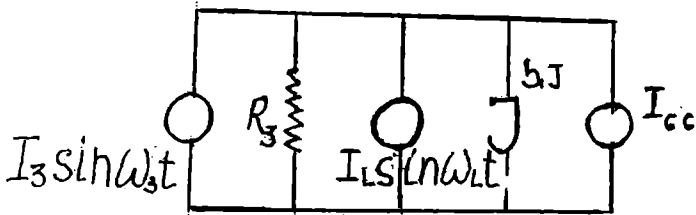


Fig. 6.44

a unui șurub de acord în interiorul unui ghid de unde (Fig. 6.44). În Fig. 6.45 se prezintă rezultate tipice ale caracteristici I-V în absența radiației (a) în prezența radiației (b) și eficiența de conversie în funcție de tensiunea de polarizare [42]. Așa cum reiese din figură, cele mai mari valori ale lui η se

obține între trepte, unde R_d are valoarea maximă. Valoarea maximă a lui η este 4. Unul din avantajele importante ale detectorului heterodină cu element Josephson este că el necesită un oscilator local de putere foarte mică ($\sim 1 \mu\text{W}$), ceea ce oferă un avantaj în domeniul undelor milimetrice, unde sursele de putere mare sunt costisitoare sau imposibile. De un mare interes se bucură, totuși, în ultimul timp, și detecția heterodină în care ca oscilator local se utilizează însuși elementul Josephson (în curent alternativ). Puterea maximă radiată de o singură joncțiune acordată într-o linie de transmisie este $4\Delta^2/q^2R$, unde R este rezistența șunt a joncțiunii și lărgimea liniei este

$$\Delta v = 4\pi R_d^2 k_B T / R \Phi_0^2$$

unde R_d este rezistența dinamică a joncțiunii în punctul de polarizare. S-a

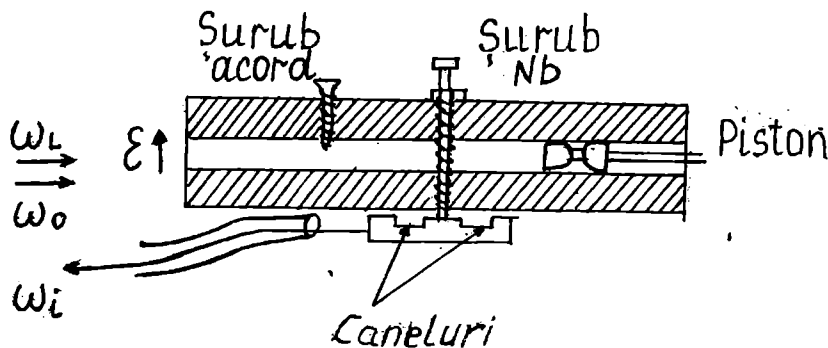


Fig. 6.45

obținut pentru joncțiuni cu $R=20 \Omega$ o putere de 10 nW la 500 GHz . Proprietatea de oscilator local a joncțiunii Josephson a fost utilizată inițial pentru determinarea temperaturii prin măsurarea nivelului de zgomot. Această problemă o vom prezenta în detaliu într-un capitol special. O a doua posibilitate este utilizarea unei joncțiuni Josephson lungi pentru realizarea unui oscilator cu supapă de fluxoni (cuante de flux magnetic) [43]. Când joncțiunea este răcită în prezența unui câmp magnetic static aplicat ea este penetrată de către o rețea liniară de cuante de flux. Forța Lorentz dintre curentul de polarizare și fiecare linie de flux produce deplasarea rețelei de cuante de flux care, la rândul ei, produce câmpuri electromagnetice oscilante la frecvențe din domeniul undelor milimetrice. S-au obținut puteri până la $1 \mu\text{W}$ în domeniul de frecvențe $100\text{-}400 \text{ GHz}$ cu lărgimea liniei radiației emise în jur de 160 kHz .

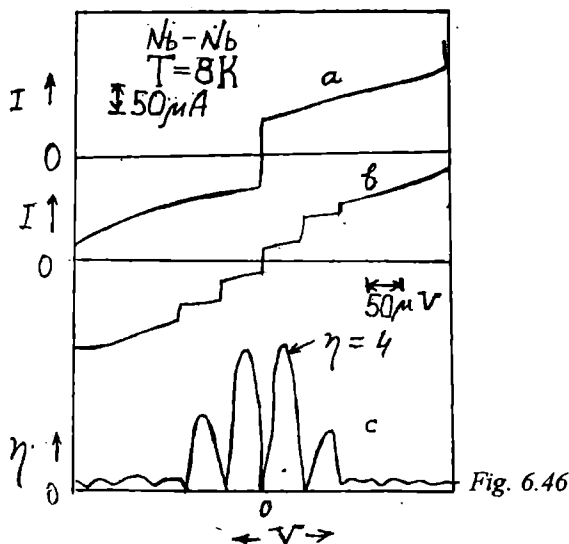


Fig. 6.46

CAPITOLUL VII

DISPOZITIVE DE INTERFERENȚĂ CUANTICĂ CU SUPRACONDUCȚORI

7.1. Inelul supraconductor cu o singură joncțiune

Am văzut în § 2.6 că faza θ este corelată cu densitatea de curenți de perechi \vec{j}_s și cu vectorul potențial \vec{A} prin relația

$$\nabla\theta = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left(\vec{A} + \frac{m}{2q^2\rho} \vec{j}_s \right) \quad (1.1)$$

în unități SI, unde $\Phi_0 = h/2q$ este cuanta de flux, $\rho = \psi^*\psi$ este densitatea de perechi de electroni, m este masa și q este sarcina electronului, iar $\psi(\vec{r}) = \rho^{1/2}(\vec{r})e^{i\psi}$ este funcția de undă a perechii de electroni. Pentru a avea semnificație fizică funcția de undă trebuie să fie univocă adică în orice punct la orice moment de timp, funcția de undă are numai o singură valoare a fazei și amplitudinii. În consecință pe un contur închis în supraconductor, în jurul găurii, faza θ se modifică numai cu valoarea $2\pi n$, unde n este întreg. Prin urmare, integrând pe un contur închis se poate scrie

$$2\pi n = \oint \nabla\theta d\vec{l} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \left\{ \oint \vec{A} d\vec{l} + \oint \frac{m}{2q^2\rho} \vec{j}_s d\vec{l} \right\}$$

Potențialul vector \vec{A} este corelat cu câmpul magnetic \vec{B} prin relația $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ și utilizând teorema lui Green a integrării vectorilor se poate scrie

$$\iint_s \vec{B} d\vec{S} + \frac{m}{2q^2\rho} \int \vec{j}_s d\vec{l} = n\Phi_0 \quad (1.2)$$

Mărimea din stânga acestei relații se numește fluxoid. Pentru un sistem în stare supraconductoare n este constant și independent de timp. Dacă Γ înconjoară o regiune supraconductoare, Fig. 7.1 a, singura valoare a lui n este $n = 0$, deoarece fluxul în interiorul unui supraconductor masiv este egal cu zero, cu excepția unei regiuni din apropierea suprafeței unde sunt confinați curenții de perechi, de ecranare. Aceasta este exprimarea matematică a efectului Meissner-Ochsenfeld. Dacă conturul Γ înconjoară o regiune în stare normală sau spațiu liber (Fig. 7.1 b), n poate lua toate valorile posibile. Dacă conturul de integrare se poate lua într-o regiune depărtată de suprafața supraconductorului unde curenții de perechi este neglijabil, ec. (1.2) se simplifică

$$\Phi = \iint_s \vec{B} d\vec{S} = n\Phi_0 \quad (1.3)$$

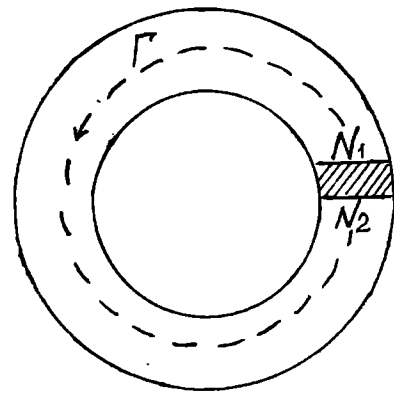
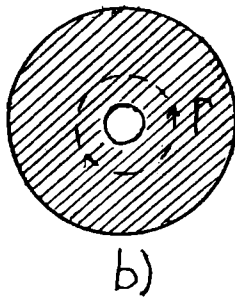
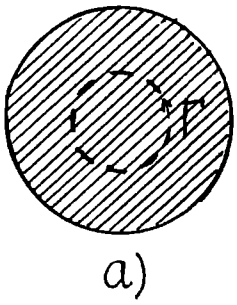


Fig. 7.2

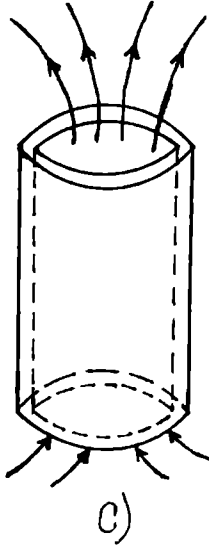


Fig. 7.1

Această relație explică faptul că fluxul închis de către un inel supraconductor este cuantificat. Această cuantificare, prezisă de către London în 1950 [1] a fost verificată experimental [2] pe un cilindru gol în interior (Fig. 7.1 c).

Să considerăm acum un inel supraconductor în care am introdus o joncțiune Josephson (Fig. 7.2). Presupunând că pe conturul ales \vec{j}_s este neglijabil și că este satisfăcută condiția de unicitate a funcției de undă, se poate scrie (prin integrarea ec. (1.1))

$$\theta_j + \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{N_1}^{N_2} \vec{A} d\vec{l} = 2\pi n \quad (1.4)$$

unde θ_j este diferența de fază pe joncțiunea Josephson (pe stratul de barieră). Extinzând integrala și pe stratul barierei rezultă

$$\theta_j + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 2\pi n \quad (1.5)$$

unde Φ este fluxul magnetic închis în inel. Dacă se aplică un câmp magnetic extern atunci acesta produce un flux Φ_e în interiorul inelului. Datorită condiției de cuantificare se induce un curent circulator i în inel care tinde să ecraneze fluxul aplicat, astfel că fluxul efectiv Φ prin inel să fie cuantificat

$$\Phi = \Phi_e + Li = n\Phi_0 \quad (1.6)$$

unde L este inductanța inelului prin care circule curentul i . La orice variație $\Delta\Phi_e$ a fluxului extern, în inel apare un flux egal și de sens opus. Atâta timp cât curentul care circule are valoare sub curentul critic, fluxul prin inel rămâne constant și cuantificat la aceeași valoare. Această observație precum și relația (1.6) este valabilă, indiferent dacă inelul conține sau nu joncțiunea Josephson. În cazul când inelul conține joncțiune Josephson, curentul i este determinat de joncțiune. Presupunând în joncțiune o dependență curent-fază sinusoidală și având în vedere relația (1.5) se poate scrie

$$i = -I_c \sin 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} = I_c \sin \left[2\pi \left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \right] \quad (1.7)$$

unde I_c este curentul maxim Josephson care reprezintă deci și valoarea maximă a curentului care poate trece prin inel și menține fluxoidul la valoarea cuantificată dată. Vom analiza două cazuri: (a) în absența unui câmp magnetic extern; (b) în prezența câmpului magnetic extern.

7.1.1. Absența câmpului magnetic extern

În absența câmpului magnetic extern fluxul efectiv este dat de expresia

$$\Phi = Li$$

În aceste condiții relația (1.7) devine

$$i = -I_c \sin \frac{2\pi Li}{\Phi_0} \quad (1.8)$$

Există un set de valori ale lui i care satisfac această ecuație; acestea corespund unor stări metastabile. Dintre aceste stări sunt staționare numai cele care corespund minimelor locale ale energiei libere. Energia liberă a unui inel care conține o joncțiune este dată de expresia

$$E = -\frac{\hbar I_c}{2q} \cos \theta + \frac{Li^2}{2} \quad (1.9)$$

unde primul termen reprezintă energia de cuplaj a joncțiunii iar cel de al doilea termen reprezintă energia magnetică. Având în vedere relațiile de mai sus, ec. (1.9) poate fi scrisă sub forma

$$E = -\frac{\Phi_0 I_c}{2\pi} \cos \left(\frac{2\pi Li}{\Phi_0} \right) + \frac{Li^2}{2}$$

sau

$$\eta = \frac{E}{\frac{1}{2} LI_c^2} = \left(\frac{i}{I_c} \right)^2 - \frac{2}{\beta_c} \cos \left(\beta_c \frac{i}{I_c} \right) \quad (1.10)$$

unde am notat $\beta_c = 2\pi LI_c / \Phi_0$. În Fig. 7.3 a, este reprezentată energia liberă redusă η în funcție de i/I_c pentru $\beta_c = 10\pi$. Se observă că prezintă mai multe minime relative. În Fig. 7.3 b, este reprezentată caracteristica (1.8)

$$\sin \left(\beta_c \frac{i}{I_c} \right) = -\frac{i}{I_c}$$

Cu puncte sunt marcate stările stabile, corespunzătoare minimelor energiei libere. Pentru $\beta_c < 3\pi/2$ sunt stabile numai stările corespunzătoare curentului zero în cilindru.

7.1.2. Aplicarea unui câmp magnetic extern

În prezența unui câmp extern, fluxul Φ_e este diferit de zero, astfel că relațiile (1.6) și (1.7) devin

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_e - \frac{\beta_e}{2\pi} \Phi_0 \sin \left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) \\ i &= -I_c \sin \left(2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} - \beta_e \frac{i}{I_c} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

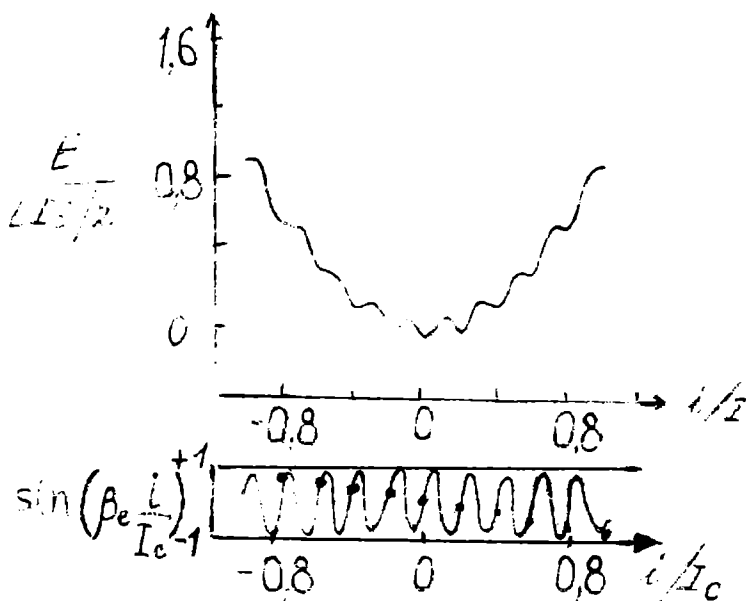


Fig. 7.3

Energia liberă a inelului se calculează utilizând relația

$$G = \int i d\Phi_e$$

Vom integra această expresie în două cazuri particulare: $\beta_e \ll 1$ și $\beta_e \gg 1$. În cazul $\beta_e \ll 1$ se poate face aproximația $\Phi \equiv \Phi_0$, ceea ce înseamnă că curentul i depinde numai de fluxul aplicat Φ_e . În aceste condiții se obține

$$G = -\frac{\Phi I_c}{2} \cos\left(2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0}\right) + G_c$$

unde G_c este energia liberă Gibbs pentru $i=I_c$. Utilizând parametrul β_e , această expresie poate fi rescrisă sub forma

$$\frac{G - G_c}{\Phi_0^2 / 4\pi^2 L} = -\beta_e \left(\cos \frac{2\pi\Phi_e}{\Phi_0} + 1 \right) \quad (1.12)$$

În cazul $\beta_e \gg 1$, presupunem că condiția decuantificare a fluxului este complet satisfăcută, adică $\Phi = n\Phi_0$ și având în vedere (1.6), energia liberă este dată de expresia

$$G = \frac{1}{2L} (\Phi_e - n\Phi_0)^2 + G_c$$

care poate fi scrisă și astfel

$$\frac{G - G_c}{\Phi_0^2 / 4\pi^2 L} = 2\pi^2 \left(\frac{\Phi_e}{\Phi_0} - n \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\beta_e + \frac{\pi}{2} \right)^2 \quad (1.13)$$

În Fig. 7.4 se reprezintă Φ/Φ_0 (ecuația 1.11), pentru cazul $\beta_e \leq 1$ și pentru cazul $\beta_e > 1$, în funcție de Φ_e/Φ_0 . Se observă că pentru $\beta_e \leq 1$, F este funcție univalorică de Φ_e , pe când în cazul $\beta_e > 1$ este funcție multivalorică (regim de histeresis). În Fig. 7.4 b se reprezintă dependența corespunzătoare a curentului i prin contur pentru $\beta_e \leq 1$ și, respectiv, $\beta_e > 1$, în Fig. 7.4 c și d se reprezintă dependența energiei libere de Φ_e dată de relațiile (1.12) și, respectiv, (1.13). Așa cum rezultă din Fig. 7.4 d, zero-ul energiei Gibbs corespunde cazului $i=I_c$. În acest punct, joncțiunea comută în stare normală, inelul supraconductor este întrerupt și condiția de cuantificare a fluxului nu mai este satisfăcută. Fluxul prin inel se ajustează la o valoare corespunzând la o valoare mai mică a energiei Gibbs. Se poate face în așa fel ca această tranziție să aibă loc numai între stări adiacente de fluxoid prin ajustarea parametrilor inelului și joncțiunii. În acest caz, Φ variază numai cu $\pm \Phi_0$. Aceasta este situația specifică în utilizarea acestor sisteme ca magnetometre.

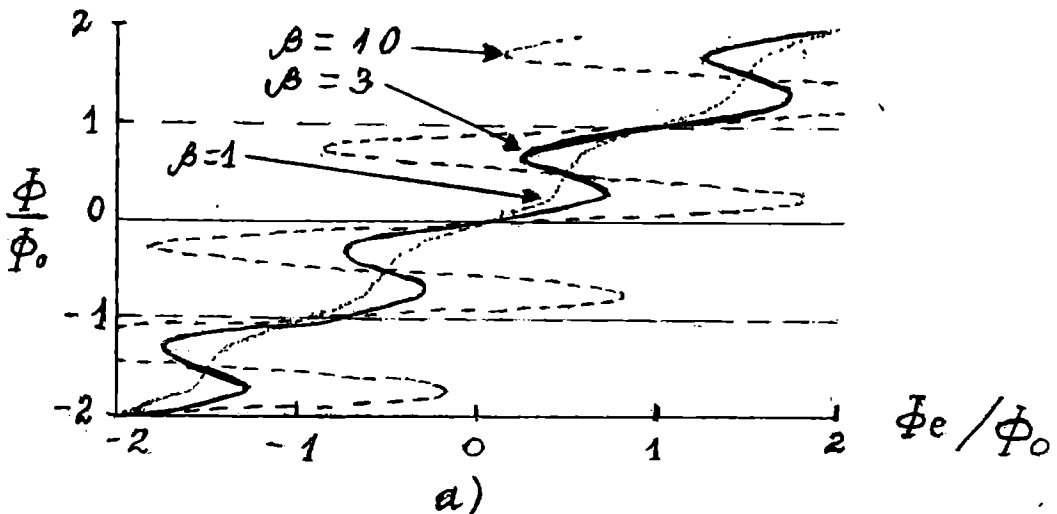
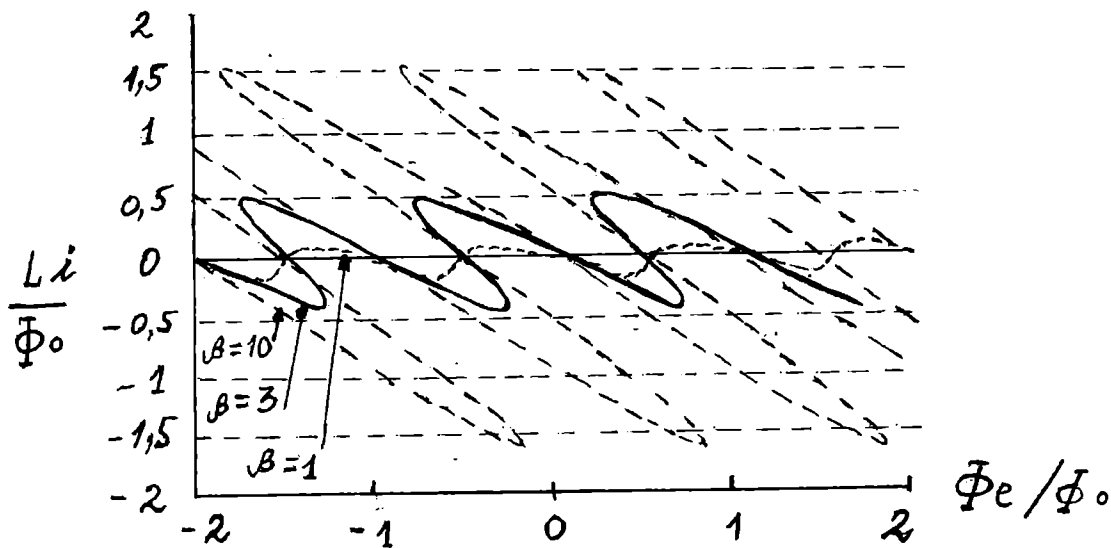
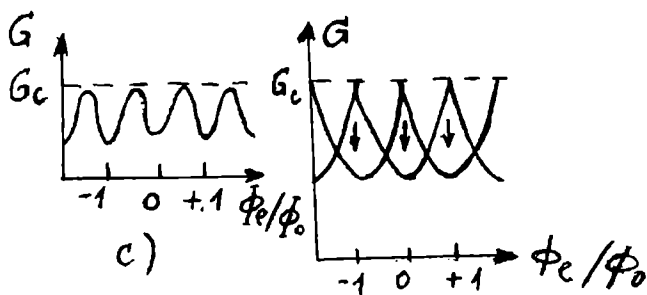


Fig. 7.4a



b)



c)

d)

Fig. 7.4 b, c, d

7.2. DICS de radiofrecvență

Un DICS (dispozitiv de interferență cuantică cu supraconductori) rf este construit dintr-un inel supraconductor care conține o joncțiune Josephson, cuplat cu un circuit de acord, rezonant, alimentat de la o sursă de radiofrecvență, așa cum se reprezintă în Fig. 7.5. În DICS rf se utilizează o metodă de detecție rezonantă a variației unui flux magnetic extern. Sistemul conține un circuit LC. Inductorul este o bobină de dimensiuni mici, fără miez, care este inserată în inelul supraconductor. În paralel cu acest inductor este conectat un capacitor cu pierderi mici care are o asemenea valoare încât frecvența de rezonanță să fie în domeniul 20-30 MHz. Circuitul rezonant este alimentat de la o sursă de curent pe frecvența de rezonanță ω_0 . Prin urmare, prin bobină va circula un curent alternativ $i_{rf} = I_{rf} \sin \omega_0 t$ care va produce în inel un flux alternativ de amplitudine $MQI_{rf} \sin \omega_0 t$, unde M este inductanța mutuală dintre bobină și inel și Q este factorul de

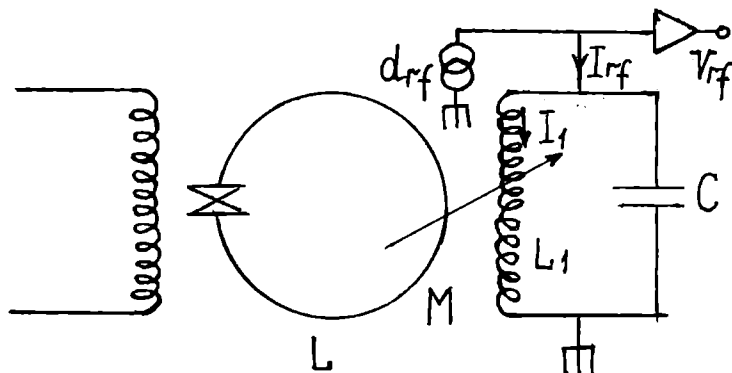


Fig. 7.5

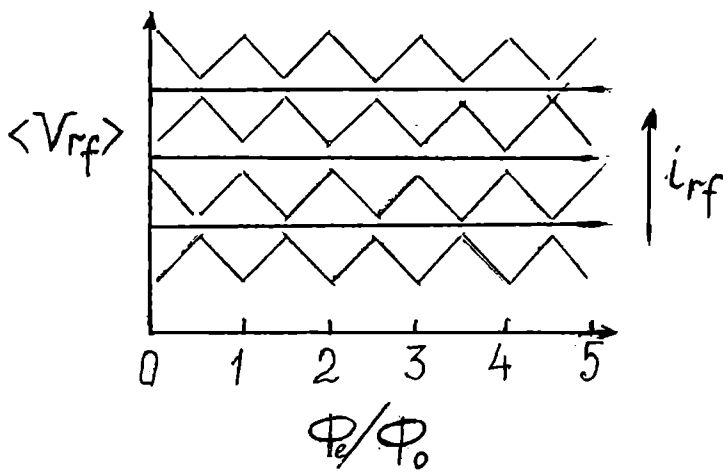


Fig. 7.6

calitate al circuitului rezonant. Fluxul continuu $\langle \Phi_e \rangle$ ce trebuie detectat se aplică prin intermediul unei alte bobine care este, de asemenea, inserată în inel (această bobină este bobina secundară a unui transformator de flux; § 7.4). Tensiunea V_{rf} care apare pe circuitul rezonant depinde de $\langle \Phi_e \rangle$. Această dependență este reprezentată în Fig. 7.6 pentru diverse valori ale curentului i_{rf} ; ea este de formă triunghiulară. Dacă variația fluxului este limitată la $(\pm 1/2) \Phi_0$, atunci V_{rf} are o

dependență liniară de Φ_e și deci, DICS rf este un detector liniar de flux magnetic. Pentru a avea un dispozitiv liniar pe un domeniu mai mare de variație a fluxului se utilizează un circuit de reacție negativă. Pentru măsurarea V_{rf} se utilizează un amplificator lock-in. Vom prezenta tehnica de măsură în detaliu într-un paragraf următor. În continuare, vom prezenta descrierea modului de funcționare a DICS rf.

Există două moduri diferite de funcționare a DICS rf în funcția de dependența fluxului Φ din inel de fluxul Φ_e aplicat din exterior [3]. Această dependență este determinată de parametrul $\beta_e = 2\pi LI_c / \Phi_0$. Pentru $\beta_e \leq 1$, Φ crește monoton cu Φ_e , așa cum se reprezintă în Fig. 7.4 a pentru $\beta_e = 1$. Acest mod de funcționare se numește dispersiv și poate fi descris pe cale analitică. Dacă $\beta_e > 1$, atunci dependența lui Φ de Φ_e este multivalorică, adică prezintă histerezis (Fig. 7.4 a, $\beta_e = 3, 10$). Când amplitudinea fluxului rf aplicat depășește o anumită valoare este parcurs un ciclu de histerezis, sistemul disipă energie și modul de funcționare se numește de disipare. Vom descrie în detaliu acest ultim mod de funcționare. Rescriem relația (1.5) pentru $n=0$

$$\theta + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} = 0$$

unde θ este diferența de fază pe joncțiune și Φ este fluxul ce străbate inelul. Diferența de fază θ determină curentul i prin inel dat de expresia (1.7)

$$i = -I_c \sin(2\pi\Phi / \Phi_0)$$

Dacă se aplică un flux extern Φ_e cuasistatic, fluxul total prin inel va fi (ecuația 1.11)

$$\Phi = \Phi_e - LI_c \sin(2\pi\Phi / \Phi_0)$$

În Fig. 7.7 se reprezintă variația lui Φ cu Φ_e pentru $LI_c = 1, 25$. Regiunile cu pantă pozitivă sunt stabile, pe când cele cu pantă negativă sunt instabile. Să presupunem acum că Φ_e crește foarte puțin de la valoarea zero (Fig. 7.7 b). Fluxul total Φ va crește mai încet decât Φ_e , deoarece curentul circulator i va tinde să micșoreze Φ_e ; dacă inelul este complet supraconductor, ecranarea va fi perfectă și Φ va rămâne la valoarea zero. Când I atinge valoarea I_c la un flux aplicat Φ_{ec} și un flux închis Φ_c , joncțiunea comută momentan într-o stare de tensiune diferită de zero și DICS sare din starea cuantică $n=0$ în starea cuantică $n=1$ (de energie mai mică). Timpul de tranziție $\tau = L/R$, unde L este inductanța DICS (a inelului cu joncțiune) și R este rezistența în stare normală a joncțiunii. Dacă se crește Φ_e în continuare, DICS-ul va efectua tranziții în stările $n=2, 3, \dots$ la $\Phi_e = \Phi_c + \Phi_0, \Phi_c + 2\Phi_0, \dots$. Tranzițiile au loc numai între stări de fluxoid adiacente, adică $\Delta\Phi = \pm \Phi_0$. Presupunem acum că Φ_e descrește de la o valoare situată imediat deasupra lui Φ_c . DICS-ul va rămâne în starea $n=1$ până când $\Phi_e = \Phi_0 - \Phi_c$, când i din nou depășește curentul critic, în acord cu relațiile de mai sus și DICS-ul revine în starea $n=0$. În același mod, cu micșorarea lui Φ_e

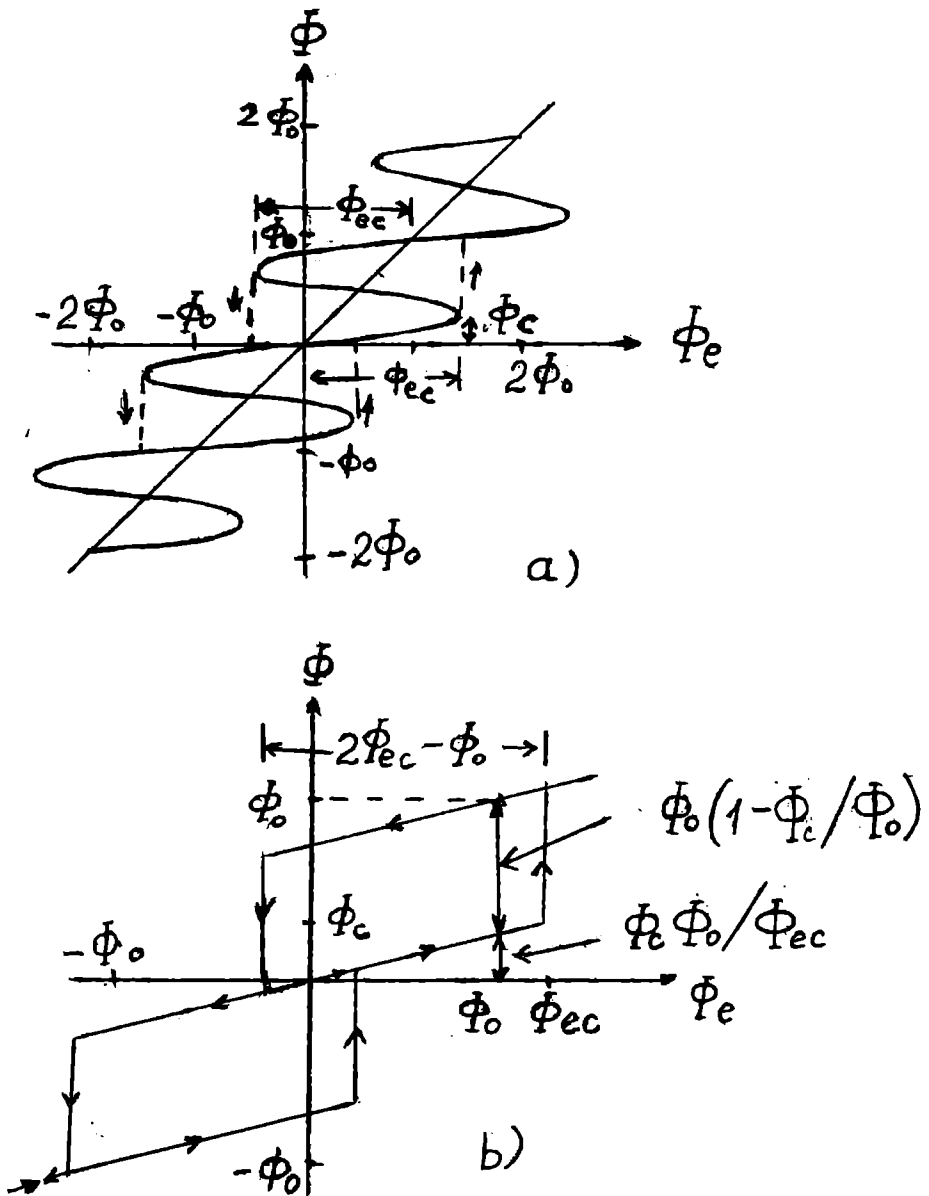


Fig. 7.7

sub $-\Phi_c$ și apoi creșterea sa, se obține cel de al doilea ciclu de histerezis. Comportarea de histerezis are loc dacă $LI_c > \Phi_0/2\pi$, în cazul relației sinusoidale fază-curent.

DICS este cuplat inductiv cu bobina unui circuit rezonant $L_1 C \cdot L_1$, C și R_1 sunt inductanța, capacitatea și rezistența paralel ale circuitului rezonant. Circuitul rezonant este excitat la frecvența sa de rezonanță cu un curent $I_{rf} \sin \omega t$, iar tensiunea pe circuitul rezonant este amplificată utilizând un amplificator cu impedanță mare de intrare. Pentru a studia efectul circuitului rezonant asupra DICS, presupunem că inițial $\Phi_c = 0$. Când I_{rf} este foarte mic, amplitudinea fluxului ce se aplică pe inel $MI_b = QMI_{rf}$ este mai mică decât Φ_{ec} și nu are loc disipare de energie în DICS ($Q = R_1/\omega L_1$, $M^2 = k^2 LL_1$ și I_b este amplitudinea curentului prin bobină). Cu creșterea amplitudinii I_{rf} amplitudinea fluxului va egala Φ_{ec} , atunci când $I_b = \Phi_{ec}/M$ sau $I_{rf} = \Phi_{ec}/MQ$, în punctul B din Fig. 7.8. Picul corespunzător al tensiunii pe circuitul rezonant este

$$V_B = \omega L_1 \Phi_{ec} / M \quad (2.1)$$

În acest punct, DICS-ul efectuează o tranziție fie în starea $n=+1$ sau în starea $n=-1$, depinzând de sensul fluxului rf. Mai târziu, în ciclul rf, DICS revine în starea $n=0$. Când DICS-ul a efectuat un

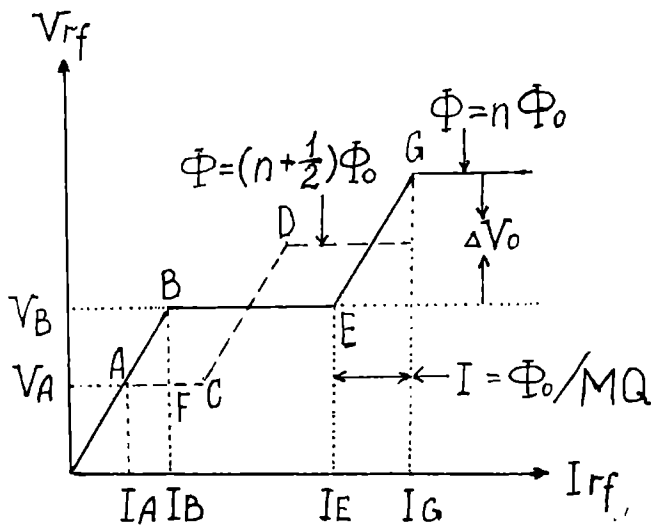


Fig. 7.8

crește L_{rf} în continuare este trasată dreapta BE. În E se induce o tranziție la fiecare pic pozitiv sau negativ al ciclului rf. Puterea consumată în E față de B este $2\Delta W$ ($\omega/2\pi$), adică puterea disipată când se efectuează două cicluri de histerezis într-un ciclu rf. Lungimea treptei AB se găsește din relația

$$\frac{V_B(I_B - I_A)}{2} = 2\Delta W \left(\frac{\omega}{2\pi} \right) \quad (2.3)$$

Utilizând ecuația (2.1) și (2.2) și considerând $\Phi_{cc} = \Phi_0$, se obține

$$I_E - I_B \equiv \frac{2I_c M}{\pi L_1} \quad (2.4)$$

O creștere în continuare a lui I_{rf} dincolo de valoarea din E produce o creștere EG (Fig. 7.8). În G au loc tranziții din stările $n=\pm 1$ în stările $n=\pm 2$. Fluxul rf aplicat DICS-ului este Φ_{cc} în E și $(\Phi_{cc} + \Phi_0)$ în G. Astfel, $I_G - I_E = \Phi_0 / MQ$. În mod analog cu creșterea lui I_{rf} , se observă în continuare o serie de trepte și de creșteri ale tensiunii V_{rf} pe circuitul rezonant. Separarea între două trepte succesive este

$$\Delta V_0 = Q(I_G - I_E)\omega L_1 = \frac{\omega L_1 \Phi_0}{M} \quad (2.5)$$

Să aplicăm acum pe DICS un flux extern $\Phi_e = \Phi_0/2$. Fluxul total aplicat este în acest caz

$$\frac{\Phi_0}{2} + MQI_{rf} \sin \omega t$$

Aplicarea fluxului $\Phi_0/2$ are ca efect deplasarea cu $\Phi_0/2$ a ciclului de histerezis din Fig. 7.7 b. Astfel, are loc o tranziție la picul pozitiv al ciclului rf la un flux egal cu $(\Phi_{cc} + \Phi_0/2)$. Astfel, când I_{rf} crește de la valoarea zero, prima treaptă are loc în D în Fig. 7.8 unde

$$V_A = \frac{\omega L_1 (\Phi_{cc} - \Phi_0/2)}{M} \quad (2.6)$$

Cu creșterea lui I_{rf} de-a lungul lui AC, se traversează un singur ciclu de histerezis corespunzător tranziției din starea $n=0$ în starea $n=1$ la $(\Phi_{cc} - \Phi_0/2)$. Cu creșterea mai departe a lui I_{rf} , V_{rf} crește în D cu o creștere a lui I_{rf}

$$I_D - I_C = \frac{\Phi_0}{MQ} \quad (2.7)$$

ciclu de histerezis, a extras din circuitul rezonant energia ΔW . Energia ΔW disipată într-un singur ciclu de histerezis este dată de aria ciclului împărțită prin L . Din Fig. 8.7 b se obține

$$\Delta W = \Phi_0 (2\Phi_{cc} - \Phi_0) \left(1 - \frac{\Phi_c}{\Phi_{cc}} \right) / L - \Phi_0 I_c \quad (2.2)$$

dacă $LI_c \sim \Phi_0$ și $\Phi_c/\Phi_{cc} \ll 1$. Datorită acestei pierderi de energie, picul fluxului în următoarea jumătate de ciclu nu va depăși fluxul critic și nu va avea loc nici o tranziție. Circuitul rezonant efectuează multe cicluri pentru a câștiga energie suficientă pentru a induce o nouă tranziție; această tranziție va fi într-una din stările $n=+1$ și $n=-1$. Dacă se

În D începe tranziția la picul fluxului $-(\phi_{ec} + \phi_0/2)$, ș.a.m.d. Astfel, cu creșterea lui I_{rf} se obțin o serie de trepte și creșteri deplasate cu $\phi_e = \phi_0/2$ față de cele din cazul $\phi_e = 0$. Cu creșterea lui ϕ_e de la $\phi_0/2$, valoarea lui V_{rf} la care are loc prima treaptă scade în mod continuu. Pentru $0 < \phi_e < \phi_0/2$, prima treaptă se despică în două trepte distincte, cea inferioară corespunzând tranziției între $n=0$ și $n=1$ la fluxul rf $(\phi_{ec} - \phi_e)$ și cea superioară corespunzând tranziției între $n=0$ și $n=-1$ la fluxul rf $(\phi_{ec} + \phi_e)$. În cazul special $\phi_e = \phi_0/2$ treptele corespunzătoare tranzițiilor între $n=0$ și $n=-1$ și între $n=1$ și $n=2$ au loc la aceeași valoare a lui V_{rf} . Treptele pentru tranziții de ordin mai înalt se despică în mod similar cu excepția treptelor $\phi_e = 0$ și $\phi_e = \phi_0/2$. Pentru $\phi_0/2 < \phi_e < 3\phi_0/2$ starea DICS de energie cea mai joasă în absența fluxului rf este starea $n=1$. Prin urmare în acest domeniu tranzițiile de ordinul cel mai mic induse de către fluxul rf sunt din starea $n=1$ în stările $n=0$ și 2 . Cu creșterea lui ϕ_e de la $\phi_0/2$ la ϕ_0 , V_{rf} crește de la V_A la V_B . În mod analog cu creșterea continuă a lui Φ_e tensiunea la care apare prima treaptă (de tensiune) oscilează între V_B și V_A cu perioada ϕ_0 . Amplitudinea de modulare $\Delta V(\phi_0/2) = V_{rf}^{(n)} - V_{rf}^{(n+1/2)}$ este

$$\Delta V_{rf} = V_B - V_A = \frac{\omega L_1 \phi_0}{2M} \quad (2.8)$$

Pentru o variație mică a lui $\phi_e \neq n \phi_0/2$, pe care o notăm $\delta\phi_e$ se obține o creștere a lui V_{rf}

$$\delta V_{rf} = \frac{\omega L_1 \delta\phi_e}{M} = \frac{\omega}{K} \sqrt{\frac{L_1}{L}} \delta\phi_e \quad (2.9)$$

unde $k^2 = M^2/L_1 L$ este coeficientul de cuplaj. Din ultima relație rezultă că pentru valori date ale lui L_1 și L sensibilitatea crește prin micșorarea coeficientului de cuplaj k . S-a arătat prin calculul numeric că cuplajul este maxim atunci când este îndeplinită condiția $k^2 Q \geq 1$. Se poate ajunge la o asemenea concluzie și pe o cale mai simplă. Pentru ca relația (2.8) să reprezinte o modulare observabilă pe circuitul rezonant (a tensiunii) datorită fluxului periodic este necesar ca cele două platouri corespunzătoare lui V_A și, respectiv, V_B să poată fi observate cu același curent I_{rf} . Aceasta este posibil numai dacă lărgimea platoului ΔI_{rf} adică $I_C - I_A$ este mai mare decât variația δI_{rf} a curentului de prag corespunzătoare variației lui V_{rf} dată de ec. (2.8), adică decât $I_B - I_A$. Având în vedere că puterea disipată în prima treaptă este egală cu

$$P_A(I_C - I_A) \cong \frac{\omega}{2\pi} \Delta W$$

și având în vedere (2.2) și (2.6) se obține

$$\Delta I_{rf} = I_C - I_A = \frac{M\phi_0}{\pi L_1 L}$$

Se poate arăta că

$$\delta I_{rf} = I_B - I_A = \frac{\Delta V}{ML_1 Q} = \frac{\phi_0}{2MQ}$$

Astfel condiția $\Delta I_{rf} \geq \delta I_{rf}$ se poate scrie

$$\frac{M^2 Q}{LL_1} = k^2 Q \geq \frac{\pi}{2}$$

Deci condiția de cuplaj optim este $k^2 Q \approx 1$.

7.3. Tehnica de măsură a câmpului magnetic.

Schema instalației de măsură a fluxului magnetic cu un DICS rf în regim de histerezis este reprezentată în Fig. 7.9. Pentru alimentarea circuitului rezonant se utilizează o linie coaxială care este și suport pentru DICS; aceasta este imersată în heliu sau azot lichid, după caz. Un oscilator rf alimentează circuitul L_1C rezonant. Pentru a mări sensibilitatea și a obține un răspuns liniar (tensiune-flux) se modulează semnalul rf. În schemă sunt prezentate două posibilități. Când comutatorul K este în poziția R tensiunea de alimentare rf este modulată în amplitudine cu un oscilator audio de pulsuri rectangulare (treaptă). Semnalul obținut este proporțional cu amplitudinea curentului rf. Pe osciloscop se obține caracteristica $V_{rf}-I_{rf}$ (Fig. 7.8) corespunzătoare fluxului aplicat din exterior. Când comutatorul K se găsește în poziția T se aplică un semnal de frecvență joasă de formă triunghiulară, care generează un câmp cuasistatic în DICS. Pe ecranul osciloscopului se obține dependența triunghiulară $V_{rf}-\Phi_{dc}$, reprezentată în Fig. 6. Tensiunea rf este amplificată cu ajutorul unui amplificator de zgomot mic și demodulată integrată și aplicată la intrarea Y a unui osciloscop. Se utilizează în general un preamplificator cu tranzistori cu efect de câmp în configurație în cascadă și ca detector o diodă. Tensiunea rf de răspuns este funcție periodică de fluxul aplicat, ceea ce dă posibilitatea ca DICS să poată fi utilizat ca detector de variație de flux magnetic. Însă în cele mai multe cazuri se utilizează în locul instalației prezentată în Fig. 7.9 o instalație ce funcționează pe principiul lock-in prezentată în Fig. 7.10. Fluxul ce trebuie măsurat se cupleză la DICS prin intermediul unui transformator supraconductor. Ca și mai înainte, pentru a crește sensibilitatea și a obține un răspuns liniar se modulează fluxul cu un semnal de joasă frecvență (1-50 kHz) obținut de la un oscilator AF (frecvență audio). Semnalul de modulare este de formă sinusoidală sau rectangulară și se alege de o asemenea amplitudine încât să genereze un flux în DICS cu valoare maxim-maxim de $\phi_0/2$. Această modulare apare ca o bandă laterală a frecvenței rf de pompaj. Ea se restabilește la ieșirea detectorului (de maxim). Detectorul sincron înregistrează semnal maxim numai pentru componenta pe frecvența ω_m a semnalului de modulare. Linia care conține rezistența R este linie de reacție. Să presupunem inițial că această linie este deschisă. Dacă câmpul magnetic ambiant generează în inel un flux

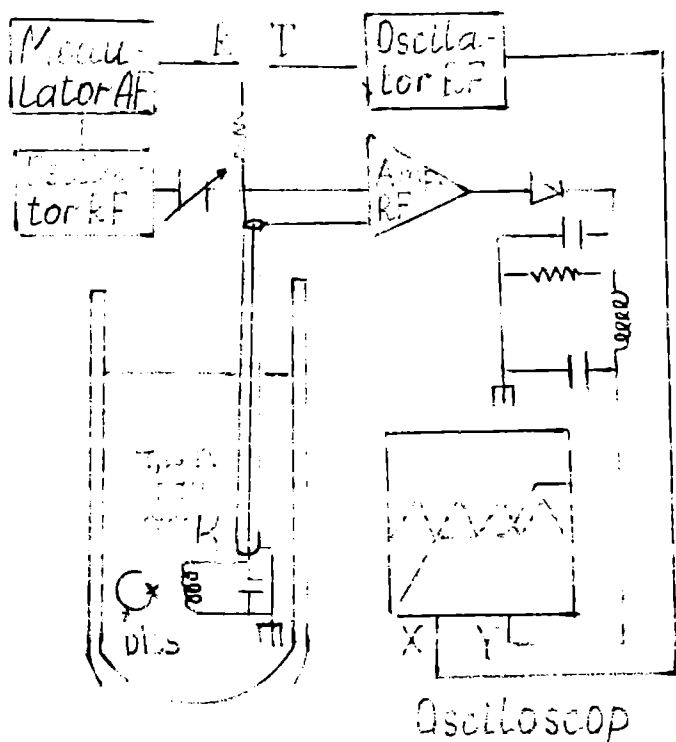


Fig. 7.9

$\phi_c = (n+1/2) \Phi_0$ corespunzător minimumului pe curba $V_{rf}=f(\phi_c)$ din Fig. 7.11a semnalul de joasă frecvență la intrarea detectorului lock-in va avea numai o componentă $2\omega_m$ unde ω_m este frecvența semnalului de modulare. Dacă câmpul extern static crește sau descrește și punctul de funcționare este deplasat pe regiunile cuasiliniare ale lui $V_{rf}=f(\phi_c)$, amplitudinea componentei primei armonice generată de modulare, crește. Această componentă are o valoare maximă în două puncte ϕ_A și ϕ_B , corespunzătoare fluxului continuu extern $\phi_c = (n+3/4)\Phi_0$ și $\phi_c = (n+1/4)\Phi_0$. În aceste puncte amplitudinea armonicii a doua este zero. Se observă că semnalele

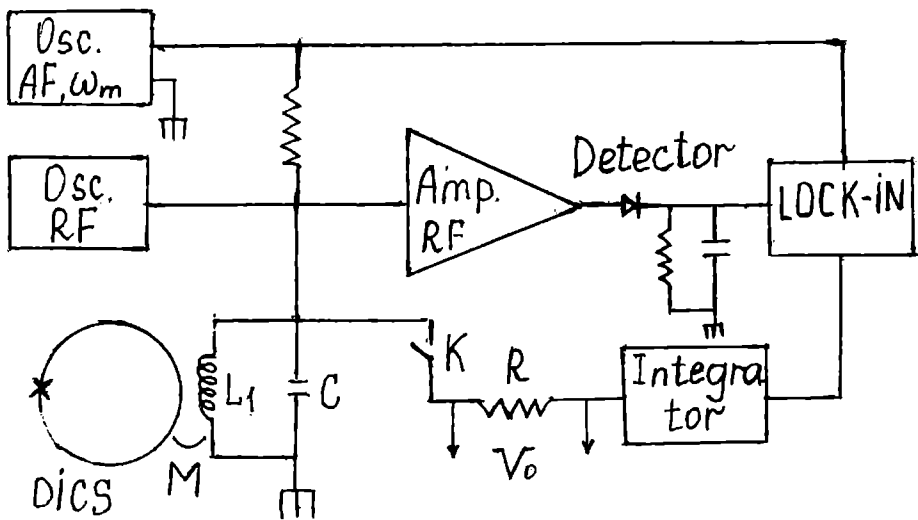


Fig. 7.10

în ϕ_A și ϕ_B sunt defazate cu 180° . În Fig. 7.11 b se reprezintă semnalul continuu obținut la ieșirea integratorului în funcție de fluxul extern ϕ_e aplicat. Se observă că pentru $\phi_e = (n+1/2)\Phi_0$ răspunsul este liniar cu fluxul aplicat. Să închidem acum circuitul de reacție (comutatorul K în Fig. 7.10). În această situație ieșirea integratorului este conectată printr-un rezistor la bobina de modulare și sistemul se acordează la o tensiune corespunzătoare minimumului în curba $V-\phi_e$, în funcție de semnalul reacției. Dacă fluxul extern variază cu valoarea ϕ_e atunci în circuitul de control curentul se modifică astfel încât să apară

în DICS un flux egal și de sens contrar cu $\delta\phi_e$. Astfel, variația tensiunii pe rezistența de reacție R este proporțională cu $\delta\phi_e$. Dacă notăm cu V_m tensiunea maximă de ieșire de la integrator, atunci variația maximă de flux ce poate fi măsurată este

$$(\delta\phi_e)_{\max} = \frac{M}{R} V_m$$

unde M este inductanța mutuală dintre DICS și bobina L_1 de modulare iar R este rezistența din circuitul de reacție. În mod uzual $(\delta\phi_e)_{\max} = \pm 500\phi_0$. Viteza maximă cu care poate fi

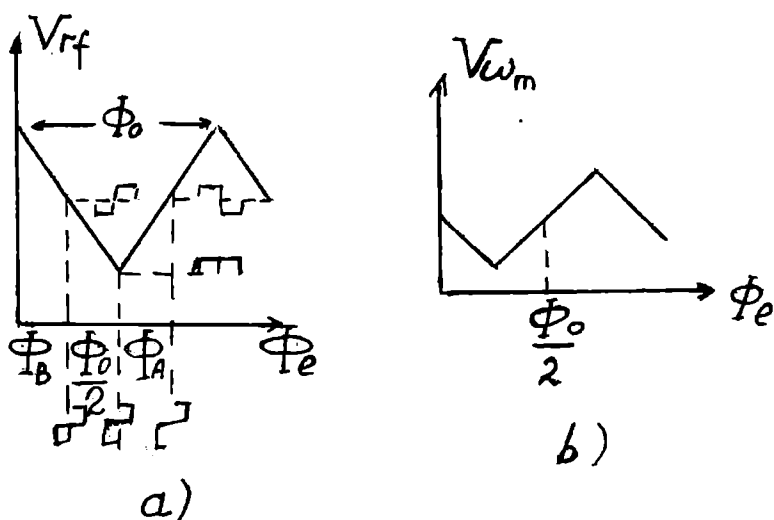


Fig. 7.11

modificat fluxul de intrare este egală cu viteza maximă cu care poate fi modificat fluxul de reacție. Aceasta depinde de frecvența de modulare

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta\phi_e}{\phi_0} \right) \cong \frac{\pi}{16} \omega_m$$

Pentru $\omega_m/2\pi = 1-50\text{kHz}$, această rată maximă de variație este cuprinsă în domeniul $10^3-10^4 \phi_0/\text{s}$. Cititorul găsește un studiu în detaliu al configurației lock-in de măsură a fluxului magnetic în (4).

7.4. Transformatorul supraconductor de flux.

Transformatorul supraconductor sau transformatorul de flux (de câmp magnetic) se utilizează pentru a cupla variația de flux (de câmp magnetic) ce trebuie măsurată, cu DICS-ul. Această metodă se utilizează atunci când proba ce trebuie măsurată este prea mare pentru a putea fi inserată direct în inelul DICS sau nu este indicat ca DICS-ul să fie în contact direct cu aceasta. În plus se mărește sensibilitatea la câmp magnetic. În Fig.7.12a este reprezentat transformatorul utilizat pentru construcția magnetometrelor, în Fig.7.12b și c sunt reprezentate transformatoarele utilizate pentru construcția gradiometrelor pentru derivata întâi și respectiv a

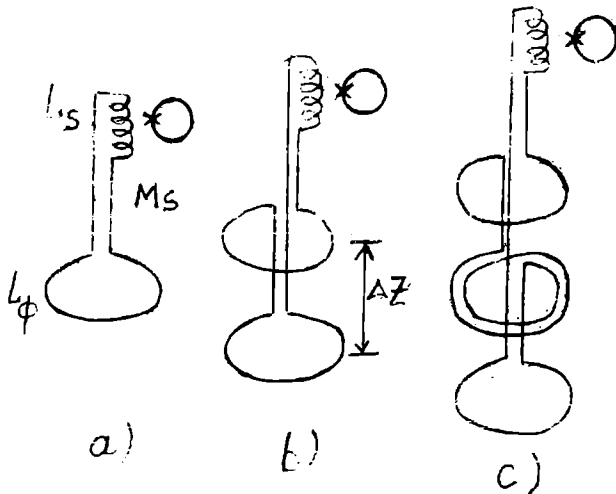


Fig. 7.12

inductanța mutuală dintre bobina secundară L_s și bobina L a DICS se obține variația de flux în DICS

$$\Delta\phi_c = M_s \Delta I = -\frac{k_s \sqrt{LL_s}}{L_p + L_s} N_p \Delta\phi$$

unde $k_s = M_s / \sqrt{LL_s}$. Pentru a găsi condiția maximului de transfer de flux se derivează această relație în raport cu L_s și se obține că transferul este maxim pentru $L_s = L_p$ (7). Coeficientul maxim de transfer de flux este

$$\frac{\Delta\phi_c}{\Delta\phi} = \frac{k_s}{2} N_p \sqrt{\frac{L}{L_s}}$$

L_s se introduce într-o cavitate a DICS, astfel că valoarea ei este limitată de dimensiunile geometrice ale DICS. Configurația reprezentată în Fig.7.12b utilizează drept primar două bobine înfășurate în sens invers, separate prin distanța Δz . Acest primar va sesiza numai variația de câmp în direcția z și va fi insensibil la un câmp uniform în această direcție. Aceasta este configurația utilizată într-un gradiometru pentru prima derivată a câmpului magnetic. Dacă primarul se construiește din două primare corespunzătoare unui gradiometru pentru derivata întâi, conectate în opoziție, atunci sistemul este sensibil numai la derivata a doua a câmpului în direcția z . Și în configurația de gradiometru condiția de cuplaj maxim se obține atunci când inductanța bobinelor din primar este egală cu inductanța bobinei din secundar. Sensorii moderni cu DICS se construiesc din straturi subțiri și deci și transformatorul de flux se construiește din straturi subțiri. În Fig.7.13 se reprezintă un transformator de flux planar din straturi subțiri în care bobina primară (de detecție) are o singură spirală. În Fig.14 sr reprezintă diverse configurații planare ale bobinei

două (5-6). Referindu-ne la Fig.8.12a, notăm cu L_p inductanța bobinei cuplată cu câmpul extern și cu L_s inductanța bobinei cuplată strâns cu DICS. Dacă câmpul aplicat în primar se modifică cu ΔB_1 atunci variația de flux dată de ΔB_1 va induce în transformator o variație de curent ΔI care generează un flux de sens opus

$$N_p A_p \Delta B_1 + L_p \Delta I + L_s \Delta I = 0$$

Se obține valoarea curentului de ecranare din primar

$$\Delta I = -\frac{N_p \Delta\phi}{L_p + L_s}$$

unde $\Delta\phi = A_p B_1$ și N_p este numărul de spire din bobina secundară. Notând cu M_s

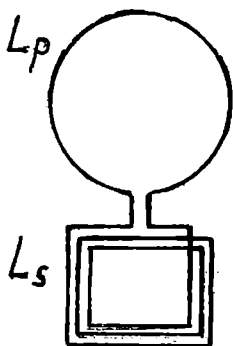


Fig. 7.13

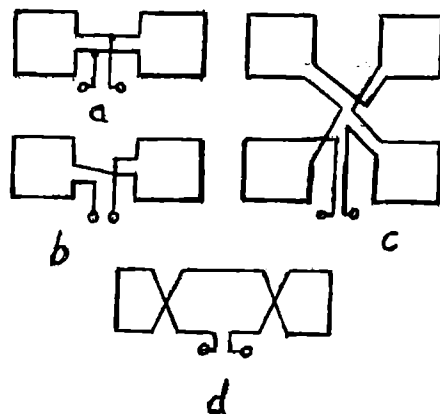


Fig. 7.14

primare a transformatorului sub formă de gradiometru. De fapt în locul unei singure bobine primare (de detecție) se utilizează două sau mai multe bobine: (a) bobinele conectate în paralel, sensibile la $\partial B_n / \partial z$; (b) bobinele conectate în serie, sensibile la $\partial B_n / \partial z$; (c) patru bobine conectate în serie sensibile la $\partial^2 B_n / \partial y \partial z$; (d) gradiometru sensibil la $\partial^2 B_n / \partial z^2$. Avantajul gradiometrelor planare din straturi subțiri față de cele construite prin înfășurarea unui fir constă în aceea că datorită preciziei microprocesoarelor de fabricare ele pot fi realizate cu compensare aproape perfectă. Aceasta reprezintă un mare avantaj pentru sistemele multisensor (utilizate de exemplu în biomagnetism) unde procesul de compensare este o chestiune dificilă când toți sensorii sunt introduși într-o baie de He sau de azot lichid. Gradiometru cu bobinele conectate în paralel are avantajul că are inductanța mică și acordarea lui la DICS se face mai ușor. Însă, un câmp magnetic omogen intens generează un curent circulator mare în bobine. Gradiometru cu conexiune în serie are un curent circulator extrem de mic pentru aceeași intensitate a câmpului omogen (spațial), însă are inductanță mai mare. În cele mai multe proiecte practice se preferă această ultimă variantă. Totuși, interpretarea datelor obținute cu un gradiometru planar este mai complicată decât interpretarea datelor obținute cu un gradiometru vertical (cu fir).

7.5. Zgomotul și sensibilitatea maximă

Zgomotul limitează valoarea minimă a fluxului ce poate fi măsurat și deci sensibilitatea magnetometrului. Cu alte cuvinte nu se poate măsura un flux extern mai mic decât fluxul dat de către zgomotul intrinsec al DICS. Există și alte surse de zgomot care limitează valoarea minimă a fluxului ce poate fi măsurat cum ar fi zgomotul extern dat de sursele radio, mașini electrice, etc., zgomotul asociat cu circuitele cuplate direct cu DICS, zgomotul preamplificatorului. Pentru estimarea zgomotului intrinsec al DICS, presupunem că acesta este zgomotul Johnson dat de rezistența R a joncțiunii Josephson (sau legăturii slabe) în stare normală. Valoarea medie pătratică a tensiunii de zgomot Johnson dat de rezistența R la temperatura T în banda de frecvență de lărgime B este dată de relația

$$\langle v_z^2 \rangle = 2k_B TRB$$

Această tensiune determină fluctuația curentului de unielectroni în inel, care are valoarea pătratică medie

$$\langle i_z^2 \rangle = \frac{4k_B TRB}{(R^2 + \omega^2 L^2)}$$

și valoarea pătratică medie a fluctuației fluxului este

$$\langle \delta\phi_z^2 \rangle = L^2 \langle i_z^2 \rangle = \frac{4k_B TL^2 B}{R \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right)}$$

unde L este inductanța inelului. Integrând după toate frecvențele se obține fluxul total de zgomot

$$\langle \Phi_z^2 \rangle = k_B TL$$

Acest flux de zgomot trebuie să fie mai mic decât Φ_0 , adică $\langle \Phi_z^2 \rangle^{1/2} < \Phi_0$, unde Φ_0 , cuanta de flux, este și perioada semnalului detectat. Această condiție limitează inductanța admisă pentru inel la valoarea

$$L < \frac{\Phi_0^2}{k_B T}$$

Pentru frecvențe joase, $\omega \ll L/R$, se obține din relația de mai sus limita clasică a fluxului magnetic minim ce poate fi măsurat

$$(\delta\phi)_{clasic} = \langle \delta\phi_z^2 \rangle^{1/2} = L \left(\frac{4k_B TB}{R} \right)^{1/2} \quad (5.2)$$

Pentru valori uzuale, $R=5 \Omega$, $L=10^{-10}H$, $T=4K$, $B=1 \text{ Hz}$, se obține $(\delta\phi)_c = 3 \times 10^{-7} \phi_0 / \sqrt{Hz}$, sensibilitate cu câteva ordine de mărime mai mică decât cea pe care o prezintă dispozitivele reale. Aceasta demonstrează că există alte mecanisme care contribuie la zgomotul intrinsec al dispozitivului. Relația de mai sus, (5.2) scrisă în limita clasică, este valabilă pentru un DICS în curent continuu (pe care-l vom analiza în 7.7). Pentru DICS rf trebuie avut în vedere că circuitul este efectiv rezistiv numai un timp scurt $\sim \tau=L/R$, necesar pentru schimbarea stării de flux. Numai în acest interval de timp DICS este sensibil la valoarea exactă a câmpului extern și numai în acest interval este importantă fluctuația cu curentul „normal”. Aceasta reduce timpul mediu efectiv cu un factor $\omega\tau = \omega L/R$ printr-o împărțire (5.1) și deci (5.2) se împarte prin $\sqrt{\omega L/R}$.

$$(\delta\phi)_{clasic} = \sqrt{\frac{4k_B TLB}{\omega}}$$

Teoretic apare că sensibilitatea scade cu creșterea frecvenței rf. O analiză mai riguroasă a zgomotului în DICS rf (8) arată că tranziția dintr-o stare cuantică de flux în altă stare cuantică de flux este de natură statistică, ceea ce reprezintă o sursă de zgomot. Zgomotul circuitului rezonant este corelat cu zgomotul intrinsec al DICS (9). În cazul transferului optim de putere de la circuitul rezonant la preamplificator puterea la intrarea preamplificatorului pentru o variație de flux de intrare $\delta\phi_1$ este

$$\delta P = 2\omega_0 (\delta\phi_1)^2 / \pi L_1$$

Dacă T_z este temperatura echivalentă de zgomot a preamplificatorului atunci puterea detectată în banda de 1Hz este $P = k_B T_z$. Rezultă că fluxul de zgomot echivalent pentru banda de frecvență egală cu cu nitatea care poate intra în preamplificator pentru a da această putere de zgomot este

$$\delta\phi_1 = (\pi L_1 k_B T_z / 2\omega_0)^{1/2}$$

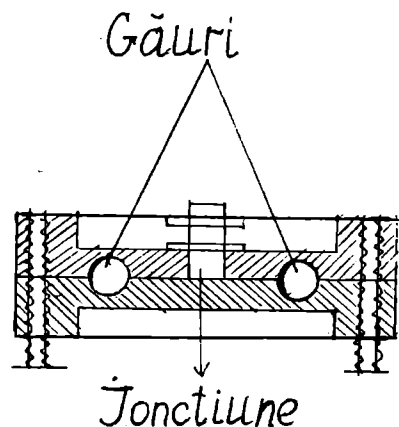
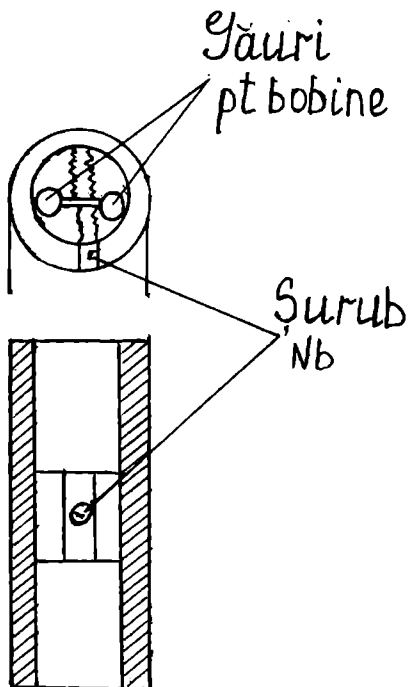
În dispozitivele practice zgomotul amplificatorului este mult mai mare decât zgomotul intrinsec al DICS.

7.6. DICS rf utilizate în practică.

Există mai multe tipuri de DICS-uri rf dintre care cele mai utilizate sunt DICS cu două găuri (10) și DICS toroidal (11,12). Acestea se construiesc din material masiv. Menționăm că inițial s-au construit din starturi subțiri dar este dificil să se cupleze fluxul la DICS într-o asemenea structură (deoarece necesită o bobină cu mai multe spirale). Vom vedea în paragrafele care urmează că mai târziu s-a rezolvat și această problemă. Vom descrie întâi DICS cu două găuri și apoi DICS toroidal.

DICS-ul cu două găuri este constituit din două inele supraconductoare cuplate printr-o joncțiune Josephson (Fig.7.15). El constă dintr-un cilindru masiv din niobiu cu lungimea de 20 mm și diametral 8 mm prin care sunt date axial două găuri cu 3 mm diametru. O gaură conține bobina de semnal L_s la care se cuplează sursa externă iar cealaltă gaură conține bobina circuitului rezonant L_r . Capacitorul rezonant se conectează în exterior prin intermediul unei linii coaxiale, care este conectat la un preamplificator situat la temperatura camerei. Un canal (gaură) subțire unește cele două găuri și în acest canal se întâlnesc venind perpendicular pe lungimea lui) un șurub cu vârf, ajustabil, din Nb, cu un suport (nicovală) tot din Nb, care fac un contact slab (punctiform) și realizează joncțiunea supraconductoare. Atât șurubul cu vârf cât și suportul sunt prevăzute cu piulițe de blocare și se fixează în poziția corespunzătoare pentru a constitui o joncțiune și apoi se blochează la temperatura camerei. Deoarece tot sistemul este construit din același material (în cazul de față Nb) nu apar fisuri la contracție la temperaturi joase. Prin urmare această structură constă din două inele supraconductoare conectate în paralel, fiecare inel fiind întrerupt de o legătură slabă (care este aceeași). De asemenea fiecare inel este sub forma unui tub lung de Nb și deci DICS este bine ecranat față de fluctuațiile din exterior.

DICS toroidal este construit din două piese masive care se cuplează (încastrează) perfect astfel că cele două găuri sunt complet înconjurate de acestea. Avantajul acestei geometrii este că se pot calcula ușor inductanțele și inductanța mutuală. Legătura slabă constă dintr-o joncțiune tunel planară din niobiu cu barieră semiconductoare care este încastrată între cele două piese masive (care sunt de asemenea din niobiu). Între cele două găuri, așezate simetric, nu există un canal de legătură (Fig.16) ca în cazul DICS prezentat mai înainte. Există niște găuri (canale) foarte înguste prin material către aceste găuri, pentru firele de conexiune la bobinele ce



se fixează în interiorul lor. Un asemenea DICS rf are sensibilitatea de $5 \times 10^{-5} \phi_0 H_z^{-1/2}$ echivalentă cu o rezoluție în energie de 10^{-29}JHz^{-1} . Funcționează în domeniul 10-30 MHz, deși s-au utilizat sisteme experimentale și la 90 GHz (13). S-a obținut zgomot mic utilizând amplificator FET din GaAs la temperatura He lichid.

7.7. Dispozitive de interferență cuantică în curent continuu (DICS cc).

DICS rf tratat în paragrafele precedente conține o singură joncțiune în inelul supraconductor. Prin urmare, această joncțiune este scurtcircuitată de către inelul supraconductor și nu se poate stabili o tensiune electrică mediată în timp, continuă, pe joncțiune, prin alimentarea de la o sursă de curent continuu. Menționăm totuși, că în principiu și în inelul cu o singură joncțiune aceasta poate fi alimentată în curent continuu utilizând o variație liniară de flux (rampă) aplicat pe inel, dar acest procedeu este mai puțin utilizat în practică. Un DICS în curent continuu conține două joncțiuni în inel astfel că nici o joncțiune nu mai este scurtcircuitată de către inel și prin urmare se poate stabili pe joncțiune o tensiune continuă, mediată în timp, prin alimentarea de la o sursă în curent continuu. Dificultatea realizării DICS cc constă în construirea a două joncțiuni perfect identice. În ultimele decenii s-a renunțat aproape total la utilizarea practică a DICS cc în favoarea DICS rf pe motivul că DICS cc ar funcționa la frecvențe mai mici (în cazul când se modulează semnalul, a se vedea paragraful următor) decât DICS rf. Totuși, deoarece este posibil ca acesta să fie polarizat la tensiune continuă, datorită efectului Josephson în curent alternativ prin inel poate să circule un supracurent alternativ de înaltă frecvență. Astfel, pentru o cădere de tensiune pe joncțiune de $100 \mu\text{V}$ prin inel circulă un supracurent la frecvența de 50 GHz, frecvență mai mare decât în cele mai multe DICS-uri rf. Descriem în continuare principiul de funcționare a DICS cc. Schema unui DICS cc este reprezentată în Fig.7.17. El constă dintr-un inel supraconductor cu două joncțiuni Josephson. Sistemul este alimentat cu un curent continuu de intensitate I . Pentru valori ale curentului mai mari decât curentul critic I_0 , se obține o tensiune periodică cu câmpul magnetic aplicat. Notăm cu $i_1(t)$ și $i_2(t)$ intensitățile curenților dependenți de timp, prin cele două ramuri. Circuitul echivalent al sistemului este reprezentat în Fig.7.18, unde am utilizat modelul simplu al joncțiunii șuntată rezistiv. În schema echivalentă a unei joncțiuni Josephson considerăm $C=0$, adică presupunem că rezistența mică R a joncțiunii scurtcircuitază complet capacitatea sa. Pentru circuitul din figură pot fi scrise următoarele relații

$$I = i_1(t) + i_2(t)$$

$$i_s = \frac{i_2(t) - i_1(t)}{2} \quad (7.1)$$

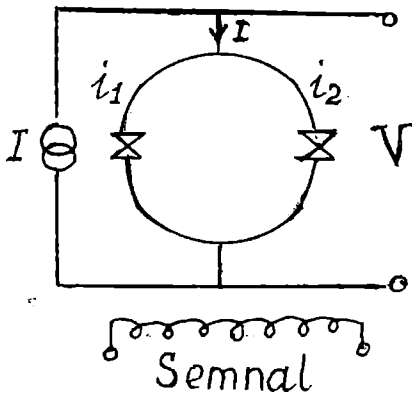


Fig. 7.17

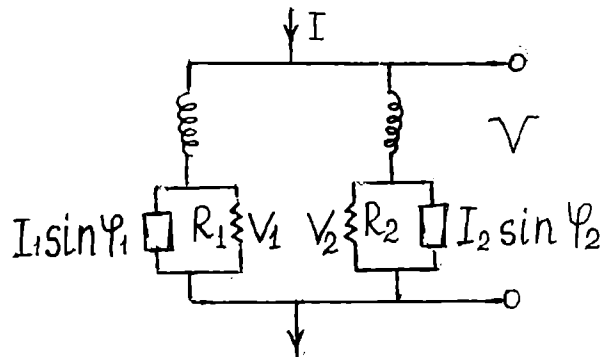


Fig. 7.18

unde i_s este curentul care circulă prin inel și

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_1 \sin \theta_1(t) + \frac{V_1}{R_1} \\ i_2(t) &= I_2 \sin \theta_2(t) + \frac{V_2}{R_2} \end{aligned} \quad (7.2)$$

θ_1 și θ_2 sunt diferențele de fază iar U_1 și U_2 căderile de tensiune pe cele două joncțiuni. Ele sunt corelate prin relațiile

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{2q}{\hbar} V_1 \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{2q}{\hbar} V_2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dacă cele două ramuri ale inelului au inductanțe egale $L_1=L_2=L/2$ atunci căderea de tensiune pe dispozitiv V , este dată de expresia

$$V = V_1 + \frac{l}{2} \frac{di_1}{dt} = V_2 + \frac{L}{2} \frac{di_2}{dt} \quad (7.4)$$

Am neglijat inductanța mutuală dintre cele două ramuri. Din (7.1), (7.2) și (7.4) se obține

$$V(t) = \frac{\hbar}{2q} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (7.5)$$

unde am notat

$$\theta(t) = \frac{\theta_1(t) + \theta_2(t)}{2}$$

Având în vedere relațiile (7.2) și (7.4), relațiile (7.1) pot fi scrise sub forma

$$\begin{aligned} i &= I_c \left[\sin \theta_1(t) + \sin \theta_2(t) \right] + \frac{2V(t)}{R} \\ i_s &= I_c \left[\sin \theta_1(t) - \sin \theta_2(t) \right] + \frac{V_1 - V_2}{R} \end{aligned} \quad (7.6)$$

unde s-a considerat $I_1=I_2=I_0$. Pentru simplificarea calculelor în ultima relație (2.6) se poate neglija contribuția unielectronilor (adică ultimul termen). Astfel, rescriem

$$\begin{aligned} i &= 2I_c \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{2V(t)}{R} \\ i_s &= 2I_c \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Condiția de univocitate (1.5) a fazei pe inel se scrie în acest caz

$$\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} = -\pi \frac{\phi}{\phi_0} \quad (7.8)$$

unde $\phi = \phi_c + Li_s$ este fluxul efectiv prin inel iar ϕ_c este fluxul aplicat din exterior. Ținând seama de (7.8) relațiile (7.7) devin

$$\begin{aligned} I &= 2I_c \sin \theta(t) \cos \frac{\pi \phi}{\phi_0} + \frac{2V(t)}{R} \\ \frac{\phi - \phi_0}{\phi_0} &= \frac{\gamma}{\pi} \sin \pi \frac{\phi}{\phi_0} \cos \theta(t) \end{aligned} \quad (7.9)$$

unde $\gamma = 2\pi LI_0 / \phi_0$. Dacă inducția este neglijabilă, $\gamma \rightarrow 0$ și ultima relație se reduce la $\phi = \phi_e$, care introdusă în prima ecuație (7.9) dă

$$I = I_c(\phi_e) \sin \theta(t) + \frac{2}{R} \frac{\hbar}{2q} \frac{d\theta(t)}{dt} \quad (7.10)$$

unde

$$I_c(\phi_e) = 2I_c \cos \frac{\pi\phi_e}{\phi_0}$$

și s-a utilizat de asemenea relația (7.5). Revenind la prima relație (7.9) se poate scrie

$$V(t) = R \left[\frac{1}{2} I - I_c \cos \left(\frac{\pi\phi}{\phi_0} \right) \sin \theta(t) \right] \quad (7.11)$$

Pentru $I \leq 2I_c$ această ecuație dă o valoare a lui $\theta(t)$ corespunzătoare unui supercurent, adică $V = 0$. (Notăm că în modelul joncțiunii șuntată rezistiv, curentul I constant, de la sursa de curent, depășește supercurentul (dat de termenul care conține faza) cu o valoare $2V/R$, datorată conducției normale a celor două joncțiuni.) De asemenea, în cazul $\gamma \neq 0$, adică atunci când inducția inelului nu este neglijabilă, pentru $I \leq 2I_c$, $V(t) = 0$. La curenți mai mari nu este posibilă o asemenea soluție și $V > 0$. În acest caz θ variază în timp după relația (7.5). La prima vedere s-ar părea că media pe o perioadă a supercurentului alternativ este zero, însă o analiză mai amănunțită conduce la concluzia că media în timp a lui $\sin \theta$ este diferită de zero deoarece θ variază mai lent la valori mici ale lui V , aducând o contribuție mai mare în această parte a ciclului. Prin urmare,

$$\frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} V(t) dt = \bar{V} = \frac{\hbar}{2q} \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{dt} dt = \frac{\hbar}{2q} \frac{2\pi}{T} \quad (7.12)$$

unde perioada T a ciclului anarmonic este

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d\theta/dt} = \frac{\hbar}{2q} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{V(\theta)} \quad (7.13)$$

Din această expresie pentru o valoare dată a curentului I se poate calcula dependența $\bar{V} = f(\phi_e)$. Calculul numeric al lui $I_c = f(\phi_e)$ și $\bar{V} = f(\phi_e)$ pentru $\theta = 3\pi$ este reprezentat în Fig. 7.19 a și c. Curbele din Fig. 7.19 c sunt trasate pentru diverse valori ale lui $I/2I_c$. În Fig. 7.19 b este reprezentată caracteristica $V-I$ pentru două valori ale fluxului extern $\phi_e = n\phi_0$ și $\phi_e = (n + 1/2)\phi_0$ [G8]. Calculul integralei (7.13) dă pentru $\gamma = 0$

$$\bar{V} = R \left[\left(\frac{1}{2} I \right)^2 - I_c^2 \cos^2 \left(\frac{\pi\phi_e}{\phi_0} \right) \right]^{1/2} \quad (7.14)$$

Deoarece $\cos^2(\pi\phi/\phi_0) = (1/2) \times [1 + \cos(2\pi\phi/\phi_0)]$ rezultă că \bar{V} este periodic cu ϕ cu perioada ϕ_0 . Din (7.14) rezultă că pentru $\phi = n\phi_0$, \bar{V} are valoarea maximă $IR/2$. Pentru $I < 2I_c$, \bar{V} are valoarea minimă egală cu zero iar pentru $I > 2I_c$ valoarea minimă a lui este $(IR/2)[1 - (2I_c/I)^2]^{1/2}$ care se obține de asemenea pentru un număr întreg de cuante de flux. Deci valoarea maximă a variației lui $\Delta\bar{V}$ cu ϕ_e este pentru $I = 2I_c$, când $\Delta\bar{V} = \bar{V}_{\max} - \bar{V}_{\min} = I_c R$. Pentru o joncțiune tunel acesta este de ordinul lărgimii benzii interzise $\Delta/q \cong 10^{-3} V$. Pentru $I \gg 2I_c$, $\Delta\bar{V} = I_c^2 R/I$, astfel că $\Delta\bar{V}$ scade și în acest caz lent cu curentul de polarizare. Pentru cazul când se neglijează inductanța L a inelului și deci fluxul de autoecranare, calculul se efectuează numeric și este cel reprezentat în Fig. 7.19. Pentru dispozitivele practice $\gamma \gg 1$ astfel că modularea maximă a curentului critic este $I_c \cong \phi_0/L$ și variația maximă a tensiunii pe dispozitiv este

$$\Delta\bar{V} \cong \frac{R \phi_0}{2 L}$$

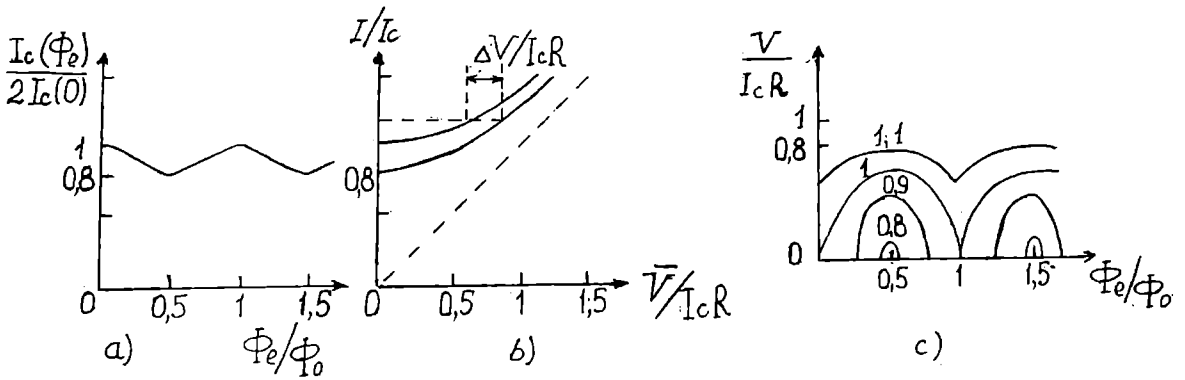


Fig. 7.19

unde R este rezistența normală a fiecăreia din cele două legături slabe și L este inductanța inelului. Pentru I puțin mai mare decât I_0 dependența $\bar{V}(\phi_0)$ poate fi considerată de formă triunghiulară. Pe porțiunea lineară variația $\delta\bar{V}$ a tensiunii pentru o variație $\delta\phi_e$ fluxului extern este

$$\frac{\delta\bar{V}}{\delta\phi_e} = \frac{R}{2L} \quad (7.15)$$

Pentru $R = 1\Omega$, $L = 10^{-9}$ H se obține o sensibilitate de $\sim 1\mu\text{V}/\phi_0$ unde Φ_0 este cuanta de flux magnetic.

7.8. Tehnica de măsură a fluxului magnetic cu DICS cc.

Pentru a detecta variația de flux care străbate DICS cc, se polarizează DICS la o tensiune diferită de zero cu ajutorul unui curent continuu I_c și se aplică un flux de modulare sinusoidal cu amplitudinea $\phi_0/4$ (deci amplitudinea pic-pic egală cu $\phi_0/2$) și frecvența de 100 kHz. Acest flux se generează prin trecerea unui curent prin bobina de modulare, care este montată în interiorul DICS. Așa cum se reprezintă în Fig. 7.20 a când $\phi_0 = (n + 1/2)\phi_0$ tensiunea alternativă pe DICS are o componentă mare pe frecvența $2f$ și o componentă zero pe frecvența f . Cu creșterea lui ϕ_e de la valoarea $(n + 1/2)\phi_0$, amplitudinea V_f a semnalului alternativ pe DICS pe frecvența fundamentală crește (inițial liniar), pe când componenta $2f$ scade. Componenta f atinge maximum

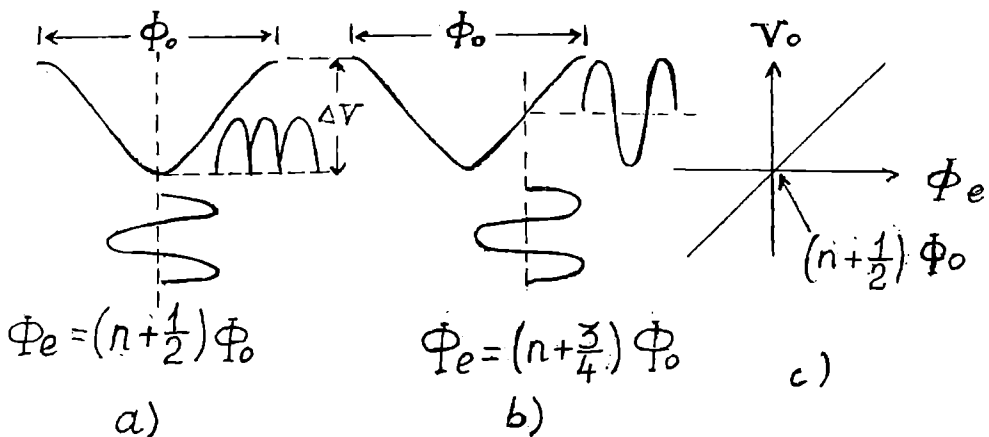


Fig. 7.20

la $\phi_e = (n + 3/4)\phi_0$ (Fig. 7.20) și devine din zero atunci când $\phi_e = (n + 1)\phi_0$. Ea își schimbă faza la $\phi_e = n\phi_0$ și $(n + 1/2)\phi_0$ (a se vedea și Fig. 7.19 c). În Fig. 8.20 c se reprezintă variația lui V_f cu ϕ_e în apropierea lui $(n + 1/2)\phi_0$. Se poate estima că

$$\left. \frac{\partial V_f}{\partial \phi_e} \right|_{I_c} \equiv \frac{2\Delta V}{\Phi_0}$$

tensiunea alternativă pe DICS este amplificată și detectată lock-in pe frecvența f utilizând circuitul reprezentat în Fig. 8.21. Detectorul lock-in dă la ieșire un semnal proporțional cu amplitudinea semnalului de pe DICS la frecvența f . Semnalul de la lock-in este integrat. Astfel, dacă linia de reacție este întreruptă semnalul de ieșire cuasistatic de la integrator este periodic cu $\delta\phi_e$ (cu condiția ca amplificarea amplificatorului de bandă largă din Fig. 7.21 să fie micșorată aproape la zero; altfel lock-in și integratorul se saturează). Atunci când se închide comutatorul circuitului de reacție ieșirea integratorului este conectată via rezistența R_F la bobina de modulare. Sistemul de reacție menține fluxul total în DICS fie lângă valoarea $n\phi_0$ fie lângă valoarea $(n + 1/2)\phi_0$, depinzând de semnul reacției. Această configurație este cunoscută sub numele de DICS lock-in flux. Atunci când fluxul aplicat pe DICS se modifică cu $\delta\phi_e$, un curent de reacție este adus pe bobina de modulare, care produce un flux de semn opus, $-\delta\phi_e$. Astfel, DICS funcționează totdeauna la flux constant și servește ca un detector de nul în circuitul de reacție. Tensiunea dezvoltată pe rezistența R_F din circuitul de reacție este proporțională cu $\delta\Phi_e$. Modularea în curent alternativ, detecția lock-in și reacția negativă micșorează intensitatea anumitor surse de zgomot $1/f$ și de drift cum ar fi: modificarea curentului critic cauzată de modificarea temperaturii băii, variația curentului I_c , variația tensiunii termoelectrice în conductorii din criostat, zgomotul $1/f$ din preamplificator. Notațiile utilizate în circuitul din Fig. 7.21 sunt următoarele: SC - sursă de curent continuu, BI - bobina de intrare, BMR - bobina de modulare și reacție, PA - preamplificator, A - amplificator lock-in, ABL - amplificator de bandă largă, M - multiplicator (integrator), MN - monitor, OSC - oscilator 100 kHz, SF - schimbător de fază, AB - amplificator tampon (buffer), DN - decalaj de nul, capcane de 100 și 200 kHz. O estimare a amplitudinii semnalului obținut pe circuitul rezonant se poate face astfel. Presupunem că aplicăm pe DICS un flux alternativ cu amplitudinea $\phi_0/4$ și deci $\phi_e = (n \pm 1/4)\phi_0$. Ca rezulta apare pe DICS o tensiune de amplitudine

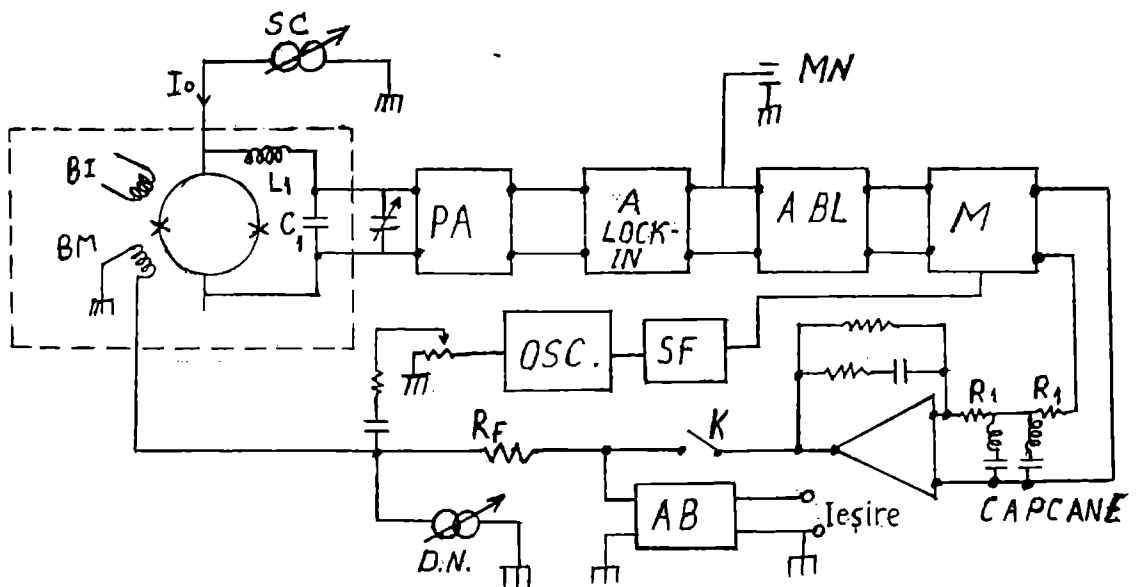


Fig. 7.21

pic-la-pic $r\phi_0/2L$. Circuitul rezonant amplifică acest semnal de Q ori unde $Q = \omega L_1/r$ (r este rezistența, L_1 este inductanța DICS). Amplitudinea semnalului pe circuitul rezonant

$$V_r = \phi_0 \omega L_1 / 2L$$

Dacă $L_1 = 200 \mu\text{H}$, $L = 1\text{nH}$ se găsește $V_r = 100 \mu\text{V}$. Când DICS funcționează în modul cu reacție ne interesează parametrul $(\partial V_r / \partial \phi_0)_{ic}$ definit în apropierea punctului de întoarcere din curba $V(\phi_0)$. Deoarece V_r reprezintă tensiunea pic-la-pic pentru fluxul pic-la-pic ϕ_0 se obține

$$\left(\frac{\partial V_r}{\partial \phi_0} \right) \equiv \frac{\omega L_1}{L}$$

Pentru valorile de mai sus se obține $(\partial V_r / \partial \phi_0)_{ic} = 200 \mu\text{V} / \phi_0$.

7.9. DICS cc utilizate în practică

Primul DICS cc a fost construit în anul 1966 [14] și constă din două joncțiuni tunel de arie mare încorporate într-un inel supraconductor sub formă de strat, de inductanță foarte mică. De asemenea un DICS cc este dispozitivul cu sudură al lui Clarke [15]. Acesta se obține prin imersarea unui fir de niobiu (de 0,1 mm diametru) oxidat (pe care s-au executat două caneluri la distanță de câțiva mm una de alta) într-o topitură de Sn-Pb. În jurul firului se formează o bobină cu lărgimea de câțiva mm la marginile căreia (acolo unde sunt practicate canelurile, adică unde stratul de oxid este mult mai subțire sau a fost înlăturat complet) se formează două legături slabe. Inelul este format din porțiunea circulară din jurul oxidului de niobiu. Fluxul se aplică în inel prin trecerea unui curent prin firul de niobiu. Un alt tip de DICS cc este cel cu joncțiuni cu contact punctiform (Fig. 7.22) [16]. Dispozitivul se construiește din două piese masive din niobiu cuplate strâns dar izolate electric de exemplu cu un strat de mylar. Două șuruburi de niobiu cu vârf sunt introduse astfel încât formează două joncțiuni cu contact punctiform prin contactul cu două suprafețe plane din niobiu. Aceste două joncțiuni realizează conexiunea slabă între cele două piese masive. Totuși, un asemenea dispozitiv, ca și dispozitivul lui Clarke, nu este suficient de stabil. DICS cc au fost perfecționate de către grupul lui Clarke de la Berkeley. Un DICS cc de formă cilindrică cu circuit de acord (rezonant) și cu bobină de modulare este reprezentat în Fig. 23 [17]. Inelul supraconductor este constituit dintr-un strat subțire lung de 10 mm din Pb (cu 5% In) evaporat pe fața exterioară a unui tub de cuarț

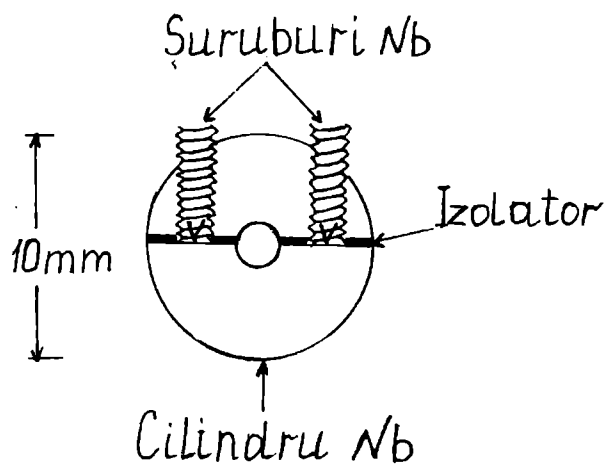


Fig. 7.22

cu diametrul de 3 mm. În inel sunt inserate două joncțiuni tunel Nb-Pb fiecare cu aria de $\sim 10^{-2} \text{mm}^2$. Pentru ca joncțiunile să nu prezinte histerezis în caracteristica I-V, acestea sunt șuntate cu un strat de aur cu rezistența de $0,42 \Omega$. Pentru a micșora inductanța stratului subțire și a reduce pierderile de flux, pe partea din față a dispozitivului se depune un strat de cement. Cuplarea cu inelul a semnalului extern de detectare se face printr-o bobină de semnal introdusă în interiorul cilindrului de cuarț. Pe figură este reprezentată o altă bobină introdusă în interiorul tubului de cuarț pentru cuplarea cu inelul a semnalului de modulare și de reacție. De asemenea, pe figură în stânga este reprezentat și circuitului de acord a impedanței foarte mici a celor două joncțiuni

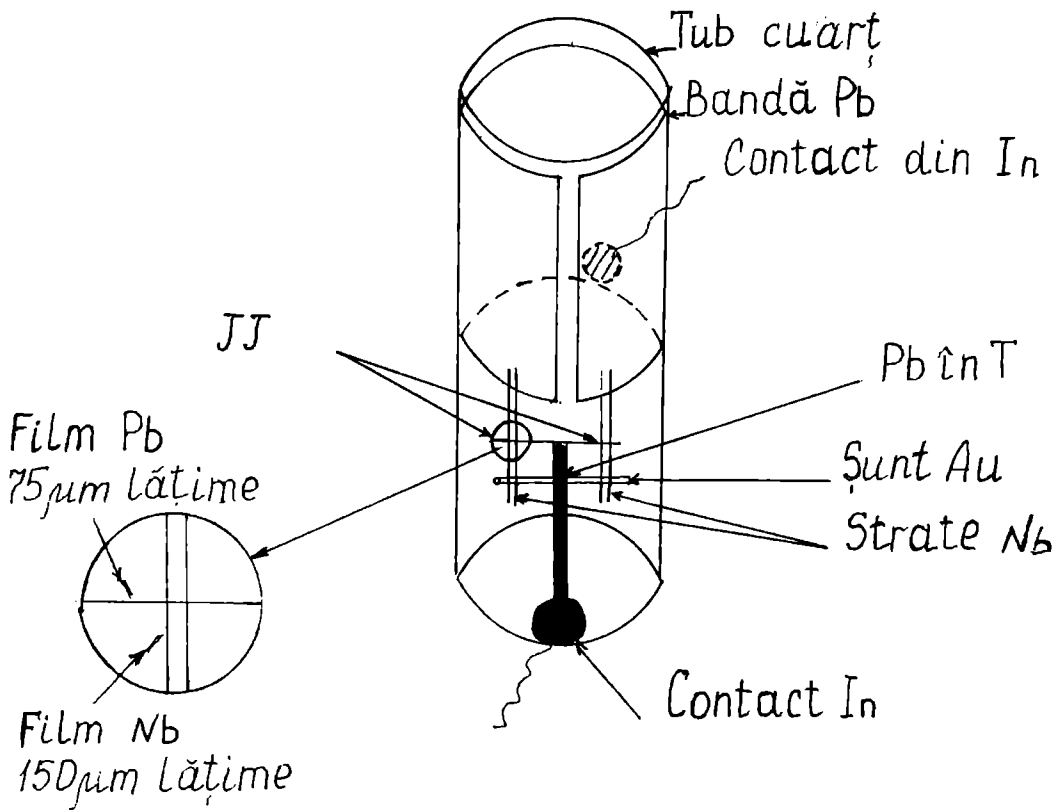


Fig. 7.23a

Josephson (în jur de 1Ω sau mai mică) cu impedanța de intrare ($\sim 100\text{ M}\Omega$) a amplificatorului FET. Acesta este un circuit rezonant serie acordat pe frecvența joasă a semnalului de modulare. Sensibilitatea la flux a unui asemenea dispozitiv este de $10^{-5}\phi_0\text{ Hz}^{-1/2}$. El este rezistent din punct de vedere mecanic și se utilizează pe scară largă în geofizică la construcția gradiometrelor. Începând din anul 1980 la IMB s-a dezvoltat tehnologia joncțiunilor Josephson cu straturi subțiri pentru construcția de DICS-uri digitale și s-a reușit să se fabrice joncțiuni cu aria de $1\mu\text{m}^2$. Aria și deci capacitatea acestor joncțiuni este de 10^4 ori mai mică decât cea pentru joncțiunile prezentate de grupul Clarke. În consecință, parametrul de histererezis $\beta_c \ll 1$ și nu este necesar să se adauge rezistori șunt pe joncțiuni, ceea ce elimină o sursă majoră de zgomot intrinsec. În ultimul timp s-au construit DICS-uri cc planare cu joncțiuni tunel de arie mică și inele din strat subțire, planare. S-a găsit că acestea au sensibilitatea în energie pe unitatea de bandă de frecvență egală cu $1,7\hbar$ (constanta lui Planck) în acord cu limita clasică calculată pe baza generalizării teoremei

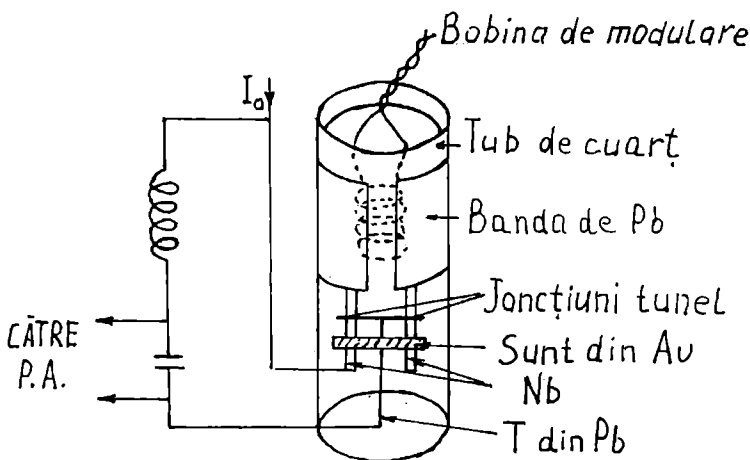


Fig. 7.23b

lui Nyquist [18]. Aceste tipuri de DICS prezintă mare interes deoarece fiind limitate numai de zgomotul cuantic este posibil să se detecteze cu un asemenea DICS un singur foton de frecvență ceva mai mică decât cea din domeniul audio. Studiul unor asemenea detectori de fotoni din domeniul audio are momentan mai mult interes științific decât practic.

O aplicare importantă a DICS planar este măsurarea susceptibilității magnetice foarte mici [19]. Folosind tehnologia de fabricație LSI dispozitivul este integrat într-un susceptometru magnetic care are timp de răspuns de ordinul picosecundelor și care este capabil să detecteze magnetizarea produsă de numai 10^3 spini electronici într-o probă semiconductoare cu magnetism diluat (cu o cantitate mică de impurități magnetice). Pentru variația magnetizării acestor materiale se utilizează pulsuri laser cu lungimea de ordinul picosecundelor, variație ce poate fi detectată. O limitare a aplicațiilor acestor DICS-uri cc, din cea de a doua generație, este determinată de faptul că au o inductanță a inelului extrem de mică ~ 1 pH, ceea ce face dificilă cuplarea eficientă a unui flux extern (după cum reiese din (7.15) valoare mică a lui L implică sensibilitate mare). Pentru rezolvarea acestei probleme s-au utilizat două soluții. Una din soluții folosește un DICS cuplat cu o placă supraconductoare [20] (Fig. 7.24). Inelul supraconductor este format dintr-o placă (strat subțire) cu o gaură centrală mică, de inductanță mică, ce se continuă cu un canal (șanț) de-a lungul căruia sunt plasate cele două joncțiuni Josephson. pentru a reduce inductanțele parazite peste șanț se depune o bandă Cu-Au. În jurul găurii, așa cum se reprezintă pe figură, se construiește pe plăcuță bobina de intrare a semnalului formată din mai multe înfășurări. Inductanța inelului este de 90 pH iar inductanța bobinei de intrare este de 800 nH. Cele două bobine sunt cuplate strâns ($k^2 = 0,86$) și deci există o cuplare eficientă a fluxului extern. A doua soluție pentru cuplarea fluxului la un DICS planar se bazează pe o idee utilizată la DICS rf masivi cu joncțiuni cu contract punctiform. Inelul DICS se realizează sub formă de strat subțire și are o inductanță de 6 pH. Acest inel este cuplat cu 68 de inele conectate în paralel, aranjate în jurul unui perimetru de forma unui pătrat. Aceste inele sunt la rândul lor înconjurate de o bobină cu 20 spire, care reprezintă de exemplu secundarul unui transformator de flux. Utilitatea sistemului se utilizează pe principiul că inducția totală a unei bobine de arie mare se micșorează prin conectarea în paralel a mai multor inele. Constanta de cuplaj în acest caz este $k^2 = 0,43$ iar densitatea spectrală de flux de zgomot pe lărgimea de bandă de frecvență este $S_{\phi}^{1/2} = 1,6 \times 10^{-7} \phi 0\text{Hz}^{-1/2}$. Prin urmare aceste două metode se utilizează pentru acordarea DICS cc la circuitele externe.

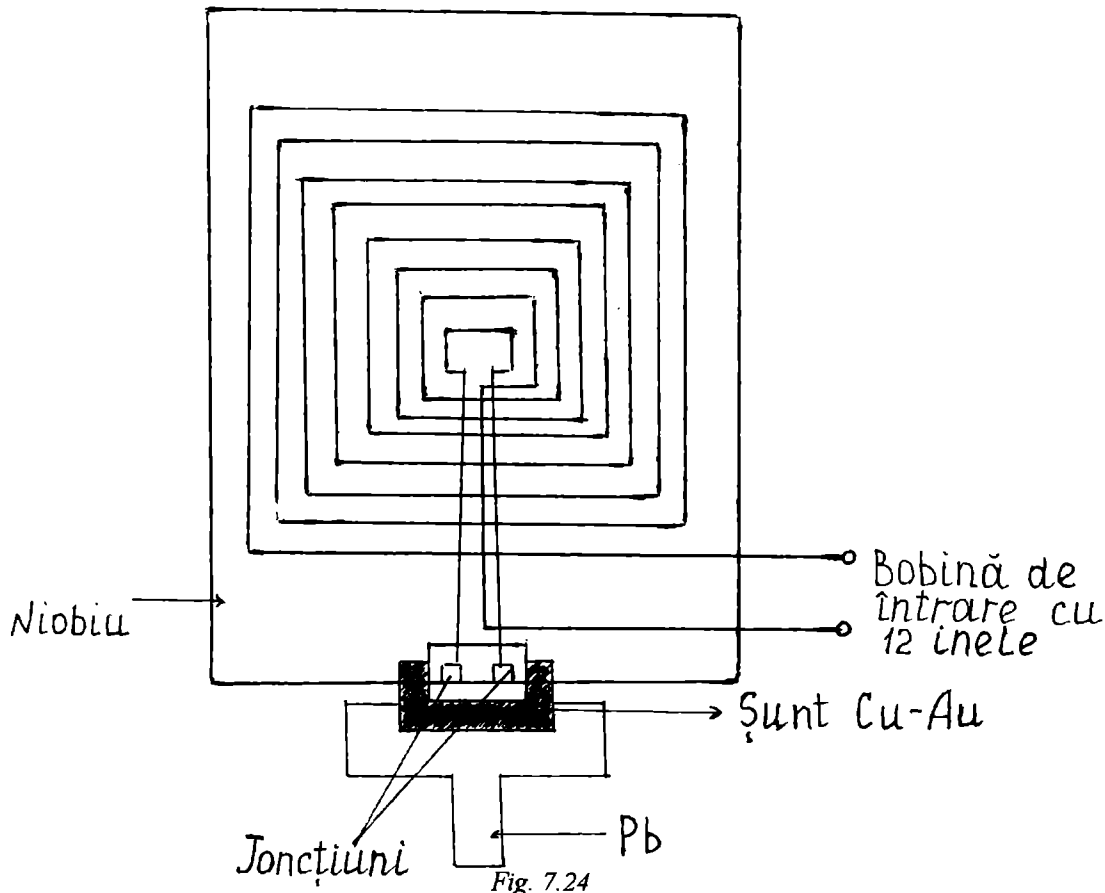


Fig. 7.24

7.10. Zgomotul în DICS cc

Am văzut că în DICS rf zgomotul circuitului extern este aproape totdeauna mai mare decât zgomotul intrinsec al dispozitivului. Pentru DICS cc situația este inversă: zgomotul Johnson intrinsec, asociat cu rezistența șunt a joncțiunii, este dominant. Pentru două joncțiuni simetrice de rezistență R densitatea specială a tensiunii de zgomot care apare pe cele două joncțiuni este

$$S(V) = 4k_B TR / 2$$

În plus, există fluctuația curentului din inel care are densitatea spectrală

$$S(i) = \frac{8k_B T}{R}$$

Se face presupunerea că aceste două surse de zgomot sunt independente. Evident că aceasta este o simplificare deoarece curentul de zgomot care circulă prin inel va influența tensiunile care apar pe joncțiuni și viceversa. Energia minimă detectabilă pe intervalul unitate de lărgime a benzii de frecvență este corelată cu densitatea spectrală de zgomot a fluxului prin relația

$$\delta(E) = \frac{S(\phi)}{2L} \quad (10.1)$$

unde $S(\phi)$ este la rândul ei corelată cu $S(V)$ și $S(i)$ prin relația

$$S(\phi) = \frac{S(V)}{(\partial V / \partial \phi)^2} + \frac{S(i)}{(\partial i / \partial \phi)^2}$$

Pentru a găsi aceste derivate parțiale trebuie rezolvate numeric ecuațiile diferențiale (7.2) și (7.3) [21]. Totuși, un rezultat pe o cale simplă se poate obține dacă avem în vedere că variația maximă a curentului critic care poate fi produsă de către un flux extern este $\phi_0/2L$, ceea ce necesită o variație cu $\phi_0/2$ a fluxului aplicat. Rezultă $\partial i / \partial \phi = 1/L$. În mod similar,

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \phi} \sim (\partial V / \partial i)(\partial i / \partial L) = \frac{R}{2L}$$

Substituind aceste valori în (10.1) se obține

$$\delta E = 8k_B TL / R \quad (10.2)$$

unde L este impedanța inelului. Această relație dedusă pe modelul baza modelului joncțiunii șuntată rezistiv conduce la următoarele două concluzii: (a) cu scăderea temperaturii energia minimă măsurabilă scade fără limită; (b) cu cât L este mai mic, adică cu cât aria inelului este mai mică, cu atât pot fi detectate energii mai mici. Referitor la prima concluzie, aceasta este contrazisă de principiul de incertitudine al lui Heisenberg, care corelează rezoluția în energie cu timpul de măsurare. Cercetări recente pe DICS cu supraconductori cu temperatură critică înaltă cu arie mare, $L = 0,1$ nH și $C = 0,1$ pF au arătat că relația (10.2) este valabilă până la 50 mK [22]. Pentru eliminarea acestui paradox s-a încercat să se adauge un zgomot de alicie, dar rezultatele experimentale au arătat că zgomotul de alicie este absent în diodele tunel. O altă soluție a fost să se propună pentru densitatea spectrală de zgomot de curent pentru un ansamblu de oscilatori cuantici relația [23]

$$S(i) = \frac{4\hbar\omega}{R \left\{ \left[e^{\hbar\omega/k_B T} - 1 \right]^{-1} + \frac{1}{2} \right\}} \quad (10.3)$$

astfel că $S(i)$ este dependent de frecvența ω pentru $\hbar\omega > k_B T$ dar se reduce la densitatea de zgomot clasică (zgomot alb) pentru $\hbar\omega < k_B T$. Această modificare permite aplicarea principiului de incertitudine al lui Heisenberg în limita temperaturilor joase, deoarece ea presupune existența fluctuațiilor de zero (de temperatură zero). Această presupunere a fost verificată experimental ceea ce confirmă natura cuantică a fenomenelor în DICS [24]. Referitor la cea de a doua concluzie

care se desprinde din ec. (10.2), cu scăderea lui L și deci a ariei inelului crește sensibilitatea, aceasta este de asemenea confirmată experimental. Totuși, s-a găsit că zgomotul alb (relația (10.2) presupune un zgomot independent de frecvență adică zgomotul alb) există numai deasupra unei frecvențe limită ~ 100 kHz. Sub această frecvență densitatea spectrală de zgomot are o dependență de forma $1/\omega$. Zgomotul $1/\omega$ s-ar datora neomogeneităților barierelor joncțiunilor [25]. El este mai intens în joncțiunile tunel cu straturi subțiri decât în cele cu contact punctiform.

7.11. Dispozitivele Josephson și DICS construite din materiale supraconductoare cu temperatură critică înaltă.

S-au construit joncțiuni tunel Y123-MgO-Au și Y123-MgO-Y123 [26]. Din caracteristica I-V s-a determinat lărgimea benzii interzise $\Delta = 18$ meV la 4,2 K. Structurile au fost realizate prin depunere de straturi subțiri de Y123 ($\sim 1 \mu\text{m}$) prin pulverizare în plasmă de CF_4 utilizând metoda magnetron, pe substrat de MgO. În Fig. 7.25 se reprezintă dependența de grosimea barierei a rezistenței tunel iar în Fig. 8.28 b se reprezintă dependența conductanței de tensiune aplicată la diverse temperaturi în joncțiunea tunel Y123-MgO-Au. De asemenea a fost pus în evidență efectul Josephson în curentul alternativ în legături slabe construite din aceste materiale [27]. S-a măsurat $h/2q$ cu o precizie de 10^{-5} . Faptul că este îndeplinită relația $2qV = nhv$, confirmă existența perechilor de electroni în supraconductorii ceramici pe bază de cupru.

Primele DICS din Y123 masiv au fost construite în anul 1987 [28]. Probele policristaline obținute prin sinterizare sunt un aglomerat de granule cu dimensiunile $\leq 10 \mu\text{m}$ între care există un cuplaj supraconductor slab. Aceste legături slabe deja existente (între diversele granule) sunt utilizate pentru realizarea DICS. În plus, existența acestor legături slabe explică densitățile mici de curent critic observate în materialele ceramice obținute prin sinterizare. Un material sinterizat conține multe joncțiuni intergranule. De aceea pentru obținerea DICS cc sau rf se decupează din material probe cu dimensiunile de 0,1 mm care conțin decât câteva legături slabe și pot fi utilizate pentru construcția DICS. Lungimea de coerență a perechilor în materialele ceramice este extrem de mică, < 3 nm în direcțiile axelor a și b ale cristalului și $< 0,3$ nm în direcția axei c. Construcția de micropunți de asemenea dimensiuni prin cea mai sofisticată tehnică de litografie este dificilă astfel că construcția DICS din material ceramic este dificilă astfel că construcția DICS din material ceramic masiv este utilizată pe scară largă. S-a demonstrat de asemenea cuantificarea fluxului într-un inel din material ceramic obținut prin sinterizare [29]. Deoarece în acest material densitatea de curent critic este mică înseamnă că tranziția de la o stare cuantică de flux la altă stare cuantică de flux în inel poate fi indusă relativ ușor utilizând impulsuri electromagnetice. Amplitudinea fiecărei variații de flux s-a măsurat relativ simplu cu un magnetometru cu DICS convențional, calibrarea realizându-se cu o

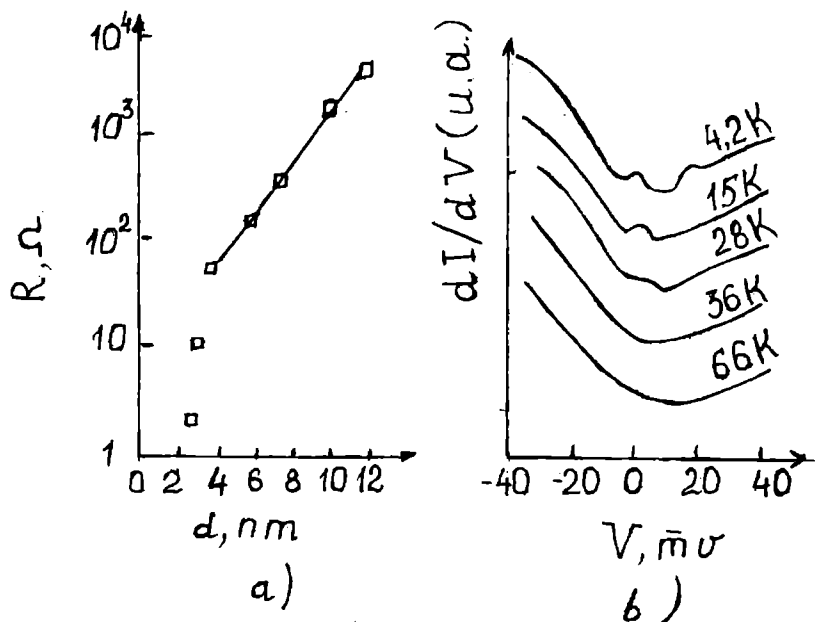


Fig. 7.25

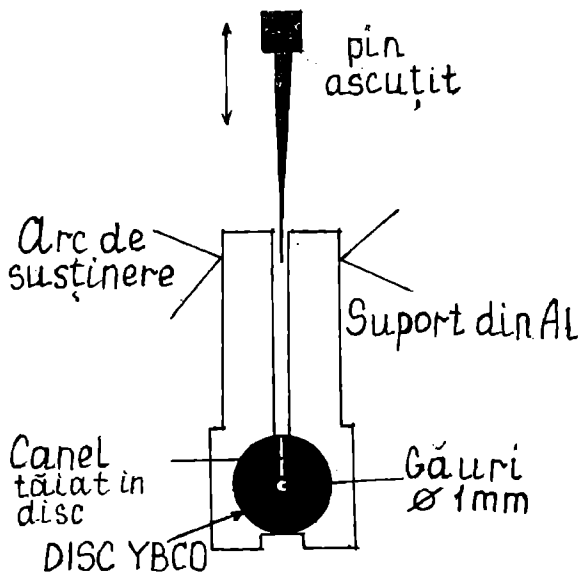


Fig. 7.26

bobină toroidală lungă și subțire, care înconjură inelul. S-a observat că toate variațiile sunt multiplu de $\delta\phi = 0,95 h/2q$, cu o eroare de $\pm 0,1$. Acest rezultat confirmă existența perechilor de sarcină $2q$ în acești supraconductori ceramici, la fel ca în supraconductorii convenționali. DICS masiv care funcționează la 77 K are sensibilitatea $\delta\phi \sim 10^{-4} \phi_0 \text{Hz}^{-1/2}$, comparabilă cu cea a unui DICS comercial care funcționează la 4,2 K. În plus DICS ceramic masiv este rezistent din punct de vedere mecanic. În Fig. 7.26 este reprezentat un DICS rf (cu o singură joncțiune) [30]. Într-un disc din ceramică sinterizată sunt decupate o gaură cu diametrul de ~ 1 mm și un canel radial. Inelul este fracturat prin introducerea în canel un pin ascuțit la temperatură joasă. Se formează o joncțiune

Josephson cu contact punctiform prin retragerea lentă a pinului permițând astfel suprafețelor curate, neregulate care au luat naștere de o parte și de alta a canelului, prin introducerea pinului, să se atingă ușor. Aceste DICS-uri masive obținute din materiale sinterizate nu au căpătat o dezvoltare prea mare datorită dificultăților de a realiza bobine de intrare și transformatoare de flux din aceste materiale (fire flexibile sau bobine planare din strate subțiri sau groase).

7.12. DICS din straturi subțiri.

Probele ceramicemasive obținute prin sinterizare au în general densitatea de curent critic mică, $\sim 10^3 \text{A/cm}^2$ la 77 K. Prin realizarea probelor din straturi subțiri prin depunerea epitaxială pe substraturi de SrTiO_3 s-a obținut o creștere a densității curentului critic, j_c , de o mie de ori. Proprietăți electrice mai bune s-au obținut utilizând substraturi monocristaline de MgO și zirconiu. Aceeași tehnologie se utilizează și pentru construcția DICS cu straturi subțiri. După depunere compusul trebuie oxigenat la o temperatură de $\sim 600^\circ\text{C}$. Legăturile slabe dintre granulele din stratul subțire policristalin care apar în mod natural fac să nu mai fie necesară prepararea specială a unor legături slabe pentru DICS. Pentru a obține inele DICS și legături slabe care să conțină câteva joncțiuni (câteva Granule) se decupează probe de dimensiuni mici folosind tehnica fotolitografiei sau gravării umede sau uscate. Pentru decuparea probelor de dimensiuni corespunzătoare se folosește și tehnica ablațiunii cu laser însă în acest caz apar defecte la marginile stratului subțire. În acest mod s-a obținut de către firma IBM DICS cc din straturi subțiri de TlBaCaCuO cu o sensibilitate în energie la 77 K de $6 \times 10^{-10} \text{JHz}^{-1}$, mai bună decât cea obținută cu DICS cu supraconductori convenționali la 4,2 K [31]. Se pare că zgomotul $1/f$ nu constituie o problemă pentru acest material. În 1990 a fost constituită de această firmă prima joncțiune Josephson formată din două straturi subțiri din STI (supraconductori cu temperatură critică înaltă) separate de un strat subțire izolator, uniform, cu grosimea de 1 nm [32]. Aceste structuri nu sunt încă reproductibile și caracteristica $I-V$ nu prezintă o bandă interzisă vizibilă. S-au fabricat așa-numitele DICS cu joncțiuni de frontieră. Un strat subțire de Y123 este acoperit cu un strat protector de BaF. Prin gravare cu fascicul de ioni se obține o frontieră sub formă de pieptene a acestui strat dublu. Structura astfel obținută este expusă la o plasmă oxo-fluoridizată și astfel se

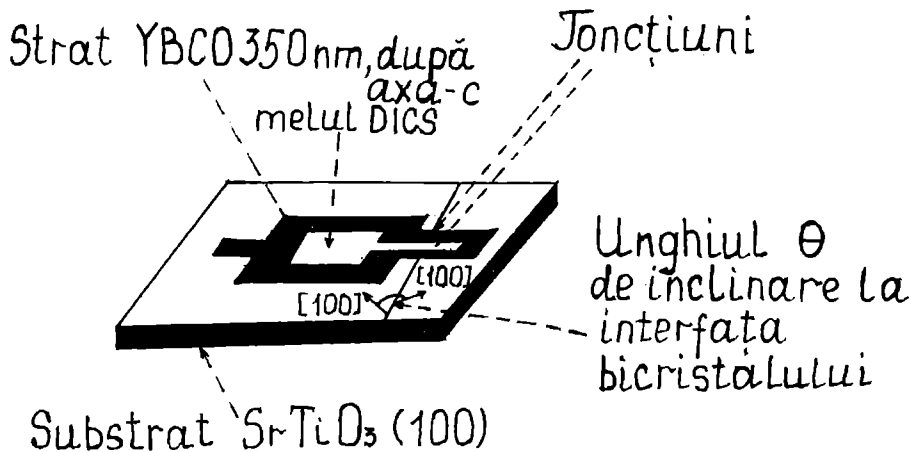


Fig. 7.27

obține un strat subțire izolator. În final se depune un al doilea strat se Y123 peste frontiera gravată și structura este proiectată astfel ca să se obțină benzi proeminente de lățime $5\mu\text{m}$, care să închidă un inel supraconductor cu dimensiunile $20\mu\text{m} \times 20\mu\text{m}$. Un alt DICS cu joncțiuni de frontieră, obținut la IBM, este reprezentat în Fig. 7.27 [33]. Substratul este un bicristal construit din două piese monocristaline din MgO care fac la interfață (între ele) un unghi α între axele cristaline. Peste frontiera dintre cele două monocristale se depune un strat subțire de Y123. Se formează joncțiuni de frontieră al căror curent critic depinde de grosimea stratului depus și de unghiul de interfață al bicristalului, Grosimea stratului supraconductor depus este în general de 350 nm și este orientat după axa c. De asemenea, se fabrică joncțiuni acceptabile prin depunerea unui strat subțire supraconductor pe un substrat care are o tranziție în treaptă în grosimea sa după o anumită linie. grosimea treptei trebuie să fie de ordinul grosimii stratului subțire depus ($\sim 300\text{ nm}$). Joncțiunile construite astfel au produsul $I_c R$ mai mic de 1 mV la 77 K (ar fi de dorit $10\text{-}20\text{ mV}$) însă sunt stabile și se pot construi cu ele DICS prototip. Straturile subțiri supraconductoare se depun prin ablațiune laser, pulverizare în plasmă sau evaporare. În toate metodele utilizate, materialul se depune pe un substrat încălzit la 700°C în atmosferă de oxigen activ. Straturile subțiri obținute astfel sunt supraconductoare (sub temperatura critică) fără a mai fi necesar un proces de tratament termic sau de oxigenare. Straturile depuse sunt monocristaline, cu axa c perpendiculară pe substrat care de asemenea este monocristalin. Spre deosebire de materialele masive, straturile subțiri monocristaline au densitate mare a curentului critic (10^7 A/cm^2 la 77 K)

S-au realizat de asemenea bobine și transformare de flux plinare din STI [22].

7.13. Limitele sensibilității DICS cu STI

Un DICS cu STI (supraconductori la temperaturi înalte) care funcționează la 77K este inevitabil mai puțin sensibil decât un DICS cu supraconductori convenționali care funcționează la $4,2\text{K}$. Vom corela aceste limite cu proprietățile joncțiunilor Josephson utilizate. Să considerăm un DICS cc cu joncțiuni șuntate rezistiv. Notând cu L inducția inelului și cu I_c curentul critic pentru fiecare din cele două joncțiuni, presupuse identice, pentru a obține o transformare flux-tensiune trebuie îndeplinită condiția

$$\beta = \frac{2\pi L I_c}{\Phi_0} \equiv 1 \quad (13.1)$$

Pentru ca joncțiunile să nu prezinte histerezis în caracteristica I-V trebuie ca rezistența șunt R și capacitatea C a acestora să îndeplinească condiția

$$\beta_c = \frac{2\pi I_c R^2 C}{\Phi_o} < 1 \quad (13.2)$$

Pentru ca să existe coerența perechilor de electroni în legătură slabă (joncțiune) este necesar ca energia de cuplaj Josephson să fie mult mare decât energia fluctuațiilor termice, adică

$$\frac{2\pi k_B T}{\Phi_o I_c} \ll 1 \quad (13.3)$$

Diferența dintre energia numărului de fluxoni din inel dintre două stări adiacente trebuie să fie mai mare decât energia fluctuațiilor termice

$$\frac{\Phi_o^2}{2L} \gg k_B T \quad (13.4)$$

Altfel, numărul de fluxoni este nedefinit. Am presupus că densitatea spectrală de zgomot termic este dată de relația

$$S = \frac{k_B T \Phi_o}{I_c R} + \frac{h}{2} \quad (13.5)$$

unde ultimul termen din paranteză reprezintă energia oscilațiilor de zero. Este posibil ca DICS care funcționează la 77 K să fie limitat de zgomotul cuantic dacă

$$\frac{h}{2} > \frac{k_B T \Phi_o}{I_c R}$$

adică

$$\frac{q I_c R}{k_B T} > 1 \quad (13.6)$$

Din teoria efectului tunel Josephson se cunoaște că

$$I_c R \cong \frac{2\Delta}{q} \quad (13.7)$$

astfel că condiția pentru limita cuantică de mai sus devine

$$\frac{2\Delta}{k_B T} > 1 \quad (13.8)$$

relație ce poate fi ușor satisfăcută. Din ec. (13.4) se obține la 77 K

$$L \ll \frac{\Phi_o^2}{2k_B T} = 1nH$$

Din condiția (13.3) se obține la 77 K

$$I_c > \frac{2\pi k_B T}{\Phi_o} \cong 3\mu A$$

Substituind această valoare în (13.6) rezultă

$$R > \frac{k_B T}{2q I_c} \cong 1000\Omega$$

Substituind valoarea lui Φ_o în (13.1) se obține

$$L I_c \cong 1 \times 10^{-15} Wb$$

ceea ce este compatibil cu rezultatele în condițiile de mai sus. Mai dificil este de îndeplinit condiția (13.2)

$$C < \frac{\phi_0}{2\pi I_c R^2}$$

care la 77 K devine $C < 10^{-16}$ pF. Această valoare este cu un ordin de mărime mai mică decât valoarea obținută pentru o joncțiune tunel cu supraconductori convenționali [34] și cu două ordine de mărime mai mică decât cea obținută pentru o joncțiune tunel cu STI [35]. Evident că se speră în prepararea unor joncțiuni tunel mai bune.

O altă problemă este cea a zgomotului de flux în bobinele planare. Deoarece în STI $\lambda \gg \xi$, aceștia sunt supraconductori de speța a II-a. Câmpul critic inferior $H_{c1} \sim 1$ mT, este mult mai mic decât în majoritatea supraconductoarelor convenționale. Pentru probele policristaline, câmpul critic efectiv H_{cl} este chiar mai mic decât această valoare deoarece interfețele dintre granule sunt legături supraconductoare slabe și alcătuiesc o rețea de ochiuri (o sită) prin care liniile de flux pot penetra ușor materialul. Chiar dacă menținem câmpul magnetic ambiant sub valoarea H_{c1} pentru materialele policristaline această măsură de precauție nu este suficientă, deoarece în procesul de răcire a stratului subțire până la T_c pot apărea tensiuni termoelectrice care pot da naștere la curenți circulatori în timpul tranziției la starea supraconductoare. Acești curenți, din planul stratului subțire, generează câmpuri magnetice care pot depăși local valoarea lui H_{c1} . Astfel rămân captate filamente de flux în stratul supraconductor, care au o distribuție dezordonată. Energia fluxului captat într-o capcană de flux este $LI^2/2$ unde I_c este curentul critic al legăturii slabe dintre granule. Această energie de captare a fluxului poate fi în unele zone comparabilă cu $k_B T$ (I_c în policristal poate diferi de la frontieră la frontieră intergranulară), astfel că apare o deplasare a fluxonilor. Menționăm că pentru ca fluxonul să se deplaseze trebuie îndeplinită condiția $LI^2/2 \gg k_B T$. Deplasarea fluxonilor generează un zgomot fals în DICS [36].

CAPITOLUL VIII

APLICAȚIILE MATERIALELOR SUPRACONDUCTOARE

Apariția supraconductorilor cu temperatură critică înaltă a dat un nou impuls aplicațiilor industriale ale supraconductibilității. În acest capitol vom expune câteva din aceste aplicații magnetice cu supraconductori pentru reactorii de putere cu fuziune nucleară, trenuri cu levitație magnetică, cabluri pentru transportul la distanță al energiei electrice, motoare electrice, separarea magnetică etc.

8.1. Magneți cu supraconductori

Câmpurile magnetice pentru aplicații în electrotehnică se obțin în general cu ajutorul electromagneților construiți din bobine de cupru sau aluminiu cu miez de fier. Însă, deoarece inducția la saturație a fierului este în jur de 2T cu acești magneți nu se obțin densități de flux mai mari de 2T. Densități de flux mai mari, până la 7T, s-a obținut cu magneți de construcție specială cu piese polare care concentrează fluxul magnetic însă într-un volum foarte mic. Cu magneți de construcție specială de tip Bitter, cu răcire cu apă pe direcție axială și miez cu diametrul de câțiva cm s-au obținut câmpuri de 25 T. Asemenea magneți consumă o putere de câțiva Megawați. Această putere se transformă total în căldură ce trebuie eliminată în afară prin răcire cu apă cu o viteză de câțiva metri cub pe minut. Dacă durata unei experiențe în câmp magnetic intens poate fi limitată la un interval mic de timp, atunci se utilizează câmpuri magnetice în impulsuri, ca de exemplu în fizica plasmei pentru fuziunea nucleară controlată. Astfel se pot obține densități de flux de 100 T în impulsuri cu durata de micro și milisecunde. De asemenea, se obțin valori de peste 1000 T în impulsuri cu durata $< 10^{-5}$ s prin compresia câmpului utilizând metode explozive în urma cărora sistemul este distrus după un singur impuls. Un dezavantaj al electromagneților contravenționali este limitarea densității de curent ce poate fi transportată de către conductori construiți din metale normale. Astfel în conductorii din cupru și aluminiu aceasta nu poate depăși 20A/mm^2 , în condiții de răcire cu apă cu viteză mare de transport. Evident, această limită poate fi mărită prin funcționarea la temperaturi joase și utilizarea conductorilor din metale foarte pure. Însă din acest punct de vedere utilizarea supraconductorilor de speța a II-a dă posibilitatea creșterii însemnate a densității de flux, deoarece limita densității curentului critic este în jur de 10^4A/mm^2 . Limitarea utilizării acestora este dată de câmpul magnetic critic superior H_{c2} care în supraconductorii ceramici este mai mare de 200 T. Cu bobine construite din materiale supraconductoare se pot obține câmpuri magnetice intense în volume mari. Înainte de apariția supraconductorilor oxidici cu temperatură critică înaltă se construiau bobine

supraconductoare cu fire din NbTi ($T_c = 18,4$ K, $H_{c2} = 22$ T la 4,2 K), V_3Ga ($T_c = 15$ K, $H_{c2} = 23$ T), Nb_3Ge ($T_c = 23,2$ K, $H_{c2} = 36$ T la 4,2 K), $PbMo_6S_8$ ($T_c = 15$ K, $H_{c2} = 70$ T). Evident că bobine cu fire din asemenea materiale se construiesc și în prezent. Pentru supraconductorii ceramici aceste date sunt prezentate în cap. 1, 2. Acești supraconductori prezintă în stare normală rezistivitate electrică mare. Deoarece prin ei circulă densități mari de curent, apariția regiunilor de rezistență normală determină distrugerea lor prin încălzire locală. Regiuni de rezistență normală în supraconductori pot apărea datorită deplasării lente sau în salt a fluxonilor, frecărilor din timpul deplasării conductorilor, impulsurilor de căldură din exterior sau răcirii insuficiente. Pentru a evita distrugerea supraconductorilor aceștia se stabilizează utilizând trei metode. Înainte de a prezenta aceste metode de stabilizare vom prezenta instabilitatea termică.

8.2. Instabilitatea termică

Am văzut în § 3.6 că deplasarea fluxului în supraconductor generează o cădere de tensiune și deci o disipare de putere electrică. Dacă notăm cu f forța pe unitatea de volum care acționează asupra fasciculelor de flux magnetic situate în vâlele de potențial de înălțime U_0 se poate scrie

$$P = f v = f v_0 e^{-(U_0 - f v_c x) / k_B T} \quad (2.1)$$

unde

$$\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B}$$

unde c este viteza luminii, iar v este viteza de deplasare a fasciculului de linii de flux, $v_0 = v_0 x$ este viteza de deplasare dacă nu ar exista barieră; v_0 este o frecvență caracteristică de vibrație a liniilor de flux. Reamintim că v_c este volumul ocupat de fasciculul de linii de flux și x este lățimea barierei. Această putere disipată se transformă în căldură care poate distruge materialul prin ambalarea termică. Pentru a evita distrugerea materialului sistemul trebuie să fie stabil din punct de vedere termic, adică dacă apare o creștere de temperatură ΔT într-o anumită regiune, aceasta nu trebuie să crească, ci să scadă la zero. În acest scop este necesar ca transferul de căldură către mediul înconjurător să se facă mai rapid decât creșterea căldurii disipate. Se observă din relația (2.1) că o creștere a temperaturii determină o creștere a căldurii disipate datorită creșterii vitezei de transport a fluxului. Din această relație se obține

$$\frac{T}{P} \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{U_0}{k_B T} - \frac{f v_c x}{k_B T} - \frac{\partial U_0}{\partial (k_B T)} = -\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) - \frac{\partial U_0}{\partial (k_B T)} \quad (2.2)$$

$v_0 = v_0 x = 10^{3+3}$ cm/s, $U_0 = p v_c H^2 / 8$, $v_c = x^3$, $x = 10^{-5}$ cm, $p = 10^{-3}$, $H_c = 2000$ Oe, $U_0 / k_B = 1200$ K. Pentru aceste valori tipice se obține

$$\frac{T}{P} \frac{\partial T}{\partial T} = 100$$

Prin urmare, o creștere mică a temperaturii determină o creștere mare a căldurii degajate și deci apare instabilitate termică dacă nu se iau măsuri eficiente de răcire. Pentru a găsi condițiile de echilibru dintre căldura disipată și căldura eliminată în exterior, scriem ecuația de transport a căldurii

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + P \quad (2.3)$$

unde C este căldura specifică pe unitatea de volum, k este conductivitatea termică și P este putere de intrare pe unitatea de volum. În condiții staționare

$$k \nabla^2 T + P = 0 \quad (2.4)$$

care determină dependența spațială a temperaturii T . Să considerăm că într-un element de volum de rază r apare o fluctuație $\delta T > 0$. Ordinul de mărime al lui $k \nabla^2 (\delta T)$ este $-(k/r^2) \delta T$.

Vom înlocui pe P din această relație (2,3) cu $(\partial P/\partial T)\delta T$, astfel că această ecuație se poate scrie

$$C \frac{\partial(\delta T)}{\partial t} = \left(-\frac{k}{r^2} + \frac{100P}{T} \right) \delta T$$

Al doilea termen din paranteză reprezintă creșterea de căldură intrată (disipată), iar primul termen din paranteză reprezintă puterea eliminată prin conducție calorică (termică). Stabilitatea există atunci când

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial t} < 0$$

adică

$$\frac{k}{r^2} > \frac{100P}{T} \quad (2.5)$$

Din (2.4) se obține

$$\frac{-k(\Delta T)}{r^2} + P = 0$$

unde ΔT este creșterea temperaturii sistemului în condiții staționare. Comparând această relație cu relația (2.5) se obține

$$\frac{\Delta T}{T} \equiv \frac{1}{100} \quad (2.6)$$

Rezultă că pentru a evita ambalarea termică, magnetul trebuie să funcționeze în astfel de condiții încât disiparea de căldură în condiții staționare datorită transportului de flux să nu conducă la o creștere cu mai mult de un procent a temperaturii sistemului. Notăm că de fapt magnetii funcționează în astfel de condiții încât activarea termică a deplasării de flux este nelijabilă și alți factori acționează, așa cum vom vedea în continuare asupra instabilității termice. Totuși, din analiza de mai sus rezultă că un magnet bun trebuie să aibă conductivitate termică mare și să facă contact bun cu baia de heliu sau de azot în care este introdus. Materialele supraconductoare cu Hc_2 mare au drum liber mijlociu al electronilor mici și deci conductivitate termică mică. De aceea conductorii utilizați la magnetii se construiesc din materiale compozite compuse din filamente supraconductoare încastrate într-o matrice dintr-un metal cu conductivitate termică mare, de exemplu cupru. Însă, pe lângă instabilitatea termică apar în acest caz curenții turbionari în cupru care amortizează variația câmpului magnetic. În magnetii cu supraconductori care funcționează în câmp magnetic în impulsuri (la accelerorii de particule) sau în curent alternativ trebuie asigurată atât stabilitatea termică cât și viteza mare de variație a câmpului magnetic. În acest scop conductorii compoziți se construiesc dintr-o rețea de filamente supraconductoare fine cu diametrul de $\sim 30\mu\text{m}$, împletite, încastrate într-o matrice de metal normal [1]. Să comparăm rata de deplasare a fluxului magnetic cu rata de deplasare a căldurii în acești conductorii. Din ecuația de transport al căldurii (2.3) definim o constantă de difuzie termică

$$D_T = \frac{k}{C} \quad (2.7)$$

Timpu τ necesar ca să difuzeze căldura pe distanța L (pentru micșorarea unui gradient de temperatură) este de ordinul

$$\tau_T = \frac{L^2}{D_T} \quad (2.8)$$

Utilizând ecuațiile lui Maxwell se definește un coeficient de difuzie a fluxului magnetic

$$D_M = \frac{\rho}{\mu_0} \quad (2.9)$$

unde ρ este rezistivitatea materialului. Timpul necesar ca fluxul să difuzeze pe distanța L este

$$\tau_M = \frac{L^2}{D_M} \quad (2.10)$$

Pentru un metal pur la 4K, $D_T = 10^3 \text{ cm}^2/\text{sec}$. și $D_M = 1 \text{ cm}^2/\text{sec}$. și prin urmare căldura se deplasează mai repede decât fluxul magnetic. Dimpotrivă în aliaje sau supraconductoare fluxul magnetic se deplasează mai rapid decât căldura, adică $D_M > D_T$. Într-un conductor compozit cu filamente supraconductoare, $D_M(\text{Cu}) = D_T(\text{supraconductor}) = 1 \text{ cm}^2/\text{sec}$. Căldura poate fi eliminată din miezul supraconductor mai repede decât poate difuza fluxul magnetic prin matericia de cupru pur, de la un filament la altul. Aceasta face ca materialele compozite să fie foarte stabile din punct de vedere termic.

8.3. Stabilizarea supraconductorilor în câmpuri magnetice intense

Pentru a evita distrugerea supraconductorilor datorită instabilității termice se iau măsuri tehnice de stabilizare a acestora. Se disting trei metode de stabilizare: stabilizarea criostatică, stabilizarea adiabatică, stabilizarea dinamică.

(a) Stabilizarea criostatică

Stabilizarea criostatică asigură revenirea rapidă a sistemului compozit în starea supraconductoare atunci când el este trecut în stare normală de către o perturbație inernă sau externă (salt de flux, deplasarea conductorilor, impulsuri de căldură din exterior), pentru o anumită conductivitate termică a metalului normal și a unui flux de transfer a căldurii de la suprafața metalului normal la baia de răcire. Aceasta se asigură dacă în conductorul compozit raportul dintre aria secțiunii transversale a metalului normal și a supraconductorului este în jur se 10. Valoarea maximă a curentului care trece prin conductor este aleasă astfel încât în urma dispariției perturbației conductorul compozit să revină la starea supraconductoare.

(b) Stabilizarea adiabatică.

În acest caz se realizează stabilizarea în condițiile în care căldura apărută nu părăsește volumul considerat în timpul perturbației. Vom analiza situația atunci când această perturbație este deplasarea fluxului magnetic prin salt. Considerăm un strat supraconductor de grosime d paralel cu câmpul magnetic și luăm axa x în direcția d cu originea la mijlocul grosimii d . Dacă supraconductorul este suficient de subțire atunci câmpul magnetic penetrează în tot volumul materialului. Aceasta înseamnă că presupunem $H_a > H_s$ unde $H_s = 2\pi J_c d/c$ este câmpul de ecranare; J_c este densitatea curentului critic. În această situație câmpul intern în material este dat de relația

$$H(x) = H_a - J_c \left(\frac{1}{2} d - |x| \right) \quad (3.1)$$

H_a este valoarea câmpului aplicat (la ambele suprafețe). Dacă apare o fluctuație (creștere) de temperatură T aceasta induce o scădere a curentului critic cu $\delta J_c = (dJ_c/dT)\delta T$. Modificarea curentului critic modifică $H(x)$ ceea ce induce un câmp electric ε . Acesta determină disiparea unei cantități de căldură care mediată pe unitatea de volum are valoarea

$$\delta Q = \frac{\mu_0}{12} d^2 J_c \delta J_c \quad (3.2)$$

Rezultă o creștere finală de temperatură $\Delta T = \delta Q/C$ unde C este căldura specifică pe unitatea de volum. Sistemul este stabil la aceste fluctuații dacă $\Delta T < \delta T$, ceea ce are loc atunci când

$$d^2 < \frac{12c}{\mu_0 J_c} \left(-\frac{dJ_c}{dt} \right)^{-1} \quad (3.3)$$

Aceasta este condiția de stabilitate adiabatică. Desigur că această fluctuație este micșorată prin eliminarea căldurii de către matricea de cupru, ceea ce nu am luat în considerare.

Pentru filamentul de NbTi ($J_0 = 8 \times 10^5 \text{ A/cm}^2$) criteriul (3.3) impune pentru stabilitate un diametru al filamentului $d \leq 0,01 \text{ cm}$, ceea ce se confirmă experimental. Dacă J_0 scade la zero și are loc saltul de flux complet (în întregul volum) prin integrarea relației (3.2) se obține următoarea valoare a căldurii degajate

$$Q = \frac{\mu_0}{24} d^2 J_c^2 \quad (3.4)$$

Pentru valori tipice ale parametrilor se obține o creștere de temperatură $\Delta T = Q/C = 3 \times 10^4 d^2 \text{ (K)}$. Pentru o valoare a lui d destul de mare astfel încât la T joase nu poate fi satisfăcut criteriul de stabilitate (3.3), ΔT poate deveni comparabil cu T . Însă, deoarece $C \sim T^3$, căldura specifică va crește semnificativ astfel încât este satisfăcută condiția (3.3) și creșterea fluctuației este stopată ca J_0 să fie redus la valoarea zero. Are loc un salt de flux parțial (nu pătrunde câmpul magnetic în întregul material) ceea ce permite o relaxare a curenților interni de ecranare fără a fi necesară întreruperea curentului de transport.

(c) Stabilizarea dinamică

Aceasta este necesară când se lucrează la câmp magnetic variabil. Criteriul de stabilizare dinamică se stabilește în același fel ca și criteriul de stabilizare adiabatică, dar trebuie să se ia în plus în considerare timpul necesar de modificare a fluxului și rata de difuzie a căldurii prin cupru. Se obține un rezultat similar cu (3.3) cu excepția apariției unui factor de ordinul D_T/D_M care este în general egal cu unitatea. În obținerea acestor rezultate nu s-a luat în considerare creșterea temperaturii cuprului.

8.4. Conductori compoziți

Considerăm un conductor compozit format din filamente supraconductoare, încastrate într-o matrice de cupru. În cazul câmpului variabil în timp prin cupru va trece atât curent electric (curenți turbionari), cât și fluxul magnetic. Aceasta determină existența a două tipuri de pierderi: pierderile date de curenții turbionari în cupru care depind de rata de variație a câmpului magnetic și pierderile prin histerezis în supraconductor care sunt independente de rata de variație a câmpului magnetic. Calculăm întâi pierderile prin curenți turbionari în metalul normal. Considerăm o placă de lungime $2L$, grosime s și lățime l , astfel că $L \gg s$. Aplicăm un câmp magnetic variabil cu rata dH/dt , paralel cu l . Pentru a calcula tensiunea electrică indusă și curentul rezultat, aplicăm legea lui Faraday. Dacă măsurăm pe x din mijlocul lui s , atunci $\epsilon_y = Hx/c$ și $\epsilon_x \ll \epsilon_y$. Atunci rata locală de disipare de putere este $P = j\epsilon = \epsilon^2/\rho$. Efectuând medierea după x , se obține puterea medie disipată pe unitatea de volum

$$P = \frac{(dH_a/dt)^2 s^2}{12\rho} \mu_0^2 \quad (4.1)$$

Pentru estimări numerice considerăm un magnet bobinat cu banda conductoare cu $s=1 \text{ mm}$ și $\rho=0,01 \rho_{Cu}$ (la 300 K). Se obține $P=10^{-12} (dH_a/dt)^2 \text{ Watt/cm}^3$, unde $(dH_a/dt)^2$ este mediat pe volumul bobinei. Pentru o variație sinusoidală a câmpului magnetic $(dH_a/dt)=\omega H_{max}$. Pentru un volum al bobinei de 10^3 cm^3 , $H_{max}=10^4 \text{ G}$, $\nu=50 \text{ Hz}$, se obține $P=10^4 \text{ W}$. Prin urmare, puterea disipată prin curenți turbionari în conductorul normal este foarte mare. Ea poate fi micșorată prin utilizarea unui fir subțire și prin înlocuirea cuprului cu un aliaj cu rezistivitate mai mică. Dar, în condițiile de mai sus, P nu poate fi micșorată sub 10 W . Dacă se aplică câmpul magnetic în impulsuri (prin aplicarea de impulsuri de curent prin bobină) cu rata de 10^3 G/sec. , se obține pentru o bobină de aceleași dimensiuni $P=1 \text{ mW}$. În acest caz, puterea este neglijabilă pentru o rată de variație a câmpului magnetic de 10^4 G/sec. și chiar mai mică.

Considerăm, în continuare, pierderile prin histerezis în supraconductor. Fie un strat supraconductor de grosime d în care câmpul magnetic intern este dat de expresia (3.1). Se observă că $dH(x)/dt = dH_a/dt$, astfel că din legea lui Faraday rezultă câmpul electric indus $\varepsilon_y = (dH_a/dt)x/c$. Puterea P disipată pe unitatea de volum este egală cu $J_c \varepsilon$ și mediind pe grosimea stratului supraconductor, se obține pe unitatea de volum

$$P = \frac{dQ}{dt} = \frac{J_c d}{4} \left(\frac{dH_a}{dt} \right) \mu_o \quad (4.2)$$

Pentru o variație a câmpului magnetic cu $\pm \Delta H_a$ în jurul unui punct de funcționare, căldura disipată pe un ciclu este dată de expresia

$$Q = J_c d \Delta H_a \mu_o \quad (4.3)$$

Această căldură, degajată prin histerezis, poate fi făcută foarte mică dacă filamentul este foarte subțire. Dacă amplitudinea de variație a câmpului magnetic, ΔH , este mai mică decât câmpul de ecranare H_s , adică $\Delta H < H_s$, atunci câmpul variabil nu mai penetrează uniform supraconductorul și relația (4.2) nu mai este valabilă. (Menționăm că această relație a fost scrisă atunci când câmpul magnetic variabil pătrunde uniform în întregul filament). O expresie a căldurii pierdute prin histerezis pe un ciclu $\pm \Delta H$ mai corectă este următoarea

$$Q = J_c d \Delta H_a \mu_o - \frac{\mu_o J_c^2 d^2}{24}, \quad \Delta H_a > H_s = dJ_c$$

$$Q = \frac{(\Delta H_a)^3}{6\pi d J_c} \mu_o, \quad \Delta H_a < H_s \quad (4.4)$$

Dacă se neglijează al doilea termen din membrul drept al relației (4.4), se obține expresia (4.3). Când $\Delta H_a = H_s$ cea mai mică valoare a câmpului magnetic alternativ aplicat pentru care are loc penetrația câmpului magnetic, căldura disipată se micșorează la valoarea

$$Q = \frac{\mu_o J_c^2 d^2}{6}$$

Introducem mărimea adimensională

$$\gamma = \frac{J_c d}{2\Delta H_a} = \frac{H_s}{\Delta H_a}$$

și relația (4.4) devine

$$Q = \frac{\mu_o (\Delta H_a)^2}{3} (3\gamma - 2\gamma^2), \quad \gamma < 1 \quad (4.5)$$

$$Q = \frac{\mu_o (\Delta H_a)^2}{3} \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma > 1$$

Aceste expresii au maxim la $\gamma=3/4$, unde $Q=3(\Delta H)^2/16\pi$ și tinde la zero, atât pentru $\gamma \rightarrow 0$, cât și pentru $\gamma \rightarrow \infty$. Pentru micșorarea lui Q , se lucrează la valori mici sau mari ale lui γ față de unitate. Pentru valori tipice ale parametrilor, se obține stabilitate termică pentru diametrul filamentului d mai mic decât 200 μm (este dificil să se fabrice filamente cu diametrul mai mic decât 10 μm). Filamentele cu diametre mai mari au pierderi Q mici pentru $\Delta H_a < 500$ Oe, pe când filamentele cu diametre mici pot să funcționeze cu pierderi mici la amplitudini mai mari ale câmpului variabil și deci, se pot utiliza în magnetii care funcționează în impulsuri. Toate aceste relații au fost deduse pentru un filament izolat. Însă, în matricea de cupru, cuprul face un contact electric între filamentele supraconductoare din conductorul compozit. La o rată mare de variație a câmpului magnetic, tensiunea indusă poate deplasa curentul de la un filament la altul prin cupru, astfel că filamentele sunt cuplate între ele. Aceasta determină creșterea pierderilor. Pentru a analiza problema, să considerăm două straturi supraconductoare de grosime d ,

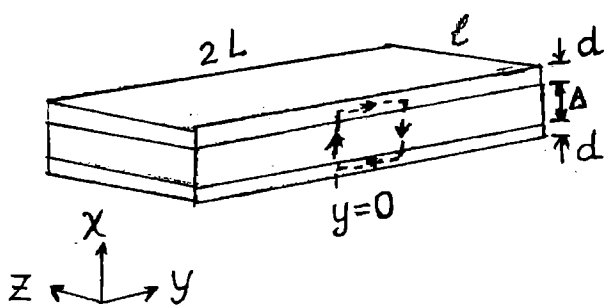


Fig. 8.1

lățime l și lungime $2L$, separate de un strat de metal normal de grosime s și rezistivitate ρ (Fig. 8.1). Presupunem că aplicăm un câmp variabil cu rata constantă (dH/dt) , paralel cu l . Aplicăm legea lui Faraday unui circuit care trece prin ambele straturi supraconductoare. Atâta timp cât densitatea de curent în straturile supraconductoare este mai mică decât J_c , întreaga tensiune indusă de variația câmpului magnetic cade pe metalul normal

și determină un curent între straturile supraconductoare

$$J_x = \left(\frac{dH}{dt} \right) y \frac{\mu_0}{\rho}$$

Integrând pe lungime de la $y=0$, curentul total de la un strat la celălalt este

$$J = \left(\frac{dH}{dt} \right) L^2 \frac{\mu}{2\rho d}$$

Notăm o lungime critică L_c lungimea pentru care $J=J_c$, astfel că această lungime se determină din expresia

$$L_c^2 = \frac{2J_c \rho d}{\mu_0 dH/dt} \quad (4.6)$$

Prin urmare, dacă $L < L_c$ nu există cădere de tensiune pe supraconductor datorată acestor cureni circulatori. Însă, cresc pierderile prin cureni turbionari în metalul normal, deoarece tensiunea electrică indusă cade pe o distanță mai mică. Este ca și cum am substitui în relația (4.1) pe s^2 cu $(2L)^2$. Atunci când $L > L_c$, în centrul stratului supraconductor J depășește J_c și disiparea de căldură în supraconductor este mare. Pentru rata de variație a câmpului de la 10 la 10^4 G/sec., lungimea critică L_c este în jur de 10 la 100 cm. Prin urmare, deoarece într-un magnet practic lungimea firului bobinat este mai mare decât această lungime critică pentru decuplarea electrică a filamentelor, acestea se împletesc cu un pas care să fie mai mic decât L_c . Aceasta are ca efect schimbarea semnului tensiunii electromotoare induse în fiecare loc unde filamentele își schimbă pozițiile între ele și curentul indus în supraconductor este totdeauna mai mic decât J_c . În acest caz, disiparea de căldură este dată numai de cureni turbionari din metalul normal. Un conductor compozit este reprezentat în partea de jos din Fig. 8.2. Un cablu pentru bobină sau pentru transportul curentului poate conține unul sau mai mulți conductori. În ultimul caz, conductorii sunt, de asemenea, împlețiți între ei, așa cum se reprezintă în Fig. 8.2 a și b. Menționăm că pentru a se evita tensionările mecanice, pasul răsucirii trebuie să fie $\geq 10 D$, unde D este diametrul filamentului (sau cablului). În Fig. 8.2 a este reprezentată schema principală de transpoziție a

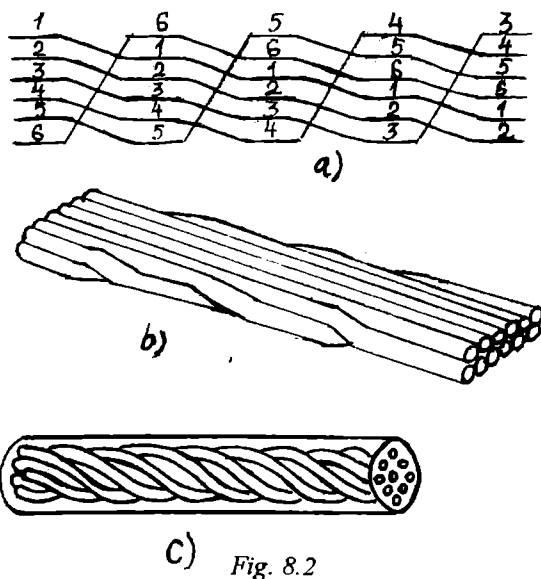


Fig. 8.2

conductorilor în cablu. Revenind la conductorul compozit, trebuie să extindem rezultatele obținute mai sus pentru un strat supraconductor plat la un conductor care conține multe filamente. Trebuie să evaluăm noua lungime critică L_c din egalarea curentului circulator indus total cu curentul critic total (sumat pe toate filamentele). Prin extensia relației (4.6) se poate scrie

$$L_c^2 = \frac{2J_c d' \rho}{\frac{dH}{dt} \mu_0} = \frac{d'}{4d} L_c'^2 \quad (4.7)$$

unde d' este diametrul fascicului de filamente din cablu. $1/2$ este factorul de umplere a conductorului compozit cu filamente supraconductoare. Dacă adăugăm puterea disipată datorită cuplajului (electric) la puterea obținută pentru un filament izolat (4.2) se poate scrie

$$P = J_c \left(\frac{dH_a}{dt} \right) \frac{def}{4} \mu_0 \quad (4.8)$$

unde

$$def = d', \quad L > L_c'$$

$$def = d \left(1 + \frac{4L^2}{L_c'^2} \right) = 1 + \frac{2L^2 \left(\frac{dH_a}{dt} \right) \mu_0}{J_c \rho}, \quad L < L_c'$$

Deci, P este proporțional cu $(dH/dt)d$ la valori mici ale ratei de variație (dH_a/dt) , când filamentele sunt decuplate și cu $(dH_a/dt)d'$ la valori mari ale lui (dH_a/dt) , când acestea sunt cuplate. În regiunea de tranziție dintre cele două regimuri deoarece $L^2 \sim (dH_a/dt)$ se obține $P \sim (dH/dt)^2$. Desigur, aceste formule au fost deduse fără a considera împletirea filamentelor care elimină practic aceste pierderi. Dacă domină pierderile prin curenți turbionari, de asemenea $P \sim (dH_a/dt)^2$ așa cum rezultă din relația (4.1). Această situație va apare atunci când $(dH_a/dt) \geq cJ_0/d \geq 10^7 \text{G/sec}$. Pentru valorile practice ale lui (dH_a/dt) , pierderile sunt dominate de histerezis (relația 4.8). Pentru valorile tipice ale parametrilor, această putere disipată se găsește în domeniul $10^{-6}-10^{-5} (dH_a/dt)W/cm^2$, depinzând de dimensiunile filamentului și de gradul de decuplare.

În final, prezentăm calculul raportului dintre energia stocată în electromagnet și energia pierdută în procesul de stabilire și de decuplare (întrerupere) a câmpului magnetic. Să considerăm un solenoid de lungime l , rază R și diametrul firului de înfășurare D , astfel că $D \ll R \ll l$. Energia stocată este

$$W = \frac{\pi R^2 l H_a^2}{8\pi}$$

iar energia disipată pe un ciclu este dată de expresia

$$\Delta W = 2\pi R l D \left(\frac{J_c H_a d}{4} \right)$$

unde am utilizat expresia (4.2) a puterii disipate în cazul filamentelor complet decuplate. Notând $H_s = 4\pi J D/c$, se obține

$$\frac{W}{\Delta W} = \frac{J}{J_c} \frac{R}{d} \quad (4.9)$$

Pentru $J=J_0$ și $R=2 \text{ cm}$ se obține un raport de stocare a energiei de ordinul 1000. Pentru o bobină resistivă, acest raport este dat de expresia

$$\frac{W}{\Delta W} \equiv \frac{\tau}{\Delta t} \quad (4.10)$$

unde $\tau = L/R$ este constanta de timp a magnetului, iar Δt este durata pulsului. $\tau = 2\pi DR/\rho c^2$ este de ordinul a 10 sec pentru dimensiuni și rezistivitatea metalelor la temperaturi joase tipice. Rezultă că magneții cu supraconductori sunt mai eficienți decât magneții cu rezistență normală la temperaturi joase, pentru impulsuri cu durata mai mare decât 0,01 sec. De aceea, pentru generarea de câmpuri tranzitorii intense necesare în acceleratorii de particule se utilizează bobine supraconductoare.

8.5. Prepararea conductorilor compoziți

Conductorul cu mai multe filamente supraconductoare (peste 10.000) utilizat inițial a fost cel cu filamente din NbTi. Acesta este stabilizat intrinsec, atât adiabatic, cât și dinamic. Se prepară relativ simplu. Se pleacă de la un tub de cupru în care se introduc bare de NbTi și bare de cupru, căruia i se reduc dimensiunile (pe diametru) prin strângere. Apoi se încălzește și se răcește alternativ (în timp ce se laminează) de mai multe ori. Se formează, astfel, o structură cu defecte care sunt centre de captare de flux în NbTi: dislocații cu densitatea de 10^{12}cm^{-2} și precipitate a-Ti cu conducție normală de densitate 10^{10}cm^{-2} . Prin aceasta se crește densitatea curentului critic. În Fig. 8.3 se prezintă două moduri de preparare a conductorilor cu filamente de Nb_3Sn . În primul mod, un bloc care constă din bare de Nb într-un aliaj de Cu-Sn (conținutul de Sn=13,5%) este laminat până se ajunge la dimensiunile dorite (Fig. 8.3 a). Deoarece matricea Cu-Sn devine rigidă în timpul laminării, ea se supune de câteva ori unui tratament termic (încălzire și răcire) în timpul acestui proces. Apoi, urmează un tratament termic îndelungat (20-100 ore) la $650\text{-}750^\circ\text{C}$, în timpul căruia se formează un strat de Nb_3Sn de 1-3 mm grosime la interfața Nb cu matricea Cu-Sn. O altă metodă de fabricare a conductorilor multifilamentari din Nb_3Sn este reprezentată în Fig. 8.3 b. Un lingou din bare de Nb într-o matrice de cupru este laminat până se ajunge la dimensiunile dorite, apoi este acoperit pe suprafață cu un strat de staniu și supus unui tratament termic. Sn difuzează în matricea de cupru și se formează straturi de Nb_3Sn pe miezurile de Nb. În Fig. 8.3 c se reprezintă procesul de fabricare a unui conductor compozit sub formă de

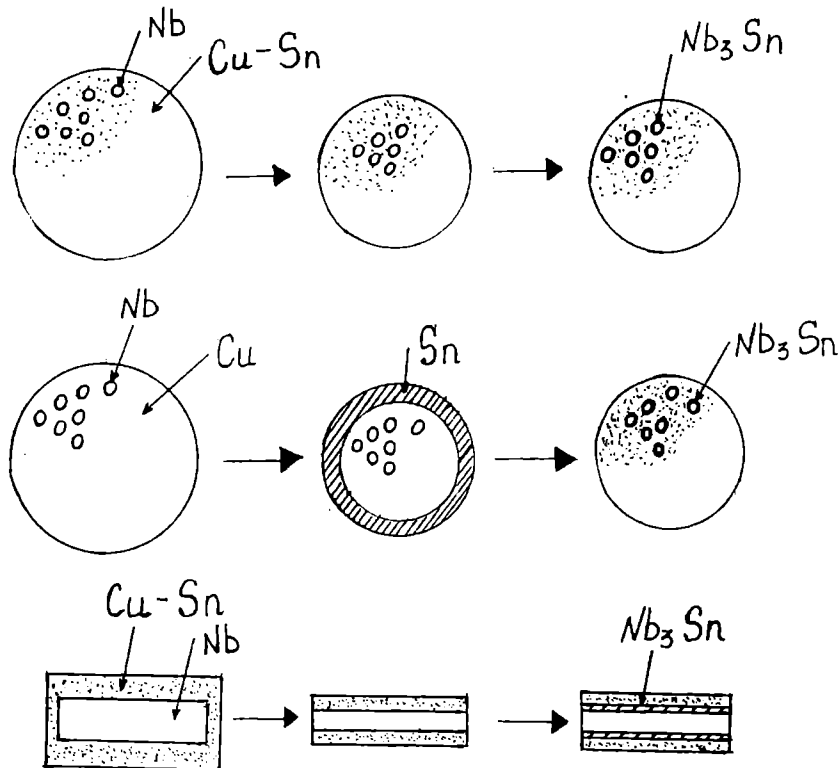


Fig. 8.3

bandă. O bară de Nb este introdusă într-un aliaj de Cu-Sn, este laminată până se ajunge la dimensiunile dorite și apoi este tratată termic, astfel ca să se formeze aliajul Nb₃Sn. Diametrul unui filament este în jur de 5 μm și a stratului de Nb₃Sn este de ~ 1 μm. S-au fabricat conductori cu mai mult de 60.000 filamente. În mod asemănător, se prepară conductorii din V₃Ga.

Supraconductorii oxidici sub formă de fire, benzi sau multifilamente se prepară în tuburi de argint, deoarece argintul nu reacționează cu oxizii utilizați [2,3]. Asemenea conductori pe bază de (BiPb)₂Sn₂Ca₂Cu₃O₁₀ cu monocristalitele orientate după axa c au densitatea curentului critic de 47.000 A/cm² la 77 K. Pudra supraconductoare se introduce în tubul de argint, se laminează până la dimensiunile dorite și se tratează termic. Inițial s-au obținut fire cu diametrul de 1 mm și lungimea de 50 m. Pentru a obține conductorul compozit, se introduc un număr din aceste tuburi într-un alt tub de argint, se laminează și se tratează termic.

8.6. Efectele radiațiilor asupra supraconductorilor compoziți

Supraconductorii utilizați pentru construcția magneților din acceleratorii de particule sau din reactorii de fuziune nucleară sunt supuși la doze mari de radiație. Aceste radiații sunt particule încărcate sau neutroni rapizi în cazul acceleratoarelor sau neutroni rapizi cu $E > 0,1$ MeV în cazul reactorilor de fuziune. Aceste radiații produc defecte ale rețelei atât în supraconductorii, cât și în matricea conductorului compozit. Iradierea cu neutroni rapizi cu rata de 10^{18} neutroni/cm² la 5 K a Cu pur determină creșterea rezistivității acestuia de 20 ori, iar a aluminiului de 150 ori [4]. Creșterea rezistivității s-ar putea explica prin formarea de efecte de tip Frenkel. În afară de creșterea rezistivității se modifică și proprietățile mecanice ale materialelor, acestea devenind mai fragile. Printr-un tratament de scurt timp la temperatura camerei revin aproape la valoarea dinainte de iradiere (95-98%), atât rezistivitatea, cât și proprietățile mecanice. De asemenea, radiația influențează temperatura critică T_c , curentul critic J_c și câmpul critic H_{c2} ale supraconductorilor. La Nb₃Sn temperatura critică rămâne nemodificată până la doze de 1×10^{18} cm⁻², după care scade liniar cu creșterea dozei de radiație, astfel că la 12×10^{18} cm⁻² scade cu 4 K. La V₃Ga scăderea T_c începe de la 10^{17} cm⁻² la iradiere cu deuteroni de 50 MeV. La NbTi nu s-a observat o scădere a T_c până la doze de neutroni de 4×10^{18} cm⁻². Dependența curentului critic de iradiere este funcție de starea inițială a supraconductorului respectiv. Dacă densitatea centrelor de captură de flux este optimizată, pentru densitatea maximă a curentului critic, atunci iradierea determină o scădere a curentului critic. Dacă aceasta nu este optimizată, atunci iradierea determină o creștere a curentului critic. La doze mari de iradiere se observă și o scădere a câmpului critic maxim H_{c2} .

8.7. Levitația vehiculelor cu ajutorul magneților cu supraconductorii

Levitația și propulsia magnetică dau posibilitatea măririi vitezei de deplasare a vehiculelor peste 500 km/h și poate fi utilizată pe distanțe medii cuprinse între 200 și 2000 km. Viteza actuală pe căile ferate convenționale (cu vehicule cu roți) nu poate depăși 400 km/h, în special datorită problemelor de rezistență mecanică. Într-un sistem cu levitație magnetică, vehiculul „plutește” și este ghidat și transportat de către forțe de repulsie magnetică, fără contact mecanic.

8.7.1. Principiul sistemului de levitație electrodinamică

Forța magnetică apare din interacțiunea Lorentz dintre curentul electric și intensitatea câmpului magnetic $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$. Pot exista următoarele trei căi de generare a curentului electric: (1) curentul de transport într-un conductor, generat de o sursă de putere electrică; (2) curentul indus într-un material feromagnetic de către un câmp magnetic static sau într-un conductor de către un câmp magnetic variabil; (3) curentul Amperic într-un magnet permanent. În cazul când avem două piese conductoare prin care este transportat un curent electric, între cele două piese pot apare forțe fie atractive, fie repulsive, depinzând de sensurile curenților. Forța care apare între un material feromagnetic și o sursă de câmp magnetic este totdeauna atractivă. Forța care apare între un metal normal și o sursă de câmp magnetic variabil este totdeauna repulsivă. Când se utilizează un magnet permanent, forța dintre acesta și restul sistemului poate fi fie atractivă, fie repulsivă. Pe baza forței atractive care apare între un material feromagnetic și sursa de câmp magnetic a fost construit sistemul de transport prin levitație magnetică de tip Maglev, în care greutatea vehiculului este susținută de către această forță atractivă [5]. Acest sistem are următoarele dezavantaje: (1) distanța mică (~ 1 cm) între materialul feromagnetic și magnet (electromagnet), (2) instabilitate în raport cu deplasarea pe verticală, deoarece forța magnetică crește cu scăderea distanței și scade cu creșterea acesteia.

Sistemul bazat pe forțe de repulsie magnetică are cele mai mari șanse de utilizare datorită următoarelor avantaje: (1) Distanța dintre magneți și conductor poate fi de 10 ori mai mare decât în cazul sistemului bazat pe forțe magnetice de atracție, adică > 10 cm. Aceasta dă posibilitatea măririi vitezei vehiculelor. (2) Mecanismul de propulsie poate fi construit cu magneți care să genereze câmp magnetic intens într-un volum mare și deci pot fi încorporate ușor și suspensiile vehiculului în sistem.

Un câmp magnetic variabil induce într-un conductor un curent al cărui sens este astfel încât generează, conform legii lui Lenz, un câmp de sens invers câmpului extern. Apare, astfel, o forță de respingere între magnet și conductor. Să considerăm un vehicul simplu care constă dintr-un singur magnet ce se deplasează de-a lungul unei plăci conductoare electrice, deasupra suprafeței acesteia, la o distanță z constantă față de suprafață (Fig. 9.4). Asupra magnetului acționează următoarele forțe:

(1) Forța ascensională, F_z . Aceasta crește proporțional cu pătratul vitezei vehiculului și ajunge la saturație pentru viteze mai mari de 120 km/h.

(2) Forța de tracțiune, F_x . Aceasta variază liniar cu viteza la viteze mici, atinge un maxim la viteza de 20 km/h și scade la viteze mai mari după o lege hiperbolică.

(3) Forța de instabilitate laterală, F_y , datorată deplasării magnetului, lateral față de poziția sa centrală în raport cu placa. Ea poate fi limitată printr-o alegere adecvată a lățimii magnetului și a distanței z de levitație.

La viteza de 500 km/h pentru un sistem de levitație electrodinamic simplu (sistem cu flux normal) raportul $F_z/F_x = 35$. Dependența de viteze a acestor forțe se înțelege urmărind Fig. 8.4 [6]. Curentul I_2 indus în placă de către magnet simbolizat prin spira prin care trece curentul I_1 , este dat de expresia

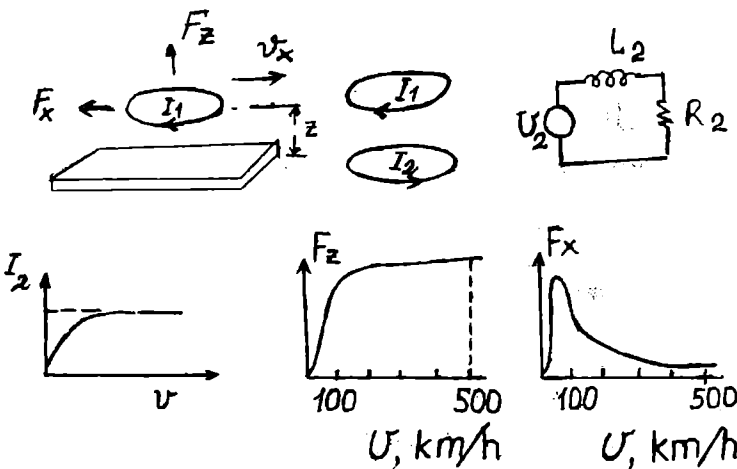


Fig. 8.4

$$I_2 = \frac{U_2}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}}$$

unde U_2 este tensiunea indusă în placă, R_2 este rezistența și L_2 este inductanța plăcii. Dacă componenta reactivă a impedanței plăcii este neglijabilă, rezultă $I_2 \sim v$, deoarece $U_2 \sim v \cdot I_1$, iar $\omega \sim v$, unde v este viteza de transport a magnetului (vehiculului). Forța de levitație este dată de expresia

$$F_z = \frac{I_2^2(v)\omega L_2}{v}$$

iar forța de tracțiune pe orizontală este dată de expresia

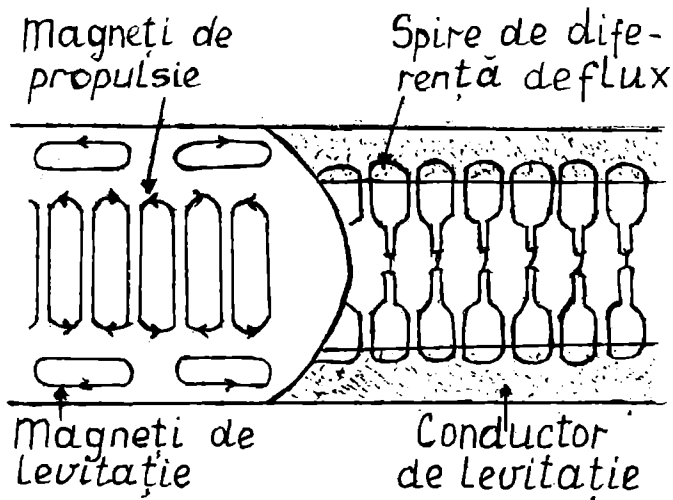


Fig. 8.5

$$F_x = \frac{I_2^2(v)R_2}{v}$$

La viteze medii și mari domină componenta reactivă a impedanței plăcii și curentul I_2 indus ajunge la saturație, așa cum se reprezintă în Fig. 8.5. Forța de levitație este proporțională cu energia s tocată în sistem, iar pierderile prin tracțiune sunt echivalente cu pierderile ohmice în placă. Studiul experimental al dependenței de viteza de transport a forței de tracțiune și a celei de levitație s-a efectuat prin două metode. În prima metodă, o roată care se învârtă cu viteză controlată simulează mișcarea liniară între vehicul și linia de ghidare [7,8]. Cea de a doua metodă este metoda impedanței [9].

8.7.2. Sisteme de levitație și de ghidare

Sistemele de levitație și de ghidare pot funcționa separat sau în combinație. Există mai multe posibilități de aranjare a magnetilor și plăcii. În sistemul numit cu flux normal, magnetul este așezat deasupra unei plăci plane simple. În sistemul cu flux nul se utilizează doi magneti, excitați în opoziție care cuprind între ei placa (linia de transport) de reacție. Sistemul cu flux nul are forța de tracțiune specifică (raportată la unitatea de masă care plutește) mai mică decât celălalt sistem, însă are dezavantajul că numărul de Amperi-spiră pe magnet este mai mare (10^6 A.spiră). În locul plăcii sau unor benzi de reacție se pot utiliza bobine, separate, scurtcircuitate, ceea ce oferă un avantaj pentru ghidare. Principiul unui astfel de sistem de ghidare este reprezentat în Fig. 5. El constă dintr-o serie de spire succesive sub formă de opt, așezate pe linia ferată transversal pe direcția de mișcare. Acestea se numesc bobine de flux diferență. Bobinele de flux diferență reprezintă a doua înfășurare de pe linia de transport. Prima înfășurare o reprezintă bobinele de propulsie despre care vom vorbi în paragraful următor. Pe vehicul (care levitează deasupra liniei) sunt fixați în afara magnetilor de levitație și magneti de propulsie (a se vedea figura) care se utilizează și pentru ghidare. Pentru poziție simetrică a magnetilor de propulsie tensiunile induse în partea stângă și în partea dreaptă a bobinelor de ghidare se anulează. Dacă are loc o deplasare laterală a vehiculului apare o tensiune diferențială și sunt generați cureni în bobinele de ghidare care dau naștere la forțe repulsive de ghidare, astfel că vehiculul este adus în poziția centrală. Aceste sisteme de ghidare, orizontală, sunt utilizate în Germania și Canada. În Japonia, bobinele de ghidare sunt fixate la marginile șinelor, pe verticală. Așa după cum se observă pe figură, forța de levitație apare între conductorii de levitație (ai liniei de transport) și magnetii de levitație de pe vehicul, așa cum am discutat în paragraful precedent.

8.7.3. Sisteme de propulsie

Propulsia vehiculelor cu levitație magnetică se poate face cu ajutorul unui motor liniar cu inducție sau cu ajutorul unui motor liniar sincron. În ambele cazuri, puterea de propulsie poate fi aplicată fie pe vehicul (înfășurarea primară se aplică pe vehicul și cea secundară pe calea ferată) și în acest caz se spune că vehiculul este activ, fie pe linia ferată (înfășurarea primară este pe calea ferată și înfășurarea secundară este pe vehicul) și în acest caz se spune că linia ferată este activă (sursa de putere electrică alimentează în acest caz înfășurarea de pe linia ferată). Pentru levitația electrodinamică a vehiculelor soluția cea mai bună este motorul liniar sincron cu linia ferată activă. O energie de propulsie de ordinul a 18 MVA pentru un vehicul cu masa de 120 tone este dificil să se aplice pe vehicul. Distanța dintre înfășurarea primară (de pe linia ferată) și înfășurarea secundară (spire supraconductoare) de pe vehicul, este aceeași cu distanța dintre sistemele de levitație sau dintre sistemele de ghidare, adică 10-25 cm. Modul de funcționare al unui motor liniar sincron cu linia de transport activă este reprezentat schematic în Fig. 8.6 a. Energia de propulsie este aplicată pe secțiuni succesive de câte 5 km din linia de transport, de la surse separate. Pe fiecare din aceste porțiuni este așezat un sistem de bobine, care atunci când sunt alimentate generează o undă electrodinamică progresivă (care se propagă) având frecvența în jur de 1,5 Hz și viteza de propulsie v , care este determinată de frecvența de excitație și de pasul înfășurării bobinei (a se vedea paragraful următor). Vehiculul se deplasează cu viteza de propagare a undei. Pentru a permite modificarea vitezei vehiculului, curentul de la sursa de alimentare de 50 Hz este trecut printr-un convertor de frecvență, permițând o frecvență variabilă a curentului de excitație. Interacțiunea dintre unda progresivă și magnetii polari supraconductori, instalați în partea de jos a vehiculului determină forța de tracțiune F_x și forța de levitație F_z . Valorile acestor forțe pot fi controlate independent cu ajutorul curentului I care circulă prin înfășurarea de pe linie, precum și prin poziția relativă dintre vehicul și unda progresivă, care se măsoară prin unghiul de alunecare. Dependența celor două forțe de unghiul de alunecare este reprezentată în Fig. 8.6 b pentru două valori diferite ale curentului I : Curbele a sunt pentru $I/I_c=1$, iar curbele b sunt pentru $I/I_c=0,2$. Forța de tracțiune F_x este reprezentată cu linie plină, iar forța de levitație F_z este reprezentată cu linie întreruptă [10]. Un motor liniar sincron are randamentul 0,88 cu $\cos\varphi=0,93$ la un unghi de alunecare $\beta=123^\circ$. Pentru stabilitatea vehiculului în timpul deplasării față de acțiunea vântului sau neregularităților liniei de transport, se iau măsuri speciale utilizând bobine de amortizare. De asemenea, se iau măsuri pentru protecția călătorilor față de câmpul magnetic (prin ecranarea vagonului de pasageri). Utilizarea bobinelor din material supraconductor pe vehicul reduce substanțial consumul de energie electrică și de material.

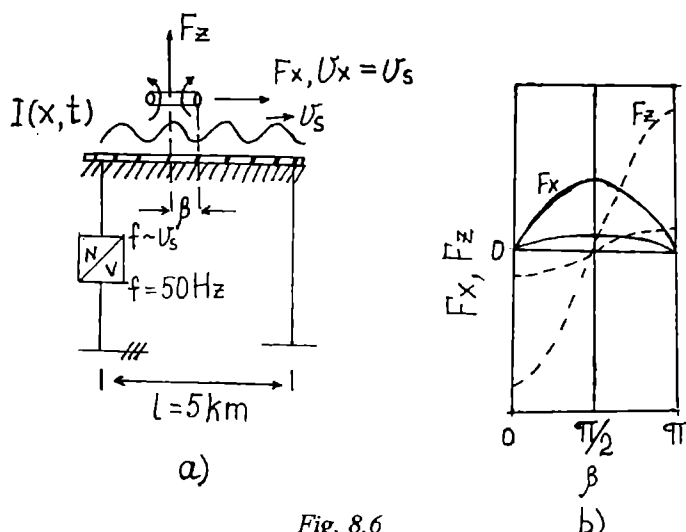


Fig. 8.6

8.7.4. Principiul de funcționare al motorului liniar sincron de propulsie

În motoarele convenționale, atât cel cu inducție, cât și cel sincron, puterea alternativă se aplică pe bobina statorului, astfel încât se generează un câmp magnetic rotitor. În motorul cu inducție, rotorul este conductor și câmpul magnetic rotitor al statorului induce curenți turbionari în rotor care generează un cuplu ce antrenează în mișcare rotorul. Cuplul dă rotorului orice viteză de rotație, indiferent de viteza de rotație a câmpului magnetic, deși cea mai bună eficiență se obține atunci când cele două viteze sunt sincronizate. În motorul sincron, rotorul este pus în mișcare cu ajutorul curenților continui ce pot fi curenți Amperieni ai unui magnet permanent, curenți de transport ai unui electromagnet sau curenți induși într-un material feromagnetic. În acest caz, cuplul este dependent de orientarea statorului în raport cu rotorul, astfel că numai anumite orientări dau naștere cuplului de rotație. Pentru a produce un cuplu continuu, rotorul trebuie să mențină permanent o orientare corectă, adică rotația să fie sincronă.

Un motor liniar poate fi considerat ca un motor rotitor secționat după o rază și desfășurat într-un plan orizontal (de fapt se desfășoară statorul atunci când linia este activă sau rotorul atunci când vehiculul este activ). Se păstrează în continuare o distanță între înfășurarea primară (stator) și cea secundară (fost rotor), ceea ce permite o deplasare relativă între cele două. Una din înfășurări (în cazul ales, statorul) poate fi prelungită în direcția de deplasare, astfel că mișcarea poate continua în această direcție. Pentru înțelegerea fenomenului, expunem în continuare bazele teoriei propulsiei sincrone.

Pe linia de ghidare se aplică trei înfășurări, fiecare deplasată cu $1/3$ din pasul înfășurării față de cea vecină (Fig. 8.7). Fiecare înfășurare transportă un curent sinusoidal de amplitudine I_0 și defazat cu $2\pi/3$ față de înfășurarea vecină și anume

$$I_1 = I_0 \cos \omega t$$

$$I_2 = I_0 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$I_3 = I_0 \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Acestea joacă rol de înfășurarea primară (statorul) a motorului. Pe partea de jos a vehiculului, care vine față în față cu linia de ghidare, se aplică magneți, care pot fi bobine supraconductoare. Acestea joacă rolul înfășurării secundare (rotorul). Forța care acționează asupra vehiculului este egală cu forța care acționează asupra unui singur magnet, multiplicată cu numărul acestora (de pe bordul vehiculului). Presupunând că

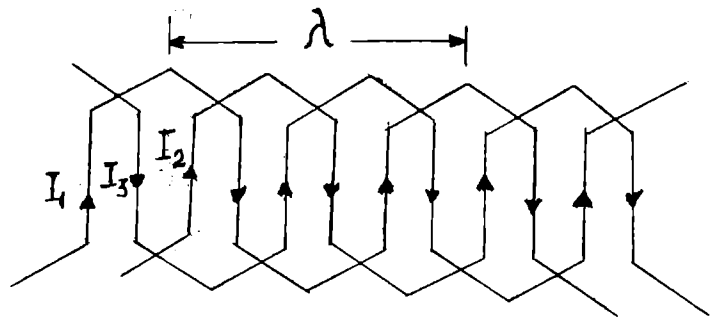


Fig. 8.7

curentul I_s care circulă prin magnetul supraconductor este constant, forța care acționează asupra unui magnet de pe vehicul este dată de expresia

$$F_x = I_s I_0 \left[\sum_{n=0,3,6} \frac{\partial M_n(x_0 - n\lambda/3)}{\partial x_0} \cos \omega t + \sum_{n=1,4,7} \frac{\partial M_n(x_0 - n\lambda/3)}{\partial x_0} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \sum_{n=2,5,8} \frac{\partial M_n(x_0 - n\lambda/3)}{\partial x_0} \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \right] \quad (2.1)$$

unde M_n este inductanța mutuală dintre magnetul supraconductor și a n-a înfășurare, iar λ este lungimea de undă. Coordonata x_o se măsoară în raport cu un punct de referință de pe înfășurare și este corelată cu coordonata x_y măsurată în raport cu un punct fix de pe vehicul (deci, într-un sistem de coordonare mobil) prin relația

$$x_o = d + vt + x_y$$

unde d este distanța de separare dintre cele două puncte de referință la $t=0$ și v este viteza vehiculului. Inductanța mutuală M este periodică în direcția x și, prin urmare, poate fi dezvoltată în serie Fourier

$$\begin{aligned} \sum_{n=0,3,6} \frac{\partial M_n}{\partial x_o} &= \sum_{m=1,3,5} b_m \cos m \frac{2\pi}{\lambda} x_o \\ \sum_{n=1,4,7} \frac{\partial M_n}{\partial x_o} &= \sum_{m=1,3,5} b_m \cos m \frac{2\pi}{\lambda} \left(x_o - \frac{\lambda}{3} \right) m \\ \sum_{n=2,5,8} \frac{\partial M_n}{\partial x_o} &= \sum_{m=1,3,5} b_m \cos m \frac{2\pi}{\lambda} \left(x_o - \frac{2\lambda}{3} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Combinând ecuațiile (2.1) cu (2.2), se obține o expresie simplă pentru termenul $m=1$, care este termenul dominant al forței ce acționează asupra unui magnet supraconductor de pe vehicul

$$F_x(m=1) = \frac{3}{2} I_s I_o b_1 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x_o \right)$$

Prin urmare, forța este compusă din două unde progresive, una care se propagă în sensul pozitiv al axei x cu viteza $v = \omega\lambda/2\pi$, iar cealaltă care se propagă în sensul negativ al axei x cu viteza $v = -\omega\lambda/2\pi$. Rezultă că viteza vehiculului este direct proporțională cu frecvența curentului de excitație și cu pasul înfășurării, λ . Dacă pe vehicul sunt fixați N magneti, forța maximă care acționează asupra vehiculului este dată de expresia

$$F_x = \frac{3}{2} I_s I_o N b_1 \cos \left(\frac{2\pi x_o}{\lambda} \right) \quad (2.3)$$

$2x_o/\lambda$ este analogul unghiului de alunecare definit la motorul sincron convențional. Se poate arăta că, atunci când curenții de excitație sunt sinusoidali și au aceeași amplitudine pe toate cele trei linii de fază, termenii corespunzători armonicilor mai înalte sunt fie egali cu zero, fie neglijabil de mici în comparație cu termenul dominant. Forțele de reacție care acționează în celelalte două direcții, y și z , pot fi deduse pe aceeași cale. Trebuie avut în vedere că în dezvoltarea în serie Fourier a lui $\partial M/\partial z$ apar termeni care conțin $\sin 2\pi x/\lambda$ în locul termenilor în cosinus.

8.7.5. Programul japonez

Programul japonez Maglev (levitație magnetică) a fost inițiat în anul 1970. Caracteristicile primelor 8 vehicule construite sunt prezentate în Tabela 2.1. Viteza record de 517 km/h a fost atinsă în anul 1979.

Tabela 2.1.

Anul	Denumirea	Lungimea	Greutatea
1972	LSM 200	4 m	2 tone
	ML 100	7	3,5
1975	ML 100 A	5	3,6
1977	ML 500	13,5	10
1979	ML 500 R	12,6	12,7
1980	MLU 001	10	10
1987	MLU 002	22	17
1993	MLU 002 N	22	20

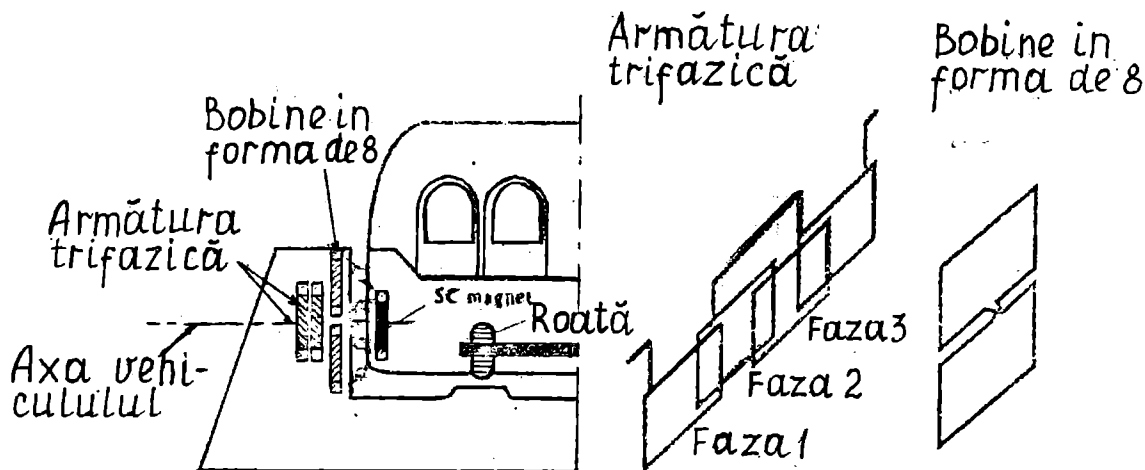


Fig. 8.8

Structura schematică a trenului japonez Maglev este reprezentată [11] în Fig. 8.8. Calea de ghidare este sub formă de U (s-a renunțat la calea de ghidare sub formă de T inversat). Un magnet supraconductor (SM) este fixat pe bordul vehiculului care îndeplinește cele trei funcții: levitație, ghidare și propulsie. Pe linie sunt fixate bobine în formă de 8 pentru levitație și ghidare. Această geometrie suprimă antrenarea magnetică la viteze mici când vehiculul este susținut pe roți. La viteze mai mari, când se atinge starea de levitație, roțile sunt retrase, și bobinele sub formă de 8 induc forțe mari de levitație și de ghidare. Pentru propulsie se utilizează un motor linair sincron cu înfășurarea (bobina) de câmp magnetic așezată pe bordul vehiculului și cu înfășurările trifazice pe un perete lateral al liniei ferate. Înfășurările trifazice sunt aplicate în două straturi suprapuse pentru a reduce variațiile electromagnetice și pierderile în curent alternativ în bobinele supraconductive. Înfășurările trifazice se alimentează de la două stații de putere prevăzute cu invertori cu tiristori. Sistemul criogenic (magnetul supraconductor, criostatul și refrigeratorul) este reprezentat în Fig. 8.9. Sistemele criogenice sunt fixate pe boghiuri. Evident că se asigură o ecranare magnetică a vagoanelor. În Tabela 2.2 se prezintă caracteristicile vehiculului MLU 002.

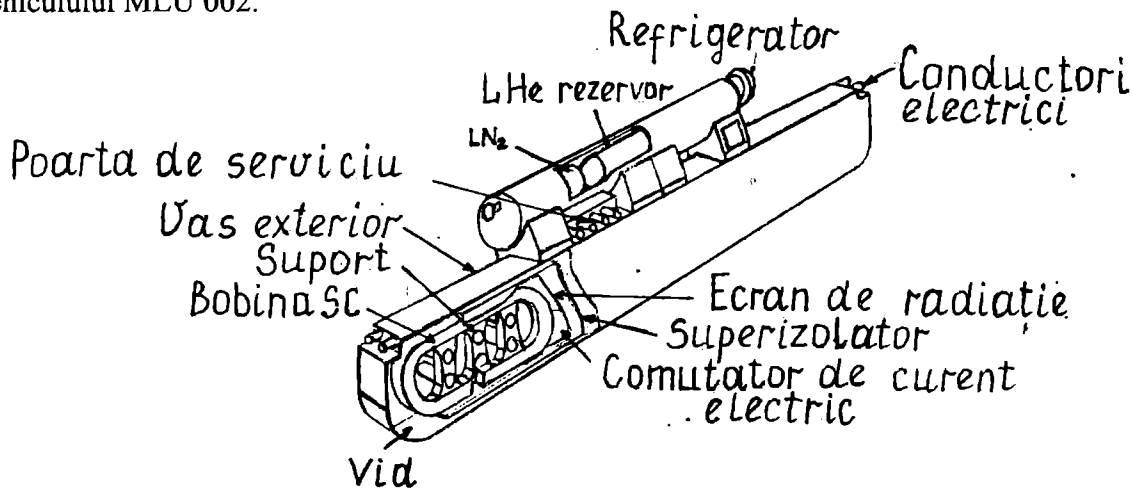


Fig. 8.9

Tabela 2.2.

Dimensiuni	22x3x3,7 m ³	forța magnetomotoare	700 kAt
Greutatea	17 tone	Material	NbTi, 1:1,06
Înălțimea de levitație	110 mm	Câmpul maxim	5,1 T (550 kJ)
Viteza maximă	420 km/h	Propulsie	motor sincron
Locuri pentru călători	44	Forța maximă	79,4 kN
Magnetul supraconductor dimensiuni, greutate	2x6 poli 1,7x0,5 m ² , 77 kg	Frecvența	0-28 Hz
		Tensiunea, curentul	5,8 kV, 900 A

8.8. Propulsia magnetohidrodinamică (MHD) în apa mării

Propulsia MHD poate fi inductivă (ac) și conductivă (cc). În primul caz pe bordul vasului se atașează înfășurări multifazice care se alimentează de la o sursă de putere electrică, reactivă, și generează în apa mării unde magnetice progresive. Câmpul induce curenți în apa mării care este conductoare. Interacțiunea dintre acești curenți și câmpul magnetic propulsează vasul. Viteza vasului este proporțională cu viteza de propagare a undelor de câmp care la rândul său este proporțională cu frecvența curentului de excitație multifazică. Se utilizează înfășurări din material supraconductor. Deoarece acestea se alimentează cu curent de frecvență variabilă există pierderi electrice în înfășurări. Pentru ca pierderile să fie reduse se lucrează la frecvențe mici (câțiva Hz). Puterea reactivă trebuie să fie foarte mare (de ordinul 10^9 Var pentru un submarin) ceea ce creează dificultăți deoarece necesită cablu de alimentare de capacitate mare de curent (câțiva kA).

Propulsia MHD cc se realizează prin interacția dintre inducția magnetică, generată de către un electromagnet în curent continuu, fixat pe bord și un curent continuu, perpendicular pe câmpul magnetic, ce circulă prin apa (conductivă) a mării între doi electrozi (fixați de asemenea pe bord) între care se stabilește o diferență de potențial. Apare o forță electromotoare care deplasează vasul. Valoarea acestei forțe de propulsie se ajustează numai cu ajutorul curentului dintre cei doi electrozi, deoarece magnetul fiind o bobină supraconductoră, prin acesta circulă un curent persistent. Electrozii trebuie să funcționeze timp îndelungat și să aibă preț de cost rezonabil. Pentru construcția lor s-au testat materiale cum ar fi carbonul, metalele nobile, compușii $TiRuO_2$, $TiIrO_2$, etc. Pentru alimentare se folosește motor Diesel, turbină cu gaz sau cu mic reaktor nuclear. În submarinele actuale puterea necesară este de câteva zeci de MW. Energia magnetică, foarte mare, stocată în magnetul supraconductor (câțiva GJ) poate servi de asemenea ca sursă de alimentare în caz de avarie a sistemului principal de alimentare. În Fig. 8.10 se reprezintă un sistem de propulsie MHD cc, numit extern. În Fig. 8.11 se reprezintă sistemul de propulsie MHD cc numai intern, în care caz inducția magnetică este mai bine confinată și fluxul de apă este canalizat printr-o conductă delimitată de partea activă a magnetului și de către electrozi. Eficiența sistemului de propulsie este dată de expresia

$$\eta = \frac{B^2}{B^2 + \frac{\alpha \rho v}{V}}$$

unde B este inducția magnetică, v - viteza, ρ - rezistivitatea apei mării, V - volumul MHD, α - forța magnetică / pătratul vitezei. În această relație nu s-au luat în considerare pierderile datorate electrolizei parțiale a apei, ce apare în mod natural. Deoarece apa mării are rezistivitate mare ($0,25 \Omega m$), de 10^5 ori mai mare decât a cuprului, pentru a obține eficiența mare este necesar inducție magnetică mare. Eficiența scade cu creșterea vitezei vasului. De exemplu pentru o viteză de 10 m/s eficiența este de 60% la $B = 10T$, 50% la 7 T și 18% la 2T. Eficiența sistemelor de propulsie contravenționale este de 40%. Magneții supraconductori actuali au

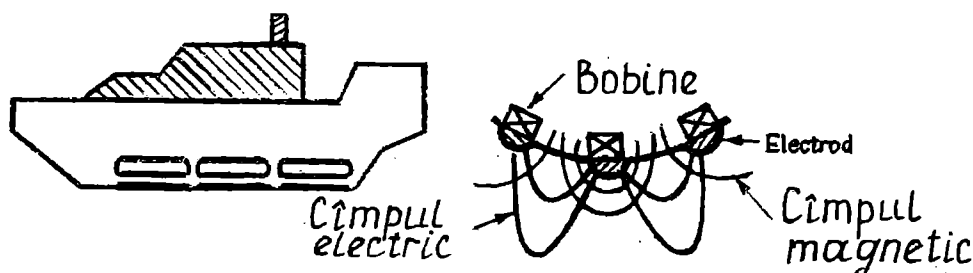


Fig. 8.10

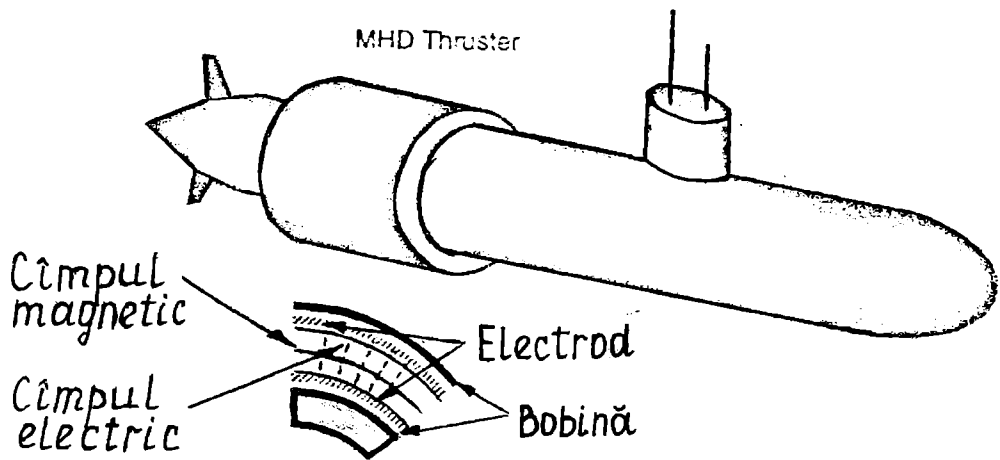


Fig. 8.11

următoarele valori ale inducției magnetice: 6 - 7 T (NbTi la 4,5 K) 8 - 9 T (NbTi la 2K utilizând heliu II), 9 - 10 T (Nb₃Sn la 4,5 K). Valoarea inducției magnetice nu este singurul parametru ce trebuie luat în considerare. Această valoare a inducției magnetice și volumul ce trebuie magnetizat determină o valoare mare a energiei magnetice, de ordinul 10⁸J pentru submarine, și deci o valoare mare a tensiunilor mecanice. Structura mecanică trebuie să fie rezistentă la asemenea forțe foarte rigide. De exemplu, o deplasare chiar micrometrică a unui cablu supraconductor în câmp magnetic trebuie evitată deoarece conduce la distrugerea lui. Pentru materialele transportate, în special cele de utilitate militară, deoarece sunt supuse la impacturi, aceste tensiuni mecanice sunt și mai mari. Mai mult, structura trebuie să fie ușoară și să asigure o forță ascensională. Problema importantă a tehnologiei MHD este construcția unor magneți de greutate redusă și de câmp intens. În tehnicile actuale, care utilizează oțeluri, aceste structuri sunt destul de grele: în proiectul internațional de fuziune nucleară ITER, bobinele au o structură cu greutatea de 10000 tone incluzând 770 tone material supraconductor fără vasul criostat. Câmpul magnetic pe axa toroidală este de 6 T are picul de 13 T pe supraconductor, iar energia magnetică este de 106 GJ. Limitele teoretice ale acestor valori sunt mari. Teorema virialului corelează energia magnetică cu masa structurii bobinei prin relația [12]

$$W_{mag} = \frac{\sigma_u}{\rho} (M_t - M_c)$$

W_{mag} = energia magnetică, σ_u - tensiunea permisă, M_t - masa sub tensiune, M_c - masa sub compresie. Presupunând că structura este supusă numai la tensiune, limita teoretică a energiei magnetice pentru unitatea de masă este dată de energia specifică σ_u/ρ a materialelor structurii. Oțelurile speciale au 30 kJ/kg. Cea mai mare o are materialul compozit pe bază de grafit, 150 kJ/kg. Magneții supraconductori construiți în prezent au energia specifică 10 kJ/kg și se speră la creșterea acesteia în viitor la 50 kJ/kg. ca și în cazul vehiculelor Maglev, în cazul MHD inducția magnetică se obține cu ajutorul unui magnet supraconductor care funcționează în regim de curent persistent, adică cu bobinele scurtcircuitate. Întâi se alimentează bobina de la sursa de putere electrică, apoi aceasta se scurtcircuitază cu fir supraconductor și sursa de putere se deconectează (§ 1.3). În continuare se consumă energie numai pentru menținerea temperaturii joase (sub T_c) a supraconductorului.

Programe pentru propulsia MHD a navelor se desfășoară în Japonia, SUA, Rusia, Franța etc. Programul japonez a fost inițiat în 1985, iar în anul 1991 a fost lansată în ocean nava Yamato I pentru testare, care conține două sisteme interne de propulsie MHD. Fiecare sistem MHD este compus din 6 dipoli supraconductori cu o gaură de 360 mm (canalul MHD are $\phi = 240$ mm) toți introduși într-un singur criostat alimentat de la un refrigerator cu heliu. Valoarea inducției magnetice utilizată pentru testarea navei este 2 - 3. În Tabla 3 - 1 sunt prezentate caracteristicile navei Yamato I. În aceeași tabelă sunt prezentate și caracteristicile unui submarin nuclear cu propulsie MHD proiectat în SUA [13].

Tipul navei Greutate Dimensiuni	Yamato I 280 tone L = 30, l = 10, h = 3,5 m	Submarin nuclear 10000 tone L = 100 m, ϕ = 12 m
Propulsie MHD număr și tipul lungimea activă lungimea totală gaura canalului greutate	2 x 6, cilindric 3 m 5,4 m ϕ = 240 mm (2x6) 2 x 29 tone	1, circular 15 m 17 m 1,5 m 1060 tone
Magnet bobină câmpul magnetic câmpul maxim energia stocată supraconductor conductor Răcire	formă brățară 4 T 6,5 T 2 x 18,6 Mj NbTi Rutherford He I,4,2 K	formă de U 6 T 9 T 13,5 GJ NbTi, 180 A/mm ² cablu în conductă 80 kA He I,4,2 K
Refrigerator	2 x 11 W la 4,4 K	180 kW, 11 tone (cu conductorii de curent)
Viteza	4 m/s	15 m/s
Eficiența	< 2%	

8.9. Cabluri supraconductoare pentru transmisia la distanță a energiei electrice

Liniile din cablu conductor reprezintă forma cea mai economică de transmisie a energiei pe distanțe lungi. Cablurile convenționale, izolate cu hârtie îmbibată cu ulei, de 420 kV, au o capacitate maximă de transmisie de 500 mVA. Această limitare se datorează transmisie limitate a căldurii generate în cablu datorită pierderilor electrice, către mediul înconjurător precum și temperaturii limită de 85°C ce poate fi suportată de izolația cablului. Pentru a mări puterea transportată s-au construit cabluri răcite forțat cu ulei sau apă (în flux) precum și cabluri cu izolație cu gaz (SF₆). Acestea din urmă funcționează la 420 sau 765 kV și au o capacitate de transmisie de mii de MVA. Însă au dezavantajul că au diametru mare, de două ori mai mare decât al cablurilor cu răcire forțată cu ulei sau apă. Mai târziu s-au construit cabluri conductoare din cupru sau aluminiu răcite cu azot precum și cabluri cu supraconductori. În principiu un cablu cu supraconductori conține o izolație termică și un sistem de conducție electrică în interiorul acesteia. Pot exista trei tipuri de cabluri: cablu cu tub rigid, cablu semiflexibil și flexibil. În cablul rigid, atât izolația termică cât și conductorul electric sunt confecționate din tuburi rigide. Au avantajul că au pierderi mici și construcție simplă. Au dezavantajul că nu pot

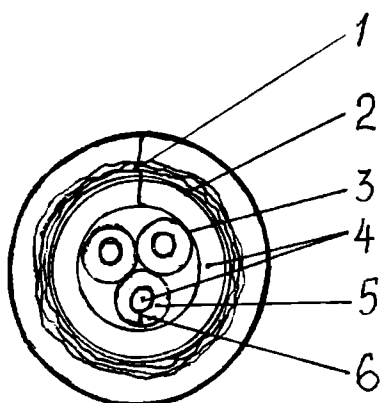


Fig. 8.12

fi confecționate de lungimi mari datorită dificultății în transport, ceea ce crează complicații la îmbinarea lor. Cablul semiflexibil are izolația termică din tub rigid iar conductorul electric flexibil. Conductorii electrice pot avea lungimi de 300 - 1000 m și pot fi transportați pe tambur. Cablul flexibil are atât izolația termică cât și conductorul electric, flexibile. Întregul cablu poate fi construit de lungime de 200 m și transportat pe tambur. Există dificultăți în construcția lor astfel că se confecționează un cablu numai pentru o singură fază, ceea ce este dezavantajos economic. Secțiunea transversală a unui cablu de curent alternativ trifazic este reprezentată în Fig. 8. 12. Fiecare conductor (din cei trei) este construit din două tuburi

supraconductoare coaxiale, izolate electric. În supraconductorul exterior curentul circulă în opoziție față de supraconductorul interior care transmite curentul de fază (acesta din urmă se numește conductor de fază). Prin aceasta câmpul electromagnetic este limitat în vecinătatea conductorului de fază și nu apar pierderi prin curenți turbionari în tubul metalic al izolației termice. Prin mijlocul tubului interior (de fază) și conductorului circulă heliu (sau azot, după caz) lichid care se întoarce printr-un tub ce conține în interior toți cei trei conductori de fază. Notațiile utilizate în Fig. 8.12 sunt următoarele: 1. izolația termică cu tubul de protecție, 2, ecran termic (80K), 3. tub cu heliu, 4. heliu, 5. izolația electrică, 6. supraconductori.

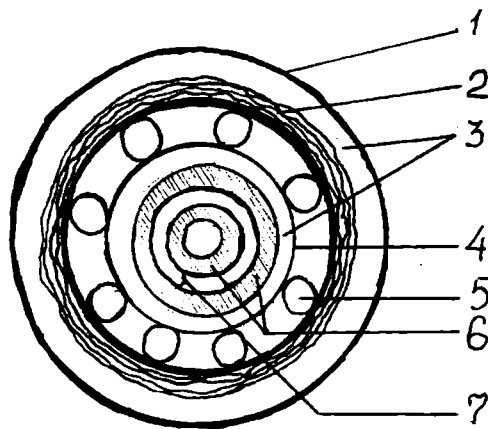


Fig. 8.13

Cablurile supraconductoare pentru curent continuu necesită un număr mai mic de conductori decât cablurile pentru curent alternativ (în raportul 2 : 3). Un

cablu pentru curent continuu este reprezentat în Fig. 8.13 în secțiunea transversală unde notațiile au următoarele semnificații: 1. tub de protecție, 2. ecran de căldură, 3 spațiu vid, 4. heliu sau azot, după caz, 5. azot în cazul în care răcirea se face cu heliu, 6. izolație electrică, 7. supraconductori. Izolația termică micșorează fluxul de căldură dintre exterior către sistemul conductor răcit cu heliu sau azot. Este cel mai constisitor element al cablului. Spațiul dintre tubul exterior și tubul cu heliu (azot) care conține conductorii este vidat și umplut parțial cu folii reflectante. În cazul răcirii cu heliu se mai introduce un blindaj răcit cu azot între tubul de heliu și tubul exterior. Pentru supraconductorii la temperatură critică înaltă (peste 77K) locul heliului este luat de azot și nu se mai utilizează încă un blindaj de azot. Până la apariția supraconductorilor ceramici s-au utilizat supraconductorii Nb_3Sn și Nb_3Ge în cablurile pentru transmisia energiei electrice la distanță. Pierderile în cablurile trifazice se datorează în general pierderilor prin histerezis în supraconductori. Ele sunt de ordinul zecilor de $\mu W/cm^2$ și depind de temperatură (cresc cu creșterea temperaturii) și de densitatea de flux magnetic prin suprafață. Menționăm că în multe țări se utilizează conductori compoziți filamentari în construcția cablurilor cu supraconductori. O componentă importantă a cablurilor cu supraconductori este izolația electrică. Aceasta se poate face cu vid cu materiale dielectrice care au pierderi foarte mici ($tg \delta < 2 \times 10^{-5}$) sau chiar cu heliu lichid subrăcit sau subcritic. Materialele cu factorul de pierderi foarte mic sunt polimerii nepolari (teflonul) și polimerii slab polari (polietilena).

8.10. Magneți cu supraconductori utilizați la separarea magnetică

Separatorul magnetic se utilizează pentru îndepărtarea impurităților feromagnetice din alte materiale. Prin această metodă se purifică în jur de 23 minereuri. În procesul de separare magnetică particulele feromagnetice sau paramagnetice sunt separate dintr-un flux de material de către forțe magnetice. Forța magnetică este generată de către un câmp magnetic H_0 și de către un gradient dH/dx aplicate asupra fluxului de material. Dacă notăm cu V volumul particulei și cu M magnetizarea în câmpul magnetic H_0 această forță este dată de expresia $F_m = VMdH/dx$. Pentru ca separarea să fie eficientă F_m trebuie să fie mai mare decât greutatea particulei și decât forța de antrenare hidrodinamică (vâscozitate). Separatorul utilizat frecvent în trecut este cel cu cilindru magnetic (Fig. 8.14). El constă dintr-un cilindru care se rotește și în care se află un set de magneți staționari care generează o forță magnetică pe suprafața sa. Această forță atrage particulele magnetice spre suprafața cilindrului și le antrenează astfel încât cad în partea sa dreaptă. Celelalte particule, nemagnetice, nu sunt antrenate de către forța magnetică și cad în

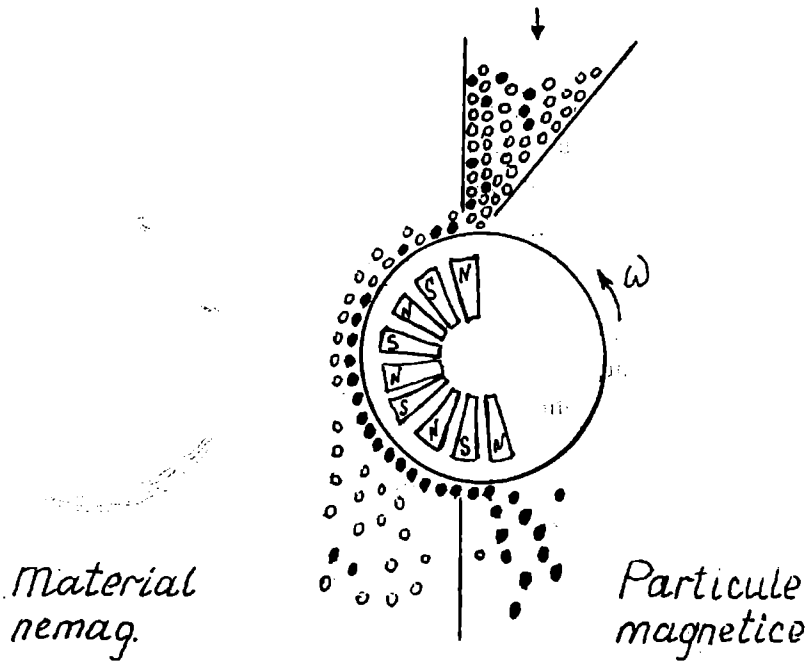


Fig. 8.14

stânga cilindrului, efectuându-se astfel separarea. Acest sistem de separare are câmp magnetic slab și gradient mic de câmp magnetic. De aceea el poate fi utilizat numai la separarea particulelor de dimensiuni mari ($> 10 \mu\text{m}$) și cu magnetizare mare (de exemplu, magnetita). Pentru separarea particulelor cu dimensiuni mai mici și cu proprietăți magnetice slabe se utilizează separatori cu gradient mare de câmp magnetic. Pentru comparație într-un câmp de 10 kG , $\alpha - \text{Fe}_2\text{O}_3$ are magnetizarea egală cu $0,58 \text{ uem/g}$ pe când magnetita are magnetizarea egală cu 96 uem/g .

S-au conceput două tipuri de separatoare cu gradient mare de câmp. În primul tip separarea se produce prin captarea particulelor magnetice într-o matrice magnetică care generează un gradient de câmp magnetic. În cel de-al doilea tip de separator particulele sunt deviate selectiv dintr-un flux de material. Schema principală a primului tip de separator cu gradient mare de câmp este reprezentată în Fig. 8. 15. Materialul, dispersat într-un lichid, curge printr-o canistră în care este fixată o matrice fibroasă din oțel inoxidabil. În prezența unui câmp magnetic intens generat

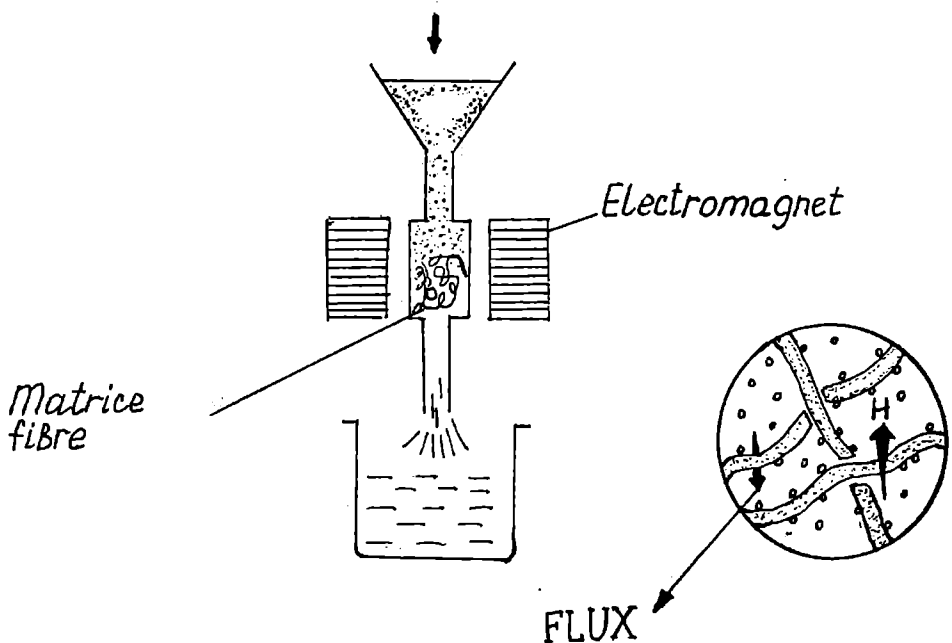


Fig. 8.15

de către un electromagnet, particulele magnetice sunt captate de către această matrice. Lichidul și particulele namagnetice trec relativ ușor prin matricea fibroasă, care are găuri suficient de mari și sunt colectate într-un recipient situat în partea de jos. În această matrice, care este magnetizată la saturație, se obține la marginile fibrelor un gradient de câmp de ordinul $0,1 \text{ T}/\mu\text{m}$. Separatorul cu matrice fibroasă de oțel este utilizabil pentru dimensiuni ale particulelor magnetice cuprinse între $0,5 \mu\text{m}$ și $700 \mu\text{m}$. Capacitatea magnetică este cu atât mai eficientă cu cât dimensiunile particulelor magnetice sunt mai apropiate de dimensiunile fibrelor matricii de oțel. Pentru colectarea particulelor magnetice se reduce câmpul magnetic la zero și se spală canistra cu un jet puternic de apă. Prin urmare, în acest tip de separare, procesul de separare trebuie întrerupt periodic pentru curățarea matricii de captare. Această metodă se utilizează pentru separarea materialelor care conțin o cantitate mare de componente magnetice; de exemplu, minereul de fier conține peste 50% impurități magnetice. Separatorul cu deflexie este prezentat în Fig. 8. 16 [10]. El conține un magnet cuadrupolar. De-a lungul axei sale sunt conectate două tuburi concentrice. Tubul interior este prevăzut cu găuri. Prin acesta circulă lichidul cu materialul ce trebuie purificat.

Sub influența gradientului câmpului magnetic particulele magnetice difuzează prin aceste găuri în cel de al doilea tub unde sunt colectate [14]. Gradientul de câmp ce se obține în acest tip de separator este mai mic cel obținut cu separatorul cu matrice de captare, de aceea el este adecvat pentru particule mai mari și cu magnetizare mai mare. Are însă avantajul că poate funcționa continuu. Un separator magnetic se caracterizează printr-unul din următorii doi parametri: coeficientul de recuperare sau gradul de separare. Coeficientul de recuperare este raportul dintre componenta magnetică recuperată (separată) și materialul magnetic din întregul material. Acesta crește cu creșterea intensității câmpului magnetic și scade cu creșterea vitezei fluidului. Gradul de separare reprezintă procentul de material magnetic din componenta magnetică separată. Acesta variază slab cu câmpul magnetic, însă crește cu creșterea vitezei lichidului. Dacă se utilizează magneți cu supraconductori se obțin câmpuri magnetice mai intense astfel că se poate lucra la viteze de circulație a lichidului mai mare și se mărește coeficientul de recuperare și gradul de separare. Într-o uzină de separare de minereu se prelucrează în jur de 20000 tone pe zi. Separatorul magnetic se utilizează pentru separarea minereurilor, așa cum am menționat mai sus, pentru purificarea argilei, a cărbunelui, a apei contaminate etc. De exemplu, cărbunele se purifică prin gazeificare, care este foarte costisitoare. Prin gazeificare se elimină sulfurile și cenușa. Aproximativ jumătate din cantitatea de sulfură este piritică (conține fier) și poate fi separată pe cale magnetică. Cealaltă jumătate este organică și nu poate fi separată pe cale magnetică. Pentru eliminarea întregii cantități de sulfură trebuie dezvoltată o metodă de

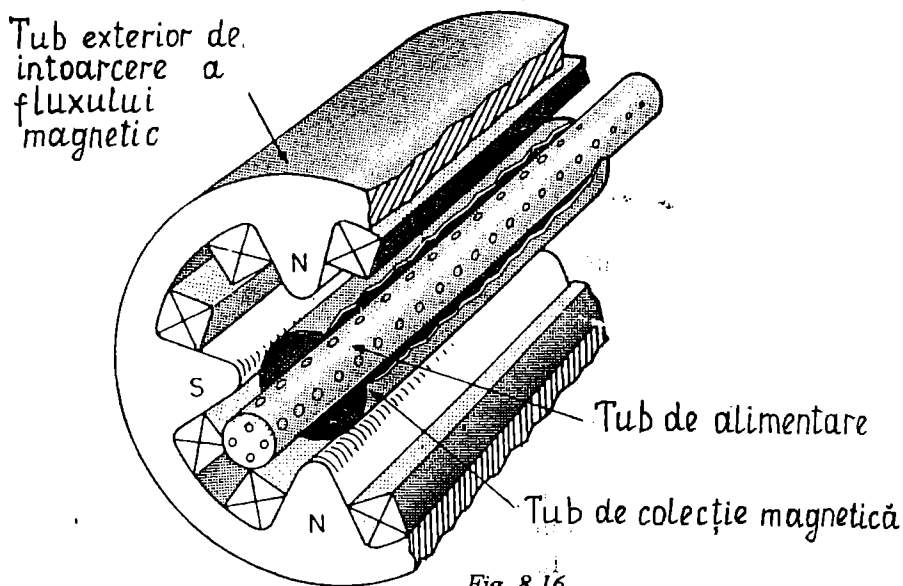
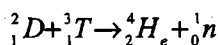


Fig. 8.16

transformare a sulfurii organice în sulfură piritică. Purificarea apei înseamnă eliminarea suspensiilor solide (nămolului), a bacteriilor, particulelor colorate, metalelor grele dizolvate și ionilor (de exemplu ionii de ortofosfați constituie hrana pentru alge). Pentru eliminarea acestor impurități contaminate se introduc în apă granule foarte fine (praf) de oxid de fier (magnetită Fe_3O_4 : 100 la 1000 ppm) și ioni de Fe (III) sau Al (III). Impuritățile coagulează în jurul magnetitei și pot fi separate pe cale magnetică. Separarea magnetică este mult mai rapidă decât separarea cu filtre mecanice.

8.11. Magneți cu supraconductori utilizați în reactorii de fuziune nucleară

Descompunerea nucleelor grele în nuclee mai ușoare se obține în reacțiile de fisiune nucleară, iar formarea de nuclee mai grele din nuclee mai ușoare se obține în reacțiile de fuziune nucleară. În oricare din aceste transformări are loc o eliberare de energie și pot fi utilizate pentru generarea de energie. Reactorii pe bază de fuziune oferă unele avantaje față de cei cu fisiune dintre care amintim: radioactivitate mai mică și imposibilitatea dezvoltării în reactor a unei reacții de fuziune necontrolată (explozie). Pentru realizarea fuziunii, nucleele trebuie să se apropie până la distanța egală cu raza de acțiune a forțelor de atracție nucleară. În acest scop trebuie cheltuită o anumită cantitate de energie pentru a învinge repulsia electrostatică, deoarece ambele nuclee care interacționează au sarcină pozitivă. Deoarece repulsia electrostatică crește cu creșterea numărului atomic A, energia cheltuită pentru realizarea fuziunii va fi cu atât mai mare cu cât masa nucleelor este mai mare [15]. De aceea, cel puțin primele reactoare energetice nucleare pe bază de fuziune vor utiliza combustibilul din amestec deuteriu-tritium, deoarece partenerii de fuziune au mase mici și va fi necesară o energie mai mică pentru amorsarea reacției. Din fuziunea unui nucleu de deuteriu 2D cu un nucleu de tritium 3T se formează un nucleu de heliu 4He cu energia cinetică de 3,5 MeV și se eliberează un neutron 1n cu energia cinetică de 14,1 MeV.



În total în această reacție se eliberează o energie de fuziune de 17,6 MeV, sub formă de energie cinetică a produșilor reacției. Pentru ca energia obținută din reacțiile de fuziune să fie mai mare decât energia cheltuită pentru obținerea acestor reacții este necesar ca probabilitatea de coliziune dintre nuclee să fie mare. Aceasta se poate realiza prin ridicarea temperaturii plasmei adică într-o plasmă termonucleară. De aceea reacțiile de fuziune se numesc reacții de fuziune termonucleară. Temperaturile la care se obține un bilanț energetic pozitiv sunt de ordinul sutelor de milioane de grade. În prezent sunt investigate mai multe căi de obținere a fuziunii termonucleare dintre care amintim: implozia prin iradiere cu laser și confinarea magnetică a plasmei. Metoda obținerii reacțiilor de fuziune termonucleară cu ajutorul laserilor constă în iradierea unei pastile de combustibil nuclear (deuteriu plus tritium) cu raza r mică, cu radiație laser pentru încălzirea materialului până la temperatura de amorsare a reacției. Pentru acest scop trebuie construiți laseri de mare putere și cu eficiență ridicată. În Fig. 8.17 se reprezintă două sisteme de confinare a plasmei în câmp magnetic. În fig. 8.17 a este reprezentat sistemul de autoconfinare a plasmei (pinch). Într-un tub cu gaz la presiune joasă se produce între doi electrozi o descărcare electrică de scurtă durată. Energia impulsului, de tensiune ultraînaltă, se obține prin descărcarea unui sistem cu bobină supraconductoare în care este stocată energia (a se vedea paragraful următor). La descărcare se produc curenți intensi de 10^{10} - 10^{11} A, care circulă printr-un strat subțire din apropierea pereților tubului de descărcare. Aceștia generează un câmp magnetic azimutal B. Deoarece în interiorul plasmei nu există câmp magnetic, stratul pelicular imprimă o presiune $p = B^2/8\pi$ îndreptată către interior ceea ce face ca plasma (particule încărcate electric) să se confineze (contracte) către axul tubului de descărcare. Această confinare conduce la îndepărtarea

de peretele tubului a plasmei fierbinti astfel că temperatura plasmei poate fi ridicată până la valori cu mult peste temperatura de topire a materialului din care este confecționat tubul.

Al doilea sistem de confinare magnetică este cel cu „oglinzi magnetice” (capcană magnetică). Capcana magnetică este un spațiu delimitat de câmpuri magnetice intense. Un caz simplu de capcană cu două bobine supraconductoare la capete este reprezentat în Fig. 8.17 b). În interiorul capcanei este produsă (sau injectată) plasma. Particulele încărcate ale plasmei nu se pot deplasa către peretele tubului, adică perpendicular pe axă, deoarece câmpul magnetic al capcanei (pe figură sunt reprezentate liniile de câmp magnetic) le obligă să execute cercuri sau spirale în jurul liniilor de câmp, reținându-le astfel în zona fierbinte. Capetele acestei capcane, unde liniile de câmp se confinează, se numesc oglinzi magnetice, deoarece particulele ajungând în aceste zone sunt reflectate ca în oglindă, în zona de reacție. Numai particulele care se deplasează de-a lungul axei sistemului scapă în afara oglinzilor și reprezintă pierderi. Pentru a elimina aceste pierderi s-a construit un sistem toroidal (fără capete). Cel mai important sistem de acest tip este sistemul numit TOKAMAK, de producție sovietică. Schema de principiu a instalației este reprezentată în Fig. 8.18. Camera de descărcare toroidală constituie secundarul (cu o singură spirală) al unui transformator. La aplicarea unui puls intens de tensiune în primarul transformatorului, ia naștere în secundar (camera de descărcare) o tensiune electrică indusă suficient de mare astfel că apare o descărcare electrică foarte intensă în plasmă. Curentul plasmei generează un câmp magnetic azimutal B_a , care izolează plasma de pereții tubului așa cum am discutat mai sus. În sistemul TOKAMAK se mai aplică un câmp magnetic longitudinal B_z , paralel cu tubul de curent de plasmă, prin trecerea unui curent printr-o bobină înfășurată pe tor. Compunerea celor două

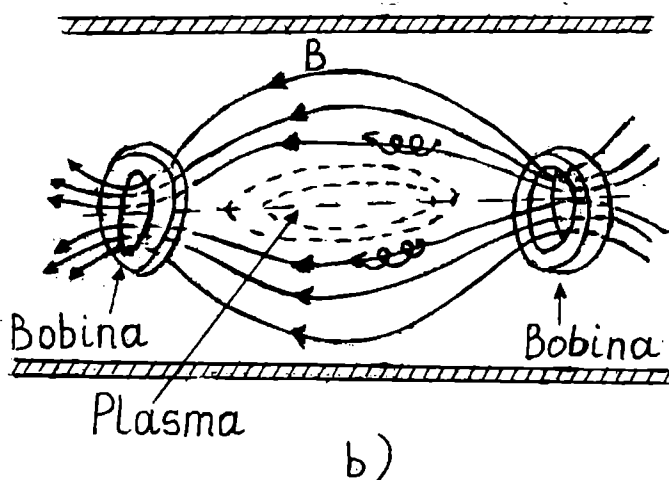
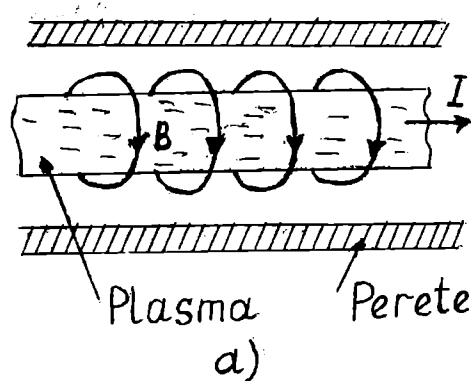


Fig. 8.17

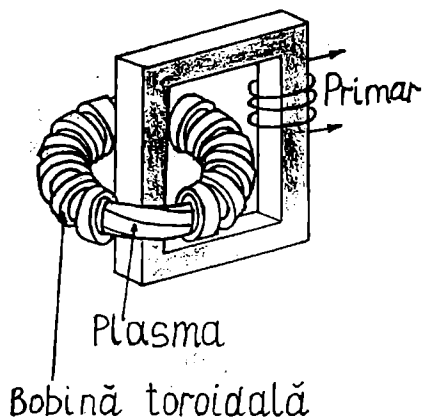


Fig. 8.18

câmpuri dă un câmp de formă elicoidală care joacă rol de capcană magnetică, cu „perete” toroidal pentru plasma din camera de descărcare. În prezent sistemul de confinare de tip TOKAMAK se consideră cel mai promițător pentru obținerea fuziunii nucleare. Bobinele toroidale se construiesc din material supraconductor. În programul internațional de fuziune nucleară ITER, bobinele toroidale au o structură cu greutatea de 10000 tone incluzând 770 tone material supraconductor fără vasul criostat. Câmpul magnetic pe axa toroidală este de 6 T, iar energia magnetică este de 106 GJ.

8.12. Magneți cu supraconductori pentru stocarea inductivă a energiei

Pentru funcționarea în impulsuri a laserilor de mare putere, a acceleratorului sincron, a reactorilor de fuziune nucleară (cu autoconfinare de tip TOKAMAK) sunt necesare pentru alimentare sisteme de stocare a energiei care să aibă densitate mare de energie și timp scurt de descărcare. Inițial, pentru alimentarea în impulsuri s-au utilizat baterii de capacitate. Însă într-un asemenea sistem nu se poate stoca mai mult de 1 Ws/cm^3 . Eficiența economică limitează asemenea baterii la o valoare maximă a energiei înmagazinate de 10 MJ și timp de descărcare ceva mai mic de 1 ms . O densitate mai mare de energie, $\sim 10 \text{ Ws/cm}^3$ la 5 T poate fi înmagazinată într-un sistem inductiv de stocare. Principiul de funcționare al unui generator de impulsuri inductiv este reprezentat în Fig. 8.19. Bobina supraconductoare L_s se încarcă la o putere joasă prin închiderea comutatorului S_1 care o cuplează la sursa de tensiune electrică E . Apoi se închide comutatorul supraconductor (rezistiv) S_2 , se deschide S_1 și prin bobina și comutatorul S_2 , ambele supraconductoare, circulă un curent persistent. La descărcare, se închide comutatorul S_3 care cuplează bobina L_s cu o sarcină inductivă (în cazul sincrotronului și a reactorului de fuziune

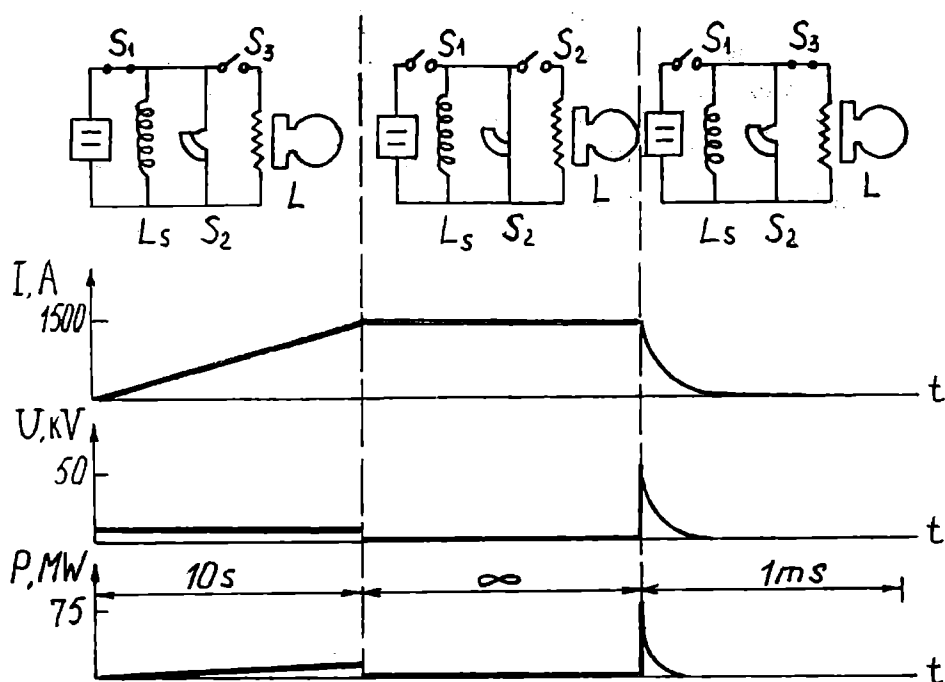


Fig. 8.19

această sarcină inductivă este bobina unui electromagnet) și se deschide rapid comutatorul supraconductor S_2 . În acest moment, (deschiderea S_2) se generează o tensiune mare pe S_2 (deschis), care transferă energia sarcinii inductive. Așa cum se reprezintă pe figură timpul de încărcare este de $\sim 10 \text{ s}$, timpul de stocare poate fi oricât de mare, iar timpul de descărcare este de ordinul ms. Acest sistem de descărcare, cu element de transfer rezistiv (comutatorul supraconductor) transferă 25% din energie, 25% rămâne în bobina de stocare, iar 50% este disipată (sub formă de căldură). Pentru îmbunătățirea raportului de transfer se utilizează în circuit elemente reactive: un capacitor sau o inductanță mutuală. În general aceste elemente reactive se înlocuiesc cu circuite de transfer echivalente: generator homopolar cu supraconductori, convertor electromagnetic sau circuite electronice (convertor cc-ca-cc) [16]. Timpul de descărcare poate fi mărit până la valori de ordinul secundelor și eficiența de transfer poate ajunge la 80% [17]. S-au construit, de asemenea, transformatoare de putere de 330 kVA cu înfășurare supraconductoare din NiTi [18], iar în Japonia s-a testat un transformator de 1000 kVA [19].

CAPITOLUL IX

APLICAȚIILE DICS LA MĂSURĂTORI ANALOGICE

Am văzut în capitolul 8 că într-un DICS fluxul magnetic este cuantificat, că tensiunea de ieșire este funcție periodică de fluxul aplicat și că nu se poate identifica valoarea absolută a fluxului și prin urmare DICS este un sensor al variației de flux. Cu DICS se pot măsura magnetizarea electronică și nucleară, variația spațială a câmpului magnetic provenită de la diferite surse ca submarine, activitatea musculară și nervoasă a omului, etc. Utilizând un traducător de intrare la DICS se pot măsura: curentul și tensiunea electrică, temperatura, deplasarea, suprafluiditatea ^3He , particule încărcate, monopolul magnetic (dacă acesta există), cuarci, etc. De asemenea DICS poate fi utilizat ca un traducător de sensibilitate foarte înaltă în sistemele pentru detecția undelor gravitaționale. Aceste probleme le vom discuta în detaliu în acest capitol și în capitolele 10 și 11.

În toate aceste tipuri de măsurători, pentru a obține sensibilitatea maximă este necesar ca inductanța inelului DICS să fie cât mai mică. S-a reușit să se obțină DICS cc limitat de zgomotul cuantic, pentru care $L = 1 \text{ pH}$ [1]. Există dificultăți de cuplaj a unor mărimi fizice la o inductanță atât de mică. Performanțele DICS depind de rezolvarea acestei probleme. Ca parametru de merit pentru compararea diverselor DICS se utilizează variația minimă de energie de la intrare δE detectabilă, raportată la lărgimea benzii de frecvență egală cu unitatea

$$\delta E = \frac{\pi(\delta\phi)^2}{2k^2 L}$$

unde L este inductanța inelului, $\delta\phi$ este fluxul echivalent de zgomot pe unitatea de bandă de frecvență, $k = M/(LL_2)^{1/2}$ este coeficientul de cuplaj, M este inductanța mutuală și L_2 este inductanța bobinei de semnal. pentru un DICS cu $L = 0,1 \text{ nH}$, capacitatea sunt de $0,14 \text{ pF}$, la $0,3 \text{ K}$ s-a obținut δE aproape de limita cuantică [1]. Cea mai bună valoare obținută experimental pentru δE este $1,7 \times 10^{-34} \text{ JHz}^{-1}$, de 1,7 ori mai mare decât limita stabilită de principiul de incertitudine [2].

9.1. Măsurarea câmpului magnetic și a gradientului de câmp

Orice variație de câmp magnetic poate fi detectată cu ajutorul unui DICS deoarece acesta generează o variație de flux prin inelul său. Însă, din motive practice nu se aplică direct pe inelul DICS câmpul magnetic ce trebuie măsurat ci prin intermediul unui transformator de flux. Transformatorul de flux constă din cel puțin două bobine conectate în serie, în mod uzual

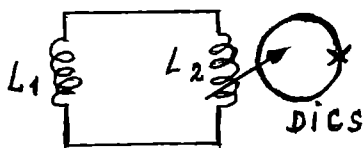


Fig. 9.1

supraconductoarele (Fig. 9.1). Una din aceste bobine, cea secundară, este cuplată strâns cu inelul DISC. Atunci când ambele bobine sunt supraconductoare fluxul magnetic total care străbate ambele bobine este cuantificat și deci este constant în timp. Fie L_1 inductanța bobinei primare și L_2 inductanța bobinei secundare, n numărul de spire din bobina primară și A aria secțiunii transversale a acestei bobine.

O modificare δB a câmpului extern aplicat pe bobina primară va producă o modificare a fluxului total aplicat pe combinația primar-secundar, ceea ce va determina modificarea curentului circulator persistent cu δi astfel că

$$\delta i(L_1 + L_2) + n\delta BA = 0$$

Variația corespunzătoare de flux în DICS este

$$\delta\phi = M\delta i = \frac{nMA\delta B}{L_1 + L_2} \quad (1.1)$$

unde M este inducția mutuală între bobina secundară și DICS. Dacă aproximăm fiecare bobină cu un solenoid lung ideal de lungime l cu inductanța

$$L_1 = \mu_r \mu_0 \frac{n^2 A l}{l}$$

efectuînd derivata în raport cu A a relației (1.1) se obține că transferul maxim de flux din primar în secundar are loc pentru $L_1 = L_2$. Să considerăm că bobina primară L_1 este formată din două bobine separate, conectate în serie, cu câte n spire fiecare, identice, însă înfășurate în sens invers. O variație a câmpului magnetic aplicat va induce în cele două bobine variații de flux de sens contrar, astfel încât variația totală va fi zero și deci nu va apare o variație a curentului circulator și nici a fluxului aplicat pe inelul DICS. Însă, dacă câmpul magnetic prezintă un gradient diferit de zero pe direcția care separă cele două bobine ale primarului, variația de flux din cele două bobine nu se va mai anula complet și la ieșire se va detecta un semnal. Pentru cazul reprezentat în Fig. 9.2 cele două bobine sunt separate prin distanța δz în direcția z astfel că sistemul este sensibil la variația dB_z/dz . Sistemul reprezentat în Fig. 9.2 se numește gradiometru (§ 7.4). Variația de flux indusă în DICS în acest caz este

$$\delta\phi = MnA \frac{dB_z}{dz} \delta z \frac{1}{L_1 + L_2}$$

A este aria bobinei. Variația spațială a câmpului magnetic este un tensor 3×3 , cu 9 componente. Configurația bobinei reprezentată în Fig. 9.2 a dă posibilitatea să se determine componentele diagonale ale acestui tensor. Componentele nediagonale, de exemplu dB_x/dz , pot fi măsurate

cu ajutorul unei bobine primar în configurația din Fig. 9.2 b. Un gradiometru poate funcționa în condițiile fluctuațiilor câmpului magnetic ambient care în general sunt uniforme spațial în regiunea ocupată de bobine (aceste fluctuații sunt determinate de variația aleatorie în timp a câmpului magnetic ambient). Pot fi astfel detectate câmpuri slabe în prezența unor fluctuații mult

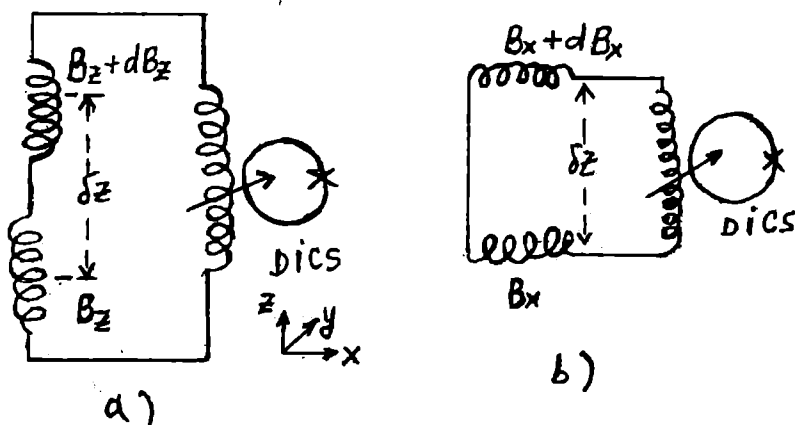


Fig. 9.2

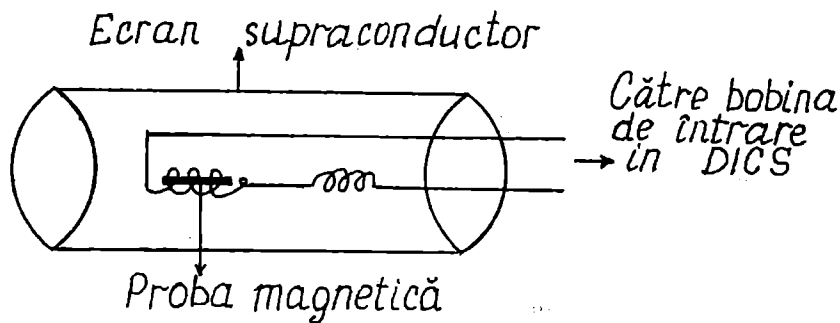


Fig. 9.3

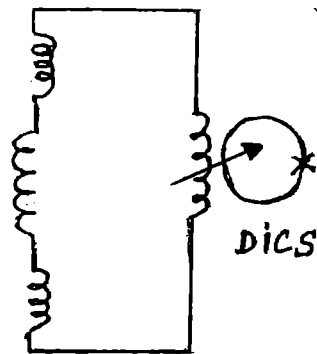


Fig. 9.4

mai mari. De exemplu, pot fi măsurate câmpurile magnetice produse de corpul omenesc, care sunt de ordinul 1 pT, în condițiile fluctuațiilor câmpului magnetic ambiant care sunt ordinul nT sau mai mari. Configurația din Fig. 9.2. a se utilizează nu numai pentru măsurarea gradientului câmpului magnetic ci și pentru măsurarea susceptibilității magnetice. În acest scop, cele două bobine, înfășurate în sens invers, care alcătuiesc primarul, sunt introduse într-un cilindru (ecran) supraconductor pentru a fi protejate de orice sursă externă de câmp magnetic. Proba magnetică se introduce într-una din cele două bobine (Fig. 9.3), ceea ce determină variația fluxului prin această bobină. Tensiunea de ieșire a DICS se modifică la deplasarea probei în bobină sau dacă proba stă fixă și se modifică momentul magnetic al acesteia sub acțiunea câmpului magnetic sau temperaturii. Fluxul adițional care străbate bobina primară în câmpul magnetic aplicat B este

$$\delta\phi = \pi^2 n \chi B$$

unde n este numărul de spire de rază r al bobinei în care este introdusă proba iar χ este susceptibilitatea probei. Fluxul minim ce poate fi măsurat cu un DICS este $10^{-4} \phi_0 \text{ Hz}^{-1/2}$. Dacă bobina primară are $n = 100$ spire cu $r = 1$ cm, atunci într-o lărgime a benzii de 1 Hz se poate detecta o variație minimă a lui χB de ordinul 2×10^{-21} T. Cu un astfel de susceptometru s-a determinat susceptibilitatea statică a nucleelor de cupru într-un câmp de 10 G la o temperatură de 10^{-3} K [3]. Sistemul poate fi utilizat ca termometru (bazat pe susceptibilitatea nucleară) în refrigeratorii cu diluție $^3\text{He}-^4\text{He}$. Deoarece momentul magnetic electronic este de 10^3 ori mai mare decât momentul magnetic nuclear se poate măsura susceptibilitatea pe probe paramagnetice de dimensiuni foarte mici [4]. Un alt tip de susceptometru permite accesul la bobina de intrare la temperatura camerei. Bobina primară (de intrare) numită și bobina picup este introdusă într-un sistem separat de DICS, ecranat, în care se poate varia temperatura până la temperatura camerei. Evident, DICS este introdus într-un sistem menținut sub T_c . Cu acest tip de susceptometru se pot efectua măsurători rapide pe probe cu dimensiuni de ordinul centimetrilor, atunci când acestea se deplasează prin bobina primară. Se pot măsura momente de dipol de 10^{-18} Wbm. Notăm că momentul de dipol al unui electron liber este $\mu_e = 10^{-24}$ Wbm. Se utilizează pentru măsurători în geofizică [5], arheologie [6], biochimie [7, 8] etc. Susceptorul gradiometric se utilizează, de asemenea, pentru detecția variației magnetizării nucleare a unei probe introduse într-o bobină, utilizând metoda rezonanței magnetonucleare. În acest caz se aplică un câmp magnetic static și un câmp de radiofrecvență. Condiția de rezonanță este satisfăcută atunci când frecvența rf este egală cu frecvența de precesie nucleară. S-au efectuat astfel de măsurători atât la temperaturi înalte cât și la temperaturi joase [9, 10].

Pentru a măsura derivata a doua, d^2B/dz^2 se utilizează configurația reprezentată în Fig. 9.4, unde sunt cuplate două sisteme identice pentru măsurarea derivatei întâi, în care cele două bobine din centru sunt combinate într-una singură. Inductanțele diverselor bobine se aleg astfel încât să existe maximul de transfer de energie către DICS. Dacă considerăm primarul alcătuit din m bobine coaxiale situate de-a lungul axei z cu distanța dintre ele $z(i)$, fiecare

bobină având $n(i)$ spire și aria unei spire $A(i)$ și dacă notăm cu $S(i) = \pm i$ sensul de înfășurare al unei bobine atunci variația de flux produsă în primar de o variație de câmp $\delta B(z)$ este

$$\delta\phi = \sum n(i) a(i) S(i) \delta B(i)$$

Dezvoltând în serie Taylor pe B în jurul punctului $z = 0$ se obține

$$\delta B(z) = \delta B_0 + \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)_0 z + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 B}{\partial z^2}\right)_0 z^2 + \dots$$

Pentru a măsura o anumită componentă a tensorului câmpului, de exemplu $\partial^m B / \partial z^m$ trebuie să asigurăm ca toate componentele de ordin mai mic să fie nule, adică

$$\sum n(i) S(i) A(i) z(i)^0 = 0, \text{ ordinul zero}$$

$$\sum n(i) S(i) A(i) z(i)^1 = 0, \text{ ordinul întâi}$$

$$\sum n(i) S(i) A(i) z(i)^2 = 0, \text{ ordinul al doilea}$$

$$\sum n(i) S(i) A(i) z(i)^{m-1} = 0, \text{ ordinul } m-1$$

Pentru m bobine se obțin m ecuații cu $3m$ necunoscute. Adăugând la aceste ecuații și condiții de frontieră legate de volumul ocupat de bobine și condițiile de optimizare a transferului de energie către DICS se poate proiecta un circuit cu care să se măsoare numai un singur termen din dezvoltarea în serie Taylor a câmpului magnetic. În practică s-au realizat configurații numai până la ordinul al treilea. Un telescop pentru detecția monopolului magnetic constă dintr-o rețea de un număr mare de bobine care alcătuiesc un gradiometru și care sunt cuplate strâns la un DICS. Am văzut că energia maximă detectabilă în banda de frecvență unitate de către un DICS este

$$\delta E = \frac{8k_B T L}{8}$$

unde L este inducția inelului. Pentru a detecta o variație de energie mai mică trebuie ca L să fie cât mai mic și deci raza inelului cât mai mică. Pe de altă parte, volumul ocupat de transformatorul de flux trebuie să fie cât mai mare pentru a asigura o energie de intrare cât mai mare. Este deci foarte dificil să se cupleze secundarul unui transformator de flux la un inel cu dimensiuni foarte mici) bobina secundară se introduce în inel). O soluție ingenioasă pentru rezolvarea acestei probleme constă în realizarea DICS din N inele supraconductoare conectate în paralel pe joncțiunea (joncțiunile) supraconductoare [11]. Dacă fiecare inel are inductanța L atunci inductanța efectivă a DICS este L/N . Să presupunem că cu un asemenea DICS detectăm direct (fără transformator de flux) un câmp magnetic. Să considerăm un cilindru de volum $V = a^2 l$. Dacă construim un inel care să ocupe tot volumul ocupat de cilindru (evident, de forma acestui cilindru) variația minimă de câmp detectabilă va fi

$$\delta B = \left(\frac{\delta E}{\mu_0 V}\right) = \left(\frac{\pi a^2}{l V}\right)^{1/2} C$$

unde μ_0 este momentul magnetic total. Dacă volumul este umplut de N nivele de rază r și lungime l , variația minimă de câmp detectabilă va fi

$$\delta B_1 = C \left(\frac{\pi r^2}{l V n}\right)^{1/2}$$

Dacă $N < \pi a^2 / \pi r^2$ se obține $\delta B / \delta B_1 = N$ ceea ce arată că sensibilitatea crește cu numărul de inele conectate în paralel.

9.2. Măsurarea susceptibilității magnetice

Deși această problemă am prezentat-o în paragraful anterior insistăm în acest paragraf cu prezentarea unei instalații speciale de măsură. Instalația pentru măsurarea susceptibilității magnetice este asemănătoare cu cea a unui gradiometru și este reprezentată în Fig. 9.5 [12].

O pereche de bobine din niobiu este conectată la bobina de intrare a unui DICS lock-in flux. Bobinele sunt încastrate într-un tub de rășină care la rândul lui este înconjurat de un tub de niobiu, întregul ansamblu fiind extrem de rigid. Așa cum se reprezintă pe figură, proba este plasată în interiorul uneia din bobine. Tubul de niobiu poate fi încălzit deasupra temperaturii sale critice și apoi răcit în prezența unui câmp magnetic axial astfel că poate rămâne captat în inel un câmp magnetic stabil, a cărui valoare poate diferi întrucâtva de cea a câmpului magnetic aplicat. Dacă cele două perechi de bobine sunt echilibrate perfect, semnalul

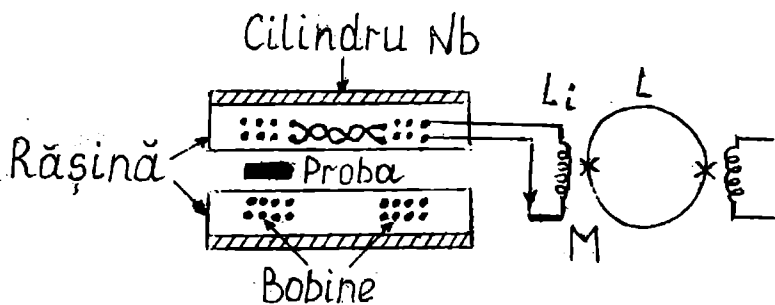


Fig. 9.5

aplicat pe DICS va fi proporțional cu câmpul magnetic aplicat și cu susceptibilitatea probei. Deoarece suportul probei poate contribui la susceptibilitatea totală, se scade din semnalul obținut pe DICS în absența probei (numai cu suportul acesteia introdus în tub). De asemenea, pentru obținerea unor rezultate corecte, se efectuează măsurătorile în funcție de temperatură cu și fără probă și se scad valorile obținute în cele două cazuri. Să notăm cu ϕ fluxul care trece printr-o spiră a bobinei. Fiecare bobină are N spire și inductanța $L_b/2$. Fluxul cuplat la DICS este dat de relația

$$\phi_o = \frac{MN\phi}{2L_b}$$

Calculul lui ϕ prin probă este dificil. El se efectuează simplu pentru probe de dimensiuni mici de forma unor sfere, elipsoizi sau cilindri cu înălțimea egală cu diametrul. Notând cu χ susceptibilitatea și cu V volumul probei, cu D diametrul mediu al bobinei în aceste cazuri se poate scrie într-un câmp captat de valoare H

$$\phi = \frac{\mu_o \chi H V}{D}$$

Pentru $N = 24$, $L_b/M = 166$, $D = 3,6$ mm se găsește,

$$\frac{\phi_o}{\phi} = \frac{\mu_o MN \chi H V}{2L_b D \phi_o} \cong 10^{-4} \chi \left(\frac{H}{1G} \right) \left(\frac{V}{1mm^3} \right)$$

Măsurând pe ϕ_o se determină astfel χ . S-a obținut o rezoluție de 2×10^{-11} uem pe o probă cu volumul de 1 cm^3 într-un câmp de 1 kG în domeniul de temperatură $4,2-400 \text{ K}$. Menționăm că o balanță Faraday comercială are rezoluția de 10^{-11} uem g^{-1} la 100 kG iar cu un magnetometru cu probă vibratorie s-a obținut o rezoluție de 10^{-13} uem g^{-1} la 10 kG [13].

9.3. Magnetometrul absolut cu DICS.

Am văzut că cu un DICS pot fi detectate variații foarte mici de flux magnetic. Pentru detectarea variației densității de flux dispozitivul trebuie calibrat. Mai târziu s-au construit magnetometre cu DICS care permit nu numai măsurarea variației de flux ci și valoarea absolută a fluxului fără a fi necesară o calibrare prealabilă. Un astfel de dispozitiv este analogul criogenic al magnetometrului de rezonanță protonic, convențional. În magnetometrul convențional proba este apa iar pentru determinarea tensiunii induse se utilizează un amplificator cu semiconductori de zgomot mic. În magnetometrul absolut cu DICS, proba este ^3He lichid la temperatura de 3 K sau mai joasă iar pentru detecția magnetizării nucleare de precesie se utilizează un DICS. Descriem în continuare funcționarea acestui magnetometru, care este reprezentat în Fig. 9.6. pe figură s-au utilizat notațiile: ARF-amplificator de radiofrecvență, AR-amplificator rezonant, TF-transformator de flux, RS-releu de sincronizare. Proba de studiat se introduce în primatul transformatorului de flux (numită bobina pickup) al cărui secundar este cuplat la DICS. Presupunem ca în interiorul bobinei primare, de volum V și lungime l , se introduce un singur nucleu de spin J și moment magnetic μ_n . Dacă inițial spinul este orientat într-un anumit sens pe direcția axei bobinei și i se schimbă orientarea în sens invers, atunci apare în bobină o variație de flux care în principiu poate fi detectată. Magnetizarea M , care reprezintă momentul magnetic pe unitate de volum, este $M = \mu_n/V$ și variația de flux $\delta\phi$ prin bobină datorită inversiei spinului este dată de expresia

$$\delta\phi = \bar{A} \cdot \delta\bar{B} = \frac{2\mu_o\mu_n A}{V} = \frac{2\mu_o\mu_n}{l}$$

unde A este aria secțiunii transversale prin bobină. Variația corespunzătoare de energie, care se cuplează cu DICS este

$$\delta E = \frac{(\delta\phi)^2}{2L} = \frac{2\mu_o\mu_n^2}{Vn^2}$$

unde n este numărul de spire al bobinei de inductanță $L = \mu_o n^2 A/l$. Pentru o bobină cu $V = 1\text{mm}^3$ și o singură spiră se obține $\delta\phi = 10^{-29}\text{Wb}$ și $\delta E = 10^{-49}\text{J}$. Energia minimă detectabilă cu DICS care are cel mai mic zgomot este $\hbar\chi\Delta f = 10^{-34}\text{J}$. Comparând cele două valori rezultă că nu poate fi detectat un singur spin. Se obține că pentru a putea fi detectați este necesar să existe în bobină

un număr minim $\delta N = 10^3$ spini, pentru bobina cu dimensiunile de mai sus în banda de lărgime 1 Hz. de fapt acesta reprezintă numărul în exces de spini aliniați într-un sens față de numărul de spini aliniați în sens invers. Pentru a realiza această inversiune de populație a spinilor (sau polarizare) se utilizează două metode: (1) metoda brută și (2) pompajul optic [14]. În prima metodă se aplică sistemului de spini un câmp magnetic B care determină despicarea Zeeman a stărilor de spini în stări sus și stări jos. Presupunem că

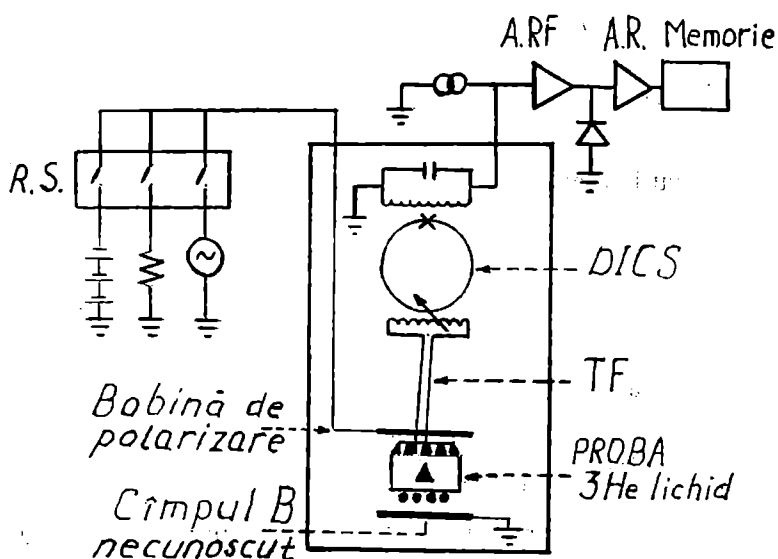


Fig. 9.6

nucleele au fiecare spinul $J = 1/2$. Dacă sistemul de spini se găsește în echilibru cu un termostat aflat la temperatura T atunci diferența de populare între spinii sus și spinii jos este dată de statistica Boltzmann și apare o polarizare netă careia și corespunde o magnetizare dată de legea lui Curie

$$M = \frac{\chi B}{\mu_0} = \frac{N\mu_u^2 B}{3k_B T} \quad (3.1)$$

unde χ este susceptibilitatea magnetică,

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{N\mu_0 \mu_u^2 B}{3k_B T}$$

Pentru a produce între cele două stări un raport de populație de 1 pe 10^4 la 1 K este necesar $B = 1$ T. Aceasta corespunde unei densități de nuclee de heliu de 10^{19} pe mm^3 , ceea ce la o temperatură de 1 K corespunde unei presiuni de 100 mbar. Pentru evaluarea acestei mărimi s-a utilizat relația (3.1) precum și relațiile

$$M = (N^+ - N^-)\mu_n$$

$$N^+ + N^- = N$$

$$\frac{N^+}{N^-} = 10^4$$

unde N^+ reprezintă numărul de nuclee cu spin sus iar N^- reprezintă numărul de nuclee cu spin jos.

Cealaltă metodă pentru polarizarea spinilor nucleelor de ^3He gazos utilizează pompajul optic. Ca sursă de pompaj se utilizează un laser cu ^4He acordat pe tranziția de spin $S_{1/2} - P_{1/2}$ care emite lumină polarizată circular. Radiația laser de $1,08 \mu\text{m}$ favorizează o populație preferențială stărilor metastabile 2^3S_1 , care la rândul ei determină polarizarea stărilor fundamentale despicate Zeeman prin transferul de schimb al metastabilității. Se obține astfel o polarizare de până la 70%, mult mai intensă decât în cazul polarizării brute. Dacă pulsurile RF aplicate au faza corespunzătoare apare un efect maser și astfel poate fi detectată precesia spinilor [15]. Această metodă are un dezavantaj. Pompajul optic poate avea loc în heliu gazos numai dacă presiunea acestuia este mai mică decât 1 mbar. La presiuni mai mari au loc depopulări rapide ale stărilor metastabile prin coliziuni. Astfel, densitatea maximă de spini polarizată nu depășește 10^{19} pe mm^3 , comparabilă cu cea obținută în cadrul metodei brute pe ^3He lichid. prin urmare, niciuna din cele două metode de polarizare nu apare superioară față de cealaltă. Comparăm în continuare sensibilitatea acestui tip de magnetometru, care este un magnetometru de rezonanță, cu He și cu a unui magnetometru convențional, care utilizează de asemenea DICS (descrie în paragraful anterior). Mai înainte de acesta vom descrie principiul comun oricărei metode de rezonanță, în particular al rezonanței magnetice nucleare (RMN). În acest scop să considerăm un nucleu care posedă un moment magnetic μ_n și un moment cinetic $\hbar J$. Cele două mărimi sunt paralele și se poate scrie

$$\vec{\mu}_n = \gamma \hbar \vec{J}$$

unde γ este raportul giromagnetic, caracteristic nucleului. Energia de interacțiune cu un câmp magnetic aplicat

$$V = -\vec{\mu}_n \cdot \vec{B}$$

Dacă $\vec{B} = B\vec{z}$ atunci

$$V = \mu_{nz} B = -\gamma \hbar B J_z$$

Valorile presupuse pentru J_z sunt $m_j = J, J-1, \dots, -J$, de unde $U = -m_j \gamma \hbar B$. Într-un câmp magnetic un nucleu cu $J = 1/2$ are două nivele de energie, corespunzătoare lui $m_j = \pm 1/2$. Diferența de

energie dintre cele două nivele este $\gamma\hbar B$. Dacă notăm această energie cu $\hbar\omega$ se obține

$$\omega = \gamma B \quad (3.2)$$

care reprezintă condiția fundamentală pentru absorbția de rezonanță magnetică. variația de câmp minimă detectabilă

$$\delta B = \frac{\delta\omega}{\gamma} = \frac{\phi_z}{\mu_o \beta |M_o| \gamma t} \quad (3.3)$$

unde ϕ_z este fluxul echivalent de zgomot al DICS, M este magnetizarea, β este funcția de transfer flux câmp, t este timpul disponibil pentru măsurare. Variația de câmp minimă detectabilă cu un magnetometru simplu cu DICS este

$$\delta B = \frac{\phi_z}{\beta} \quad (3.4)$$

Fluxul de intrare DICS datorat precesiei spinilor prin proba cu magnetizarea totală M_o este

$$\phi_s = \mu_o \beta M_o \sin \omega t; \quad \delta\phi_s = \mu_o \beta M_o t \delta\omega = \phi_z$$

într-un câmp B_p de polarizare (brută) magnetizarea M_o este dată de expresia

$$M_o = \frac{\chi B_p}{\mu_o} \quad (3.5)$$

unde χ este susceptibilitatea magnetică nucleară. Menționăm că relația (3.3) s-a obținut utilizând relația (3.2) și a doua relație (3.5.). Raportul dintre variația minimă detectabilă a lui B în magnetometrul cu precesie și în cel cu DICS simplu este

$$\eta = \frac{1}{\gamma \chi B_p t} \quad (3.6)$$

^3He lichid la 3 K are susceptibilitatea $\chi = 10^{-7}$ Aastfel că pentru $B_p > 0,1$ T și timpul de măsurarea $t > 1$ s se obține $\eta < 1$, ceea ce arată că în aceste condiții magnetometrul cu precesie este mai sensibil. În magnetometrul RMN criogenic, DICS-ul detectează fluxul a cărei mărime depinde de B_p și de temperatură dar nu depinde de B însuși. Prin urmare, sensibilitatea acestui magnetometru nu depinde de câmpul magnetic ce trebuie detectat.

Magnetometrul protonic (fără DICS) detectează o tensiună indusă de rata de variație a fluxului și sensibilitatea sa crește cu B . Sub valoarea de 10 μT acest dispozitiv nu mai poate funcționa pe când magnetometrul criogenic cu DICS poate funcționa în principiu și la câmp zero. Îmbunătățirea performanțelor acestui RMN criogenic s-a obținut prin utilizarea unui amplificator rf cu straturi subțiri cu zgomot foarte mic (temperatura de zgomot $\sim 1\text{K}$) [16].

9.4. Biomagnetism

Un domeniu important de aplicații a magnetometrului cu supraconductori este, medicina unde se utilizează pentru măsurarea câmpurilor magnetice de către corpul omenesc. Printre fenomenele observate sunt: câmpul magnetic produs de activitatea inimii (magnetocardiogramă), de cavitatea mușchilor (magnetomyogramă) și de activitatea creierului (magnetoencefalogramă). În Fig. 9.7 se reprezintă sursele de la care provine câmpul magnetic, intensitatea acestuia și domeniul de frecvență în care se pot observa. Pentru comparație pe figură sunt prezentate și unele surse de zgomot. Ordinul de mărime al câmpurilor produse de către corpul omenesc este de la 1 nT la 1 pT. Câmpurile magnetice determinate de activitatea musculară și neurală sunt alternative cu frecvența de la 1 la 10 Hz. Aceste câmpuri se pot datora curenților ionici asociați cu procesele ce au loc în corpul omenesc. Amplitudinile câmpurilor magnetice pentru un om normal și tensiunile electrice corespunzătoare obținute cu electrozi peliculari sunt date în tabela 4.1 [17].

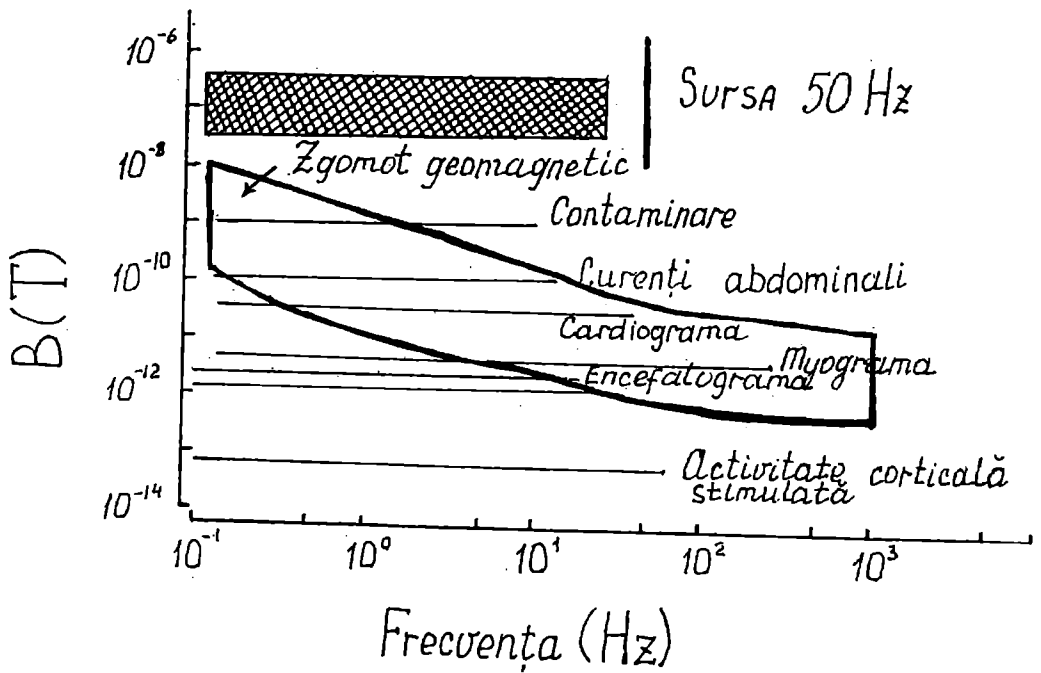


Fig. 9.7

În Fig. 9.8 se reprezintă densitatea spectrală de zgomot provenită de la diverse surse de câmp magnetic precum și sensibilitatea unor sensori (semnalul minim ce poate fi detectat cu aceștia).

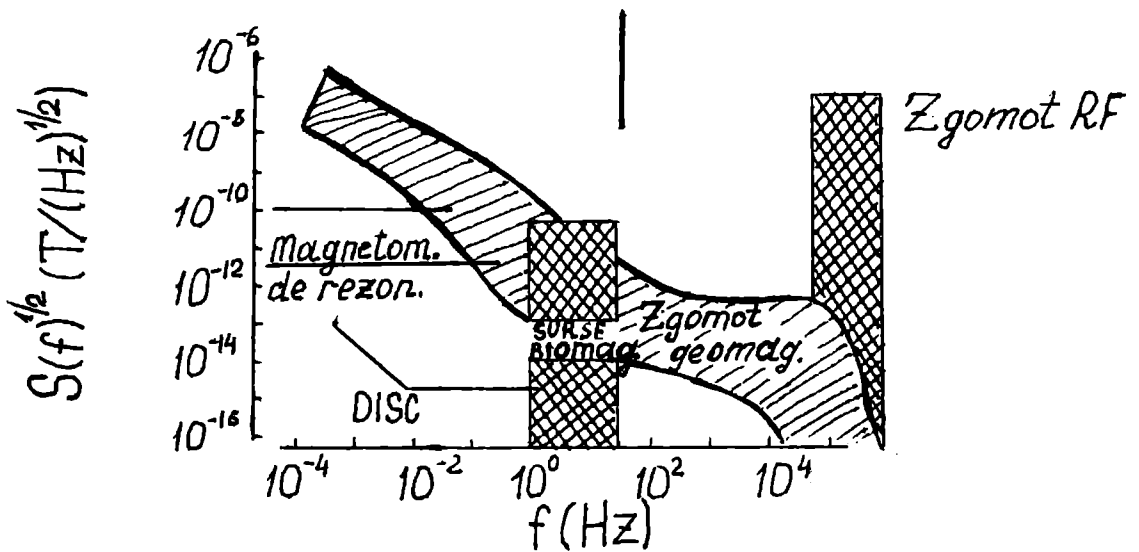


Fig. 9.8

Tabela 4.1.

Efectul	Măsurarea magnetică	Amplitudinea B, pT	Măsurarea electrică	Amplitudinea V, μ V
cardiogramă	MCG	50	ECG	2
cardiogramă fetală	FMCG	5	FECG	20
myogramă	MMG	2	EMG	1
oculogramă	MOG	10	EOG	300
encefalogramă	MEG	1	EEG	50
răspunsul vizual	VEF	0,2	VEF	10

Din această figură reiese clar că pentru detecția biomagnetismului trebuie să se utilizeze magnetometre cu DICS. S-au utilizat două variante pentru efectuarea unor asemenea măsurători. În prima variantă se utilizează un magnetometru cu DICS simplu, ca cel reprezentat în Fig. 9.1, unde bobina primară a transformatorului are o singură spiră (Fig. 9.12 a) care se fixează pe corp, însă, atât magnetometrul, cât și pacientul sunt închiși într-o cameră ecranată magnetic. Pentru ecranare se utilizează straturi multiple feromagnetice de o anumită grosime, cu permeabilitate mare. De exemplu, prin folosirea a șase folii de mumetal s-a micșorat nivelul de zgomot în camera ecranată sub $10^{-15} \text{THz}^{-1/2}$ [18]. Această metodă este eficace, dar costisitoare. S-a propus și utilizarea unui blindaj dintr-un strat gros nemagnetic, cu conductivitate mare, pentru ecranarea la frecvențe joase [19]. Înainte de a prezenta cea de a doua variantă, facem câteva observații asupra transformatorului de flux utilizat în această primă variantă. După cum am menționat în 7.3, pentru a avea transferul maxim de semnal către DICS este necesar ca impedanțele bobinelor transformatorului de flux să fie egale, $L_p = L_s$. Valoarea inductanței bobinei secundare este fixată pentru un DICS dat (pentru a exista cuplaj maxim între aceasta și DICS). Bobina primară este bobina de detecție și ea poate fi construită dintr-o singură spiră sau din mai multe spire. Bobina de detecție împreună cu DICS-ul, în carcasa căruia este inclusă și bobina secundară a transformatorului de flux, alcătuiesc ceea ce se numește un magnetometru. Având în vedere condiția $L_p = L_s$, următorii patru parametri ai bobinei de detecție L_p pot fi modificați pentru a optimiza răspunsul magnetometrului: aria A a bobinei, numărul de înfășurări N , secțiunea transversală a firului a și pasul bobinei (distanța dintre două spire succesive). Pentru o valoare L_s a inductanței de intrare în DICS (care reprezintă bobina secundară a transformatorului de flux) se obține semnalul maxim, dacă variația ΔI a curentului I de ecranare care circulă prin transformatorul de flux, datorată unei variații de flux aplicat în bobina de detecție $\Delta \Phi = AN\Delta B_n$, este maximă. Între fluxul aplicat pe bobina de detecție și curentul de ecranare din transformatorul de flux există relația

$$AN\Delta B_n = (L_p + L_s)\Delta I \quad (4.1)$$

Pentru $L_p = L_s$ se obține

$$\frac{\Delta I}{\Delta B_n} = \frac{NA}{2L_p} \quad (4.2)$$

Inductanța L_p se exprimă în funcție de inductanța L_1 a unei singure spire prin relația

$$L_p = N^{2-r}L_1 \quad (4.3)$$

unde $r \rightarrow 0$, când spirele sunt foarte apropiate între ele și $r \rightarrow 1$, atunci când pasul bobinei este mare. L_1 este dat de relația

$$L_1 = 4 \times 10^{-7} \pi^{1/2} \sqrt{A} \left[\ln(8\sqrt{A} / \sqrt{a}) - 1,75 \right] \quad (4.4)$$

unde A și a se exprimă în m^2 și L_1 în H . Pentru un DICS dat cu o inductanță de intrare L_s fixată și deci, o valoare fixată a lui L_p , rezultă din ecuația (4.2) că răspunsul $\Delta I/\Delta B$ este aproximativ proporțional cu N^{-1} ($r=0$) sau cu N^0 ($r=1$). Pentru a menține L_p fix, aria A devine dependentă de N , astfel că sensibilitatea cea mai mare se obține atunci când L_p are o singură spiră de arie A mare. Dar, aceasta nu dă posibilitatea obținerii de informații pe suprafețe mici. De aceea, pentru a studia arii cât mai mici, se construiește bobina de detecție L_p de arie mică și cu mai multe spire, astfel ca să fie satisfăcută condiția $L_p = L_s$. Se utilizează o bobină cu pas mare ($r=1$), deoarece aceasta distorsionează mai puțin semnalul decât o bobină strânsă. De asemenea, în acord cu ecuația (4.4), cele mai bune rezultate se obțin pentru un fir mai gros, însă, în practică se utilizează un fir subțire pentru construcția bobinei (de arie $a=0,01 \text{ mm}^2$), deoarece acesta captează mai puțin flux magnetic și produce mai puțin zgomot [20]. Detalii asupra calculului inductanței pentru diverse configurații ale bobinei de detecție se găsesc în [21].

În cea de a doua variantă se utilizează bobina de intrare sub formă de gradiometru (Fig. 9.2) și nu se mai utilizează cameră ecranată deoarece, așa cum se reprezintă în § 10.1,

gradiometrul este practic insensibil la sursele de zgomot. Această metodă este mult mai ieftină și mai mobilă. Cu un astfel de magnetometru s-a studiat activitatea inimii fătului în pântecele mamei. Utilizând un gradiometru pentru derivata a doua, s-au efectuat măsurători biomagnetice chiar în mediul urban, unde nivelul de zgomot magnetic este mai mare [21]. Sensibilitatea magnetometrului cu DICS a dat posibilitatea să se măsoare câmpul neuromagnetic al activității spontane a creierului omenesc, care este de ordinul 1 pT. Semnalele neuromagnetice transmise de o activitate auditivă și vizuală stimulate sunt cu un ordin de mărime mai mici. Și acestea au putut fi măsurate, mai întâi, în camere ecranate și apoi, chiar în camere neecranate, utilizând gradiometre. În metoda răspunsului stimulat se aplică stimuli auditivi, vizuali sau tactili, în mod repetat, cu o anumită frecvență sincronizată, cu frecvența de modulare a DICS. Atât amplitudinea semnalului de răspuns, cât și timpul de răspuns permit obținerea de informații asupra proceselor fiziologice care au loc în creier. Culegerea semnalului din diverse locuri de pe cutia craniană permite determinarea poziției spațiale și intensității surselor de curent neurale. Evident, dacă avem un sistem DICS cu un singur canal, în acest scop trebuie deplasat detectorul în diverse poziții pe cutia craniană. Recent s-au propus sisteme cu mai multe DICS și gradiometre. Schema sistemului electronic convențional de măsură este reprezentată în Fig. 9.9. Se utilizează un transformator de flux cu un gradiometru pentru derivata a doua. În plus, transformatorul mai conține trei perechi de bobine de câte o spirală, conectate în opoziție și orientate orizontal pe direcția x, orizontal pe direcția y și vertical pe direcția z. Cele trei perechi de bobine sunt introduse fiecare în câte un manșon supraconductor (nu este reprezentat pe figură) și aria acestuia se ajustează, astfel încât să se obțină compensarea perfectă a câmpurilor parazitare în primarul transformatorului. Acest sistem poate funcționa fără ecranare magnetică în orice laborator. Pe figură, I_m reprezintă curentul de modulare pe 10 kHz, I_{rf} -curentul de rf pe 19 MHz, PA-preamplificator, DF-detector și filtru, A-amplificator 1 ck-in, V_o -tensiunea de ieșire, CR-curentul de reacție, R-circuitul rezonant pe 19 MHz, G-gradiometru. Ceea ce este desenat sub linia întreruptă se află la temperatura corespunzătoare stării supraconductoare, iar restul la temperatura camerei.

Recent s-au realizat sisteme care culeg date simultan din puncte de pe o sferă de 125 mm și se lucrează la realizarea unor sisteme cu 24 canale și chiar mai multe.

Dezvoltarea DICS cc planare cu bobine gradiometru planare integrate [22] sugerează că

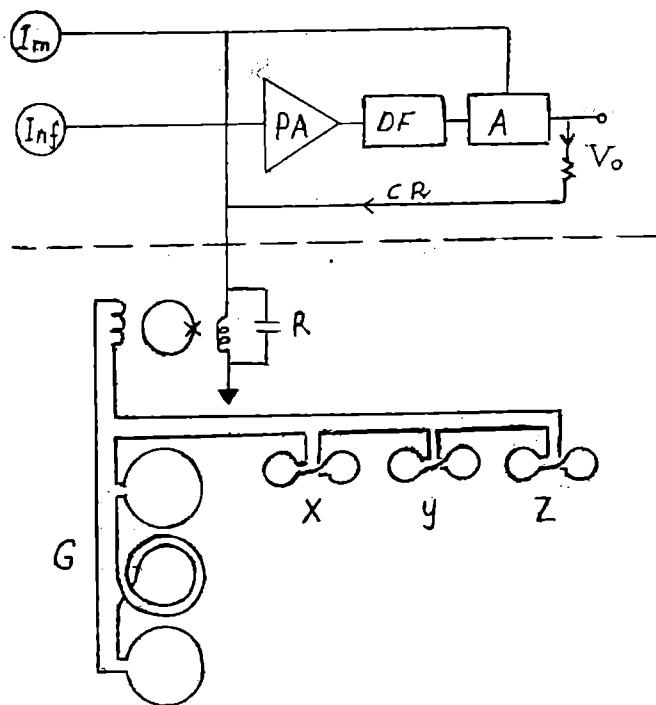


Fig. 9.9

pot fi ușor produse industrial rețele de asemenea detectori care pot fi fixați pe pacient și se pot obține simultan un număr mare de date în paralel, ceea ce crește viteza și precizia culegerii de date. Deja în unele clinici se testează asemenea sisteme de rețele cu 37 canale separate.

Problema DICS cc planare cu transformator de flux planar integrat este prezentată în detaliu în § 7.9.

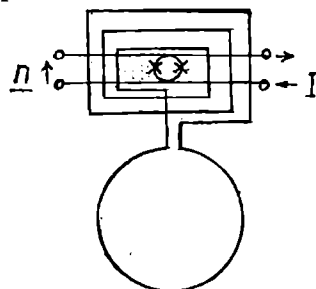


Fig. 9.10

Schema simplă a unei construcții planare este reprezentată în Fig. 9.10, unde în bobina secundară a transformatorului de flux planar reprezentat în Fig. 7.13 se află inelul DICS-ului cc. Detalii de construcție sunt prezentate în Fig. 7.24. Inelul DICS-ului cc sub forma unei plăci cu gaură joacă rol de plan suport pentru bobina de intrare (bobina secundarului transformatorului de flux), ceea ce permite un coeficient de cuplaj foarte mare $k > 0,9$. Pentru o astfel de configurație a DICS, inductanța sa este determinată de dimensiunea D a găurii plăcii

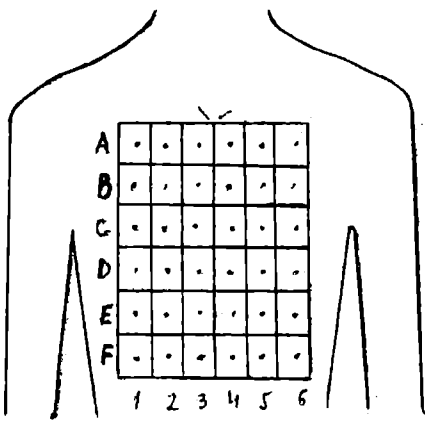
$$L_D = 1,25 \mu_0 D$$

Inductanța mutuală M dintre inductanța L_D a DICS și inductanța bobinei de intrare L_s cu numărul N de spire este $M = NL_D$. Inductanța bobinei de intrare este $L_s = N^2 L_D$. L_D este aleasă astfel încât să fie îndeplinite condițiile de optimizare $\beta_L = I_c 2L / \Phi_0 = 1$ și $\beta_C = 2I_c R^2 C / \Phi_0 < 1$, unde I_c , R și C reprezintă curentul critic, rezistența normală și, respectiv, capacitatea unei joncțiuni, iar Φ_0 este cuanta de flux magnetic. Numărul de spire este ales, astfel încât să fie îndeplinită condiția $L_s = L_p$. DICS de forma prezentată în Fig. 10.10 funcționează într-o cameră ecranată. Într-o zonă cu mult zgomot este indicat ca să se utilizeze în locul unei bobine primare cu o singură spirală, un gradiometru. Gradiometrele sub formă planară sunt prezentate în Fig. 7.14.

În afara câmpurilor magnetice alternative, care apar datorită activității musculare și neurale și care au frecvența în domeniul 1-10 Hz, există și alte câmpuri magnetice, generate de curentul cuasicontinuu care se crede că este asociat cu dezvoltarea și regenerarea organelor. Pentru măsurarea acestor câmpuri, se utilizează un DICS cu gradiometru de ordinul doi. Pacientul nu se introduce într-o cameră ecranată, însă, se utilizează două bobine Hemholtz de dimensiuni mari pentru a anula influența câmpului magnetic pământesc, astfel că zgomotul prezent este mai mic decât 1 pT în domeniul 0,2-30 Hz. Un magnetometru mai complex este reprezentat în Fig. 9.9 și discutat mai sus. Corpul pacientului se așează pe o canapea nemagnetică și se poate deplasa pe două direcții perpendiculare sub magnetometru. Studii efectuate pe picioarele a 14 pacienți, aparent sănătoși, au pus în evidență existența unui curent de 10 μ A care circulă în sus printr-un picior și în jos prin celălalt. Mecanismul responsabil pentru existența acestui curent nu este încă clar. Cu un asemenea magnetometru se studiază dezvoltarea embrionului în oul de găină. S-au realizat și DICS cu gradiometru din Y123, care funcționează la 77 K [23], care pot detecta semnale magnetice slabe. Spre deosebire de gradiometrul convențional în care primarul transformatorului de flux este construit din două bobine înfășurate în sens invers, acest tip de gradiometru, numit gradiometru electronic, este alcătuit din două DICS-uri dispuse în plane paralele, separate prin distanța d , de-a lungul axei verticale de simetrie. Semnalul diferență dat de cele două DICS-uri este amplificat și măsurat cu ajutorul unui al treilea DICS. Semnalul minim ce poate fi măsurat este de 5 pT.

9.5. Cartografia biomagnetică

Scopul experiențelor biomagnetice este de a determina evoluția în timp, utilizând o metodă de măsură nedestructivă, a componentei normale a câmpului magnetic într-un plan, numit plan cartografic. Planul cartografic este o suprafață cât mai apropiată de obiectul examinat, echidistantă față de suprafața acestuia; de exemplu, în cazul investigării inimii este un plan paralel cu coșul pieptului, iar în cazul investigării creierului este o suprafață sferică în jurul capului. De exemplu, pentru ridicarea magneto-cardiogramăi inimii se procedează astfel. Se așează pe corpul omenesc o rețea standard, așa cum se reprezintă în Fig. 11 a [24]. În fiecare pătrățel al rețelei standard se înregistrează un semnal MCG (magnetocardiogramă), Fig. 9.11 b. Semnalele biologice se repetă în același mod și cu aceeași perioadă. În dreapta jos este reprezentat semnalul BCG (electrocardiogramă). Pentru a obține distribuția componentei normale a câmpului magnetic, se trasează harta curbilor de izocâmp al acestei componente la diverse momente de timp, așa cum se reprezintă în Fig. 9.12. Cele 8 hărți sunt calculate din datele din Fig. 9.11 b la



	1	2	3	4	5	6
A	~	~	~	~	~	~
B	~	~	~	~	~	~
C	~	~	~	~	~	~
D	~	~	~	~	~	~
E	~	~	~	~	~	~
F	~	~	~	~	~	~

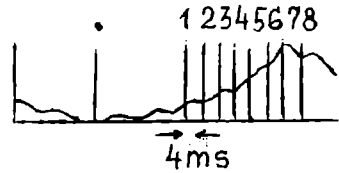
a)

b)

Fig. 9.11

momente de timp care diferă între ele cu 4 ms, așa cum sunt marcate pe curba ECG înregistrată simultan și reprezentată în partea de sus a Fig. 10.12. În partea de sus a fiecărei hărți este notată distanța în $fT=10^{-15}T$ dintre două linii de izocâmp. Următoarea etapă constă în localizarea precisă a surselor care generează semnalul detectat. Din teoria câmpului se cunoaște că acesta poate fi calculat dacă se cunosc tipul și poziția sursei de câmp. Problema inversă, determinarea precisă a tipului și poziției sursei, atunci când este cunoscută distribuția câmpului, este mai dificilă, deoarece nu are o soluție unică. Însă, dacă se cunoaște tipul sursei, atunci se poate determina poziția acesteia după distribuția câmpului generat de ea.

Pentru a stabili tipul sursei, trebuie luate în considerare mecanismele fiziologice. Un proces bioelectric ar fi un curent intracelular de densitate relativ mare asociat cu un potențial al acțiunii ce se propagă de-a lungul axului unei celule nervoase, acompaniat de curenți de întoarcere extracelulari. Această distribuție a curentului conduce intuitiv la modelul dipolului de curent. În



realitate, au loc un număr imens de asemenea evenimente în paralel, deoarece este implicat un întreg fascicul de celule nervoase și aceasta dă naștere unor câmpuri biomagnetice măsurabile. Dipolul de curent constă dintr-o distribuție de curent de densitate mare concentrată de-a lungul unei linii scurte, așa

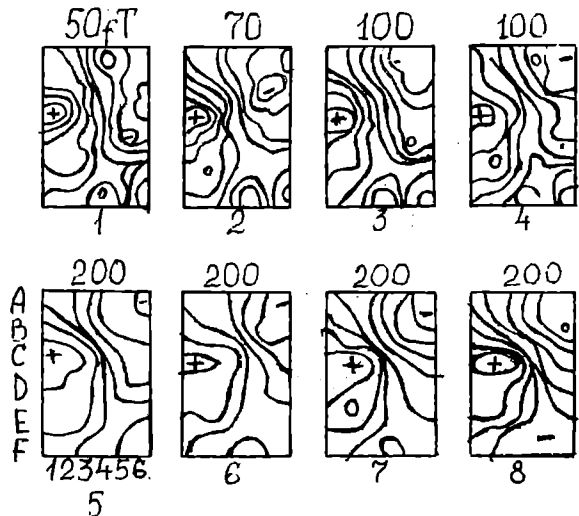


Fig. 9.12

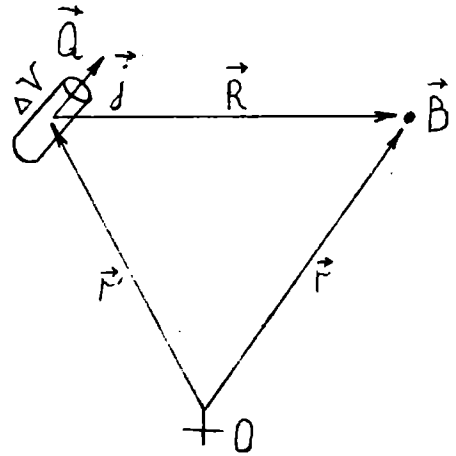


Fig. 9.13

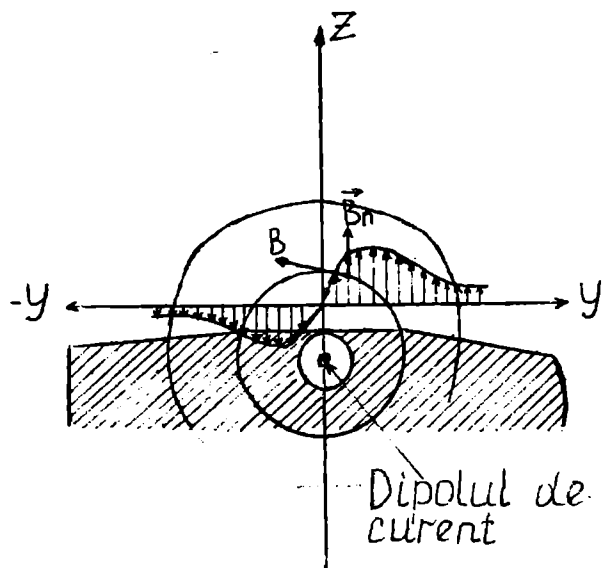


Fig. 9.14

aduc contribuție la valoarea câmpului magnetic măsurabil \vec{B} [26]. Discuții detaliate asupra modelului dipolului de curent și acestor probleme se găsesc în [27]. De asemenea, în lucrarea [8] se prezintă un articol de sinteză asupra magnetoencefalografiei. În experiențele biomagnetice, componenta normală a câmpului magnetic \vec{B} se măsoară într-un plan cartografic care este situat în afara corpului, foarte aproape de suprafața lui. În Fig. 9.14 se reprezintă distribuția spațială a componentei normale $B_n(x, y)$ a câmpului magnetic provenit dintr-un dipol de curent \vec{Q} , așa cum este determinat în planul cartografic. Distribuția este evidentă dacă se consideră că componenta normală $B_n(x, y)$ derivă din vectorul de câmp \vec{B} al unui câmp radial simetric cu intensitatea câmpului descrescătoare în raport cu distanța R față de dipolul \vec{Q} . Notăm că distanța dintre maxim și minim este de ordinul distanței dintre planul cartografic și dipolul de curent. Valoarea lui \vec{B} scade cu distanța dintre detector și sursă.

cum se reprezintă în Fig. 9.13. Curenții asociați de întoarcere care circulă (înapoi) printr-un volum conductor relativ mare, în mod uzual se neglijează. Dipolul de curent Q (se măsoară în A.m) este dat de relația [25]

$$\vec{Q} = \vec{j}(\vec{r}') \Delta V$$

adică este egal cu produsul dintre elementul de volum ΔV și densitatea de curent dependentă de coordonatele spațiale $\vec{j}(\vec{r}')$. Densitatea de flux magnetic \vec{B} se obține aplicând legea Biot-Savart

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi R^3} \right) \vec{Q} \times \vec{R}$$

unde $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ și μ_0 este permeabilitatea vidului. Se arată că curenții de întoarcere nu

9.6. Aplicațiile DICS în geofizică

DICS se utilizează pentru măsurarea impedanței stratului superficial al pământului în funcție de frecvență și determinarea rezistivității în funcție de poziție și adâncime. Cunoașterea rezistivității dă informații asupra bazinelor de sedimente, asupra crustei adânci și mantalei superioare, surselor geotermale și depozitelor de minereuri și de petrol. Există câteva tehnici utilizate în acest scop: topografia magnetotelurică, topografia cu sursă magnetică controlată, topografia cu gradiometru magnetic aeropurtat și topografia cu gradiometru gravitațional. Aceasta din urmă încă nu poate fi utilizată.

9.6.1. Topografia magnetotelurică

În topografia magnetotelurică (MT) se face uz de energia electromagnetică din ionosferă care se propagă la suprafața pământului și are frecvența cuprinsă între 10^{-4} și 1 Hz. De asemenea, se face uz și de energia electromagnetică din timpul furtunilor atmosferice care se propagă la

suprafața pământului și are frecvența cuprinsă între 1 Hz și 10^2 Hz. Undele electromagnetice incidente sunt reflectate de către pământ și câmpurile electric și magnetic $\epsilon(\omega)$ și $H(\omega)$ se diminuează pe măsură ce pătrund în interiorul pământului cu o lungime caracteristică

$$\delta = 0,5 (\rho T)^{1/2} \text{km}$$

unde ρ (rezistivitatea pământului) se măsoară în Ωm și T (perioada undelor electromagnetice) se măsoară în secunde. Pentru $T=1$ secundă, δ este cuprins între 1 și 5 km, în funcție de valoarea rezistivității. Se măsoară simultan componentele orizontale ale câmpului magnetic $H_x(t)$ și $H_y(t)$ și ale câmpului electric $\epsilon_x(t)$ și $\epsilon_y(t)$. Componentele Fourier ale acestor câmpuri sunt corelate cu tensorul impedanței $Z(\omega)$, prin relațiile

$$\begin{aligned} \epsilon_x(\omega) &= Z_{xx}(\omega)H_x(\omega) + Z_{xy}(\omega)H_y(\omega) \\ \epsilon_y(\omega) &= Z_{yx}(\omega)H_x(\omega) + Z_{yy}(\omega)H_y(\omega) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Câmpurile magnetice se măsoară cu magnetometre sau cu bobine de inducție, iar câmpurile electrice se măsoară cu ajutorul unor electrozi îngropați în pământ care sunt conectați la un amplificator de sensibilitate mare. Schema convențională de calcul este următoarea [28]. Se multiplică fiecare ecuație, pe rând, cu complex conjugata a unuia dintre câmpuri și se mediază ecuațiile pe un număr de date înregistrate, pentru a reduce zgomotul. Elementele tensorului impedanță se găsesc prin rezolvarea unui set de astfel de ecuații. În cazul când pământul este omogen, componentele Z_{xx} și Z_{yy} sunt egale cu zero. Însă, în general, toate cele patru componente ale tensorului impedanței sunt diferite de zero. Pentru simplificarea metodei de determinare, se rotește axa z , astfel încât pentru o anumită orientare se obține $|Z_{xx}(\omega)|^2 + |Z_{yy}(\omega)|^2 = 0$. Pentru această orientare, se consideră Z_{xx} și Z_{yy} neglijabile și se determină Z_{xy} și Z_{yx} . Apoi se calculează rezistivitățile aparente, utilizând relațiile

$$\begin{aligned} \rho_{xy}(\omega) &= 0,2 / |Z_{xy}(\omega)|^2 T \\ \rho_{yx}(\omega) &= 0,2 |Z_{yx}(\omega)|^2 T \end{aligned}$$

unde ρ se măsoară în Ωm , iar Z în $(\text{mV}/\text{km})/\text{nT}$. Însă, datorită zgomotului, prin acest procedeu nu se obțin date precise. De aceea, se utilizează tehnica de referință la distanță [29]. În această tehnică, pe lângă măsurătorile lui E_x , E_y , H_x și H_y , în locul investigat se măsoară simultan cu un alt magnetometru câmpurile magnetice H_{xr} și H_{yr} într-un alt loc aflat la o distanță de câțiva km de acesta. Multiplicând ecuațiile (5.1) pe rând, atât cu $H_{xr}(\omega)$, cât și cu $H_{yr}(\omega)$, și efectuând mediile pe multe date înregistrate, se obține un set de patru ecuații din care se determină tensorul impedanței. De exemplu,

$$Z_{xy} = \frac{\overline{\epsilon_x H_{yr}^*} \overline{H_x H_{xr}^*} - \overline{\epsilon_x H_{xr}^*} \overline{H_x H_{yr}^*}}{\overline{H_x H_{xr}^*} \overline{H_y H_{yr}^*} - \overline{H_x H_{yr}^*} \overline{H_y H_{xr}^*}}$$

Sursele de zgomot din locul investigat și din locul depărtat sunt necorelate între ele, astfel că tensorul impedanței calculat în acest fel nu este influențat de către zgomot. Pentru informare, în Fig. 9.15 se reprezintă rezistivitatea aparentă, într-un loc din California în funcție de perioada semnalului înregistrat. După ce se determină rezistivitatea aparentă și se colectează și alte date dintr-o serie de locuri, se efectuează operațiunea de inversiune pentru a obține rezistivitatea pământului în funcție de poziția pe orizontală și de adâncime. Pentru

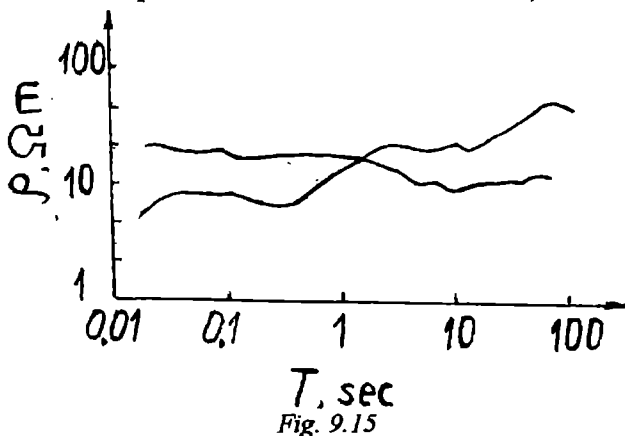


Fig. 9.15

o situație unidimensională, când rezistivitatea variază numai cu adâncimea, inversia se poate efectua cu precizie. În mod uzual, avem de-a face cu o situație bidimensională în care există o direcție de simetrie de translație; în acest caz, modelarea se efectuează într-o bază ad-hoc și necesită un timp considerabil pentru calcul. Modelarea tridimensională este mult mai complexă și necesită mult timp pentru calcul.

9.6.2. Topografia cu sursă electromagnetică controlată

În acest caz, se utilizează o sursă de unde de curent de formă rectangulară, iar undele din ionosferă, care în metoda anterioară dădeau semnalul de măsurat, reprezintă acum surse de zgomot.

În sistemul EM-60 se utilizează un alternator de 60 kW acționat de un motor cu benzină, toate așezate pe un autocamion de o tonă. Undele electromagnetice sunt generate cu ajutorul unui comutator tranzistorizat, sunt de formă rectangulară și au tensiunea maximă de ± 150 V și curentul maxim de ± 400 A. Frecvența undelor este controlată cu ajutorul unui oscilator local cu cuarț și poate varia între 10^{-3} Hz și 10^3 Hz. Undele rectangulare sunt aplicate pe o bobină din patru spire cu diametrul de 50 m. La o frecvență sub 50 Hz, impedanța bobinei este predominant rezistivă și produce un moment dipolar maxim de ± 150 Wb.m. Acest semnal poate fi recepționat la o distanță de 40 km. Câmpul magnetic generat de bobină este măsurat la stația de recepție cu un magnetometru cu DICS cc cu bobine de recepție orientate după cele trei axe rectangulare pentru a măsura componentele H_x , H_y , H_z , radială, tangențială și, respectiv, verticală față de bobina de transmisie. Semnalele sunt amplificate și filtrate înainte de a intra într-un detector lock-in, după care sunt procesate cu un microcalculator. Semnalele de referință pentru detectorul lock-in sunt date de un circuit de tact cu cuarț, sincronizat, cu un oscilator local cu cuarț care controlează undele rectangulare pe emițător. În urma procesării se estimează valorile celor trei componente ale câmpului magnetic (amplitudinea și faza relativă la faza curentului din bobina de transmisie). Pentru a elimina zgomotul, se utilizează tehnica de referință la distanță prezentată mai înainte. În acest scop, se plasează un al doilea magnetometru cu DICS la o distanță de 10 km față de bobina detectoare, cu ajutorul căruia se detectează numai zgomotul geomagnetic.

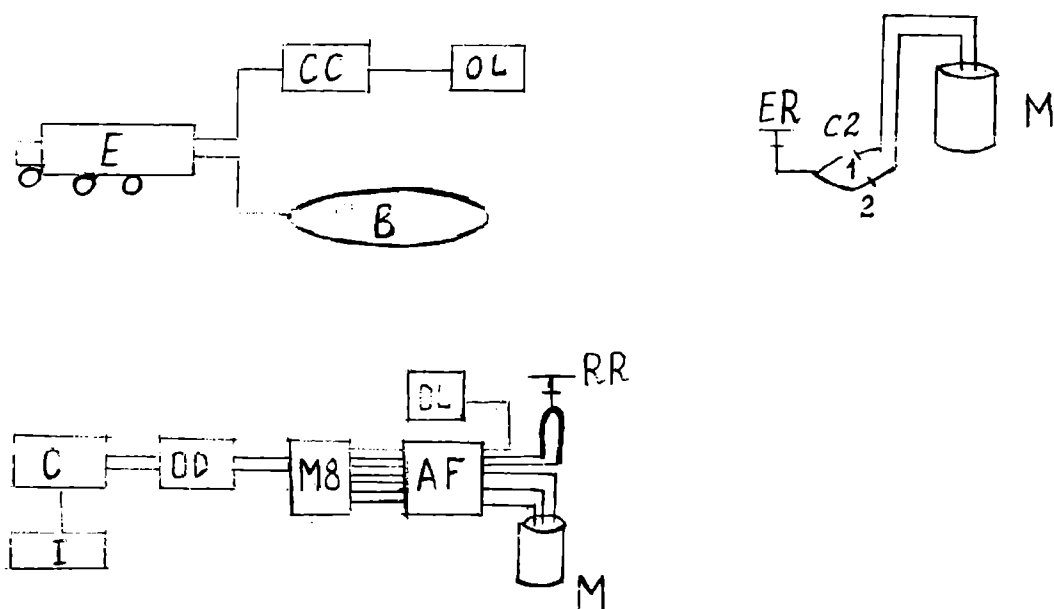


Fig. 9.16

Semnalele culese H_{xr} și H_{yr} sunt transmise la receptor prin telemetrie. În Fig. 9.16 este reprezentată diagrama sistemului EM-60 cu bobină orizontală. În stânga sus este fixat sistemul de detecție cu sursă controlată. El conține: E-emitaător, cc-circuit de control, OL-oscilator local cu cuarț, B-bobina de detecție. În dreapta sus este reprezentat sistemul de detecție la distanță a zgomotului geomagnetic care conține un magnetometru cu DICS, M, un circuit magnetic de referință cu două

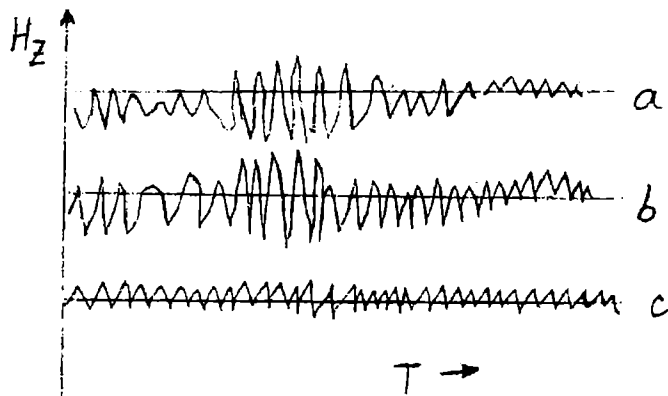


Fig. 9.17

canale, C2, și un emitaător radio ER. Jos este reprezentat circuitul de recepție a semnalului. El conține: un magnetometru cu DICS cc, M, cu trei axe pentru recepția componentelor H_x , H_y , H_z , un receptor radio RR, un oscilator local cu cuarț OL, un amplificator și un filtru AP, un circuit multiplex cu 8 canale, M8, un osciloscop digital cu două canale cu memorie, OD, un minicalculator C și un inscriptor I. Se procedează astfel. Se întrerupe emitaătorul de unde rectangulare și se ajustează semnalul din locul de la distanță (îndepărat, ~ 10 km), în amplitudine și fază, astfel ca cele două semnale primite la receptor să dea rezultat nul. Apoi se cuplează emitaătorul de unde rectangulare și se înregistrează astfel semnalul dorit fără zgomot. În Fig. 9.17 sunt reprezentate rezultatele pentru H_z obținut în locul îndepărat (a), pentru H_z local în locul investigat (b) și pentru H_z din care s-a scăzut zgomotul (c), adică diferența dintre (b) și (a). Undele rectangulare provenite de la sursa controlată nu sunt unde plane, astfel că nu se poate determina simplu, ca mai sus, rezistența aparentă în funcție de frecvență. În acest caz, se compară curbele obținute experimental cu curbele calculate care sunt funcție de frecvență, de distanța emitaător-receptor și de rezistivitate.

9.6.3. Gradiometria magnetică aeropurtată

Topografia magnetică utilizată pe scară largă se efectuează cu magnetometre sau gradiometre aeropurtate la o distanță de aproximativ 300 m de suprafața pământului, cu care se detectează anomaliile câmpului magnetic static al pământului [30]. Dacă există o discontinuitate pe verticală în susceptibilitatea magnetică a două formații de roci, va exista o discontinuitate corespunzătoare în câmpul magnetic pământesc. Această discontinuitate determină un gradient pe verticală al câmpului magnetic pământesc deasupra pământului, care poate fi detectat cu ajutorul unui gradiometru de mare sensibilitate. Rocile vulcanice și metamorfice au susceptibilitate mare atunci când conțin magnetită (Fe_3O_4), ceea ce se întâmplă în mod obișnuit. Straturile sedimentare au o susceptibilitate mică. Prin gradiometria magnetică aeropurtată se pun în evidență frontierele dintre straturile sedimentare și rocile vulcanice. De asemenea, se pun în evidență rocile solide care conțin uraniu sau zăcămintele de aur. Așa după cum am menționat mai sus, metoda măsurării gradientului câmpului magnetic este superioară metodelor de măsură a câmpului magnetic, deoarece nu este sensibilă la variațiile regionale sau diurne ale câmpului magnetic datorate zgomotului. Până în prezent s-au utilizat, în aceste experiențe, numai magnetometre protonice sau cu pompaj optic cu sensibilitate de $10^{-12}T/m$. Raportul semnal/zgomot este 10:1. Cu un gradiometru aflat la o distanță de 300 m de suprafața pământului s-a detectat o diferență

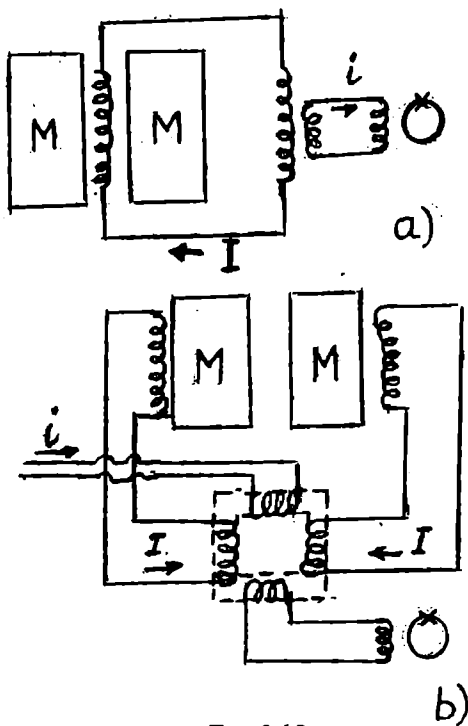


Fig. 9.18

de susceptibilitate în volum în jur de 5%. Cu un gradiometru cu DICS se obține o sensibilitate cu un ordin de mărime mai mare.

9.6.4. Gradiometru gravitațional cu supraconductori

Gradiometrul gravitațional constă din două mase supraconductoare impenetrabile, forțate să se deplaseze de-a lungul aceleiași axe, cu ajutorul unor resorturi, de asemenea din material supraconductor. O bobină supraconductoare, cu un singur strat de spire, este lipită pe fața uneia din cele două mase și vine în contact cu fața celeilalte mase (Fig. 9.18). Inductanța bobinei este foarte sensibilă cu distanța dintre cele două mase care, la rândul ei, depinde de gradientul câmpului gravitațional. Această bobină este conectată la cea de a doua bobină supraconductoare care este conectată la un DICS prin intermediul unui

transformator supraconductor. Un supracurent persistent I menține un flux constant în circuitul detector. Prin urmare, o variație a inductanței bobinei de detecție produce o variație a lui I și deci, un flux în DICS. Acesta se numește circuit de detecție diferențial. În Fig. 9.18 b se reprezintă un circuit de detecție numit comun [31]. În acest circuit se utilizează două bobine plate, fiecare apropiată de fața exterioară a uneia din cele două mase. Fiecare din cele două bobine este conectată la a doua bobină și acestea din urmă sunt cuplate la un DICS. Acest circuit poate detecta deplasarea comună a celor două mase. În plus, curenții persistenți care circulă prin fiecare din cele două bobine plate dau naștere unor forțe de restabilire a pozițiilor maselor; aceste forțe acționează în paralel cu forțele date de resorturile supraconductoare. Cei doi curenți persistenți I din bobinele plate și, prin urmare, constantele elastice ale celor două suspensii se pot modifica prin modificarea curentului i prin bobina înfășurată pe același tor cu celelalte bobine conectate la bobinele plate (a se vedea figura). Când cele două constante elastice sunt identice, dacă se aplică celor două mase o accelerație comună, nu se sesizează nici un semnal pe DICS. Gradiometrul gravitațional poate fi utilizat pentru detecția anomaliilor gravitaționale. Pentru a obține rezultate mai corecte, el poate fi fixat pe un satelit al Pământului. Până în prezent nu s-au obținut rezultate precise cu acest sistem.

9.7. Măsurarea curentului, tensiunii și rezistenței electrice. Comparatorul de curenți electrice

Aplicarea unui curent sau unei tensiuni pe o bobină introdusă în inelul supraconductor al DICS va modifica fluxul magnetic prin inel. Dacă fluxul cuplat la DICS este generat de către un curent care circulă prin inductanța de intrare, atunci sistemul funcționează ca un ampermetru (Fig. 9.19 a). Dacă fluxul este generat de către un curent produs de către o tensiune aplicată pe inductanță prin intermediul unui rezistor, semnalul de la ieșire este proporțional cu tensiunea aplicată și sistemul se utilizează ca un voltmetru (Fig. 9.19 b). Dacă tensiunea este generată de

către un curent care circulă prin rezistorul R_x , sistemul poate funcționa ca un ohmetru (Fig. 9.19 c). Dacă considerăm cazul când sistemul funcționează ca un ampermetru, variația fluxului aplicat datorită unei variații δi a curentului este

$$\delta\Phi = M\delta i$$

Pentru a estima variația minimă de curent ce poate fi detectată, ne referim la fluxul minim ce poate fi detectat, ca fiind egal cu fluxul de zgomot. Pentru dispozitivele de uz comercial, $\delta\Phi = 10^{-4}\Phi_0 \text{ Hz}^{-1/2}$ și $M = 1\mu\text{H}$, se obține variația minimă de curent detectabilă egală cu 10^{-13}A . Când sistemul funcționează ca voltmetru, variația fluxului datorată variației δV a tensiunii este

$$\delta\phi = M \frac{\delta V}{R}$$

Pentru aceleași valori ale parametrilor și sursă de impedanță mică, variația de tensiune detectabilă în lărgimea benzii de 1 Hz este 10^{-19}V . Desigur că, această sensibilitate nu poate fi întâlnită decât la

temperaturi joase și pentru surse cu impedanță de ordinul nanoohmilor. La temperatura camerei, zgomotul din mediul înconjurător este mult mai mare decât zgomotul intrinsec al DICS. Pe de altă parte, sensibilitatea în curent, în jur de 0,1 pA (corespunzând la 10^6 electroni/s), în cazul când sistemul funcționează ca ampermetru, poate fi atinsă chiar cu o sursă situată la temperatura camerei. Pe această bază s-a utilizat DICS pentru măsurători electrice precise în stabilirea voltului standard Josephson și rezistenței standard în efectul Hall cuantic.

Schema electrică a unui voltmetru cu DICS este reprezentată în Fig. 9.20. Curentul de eroare I_E care circulă prin inductorul L_i produce la ieșirea magnetometrului o tensiune de ieșire V_o care generează un curent de ieșire $I_F = V_o/R_F$. Legea lui Kirchoff pentru tensiuni aplicată circuitului de la intrare se scrie sub forma

$$V_x + R_1 I_E = R_2 \frac{V_o}{R_F}$$

La echilibru $I_E = 0$ și, prin urmare, între tensiunea de ieșire și tensiunea de intrare există relația

$$V_o = \frac{R_F}{R_2} V_x$$

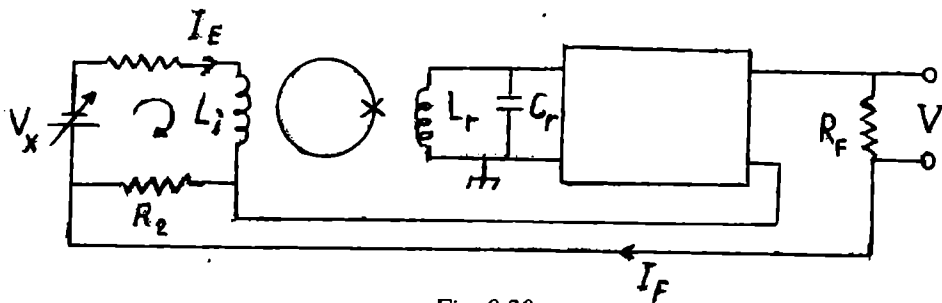


Fig. 9.20

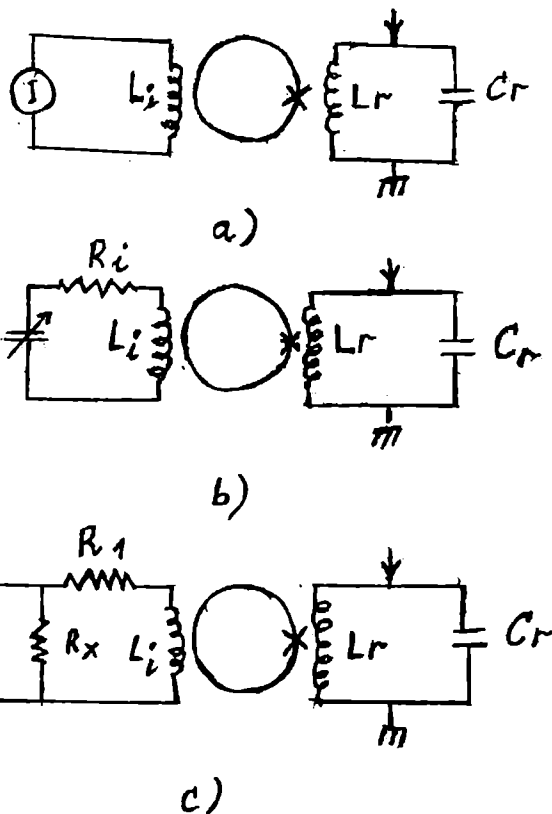


Fig. 9.19

În mod uzual, $R_F \gg R_2$ și se obține o amplificarea a tensiunii. Expresia de mai sus este valabilă în regim de curent continuu. Pentru un semnal sinusoidal de frecvență ω , raportul dintre tensiunea de ieșire și tensiunea de intrare este dat de expresia [32]

$$\frac{V_o}{V_x} = \frac{R_F}{R_2} \frac{1}{1 + j\omega(\tau_F + \tau_T R_1 / k_g R_2)}$$

unde $K_g = I_F / I_E$, $R_1 = R_1 + R_2$ și τ_F și τ_T sunt constantele de timp ale circuitului de reacție și, respectiv, de intrare. În limita $\tau_T R_1 / K_g R_2 \ll \tau_F$, lărgimea benzii de frecvență este determinată de τ_F . Sensibilitatea voltmetrului, în acest caz, este dată de tensiunea de zgomot,

$$\langle V_z^2 \rangle^{1/2} \cong \frac{\langle \Phi_z^2 \rangle^{1/2}}{K} \left(\frac{R_1}{L \tau_T} \right) \frac{V}{\sqrt{Hz}}$$

unde $\langle \Phi_z \rangle^{1/2}$ este fluxul de zgomot la intrarea DICS, L este inductanța DICS, k este constanta de cuplaj dintre L_i și L și s-a presupus $R_1 = R_1$. Pentru valorile uzuale, $\langle \Phi_z \rangle^{1/2} = 10^{-4} F_o / \sqrt{Hz}$ și $L = 10^{-9} H$, $R_1 = 10 \text{ W}$ și $\tau_T = 1 \text{ s}$, se obține

$$\langle V_z^2 \rangle^{1/2} \cong 2 \times 10^{-14} \frac{V}{\sqrt{Hz}}$$

Pentru măsurarea amplitudinii curentului, care are frecvența în domeniul microundelor DICS, este cuplat la un ghid de unde cu supraconductori [33]. În finalul acestui paragraf prezentăm comparatorul de curenți electrici cu DICS, propus în 1972. Un articol de sinteză, în acest domeniu, este prezentat în [34]. Pentru a înțelege principiul de funcționare al comparatorului, să considerăm un tub supraconductor (Fig. 9.21) prin interiorul căruia este trecut un fir prin care circulă un curent continuu i_1 . Acest curent generează un câmp magnetic care, pentru a fi expulzat din interiorul tubului, generează curenți de ecranare pe suprafața tubului care circulă pe suprafața interioară în sens invers curentului din fir și pe suprafața exterioară în același sens cu curentul din fir. Acești curenți de ecranare circulă în lungul generatoarei tubului, într-un sens pe suprafața interioară și în sens opus pe suprafața exterioară și astfel se realizează un circuit închis. Notăm că acești curenți circulă printr-un strat de la suprafață de o anumită adâncime (adâncimea de

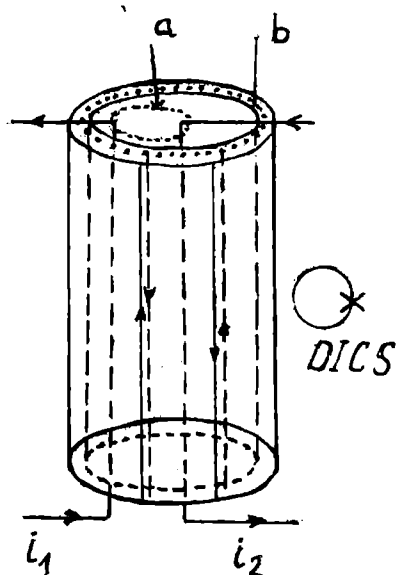


Fig. 9.21

penetrație London). Distribuția curentului de ecranare pe suprafața exterioară este independentă de poziția firului pe suprafața secțiunii transversale a tubului. Presupunem că introducem prin tub un al doilea fir, prin care circulă un curent variabil i_2 . Câmpul magnetic generat de supercurentul de pe suprafața exterioară a tubului se măsoară cu ajutorul unui DICS. Când curenții care circulă prin cele două fire sunt egali și de sens opus, acest câmp magnetic are valoarea zero. Deoarece distribuția curentului pe suprafața exterioară este independentă de pozițiile firelor în interiorul tubului și DICS este dispozitivul cel mai sensibil pentru detecția câmpului magnetic, se poate citi raportul unitate dintre cei doi curenți cu o precizie de 10^{-12} . Scriem legea lui Ampère pe conturul a din Fig. 9.21

$$\oint_a \vec{B} d\vec{l} = \mu_o (i_1 + i_2)$$

Dacă notăm cu i curentul care circulă prin suprafața interioară a tubului, atunci legea lui Ampère se scrie

$$\int_b \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (i_1 + i_2 + i)$$

deoarece câmpul magnetic este egal cu zero pe conturul b . Din ultima ecuație rezultă $i = -(i_1 + i_2)$. Din condiția de continuitate a curentului se obține că curentul i_s pe suprafața exterioară este egal și de sens opus cu i

$$i_s = -i = i_1 + i_2$$

Cu ajutorul DICS se detectează orice variație a câmpului exterior produsă

de variația lui i_1 sau i_2 . Construcția unui comparator cu DICS este reprezentată în Fig. 9.22. Tubul comparator, construit, în primele comparatoare din folie de plumb (acum poate fi construit din material supraconductor cu temperatură critică înaltă) este îndoit sub forma unui cerc (deci, nu este drept); cele două terminale ale tubului pătrunzând una în cealaltă și fiind izolate între ele. În interiorul acestui cerc este introdus un DICS rf cu două găuri, pentru măsurarea câmpului magnetic. Un fir care trece prin tub este construit dintr-o singură spiră circulară, iar celălalt fir poate fi construit din n spire circulare, de exemplu, 10, conectate în serie. În acest fel, pot fi comparați curenți cu raportul n între intensitățile lor. Firele sunt scoase prin tub și sunt izolate de tub (în locurile de traversare). Variația de câmp magnetic în exterior, generată de variațiile curentului, este cuplată la DICS prin intermediul unui transformator de flux, primarul transformatorului de flux având dimensiuni (circulare) similare cu ale tubului și fiind cuplat strâns cu acesta. Comparatorul cu DICS a fost utilizat în construcția voltului standard cu joncțiune Josephson [35] și a rezistențelor standard bazate pe efectul Hall cuantic [36]. Utilizând un comparator cu raportul 1:1, s-a construit un standard de tensiune secundar, portabil, într-un criostat cu heliu lichid, de un litru. El conține un fir supraconductor închis sub formă de cerc, prin care circulă un curent persistent cu ajutorul căruia poate fi stabilizată o sursă externă de curent folosind un comparator. Curentul extern stabilizat este trecut printr-un rezistor criogenic cu coeficient mic de variație cu temperatura. Căderea de tensiune pe rezistor este suficient de constantă în timp și poate fi utilizată ca tensiune de referință. Ea se calibrează inițial cu un standard de tensiune Josephson și apoi este transportată în diverse locuri și cu ajutorul ei se calibrează standardele de tensiune locale. Pentru un curent de 100 mA și rezistența de 100 Ω , tensiunea de calibrare este 1 V.

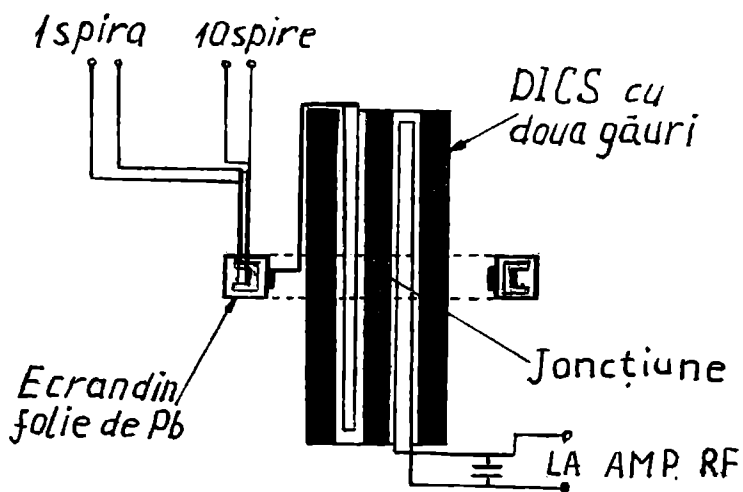


Fig. 9.22

9.8. Termometrul bazat pe zgomotul termic al unui dispozitiv Josephson sau al unui DICS.

Puterea de zgomot termic (Johnson) dată de o rezistență R este direct proporțională cu temperatura absolută T . Pentru lărgimea benzii de frecvență egală cu unitatea

$$S(\omega) = \frac{\langle V_z^2 \rangle}{R} = 4k_B T$$

Prin urmare, măsurând puterea de zgomot, se poate măsura temperatura T . S-au realizat două tipuri de termometre cu DICS: un termometru cu circuit convențional în care DICS este utilizat ca preamplificator (foarte sensibil) și un alt termometru în care rezistența de zgomot este inclusă în inelul DICS. Primul se numește termometru convențional cu DICS iar cel de al doilea se numește termometru Josephson. Termometrul convențional cu DICS bazat pe zgomot a fost realizat în anul 1973 (37). Schema instalației de măsură a acestui tip de termometru este reprezentată în Fig.9.23, unde G este un generator rf, F este un filtru trece bandă, V este un voltmetru integrator care înregistrează tensiunea medie pătratică, R este rezistența generatoare de zgomot. DICS este utilizat ca magnetometru lock-in flux care detectează fluctuațiile de curent din bobina conectată în paralel cu rezistorul generator de zgomotul ce trebuie măsurat. Semnalul de ieșire de la magnetometru trece printr-un filtru trece bandă (pentru a defini lărgimea benzii ce apare în formula lui Nyquist) la un voltmetru care înregistrează tensiunea pătratică medie. Curentul de zgomot dat de circuitul de intrare care conține rezistența R este

$$\langle i_z^2 \rangle = \frac{4k_B T}{R} \Delta f$$

unde Δf este banda de frecvență care este o caracteristică a circuitului de intrare și este egală cu

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi M}$$

Prin urmare, zgomotul din circuitul de intrare va induce în inelul DICS curentul de zgomot

$$\langle i^2 \rangle = \frac{4k_B T}{2\pi M}$$

Ieșirea DICS este baleată la intervale de timp $\Delta t \geq 1/\Delta f$ și se măsoară valoarea pătratică medie a semnalului de la ieșire și în acord cu relația de mai sus se determină T . Sensibilitatea instrumentului este limitată de zgomotul intern al DICS. Variația minimă de curent detectabil se obține din variația de energie minimă detectabilă

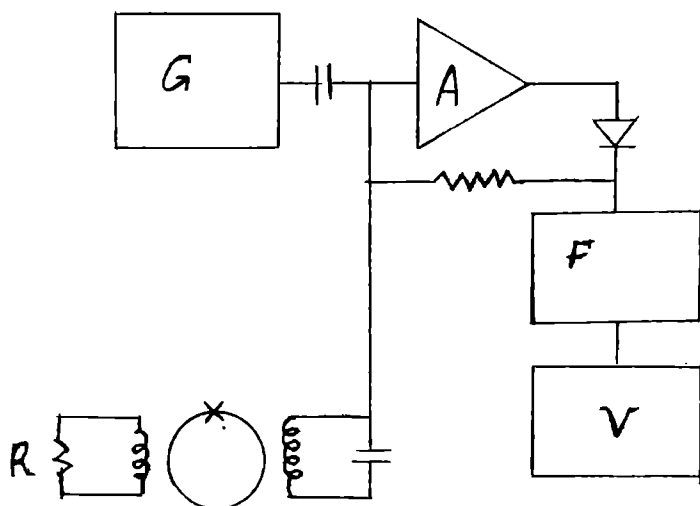


Fig. 9.23

$M(\Delta i)^2 = \Delta E = \Delta A \Delta f = 2k_B T_z$
unde T_z este temperatura echivalentă de zgomot a DICS. Pentru a măsura temperatura cu precizia $\Delta T = T_z$ la o temperatură T este necesar ca timpul de înregistrare

$$t > \frac{(k_B T)^2}{(\Delta A)^2 (\Delta f)^2}$$

Un DICS rf comercial care funcționează la frecvența de 20 MHz are sensibilitatea în jur de 10^{-28} J/Hz . Pentru a măsura temperatura de 100 mK cu o precizie de 1mK este necesar un timp de aproximativ 100 s.

Al doilea tip de termometru de zgomot, termometrul Josephson, constă dintr-un DICS în inelul căruia este inclus un rezistor R ceea ce permite ca joncțiunea Josephson să fie polarizată la o tensiune finită prin aplicarea unui curent continuu. În consecință va circula un curent cu o frecvență determinată de tensiunea de polarizare. Acest curent Josephson va fi modulată în frecvență de către tensiunea de zgomot Johnson. Determinarea lărgimii liniei acestei radiații permite determinarea temperaturii T. [38]. Pentru a înțelege principiul de funcționare să considerăm o joncțiune Josephson șuntată de un rezistor de rezistență mică R prin care circulă un curent constant i și polarizează joncțiunea la o tensiune (mediată în timp) V_0 . La 0 K curentul prin joncțiune va oscila cu frecvența $\omega_0 = 2\pi V_0 / \Phi_0$. La o temperatură T pe joncțiunea Josephson apare o tensiune de zgomot $V_z(\omega)$ la frecvența ω . Compunerea celor două tensiuni conduce la o tensiune modulată în frecvență de forma

$$C \sin\left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\omega} \sin \omega t\right)$$

unde C este o constantă și $\Delta\omega = 2\pi V_z / \Phi_0$, conform cu relația conșcută pentru efectul Josephson în curent alternativ. Lărgimea modulării este

$$r(\omega) = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{2\pi V_z}{\omega \Phi_0}$$

Calitativ, se poate considera că semnalul de ieșire pe frecvența $\omega_0 + \omega$ este semnificativ numai dacă $r(\omega) > 1$. Diferența dintre ω_1 definită prin relația $r(\omega_1) = 1$ și frecvența ω_0 poate fi considerată ca lărgime efectivă a liniei, Δf ,

$$\Delta f = \frac{2\omega}{2\pi} = \frac{2V_z}{\Phi_0} = \frac{2}{\Phi_0} (4k_B TR \Delta f)^{1/2}$$

Se obține

$$\Delta f = \frac{16k_B TR}{\Phi_0^2}$$

Prin urmare, lărgimea benzii spectrului fluctuațiilor termice este proporțională cu temperatura. Măsurând lărgimea benzii se măsoară temperatura. Schema instalației de măsură este reprezentată în Fig.9.24. unde s-au utilizat următoarele notații: R_s -rezistența șunt a DICS, G-generator rf de 30 MHz, A-amplificator rf de 30 MHz ± 5 kHz, AA-amplificator audio de 5 kHz, FM-frecvențmetru, BS-bobină de șoc, TT-transformator toroidal (39). Recent s-au realizat balometre cu $yB_{a2} Cu_3 O_7 - \delta$ (40).

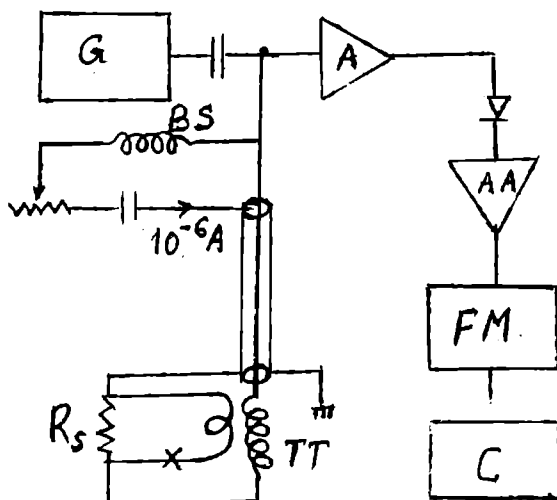


Fig. 9.24

CAPITOLUL X

APLICAȚIILE DICS ȘI JONȚIUNILOR JOSEPHSON ÎN CIRCUITELE DIGITALE

10.1. Criotronul. Criotronul tunel

Comutatorul de curent cu supraconductori, numit criotron, a fost inventat în anul 1956 [1]. Așa cum se observă în Fig. 10.1 el constă dintr-un fir supraconductor S din tantal, cu diametrul de 2 mm pe care este înfășurată, izolată de acesta, o bobină din fir de niobiu cu diametrul de 0,7 mm. Supraconductorul S, care joacă rol de poartă, trece în starea normală la aplicarea unui câmp magnetic prin trecerea unui curent prin bobina de control. Construcția circuitelor logice bazate pe criotron a fost stopată în anul 1965 deoarece acest dispozitiv are timp mare de comutare (de ordinul microsecundelor). Viteza de funcționare este limitată de doi factori: existența unei călduri latente la tranziția supraconductor-metal normal și timpul finit de deplasare a frontierelor fazelor între domeniile de nucleație.

Un pas înainte în această direcție a fost făcut prin realizarea în 1966 a criotronului tunel de către Matisoo [2]. Acesta conține o joncțiune Josephson și se bazează pe tranziția joncțiunii din starea de tensiune zero în starea de tunelare uniparticulă (tensiune finită), la aplicarea unui câmp magnetic. În acest caz nu intervin tranziții de la faza supraconductoare la faza normală și timpul de comutare este mai mic de 1 ns. În practică, pentru a realiza comutarea, peste joncțiunea Josephson, care joacă rol de poartă, se suprapune o linie (bandă) de control supraconductoare care este izolată electric față de joncțiune. Câmpul magnetic generat de curentul de control I_c modulează curentul maxim Josephson I_{J0} . Când curentul $I_{J0} = I_0$ la $V = 0$ este micșorat sub valoarea I_p determinată de polarizare, de către câmpul magnetic indus de curentul de control I_c , are loc comutarea pe curba de tunelare uniparticulă la tensiunea $V = 2\Delta/q$ mai precis în punctul de intersecție al curbei de tunelare uniparticulă cu dreapta de sarcină externă (comutarea din punctul A în punctul B pe Fig. 10.2), Construcția

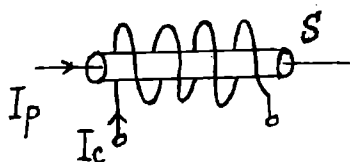


Fig. 10.1

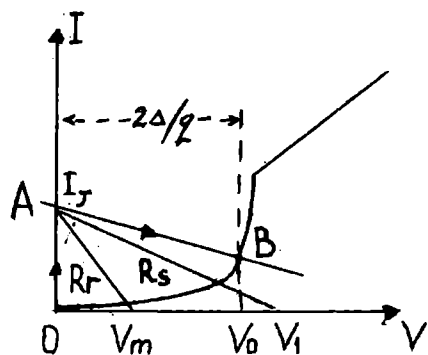


Fig. 10.2

criotronului tunel este reprezentată în Fig. 10.3. Joncțiunea Josephson, construită din Sn-SnO_x-Sn are dimensiunile 0,13 x 0,13 mm² și susține un curent maxim de 1 mA la 1,7 K. Pentru micșorarea inductanței stratelor subțiri de Sn, joncțiunea se depune pe un strat subțire de Pb și este izolată de acesta cu un strat subțire de rezist. Peste joncțiune se depune un strat izolator de SiO și apoi peste acesta se depune o bandă din Pb care reprezintă linia de control. În următoarele două decenii după descoperirea criotronului tunel s-a depus un mare efort pentru perfecționarea tehnologiei supraconductorilor în special de către laboratoarele IBM din New York și Zürich. Rezultate mai bune s-au obținut prin utilizarea în locul unei singure joncțiuni ca în experiența lui Matisco, a două joncțiuni încorporate într-un inel

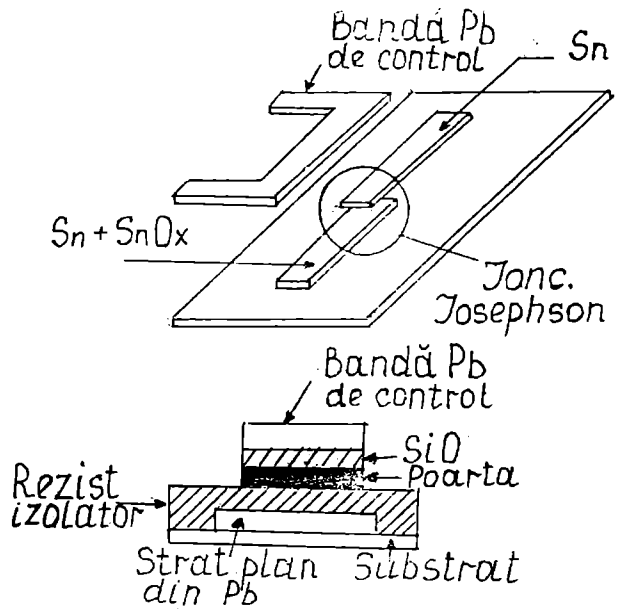


Fig. 10.3

supraconductor. Construcția acestui interferometru este similară cu a unui DICS de curent continuu. Se mărește în acest fel sensibilitatea curentului de control deoarece inelul are inductanță mare (arie mare) și se micșorează timpul de comutare prin micșorarea cât mai mult posibil a capacității joncțiunii. Acest dispozitiv (interferometru) de comutare îl vom discuta într-unul din paragrafele următoare. Revenind la criotronul tunel, menționăm că există mai multe moduri de comutare ale joncțiunii Josephson în funcție de rezistența de sarcină externă. Aceste moduri de comutare se referă în special la comutarea inversă a porții din starea de tensiune finită în starea de tensiune zero. Când rezistența de sarcină are o astfel de valoare încât dreapta de sarcină intersectează curba de tunelare uniparticulă la o tensiune mai mică decât V_m (Fig. 10.2) joncțiunea comută înapoi în starea de tensiune zero independent de valoarea curentului I_c de control. Această comportare de „auto-revenire” se datorează instabilității caracteristicii I-V la tensiuni mai mici decât V_m . V_m se exprimă în funcție de parametrii caracteristici ai joncțiunii definiți în circuitul echivalent din Fig. 10.4 a. Pentru $\beta_j < 0,2$ se obține

$$V_m \leq \frac{4}{\pi} R I_o \beta_c$$

unde I_o este curentul critic al joncțiunii și

$$\beta_c = \frac{1}{\omega_c R C}; \quad \omega_c = \left(\frac{2q I_o}{\hbar C} \right)^{1/2}$$

Al doilea mod de comutare are loc atunci când rezistența de sarcină este mai mare decât R_s (Fig. 10.2). În acest caz dioda comută în punctul de tensiune corespunzător intersecției liniei de sarcină cu curba de tunelare uniparticulă și rămâne în această stare stabilă. Acest mod de comutare se numește „de zăvorâre”. Pentru ca joncțiunea să fie adusă în starea de tensiune zero trebuie să micșorăm curentul de poartă I_j la o asemenea valoare încât dreapta de sarcină să intersecteze curba de tunelare uniparticulă sub valoarea V_m , corespunzătoare regimului de auto-revenire.

Al treilea mod de comutare are loc atunci când rezistența de sarcină R are valoarea $R_r < R < R_s$. În acest caz revenirea la starea inițială are loc imediat ce curentul de control I_c este întrerupt. Acest mod de comutare se numește de „nezăvorâre” și poate fi înțeles având în vedere că întreruperea curentului de control conduce la creșterea curentului maxim Josephson și în

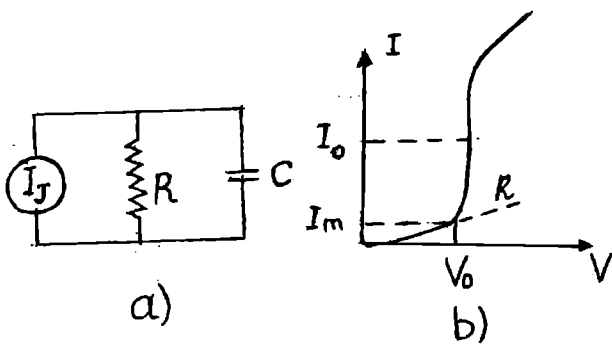


Fig. 10.4

consecință la creșterea amplitudinii oscilațiilor tensiunii efectului Josephson alternativ. Aceste oscilații apar și în celelalte moduri de comutare, însă în acest mod de comutare tensiunea instantanee pe joncțiune atinge valoarea zero și se menține la această valoare [3]. o evaluare grosomodo a timpului de comutare din starea de tensiune zero în starea de tensiune $V_0 = 2\Delta/q$ se poate face asociind acest timp cu timpul de încărcare a

capacității C a joncțiunii la o tensiune V_0 de la o sursă de curent constant I_J . Circuitul echivalent simplu este reprezentat în Fig. 10.4 a. Rezistența R în domeniul $0 < V < 2\Delta/q$ are valoarea medie $R = 2\Delta/qI_m$ (Fig. 10.4 b). Tensiunea V pe capacitatea C depinde de timp în acord cu relația

$$I(t) = I_J R (1 - e^{-t/RC})$$

La $V = V_0$ are loc o modificare puternică a rezistenței și timpul de comutare a joncțiunii este dat de relația

$$t = -RC \log \left(1 - \frac{V_0}{I_J R} \right)$$

Deoarece $V_0 \ll I_J R$, rezultă

$$t = \frac{V_0 C}{I_J} = \frac{2C\Delta}{qI_c}$$

V_0 este determinată de lărgimea benzii interzise a supraconductorului și pentru un supraconductor dat micșorarea timpului de comutare se obține prin micșorarea capacității joncțiunii și creșterea curentului I_J . Capacitatea joncțiunii este invers proporțională cu grosimea d a acesteia pe când curentul crește exponențial cu scăderea d . Deci trebuie satisfăcute simultan aceste două condiții: dimensiuni minime ale joncțiunii și densitate maximă de curent. Pentru $V_0 = 1 \text{ mV}$, $C = 10^{-11} \text{ F}$, $I_J = 10 \text{ mA}$ se obține $t = 1 \text{ ps}$.

10.2. Circuite basculante

Un circuit basculant este reprezentat în Fig. 10.5. Acționând alternativ asupra celor două porți de comutare cu ajutorul unor linii de control, curentul de control poate fi deviat dintr-o ramură în cealaltă a inelului. Diverse stări în funcționarea dispozitivului sunt reprezentate în Fig. 10.6. Dacă cele două ramuri ale inelului au aceeași inductanță și dacă cele două joncțiuni Josephson A și B sunt identice curentul I care circulă prin dispozitiv se divide în două părți egale cu $I/2$ în cele două ramuri ale joncțiunii (Fig. 10.6 a). Presupunem I mai mic decât curentul maxim I_0 al unei joncțiuni Josephson, astfel că joncțiunile funcționează la tensiune zero.

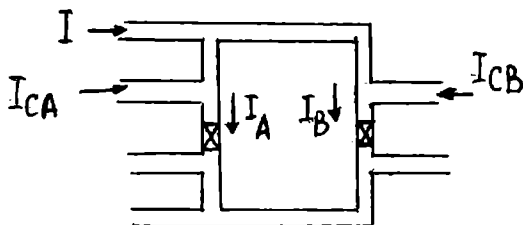


Fig.10.5

Presupunem acum că aplicăm pe linia de control a joncțiunii A un puls de curent I_{cs} care prin efectul câmpului magnetic asociat micșorează curentul Josephson I_0 la o valoare mai mică decât $I/2$. Aceasta conduce la comutarea joncțiunii A din starea de tensiune $V = 0$ în starea de tensiune $V_0 = 2\Delta/q$. Datorită apariției rezistenței în

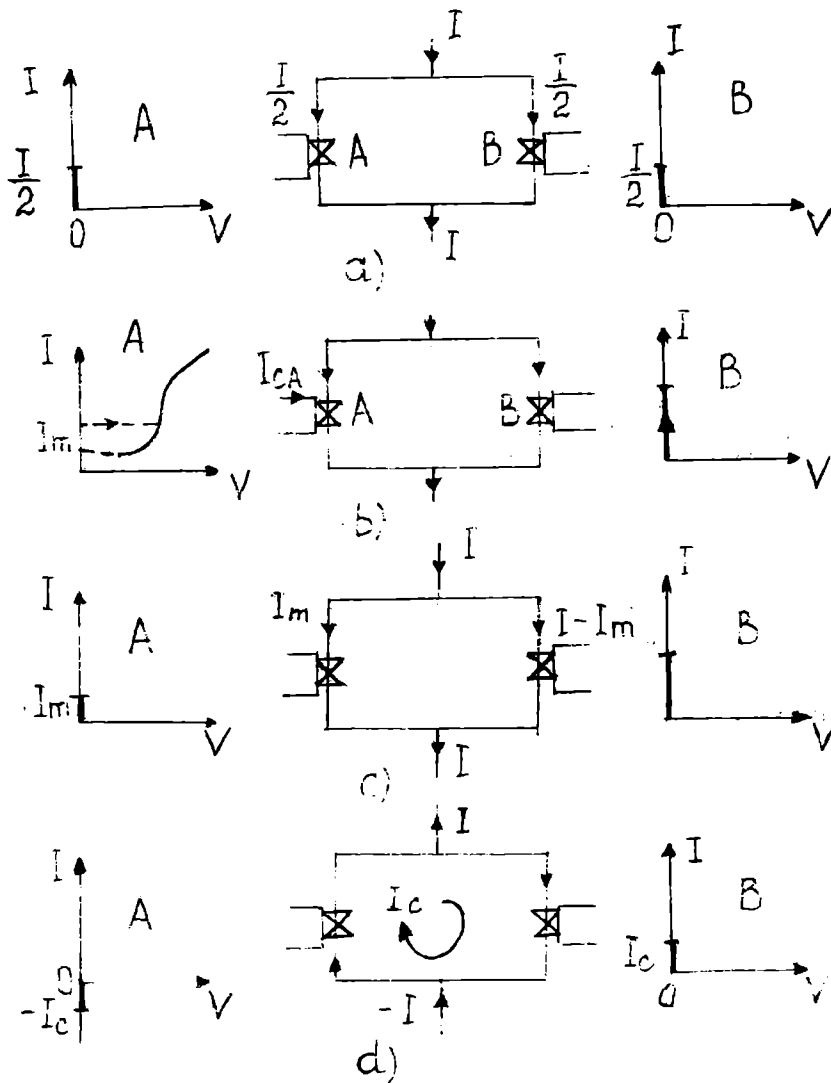


Fig. 10.6

ramura A curentul va scădea pe această ramură și va crește pe ramura B. Prin urmare, curentul este deviat din ramura A în ramura B. Îndată ce curentul este micșorat sub valoarea I_m joncțiunea A comută înapoi în starea Josephson însă prin ea circulă curentul I_m care este mai mic decât cel din starea inițială (Fig. 10.6 b, c). Chiar după îndepărtarea pulsului de curent de control sistemul rămâne în această nouă stare, care este de asemenea stabilă datorită conservării fluxoidului în inelul supraconductor. Acționând cu un puls de curent I_c asupra liniei de control a joncțiunii B în mod similar se poate devia curentul din ramura B în ramura A, ș.a.m.d. Prin urmare prin intermediul unui puls de curent extern, curentul poate fi deviat dintr-o ramură în cealaltă. Pentru a calcula timpul de deviere a curentului dintr-o ramură în cealaltă, considerăm circuitul echivalent simplu al circuitului basculant care este reprezentat în Fig. 10.7. El constă dintr-o sursă de tensiune V_0 conectată în serie cu rezistența dinamică R_d a joncțiunii și cu inductanța L a inelului. Curentul prin circuit este dat de expresia

$$I(t) = \frac{V_0}{R_d} (1 - e^{-(R_d/L)t})$$

Rezistența R_d la $V = V_0$ este mai mică decât $10^{-3} \Omega$ astfel că V_0/R_d este mai mare decât curentul δI transferat dintr-o ramură

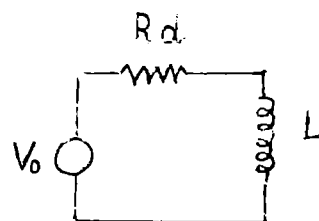


Fig. 10.7

în cealaltă. În aceste condiții relația de mai sus se simplifică și se obține pentru timpul de deviere t expresia

$$t = \frac{\delta IL}{V_0} = \frac{qL\delta I}{2\Delta}$$

Pentru $I = 10 \text{ mA}$, $V_0 = 1 \text{ mV}$, $L = 5 \times 10^{-12} \text{ H}$ se obține $t = 50 \text{ psec}$.

10.3. Dispozitive interferometrice de comutare

Creșterea densității de împachetare a circuitelor logice necesită micșorarea lărgirii liniilor (benzilor subțiri depuse) și în consecință determină creșterea rezistenței acestora. Creșterea rezistenței limitează densitatea curentului de control astfel că s-a trecut la utilizare dispozitivelor interferometrice ca dispozitive de comutare deoarece acestea au sensibilitate mai mare la câmp magnetic și deci necesită un curent de control mai mic. În Fig. 10.8 a se reprezintă circuitul echivalent al unui circuit interferometric de comutare care conține două joncțiuni. O caracteristică importantă a acestui circuit este dependența curentului maxim la tensiunea zero, I_p , care poate fi susținut de către o joncțiune, de câmpul magnetic aplicat. Această dependență se reprezintă de fapt în funcție de curentul I_c , numit și curent de control, care generează câmpul magnetic. Caracteristica $I_p = f(I_c)$ se numește caracteristică de prag. Această caracteristică se reprezintă în Fig. 10.8 b. Se observă o dependență periodică a lui I_p de I_c . Cei trei lobi (fiecare lob din figură corespunde unui număr n de fluxoni) se suprapun parțial. Cele două stări ale circuitului logic

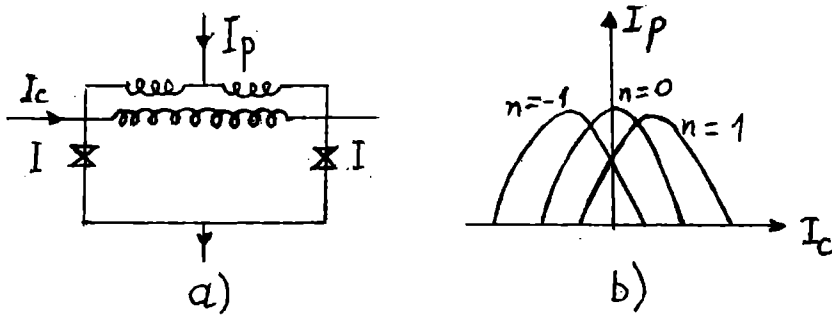


Fig. 10.8

corespund trecerii curentului printr-una sau cealaltă joncțiune. Răspunsul periodic al curentului critic I_p (în funcție de I_c) arată că această configurație poate funcționa ca o unitate de memorie, în care diferența dintre cele două stări corespunde unei variații

cu o cantă de flux a fluxului prin inel. Sensibilitatea interferometrului crește cu creșterea produsului LI_0 . Pe de altă parte, creșterea produsului LI_0 conduce la creșterea suprapunerii lobilor în curba de prag (Fig. 10.8 b) și în consecință se micșorează regiunea (în planul I_c - I_p) în care dispozitivul logic comută într-o stare de tensiune finită, ceea ce impune funcționarea sa la valori mai mari ale curentului. Pentru a se înlătura suprapunerea lobilor în caracteristica I_p - I_c , s-a trecut la construirea interferometrului cu trei joncțiuni [4]. Circuitul echivalent al acestui dispozitiv de comutare este reprezentat în Fig. 10.9 a, iar caracteristica I_p - I_c este reprezentată în Fig. 10.9 b. Curenții prin cele trei joncțiuni se află în raportul 1:2:1. Ulterior s-au proiectat interferometre cu mai mult de patru joncțiuni pe celula unitate [5].

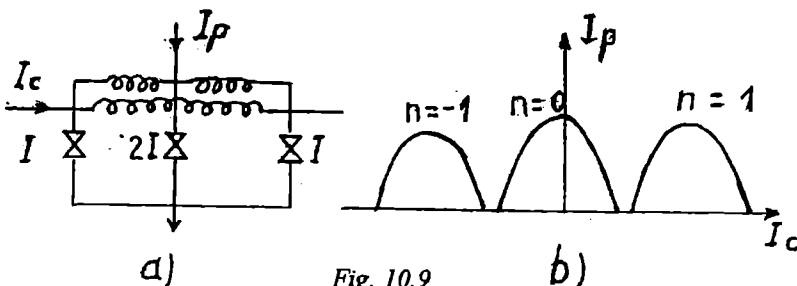


Fig. 10.9

10.4. Celule de memorie

Persistența curentului într-un inel supraconductor a condus la concluzia utilizării acestuia ca unitate de memorie. S-au construit celule de memorie bazate pe circuitele basculante cu joncțiuni Josephson precum și memorii bazate pe stocarea unei cuante de flux în interferometru. Diferența dintre cele două tipuri de celule constă în valorile diferite ale curentului critic I_0 și ale inducției L . În primul caz $LI_0 \gg \phi_0$ (cuanta de flux magnetic) și datorită numărului mare de cuante de flux din inel caracterul discret al fluxului nu prezintă importanță. În cel de al doilea caz $LI_0 \sim \phi_0$ și fluxul este stocat în inel sub forma unei singure cuante de flux. Vom discuta pe rând aceste două tipuri de celule de memorie.

10.4.a. Celula de memorie cu circuit basculant

Modul de stocare a informației în circuitul basculant este reprezentat în Fig. 10.6 d. Simbolul logic „1” este reprezentat de exemplu prin circulația curentului prin inel în sensul acelor de ceasornic iar simbolul logic „0” prin circulația curentului în sens invers acelor de ceasornic. Celula de memorie mai conține în plus față de circuitul basculant două joncțiuni pentru înscriere și o joncțiune pentru citire nedestructivă [6]. Dimensiunile inelului supraconductor sunt 20 x 25 mils, rata de repetiție mai mare decât 1 GHz și energia disipată pentru înscrierea unui ciclu este mai mică decât 2 fJ.

10.4.b. Celula de memorie cu stocarea unei cuante de flux

În interferometrul cu două joncțiuni (Fig. 10.8) pentru $\beta = 2\pi LI_0/\phi_0 = 1$, caracteristica de prag $I_p - I_c$ prezintă o suprapunere a structurii de vortexuri așa cum se reprezintă în Fig. 1.8 b. În regiunile de suprapunere sunt posibile stările de flux $n\phi_0$ și $(n+1)\phi_0$. Să considerăm zona de suprapunere a stărilor de flux 0 și 1, care corespund stărilor simbolurilor logice 0 și 1 (Fig. 10.10). Când informația este stocată în celulă se stabilește o valoare a curentului de control I_{cr} . Să presupunem că celula se află în starea 0 și dorim să înscriem starea 1 (WR 1). În acest caz curentul de control trebuie modificat astfel ca să fie intersectată linia de prag a stării $n = 0$ de către linia $n = 1$ și fluxul prin inel se modifică cu o cantă de flux. După restabilirea curentului la valoarea inițială I_{cr} , în zona de suprapunere, celula rămâne în starea $n = 1$. Pentru a înscrie starea zero (WR 0) se procedează similar, însă se schimbă sensul curentului de control. În procesul de înscriere, asociat cu tranziția de la o stare de flux la altă stare de flux, apare un salt de tensiune (de fapt, puls de tensiune) pe dispozitiv, imediat ce curba de curent a fost intersectată. Acest puls de tensiune dispare în timp de câteva zeci de ps. Dacă tranziția de la o stare de flux la altă stare de flux se face la o valoare a curentului de prag I_p mai mare decât o valoare critică I_{cr} (Fig. 10.10) intersecția curbei de prag lasă celula în stare de tensiune finită, permanent.

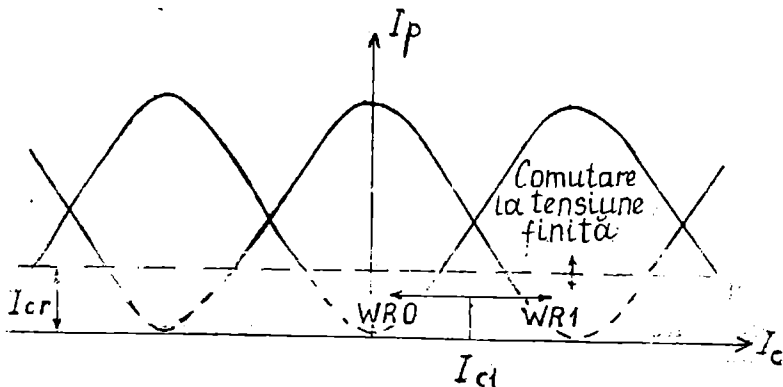


Fig. 10.10

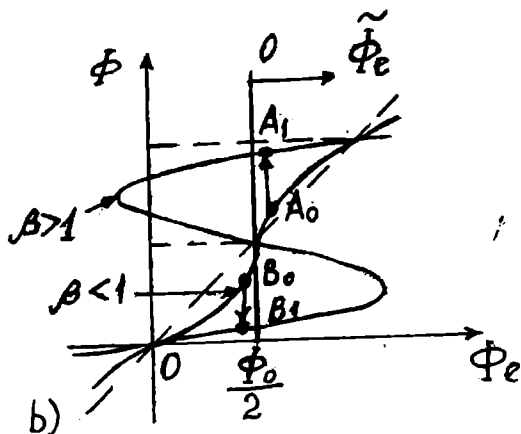
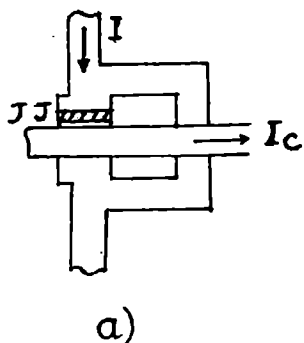


Fig. 10.11

O altă unitate de memorie bazată pe stocarea unei cuante de flux este quantron-ul parametric [7]. Un quantron conține o singură joncțiune în inel și este reprezentat în Fig. 11.11 a. Curentul de control I_c micșorează curentul critic prin joncțiune și prin urmare, valoarea parametrului β , de unde și numele de

quantron parametric. Fluxul extern ϕ_e este generat de către curentul I . Să presupunem că inițial $\beta < 1$, valoare determinată de curentul de control. Dacă $\phi_e = \phi_0/2$, quantronul se găsește în punctul A corespunzător stării $\phi = \phi_0/2$. Printr-o ușoară creștere a lui I se poate ajunge în punctul A_0 de pe curba fără histerezis cu $\beta < 1$. La întreruperea curentului de control parametrul β crește la o valoare mai mare decât unitatea și sistemul trece în punctul A_1 corespunzător stării stabile $\phi = \phi_0$ de pe curba de histerezis. Printr-o operațiune simetrică se poate aduce quantronul în starea $\phi = 0$. Cele două stări stabile $\phi = 0$ și $\phi = \phi_0$ corespund simbolurilor logice 0 și 1.

10.5. Circuite logice

Circuitele cu joncțiuni Josephson pot fi utilizate ca circuite de tocare în celulele de memorie sau ca circuite logice. În 1983 IBM a dezvoltat o tehnologie de construcție a calculatoarelor pe bază de joncțiuni Josephson din aliaj de Pb-In. Rezultatele nu au fost la înălțimea așteptărilor datorită toleranței parametrilor circuitelor din Pb-In. În plus, porțile cu dispozitive din GaAs au vitezele de comutare comparabile cu porțile construite cu joncțiuni Josephson, deși acestea din urmă disipă o putere de 10^4 ori mai mică.

Interesul în construcția calculatoarelor cu joncțiuni Josephson a crescut în Japonia, unde există un program coordonat de către guvern într-un număr de universități și instituții comerciale. Au fost realizate microprocesoare cu cipuri RAM de 1 kbit [8, 5]. Actualmente este foarte clar că se vor construi calculatoare cu dispozitive Josephson, cu viteză foarte mare de comutare.

Înainte prezantării circuitelor logice Si, SAU, Nu etc., vom reaminti unele probleme pentru ca acest paragraf să poată fi citit independent. Joncțiunea Josephson poate comuta dintr-o stare cu tensiune zero corespunzătoare poziției NU într-o stare cu tensiune diferită de zero, corespunzătoare poziției DA, cauzată de creșterea curentului peste valoarea critică I_0 . Această comutare poate fi obținută prin creșterea curentului I_p (curentul porții) prin joncțiune sau prin micșorarea curentului critic la aplicarea unui câmp magnetic. Cele două posibilități de control sunt reprezentate în Fig. 10.12 pentru o joncțiune conectată la o sursă de curent. Dacă curentul de alimentare crește peste valoarea I_0 critică I_0 are loc

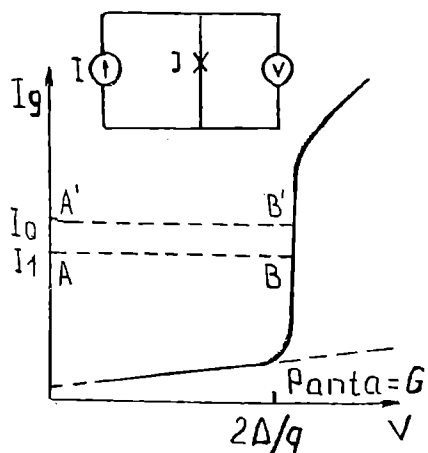


Fig. 10.12

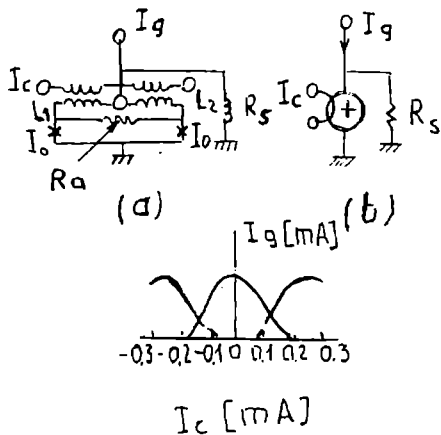


Fig. 10.13

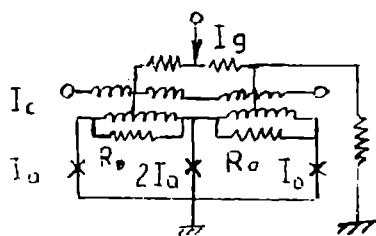


Fig. 10.14

comutarea din A în B. Dacă curentul de alimentare este fixat la valoarea I_1 și prin aplicarea unui câmp magnetic se micșorează curentul critic I_0 sub valoarea I_1 , atunci are loc comutarea din A în B. În circuitele digitale se utilizează ambele tipuri de comutări. O singură joncțiune Josephson nu poate fi folosită ca poartă logică deoarece nu există izolație între circuitul de ieșire și circuitul de intrare. Dispozitivele logice Josephson care permit o izolare adecvată sunt următoarele: DICS cuplate magnetic, dispozitive cu izolație cuplate direct, dispozitive cu curent de injecție [9-11]. O caracteristică importantă a acestor dispozitive este dependența curentului maxim la tensiune zero, I_g , care poate fi susținut de către dispozitiv, de câmpul magnetic aplicat. Această dependență ce reprezintă de fapt în funcție de curentul I_c care produce câmpul magnetic, numit și curent de control. Caracteristica $I_g = f(I_c)$ se numește caracteristică de prag. DICS cu cuplaj magnetic se reprezintă în Fig. 10.13 a iar simbolul utilizat în circuit este reprezentat în Fig. 10.13 b. El constă din două joncțiuni conectate în paralel prin intermediul inductanțelor L_1 și L_2 care sunt cuplate magnetic la linia de control prin care trece curentul I_c . Rezistența R_s se utilizează în mod obișnuit pentru amortizarea rezonanțelor interne ale DICS. Curentul porții I_g se distribuie în cele două ramuri ale DICS în raport invers proporțional cu inductanțele lor. Când se aplică pe linia de control un curent I_c acest induce un curent circulator în DICS și la o anumită valoare a sa curenții care trec prin joncțiuni depășesc valorile critice, joncțiunile comută în starea de tensiune diferită de zero și curentul porții este îndreptat prin rezistența de sarcină R_s . Are loc astfel comutarea din starea logică 0 în starea logică 1 [12]. Caracteristica de prag a dispozitivului este reprezentată în Fig. 10.13 c. Comportarea optimă a dispozitivului are loc atunci când $L_1 = L_2$ și curenții critici prin cele două joncțiuni sunt egali. Deoarece acest dispozitiv are coeficient mic de amplificare, se folosesc mai multe metode de mărire a acesteia. Una din acestea constă în folosirea interferenței cuantice între mai multe joncțiuni Josephson cuplate paralel în DICS. În Fig. 10.14 este reprezentat dispozitivul cu trei joncțiuni $I_0:2I_0:I_0$ folosit de IBM în circuitele digitale. Dispozitivul cu mai multe joncțiuni are amplificare mare deoarece curentul de control se cuplează cu mai multe circuite închise DICS.

În dispozitivul cu izolație, cuplat direct, curentul de control trece direct prin dispozitiv, nefiind cuplat cu acesta prin intermediul unui transformator așa cum se procedează în cazul prezentat anterior. Acest procedeu elimină transformatorul care consumă mult însă este necesară o altă izolație. Realizarea acestui tip de izolare se înțelege urmărind principiul de funcționare al dispozitivului, reprezentat în Fig. 10.15. Inițial joncțiunile se

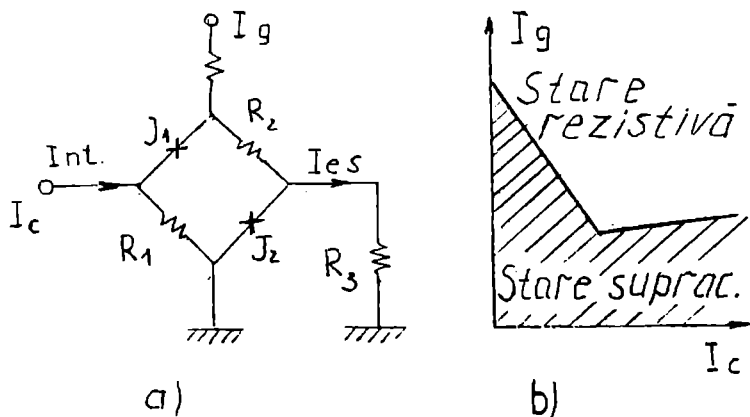


Fig. 10.15

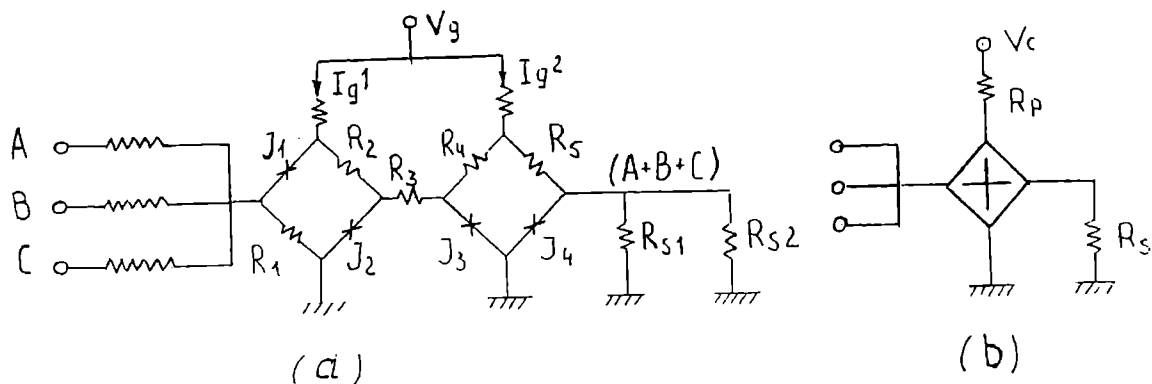


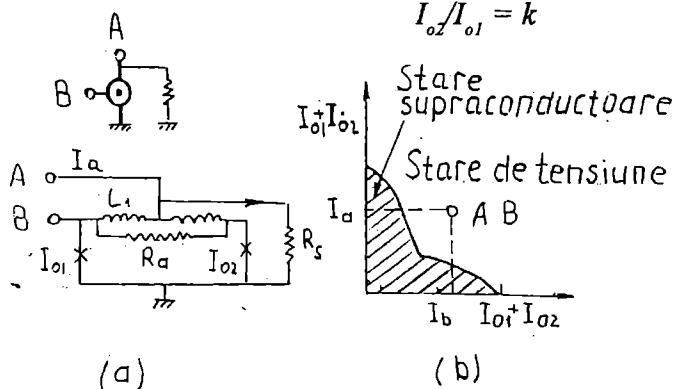
Fig. 10.16

află în starea de tensiune zero (stare supraconductoare) și pe dispozitiv se aplică curentul I_c de poartă. Când se aplică curentul I_c de control, acesta se adaugă la curentul de polarizare din J_2 și se scade din curentul de polarizare din J_1 . Curentul în J_2 crește peste valoarea critică și această joncțiune comută în starea de tensiune diferită de zero. Rezultând o impedanță mare în ramura din dreapta curentului I_c trece prin ramura din stânga prin J_1 și R_1 deoarece $R_2 \gg R_1$. Rezistența mare a lui J_1 împiedică curentul porții să treacă prin linia de comandă de la intrare și se realizează astfel izolația între circuitul de ieșire și cel de intrare. Caracteristica de prag a dispozitivului este reprezentată în Fig. 10.15 b. O consecință a injecției directe a curentului de comandă este că dispozitivele din sarcină nu pot fi conectate în serie, pe o singură linie de ieșire, ci în paralel. Deci dacă se conectează la ieșire trei dispozitive este necesar un curent de trei ori mai mare. Pentru a crește curentul de ieșire se folosește circuitul din Fig. 10.16, care este un circuit SAU. În Fig. 11.16 b este reprezentat simbolul său utilizat în circuit. El constă din patru joncțiuni Josephson din care J_1 și J_2 îndeplinesc aceleași funcții de izolare și de canalizare a curentului ca mai înainte. Când J_1 și J_2 sunt comutate în starea de tensiune diferită de zero, curentul de ieșire din primul etaj trece prin R_3 și determină comutarea lui J_3 în starea de tensiune diferită de zero. Curentul J_{g2} este total deviat prin ramura J_4 , cauzând comutarea lui J_4 în starea de tensiune diferită de zero. Având J_3 și J_4 în starea de rezistență mare, atât I_{g1} cât și I_{g2} sunt deviați la ieșire făcând posibilă conectarea la ieșire a două dispozitive în paralel. Un alt tip de dispozitiv logic propus este dispozitivul cu injecție de curent, reprezentat în Fig. 10.17 a. Cu acest circuit se realizează funcția SI. El constă dintr-un DICS cu două joncțiuni și nu are linie de control. Inductanțele L_1 și L_2 și curenții critici I_{o1} și I_{o2} ai joncțiunilor Josephson J_1 și, respectiv, J_2 au valorile determinate de următoarele relații [13]

$$L_1 I_{o1} = L_2 I_{o2}$$

$$(L_1 + L_2) I_{o2} = \phi_0$$

$$I_{o2} / I_{o1} = k$$



unde k este cuprins între 3 și 5 și ϕ_0 este cuanta de flux. Prima condiție de mai sus arată că curentul I_a acționând singur trebuie să atingă valoarea $I_{o1} + I_{o2}$ pentru ca interferometrul să treacă în starea V diferită de zero. A doua condiție de mai sus arată că I_b trebuie să atingă de asemenea valoarea $I_{o1} + I_{o2}$ pentru comutarea

Fig. 10.17

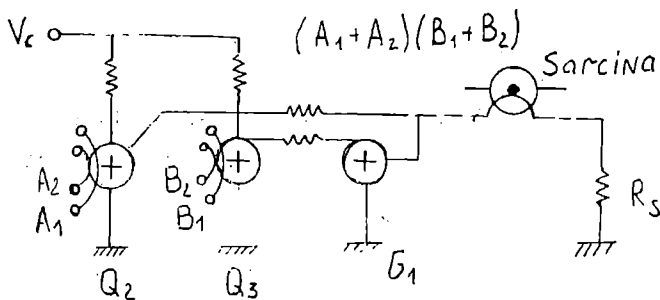


Fig. 10.18

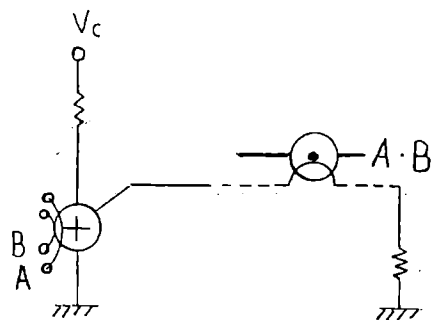


Fig. 10.19

circuitului. În Fig. 10.17 b este reprezentat curentul I_a necesar pentru comutare în funcție de curentul I_b atunci când ambele intrări sunt polarizate. Pentru orice valori în afara regiunii hașurate dispozitivul comută. Se observă din figură că procesul de comutare poate avea loc atunci când I_a și I_b au valoarea $0,3(I_{o1} + I_{o2})$. Prin urmare, dispozitivul comută mai ușor când ambele intrări sunt polarizate, decât atunci când este numai una, permițând astfel realizarea funcției SI. Dispozitivul cu injecție de curent nu asigură izolația circuitului de ieșire față de cel de intrare și de aceea el se utilizează împreună cu unul din celelalte dispozitive care asigură această izolație, pentru a realiza funcția SI. Un asemenea circuit Si cu două intrări este reprezentat în Fig. 10.18. Pentru realizarea izolației conține două DICS, Q_2 și Q_3 . Curenții de ieșire din Q_2 și Q_3 sunt injectați în dispozitivul cu injecție de curent G_1 . Dispozitivul G_1 trece în starea de tensiune diferită de zero numai atunci când Q_2 și Q_3 au comutat în starea „DA”, realizându-se astfel funcția $(A_1 + A_2)(B_1 + B_2)$. În Fig. 10.19 este reprezentat un circuit SAU cu două intrări. El constă dintr-un DICS cu trei joncțiuni și două linii de control; oricare din acestea două când este activată permite comutarea DICS în poziția DA [14].

10.6. Conversia analog-digitală

Un convertor analog-digital este reprezentat în Fig. 10.20 [15]. El constă din două DICS din straturi subțiri de inductanță mică (20 pH) alimentate în serie cu curent electric de la un circuit de tact. Cele două DICS-uri alcătuiesc împreună un comparator: Un DICS se utilizează pentru semnalul ce trebuie convertit, iar celălalt pentru semnalul în curent continuu de referință. Așa cum se observă pe figură semnalul este cuplat magnetic la DICS. Semnalul de tact produce o creștere bruscă a curentului și cele două joncțiuni conectate în serie comută în starea de tensiune finită. Dacă în momentul aplicării semnalului de tact

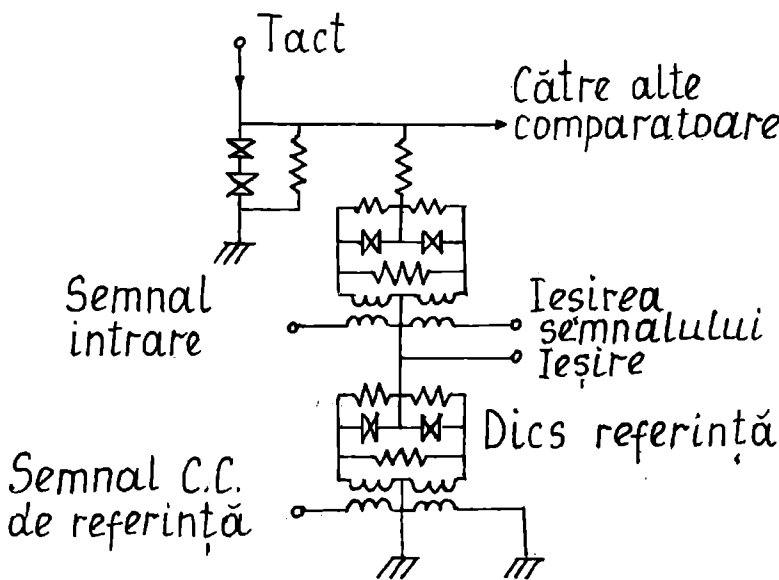
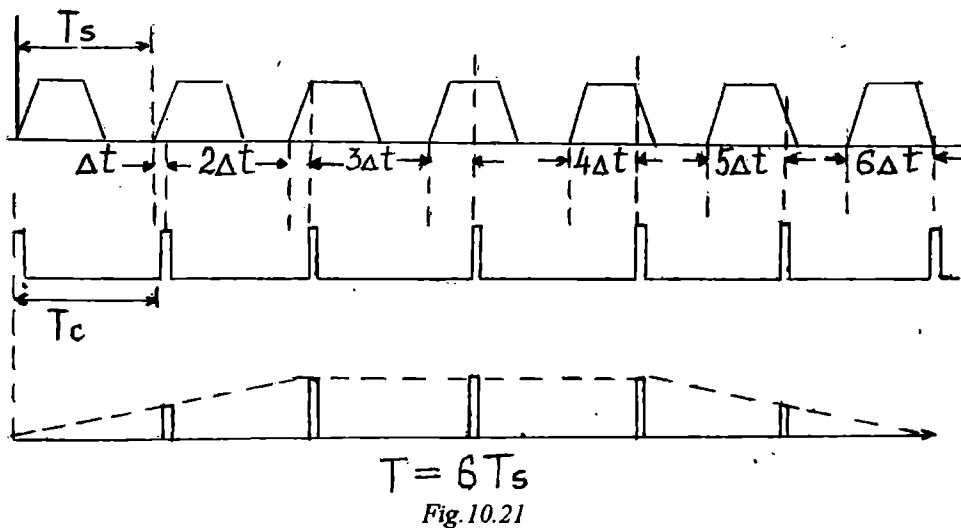


Fig. 10.20

semnalul ce trebuie convertit are o astfel de valoare încât DICS de referință comută, atunci la ieșire se obține nivelul logic „1”. Alternativ, dacă curentul de semnal se găsește în regiunea „0” a curbei de prag, atunci va comuta DICS-ul de semnal (ce trebuie convertit), micșorând tensiunea pe DICS-ul de referință la un nivel la care acest interferometru nu comută și se obține la ieșire „0”. (În acest caz curentul de semnal nu generează câmp magnetic în DICS-ul de semnal care să micșoreze curentul Josephsen sub valoarea critică). Aceasta este conversia cu un singur bit. Pentru a construi un convertor cu n biți se conectează la semnal n perechi de DICS-uri (adică n comparatoare) printr-un circuit divizor rezistiv (Fig. 10.20), fiecare reducând semnalul cu un factor 2. S-a construit astfel un convertor cu 6 biți, cu timpul de conversie de 10 ns și un prototip cu timpul de conversie de 100 ps (rata de conversie este de 5 Gigașantioane pe secundă).

10.7. Circuit de eșantionare cu viteză mare, cu joncțiuni Josephson

Pentru observarea și analiza impulsurilor periodice cu durata de ordinul nanosecundelor nu se pot utiliza osciloscopia obișnuită, deoarece tubul catodic ar trebui să aibă o sensibilitate foarte mare și o bandă de frecvență (de trecere) imensă. Realizarea practică a acestor cerințe este dificilă și pentru că ele conduc la dimensiuni ale plăcilor contradictorii. De exemplu sensibilitatea mare necesită mărirea lungimii plăcilor, iar mărirea lărgimii benzii de frecvență necesită micșorarea lungimii și suprafeței plăcilor. Pentru vizualizarea semnalelor cu durată foarte scurtă (de ordinul nanosecundelor) se utilizează osciloscopul cu eșantionare (sau stroboscopic). Metoda stroboscopică reprezintă o metodă de studiu a mișcărilor periodice (circulare) și constă în observarea intermitentă (în impulsuri) a corpului în mișcare. Aceasta se realizează prin întreruperea periodică, fie a privirii, fie a iluminării. Pe capul axului ce se rotește se fixează un disc negru cu o bandă albă radială. Lumina intermitentă cade pe disc și când frecvența de repetiție a impulsurilor de lumină coincide cu frecvența de rotire a discului acesta din urmă pare că stă pe loc, pare că banda albă ocupă una și aceeași poziție. Dacă se mărește (sau se micșorează) puțin frecvența impulsurilor luminoase atunci la fiecare nou impuls banda albă apare mai la stânga (sau mai la dreapta) față de poziția anterioară, iar discul pare că se rotește cu o viteză mică la stânga (sau la dreapta). Prin alegerea convenabilă a frecvenței impulsurilor de lumină se poate micșora aparent frecvența unei mișcări, ceea ce permite examinarea ei detaliată. Prin urmare, dacă cele două frecvențe, a impulsurilor luminoase și respectiv, de rotație a discului se deosebesc foarte puțin atunci discul pare că se rotește cu o viteză mult mai mică decât cea reală. Dacă durata unei rotații este T_s și diferența dintre aceasta și perioada impulsurilor este Δ , atunci viteza de rotație a discului se va micșora aparent de (T_s/Δ) ori. Apare o dilatare a scării timpului și acest principiu se utilizează în construcția osciloscopului cu eșantionare. Eșantionarea semnalelor periodice este reprezentată în Fig. 11.21. Pentru simplitate aceste semnale sunt considerate de formă trapezoidală (Fig. 10.21 a). În Fig. 10.21 b sunt reprezentate impulsurile stroboscopice (analoage impulsurilor de lumină), provenite de la un generator de impulsuri a căror lungime T_c depășește perioada T_s a impulsului de analizat cu o valoare mică $\Delta t = T_c - T_s$. Fiecare impuls stroboscopic care urmează apare deplasat cu Δt față de impulsul semnalului. Dacă primul impuls stroboscopic apare la începutul impulsului semnal (punctul O), atunci al doilea impuls va apare la punctul (poziția) 1 din semnul deplasat cu Δt față de începutul acestuia (al doilea impuls al semnalului), al treilea impuls va apărea deplasat cu 2Δ , ș.a.m.d. În Fig. 10.21 s-a ales un număr N de șase intervale ale semnalului, dar acesta poate fi oarecare. În cazul osciloscopului utilizat pentru controlul mișcării de rotație rolul analizorului este jucat de ochiul observatorului. În osciloscopul cu eșantionare un analizor electronic numit analizor „cheie” îndeplinește această funcție. El conține un circuit poartă și un circuit de formare. Atât semnalul cât și impulsurile



stroboscopice sunt dirijate spre analizorul cheie. Analizorul se deschide numai când sosește un impuls stroboscopic și rămâne deschis numai cât durează acest impuls. Dacă impulsul stroboscopic sosește când în analizor există deja impulsul semnalului atunci la ieșirea analizorului cheie apare un impuls de curent a cărui amplitudine este proporțională cu valoarea curentului semnalului din momentul sosirii impulsului stroboscopic. De asemenea, durata impulsului de curent de ieșire va fi egală cu cea a impulsului de eșantionare (stroboscopic). Așa cum se observă în Fig. 10.21 c amplitudinea impulsului de ieșire se modifică de la un impuls la altul, repetând forma semnalului cercetat. Impulsurile de ieșire sunt modulate în amplitudine de către curentul semnal de cercetat, înfășurătoarea acestora repetând forma semnalului. Prin procedee speciale, prin încărcarea rapidă și descărcarea lentă a unor capacități mici de la ieșirea analizorului, impulsurile scurte de curent de la ieșirea acestuia sunt transformate în impulsuri mai lungi de tensiune, a căror variație în amplitudine repetă forma impulsurilor de la intrare. Mai departe aceste impulsuri sunt amplificate cu ajutorul unor amplificatoare obișnuite de impulsuri și observate pe ecranul unui osciloscop standard. În exemplul prezentat în Fig. 10.21 impulsul semnal a fost înșărtit în șase intervale, fiecare având lungimea Δt . Astfel, lungimea T a impulsului transformat care apare pe ecran este de șase ori mai mare decât perioada unui impuls stroboscopic $T = 6T_c$ și în general $T = NT_c$, unde N este numărul total de interval în care este împărțit semnalul care are lărgimea $\tau_s = N\Delta t$. Intervalul Δt se numește pas de timp. Mărirea lărgimii impulsului este $m = T/\tau_s = T_c/\Delta t$. Dacă Δt este mic, atunci $T_c = T_s$ (cazul discului care apare nemișcat) și $m = T_s/\Delta t$. Dacă durata impulsului semnal este egală cu o perioadă a acestuia ($\tau_s = T_s$), pasul de timp va fi $\Delta t = \tau_s/N = T_s/N$ și $m = N$. Pentru funcționarea normală a osciloscopului cu eșantionare trebuie să se asigure o sincronizare a impulsurilor stroboscopice (a primului impuls, Fig. 11.21 a) cu momentul intrării impulsului semnal. De asemenea este necesară sincronizarea între începutul baleiajului pe orizontală și primul impuls stroboscopic (similar ca la sincrosop). În Fig. 10.22 este reprezentată schema bloc simplificată a osciloscopului cu eșantionare. Ea conține toate blocurile de sincronizare respective, blocului de generare a impulsurilor de eșantionare (stroboscopice), blocul analizorului cheie (numit și blocul amestecător sau de coincidență) precum și amplificatorii necesari semnalelor analizate. Semnificația notațiilor de pe figură este următoarea: AC - analizor cheie, A - amplificator, DB - dispozitiv de blocare, FI (formator de impulsuri) (stroboscopice), DI - dispozitiv de intrare, CD - generator de deplasare, GB - generator de baleiaj. În cele mai multe cazuri însuși semnalul de analizat produce și declanșarea osciloscopului de eșantionare, respectiv a generatorului de impulsuri stroboscopice. Dacă semnalul este slab atunci în dispozitivele de intrare se adoptă scheme speciale de amplificare a sincronizării. Elementul important al osciloscopului este dispozitivul de eșantionare și reținere (cheie). În osciloscopape obișnuite eșantionarea este realizată de către o diodă tunel. Sistemul

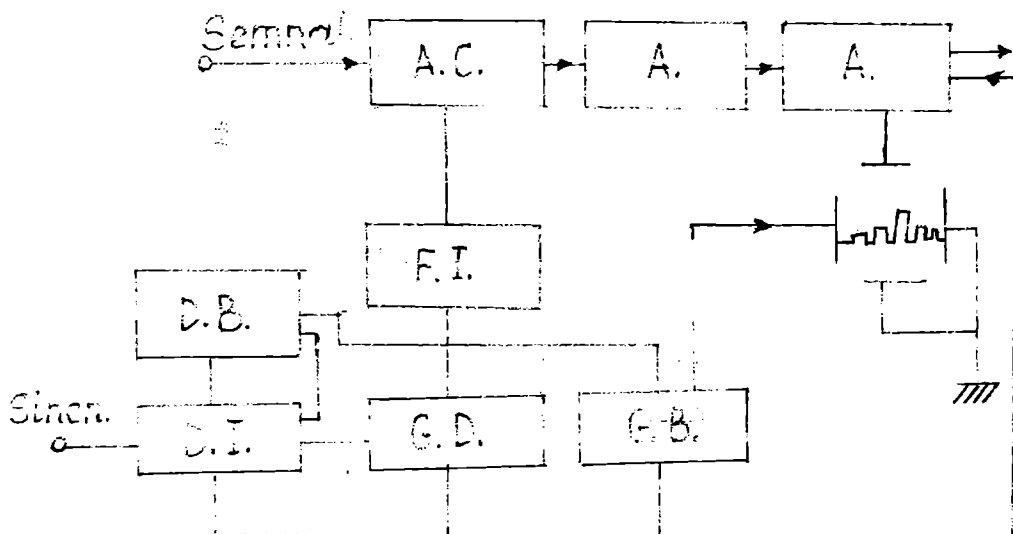


Fig. 10.22

funcționează la frecvențe și mai mari dacă eșantionarea este realizată de către o joncțiune Josephson. Un asemenea sistem are o rezoluție de 2,1 ps. Osciloscopul cu dispozitiv de eșantionare cu joncțiune Josephson a fost utilizat pentru studiul comutării în circuitele logice cu interferometre Josephson (DICS) [16]. Schema circuitului de eșantionare cu joncțiune Josephson este reprezentată în Fig. 10.23 a. Pe același cip este construit un generator de impulsuri din material supraconductor, o linie de întârziere variabilă și joncțiunea Josephson. Suma dintre curentul de semnal și impulsul trigger (stroboscopic) se aplică pe joncțiune (la declanșarea impulsului trigger). Un comparator convențional cu semiconductori preia tensiunea de pe joncțiunea de eșantionare și după o amplificare, aceasta este readusă la intrare circuitului de eșantionare. Curentul de reacție alimentează plăcile verticale ale osciloscopului, iar o tensiune proporțională cu întârzierea se aplică pe plăcile orizontale. Prin creșterea constantă a întârzierii impulsurilor trigger, joncțiunea Josephson eșantionează o altă regiune din semnal și construiește gradat, pe multe cicluri, forma completă a impulsului semnalului (Fig. 10. 20). În fig. 10. 23 b se reprezintă suma dintre curentul semnalului I_s , impulsul trigger (cu întârziere variabilă), I_p , curentul de reacție I_r și semnalul rezultat din joncțiunea Josephson care se aplică pe comparator și are valoarea chiar la pragul comparatorului. Elementele circuitului din Fig. 10.23 a sunt: GI - generator de impulsuri, JJ + C - joncțiunea Josephson + comparatorul, LIV - linie de întârziere variabilă, CR - circuit de reacție.

S-au construit de asemenea circuite electrooptice de eșantionare care au rezoluția mai mică decât 1 ps însă circuitele de eșantionare Josephson construite pe un singur cip sunt foarte simple și compacte. În plus se speră prin îmbunătățirea în continuare a proiectării și tehnologiei acestora să se crească viteza de funcționare a dispozitivelor Josephson.

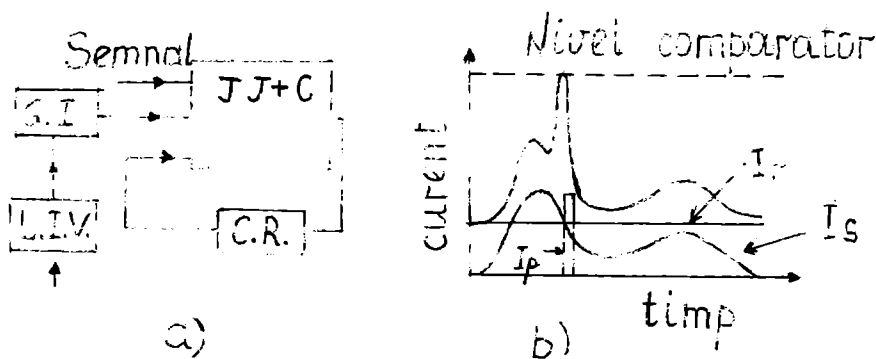


Fig. 10.23

CAPITOLUL XI

APLICAȚIILE SUPRACONDUCTIBILITĂȚII LA RĂZOLVAREA UNOR PROBLEME DE FIZICĂ FUNDAMENTALĂ

Primele aplicații reale ale efectului Josephson au fost măsurarea cu precizie a constantei fundamentale $h/2q$ și realizarea unui standard de tensiune bazat pe efectul Josephson în curent alternativ. Apoi, având în vedere sensibilitatea în energie a DICS de $\sim h/2 \text{ JHz}^{-1}$ s-a trecut la rezolvarea unor alte probleme de fizică fundamentală ca: detecția particulelor fundamentale, detecția undelor gravitaționale, verificarea teoriei relativității generale etc. Există mai multe proiecte aparținând la diverse grupuri de cercetare din acest domeniu printre care se remarcă grupul de la Universitatea Stanford din SUA condus de către profesorul William Fairbank.

11.1. Determinarea raportului $2q/h$

Am văzut din teoria efectului Josephson că există următoarea relație între tensiunea care cade pe joncțiune și frecvența radiației emise sau absorbite

$$2qV = n\hbar\omega \quad (1.1)$$

Din această relație rezultă că raportul $2q/h$ se poate determina experimental utilizând una din următoarele două metode: (a) se polarizează joncțiunea la o treaptă autoindusă și se măsoară tensiunea și frecvența radiației emise, (b) se expune joncțiunea la o radiație de microunde căreia i se măsoară frecvența și se măsoară tensiunea unei anumite trepte în caracteristica I - V. Practic se utilizează cea de a doua metodă deoarece puterea radiației emise de către joncțiune este mică, de ordinul 10^{-10} W . Relația tensiune - frecvență (1.1) este independentă de tipul joncțiunii de material, de temperatură și de ordinul treptei indusă în caracteristica I - V, etc. Pentru a verifica exactitatea acestei afirmații s-au efectuat mai multe tipuri de experiențe, în care s-au modificat diverși parametri. Cel mai sensibil test constă în compararea tensiunilor care apar pe două joncțiuni construite din materiale diferite atunci când sunt expuse la radiații de microunde de aceeași frecvență. Diferența de tensiune care poate apare poate fi măsurată cu mare precizie cu ajutorul unui DICS. În Fig. 11.1 este reprezentată schema

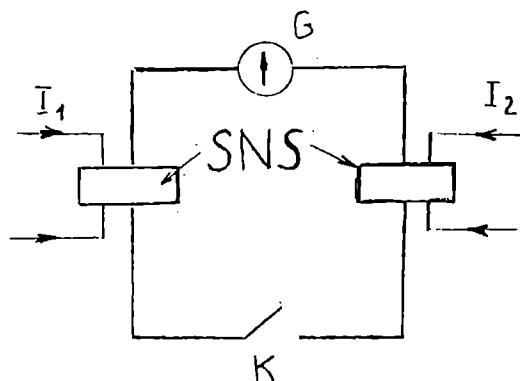


Fig. 11.1

instalației utilizate pentru compararea tensiunilor obținute de la două joncțiuni SNS, construite din materiale supraconductoare diferite ca Pb, Sn și In [1]. Barierea constă dintr-un strat de metal normal, Cu sau Ag, de 1 μm grosime. S-au ales structuri SNS deoarece cu aceste structuri se obțin trepte verticale în caracteristica I - V în comparație cu alte structuri. Expunând aceste structuri la o radiație de 500 kHz, prima treaptă indusă este în jur de 1 nV. Curenții de polarizare I_1 și I_2 se stabilesc la asemenea valori încât ambele joncțiuni să fie polarizate la aceeași treaptă indusă. Un galvanometru supraconductor de tip SLUG (un DICS de inductanță mică) detectează curenți până la valoarea de 3×10^{-7} A. Dacă la $t = 0$ se închide comutatorul, prin circuit trece un curent dat de relația

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \Delta V$$

unde ΔV este diferența de tensiunea dintre cele două joncțiuni și L este inductanța circuitului. Pentru orice combinație de joncțiuni utilizată nu s-a observat nici un curent timp de 30 minute și prin urmare curentul care trece prin circuit este sub sensibilitatea galvanometrului. Dacă inductanța L are valoarea 10^{-7} H, atunci limita superioară a diferenței de tensiune ce poate apare este

$$\Delta V < L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 10^{-7} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-7}}{1,8 \cdot 10^{-3}} \cong 1,7 \cdot 10^{-17} \text{ V}$$

Dacă tensiunea treptei este egală cu 1 nV rezultă că cele două tensiuni (corespunzătoare celor două joncțiuni) sunt identice cu o exactitate de 1 pe 10^8 . În Fig. 11.2 este reprezentată schema instalației folosite pentru compararea între diferite tipuri de joncțiuni a diverselor trepte induse [2]. Se folosesc o joncțiune cu contact punctiform din Nb_3Sn și o joncțiune tunel din Pb-PbO-Pb. Joncțiunea cu contact punctiform se iradiază cu un laser pe frecvența de 891 GHz și este polarizată la prima treaptă în caracteristica I-V, curentul care circulă fiind mai mic decât valoarea critică pentru joncțiunea tunel Pb-PbO-Pb. În aceste condiții tensiunea care cade pe potențiometrul P are valoarea de 1,84 mV corespunzătoare treptei indusă de către radiația laser. Se trece apoi un curent de valoare mai mare decât cea corespunzătoare treptei $n = 94$ în caracteristica I-V a joncțiunii tunel iradiată pe frecvența de 9,48 GHz de la o sursă de microunde din banda X. Se alege frecvența și treapta (în jurul valorilor de mai sus) astfel ca la ieșire să se măsoare cu potențiometrul aceeași tensiune ca și în cazul treptei indusă de către laser. Raportul tensiune/frecvență în cele două cazuri nu diferă decât prin $0,4 \pm 1,5\%$ ppm (părți pe milion). Prin urmare, raportul $2q/h$ este independent de tipul joncțiunii, de material și de frecvența radiației. S-a găsit că, este, de asemenea, independent de temperatură, de sensul de polarizare și de grosimea barierei. Sensibilitatea metodei crește cu micșorarea inducției L a circuitului. Cea mai bună precizie a fost obținută în anul 1987 [3] și anume s-a demonstrat că $\Delta V < 2 \times 10^{-21}$ V între o joncțiune Nb-Cu-Nb și o micropunte cu In, ambele joncțiuni fiind expuse la sursă cu microunde pe frecvența de 90 GHz și polarizate la treapta a patra. Aceasta arată că ec. (1.1) este independentă de material cu o precizie de 1 pe 10^{16} . Aceeași autori au utilizat această metodă pentru a demonstra

principiul echivalenței (§ 11.3). Pentru ca măsurarea raportului $2q/h$ să fie corectă trebuie măsurate corect două mărimi: frecvența radiației și tensiunea treptei de curent aleasă. Măsurarea cu exactitate a frecvenței nu este dificilă (dacă puterea sursei nu este prea mică) și este ușor de stabilitat frecvența unui oscilator (de exemplu cu un cristal de cuarț) cu o precizie de 1 pe 10^8 . Deci exactitatea determinării raportului $2q/h$ depinde de exactitatea măsurării tensiunii. Tensiunea se măsoară cu un potențiometru de construcție specială [4]. În cazul

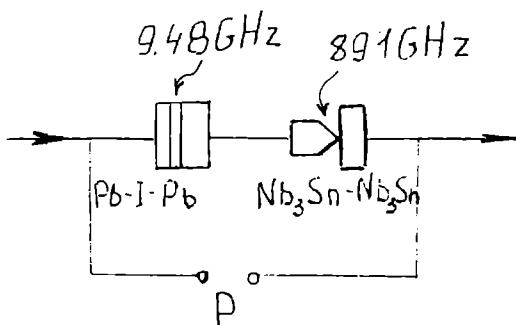


Fig. 11.2.

când treapta de curent nu este perfect verticală se consideră ca valoare corectă valoarea tensiunii de la mijlocul treptei. Valoarea determinată pe această cale este

$$2q/h = 483,5976 \pm 0,0012 \text{ MHz}/\mu\text{V}.$$

11.2. Standardul de tensiune

Voltul standard este stabilit prin valoarea medie a unei tensiuni electromotoare dată de un grup de celule Weston cu cadmiu. Acest mod de stabilire nu este satisfăcător deoarece tensiunea electromotoare se modifică în timp și diversele laboratoare naționale trebuie să meargă din trei în trei ani să compare celulele lor cu cele de la Biroul de Măsurii și Greutăți din Franța. Determinarea variației în timp a tensiunii surselor standard este de mare importanță. În SUA se utilizează în acest scop măsurarea raportului giromagnetic al protonului. Asemenea măsurători sunt complexe și duplicarea lor de către alte laboratoare necesită mediu stabil în timp din punct de vedere termic și magnetic. Efectul Josephson nu prezintă asemenea dezavantaje și dispozitivele Josephson se utilizează pe scară largă pentru stabilirea și compararea standardelor de tensiune din diverse laboratoare [5]. Primele standarde de tensiune construite cu joncțiuni Josephson constă în esență dintr-o singură joncțiune sau doar câteva joncțiuni conectate în serie fiecare fiind polarizată la o asemenea treaptă de curent electric astfel încât să dea o tensiune de câțiva mV. Pentru a compara această tensiune cuantificată cu celula Weston standard (care are tensiunea electromotoare de 1,018 ... V) este necesar un potențiomtru complex foarte precis. Recent s-a trecut la sisteme mai simple compuse din rețele de un număr mare de joncțiuni Josephson identice, conectate în serie care să dea o tensiune totală de 1 V fără a fi necesară o sursă de polarizare sau potențiomtru.

Circuitul de compensare a tensiunii celulei Weston atunci când se utilizează o singură joncțiune Josephson este reprezentat în Fig. 11.3 [6]. Joncțiunea este construită din Pb-PbO-Pb, depusă pe un substrat de sticlă, funcționează la o tensiune de referință, egală cu aproximativ 5,2 mV, la o frecvență de rezonanță de 9 GHz. Circuitul de comparare se bazează pe metoda conectării serie/paralel a 14 rezistențe de câte 100 Ω fiecare. Se conectează întâi cele 14 rezistențe în paralel, $R_p = 100/14$, și se ajustează curentul I_0 de la sursa de curent constant astfel că $I_0 R_p = V_j = 5,188776 \text{ mV}$, tensiunea pe joncțiunea Josephson (conectată între capetele J-J), folosind pentru detecție un galvanometru supraconductor ca instrument de nul. Se conectează apoi rezistențele în serie, $R_s = 14 \times 100 \text{ W}$, se conectează celula standard Weston și se verifică dacă instrumentul de nul nu indică circulația unui curent. Când nu circulă curent, $I_0 R_s = V_s = 1,01700$. Relația de legătură dintre tensiunea celulei standard V_s și tensiunea joncțiunii Josephson este

$$V_s = \frac{R_s}{R_p} V_j = 196 V_j$$

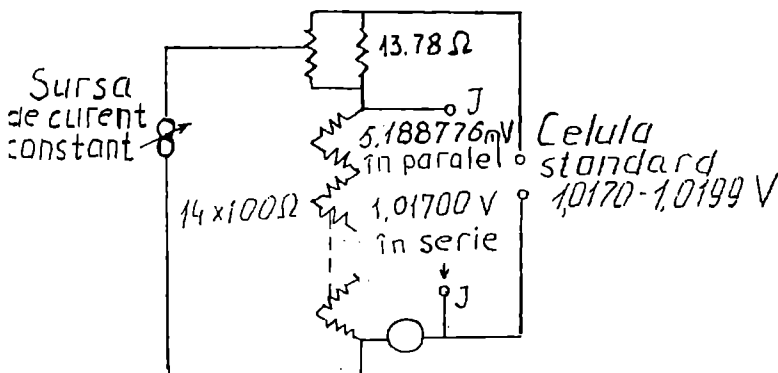


Fig. 11.3

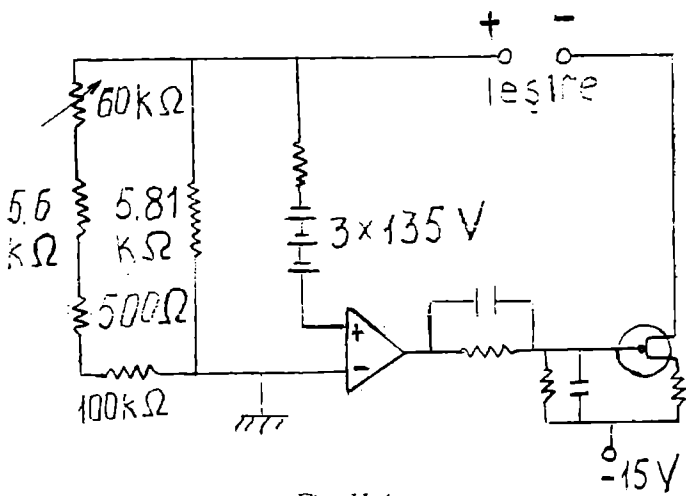


Fig. 11.4

Pentru ajustarea raportului la valoarea 196 se utilizează un divizor Kelvin-Varley, suntat de o rezistență egală cu 13,786 Ω. Schema sursei de curent utilizată este reprezentată în Fig. 11.4. Întreaga instalație este imersată în heliu lichid. O problemă deosebită care apare este stabilitatea rezistențelor la temperaturi joase. O cale de rezolvare constă în folosirea pentru construcția lor a unor aliaje cum ar fi cupru-germaniu, bronz-siliciu, bronz-fosfor, care au coeficientul de temperatură negativ (câteva ppm/K la 4,2 K) și rezistivitățile în domeniul $3 \mu \Omega \text{ cm} - 15 \mu \Omega \text{ cm}$. Ca

detector de nul (galvanometru) se utilizează un DICS sau un galvanometru ondulator supraconductor (SLUG) de inductanță mică. Ca sursă de microunde se utilizează un oscilator cu tranzistor care funcționează în banda L și un multiplicator de frecvență. La ieșirea acestuia se obține o putere de până la 50 mW pe frecvența de 9 GHz cu care se iradiază joncțiunea Josephson. Eroarea de măsură a tensiunii este de 0,4 ppm.

Cercetările recente au făcut posibilă eliminarea primei generații de standarde de tensiune Josephson care necesită un potențiomtru complex, și înlocuirea acestora cu o rețea de peste 1000 de joncțiuni Josephson conectate în serie. Alimentarea fiecărei joncțiuni de la o sursă de curent ar fi dificilă și tot atât de complexă. De aceea, s-au depus eforturi de a se obține standardul de tensiune cu o rețea de joncțiuni Josephson fără a fi necesar ca acesta să fie polarizate ci numai expuse la o radiație de microunde. S-a arătat [7] că dacă o joncțiune are capacitatea C suficient de mare astfel că parametrul de histerezis $\beta_c = 2qI_0 R^2 C / \hbar > 1$ atunci supusă la o radiație de microunde poate să apară pe ea o tensiune finită (fără să aibă sursă de curent) și o diferență de fază corespunzătoare mărimii treptei de curent. În cazul limită când β_c este extrem de mare câmpul de microunde poate fi considerat ca o adevărată sursă de tensiune pe joncțiunea și amplitudinea treptei induse, de ordinul n , variază ca o funcție Bessel de ordinul n . Treapta n va întretăia axa zero a curentului dacă $n\hbar\omega/2qI_0R < J_n(\text{max})$. Caracteristica I-V a unei astfel de joncțiuni este reprezentată în Fig. 11.5. O rețea de joncțiuni care posedă această proprietate (treapta de curent întretăie axa zero a curentului) iradiată cu microunde poate da o tensiune cuantificată de 1 V. Pentru ca fiecare joncțiune să primească aceeași putere radiantă astfel ca treptele echivalente de curent să aibă aceeași înălțime, mai mare decât nivelul minim necesar pentru o funcționalitate stabilă, s-a construit următoarea rețea [8]. Pe o linie de transmisie supraconductoare, Fig. 11.6, cu un electrod de Nb se realizează joncțiuni cu electrozi de Pb-In, cu bariere de oxid, terminate cu rezistența de sarcină acordată astfel încât să nu existe reflexie de putere radiantă. Rețeaua se iradiază cu radiație de 90 GHz. Există o degenerare de ordinul doi a rețelei astfel că pot apare tensiuni egale și de sens opus și pentru a evita aceasta este necesar inițial un puls de curent pentru ridicarea degenerării. S-au construit standarde de 1 V cu rețele de 1474 joncțiuni și de 10 V cu rețele de 19000 joncțiuni [9 - 10]. Aceste standarde au o eroare de 1 pe 10^{10} . Cititorul găsește o tratare detaliată (construcție și funcționare) a standardului de tensiune cu rețea a joncțiunii Josephson sub formă integrată în articolul de sinteză al lui Niemeyer [11].

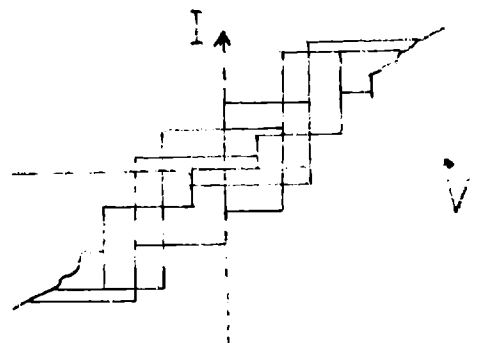


Fig. 11.5

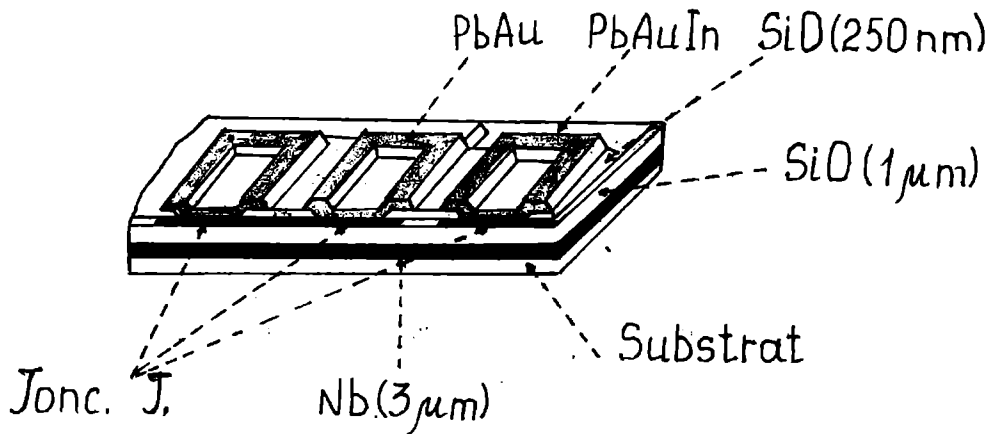


Fig. 11.6

11.3. Verificarea principiului echivalenței

Principiul echivalenței afirmă că pentru un observator situat într-un ascensor care cade liber legile fizicii sunt aceleași ca în sistemele inerțiale ale relativității restrânse. Efectele datorate mișcării accelerate și forțelor gravitaționale se anulează reciproc. Observând forțe gravitaționale, un observator aflat într-un ascensor închis nu poate spune ce parte din aceste forțe corespund accelerării și ce parte adevăratelor forțe gravitaționale. De fapt el nu va discerne nici o forță în afara cazului în care alte forțe, nu de tip gravitațional, ar acționa asupra ascensorului. În particular principiul echivalenței cere ca raportul dintre masa inerțială și masa gravitațională să fie egal cu unitatea. Experimental nu s-a descoperit nici o diferență între masa inerțială și cea gravitațională a unui corp, ceea ce sugerează că gravitația poate fi într-un anumit sens echivalentă cu o accelerare. O consecință a principiului echivalenței este „imponderabilitatea” unui om situat într-un satelit care se mișcă pe o orbită în jurul Pământului.

Circuitul utilizat pentru verificarea principiului echivalenței este reprezentat în Fig. 11.7 [3]. Două joncțiuni Josephson identice sunt separate pe verticală la o distanță de 73 mm și expuse la aceeași sursă de microunde de aceeași fază. Deplasarea gravitațională spre albastru a lungimii de undă a fotonilor care cad pe joncțiunea inferioară în comparație cu cei care cad pe joncțiunea de sus ar produce o creștere de tensiune mai mare pe prima joncțiune. Totuși, aceasta este compensată exact de către deplasarea spre albastru a energiei unei particule încărcate (de exemplu perechea de electroni) în timpul trecerii de la joncțiunea superioară la joncțiunea inferioară. Un DICS cuplat magnetic cu circuitul celor două joncțiuni, fiind fiecare polarizată la aceeași treaptă în caracteristica I - V, nu sesizează circulația unui curent în circuit.

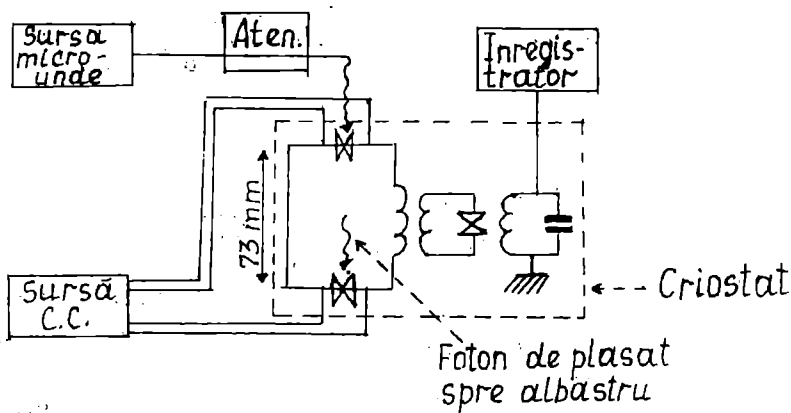


Fig. 11.7

Aceasta arată că limita superioară a diferenței de tensiune dintre cele două joncțiuni este $< 10^{-22}$ V, cu o precizie de $\pm 5\%$. Efectul câmpului gravitațional asupra particulelor încărcate este echivalent cu deplasarea spre albastru a fotonilor.

În final amintim că un foton de energie $h\nu$ are o masă inerțială egală cu $h\nu/c^2$. Din punct de vedere experimental este evident că fotonul are și o masă gravitațională care are aceeași valoare cu masa inerțială. Notăm că fotonul are masa de repaus nulă. Un foton care are la înălțimea l deasupra suprafeței pământului energia $h\nu$, după ce cade pe distanța l , va pierde energia potențială $mgl = (h\nu/c^2)gl$ pe care o va câștiga sub formă de energie cinetică. Energia sa va deveni $h\nu' = h\nu + (h/c^2)gl$. Rezultă că după cădere frecvența fotonului va fi

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{gl}{c^2} \right)$$

Aceasta este deplasarea spre albastru. Dacă fotonul s-ar mișca în sus, frecvența sa s-ar micșora și aceasta este o deplasare spre roșu. Ochiul omului are sensibilitatea maximă la culoarea galbenă. Deplasarea spre frecvențe mai mari este spre culoarea albastră, iar deplasarea spre frecvențe mai mici este spre culoarea roșie, în raport cu culoarea galbenă. Prin extensie orice deplasare spre frecvențe mai mici se numește deplasarea spre roșu și orice deplasare spre frecvențe mai mari se numește deplasare spre albastru, indiferent de valoarea frecvenței originare.

11.4. Detectia undelor gravitaționale

Așa cum sarcinile electrice oscilante dau naștere undelor electromagnetice, este de presupus că și masele gravitaționale oscilante, ca stelele duble, să genereze unde gravitaționale. Puterea radiată de două mase M_1 și M_2 care gravitează una în jurul alteia pe o orbită, la distanța $2r$ cu perioada T este

$$P = 2^{11} \pi^6 k r^4 \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \frac{1}{5c^5 T^6}$$

unde K este constanta atracției universale. Pentru $M_1 = M_2 = 1000$ kg, $2r = 10$ m, $\omega = 2\pi/T = 1000$ RPM, puterea radiată sub formă de unde gravitaționale este $P = 10^{-30}$ W, deci foarte mică. Până în prezent nu s-a reușit să se genereze și să se detecteze unde gravitaționale în vreun laborator. Însă, un sistem binar de două stele, fiecare stea având 10 mase solare, separate la 0,1 ani lumină și cu perioada de un an ar trimite pe pământ dacă ar fi situat la 1000 ani lumină de sistem un flux de 10^{-11} Wm⁻², ceea ce s-ar putea detecta ușor dacă aceasta ar fi sub formă de radiație electromagnetică. Specialiștii în teoria relativității consideră undele gravitaționale ca o propagare a curbării spațiu-timp [12]. Prin analogie cu undele electromagnetice, undele gravitaționale ar

putea fi imaginate ca o propagare a câmpului gravitațional.

Pentru a detecta radiația (unde) gravitațională, trebuie să construim un sistem care să realizeze un cuplaj maxim între această radiație și materialul detector. Există două posibilități în această direcție [13]. Una este să se utilizeze o antenă sub forma celei mai mari mase disponibile, iar cealaltă este să se folosească două mase mai mici separate printr-o tijă foarte lungă. În prima metodă se utilizează DICS ca element sensibil, iar în cea de

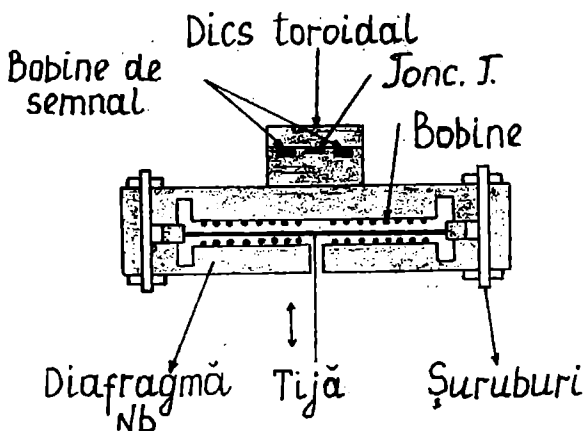


Fig. 11.8

a doua metodă se utilizează un interferometru optic gigant. În continuare descriem un traductor de deplasare cu DICS utilizat ca antenă pentru detecția undelor gravitaționale. Acesta este reprezentat în Fig. 11.8 [14]. Constă dintr-o bară masivă din aluminiu care acționează ca antenă pentru radiația gravitațională, deoarece o undă quadrupolară incidentă va determina elongații și compresii ale barei cu o mișcare corespunzătoare în antifază perpendiculară pe direcția lungimii ei. Aluminiul prezintă pierderi acustice minime și bara este de înaltă puritate, ceea ce asigură un număr de moduri rezonante cu Q foarte mare. Prin urmare, o perturbație incidentă va excita unul sau mai multe din aceste moduri de oscilație. O diafragmă din niobiu, subțire, de înaltă puritate, este cuplată mecanic cu bara masivă de aluminiu. Parametrii mecanici ai diafragmei sunt aleși astfel încât aceasta să aibă o frecvență de rezonanță pe unul din modurile de oscilație ale barei, astfel ca aceste două elemente să acționeze ca doi oscilatori slab cuplați. De o parte și de alta a diafragmei sunt montate două bobine spirale plate conectate în serie, construite din fir supraconductor, înfășurate în opoziție (sens invers). Aceste bobine acționează ca primarul unui transformator de flux. Secundarul acestui transformator este cuplat cu un DICS cu nivel de zgomot foarte mic. Prin circuitul complet al transformatorului de flux circulă un supracurent. Dacă antena intră în oscilație, va apare o mică deplasare a ei către una din bobine și o depărtare de cealaltă, ceea ce va modifica inductanța efectivă a fiecărei bobine și, în consecință, va determina variația supercurentului, astfel încât fluxul prin transformator să se mențină constant. Această variație de curent este detectată ca o variație de flux în DICS. Frecvența de rezonanță mecanică, în principal determinată de elasticitatea diafragmei, are o componentă magnetică ce variază cu fluxul magnetic captat de bobinele plate. Astfel, este posibil prin ajustarea curentului supraconductor să fie aduse cu ușurință la rezonanță cele două frecvențe, a antenei și a traductorului. La Stanford, pentru o bară de 4500 kg, s-a selectat un mod de rezonanță în jur de 800 Hz. Pentru a reduce zgomotul Nyquist, sistemul este menținut la o temperatură stabilă foarte joasă și este perfect izolat mecanic și electromagnetic de mediul înconjurător. Primele sisteme au fost menținute la 1,5 K și izolate prin suspensie mecanică. Se preconizează ca în viitor acestea să funcționeze la o temperatură de milikelvin și izolarea mecanică să se realizeze prin levitație deasupra unei bobine supraconductoare cu curent persistent. Se folosește un DICS cc din straturi subțiri realizat la IBM [15]. Sensibilitatea la deplasare a sistemului este mai bună de 10^{-19} m în banda de frecvență de 1 Hz, astfel că se poate detecta radiația emisă de o supernova din interiorul galaxiei noastre sau dintr-o galaxie vecină, eveniment ce se așteaptă să aibă loc odată la 30 ani. În forma actuală, antena detectează perturbațiile mediului înconjurător, cum ar fi microseismele și zgomotul mecanic. Pentru a elimina zgomotul local, este necesar să funcționeze în același timp, în coincidență, două sau mai multe antene situate la distanță mare una de alta. În prezent există trei asemenea antene, în California, Louisiana și Roma. Din nefericire, nu a putut fi înregistrată supernova 1987A dintr-un nor Magellan mai mic, deoarece toate cele trei antene erau scoase din funcțiune, deși semnalul acesteia a fost suficient de mare pentru a fi detectat.

11.5. Posibilitatea detecției quarcilor

O particulă este un obiect unitar care are o identitate definită și care poate fi localizat într-o regiune limitată a spațiului, la un moment de timp dat. Particula este caracterizată prin mărimi fizice precise: masă, sarcină electrică, moment cinetic intrinsec etc. O particulă trebuie să fie stabilă când se află singură în spațiu. Acest ultim criteriu este satisfăcut de către proton, electron, pozitron, neutrini, foton și nucleele stabile. Ulterior s-a renunțat la criteriul stabilității absolute pentru definirea unei particule, deoarece, de exemplu, miuonul are un timp de înjumătățire de aproximativ 10^{-6} secunde, care la scară nucleară (10^{-24} secunde) este un timp foarte lung, deși la scară microscopică este un timp scurt. La fel pionii cu sarcină electrică au timpul de înjumătățire de 10^{-8} secunde, iar pionul neutru are timpul mediu de viață de 10^{-16} secunde. Aceste particule trebuie, deci, admise ca atare. Particulele care nu pot fi descompuse în alte particule se numesc

particule elementare. Toți atomii, toate moleculele și toate nucleele mai grele decât protonul sunt particule compuse. Se admite ca particule elementare protonul, neutronul, antiprotonul, antineutronul, hiperionii cu timp de viață mare împreună cu antiparticulele lor, pionii, mezonii K, miuonii, neutrinii, electronul și pozitronul, fotonul. Exceptând protonul, antiprotonul, electronul, pozitronul, fotonul și neutrinii, toate celelalte particule elementare sunt instabile. Particulele elementare se împart în patru clase. Din prima clasă face parte fotonul care este unicul membru al acestei clase. A doua clasă o constituie leptonii (Tabela 11.1). Toți leptonii au momentul cinetic de spin 1/2. Miuonii sunt instabili și se dezintegrează prin reacția $\mu^+ \rightarrow e + \bar{\nu} + \nu$. Unul din neutrinii este presupus neutrîn $-\mu$, iar celălalt neutrîn, $-e$. Durata medie de viață a miuonilor este $2,20 \times 10^{-6}$ s. Celelalte particule sunt stabile.

Tabela 11.1.

Leptonii

Particula	Sarcina	Masa în MeV
e^- electron	-e	0,511
e^+ pozitron	+e	0,511
μ^- miuoni	-e	105,7
μ^+	+e	105,7
ν_e neutrîn -e	0	0
$\bar{\nu}_e$ antineutrîn -e	0	0
ν_μ neutrîn $-\mu$	0	0
$\bar{\nu}_\mu$ antineutrîn $-\mu$	0	0

A treia clasă o formează mezonii (Tabela 11.2).

Tabela 11.2.

Octetul mezonnic principal

Particula	Masa, MeV	Timpul de viață s	Principalele mase de dezintegrare
π^+ pioni cu sarcină π^-	139,60	$2,61 \times 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$ $\mu^- \bar{\nu}_\mu$
π^0 pionul neutru	134,98	$0,89 \times 10^{-16}$	$\gamma \gamma$ $\gamma, e^+ e^-$
K^+ mezoni K K ⁻ cu sarcină	493,8	$1,23 \times 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$ $\pi^+ \pi^0$ $\pi^\pm \pi^\mp \pi^0$
K^0 mezoni K K ⁰ neutri	497,9	$0,87 \times 10^{-10}$ $5,68 \times 10^{-8}$	$\pi^+ \pi^0$ $\pi^0 \pi^0$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi \mu \nu; \pi e \nu$
η mezonul eta	548,6	$< 7 \times 10^{-20}$ $< 7 \times 10^{-21}$	$\gamma \gamma$ $\pi^0 \pi^0 \pi^0$ $\pi^0 \gamma \gamma$ $\pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi^+ \pi^- \gamma$

Mezonii au momentul cinetic de spin și numărul barionic zero. Cei doi mezoni K neutri K^0_1 și K^0_2 se dezintegrează, ca și cum ar fi un amestec de două particule K^0_1 și K^0_2 cu timpi de viață diferiți și mase foarte apropiate.

Octetul barionic principal

Particula	Masa, MeV	Timpul de viață s	Principalul mod de dezintegrare
p proton	938,256	stabil	
n neutron	939,550	$1,01 \times 10^3$	$p e^- \nu$
Λ hiperionul lambda	1115,58	$2,51 \times 10^{-10}$	$p \pi^-$ $n \pi^0$
Σ^+ hiperioni	1189,47	$0,81 \times 10^{-10}$	$n \pi^0, n \pi^+$
Σ^0 sigma	1192,56	10^{-14}	$\Lambda \gamma$
Σ^-	1197,44	$1,65 \times 10^{-10}$	$p \pi^-$
Ξ particule de	1314,7	3×10^{-10}	$\Lambda \pi^0$
Ξ cascadă	1321,2	$1,7 \times 10^{-10}$	$\Lambda \pi$

Au momentul cinetic de spin $1/2$ și numărul barionic $+1$. Există un octet antibarionic format din antiparticulele acestor particule. Antiparticulele au aceleași mase, spini și timpi de viață, dar sarcini și numere barionice de semn contrar.

Desigur că, noțiunea de particulă elementară este relativă și este dependentă de nivelul de cunoaștere. O serie de fizicieni au presupus că particulele elementare pe care le-am menționat ar fi „compuse” și că ar exista entități „mai elementare”. Gell-Mann a sugerat că mezonii și barionii sunt sisteme compuse din particule necunoscute până în prezent. El a denumit aceste particule quarci [16]. Anumite proprietăți ale mezonilor și barionilor și în special principiile de simetrie care guvernează interacțiile lor, ar putea fi explicate simplu dacă cuarcii și anticuarzii ar exista într-adevăr. Există un triplet de quarci. Toate particulele acestui triplet ar trebui să aibă numărul barionic $+1/3$, iar momentul cinetic de spin probabil $1/2$. Doi dintre quarci posedă sarcina $-e/3$, iar al treilea posedă sarcina $+2e/3$. Există, de asemenea, corespunzător, trei anticuarci, cu numărul barionic $-1/3$ și sarcinile $+e/3, +e/3$ și, respectiv, $-2e/3$. Cuarcii trebuie să fie foarte grei în comparație cu nucleonii, deoarece altfel ei ar fi fost puși în evidență în experiențele din acceleratoarele de particule. Rezultă că dacă un nucleon este o stare legată de trei quarci, energia sa de legătură trebuie să fie foarte mare în comparație cu masa nucleonului. Dacă acceptăm acest model, nucleonul ar fi un sistem foarte strâns legat în comparație cu atomii, nucleele și moleculele care au energia de legătură mai mică în comparație cu energia de repaus a sistemului. Mezonii ar putea fi considerați ca stări legate ale unui quarc și unui anticuarc, iar barionii ca stări a trei quarci. Dacă într-adevăr cuarcii există, ar trebui să existe cel puțin o particulă stabilă cu sarcină fracționară. Se pune deci problema detecției acestor particule cu sarcină fracționară. Aparatul utilizat în acest scop este o variantă la temperaturi joase a aparatului lui Millikan de determinare a sarcinii electrice a electronului. Experiența lui Millikan se bazează pe observarea mișcării unei picături mici de ulei, încărcată cu sarcină electrică, plutind în aer sub influența simultană a gravitației și a unui câmp electric. În experiențele de detecție a cuarcilor, picăturile de ulei au fost înlocuite cu sfere supraconductoare din niobiu de dimensiuni foarte mici care pot levita într-o combinație de câmp magnetic și câmp electric rf [17]. Dacă se cunoaște masa sferei, din măsurarea accelerației ei într-un câmp cunoscut, se poate determina sarcina electrică. Pentru detectarea poziției sferei care levitează, se utilizează un DICS și un transformator de flux. Inductanța bobinei primare a transformatorului (care este introdusă în incinta cu sfere supraconductoare) se modifică sub influența diamagnetismului perfect al acestor sfere și astfel este pusă în evidență poziția lor. În general, sferele sunt contaminate cu sarcină electrică din mediul înconjurător. Această sarcină poate fi eliminată prin așezarea în apropierea sferei

supraconductoare a unui emițător de electroni sau pozitroni care funcționează până când sarcina de pe sferă este îndepărtată și atinge o valoare minimă. Pentru un anumit număr de sfere utilizate în experiența grupului de la Stanford, sarcina reziduală rămasă pe o sferă nu a fost zero, ci în jur de $e/3$, unde e este sarcina electronului. Aceasta corespunde sarcinii unui singur cuarc existent pe sferă. Totuși, aceste rezultate sunt controversate, deoarece cercetări pe alte materiale nu au condus la aceleași concluzii.

11.6. Posibilitatea detecției monopolului magnetic

Se poate imagina că, așa cum câmpului electric \vec{E} se asociază sarcinile electrice și câmpului magnetic \vec{B} se pot asocia surse, astfel ca să existe monopol magnetic pozitiv asociat polului nord al acului de busolă și monopol magnetic negativ asociat polului sud al acului de busolă. Câmpul magnetic este orientat de la polul pozitiv la polul negativ. Însă, nimeni nu a observat vreodată un pol magnetic (de exemplu, polul nord) izolat, adică un monopol magnetic. Acesta ar da naștere unui câmp magnetic orientat radial spre exterior, descrescând ca $1/r^2$ la distanțe mari. Un câmp

magnetic uniform ar acționa cu o forță asupra monopolului magnetic, în repaus, orientată în direcția câmpului. (Reamintim că forța cu care acționează câmpul magnetic asupra unei sarcini electrice aflată în mișcare este perpendiculară pe acesta). Ideea existenței monopolului magnetic apare plauzibilă dacă ne gândim că ecuațiile fundamentale ale câmpului electromagnetic sunt simetrice în \vec{E} și \vec{B} . Atunci ar fi de așteptat să existe simetrie și în sursele câmpurilor. De exemplu, analogul ecuației $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$, unde ρ este densitatea de sarcină și ϵ_0 permeabilitatea ar trebui să fie ecuația $\text{div } \vec{B} = \eta/\mu_0$, unde η ar fi densitatea de sarcină magnetică și μ_0 este permeabilitatea vidului. În realitate, însă, $\text{div } \vec{B} = 0$ peste tot și deci, nu există sarcină magnetică, adică monopoli magnetici. Monopolul magnetic dacă există ar avea sarcina h/e . Dacă notăm cu \vec{j}_m densitatea de curent a monopolului magnetic, atunci ecuația lui Maxwell s-ar modifica astfel

$$\nabla \times \vec{E} = -d\vec{B}/dt + \vec{j}_m$$

Prin urmare, dacă un monopol magnetic traversează un inel supraconductor, acesta determină creșterea fluxului magnetic prin inel cu $h/e = 2\Phi_0$. În Fig. 11.9 se reprezintă schematic efectul trecerii unui monopol printr-un

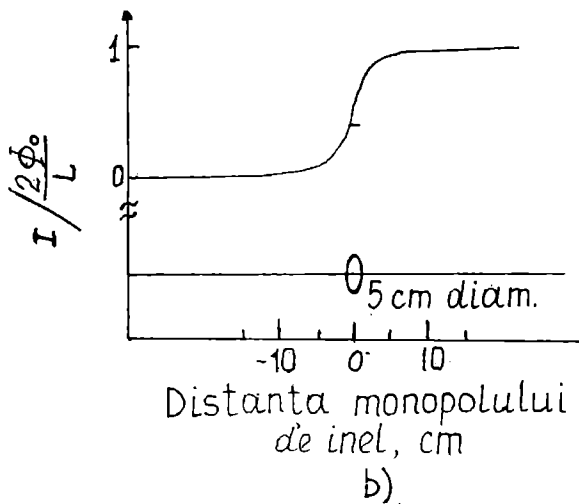
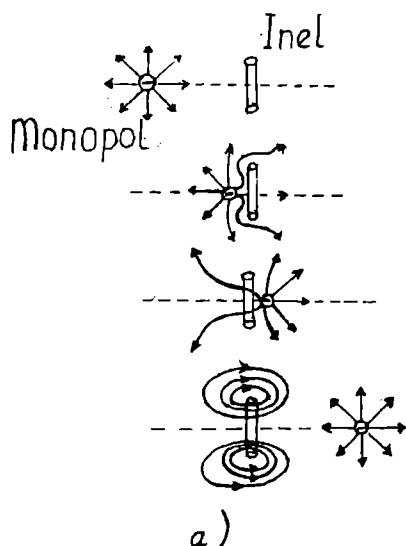


Fig. 11.9

inel supraconductor. Modificarea fluxului magnetic la trecerea monopolului prin inel persistă atâta timp cât inelul rămâne supraconductor. În contrast cu trecerea unui monopol magnetic, trecerea unui dipol magnetic sau a unei particule încărcate cu sarcină electrică prin inel produce numai un puls tranzitoriu de flux prin acesta. Modificarea fluxului prin inel datorită trecerii monopolului magnetic poate fi foarte ușor pusă în evidență cu ajutorul unui DICS. Primul detector de acest fel a funcționat la Universitatea din Stanford în anul 1982 [18] și timp de 150 zile s-a observat un singur eveniment de creștere (treaptă) a fluxului cu $2\Phi_0$. În Fig. 11.9 b este reprezentată dependența curentului indus în inel de traiectoria axială a monopolului. Alte evenimente de acest fel nu au fost observate mai târziu și se crede că evenimentul observat anterior s-ar datora unor tensiuni interne de relief. Pentru a mări „secțiunea eficace” a detectorului trebuie să se mărească aria A a secțiunii inelului. Creșterea ariei inelului are două dezavantaje. Întâi, modificarea câmpului magnetic la trecerea unui dipol $\delta B = 2\Phi_0/A$ scade cu creșterea A (aria), astfel că ecranarea față de câmpurile externe parazite este mai dificilă. Al doilea dezavantaj constă în aceea că inductanța inelului crește aproximativ liniar cu A și face dificilă acordarea acesteia cu inductanța bobinei de intrare a DICS. De aceea, în locul unei singure bobine se utilizează un gradiometru mai complicat care conține mai multe bobine planare, fiecare cu mai multe spire, aranjate în așa fel ca spirele bobinelor adiacente să aibă sens invers de înfășurare, ceea ce conduce atât la micșorarea sensibilității de cuplaj la câmpurile externe parazite, cât și la micșorarea inductanței totale a bobinei. Un număr de câteva asemenea bobine, fiecare cuplată cu DICS-ul propriu, au funcționat în coincidență, în același criostat, împreună cu un număr de alți detectori de fenomene tranzitorii mecanice și electromagnetice care să imite trecerea unui monopol [19]. În prezent lucrează mai multe grupuri în această direcție, de la IBM, Fermilab și Imperial College, Universitatea din Stanford etc., cu detectori destul de mari (suprafață mare de detecție) care funcționează continuu timp de sute de zile. S-a proiectat un detector cu aria efectivă de colecție de 100 m^2 . De asemenea, un singur eveniment asemenea celui de trecere a unui monopol prin inelul supraconductor a mai fost observat în anul 1987 [20].

11.7. Giroscopul supraconductor.

Verificarea teoriei relativității generale a lui Einstein

Giroscopul este un corp de revoluție care se rotește cu o viteză unghiulară foarte mare în jurul axei sale de simetrie, fiind suspendat într-un punct al acestei axe și având un moment de inerție mult mai mare în raport cu această axă decât în raport cu celelalte ($J_1 = J_2 = J$; $J_3 \gg J$). Giroscopul poate fi:

- centrat, atunci când punctul de suspensie coincide cu centrul de greutate;
- necentrat, când acest punct fix nu coincide cu centrul de greutate.

În tehnică giroscopul este utilizat ca stabilizator al mișcării diferitelor vehicule (vapoare, avioane, trenuri monorail, etc.) precum și în construcția aparatelor direcționale pentru controlul și dirijarea rachetelor și proiectilelor. El are proprietatea de stabilitate a axei de rotație care rezultă direct din ecuațiile de mișcare ale solidului cu punct fix.

Relativitatea generală arată că axa de rotație a unui giroscop ce se deplasează pe o orbită în jurul Pământului are două mișcări de precesie distincte, care sunt lente [21]. Acestea sunt prezentate în Fig. 11.10 a și, respectiv, b. În primul caz se consideră că giroscopul se rotește pe o orbită în jurul masei M (Pământul) staționare (adică se presupune că Pământul nu efectuează mișcare de rotație în jurul axei sale). Apare o mișcare de precesie a axei giroscopului numită mișcare de precesie geodezică ce depinde de masa Pământului și nu de mișcarea sa de rotație (precesia Thomas cauzată de gravitație). Ea este analoagă precesiei periheliului lui Mercur și are frecvența de precesie în jur de 55 secunde de arc pe an.

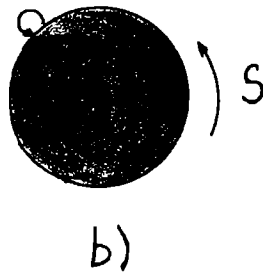
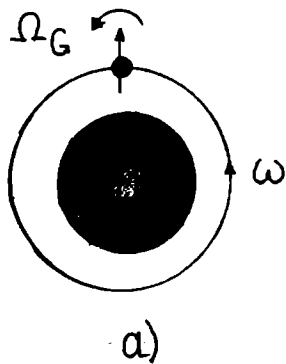


Fig. 11.10

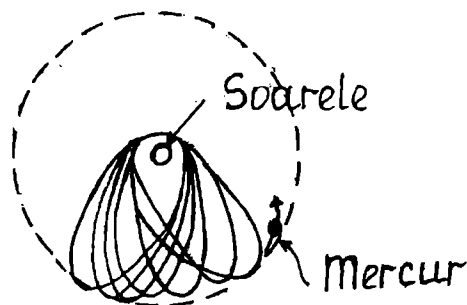


Fig. 11.11

A doua mișcare de precesie are o frecvență mai mică, de 0,7 secunde de arc pe an și este dată de efectul Lense-Thirring [22-23], care constă în antrenarea unui corp inerțial de către un corp (masă) care se rotește, corpul care se rotește fiind în acest caz Pământul care se rotește în jurul axei sale. Această precesie se datorează interacției dintre momentul de rotație (de spin) al Pământului și giroscop și este analogă interacției hiperfine din fizică; ea poate fi numită precesie hiperfină. Dacă, pentru simplitate, considerăm că giroscopul se deplasează pe o orbită de rază r în jurul Pământului, frecvența de precesie geodezică este dată de expresia [21].

$$\Omega_G = \frac{3kM\omega}{2c^2 r} \quad (7.1)$$

unde K este constanta atracției universale, M este masa Pământului, ω este frecvența de rotație pe orbită a giroscopului și c este viteza luminii. Ca exemplu de precesie geodezică este precesia orbitei lui Mercur în jurul Soarelui, care este reprezentată în Fig. 11.11. În mod normal direcția afeliu-periheliu trebuie să rămână fixă în spațiu. Însă se observă o precesie a periheliului lui Marte (mărită exagerat pe figură), dată de relația de mai sus unde de astă dată M este masa Soarelui iar ω este frecvența unghiulară de rotație a planetei în jurul Soarelui și r este distanța de la Mercur la Soare (presupunând orbita circulară). Frecvența de precesie în acest caz poate fi dedusă și pe o cale simplă. Precesia se datorează faptului că v/c , mai precis v^2/c^2 nu este zero. Viteza cu care se rotește Mercur în jurul Soarelui este (presupunând orbita circulară)

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0,39 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}{7,6 \cdot 10^6} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ m/s}$$

Rezultă $v/c = 1,6 \times 10^{-4}$ și $v^2/c^2 = 2,61 \times 10^{-8}$. Unghiul de avans al periheliului per revoluție împărțit prin 2π este

$$\frac{\delta\theta}{2\pi} = \frac{v^2}{c^2}$$

Se obține $\delta\theta = 3 \times 10^{-2}$ secunde de arc pre revoluție. Perioada planetei Mercur este de 0,24 ani. Pe un secol se obține

$$\delta\theta = \frac{100}{0,24} \cdot 3 \cdot 10^{-2} \approx 13''$$

Valoarea experimentală este de 42,9 secunde iar din teoria generală a relativității (relația 7.1) se obține 43 secunde, ceea ce este în limita erorilor experimentale.

Revenind la mișcarea de precesie hiperfină, când se consideră giroscopul staționar și masa M (Pământul) se rotește în jurul axei sale cu frecvența S , frecvența precesiei hiperfine este dată de expresia

$$\Omega_H = \frac{KI}{c^2 r^3} \left[\frac{3\vec{r}}{r^2} (S\vec{r}) - S \right] \quad (7.2)$$

unde I este momentul de inerție al Pământului. Ambele frecvențe de precesie (geodezică și hiperfină) au valori maxime pentru r minim care are valoarea aproximativ egală cu raza Pământului (evident fiind vorba de un giroscop care se rotește în jurul Pământului). La o altitudine atât de mică raportul

$$\frac{\Omega_H}{\Omega_G} = 0,5 \cdot 10^{-3}$$

astfel că precesia geodezică este esențială. O concluzie interesantă este aceea că frecvențele de precesie ale orbitei giroscopului (Ω_G și Ω_H) nu depind de frecvența unghiulară de rotație a giroscopului în jurul axei sale.

Cu mulți ani în urmă s-a sugerat că se poate plasa un giroscop pe o orbită în jurul Pământului și se poate măsura frecvența de precesie a axei sale de rotație și verifica astfel în mod direct una din concluziile relativității generale, precesia periheliului lui Mercur. Deoarece supraconductibilitatea oferă cea mai precisă metodă de măsură, se construiește un giroscop supraconductor. În acest scop se ia o sferă de cuarț cu diametrul de 67 mm (cu o precizie de ± 1 mm), perfect omogenă. Suprafața sferei se acoperă cu un strat subțire supraconductor de exemplu din niobiu. Acesta levitează într-o carcasă din cuarț sub acțiunea unor forțe electrostatice și este pusă în mișcare de rotație în jurul axei sale cu ajutorul unui jet de heliu gazos. Carcasa este introdusă într-un vas din cuarț ce conține heliu lichid (dacă se utilizează niobiu) și sistemul este plasat pe o orbită în jurul Pământului la o altitudine de aproximativ 800 km, cu o înclinare a orbitei de 37° . Direcția axei de rotație a giroscopului se măsoară cu precizie în raport cu o axă fixată către poziția unei stele fixe. În acest scop se utilizează un telescop care localizează steaua aleasă ca reper. Telescopul este plasat împreună cu giroscopul în incinta se heliu lichid. Supraconductorul (giroscopul) în rotație generează un moment manetic. Când un inel supraconductor circular se rotește cu viteza unghiulară ω_0 apare o deplasare de fază datorată rotației, dată de relația

$$\Delta\theta = 2m\omega_0 A / \hbar$$

unde A este aria secțiunii eficace a inelului perpendiculară pe axa de rotație și $2m$ este masa perechii de electroni. Pentru a satisface condiția ca parametrul de ordine să fie univoc determinat pe un contur de integrare în jurul inelului, condiția de cuantificare a fluxului se modifică și devine

$$\Phi + \frac{2m\omega_0 A}{q} = n\Phi_0$$

Prin urmare, rotația generează un câmp magnetic adițional $B = 2m\omega_0/q$, care este cunoscut sub numele de câmp London. Una din proprietățile cele mai importante ale câmpului London este că el se alinează perfect cu axa de rotație. Datorită precesiei momentul London își modifică direcția. Această modificare este sesizată de primarul unui transformator de flux cuplat la un DICS. Bobina primară conține o singură spirală, o bandă depusă prin evaporare pe suprafața interioară a carcasei de cuarț care conține giroscopul. DICS-ul utilizat are sensibilitatea apropiată de limita cuantică.

Desigur că ne putem imagina și alt sistem de măsură a unghiului de deviație a axei giroscopului (a precesiei) în raport cu o axă fixă. În acest scop se focalizează imaginea stelei fixe luată ca reper pe o rețea de celule fotoelectrice fixată de giroscop, astfel că o modificare a unghiului dintre axa giroscopului și axa fixă modifică poziția imaginii stelei pe rețeaua de celule fotoelectrice și produce o modificare a curentului fotoelectric. Programul este în curs de dezvoltare pe bază de supraconductori [24].

Verificarea experimentală a relativității generale depinde de trei măsurători astronomice: deplasarea gravitațională spre roșu, deflecția luminii în câmpul gravitațional al Soarelui și precesia periheliului lui Mercur. Am văzut în § 11.3 cum poate fi verificată deplasarea gravitațională spre roșu utilizând joncțiuni Josephson și în acest paragraf cum poate fi măsurată precesia unui giroscop supraconductor.

A N E X A

A DOUA CUANTIFICARE ȘI TEORIA MICROSCOPICĂ A SUPRACONDUCTIBILITĂȚII

A.1. Operatori de generare și anihilare

Utilizarea operatorilor de generare și anihilare, numită și tehnica „cuantificării a doua” oferă o cale convenabilă de tratare cu ajutorul mecanicii cuantice a sistemelor de mai multe particule. Ea nu reprezintă o extensie a conceptelor și ideilor mecanicii cuantice, ci mai degrabă o tehnică de simplificare a scrierii ecuațiilor pentru sistemele de mai multe particule.

Considerăm un sistem de particule identice care satisfac statistica Fermi-Dirac. Notăm cu q setul total de coordonate (poziție și spin) ale unei particule și cu $u_k(q)$, $k = 1, 2, 3, \dots$, un set complet de funcții de undă ortonormată ale unei singure particule. Acest set nu este necesar să fie corelat cu hamiltonianul sistemului de N particule nici chiar pentru $N = 1$. Funcția de undă cea mai generală a sistemului de N particule poate fi dezvoltată ca o sumă de determinanți Slater; fiecare determinant Slater este asociat cu o configurație n_1, n_2, n_3, \dots unde $n_k = 1$ dacă funcția $u_k(q)$ există în determinant și $n_k = 0$ dacă aceasta nu există. Singurele valori posibile ale lui n_k sunt 0 și 1, deoarece determinantul Slater se anulează dacă o funcție oarecare $u_k(q)$ apare mai mult decât o singură dată. Aceasta este o cale mai complicată de exprimare a principiului lui Pauli: într-o anumită stare nu există decât o singură particulă. Ca un exemplu particular să considerăm o stare antisimetrică construită din funcțiile $u_k(q)$ și $u_l(q)$. Cu normarea proprie la unitate aceasta este descrisă de funcția

$$\Phi_{kl}(q_1, q_2) = 2^{-1/2} \{u_k(q_1)u_l(q_2) - u_k(q_2)u_l(q_1)\} \quad (1.1)$$

Notăm că ordinea k și l stabilește semnul funcției

$$\Phi_{kl}(q_1, q_2) = -\Phi_{lk}(q_2, q_1) \quad (1.2)$$

Relația (1.2) arată că Φ_{kl} se anulează identic pentru $k = l$, așa cum rezultă din principiul lui Pauli. Cea mai generală funcție antisimetrică $\varphi(q_1, q_2) = -\varphi(q_2, q_1)$ a unei perechi de particule poate fi scrisă ca o superpoziție de funcții de forma (1.1) astfel. Introducem coeficienții Fourier φ_{kl} în forma uzuală

$$\varphi_{kl} = \iint dq_1 dq_2 u_k^*(q_1)u_l^*(q_2)\varphi(q_1, q_2) \quad (1.3)$$

Integrala după q înseamnă integrala după coordonatele spațiale și sumarea după coordonatele de spin ale particulei i . Deoarece $\varphi(q_1, q_2)$ este antisimetrică, ec. (1.2) implică antisimetria coeficientului Fourier

$$\varphi_{kl} = -\varphi_{lk} \quad (1.4)$$

Se poate dezvolta $\varphi(q_1, q_2)$ astfel

$$\begin{aligned}\varphi(q_1, q_2) &= \sum_{k,l} \varphi_{kl} u_k(q_1) u_l(q_2) = \frac{1}{2} \sum_{k,l} \varphi_{kl} \{u_k(q_1) u_l(q_2) - u_k(q_2) u_l(q_1)\} = \\ &= 2^{-1/2} \sum_{k,l} \varphi_{kl} \Phi_{kl}(q_1, q_2)\end{aligned}\quad (1.5)$$

Introducem acum operatorul de generare c_k^+ care ne permite să construim configurația generală a unei particule la un timp dat pornind de la starea de vid $|0\rangle$ în care nu este prezentă nici o particulă. Astfel $c_k^+|0\rangle$ înseamnă o stare cu o particulă cu funcția de undă $u_k(q_1)$. Dacă operăm asupra acestei stări cu operatorul de generare c_l^+ obținem o stare cu două particule cu a doua particulă în starea l , adică

$$c_l^+ c_k^+ |0\rangle = \Phi_{kl}(q_1, q_2) \quad (1.6)$$

Ec. (1.2) implică relația de anticomutare

$$c_l^+ c_k^+ = -c_k^+ c_l^+ \quad (1.7)$$

Principiul lui Pauli afirmă că într-o anumită stare k nu se poate găsi decât o singură particulă. Astfel, aplicarea repetată a operatorului de generare c_k^+ trebuie să dea un rezultat nul,

$$(c_k^+)^2 = 0 \quad (1.8)$$

Aceasta este de fapt o consecință imediată a relației de anticomutare (1.7). Funcția mai generală (1.5) a perechii poate fi scrisă de asemenea în funcție de operatorii de generare care acționează asupra stării de vid. Introducem operatorul de generare a unei perechi a^+ asociat cu funcția de undă a perechii $\varphi(q_1, q_2)$ prin definiția

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k,l} \varphi_{kl} c_l^+ c_k^+ \quad (1.9)$$

Prin compararea cu (1.5) și (1.6) se poate scrie

$$a^+ |0\rangle = \varphi(q_1, q_2) \quad (1.10)$$

Din aceste relații se observă avantajul scrierii simplificate cu ajutorul acestor operatori. Dar o simplificare considerabilă apare evident atunci când considerăm un număr mare de particule. De exemplu, dacă se consideră N electroni (N par) împerecheați și cele $N/2$ perechi ocupă aceeași stare φ a unei perechi, atunci starea fundamentală a celor N particule este descrisă de o funcție care este un produs antisimetrizat de funcții de undă ale perechii

$$\Psi_N = C_N \sum_P (-1)^P P[\varphi(1,2)\varphi(3,4)\dots\varphi(N-1,N)] \quad (1.11a)$$

unde C_N este o constantă de normare și sumarea se extinde peste toate cele N permutări ale celor N particule. Această funcție de undă se poate obține prin aplicarea operatorului a^+ succesiv de $N/2$ ori stării de vid. Spre deosebire de pătratul lui c_k^+ pătratul lui a^+ nu trebuie să se anuleze. Funcția de undă (1-11a) se scrie

$$\Psi_N = C_N (a^+)^{N/2} |0\rangle \quad (1.11b)$$

Comparând ultimele două relații se observă simplificarea importantă pe care o aduc operatorii de generare. Nu mai este necesară acum sumarea după permutări; antisimetria funcției (1.11b) este asigurată de relația (1.7) de anticomutare a operatorilor de generare. Operatorii de generare sunt suficienți pentru a descrie forma cea mai generală a funcției de undă a N particule, așa după cum vom vedea mai departe. Însă dacă dorim să scriem expresiile pentru operatorii liniari care acționează asupra funcțiilor a N particule (de exemplu Hamiltonianul) este necesar să introducem operatorii conjugați hermitici ai operatorilor de generare numiți operatori de anihilare. Operatorul c_k de anihilare micșorează cu o unitate numărul de ocupare n_k al stării k . De exemplu, dacă configurația $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ are $n_k = 1$, aplicarea operatorului c_k conduce la configurația cu $n_k = 0$. Dacă configurația dată are deja $n_k = 0$, aplicarea operatorului de anihilare conduce la un

rezultat nul. Deoarece n_k nu poate fi egal decât cel mult cu o unitate, aplicarea repetată a operatorului c_k dă întotdeauna rezultatul zero, adică există identitatea operatorială

$$c_k^2 = 0 \quad (1.12)$$

Această identitate poate fi dedusă din (1.8) efectuând conjugata hermitică în ambii membri (conjugata hermitică a operatorului zero este operatorul zero). Efectuând conjugata hermitică în ambii membri ai ec. (1.7) obținem relația de anticomutare pentru operatorii de anihilare

$$c_l c_k = -c_k c_l \quad (1.13)$$

Ec. (1.12) se obține din ec. (1.13) pentru $k = l$. Să considerăm acum efectele operatorului $c_k^+ c_k$. Să considerăm întâi că acționează asupra configurației de N particule în care starea k este ocupată, adică $n_k = 1$. Aplicarea operatorului c_k conduce la configurația a $(N-1)$ particule cu $n_k = 0$; dar aplicarea în continuare a operatorului c_k^+ readuce starea k în sistem. Prin urmare în total nu s-a schimbat nimic astfel că pentru această configurație $c_k^+ c_k$ este echivalent cu 1. Pe de altă parte, dacă configurația a N particule nu are particula în starea k , adică $n_k = 0$, aplicarea operatorului de anihilare c_k dă un rezultat nul adică o funcție nulă și nu mai există posibilitatea să acționeze operatorul c_k^+ asupra configurației. (Este necesar să facem o distincție clară între starea de vid $|0\rangle$, care este o stare cuantică posibilă normată la unitate și o funcție de undă anulată, care nu este normată). Aplicarea lui c_k unei configurații cu $n_k = 0$ conduce la o funcție de undă anulată, nu la o stare de vid). Astfel, am obținut relațiile

$$c_k^+ c_k = 1 \text{ când acționează asupra configurației cu } n_k = 1 \\ = 0 \text{ când acționează asupra configurației cu } n_k = 0$$

Conchidem că operatorul $c_k^+ c_k$ este un operator analog cu numărul de ocupare n_k , adică

$$(n_k)_{\text{operator}} = c_k^+ c_k \quad (1.15)$$

Considerăm acum operatorul $c_k c_k^+$. Prin analogie cu cele de mai sus, rezultă că aplicarea acestui operator unei configurații cu $n_k = 0$, restabilește configurația, pe când aplicarea la o configurație cu $n_k = 1$ dă un rezultat nul. Astfel

$$c_k c_k^+ = 1 - (n_k)_{op} = 1 - c_k^+ c_k \quad (1.16)$$

Considerăm acum un eveniment de împrăștiere în care o singură particulă dintr-o configurație este transferată din starea k' în starea \bar{k} . Pentru ca acest eveniment să aibă loc este necesar ca în configurația inițială $n_{k'} = 1$ și $n_{\bar{k}} = 0$. În starea finală, configurația are $n_{\bar{k}} = 1$ și $n_{k'} = 0$. Dacă \bar{k} și k' sunt stări diferite cum vom presupune momentan, acest transfer poate fi efectuat de oricare din cei doi operatori $c_{\bar{k}} c_{k'}$ și $c_{k'}^+ c_{\bar{k}}$. Ambii operatori au efectul de micșorare a lui $n_{k'}$ de la 1 la 0 și de creștere a lui $n_{\bar{k}}$ de la 0 la 1. Ambii operatori dau rezultatul nul, dacă configurația inițială nu satisface condițiile $n_{k'} = 1$ și $n_{\bar{k}} = 0$. Menționăm că cei doi operatori sunt echivalenți cu excepția semnului, adică

$$c_{\bar{k}} c_{k'} = -c_{k'}^+ c_{\bar{k}} \text{ pentru } k \neq k' \quad (1.17)$$

Relațiile (1.16) și (1.17) pot fi scrise printr-o singură relație de anticomutare

$$c_k^+ c_{k'} + c_{k'} c_k = \delta_{kk'} \quad (1.18)$$

Relațiile de anticomutare (1.7), (1.13) și (1.18) determină setul de operatori c_k și c_k^+ în sensul algebric. Pentru a vedea aceasta, să considerăm un alt set de operatori α_k și α_k^+ care satisfac relațiile (1.7), (1.13) și (1.18). Se poate arăta că α_k diferă de c_k numai printr-o transformare de similaritate, adică există un operator hermitic S , astfel că

$$\alpha_k = e^{is} c_k e^{-is}; \quad \alpha_k^+ = e^{is} c_k^+ e^{-is} \quad (1.19)$$

pentru toate valorile lui k . Să găsim în continuare expresiile operatorilor liniari care intră în Hamiltonian. Acești operatori sunt de două tipuri: sumă de operatori uniparticulă și sumă de operatori biparticulă. Să notăm cu J o sumă de operatori uniparticulă

$$J = \sum_{i=1}^N j(i) \quad (1.20)$$

unde $j(i)$ este un operator care acționează numai asupra coordonatelor particulei i . Fie $\langle k|j|k' \rangle$ elementul de matrice al operatorului j între stările uniparticulă $u_k(q)$ și $u_{k'}(q)$, adică

$$\langle k|j|k' \rangle = \int dq u_k^*(q) j_{op} u_{k'}(q) \quad (1.21)$$

Se poate arăta [1] că aplicarea operatorului J (1.20) la o configurație arbitrară de N particule este echivalentă cu aplicarea operatorului

$$J = \sum_{kk'} \langle k|j|k' \rangle c_k^+ c_{k'} \quad (1.22)$$

Din punct de vedere fizic, această echivalență poate fi înțeleasă astfel: operatorul $c_k^+ c_{k'}$ conduce la o împrăștiere din starea k' în starea k și acest proces este asociat cu elementul de matrice (1.21). Deși fiecare din operatorii c_k și c_k^+ nu conservă numărul de particule, produsul $c_k^+ c_{k'}$ lasă invariant numărul de particule așa cum este necesar.

Reamintim că (1.22) nu reprezintă o generalizare a expresiei (1.20), ci mai degrabă o metodă convenabilă de a scrie efectul lui (1.20), atunci când se aplică configurației celei mai generale de N particule. Un avantaj imediat al expresiei (1.22) este că nu include explicit numărul N de particule. Dacă considerăm două sisteme cu numere diferite de particule N și N' , forma operatorului (1.20) este diferită (există N termeni în sumă pentru primul sistem și N' termeni pentru al doilea sistem). Dimpotrivă, forma operatorului (1.22) rămâne aceeași în ambele cazuri. Un exemplu particular de aplicație a (1.22) este operatorul numărului de particule din sistem. Acest operator poate fi scris sub forma (1.20), prin substituirea lui $j(i)$ cu 1 (unitatea). Din (1.21) și utilizând proprietatea de ortonormare a funcției $u_k(q)$, elementele de matrice ale acestui operator particular sunt $\delta_{kk'}$. Din (1.22) se obține

$$N_{op} = \sum_k c_k^+ c_k \quad (1.23)$$

în concordanță cu (1.15): numărul total de particule este egal cu suma tuturor numerelor de ocupare. Considerăm acum suma de operatori a două particule

$$T = \sum_{i < j}^N t(i, j) \quad (1.24)$$

unde $t(i, j)$ acționează numai asupra coordonatelor particulelor i și j . Un exemplu de acest fel de operator este energia de repulsie Coulomb dintre electroni. Definim elementul de matrice al lui t în modul uzual

$$\langle k|t|k'l' \rangle = \iint dq_1 dq_2 u_k^*(q_1) u_l^*(q_2) t_{op}(1,2) u_{k'}(q_1) u_{l'}(q_2) \quad (1.25)$$

Se poate arăta că aplicația lui T (1.24) unei configurații de N particule este echivalentă cu aplicarea operatorului

$$T = \frac{1}{2} \sum_{kk'l'l'} \langle k|t|k'l' \rangle c_k^+ c_l^+ c_l c_k \quad (1.26)$$

Remarcăm ordinea indicilor operatorilor de anihilare, în acord cu relația (1.13). Operatorul $c_k^+ c_l^+ c_l c_k$ descrie un eveniment în care două particule interacționează, astfel încât ele execută tranziția din starea inițială $k'l'$ în starea finală k . Acest operator dă automat rezultatul zero, dacă configurația inițială nu satisface condițiile: $n_k = n_l = 0$ și $n_k = n_l = 1$. Având în vedere că suma (1.26) se efectuează peste toate valorile indicilor și relațiile de anticomutare (1.7) și (1.13) se poate înlocui elementul de matrice t din (1.26) prin elementul de matrice antisimetrizat

$$\langle k|t|k'l' \rangle \rightarrow \frac{1}{4} [\langle k|t|k'l' \rangle - \langle l|t|k'l' \rangle - \langle k|t|l'k' \rangle + \langle l|t|l'k' \rangle] \quad (1.27)$$

c_k^+ și c_k sunt operatorii de generare și anihilare fermionici.

În continuare scriem rezultatele corespunzătoare pentru sistemul de bosoni. Aceste rezultate sunt necesare la studiul interacției electron-fonon, deoarece fononii se supun statisticii Bose-Einstein. Relațiile (1.15), (1.22) și (1.26) rămân la fel pentru bosoni. În relația (1.27) toți

termenii au semnul plus (simetrizare în loc de antisimetrizare). În locul relațiilor de anticomutare (1.7), (1.13) și (1.18) se obțin relațiile de comutare

$$\begin{aligned} a_k^+ a_l^+ &= a_l^+ a_k^+ \\ a_k a_l &= a_l a_k \\ a_k a_{k'}^+ - a_{k'}^+ a_k &= \delta_{kk'} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Se poate arăta că operatorii a_k și a_k^+ sunt determinați de relațiile (1.2) și satisfac transformarea de similaritate (1.19). Dar, spre deosebire de cazul fermionilor, operatorul $a_k^+ a_k$ are valorile proprii 0, 1, 2, 3, ..., pe când operatorul fermionic $c_k^+ c_k$ are numai valorile proprii 0 și 1.

Să transcriem în notațiile cuantificării a doua Hamiltonianul sistemului multielectronic

$$\mathcal{H} = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V(\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_j) + \sum_{i,k} v(\vec{r}_i - \vec{R}_k) \quad (1.29)$$

care conține termenul cinetic al electronilor, termenul de interacție electron-electron și termenul de interacție electron-ion. Pe baza relațiilor (1.22) și (1.26) scriem

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$$

unde

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k\sigma, k'\sigma'} \langle k\sigma | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 | k'\sigma' \rangle c_{k\sigma}^+ c_{k'\sigma'} \quad (1.30)$$

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{k\sigma, k'\sigma'} \langle k\sigma | v(\vec{r}) | k'\sigma' \rangle c_{k\sigma}^+ c_{k'\sigma'} \quad (1.31)$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\substack{k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 \\ k_1'\sigma_1', k_2'\sigma_2'}} \langle k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | k_1'\sigma_1', k_2'\sigma_2' \rangle c_{k_1\sigma_1}^+ c_{k_2\sigma_2}^+ c_{k_2'\sigma_2'} c_{k_1'\sigma_1'} \quad (1.32)$$

unde am notat starea k prin vectorul de undă k și numărul cuantic de spin σ ș.a.m.d. În expresiile de mai sus intervin elementele de matrice care pentru a fi calculate este necesar să explicităm forma funcțiilor de undă. Să considerăm funcțiile de undă uniparticulă sub forma

$$\psi_{k\sigma} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \mu_k(\vec{r}) \chi_\sigma \quad (1.33)$$

care reprezintă funcția de undă Bloch (o undă plană modulată de funcția $\mu_k(\vec{r})$ care satisface condiția de periodicitate $\mu_k(\vec{r}) = \mu_k(\vec{r} + \vec{a}_n)$, unde \vec{a}_n este vectorul rețelei directe, \vec{k} este vectorul de undă al electronului), iar χ_σ este funcția stării de spin. Elementul de matrice din (1.30) devine

$$\langle k\sigma | -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 | k'\sigma' \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \delta_{\sigma\sigma'} \frac{1}{\Omega} \int e^{i(\vec{k}' - \vec{k})\vec{r}} d\vec{r} = \varepsilon_k \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{kk'}$$

pentru gazul electronilor liberi, adică în expresia (1.33), $\mu_k(\vec{r}) = 1$. Se poate demonstra că această relație este adevărată și pentru electronii în câmpul de potențial periodic cu o aproximație până la un termen constant. Prin urmare, în reprezentarea cuantificării a doua, Hamiltonianul electronilor (1.30) se scrie

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma} \quad (1.34)$$

unde ε_k este energia stării electronului cu cuasiimpulsul $\hbar\vec{k}$. Pentru elementul de matrice din (1.31) se obține

$$\langle k\sigma | v(\vec{r}) | k'\sigma' \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \frac{1}{\Omega} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} v(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{\sigma\sigma'} v_q$$

unde v_q este transformata Fourier a energiei potențiale a electronilor în câmpul ionilor ficși și $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$. Prin urmare, expresia (1.31) se poate scrie

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{kq\sigma} v_q c_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}^+ c_{k\sigma} \quad (1.35)$$

Pentru elementul de matrice (1.32) utilizând, de asemenea, funcția de undă (1.33) pentru $u_{\vec{r}}(\vec{r})=1$, se obține

$$\begin{aligned} \langle k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | k_1'\sigma_1', k_2'\sigma_2' \rangle &= \frac{\delta_{\sigma_1\sigma_1'} \delta_{\sigma_2\sigma_2'}}{\Omega^2} \iint e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_1')\vec{r}_1 + i(\vec{k}_2 - \vec{k}_2')\vec{r}_2} V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 = \\ &= \delta_{\sigma_1\sigma_1'} \delta_{\sigma_2\sigma_2'} \frac{1}{\Omega} \int e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_1' + \vec{k}_2 - \vec{k}_2')\vec{r}} d\vec{r} \frac{1}{\Omega} \int e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_1' - \vec{k}_2 + \vec{k}_2')\vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned}$$

În expresia finală s-au introdus noile variabile $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ și $\vec{R} = (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2$. Rezultă

$$\langle k_1\sigma_1, k_2\sigma_2 | V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | k_1'\sigma_1', k_2'\sigma_2' \rangle = \delta_{\sigma_1\sigma_1'} \delta_{\sigma_2\sigma_2'} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2, \vec{k}_1' + \vec{k}_2'} V_{\frac{\vec{k}_1 - \vec{k}_1' - \vec{k}_2 + \vec{k}_2'}{2}}$$

Utilizând notațiile $\vec{k}_1' - \vec{k}_1 = \vec{k}_2' - \vec{k}_2 = \vec{q}$ și $\vec{k}_1 = \vec{k}$, $\vec{k}_2 = \vec{k}'$, $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = \sigma'$ se obține pentru Hamiltonianul interacțiunii dintre electroni expresia

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k, k', q \\ \sigma, \sigma'}} v_q c_{\vec{k}+\vec{q},\sigma}^+ c_{\vec{k}'-\vec{q},\sigma'}^+ c_{k'\sigma'} c_{k\sigma} \quad (1.36)$$

A.2. Hamiltonianul de interacțiune electron-fonon în reprezentarea cuantificării a doua.

Interacțiunea electronilor cu ionii cristalului este descrisă de ultimul termen al Hamiltonianului (1.29)

$$\sum_{j,l} v(\vec{r}_j - \vec{R}_l)$$

Deplasările ionilor din pozițiile de echilibru sunt mici, astfel că se poate dezvolta în serie termenul energiei de interacțiune

$$\sum_{j,l} v(\vec{r}_j - \vec{R}_l) = \sum_{j,l} v(\vec{r}_j - \vec{R}_l^0) + \sum_{j,l} \left(\frac{\partial v(\vec{r}_j - \vec{R}_l)}{\partial \vec{R}_l} \right) \vec{x}_l \quad (2.1)$$

unde am reținut numai termenul de ordinul întâi în deplasarea $\vec{x}_j = \vec{R}_j - \vec{R}_j^0$. Primul termen din dreapta ecuației (2.1) se include în Hamiltonianul sistemului de electroni și datorită periodicității sale determină stările Bloch ale electronului în rețeaua periodică. Interacțiunea dintre electron și fonon este caracterizată de cel de al doilea termen din dreapta ecuației (2.1)

$$\mathcal{H}_q = - \sum_{j,l} \frac{\partial v(\vec{r}_j - \vec{R}_l^0)}{\partial (\vec{r}_j - \vec{R}_l^0)} \vec{x}_l \quad (2.2)$$

Am scris Hamiltonianul în aproximația numită „modelul ionului rigid”. Conform cu acest model, caracterul interacțiunii nu se modifică la deplasarea ionului, adică $V(\vec{r}_j - \vec{R}_l)$ nu depinde dacă prin \vec{R}_l înțelegem \vec{R}_l^0 sau $\vec{R}_l^0 + \vec{x}_l$. Pentru a scrie Hamiltonianul de interacțiune în formalismul cuantificării a doua, trebuie să scriem în acest formalism atât pe \vec{x}_l , cât și gradientul energiei potențiale. Să considerăm o rețea simplă alcătuită din N atomi identici de masă M. Din teoria oscilațiilor rezultă

$$\vec{x}_l = \sum_q \sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega}} e^{i\vec{q}\vec{R}_l^0} \vec{e}_q^* (a_q + a_{-q}^+) \quad (2.3)$$

unde \vec{q} este vectorul de propagare al undei acustice longitudinale, \vec{e}_q^* este vectorul de polarizare (care indică direcția oscilației atomilor), ω este frecvența de oscilație, N este numărul celulelor elementare, iar a_q^+ și a_q sunt operatorii de generare și, respectiv, de anihilare a fononilor în starea q . Am considerat numai fononii acustici longitudinali, deoarece se face aproximația majoră că numai aceștia sunt efectivi în interacțiunea cu electronii. Descompunem $V(\vec{r}_j - \vec{R}_l)$ în serie Fourier

$$V(\vec{r}_j - \vec{R}_l) = \sum_{\chi} V_{\chi} e^{i\vec{\chi}(\vec{r}_j - \vec{R}_l)}$$

unde V_{χ} este transformata Fourier a energiei potențiale de interacțiune. Așadar,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ef} &= -\sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega}} \sum_{j,q,\chi} (\vec{e}_q^* \cdot i\vec{\chi}) (a_q + a_{-q}^+) V_{\chi} e^{i\vec{\chi}\vec{r}_j} \sum_l e^{i(\vec{q}-\vec{\chi})\vec{R}_l} = \\ &= -\sqrt{\frac{N\hbar}{2M\omega}} \sum_q (\vec{e}_q^* \cdot i\vec{\chi}) V_q (a_q + a_{-q}^+) \sum_j e^{i\vec{q}\vec{r}_j} \end{aligned} \quad (2.4)$$

unde am avut în vedere relațiile

$$\sum_l e^{i(\vec{q}-\vec{\chi})\vec{R}_l} = \begin{cases} N, & q = \chi \\ 0, & q \neq \chi \end{cases}$$

În spațiul numerelor de ocupare, operatorul $\sum_j \exp(i\vec{q}\vec{r}_j)$ se scrie sub forma

$$\sum_j e^{i\vec{q}\vec{r}_j} = \sum_{k\sigma, k'\sigma'} \langle k'\sigma' | e^{i\vec{q}\vec{r}} | k\sigma \rangle c_{k\sigma}^+ c_{k\sigma}$$

unde $c_{k\sigma}$ este operatorul de anihilare și $c_{k\sigma}^+$ este operatorul de generare de electroni. Elementul de matrice

$$\langle k'\sigma' | e^{i\vec{q}\vec{r}} | k\sigma \rangle = \delta_{\sigma'\sigma} \int \Psi_{k'}^*(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \Psi_k(\vec{r}) d\vec{r}$$

unde $\Psi_k(\vec{r})$ sunt funcții Bloch. Notăm $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{R}_l$, unde \vec{r}_0 este definit pe celula elementară și având în vedere condiția de translație

$$\Psi(\vec{r}_0 + \vec{R}_l) = e^{i\vec{k}\vec{R}_l} \Psi(\vec{r}_0)$$

și relația de sumare

$$\sum_l e^{i(\vec{k}+\vec{q}-\vec{k}')\vec{R}_l} = N\delta_{\vec{k}+\vec{q}, \vec{k}'}$$

sumând după toate celulele elementare, se obține

$$\langle k'\sigma' | e^{i\vec{q}\vec{r}} | k\sigma \rangle = N\delta_{\sigma'\sigma} \delta_{\vec{k}+\vec{q}, \vec{k}'} \int_{\text{cel}} \Psi_{k'}^*(\vec{r}_0) e^{i\vec{q}\vec{r}_0} \Psi_k(\vec{r}_0) d\vec{r}_0$$

unde ne-am limitat la prima zonă Brillouin. Se observă că acest element de matrice este diferit de zero, numai dacă $\sigma = \sigma'$ și $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$. Pentru mărimile complex-conjugate obținem elementul de matrice al operatorului $\exp(-i\vec{q}\vec{r})$ care este diferit de zero, dacă $\sigma = \sigma'$ și $\vec{k}' = \vec{k} - \vec{q}$. Se poate, deci, scrie

$$\hbar\vec{k}' = \hbar\vec{k} \pm \hbar\vec{q} \quad (2.5)$$

care reprezintă legea de conservare a impulsului la interacția electron-fonon. Dacă nu ne restrângem la procesele care au loc în prima zonă Brillouin, atunci legea de conservare se scrie

$$\hbar\vec{k}' = \hbar\vec{k} \pm \hbar\vec{q} + \hbar\vec{K}_g \quad (2.6)$$

unde \vec{K}_g este un vector al rețelei reciproce. Procesele care satisfac legea de conservare (2.6) se numesc procese Umklapp sau procese de răsturnare (proces „U”). Aceste procese reprezintă generarea sau anihilarea fononului simultan cu reflexia Bragg, în care caz o parte a cuasiimpulsului este transmisă întregii rețele. Procesele de împrăștiere în care este respectată legea de

conservare (2.5) (limitarea la prima zonă Brillouin) se numesc procese normale (proces N). Hamiltonianul de interacție (2.4) poate fi scris sub forma

$$\mathcal{H}_{ef} = i \sum_{k,q,\sigma} B_q c_{k+\vec{q},\sigma}^+ c_{k,\sigma} (a_q + a_{-q}^+) \quad (2.7)$$

unde

$$B_q = \left(\frac{N^3 \hbar}{2M\omega_q} \right)^{1/2} V_q (\vec{e}_q^- \cdot \vec{q}) < \vec{k} + \vec{q} | e^{i\vec{q}\vec{r}} | \vec{k} > \quad (2.8)$$

este elementul de matrice al interacțiunii electron-fonon. Dacă oscilațiile ionilor pot fi clasificate în oscilații longitudinale și oscilații transversale, existența factorului $\vec{e}_q^- \cdot \vec{q}$ arată că singurele oscilații care contribuie la interacțiunea electron-fonon sunt cele longitudinale, deoarece în cazul oscilațiilor transversale unghiul dintre \vec{e}_q^- și \vec{q} este $\pi/2$ și $\cos \pi/2=0$. Elementul de matrice are proprietatea $B_q = B_{-q}$. În general, B_q nu poate fi calculat direct și el este tratat ca un parametru ce poate fi evaluat din comparația cu experiența. Același Hamiltonian, (2.7), poate fi utilizat în calculul rezistivității electrice. Menționăm că interacțiunea dintre electroni ecranează interacțiunea electron-fonon. În primă aproximație, se poate considera că sistemul de fononi reprezintă o excitație externă față de sistemul de electroni și elementul de matrice B_q caracterizează interacțiunea electronilor cu acest „câmp extern”. Această interacțiune induce o polarizare a gazului electronic, care la rândul ei modifică însăși interacțiunea. Se poate face, deci, o analogie cu ecranarea unui câmp extern de către sistemul de electroni. Frecvențele fononice sunt mici în comparație cu frecvențele caracteristice ale sistemului de electroni, raportul lor este de ordinul $\sqrt{m/M}$. De aceea, această ecranare este apropiată de cea din cazul unui câmp static și elementul de interacțiune electron-fonon, efectiv (în cazul ecranării), este dat cu o bună aproximație de expresia

$$B_q^{ef} = \frac{B_q}{\epsilon(q)} \quad (2.9)$$

unde $\epsilon(q)$ este funcția dielectrică statică. Hamiltonianul interacțiunii electron-fonon ecranate, care ia în considerare și interacțiunea electron-fonon, este dat de expresia (2.7), în care B_q se înlocuiește cu B_q^{ef} dat de expresia (2.9). Se poate scrie Hamiltonianul total al sistemului de electroni și fononi în interacțiune

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_{ef} = \sum_q \hbar \omega_q a_q^+ a_q + \sum_k \epsilon_k c_k^+ c_k + i \sum_{q,k} B_q c_{k+\vec{q}}^+ c_k (a_q + a_{-q}^+) \quad (2.10)$$

Pentru simplitate, am neglijat dependența de spinul electronului și energia de zero a vibrațiilor rețelei. Primul termen din partea dreaptă reprezintă Hamiltonianul fononilor, unde $n_q = a_q^+ a_q$ este operatorul numărului de ocupare a fononilor, al doilea termen este Hamiltonianul electronilor cu $n_k = c_k^+ c_k$ operatorul numărului de ocupare al electronilor și ultimul termen reprezintă interacțiunea electron-fonon. Menționăm că particulele sunt cuasielectroni cu o masă efectivă care ia în considerare interacțiunea cu rețeaua cristalină. De asemenea, neglijăm repulsia dintre electroni sau o includem în termenul V_{kk} pe care-l vom defini ulterior. Atât rezultatele experimentale, cât și calculele teoretice indică o diferență de energie pe atom între starea normală și starea supraconductoare de ordinul 10^{-7} eV. Această energie este foarte mică în comparație cu precizia (sau mai bine zis eroarea) cu care se poate calcula valoarea absolută a energiei. Un asemenea calcul este sortit eșecului. De aceea, s-a încercat să se găsească din Hamiltonian acei termeni care sunt responsabili pentru această diferență de energie și s-au păstrat numai acești termeni, restul termenilor fiind eliminați. Rezultatele obținute nu sunt riguroase, însă justificarea lor principală este concordanța cu rezultatele experimentale. Metoda pentru a separa termenul important nu este evidentă și a trebuit mult timp pentru a fi găsită. Prezentăm în continuare o tehnică de separare. Tehnica de separare a termenilor importanți constă în a efectua o transformare

canonică pentru a elimina termenii nediagonali din operatorul care conține B_0 din Hamiltonian. Înainte de aceasta, prezentăm câteva rezultate utile. Întâi deducem o dezvoltare pentru transformarea canonică

$$H_s = e^{-is} H e^{is}$$

unde S este un operator. Dezvoltând în serie operatorii exponențiali, această relație poate fi scrisă

$$\begin{aligned} e^{-is} H e^{is} &= (1 - iS - \frac{1}{2} S^2 + \dots) H (1 + iS - \frac{1}{2} S^2 + \dots) = H - iHS - \frac{1}{2} S^2 H + iHS + SHS - \frac{1}{2} HS^2 = \\ &= H - iSH + iHS - \frac{1}{2} S^2 H + SHS - \frac{1}{2} HS^2 \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} [[H, S], S] &= [HS - SH, S] = HS^2 - SHS - SHS + S^2 H = \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} HS^2 + \frac{1}{2} S^2 H - SHS \right] \end{aligned}$$

rezultă

$$H_s = H + i[H, S] - \frac{1}{2} [[H, S], S] \quad (2.11)$$

Următorii termeni ai dezvoltării pot fi tratați în mod similar. Am omis în scrierea explicită termenii în ordinul S^3 și mai înalt. Al doilea rezultat util se obține utilizând $H = H_0 + XH_{ef}$ în ecuația (2.11), unde X se ia eventual egal cu unitatea. În plus, alegem pe S , astfel încât să fie îndeplinită condiția

$$XH_{ef} + i[H_0, S] = 0 \quad (2.12)$$

Arătăm că, în acest caz, H_s nu conține termeni $O(X)$. Astfel, substituind în (2.11) $H = H_0 + XH_{ef}$, se obține

$$\begin{aligned} H_s &= H_0 + XH_{ef} + i[H_0 + XH_{ef}, S] - \frac{1}{2} [[H_0 + XH_{ef}, S], S] + \dots = \\ &= H_0 + XH_{ef} + i[H_0, S] + iX[H_{ef}, S] - \frac{1}{2} [[H_0, S], S] - \frac{X}{2} [[H_{ef}, S], S] + \dots \end{aligned}$$

Utilizând (2.12), rezultă

$$H_s = H_0 + iX[H_{ef}, S] - \frac{X}{2} [[H_{ef}, S], S] - \frac{1}{2} [[H_0, S], S] + \dots$$

De asemenea, având în vedere (2.12), se poate scrie

$$iX[H_{ef}, S] = [[H_0, S], S]$$

astfel că

$$H_s = H_0 + iX[H_{ef}, S] - \frac{X}{2} [[H_{ef}, S], S] - \frac{iX}{2} [H_{ef}, S]$$

sau

$$H_s = H_0 + \frac{iX}{2} [H_{ef}, S] + O(X^3) \quad (2.13)$$

deoarece $O(S) = X$ (a se vedea ecuația (2.14)). Al doilea termen este de ordinul X^2 . Scopul acestei transformări este de a elimina termenii responsabili pentru rezistivitatea electrică ordinară (a treia aproximație majoră). În Hamiltonianul original, termenii în X contribuie la rezistivitatea electrică ordinară în ordinul întâi. Prin urmare, efectuând transformarea canonică a operatorului

H, operatorul H_S nu conține termeni liniari în factorul de cuplaj electron-fonon, care explică rezistența electrică normală. Prin această transformare menținem numai termenii pătratici relativ la constanta de cuplaj electron-fonon, care explică legătura dintre perechile de electroni în cazul supraconductibilității. Din (2.12) se poate calcula S. Aceasta se poate efectua ușor dacă utilizăm o reprezentare în care H_0 este diagonal. Într-o asemenea reprezentare

$$\langle n | XH_{ef} | m \rangle + \langle n | H_0 S - S H_0 | m \rangle = 0$$

sau

$$\langle n | XH_{ef} | m \rangle + (E_n - E_m) \langle n | S | m \rangle = 0$$

sau

$$\langle n | S | m \rangle = \frac{\langle n | XH_{ef} | m \rangle}{E_m - E_n} \quad (2.14)$$

Această ecuație determină elementele de matrice ale lui S și, prin urmare, definesc operatorul S (pentru $E_n \neq E_m$).

A.3. Eliminarea variabilelor fononice și separarea termenului de atracție electron-electron datorită schimbului virtual de fononi.

Fie XH_{ef} Hamiltonianul de interacțiune electron-fonon al sistemului. Orice operator S care satisface ecuația (2.14) este acceptabil. În această relație, $|n\rangle$ semnifică atât stările electronice, cât și stările fononice. Scopul nostru, în acest paragraf, este să găsim din Hamiltonianul de interacțiune electron-fonon un Hamiltonian efectiv pentru electroni, adică o legătură, efectivă, numai între electroni. De aceea, luăm elementele de matrice numai relativ la stările fononice, menținând operatorii fermionici pentru a fi aplicați stărilor electronice, dar fără a face aceasta (dacă eventual se efectuează această operație, atunci se obține valoarea energiei în aproximația de ordinul al doilea). Luând elementele de matrice relativ la stările fononice avem

$$\begin{aligned} \langle n_{q'} + 1 | S | n_{q'} \rangle &= \frac{\langle n_{q'} + 1 | XH_{ef} | n_{q'} \rangle}{E(\text{total stare inițială}) - E(\text{total stare finală})} = \\ &= i \sum_{k,q} B_q \frac{c_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k \langle n_{q'+1} | a_q + a_{-q}^+ | n_{q'} \rangle}{E_{q'} + \epsilon_k - (E_{q'} + \hbar\omega_{q'}) - \epsilon_{k+q}} = \\ &= i \sum_{k,q} B_q \frac{c_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k \langle n_{q'+1} | a_{-q}^- | n_{q'} \rangle}{E_{q'} - (E_{q'} + \hbar\omega_{q'}) + \epsilon_k - \epsilon_{k+q}} \end{aligned}$$

unde $\hbar\omega_{q'}$ este energia fononului generat și $\omega_{q'} = \omega_{-q'}$. Utilizând relația

$$\langle n_{q'} + 1 | a_q^+ | n_{q'} \rangle = \sqrt{n_{q'} + 1}$$

rezultă

$$\begin{aligned} \langle n_{q'} + 1 | S | n_{q'} \rangle &= i \sum_{k,q} B_q C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k \frac{\sqrt{n_{q'} + 1}}{\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}+\bar{q}'} - \hbar\omega_{q'}} \delta_{q',-q} = \\ &= i \sum_k B_{-q} C_{\bar{k}-\bar{q}'}^+ c_k \frac{\sqrt{n_{q'} + 1}}{\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}+\bar{q}'} - \hbar\omega_{q'}} \quad (3.1) \end{aligned}$$

În mod similar, se poate arăta că

$$\langle n_q | S | n_q + 1 \rangle = i \sum_k B_q C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k \frac{\sqrt{n_q + 1}}{\epsilon_k - \epsilon_{k+q} + \hbar\omega_{q'}} \quad (3.2)$$

În deducerea acestor expresii, am considerat că sistemul de fononi se află la OK și deci, starea $|n_q\rangle$ se definește la starea fononică de vid care se definește cu ajutorul vectorului de stare $|0\rangle$. Deoarece în starea $|0\rangle$ nu sunt fononi, avem $a_q |0\rangle = 0$ și $\langle 0 | a_q = 0$. Prima din aceste relații am utilizat-o la deducerea relației (3.1), iar pe cea de a doua am utilizat-o la deducerea relației (3.2). În continuare, utilizând (2.13)

$$H_S = H_o + \frac{i}{2} [H_{ef} S - S H_{ef}] + \dots$$

cu

$$H_{ef} = i \sum_{k,q} B_q C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k (a_q + a_{-q}^+)$$

(X a fost luat egal cu unitatea) avem

$$\begin{aligned} \langle n | H_S | n \rangle &= \langle n | H_o | n \rangle + \frac{i}{2} \sum_m [\langle n | H_{ef} | m \rangle \langle m | S | n \rangle - \langle n | S | m \rangle \langle m | H_{ef} | n \rangle] = \\ &= \langle n | H_o | n \rangle + \frac{i}{2} [(H_{ef})_{n,n-1} S_{n-1,n} + (H_{ef})_{n,n+1} S_{n+1,n} - S_{n,n-1} (H_{ef})_{n-1,n} S_{n,n+1} (H_{ef})_{n+1,n}] \end{aligned}$$

unde am considerat pentru starea m cele două valori posibile $n-1$ și $n+1$. Am ținut seama de relația

$$\langle n | H_{ef} S | n \rangle = \sum_m \langle n | H_{ef} | m \rangle \langle m | S | n \rangle$$

Întrucât ne interesează numai coordonatele electronice, vom scrie în cele ce urmează în loc de $\langle n_q | H_S | n_q \rangle$ numai H_S și în loc de $\langle n_q | H_o | n_q \rangle$ numai H_o . Considerând, de asemenea, starea cu cel mai mic număr de ocupare fononică de vid, scriem

$$(H_{ef})_{nq,nq-1} = i \sum_k B_{-q} C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_k \sqrt{n_q}$$

și

$$(H_{ef})_{nq,nq+1} = i \sum_k B_q C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k \sqrt{n_q + 1}$$

Prin urmare, Hamiltonianul efectiv pentru electroni devine

$$\begin{aligned} H = H_o + \frac{1}{2} \left\{ \left[B_q \right]^2 \sum_{k,k'} \left[C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_k C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_{k'} n_q \frac{1}{\hbar\omega_q + \epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_{k'} (n_q + 1) \frac{1}{-\hbar\omega_q + \epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_k C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_{k'} n_q \frac{1}{-\hbar\omega_q + \epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}}} - \right. \right. \\ \left. \left. - C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_{k'} (n_q + 1) \frac{1}{\hbar\omega_q + \epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}}} \right\} \end{aligned}$$

Efectuând anumite schimbări de variabilă, eliminând termenii care nu implică interacția electronilor (adică cei care nu conțin atât pe k cât și pe k') și utilizând relațiile de anticomutare pentru operatorii c_k (1.7), (1.13) și (1.18) este posibil să scriem

$$H_S = H_o + \frac{1}{2} |B_q|^2 \sum_{k,k'} C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ C_{k'} C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ C_k \times \left(\frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \hbar\omega_q} - \frac{1}{\epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}} + \hbar\omega_q} \right) + (\text{termeni implicând numai doi operatori fermionici}) \quad (3.4)$$

Termenii care implică numai doi operatori fermionici, care apar în urma operațiilor ce conduc la ec. (3.4) sunt termeni de tipul celor care descriu sistemul de electroni liberi; ei nu participă la interacție și deci îi excludem.

Acest Hamiltonian descrie așanumitele procese virtuale de schimb de fononi și este scris numai pentru un singur mod de fononi și anume modul q . Pentru a lua în considerare toate modurile trebuie să sumăm după q . Astfel, Hamiltonianul de interacție efectiv este dat de expresia

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_q \sum_{k,k'} |B_q|^2 C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ C_{k'} C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ C_k \times \left(\frac{1}{\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \hbar\omega_q} - \frac{1}{\epsilon_{k'} - \epsilon_{\bar{k}'+\bar{q}} + \hbar\omega_q} \right) \quad (3.5)$$

Cele două procese posibile de interacțiune între electroni prin schimbul de fononi virtuali (emisie și absorbție) sunt descrise corespunzător de expresiile $c_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_{k'} c_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_k$ și $c_{\bar{k}+\bar{q}}^+ c_k c_{\bar{k}-\bar{q}}^+ c_{k'}$ care conțin operatori de generare și anihilare de electroni. Expresiile de la numitori descriu tranziția din starea inițială în starea intermediară; de aceea este inclusă și energia fononului $\hbar\omega_q$. Cei doi termeni din paranteza (3.5) pot fi reuniți într-unul singur schimbând indicele de sumare în al doilea termen q cu $-q$. Rezultă

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{kk'q} |B_q|^2 \frac{2\hbar\omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}-\bar{q}})^2 - (\hbar\omega_q)^2} C_{\bar{k}+\bar{q}}^+ C_{\bar{k}-\bar{q}}^+ C_k C_{k'} \quad (3.6)$$

Deci prin interacțiunea cu fononii se comportă ca și când între ei ar exista o interacție directă. Componenta Fourier a potențialului de interacțiune este dată de expresia

$$\langle \bar{k} - \bar{q}, \bar{k}' + \bar{q} | V | \bar{k}, \bar{k}' \rangle = \frac{2|B_q|^2 \hbar\omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}-\bar{q}})^2 - (\hbar\omega_q)^2}$$

În general această expresie este pozitivă și se adaugă ca o corecție la respingerea coulombiană dintre electroni, caracteristică metalului normal. Din relația de mai sus se observă că într-un interval energetic îngust definit de inegalitatea

$$|\epsilon_k - \epsilon_{\bar{k}-\bar{q}}| < \hbar\omega_q \quad (3.7)$$

componenta Fourier a energiei potențiale de interacțiune devine negativă ceea ce corespunde unei atracții dintre electroni. Diagrama interacției dintre electroni cu schimb de fononi este prezentată în Fig. 4.1.

Așa cum am menționat în § 4.1,

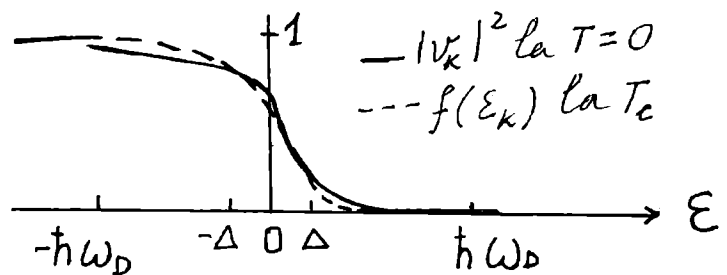


Fig. 4.1

relația (3.7) este valabilă atunci când procesul de interacțiune are loc cu schimb de fononi virtuali deoarece în acest caz nu se pune problema conservării energiei. Criteriul de supraconductibilitate cere ca energia de interacțiune rezultantă dintre schimbul de fononi virtuali și repulsia coulombiană să fie negativă. Această cerință este condiționată de îndeplinirea inegalității (3.7) și de una similară care se obține substituind q cu $-q$. Considerând ca stare fundamentală energia Fermi la OK și energia maximă a fononului $\hbar \omega_D$ unde ω_D este frecvența Debye, inegalitățile

$$\varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} > E_F - \hbar\omega_D, \varepsilon_{\vec{k}+\vec{q}} < E_F + \hbar\omega_D$$

delimitază domeniul energetic al stărilor unielectronice din care se formează starea fundamentală a supraconductibilității. Acest domeniu energetic reprezintă un înveliș de lărgime $2 \hbar \omega_D$ în jurul sferei Fermi. Stările care nu satisfac acest criteriu (3.7) nu sunt implicate în tranziția supraconductoare. Atât Frölich [2] cât și Bardeen (1951) au încercat să elaboreze o teorie microscopică pe baza metodei teoriei perturbațiilor considerând această interacțiune de atracție dintre electroni. Rezultatele obținute nu sunt în concordanță cu cele experimentale. Un pas înainte a fost făcut de către Cooper în 1956 [3] care a arătat că dacă între doi electroni situați în apropierea suprafeței Fermi apare o interacțiune de atracție chiar foarte slabă, aceasta conduce la apariția unei perechi legate de electroni. Electronii din pereche, numită pereche Cooper, au impulsuri și spini de semn contrar. Cooper a făcut ipoteza fundamentală că starea supraconductoare este determinată de existența acestor perechi de electroni legați. Teoria lui Cooper este expusă în § 4.2 și nu o mai reproducem aici.

A. 4. Hamiltonianul BCS

Teoria microscopică a supraconductibilității elaborată de către Bardeen, Cooper și Schrieffer și cunoscută sub numele de teoria BCS utilizează Hamiltonianul [4]

$$H = \sum_{k\sigma} \varepsilon_k C_{k\sigma}^+ C_{k\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k'q \\ \sigma\sigma'}} V_q C_{\vec{k}'+\vec{q},\sigma}^+ C_{\vec{k}-\vec{q},\sigma}^+ C_{k\sigma} C_{k'\sigma'} \quad (4.1)$$

în care se ia în considerare interacțiunea de atracție dintre electroni și din aceasta numai acei termeni care corespund la impulsuri și spini de semne contrare, adică perechilor de electroni. Având în vedere Hamiltonianul de interacție (3.6) prin V_q s-a notat

$$V_q = |B_q|^2 \frac{2\hbar\omega_q}{(\hbar\omega_q)^2 - (\varepsilon_k - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}})^2}$$

Dacă în termenul de interacție (4.1) schimbăm \vec{k} cu $-\vec{k}'$, renotăm indicii conform cu relația $\vec{k}' + \vec{q} - \vec{k}$ și schimbăm din nou \vec{k} cu \vec{k}' rezultă

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{k,k'} V_{\vec{k}'-\vec{k}} \sum_{\sigma,\sigma'} C_{k'\sigma'}^+ C_{-k'\sigma}^+ C_{-k,\sigma} C_{k,\sigma'} \quad (4.2)$$

Efectuăm sumarea după spini antiparaleli

$$\sum_{\sigma\sigma'} C_{k'\sigma'}^+ C_{-k'\sigma}^+ C_{-k,\sigma} C_{k,\sigma'} = C_{k'\uparrow}^+ C_{-k'\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} + C_{-k'\uparrow}^+ C_{k'\downarrow}^+ C_{k\downarrow} C_{-k\uparrow} \quad (4.3)$$

Ținând seama de această ultimă relație în (4.2) și de faptul că $V_{\vec{k}'-\vec{k}} = V_{\vec{k}-\vec{k}'}$, se observă că cel de al doilea termen (cel care conține ultimul termen di (4.3)) devine identic cu primul termen dacă devine identic cu primul termen dacă schimbăm \vec{k} cu $-\vec{k}$ și \vec{k}' cu $-\vec{k}'$. În acest fel sumarea după spinii antiparaleli este echivalentă cu înmulțirea cu un factor egal cu 2. Adoptăm în cele ce urmează următoarea notație la indici: pentru semnul pozitiv al lui \vec{k} sau \vec{k}' avem spin sus iar

pentru semnul negativ al acestora avem spin jos, adică $c_{k\uparrow} = c_k, c_{-k\downarrow} = c_{-k}$ etc. Termenul care reprezintă Hamiltonianul electronilor liberi în (4.1) îl scriem sub forma

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k (C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow} + C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow}) \equiv \sum_k \epsilon_k (C_k^+ C_k + C_{-k}^+ C_{-k})$$

iar termenul de interacțiune se scrie

$$H_I = + \sum_{kk'} V_{\bar{k}'-\bar{k}} C_{k\uparrow}^+ C_{-k'\downarrow}^+ C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} = \sum_{kk'} V_{\bar{k}'-\bar{k}} C_k^+ C_{-k'}^+ C_{-k} C_k$$

Prin urmare Hamiltonianul BCS este dat de expresia

$$H_{BCS} = \sum_k \epsilon_k (C_k^+ C_k + C_{-k}^+ C_{-k}) + \sum_{kk'} V_{\bar{k}'-\bar{k}} C_k^+ C_{-k'}^+ C_{-k} C_k \quad (4.4)$$

Trebuie determinate stările și valorile proprii ale acestui Hamiltonian. În acest scop se alege o funcție de undă multielectronică Ψ astfel încât valoarea medie a Hamiltonianului BCS să fie minimă

$$\langle \Psi | H_{BCS} | \Psi \rangle = \min im$$

Problema se poate rezolva printr-o metodă variațională în maniera Hartree-Fock, așa cum au procedat Bardeen, Cooper și Schrieffer. Alte două metode, mai elegante, de rezolvare a problemei sunt: metoda transformărilor canonice a lui Bogoliubov [5, 6] și metoda analogiei de spin a lui Anderson [7]. În acest paragraf vom prezenta metoda BCS în scopul înțelegerii din punctul de vedere al celei de a doua cuantificări a celor expuse în cap. IV. Mai întâi introducem operatorii de generare și anihilare a perechilor Cooper

$$\begin{aligned} b_k^+ &= C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+ \\ b_k &= C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Din cunoașterea relațiilor de anticmutare a operatorilor c este posibil să se găsească relațiile de anticmutare ale operatorilor b . Dacă definim operatorul numărului de ocupare

$$n_{k\tau} = C_{k\tau}^+ C_{k\tau} \quad (4.6)$$

unde τ indică spinul atunci se găsesc prin calcul direct următoarele relații de comutare (utilizând (1.7), (1.13), (1.17) și (4.5))

$$\begin{aligned} [b_k, b_{k'}^+] &= (1 - n_{k\uparrow} - n_{-k\downarrow}) \delta_{kk'} \\ [b_k, b_{k'}] &= 0 \\ [b_k^+, b_{k'}^+] &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

La aceste relații se adaugă identitatea specială

$$(b_k^+)^2 = 0 \quad (4.8)$$

pentru toate valorile lui k . Acesta este operatorul identitate. Dacă o pereche $-\bar{k}$ este deja ocupată, generarea unei a doua perechi $-\bar{k}$ ar conduce la o dublă ocupare a stărilor $k \uparrow$ și $-k \downarrow$ ceea ce este interzis. Această relație se obține formal din (1.7) și (1.8). Bardeen, Cooper și Schrieffer introduc un concept puțin diferit asupra perechii de electroni, anume perechea stărilor unielectronice și nu starea cuantică a unei perechi de electroni. Diferența apare evidentă dacă ne referim la operatorul de generare a celor două sorturi de perechi. În teoria cuasiechilibrului chimic operatorul de generare a perechii este a^+ dat de ec. (1.9) și funcția de undă a N particule care conțin $N/2$ perechi este dată de ec. (1.11). Prin contrast BCS introduce un întreg set de operatori de generare a perechilor, unul pentru fiecare valoare a lui \bar{k} . Perechea astfel generată constă dintr-un electron cu vectorul de undă \bar{k} și spin sus și un alt electron cu vector de undă $-\bar{k}$ și spin jos.

Dacă în prima relație (4.7) neglijăm operatorii numerelor de ocupare aceste relații sunt aceleași ca pentru bosoni [8, 9]. Prin urmare, în această aproximație perechile Cooper pot fi privite ca bosoni. Termenii de corecție din prima relație (4.7) se datorează acțiunii primului

principiu de excluziune asupra particulelor individuale. Din acest punct de vedere ultima relație (4.7) se scrie

$$[b_k^+, b_{k'}^+] = 2b_k b_{k'} (1 - \delta_{kk'})$$

Cu aceste notații partea de interacțiune a Hamiltonianului devine

$$H_I = \sum_{kk'} V_{kk'} b_k^+ b_{k'} \quad (4.9)$$

unde $V_{kk'} = V_{k'k}$. Partea din Hamiltonian a operatorului energiei cinetice, H_0 se scrie

$$H_0 = \sum_k 2\epsilon_k b_k^+ b_k \quad (4.10)$$

unde factorul 2 apare deoarece există doi electroni în pereche. Energia ϵ_k se măsoară de la nivelul Fermi. Pentru unele scopuri este mai convenabil să scriem

$$H_0 = 2 \sum_{k < k_F} |\epsilon_k| b_k b_k^+ + 2 \sum_{k > k_F} \epsilon_k b_k^+ b_k \quad (4.11)$$

Aceste ultime două-expresii diferă printr-o constantă și anume $2 \sum_{k < k_F} \epsilon_k$ care nu are nici un efect asupra soluției stării supraconductoare. Prin urmare trebuie să găsim funcțiile proprii și valorile proprii ale Hamiltonianului

$$H = 2 \sum_{k < k_F} |\epsilon_k| b_k b_k^+ + 2 \sum_{k > k_F} \epsilon_k b_k^+ b_k + \sum_{k,k'} V_{kk'} b_k^+ b_{k'} \quad (4.12)$$

Dacă în locul lui (4.11) utilizăm în (4.12) expresia (4.10) a lui H_0 atunci ne mărginim la funcția de undă numai asupra perechilor, deoarece nu pot exista perechi pentru $k < k_F$. Trecem acum la calculul stării fundamentale BCS. În acest scop este indicat să considerăm numai Hamiltonianul care descrie energia cinetică a electronilor împerechiați și energia de interacțiune a perechii. Aceasta sugerează că se poate construi o funcție de undă corespunzătoare dacă utilizăm în aceasta ca parametru variațional probabilitatea ca diversele stări de perechi să fie ocupate. Presupunem ca și în aproximația Hartee că probabilitatea cu care apare o configurație specifică de perechi poate fi exprimată ca produsul probabilităților ca fiecare stare de perechi să fie ocupată. Prin urmare, scriem funcția de undă sub forma

$$\Psi = \prod_k \left[(1 - h_k)^{1/2} + h_k^{1/2} b_k^+ \right] \Psi_0 \quad (4.13)$$

unde Ψ_0 este starea de vid, fără electroni prezenți. Pentru simplificarea notațiilor introducem parametri echivalenți

$$\begin{aligned} v_k^2 &= h_k \\ u_k^2 &= 1 - h_k \end{aligned} \quad (4.14)$$

astfel că

$$\Psi_{BCS} = \prod_k (u_k + v_k b_k^+) \Psi_0 \quad (4.15)$$

Adesea starea sistemului se reprezintă printr-un vector de stare și se utilizează notația Dirac. În această notație vectorul de stare BCS se scrie ca

$$|\Psi\rangle = \prod_k (u_k + v_k b_k^+) |\Psi_0\rangle$$

unde $|\Psi_0\rangle$ se mai notează și cu $|0\rangle$. Această reprezentare a fost inspirată de integrala $\int \Psi_1 \Psi_2 dV$ care poate fi considerată ca un produs scalar dintre funcțiile integrabile Ψ_1 și Ψ_2 . S-a introdus notația prescurtată

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \Psi_1^* \Psi_2 dV$$

Aceasta se interpretează ca fiind produsul a două elemente $\langle \psi_1 |$ și $|\psi_2 \rangle$. Elementul $\langle \psi_1 |$ se numește „bra” iar elementul $|\psi_2 \rangle$ se numește „ket”, cele două denumiri formând împreună cuvântul braket (paranteză). Ambele elemente sunt vectori de stare într-un spațiu vectorial liniar. Utilizând această notație, multe relații din mecanica cuantică pot fi exprimate mai succint decât în reprezentarea integrală. Vectorii de stare sunt vectorii unui spațiu vectorial liniar complex cu o bază ortonormală. Orice expresie în reprezentare integrală este corelată cu o expresie în reprezentarea vectorială Dirac. De exemplu, relația de ortogonalitate se scrie

$$\int \psi_m^* \psi_n dV = \langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{mn}$$

Este îndeplinită relația $|\psi \rangle^* = \langle \psi |$. Valoarea medie a unui operator se scrie

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \int \psi^* H \psi dV$$

iar proprietatea că operatorul H este hermitic se scrie

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle H \psi | \psi \rangle$$

Așa cum este scrisă funcția (4.15) ea poate conține orice număr de particule între 0 și 2N unde N este numărul de valori în zona Brillouin pe care le poate lua k. Totuși, dacă h_k se alege corespunzător (astfel ca energia sistemului să fie minimă) atunci această funcție are maxim ascuțit în jurul adevăratei valori a lui N. Numărul mediu de electroni este dat de expresia

$$\langle N \rangle = \langle \Psi_{BCS}, N_{op} \Psi_{BCS} \rangle = 2 \sum_k |v_k|^2$$

dar Ψ_{BCS} nu este funcție proprie a operatorului numerelor de ocupare. Totuși, deviația medie a lui N de la această valoare medie este mică în comparație cu N fiind de ordinul $N^{-1/2}$.

Înainte de a merge mai departe considerăm util să arătăm că funcția de undă BCS este normată la unitate. Scriem

$$\langle \Psi_{BCS}, \Psi_{BCS} \rangle = \langle 0 | \prod_k (u_k^- + v_k^- b_k) \prod_{k'} (u_{k'} + v_{k'} b_{k'}^+) | 0 \rangle$$

Având în vedere ultimele două relații de comutare (4, 7) se poate lucra cu o singură valoare a lui k

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{BCS}, \Psi_{BCS} \rangle &= \prod_k \langle 0 | (u_k^- + v_k^- b_k) (u_k + v_k b_k^+) | 0 \rangle = \\ &= \prod_k \left\{ |u_k|^2 + u_k^- v_k (\langle 0 | b_k^+ | 0 \rangle + v_k^- u_k \langle 0 | b_k | 0 \rangle + |v_k|^2 \langle 0 | b_k b_k^+ | 0 \rangle) \right\} \end{aligned}$$

Termenii care conțin b_k și b_k^+ sunt egali cu zero astfel că integrala de normare este un produs de factori $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ și este deci egală cu unitatea.

Calculăm valoarea medie a Hamiltonianului

$$E = \langle \psi | H | \psi \rangle$$

Elementul de matrice al operatorului energiei cinetice este

$$T = \langle \psi | 2 \sum_k \epsilon_k b_k^+ b_k | \psi \rangle$$

și este egal cu

$$T = 2 \sum_k \epsilon_k v_k^2 \quad (4.16)$$

Pentru a arăta aceasta împărțim pe Ψ în două părți: o parte caracterizată de funcția de undă Ψ_1 când starea \bar{k} a perechii este ocupată și o parte caracterizată de funcția de undă Ψ_0 când starea k a perechii este neocupată. Această descompunere se poate face pentru orice valoare a lui k astfel că se poate scrie

$$\Psi = v_k \Psi_1 + u_k \Psi_0$$

și elementul de matrice al operatorului energiei cinetice este de forma

$$\begin{aligned}
 T = & \langle \Psi | 2 \sum_k \varepsilon_k b_k^+ b_k | \Psi \rangle = 2 \sum_k \varepsilon_k \langle v_k^* \Psi_1 + u_k^* \Psi_0 | b_k^+ b_k | v_k \Psi_1 + u_k \Psi_0 \rangle = \\
 & = 2 \sum_k \varepsilon_k \left[|v_k|^2 \langle \Psi_1 | b_k^+ b_k | \Psi_1 \rangle + v_k^* u_k \langle \Psi_1 | b_k^+ b_k | \Psi_0 \rangle + \right. \\
 & \left. + u_k^* v_k \langle \Psi_0 | b_k^+ b_k | \Psi_1 \rangle + |u_k|^2 \langle \Psi_0 | b_k^+ b_k | \Psi_0 \rangle \right]
 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Presupunem că u_k și v_k sunt numere reale adică $u_k^* = u_k$ și $v_k^* = v_k$. Utilizând relațiile

$$b_k^+ b_k = (C_{k\uparrow}^+ C_{-k\downarrow}^+) (C_{-k\downarrow} C_{k\uparrow}) = (C_{k\uparrow}^+ C_{k\uparrow}) (C_{-k\downarrow}^+ C_{-k\downarrow})$$

se ajunge ușor la relația (4.16) având în vedere că numai primul element de matrice din (4.17) este diferit de zero și este egal cu unitatea. Pentru a evalua elementul de matrice al energiei potențiale

$$U = - \langle \Psi | \sum_{kk'} V_{kk'} b_k^+ b_k | \Psi \rangle$$

se poate face o descompunere similară a lui Ψ în stări în care ambele stări ale perechii \bar{k} și \bar{k}' sunt ocupate (Ψ_{11}), stări în care \bar{k} este ocupat și \bar{k}' este neocupat (Ψ_{10}), stări în care \bar{k}' este ocupat și \bar{k} este neocupat (Ψ_{01}). Această descompunere se poate face pentru orice valori ale lui \bar{k} și \bar{k}'

$$\Psi = v_k u_{k'} \Psi_{11} + v_k u_{k'} \Psi_{10} + u_k v_k \Psi_{01} + u_k u_{k'} \Psi_{00}$$

Se obține

$$U = \langle \Psi | \sum_{kk'} V_{kk'} b_k^+ b_k | \Psi \rangle = \sum_{kk'} V_{kk'} v_k v_{k'} u_k u_{k'}$$

Energia totală $E = T + U$ și prin urmare,

$$E = 2 \sum_k \varepsilon_k h_k + \sum_{kk'} [h_k (1-h_k) h_{k'} (1-h_{k'})]^{1/2} V_{kk'} \quad (4.18)$$

Pentru a găsi starea fundamentală BCS se aplică principiul variațional care constă în a găsi h_k pentru care E este minim (adică $\partial E / \partial h_k = 0$). Dezvoltarea în continuare a acestor probleme este identică cu cea expusă în cap. IV și nu o mai reproducem aici: aflarea lărgimii benzii interzise, a energiei de excitație, capacitatea calorică etc. (§ 4.3-4.6).

Totuși, prezentăm aici o altă variantă a metodei variaționale utilizată adesea de către unii autori. Scriem

$$E = 2 \sum_k \varepsilon_k v_k^2 + \sum_{kk'} V_{kk'} v_k u_k v_{k'} u_{k'} \quad (4.19)$$

Deosebirea constă în utilizarea substituției [G 7]

$$u_k = \sin \theta_k, \quad v_k = \cos \theta_k$$

Prin urmare, relația de mai sus devine

$$E = \sum_k \varepsilon_k (1 + \cos 2\theta_k) + \frac{1}{4} \sum_{kk'} V_{kk'} \sin 2\theta_k \sin 2\theta_{k'}$$

Efectuăm minimumul în raport cu θ_k , adică evaluăm $\partial E / \partial \theta_k = 0$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta_k} = -2\varepsilon_k \sin 2\theta_k + \sum_{k'} V_{kk'} \cos 2\theta_k \sin 2\theta_{k'} = 0$$

Se obține

$$\tan 2\theta_k = \frac{\sum_{k'} V_{kk'} \sin 2\theta_{k'}}{2\varepsilon_k} \quad (4.20)$$

Definim mărimile

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{kk'} v_k u_{k'} = -\frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \sin 2\theta_{k'} \quad (4.21)$$

$$E_k = (\Delta_k^2 + \epsilon_k^2)^{1/2} \quad (4.22)$$

care după cum vom vedea imediat au semnificațiile de bandă interzisă și, respectiv, energia de excitare a cuasielectronilor. Cu aceste notații se poate scrie

$$\operatorname{tg} 2\theta_k = -\frac{\Delta_k}{\epsilon_k} \quad (4.23)$$

astfel că

$$2v_k u_k = \sin 2\theta_k = \frac{\Delta_k}{E_k}$$

și

$$v_k^2 - u_k^2 = \cos 2\theta_k = -\frac{\epsilon_k}{E_k} \quad (4.24)$$

Alegerea semnelor pentru \sin și \cos (numai semnul relativ dintre ele este fixat de către relația (4.23)) dă pentru numărul de ocupare $v_k^2 \rightarrow 0$ când $\Delta_k \rightarrow \infty$, ceea ce constituie o soluție rezonabilă a problemei. Introducând (4.23) în (4.21) obținem Δ_k (o condiție de selfconsistență)

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{E_{k'}} V_{kk'} = -\frac{1}{2} \sum_{k'} \frac{\Delta_{k'}}{(\Delta_{k'}^2 + \epsilon_{k'}^2)^{1/2}} V_{kk'} \quad (4.25)$$

Această ecuație are soluția banală $\Delta_k = 0$ astfel că $v_k = 1$ pentru $\epsilon_k < 0$ și $v_k = 0$ pentru $\epsilon_k > 0$. Toate stările cu k mai mic decât k_F sunt ocupate cu electroni, ceea ce corespunde sferei Fermi la OK. Însă noi ne așteptăm la o soluție nebanală cu o energie mai joasă dacă $V_{kk'}$ este negativ. Reamintim că în teoria BCS se utilizează ipoteza lui Cooper și anume

$$V_{kk'} = \begin{cases} -\frac{V}{\Omega}, & |\epsilon_k|, |\epsilon_{k'}| \leq \hbar\omega_D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.26)$$

unde V este o constantă pozitivă. De fapt ar trebui să impunem condiția $|\epsilon_k - \epsilon_{k'}| \leq \hbar\omega_D$ deoarece $|\epsilon_k - \epsilon_{k'}|$ este variația energiei electronului în procesul de împrăștiere, însă pentru a obține o soluție mai simplă impunem o restricție mai drastică și anume atât $|\epsilon_k|$ cât și $|\epsilon_{k'}|$ să fie mai mic decât $\hbar\omega_D$. Introducând această valoare a lui $V_{kk'}$ în ec. (4.25) se găsește că aceasta este satisfăcută dacă

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta, & |\epsilon_k| \leq \hbar\omega_D \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (4.27)$$

Deoarece în acest model $\Delta_k = \Delta$ este independent de k , se poate suprima indicele lui Δ din (4.25) astfel că această relație devine

$$1 = \frac{V}{2\Omega} \sum_k \frac{1}{E_k} \quad (4.28)$$

Înlocuim suma cu o integrală de la $-\hbar\omega_D$ la $\hbar\omega_D$ și având în vedere simetria valorilor $\pm \epsilon_k$ se obține

$$\frac{1}{N(O)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{(\Delta^2 + \epsilon^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} \frac{\hbar\omega_D}{\Delta}$$

și

$$\Delta = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1/N(0)V)} \quad (4.29)$$

care în limita cuplajului slab, $N(0)V \ll 1$ devine

$$\Delta \approx 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V}$$

În general, pentru supraconductorii cunoscuți $N(0)V \leq 0,03$ astfel că această ultimă relație este justificată. Din ec. (4.24) și condiția $u_k^2 + v_k^2 = 1$ se obțin relațiile

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_k}{E_k} \right)$$

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \epsilon_k / E_k \right)$$

În Fig. 5.1 se reprezintă v_k^2 (linie plină) în funcție de ϵ_k la 0K. Pentru comparație este reprezentată funcția Fermi pentru metalul normal la $T=T_c$ (cu lunie întreruptă). Pentru a efectua limitarea la $\pm\hbar\omega_D$, graficul s-a calculat pentru un supraconductor cu cuplaj strâns cu $N(0)V=0,43$. În continuare se calculează energia de condensare așa cum se procedează în cap. IV.

A.5. Excitarea cuasielectronilor din starea fundamentală BCS

Considerăm inițial excitarea unei singure cuasiparticule (cuasielectron) și apoi excitarea celor doi electroni dintr-o pereche. Când este excitat un cuasielectron starea $k_1\uparrow$ este sigur ocupată iar starea $k_1\downarrow$ este sigur liberă și formal această stare se exprimă prin funcția de undă

$$\left| \Psi_{k_1} \right\rangle = C_{k_1\uparrow}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k b_k^+) \Psi_0 \quad (5.1)$$

Această stare este ortogonală cu Ψ deoarece aceasta din urmă nu conține nici un termen cu o singură stare ocupată din pereche. Pentru a găsi energia acestei stări excitate, deoarece Ψ_{k_1} nu este compusă numai din stări de perechi, trebuie să ne reîntoarcem la Hamiltonianul BCS scris sub forma

$$H = \sum_{k < k_F} \epsilon_k C_k^+ C_k + \sum_{k > k_F} \epsilon_k C_k^+ C_k - \sum_{kk'} V_{kk'} b_k^+ b_k$$

Diferența de energie cinetică dintre starea excitată descrisă de acest Hamiltonian și starea supraconductoare neexcitată, descrisă de (4.19) este

$$\Delta E_c = E_{k_1} (1 - 2v_{k_1}^2)$$

deoarece în starea excitată avem energia ϵ_{k_1} a unui electron în locul energiei $\epsilon_{k_1} - 2v_{k_1}^2$ a perechii de electroni din starea neexcitată. Variația energiei de interacțiune electron-electron prin excitarea unui singur cuasielectron este dată de expresia

$$\Delta U = 2 \left(\sum_k V_{k_1 k} u_k v_k \right) u_{k_1} v_{k_1}$$

deoarece în starea excitată dispare termenul din sumă care implică perechea k_1 (existența unui singur electron în starea $k_1\uparrow$ blochează împrăștierea perechilor în această stare); factorul 2

apare în sumă deoarece k_1 apare în sumă atât după k cât și după k' . Prin urmare, energia de excitație este

$$\Delta E_c + \Delta U = \varepsilon_{k_1} (1 - 2v_{k_1}^2) + 2\Delta_{k_1} v_{k_1} u_{k_1} = \frac{\varepsilon_{k_1}^2}{E_{k_1}} + \frac{\Delta_{k_1}^2}{E_{k_1}} = \frac{E_{k_1}^2}{E_{k_1}} = E_{k_1}$$

adică energia de excitare a unui cuasielectron este

$$E_k = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_k^2}$$

cu minimul egal cu Δ la suprafața Fermi unde $\varepsilon_k = 0$. Pentru un grad mic de excitare, excitațiile cuasielectronilor sunt independente și energiile lor se adună simplu.

Funcția de undă a stării sistemului atunci când sunt excitați doi electroni din aceeași pereche se scrie

$$\left| \Psi' \right\rangle = C_{k_1 \uparrow}^+ C_{-k_1 \downarrow}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k b_k^+) \left| \Psi_0 \right\rangle \quad (5.2)$$

Această funcție nu este ortogonală cu funcția stării fundamentale BCS deoarece $c_{k_1 \uparrow}^+ c_{-k_1 \downarrow}^+ = b_{k_1}^+$, astfel că integrala de acoperire cu starea fundamentală este V_{k_1} . Această dificultate poate fi înlăturată prin utilizarea în locul funcției de mai sus a funcției

$$\left| \Psi'_{k_1} \right\rangle = (v_{k_1} - u_{k_1} b_{k_1}^+) \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k b_k^+) \left| \Psi_0 \right\rangle \quad (5.3)$$

care este denumită pereche excitată sau reală. Această funcție este ortogonală cu funcția care descrie starea fundamentală. Pentru a evalua energia de excitare a perechii utilizăm Hamiltonianul (4.12) în care sunt implicate numai perechi de electroni. Creșterea energiei cinetice în acest caz este

$$\Delta E_c = 2\varepsilon_{k_1} (u_{k_1}^2 - v_{k_1}^2) = 2\varepsilon_{k_1} (1 - 2v_{k_1}^2)$$

Variația energiei de interacțiune este

$$\Delta V = -2 \left(\sum_k V_{k_1 k} u_k v_k \right) (-v_{k_1} u_{k_1} - u_{k_1} v_{k_1}) = 4\Delta_{k_1} u_{k_1} v_{k_1}$$

Creșterea energiei potențiale de interacțiune este mai mare decât în cazul excitării unui cuasielectron. Deci energia minimă de excitare a perechii de electroni este 2Δ .

A.6. Transformarea canonică Bogoliubov

Bogoliubov (5) și Valentin (6) au utilizat noi operatori pentru scrierea Hamiltonianului BCS. Acești operatori de genere și anihilare introduși inițial de Bogoliubov (1947) se bazează pe o transformare canonică a operatorilor c_k^+ și c_k și satisfac aceleași relații de comutare ca și aceștia. Așa după cum vom vedea starea fundamentală BCS este starea de vid pentru operatorii Bogoliubov iar aplicarea acestor operatori asupra stării fundamentale BCS dă direct excitațiile elementare unielectronică și a perechii. Noii operatori se definesc astfel

$$\gamma_k^+ = u_k C_k^+ - v_k C_{-k} \quad (6.1)$$

$$\gamma_{-k}^+ = u_k C_{-k}^+ + v_k C_k$$

și conjugatele lor

$$\gamma_k = u_k c_k - v_k c_{-k}^+ \quad (6.2)$$

$$\gamma_{-k} = u_k c_{-k} + v_k c_k^+$$

Transformarea dată de aceste relații poartă numele de transformarea Bogoliubov-Valatin. Am păstrat convenția anterioară că starea spin sus este asociată cu \bar{k} iar starea spin jos este asociată cu $-\bar{k}$. De asemenea, coeficienții u_k și v_k au aceeași semnificație ca în teoria BCS. Noii operatori satisfac următoarele relații de anticomutare de tip fermionic.

$$\begin{aligned}\{\gamma_k, \gamma_{k'}\} &= \{\gamma_k, \gamma_{-k'}\} = \{\gamma_k^+, \gamma_{-k'}^+\} = 0 \\ \{\gamma_k, \gamma_{k'}^+\} &= \{\gamma_{-k}, \gamma_{-k'}^+\} = \delta_{kk'}\end{aligned}$$

Operatorul γ_k^+ întotdeauna generează o excitație cu vectorul de undă net \bar{k} și spin sus. Deasupra suprafeței Fermi $u_k=1$, $v_k=0$ și excitația este asemenea unui cuasielectron. Sub suprafața Fermi $u_k < v_k$ și excitația este predominant un gol la $-\bar{k} \downarrow$. Chiar la suprafața Fermi există o mixtură cu cantități egale dar în toate cazurile efectul net este adăugarea unei excitații $\bar{k} \uparrow$. În starea normală $\Delta=0$ și variația de la electron la gol (amintim că gol se numește starea rămasă liberă sub suprafața Fermi) se face abrupt la suprafața Fermi. În mod similar excitația σ_{-k}^+ adaugă sistemului o stare $-k \downarrow$. Transformările inverse ale (6.1) sunt

$$\begin{aligned}c_k^+ &= u_k \gamma_k^+ + v_k \gamma_{-k} \\ c_{-k}^+ &= u_k \gamma_{-k}^+ - v_k \gamma_k\end{aligned}\tag{6.3}$$

și

$$\begin{aligned}c_k &= u_k \gamma_k + v_k \gamma_{-k}^+ \\ c_{-k} &= u_k \gamma_{-k} - v_k \gamma_k^+\end{aligned}\tag{6.4}$$

De exemplu, prima relație (6.3) se obține înmulțind cu u_k prima relație (6.1), cu v_k a doua relație (6.2) și adunându-le și de asemenea ținând cont de cea de a doua relație (6.1). Vom arăta mai întâi că starea fundamentală BCS (4.15) este starea de vid a operatorilor Bogoliubov. De exemplu, (10)

$$\gamma_k |\Psi\rangle = \gamma_{-k} |\Psi\rangle = 0\tag{6.5}$$

Având în vedere (6.2)

$$\begin{aligned}\gamma_k |\Psi\rangle &= (u_k c_k - v_k c_{-k}^+) \prod_{k'} (u_{k'} + v_{k'} c_{k'}^+ c_{-k'}^+) |\Psi_0\rangle = \\ &= (u_k^2 c_k + u_k v_k c_k c_k^+ c_{-k}^+ - u_k v_k c_{-k}^+ - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+ c_{-k}^+) \times \\ &\quad \times \prod_{k' \neq k} (u_{k'} + v_{k'} c_{k'}^+ c_{-k'}^+) |\Psi_0\rangle = 0\end{aligned}$$

Primul termen se anulează deoarece $c_k |\Psi_0\rangle = 0$. Al doilea și al treilea termen se anulează deoarece $c_k c_k^+ |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ iar al patrulea termen se anulează deoarece $c_{-k}^+ c_{-k}^+ |\Psi\rangle = 0$. În mod analog se poate verifica a doua relație (6.5). Trecem acum să studiem stările excitate $\gamma_k^+ |\Psi\rangle$ și $\gamma_{-k}^+ \gamma_k^+ |\Psi\rangle$ care corespund excitației BCS uniparticulare și, respectiv, excitației perechii de electroni.

$$\begin{aligned}\gamma_k^+ |\Psi\rangle &= (u_k c_k^+ - v_k c_k) \prod_{k'} (u_{k'} + v_{k'} c_{k'}^+ c_{-k'}^+) |\Psi_0\rangle = \\ &= (u_k^2 c_k^+ + u_k v_k c_k^+ c_k^+ c_{-k}^+ - u_k v_k c_{-k} - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+ c_{-k}^+) \times \\ &\quad \times \prod_{k' \neq k} (u_{k'} + v_{k'} c_{k'}^+ c_{-k'}^+) |\Psi_0\rangle\end{aligned}$$

Al doilea și al treilea termen separat dau rezultatul zero acționând asupra stării de vid $|\psi_0\rangle$. Utilizând proprietatea de anticomutare a operatorilor fermionici, al patrulea termen devine $v_k^2 c_k^+ c_{-k} c_{-k}^+$ astfel că suma dintre primul și ultimul termen dă

$$u_k^2 c_k^+ + v_k^2 c_k^+ (c_{-k} c_{-k}^+) = (u_k^2 + v_k^2) c_k^+ = c_k^+$$

deoarece $c_{-k} c_{-k}^+$ acționând asupra lui $|\psi_0\rangle$ dă unitatea. Prin urmare

$$\gamma_{k_1}^+ |\psi\rangle = c_{k_1}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+) |\psi_0\rangle \quad (6.6)$$

În mod analog

$$\gamma_{-k_1}^+ |\psi\rangle = c_{-k_1}^+ \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k c_k^+ c_{-k}^+) |\psi_0\rangle$$

Acestea sunt așa-numitele stări de excitare unielectronice prezentate în paragraful anterior. Operatorii γ_k^+ modifică numărul de particule cu $(u_k^2 - v_k^2)$ valoarea cuprinsă între -1 și +1 după cum ϵ_k este sub zero sau deasupra lui zero. Acest rezultat este inconsistent cu conservarea numărului exact de particule într-un sistem izolat. Paradoxul aparent este eliminat impunând ca operatorii să fie definiți numai în raport cu o stare fundamentală care are o fază θ definită pentru Δ_k , stare care are o mare nedeterminare în N, deoarece conform principiului de incertitudine

$$\Delta N \Delta \theta \geq 1 \quad (6.7)$$

Dacă dorim să considerăm stările excitate ale unui sistem izolat cu număr precis, N/2, de perechi în starea fundamentală atunci trebuie să proiectăm partea din funcția de undă $|\psi\rangle$ corespunzătoare celor N particule utilizând metoda lui P.W.Anderson după ce am operat cu γ_k^+ asupra lui $|\psi\rangle$. După Anderson această funcție de undă proiectată este

$$|\psi_N\rangle = \int_0^{2\pi} d\theta e^{-iN\theta/2} \prod_k (|u_k| + |v_k| e^{i\theta} c_k^+ c_{-k}^-) |\psi_0\rangle \quad (6.8)$$

Notăm că până aici am considerat u_k și v_k numere reale, pentru simplitate, însă ele pot să difere printr-un factor de fază $\exp(i\theta)$ unde θ este faza funcției de undă a stării macroscopice condensate. Avantajul utilizării acestei funcții proiectate este faptul că într-un supraconductor izolat faza relativă θ între stări cu N diferit cu o pereche de particule este arbitrară. Integrând peste toate valorile lui θ adică considerând θ complet nedeterminat, se poate forța specificarea precisă a numărului N de particule. O observație importantă este aceea că integrala după θ dă zero cu excepția acelor termeni din dezvoltarea produsului (6.8) în care există precis N/2 factori $\exp(i\theta)$ fiecare din ei fiind asociat cu generarea unei perechi. Notăm că $\gamma_{k_1}^+ |\psi\rangle$ nu are componentă cu un număr par de particule și deci nu are proiecție în spațiul cu N particule. Cu alte cuvinte conservarea numărului de electroni cere ca excitațiile să fie generate sau anihilate întotdeauna în perechi. Din acest motiv banda interzisă spectroscopică este 2Δ și nu Δ . Excitarea perechii este dată de $\gamma_{-k_1}^+ \gamma_{k_1}^+ |\psi\rangle = \gamma_{-k_1}^+ c_{k_1}^+ |\psi\rangle$, unde am avut în vedere (6.6). Factorul din fața expresiei de mai sus este

$$\begin{aligned} \gamma_{-k_1}^+ c_{k_1}^+ &= (u_{k_1} c_{-k_1}^+ + v_{k_1} c_{k_1}^+) c_{k_1}^+ = u_{k_1} c_{-k_1}^+ c_{k_1}^+ + v_{k_1} c_{k_1}^+ c_{k_1}^+ = \\ &= -u_{k_1} c_{k_1}^+ c_{-k_1}^+ + v_{k_1} = v_{k_1} - u_{k_1} b_{k_1}^+ \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\gamma_{-k_1}^+ \gamma_{k_1}^+ |\psi\rangle = (v_{k_1} - u_{k_1} b_{k_1}^+) \prod_{k \neq k_1} (u_k + v_k b_k^+) |\psi\rangle \quad (6.9)$$

care este funcția (5.3) de excitare a perechii de electroni. Notăm de asemenea că funcția care descrie excitarea perechii este și următoarea

$$\gamma_{k_1}^+ \gamma_{k_2}^+ |\psi\rangle = c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i(N-2)\theta/2} \prod_{k \neq k_1, k_2} (|u_k| + |v_k| e^{i\theta} b_k^+) |\psi\rangle \quad (6.10)$$

care este de asemenea ortogonală cu funcția stării fundamentale. Această funcție este scrisă luând în considerare că numărul de electroni este bine definit. În același mod poate fi scrisă și funcția (6.9) dacă introducem integrala din termenul de fază. Notăm că funcția

$$c_{k_1}^+ c_{k_2}^+ \prod_{k \neq k_1, k_2} (u_k + v_k b_k^+) |\Psi\rangle$$

este ortogonală cu funcția care descrie starea fundamentală (și deci descrie starea de excitare a perechii pentru cazul când numărul de particule din sistem nu este bine definit) însă dacă în această funcție substituim $k_2 \uparrow$ cu $-k_1 \downarrow$ atunci obținem funcția (5.2) care nu este ortogonală cu funcția stării fundamentale BCS și deci nu descrie o stare excitată.

În efectul tunel se generează o stare excitată prin adăugarea sau extracția unui electron. Starea rezultantă prin aplicarea operatorului γ_k^+ asupra unui sistem de N electroni este

$$c_{k_1}^+ \int d\theta e^{-iN\theta/2} \prod_{k \neq k_1} (|u_k| + |v_k| e^{i\theta} c_k^+ c_{-k}^+) |\Psi\rangle \quad (6.11)$$

unde $N' = N$ dacă se adaugă un electron și $N' = N-2$ dacă se extrage un electron. Prin urmare se pot scrie întotdeauna expresii explicite pentru diversele stări excitate cu un număr definit de particule. Pentru a evita scrierea unor funcții explicite ca (6.10) și (6.11) Josephson [14] a introdus operatoru S care anihilează o pereche Cooper și operatorul S^+ care generează o pereche Cooper (S are valoarea proprie $\exp(i\theta)$ în starea BCS în care faza lui Δ , sau a lui u^*v , este θ). Se pot defini astfel niște operatori de cuasiparticule (Bogoliubov) modificați și anume cei doi operatori (6.1) se înlocuiesc cu patru

$$\gamma_{ek}^+ = u_k^+ c_k^+ - v_k^+ S^+ c_{-k}$$

$$\gamma_{hk}^+ = u_k^+ S c_k^+ - v_k^+ c_{-k}$$

$$\gamma_{-ek}^+ = u_k^+ c_{-k}^+ + v_k^+ S^+ c_k$$

$$\gamma_{-hk}^+ = u_k^+ S c_{-k}^+ + v_k^+ c_k$$

Acești operatori generează un electron sau un gol adică descresc sau cresc numărul de electroni din sistem cu unu. Între operatorii de electroni și cei de goluri există relația

$$\gamma_{hk}^+ = S \gamma_{ek}^+$$

care exprimă faptul că generarea unei excitații de tip gol este echivalentă cu anihilarea unei perechi și generarea unei excitații de tip electron. Astfel, cele două excitații nu sunt independente ci reprezintă aceeași excitație cu numărul de perechi diferit.

A.7. Hamiltonianul BCS și starea fundamentală când se utilizează transformarea canonică. Stări excitate

Introducem în Hamiltonianul BCS (4.4)

$$H_{BCS} = \sum_k \epsilon_k (C_k^+ C_k + C_{-k}^+ C_{-k}) + \sum_{kk'} V_{k'-k} C_{k'}^+ C_{-k}^+ C_{-k} C_k = H_o + H_i$$

noii operatori utilizând relațiile (6.3). Se obține

$$H_o = \sum_k \epsilon_k \left\{ 2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) + 2u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ - \gamma_{-k} \gamma_k) \right\} \quad (7.1)$$

Se observă că partea de neinteracțiune a Hamiltonianului conține trei tipuri de termeni: un termen constant, un termen care conține operatorii diagonali $\gamma_k^+ \gamma_k$ și $\gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}$ care pot fi considerați

ca niște noi operatori ai numerelor de ocupare precum și termeni nediagonali care conțin $\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+$ și $\gamma_k \gamma_{-k}$. Pentru termenul de interacțiune al Hamiltonianului se obține expresia

$$H_i = \sum_{kk'} V_{k'-k} \{ u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - \gamma_k^+ \gamma_{k'} - \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k'}) (1 - \gamma_k^+ \gamma_k - \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) + \\ + u_{k'} v_{k'} (1 - \gamma_k^+ \gamma_{k'} - \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{-k} \gamma_k + \gamma_{k'}^+ \gamma_{-k}') + \\ + (\text{termeni nediagonali de ordinul al patrulea}) \quad (7.2)$$

Ne punem problema să eliminăm termenii nediagonali din $\mathcal{H}_{BCS} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, obținând astfel un Hamiltonian de fermioni independenți, diagonalizat. Operatorul de anihilare nu acționează asupra stării de vid adică $\gamma_k |\psi_0\rangle = 0$ și deci termenii $\gamma_k^+ \gamma_k$ și $\gamma_{-k} \gamma_{-k}$ se pot exclude din Hamiltonian. Rămân numai termenii care nu conțin operatorii de generare γ_k^+ și dacă neglijăm termenii de ordinul al patrulea obținem

$$H_{BCS} = 2 \sum_k \varepsilon_k v_k^2 + \sum_{kk'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} u_k v_k + \\ + \sum_k \left[2\varepsilon_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} \right] \gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ \quad (7.3)$$

Pentru a diagonaliza Hamiltonianul, trebuie să egalăm cu zero coeficientul din fața produsului operatorilor $\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+$, adică

$$2\varepsilon_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} = 0 \quad (7.4)$$

Presupunem că potențialul de atracție este diferit de zero și constant numai în interiorul unui interval energetic din vecinătatea sferei Fermi conform cu definiția (4.26) și introducem mărimea

$$\Delta_o = - \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} = \frac{V}{\Omega} \sum_k u_k v_k \quad (7.5)$$

care nu depinde de k și poate fi considerată în continuare ca un parametru. Substituind (7.5) în (7.4) se obține

$$2\varepsilon_k u_k v_k - \Delta_o (u_k^2 - v_k^2) = 0$$

Din această relație și din relația $u_k^2 + v_k^2 = 1$ rezultă valorile coeficienților u_k și v_k considerate mărimi reale care satisfac ec. (7.4) și deci condiția de

$$u_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_o^2}} \right], \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_o^2}} \right] \quad (7.6)$$

Substituind aceste expresii în (7.5), în ambii membri ai ecuației apare parametrul Δ_o care se simplifică și se obține

$$1 = \frac{V}{2\Omega} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_o^2}} \quad (7.7)$$

Pentru a rezolva această ecuație se trece de la sumare la integrală în spațiul k și apoi la integrare după energii. În intervalul îngust de energie din vecinătatea sferei Fermi unde $V \neq 0$ se poate presupune că densitatea stărilor de energie variază lent și aceasta poate fi aproximativă cu densitatea stărilor unielectronice la suprafața Fermi, $N(0)$. Se obține

$$1 = \frac{N(o)V}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon_k}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta_o^2}} = N(o)V \arcsin h \frac{\hbar\omega_D}{\Delta_o}$$

de unde rezultă

$$\Delta_o = \frac{\hbar\omega_D}{\sinh(1 / N(o)V)} \quad (7.8)$$

Pentru a obține energia stării fundamentale supraconductoare substituim valorile lui u_k și v_k în Hamiltonianul BCS (7.3) în care ultimul termen (care conține operatori) este egal cu zero conform cu condiția (7.4)

$$\epsilon_s^o = 2 \sum_k \epsilon_k v_k^2 + \sum_{kk'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} u_k v_k = \sum_k \left[\frac{\epsilon_k (E_k - \epsilon_k)}{E_k} - \frac{\Delta_o^2}{2E_k} \right] \quad (7.9)$$

Deoarece nu conține operatori, Hamiltonianul (7,9) coincide în acest caz chiar cu energia stării fundamentale. Am notat $E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta_o^2}$. Când supraconductorul trece într-o stare excitată, de exemplu ca rezultat al iluminării, atunci în Hamiltonianul BCS trebuie să reținem termenii $\gamma_k^+ \gamma_k$ și $\gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}$ care acționând asupra stării fundamentale BCS, $|\psi\rangle$ creează excitații, adică generează cuasielectroni. Când am calculat starea fundamentală am exclus acești termeni. Prin urmare, având în vedere relația (7.9) a lui ϵ_s^o Hamiltonianul BCS se scrie

$$H_{BCS} = \epsilon_o^2 + \sum_k \epsilon_k (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) + 2 \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} \sum_k V_{k'-k} u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k})$$

Având în vedere expresiile (7.6) și (7.8) se scrie

$$H_{BCS} = \epsilon_s^o + \sum_k E_k (\gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) \quad (7.10)$$

Al doilea termen reprezintă creșterea energiei deasupra valorii stării fundamentale ϵ_s^o exprimată cu ajutorul operatorilor numărului de ocupare $\gamma_k^+ \gamma_k$ a fermionilor γ_k . Astfel, γ_k descrie excitațiile elementare ale sistemului supraconductor și E_k este energia acestor excitații (a cuasielectronilor). Starea excitată este separată de starea fundamentală printr-o bandă interzisă, care este energia minimă de excitare la suprafața Fermi unde $\epsilon_k=0$ și deci $E_k = \Delta_o$. În procesul de excitare nu se generează o singură cuasiparticulă, ci întotdeauna perechi. Minimul energiei de excitare a unei perechi este egal cu $2 \Delta_o$. Aceasta explică forma exponențială a capacității calorice electronice la temperaturi joase $\exp(-\Delta/k_B T)$ și pragul de absorbție pentru radiația electromagnetică la $\hbar\omega = 2\Delta_o$. Datorită existenței benzii interzise pentru stările excitate densitatea de stări a cuasielectronilor în supraconductor $N_s(E_k)$ este diferită de densitatea de stări din metalul normal $N_n(\epsilon_k)$. Deoarece prin trecerea de la starea normală la starea supraconductoare nu dispar stări energetice, este satisfăcută egalitatea

$$N_s(E_k) dE_k = N_n(\epsilon_k) d\epsilon_k$$

de unde rezultă

$$N_s(E_k) = \begin{cases} N_n(\epsilon_k) \frac{|E_k|}{\sqrt{E_k^2 - \Delta_o^2}}, & |E_k| > \Delta_o \\ 0, & |E_k| < \Delta_o \end{cases} \quad (7.11)$$

ceea ce arată că densitatea de stări a cuasielectronilor în stare supraconductoare prezintă o singularitate la $E_k = \Delta_o$. Considerăm acum starea supraconductoare la temperatură finită, mai mică decât temperatura de tranziție. La temperatură finită se excită cuasielectroni astfel încât în Hamiltonian trebuie menținuți termenii $\gamma_k^+ \gamma_k$ și $\gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}$ care depind de temperatură. În această situație condiția (7.4) de diagonalizare a Hamiltonianului se modifică și devine

$$\sum_k \left[2\epsilon_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} (1 - \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} - \gamma_{-k'}^+ \gamma_{-k'}) \right] \times [\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k} \gamma_k] = 0 \quad (7.12)$$

Admițând că este satisfăcută această condiție de eliminare a termenilor nediagonali BCS capătă forma

$$H_{BCS} = \sum_k 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_k (u_k^2 - v_k^2) \varepsilon_k (\gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) - \sum_{kk'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} - \gamma_{-k'}^+ \gamma_{-k'}) (1 - \gamma_k^+ \gamma_k - \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}) \quad (7.13)$$

Energie E necesară pentru excitarea cuasielectronilor se obține din relația

$$E = \sum_k E_k = \sum_k \frac{\partial \langle H_{BCS} \rangle}{\partial \langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle} \quad (7.14)$$

unde $\langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle$ reprezintă numărul mediu de cuasielectroni în starea dată. Hamiltonianul fiind diagonalizat, fermionii sunt independenți și numărul mediu de cuasielectroni va fi dat de statistica Fermi Dirac adică

$$\langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle = \langle \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} \rangle = \frac{1}{e^{\varepsilon_k/k_B T} + 1} = f_o(E_k) \quad (7.15)$$

unde nu apare potențialul chimic deoarece numărul total de cuasiparticule nu se conservă. Se face aproximația că media produsului este egală cu produsul mediilor, adică

$\langle \gamma_k^+ \gamma_k \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} \rangle = \langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle \langle \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} \rangle$ astfel că (7.13) devine

$$\begin{aligned} \langle H_{BCS} \rangle = & \sum_k 2\varepsilon_k v_k^2 + \sum_k (u_k^2 - v_k^2) \varepsilon_k (\langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle + \langle \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} \rangle) - \\ & - \sum_{kk'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - \langle \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} \rangle - \langle \gamma_{-k'}^+ \gamma_{-k'} \rangle) \times \\ & \times (1 - \langle \gamma_k^+ \gamma_k \rangle - \langle \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} \rangle) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Având în vedere că se excită doi electroni cu impulsuri opuse,

$$\begin{aligned} E = \sum_k E_k = & \sum_k \frac{\partial \langle H_{BCS} \rangle}{\partial \langle \gamma_k^+ \gamma_k + \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} \rangle} = \\ = & \sum_k [\varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2u_k v_k \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} (1 - \langle \gamma_{k'}^+ \gamma_{k'} \rangle - \langle \gamma_{-k'}^+ \gamma_{-k'} \rangle)] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Prin urmare, energia E_k necesară pentru a excita o cuansiparticulă este

$$E_k = \varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 2u_k v_k \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} [1 - 2f_o(E_{k'})] \quad (7.18)$$

unde am ținut cont de expresia (7.15). În condiția (7.12) de anulare a termenilor nediagonali aproximăm $\gamma_{k'}^+ \gamma_{k'}$ și $\gamma_{-k'}^+ \gamma_{-k'}$ cu mediile lor și obținem

$$2\varepsilon_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{k'-k} u_{k'} v_{k'} [1 - 2f_o(E_{k'})] = 0 \quad (7.19)$$

Dacă comparăm această condiție cu condiția anterioară (7.4) de anulare a termenilor nediagonali observăm că singura deosebire este apariția factorului $1 - 2f_o(E_{k'})$ care multiplică elementul de matrice $V_{k'-k}$. Așadar în locul relației (7.7) se obține relația

$$1 = \frac{V}{2\Omega} \sum_{k'} \frac{1 - 2f_o(E_{k'})}{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)}} \quad (7.20)$$

iar în locul relației (7.5) se obține

$$\Delta(T) = V \sum_{k'} u_{k'} v_{k'} [1 - 2f_o(E_{k'})] \quad (7.21)$$

Substituind (7.19) în (7.18) rezultă

$$E_k = \varepsilon_k (u_k^2 - v_k^2) + 4\varepsilon_k \frac{u_k^2 v_k^2}{u_k^2 - v_k^2} = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2(T)} \quad (7.22)$$

adică energia stării excitate la temperatură finită are aceeași expresie cu energia stării excitate la OK cu deosebirea că banda interzisă este funcție de temperatură. Treceam în ec. (7.20) de la sumă la integrală și utilizând aceeași aproximație pentru densitatea de stări ca și mai înainte se obține

$$1 = \frac{VN(o)}{2} \int_{-h\omega_D}^{h\omega_D} \frac{\tanh \frac{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}}{2k_B T}}{\sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}} d\epsilon_k$$

Atunci când temperatura crește numărătorul integrandului se micșorează și pentru a fi satisfăcută această egalitate numitorul trebuie să se micșoreze de asemenea, adică Δ este o funcție descrescătoare de T, așa cum se reprezintă în Fig. 4.7. Această dependență de temperatură a benzii interzise este dată de relația (7.23). Temperatura critică T_c este temperatura la care $\Delta = 0$. Ec. (7.23) este identică cu ec. (4.11) și se rezolvă mai departe așa cum se reprezintă în § 4.4. Energia de condensare, capacitatea calorică și câmpul magnetic critic se determină în același mod ca în § 4.5.

BIBLIOGRAFIE GENERALĂ (G)

1. P. G. de GENNERS, *Superconductivity in metals and alloys*, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1966.
2. E. A. LYNTON, *Superconductivity*, Methuen & Co, Ltd, London, 1969.
3. G. RJCKAYZEN, *Theory of Suoerconductivity*, John Wiley & Sons., Inc. New York, 1965.
4. A. C. ROSE-INNES, F. H. RHODRRICK, *Introduction to superconductivity*, Pergamon Press, New York, 1969.
5. D. SAINT-JAMES, G. SARMA, E. J. THOMAS, *Type II Superconductivity*, Pergamon Press, New York, 1969.
6. J. R. SCHRIEFFER, *Theory of Superconductivity*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
7. M. TINKHAM, *Introduction to superconductivity*, Mc Graw Hill, 1975.
8. A. BARONE, G. PATERNO, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley-Interscience, New York, 1981.
9. J. G. GALOOP, *SQUIDS, the Josephson effect and suerconductivfng electronics*, Adam Hilger, 1991.
10. *Superconducting Quantum Electronics*, ed. Y Kose, Springer-Verlag, 1989.

Capitolul I

1. B. T. MATHIAS, *Progress in low temperature physics*, vol. II, p. 138, ed. C. J. Gotrer, Interscience, 1957.
2. J. G. BEDNORZ, K. A. MÜLLER, *Z. Phys. B* 64, 189 (1986).
3. M. K. WU et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58, 908 (1987).
4. Y. H. MAEDA, M. TANAKA, M. FIKUTONI, T. ASANO, *Jpn. J. Appl. Phys. Lett.*, 4, L 209 (1988).
5. C. W. CHU et al., *Phys. Rev. Lett.*, 60, 941 (1988).
6. Z. Z. SHENG et al., *Phys. Rev. Lett.*, 60, 937 (1988).
7. D. J. SINGH, *Phys. Rev. B* 48, 3571 (1993).
8. J. D. JORGENSEN, *Phys. Rev. B* 36, 3608 (1987).
9. J. S. SWINNEA, H. STEINFINK, *J. Mater. Rev.*, 2, 424 (1987).
10. D. VAKUIN et al., *Phys. Rev. Lett.*, 58, 2802 (1987).
11. W. E. PICKETT, *Rev. Mod. Phys.*, 61, 433 (1989).
12. A. SCHILLING, M. CAUTIONI, J. GAO, H. OTT, *Nature*, 363, 56 (1993).
13. L. GAO et al., *Physica C* 213,261 (1993).
14. R. MENG et al., *Physica C* 214, 384 (1993).
15. Y. WANG et al., *Appl. Phys. Lett.*, 63, 3084 (1993).
16. J. H. EGGERT et al., *Phys. Rev. B* 49, 15299 (1994).
17. R. NAGARAJAN et al., *ICM* 94, p. 495.
18. J. CAVA et al., *Nature* 367, 146 (1994).
19. L. MIU, S. POPA, A. CRIȘAN, G. ALDICA, J. JAKLOVSZKY, *J. Supercond*, 6, 279 (1993); L. MIU, P. WAGNER, U. FREY, A. HADISH, D. MIU, H. ADRIAN, *Phys. Rev. B* 52, 4553 (1995).
20. E. BURZO, V. POP, C. P~CURARIU, *Rom. J.Phys.*, 40, 271 (1995).
21. J. W. GARLAND, Jr. *Phys. Rev. Lett.*, 11, 114 (1963).
22. T. SCHNESER, H. KELLER, *Phys. Rev. Lett.*, 69, 3374 (1993).
23. V. Z. KRESIN, S. A. WOLF, *Phys. Rev. B* 49, 3652 (1994).
24. W. MEISSNER, R. OCHSENFELD, *Naturwiss.* 21, 787 (1933).
25. F. LONDON, H. LONDON, *Proc. Roy. Soc. (London) A* 149, 72 (1935), *Physica* 2, 341 (1935).

Capitolul 2

1. V. L. GINZBURG, L. D. LANDAU, JETP, 20, 1064 (1950).
2. L. P. GORKOV, JETP, 36, 1918 (1959).
3. W. A. LITTLE, R. D. PARKS, Phys. Rev. Lett., 9, 9 (1962); Phys. Rev. A 133, 97 (1964).
4. D. SAINT-JAMES, P. G. de GENNES, Phys. Lett., 7, 306 (1963).
5. W. KLEINER, L. ROTH, S. AUTLER, Phys. Rev. 133, a 1226 (1964).

Capitolul 3

1. A. ABRIKOSOV, JETP 5, 1174 (1957).
2. W. E. LAWRENCE, S. DONIACH, Proc. Twelfth Int. Conf. on Low Temperature Physics, ed. E. Kauda, Kyoto, Academic Press of Japan, 1971.
3. J. CLEM, Proc. of the 6th Int. Workshop on critical currents, Adam Hilger, 1991, S 33.
4. L. P. GORKOV, JETP, 9 1364 (1969).
5. G. J. DOLAN, F. HOLTZBERG, C. FIELD, T. R. DINGER, Phys. Rev. Lett., 62, 2184 (1989).
6. L. VINNIKOV, I. GRIGORIEVA, YU OSIPIAN, Pisma JETP, 49, 83 (1989)
7. D. E. FARELL et al., Phys. Rev. Lett., 63, 782 (1989).
8. V. G. KOGAN, Phys. Rev. B 24, 2497 (1981).
9. R. A. KLEMM, J. R. CLEM, Phys. Rev., B 21, 1868 (1980).
10. J. R. CLEM, M. W. COFFEY, Phys. Rev. B 42, 6209 (1990).
11. J. CLEM, M. COFFEY, Z. HAO, Phys. Rev. B 44, 2732 (1991).
12. L. BULAEVSKII, JETP, 64, 2241 (1973).
13. P. L. GRAMMEL et al., Phys. Rev. Lett., 59, 2592 (1987).
14. E. M. FORGAN et al., Physica (Amsterdam) 185-189 C, 247 (1991).
15. W. K. KWOK et al., Phys. Rev. Lett, 64, 966 (1990).
16. B. ROAS et al., Europhys. Lett., 11, 669 (1990).
17. G. BLATTER et al., Rev. Mod. Phys., 66, 1125 (1994).
18. M. STEPHEN, J. BARDEEN, Phys. Rev. Lett., 14, 112 91965).
20. W. A. FIETZ, W. W. WEBB, Phys. Rev., 178, 657 (1969).
21. A.I. LARKIN, V. N. OVCHINNIKOV, J. Low Temp. Phys., 34, 409 (1979).
22. J. S. MARTENS et al., Appl. Phys., 65, 4057 (1989).
23. K. MIJOHARA, S. KUBE, M. SUZUKI, J. Appl. Phys., 75, 404 (1993).
24. J. S. MARTENS et al., Ieee Trans. Appl. Supercond., 1, 95 (1991).
25. A. M. CAMPBELL, J. Phys. C2, 1492 (1969).
26. S. SENOSSI, J. Phys. III, 2, 1041 (1992).
27. L. W. CONNOR, A. P. MOLOZEMOFF, Phys. Rev. B 43, 402 (1991).
28. E. H. BRANDT, Z. Physic, B 80 167 (1990); Phys. Rev. b 49, 9024 (1994).
29. A. SCHMID, W. HAUGER, J. Low Temp. Phys., 11, 667 (1973).
30. V. DOLOCAN, J. Phys. III, France, 5, 925 (1995).
31. V. DOLOCAN, Meas. Sci. Technol., 3, 166 (1992).
32. V. DOLOCAN, Rev. Sci. Instrum., 35, 3505 (1994).
33. J. CLEM, Physica C 153-155, 50 (1988).
34. M. TINKHAM, C. J. LOBB, Solid State Phys., 43, 91 (1989).
35. B. GIOVANINI, L. WEISS, Solid State Commun., 27, 1005 (1978).
36. V. AMBEGAOKAR, A. BARATOFF, Phys. Rev. Lett., 10, 986 (1963); Erratum, 11, 104 (1963).
37. V. L. BEREZINSKII, JETP, 59, 907 (1970); 61, 1144 (1971).
38. J. M. KOSTERLITZ, D. J. THOULESS, J. Phys. C: Solid State Phys., 6, 1181 (1993).
39. M. R. BEASLEY, T. E. MOOJI, J. P. ORLANDO, Phys. Rev. Lett., 42, 1165 (1979).
40. A. M. KADIU, K. EPSTEIN, A. M. GOLDMAN, Phys. Rev. B 27, 6691 (1983).
41. A. T. FIOLY, A. F. HEBARD, W. I. GLABERSON, Phys. Rev. B 28, 5075 (1983).
42. G. BLATTER, M. V. FEIGELLMAN, V. B. GERHKENBEIN, A. I. LARKIN, M. V. VINOKUR, Rev. Mod. Phys., 66, 1125 (1994).

Capitolul 4

1. H. FRÖLICH, Phys. Rev., 79, 845 (1950).
2. J. G. BEDNORZ, K. A. MÜLLER, Z. Phys., b 64, 189 (1986).
3. L. COOPER, Phys. Rev., 104, 1189 (1956).
4. J. BARDEEN, L. N. COOPER, J. R. SCHRIEFFER, Phys. Re. ,108, 1175 (1957).
5. R. E. LOVE, R. W. SHOW, Rrv. Mod. Phys., 36, 260 (1964).

Anexa

1. J. M. BLATT, *Theory of Superconductivity*, Academic Press, 1964.
2. H. FRÖLICH, Phys-Rev., 79, 845 (1950).
3. L. N. COOPER, Phys. rev., 104, 1189 (1956).
4. J. BARDEEN, L. N. COOPER, J. R. SCHRIEFFER, Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
5. N. N. BOGOLIUBOV, *Nuovo Cimento*, 7, 794 (1958).
6. A. VALATIN, *Nuovo Cimento*, 7, 843 (1958).
7. P. W. ANDERSON, J. Phys. Chem. Sol. 11, 2611 (1959).
8. J. D. PATERSON, *Introduction to the theory of solid state physics Addison-Wesley, Publishing Company*, 1971.
9. M. TINKHAM în *Superconductivity in low temperature physic*, ed. C. D. Witt, B. Dreyfus, P. G. de Gennes, Gordon and Breach, New York, 1962.
10. A. L. FETTER, J. D. WALECKA, *Quantum theory of many-particle system*, Mc Graw Hill, 1971.

Capitolul 5

1. M. TINKHAM în *Superconductivity in low temperature physics*, ed. C. de Witt, B. Dreyfus, P. G. de Gennes, Gordon and Breach, New York, 1962.
2. D. C. MATTIS, J. BARDEEN, Phys. Rev. 111, 412 (1958).
3. A. F. ANDREEV, JETP, 46, 1823 (1964); 22, 455 (1965).
4. G. E. BLONDER, M. TINKHAM, T. KLAPWIJK, Phys. Rev. B 25, 4515 (1982).
5. M. HURD, G. WENDIN, Phys. Rev., B 49, 15258 (1994).
6. C. BEENAKKER, Phys. Rev. Lett., 67, 3336 (1991).
7. V. SCHÜSSLER, R. KÜMMEL, Phys. Rev., B 47, 2754 (1993).
8. P. G. de GENNES, M. TINKHAM, Physics, 1107 (1964).
9. V. DOLOCAN, *Fenomene de tunelare și aplicații*, Ed. Științifică și Enciclopedică, 1989.
10. I. GIAEVER, K. MELGELE, Phys. Rev. ,122, 1101 (1961).
11. I. GIAEVER, Phys. Rev, Lett., 5, 147; 464 (1960).
12. G. E. EVERETT în *Tunneling Phenomena in Solids*, Plenum Press, 1969.
13. W. EISENMENGER, A. DAYEM, Phys. Rev. Lett., 18, 125 (1967).
14. C. F. COOK, G. E. EVERETT, Phys. Rev., 159, 374 (1967).
15. A. L. FETTER, J. D. WALECKA, *Quantum theory of many-particle systems*, Mc Graw Hill, 1971.

Capitolul 6

1. B. D. JOSEPHSON, Physics Letters, 1, 251 (1962).
2. C. C. GRIMES, S. SHAPIRO, Phys. Rev., 169, 397 (1968).
3. M. D. FISKE, Rev. Mod. Phys., 36, 221 (1964).
4. R. E. ECK, D. J. SCALAPINO, B. N. TAYLOR, Phys. Rev. Lett., 13, 151 (1964).
5. I. O. KULIK, JETP Lett. 2, 84 (1965).
6. I. O. KULIK, JETP, 37, 157 (1967).
7. T. YANSON, V. SVITSUNOV, I. DMITRENKO, JETP, 47, 2094 (1964).
8. P. SOMEWNO, Y. SIRKEINEN, J. Appl. Phys., 46, 1415 1975).
9. S. SHAPIRO, Phys. Rev. Lett., 11, 80 (1963).
10. T. D. CLARK, Phys. Rev., B 8, 137 (1973).
11. CH. LEEMAN, PH. LERCH, P. MARTINOLI, Physica, 126 B, 475 (1984).

12. S. P. BENZ, M. S. RZCHOWSKI, M. TINKHAM, C. J. LEOB, Phys. Rev. Lett., 64, 693 (1990).
13. D. DOMIGUEZ, J. V. JOSE, Phys. Rev. B 48, 13717 (1993).
14. V. AMBEGAOKAR, A. BARATOFF, Phys. Rev. Lett., 10, 486 (1963); Errata Phys. Rev. Lett., 11, 104 (1963).
15. M. H. COHEN, L. M. FALICOV, J. C. PHILIPS, Phys. Rev. Lett., 8, 316 (1962).
16. V. DOLOCAN, *Fenomene de tunelare și aplicații*, Ed. Științifică și Enciclopedică, 1989.
17. R. PRANGE, Phys. Rev., 131, 1083 (1963).
18. L. P. KADANOFF, G. BAYMS, *Quantum Statistical Mechanics*, Benjamin, 1962.
19. L. P. GORCOV, JETP, 34, 735 (1958).
20. N. R. WERTHAMER, Phys. Rev., 147, 255 (1996).
21. A. I. LARKIN, YU. N. OVCHIMIKOV, JETP, 51, 1535 (1996).
22. E. RIEDEL, Z. Naturforsch. 19 A, 3894 (1976).
23. R. E. HARRIS, Phys. Rev. B 11, 3329 (1975).
24. C. S. LIU et al., Phys. Rev. B2, 1651 (1970).
25. P. W. ANDERSON în *Lectures on the manybody problems*, ed. E. R. Caiaffo, vol. 2, Academic Press, 1964.
26. P. G. BALSANO et al., Phys. Rev., B 10, 1881 (1974).
27. A. H. DAYEM, R. J. MARTIN, Phys. Rev. Lett., 8, 246 (1962).
28. P. K. TIEN, J. P. GORDON, Phys. Rev., 129, 647 (1963).
29. C. A. HAMILTON, Phys. Rev., B 5, 912 (1972).
30. R. E. HARRIS, Phys. Rev., B 13, 3818 (1976).
31. W. A. SCHLUP, Phys. Rev., B 18, 6132 (1978).
32. D. G. McDONALD, E. G. JOHNSON, R. E. HARRIS, Phys. Rev., B 13, 1028 (1976).
33. K. K. LIKHAREV, JETP, 34, 906 (1972).
34. L. A. ASLAMAZOV, A. I. LARKIN, JETP, 41, 381 (1975).
35. H. ROGALLA, C. HEIDEN în *Superconducting Quantum Electronics*, ed. K. Vose, Springer Verlag, 1989.
36. M. de NIVELLE, G. GERITOMA, H. RAGOLLA, Phys. Rev. Lett., 70, 1525, (1993).
37. J. C. SWIHART, J. Appl. Phys., 32, 461 (1961).
38. C. GRIMES, P. RICHARDS, S. SHAPIRO, Appl. Phys., 32, 3905 (1968).
39. P. L. RICHARDS, S. A. STERLINE, Appl. Phys. Lett., 14, 394 (1969).
40. T. G. BLANEY, D. KNIGHT, J. Phys. D: Appl. Phys., 7, 1882 (1974).
41. J. H. CLASSEM, J. Appl. Phys., 42, 2268 (1978).
42. Y. TAUR, J. H. CLASSEM, P. RICHARDS, Appl. Phys. Lett. 24, 101 (1974).
43. T. NAGATSUMA, K. ENOUKU, F. IRIE, K. YOSHIDA, J. Appl. Phys. 54, 3302 (1983).

Capitolul 7

1. F. LONDON, *Superfluids*, vol. 1, Willey, 1950.
2. B. S. DEEVER, V. M. FAIRBANK, Phys. Rev. Lett., 7, 43, (1961).
3. A. H. SILVER, J. E. ZIMMERMAN, Phys. Rev., 157, 317 (1967).
4. R. P. GIFFORD, R. A. WEBB, J. C. WHEATLEY, J. Low. Temp. Phys., 6, 533 (1972).
5. J. E. OFFER et al., IEEE Trans. MNG. mag-10, 536 (1974).
6. S. BARBANERA et al., J. Appl. Phys., 49, 905 (1978).
7. J. E. ZIMMERMAN, J. Appl. Phys., 42, 4482 (1971).
8. J. KURKIJARVI, J. Appl. Phys., 44, 3729 (1973).
9. L. D. JACKEL, R. A. BUHRMAN, J. Low. Temp. Phys., 19, 20 (1975).
10. J. E. ZIMMERMAN et al., J. Appl. Phys., 41, 1572 (1970).
11. R. A. KAMPER, J. E. ZIMMERMAN, J. Appl. Phys., 42, 132 (1971).
12. R. RIFKIN et al., J. Appl. Phys., 47, 2645 (1976).
13. A. H. SILVER, R. D. SUNDEL, IEEE Trans. magn. MAG-19, 623 (1983).
14. A. H. SILVER, J. C. JAKLEVIC, J. LAMBE, Phys. Rev., 141, 367 (1966).
15. J. CLARKE, Phyl. Mag., 13, 115 (1966).
16. J. E. ZIMMERMAN, A. H. SILVER, Phys. Rev., 141, 367 (1966).
17. J. CLARKE et al., Appl. Phys. Lett., 27, 155 (1975).
18. D. D. AWSCHALOM et al., Appl. Phys. Lett., 52, 2108 (1989).
19. M. B. KETCHEN et al., IEEE Trans. Magn, MAG-25, 1212 (1989).
20. J. JAYCOX, M. KETCHEN, IEEE Trans. Magn. MAG-17, 400 (1981).

21. R. F. VOSS, R. A. WEBB, *Phys. Rev.*, B 24, 7447 (1981).
22. F. C. WEELSTOOD, C. URBINO, T. CLARKE, *Appl. Phys. Lett.*, 56, 2336 (1990).
23. J. C. GALLOP, B. W. RETLEY, *J. Phys. E: sci. Instrum.* 9, 417 (1976).
24. R. H. KOCK, D. J. HARLINGEN, J. CLARKE, *Phys. Rev. Lett.*, 47, 216 (1981).
25. C. T. ROGERS, R. A. BUHRMAN, *Phys. Rev. Lett.*, 53, 1272 (1984).
26. T. SHIOTA et al., in *Advances in Superconductivity*, ed. K. Kitazawa, T. Ishiguro, Springer, 1989.
27. T. WITT, *Phys. Rev. Lett.*, 61, 14231 (1988).
28. M. S. COLGLOUCH et al., *Nature*, 329, 47 (1987).
29. C. E. GOUGH et al., *Appl. Phys. Lett.*, 1987.
31. V. FOGLIETTI et al., *Appl. Phys. Lett.*, 54, 2259 (1989).
32. LAIBOWITZ et al., *Appl. Phys. Lett.*, 56, 686 (1990).
33. R. GROSS et al., *Appl. Phys. Lett.*, 57, 727 (1990).
35. J. GALLOP et al., *Supercond. Sci. Technol.*, 2, 1 (1989).
36. M. FERRARI et al., *Nature*, 341, 723 (1989).

Capitolul 8

1. M. N. WILSON, C. R. WALTERS, R. F. SMITH, *J. Physics*, D3,1518 (1971).
2. H. SEKINE et al., *J. Appl. Phys.*, 66, 2762 (1988).
3. R. GARIE et al., *Supercond. Sci. Technol.*, 5 S, 316 (1992).
4. K. BOENING et al., *Phys. Stat. Sol.*, 34, 395 (1969).
5. J. A. ROSS, *Proc. IEEE* 61, 617 (1978).
6. Y. IWASA în *Superconducting Machines and Devices*, ed. S. Foner, B. Schwartz, Plenum Press (NATO), 1974.
7. J. R. REITO. *J. Appl. Phys.*, 41, 2067 (1970).
8. R. H. BORCHERTS, L.C. DAVIS, *J. Appl. Phys.*, 43, 2418 (1972).
9. Y. IWARA, *J. Appl. Phys.*, 44, 858 (1973).
10. G. BOGNER în *Superconducting Applications: SQUID and Machines*, Plenum Press, 1977.
11. P. TIXADOR, *J. Phys. III France*, 4, 581 (1994).
12. E. LEUNG et al., *IEEE Trans. Magn.*, 23, 1331 (1987).
13. D. SWALLOM et al., *Naval Eng. J.*, May 1991, p. 141.
14. E. MAXWELL, *Cryogenics*, 15, 179 (1975).
15. I. IOVI| POPESCU, IANCU IOVA, EMIL TOADER, *Fizica plasmei și aplicații*, Ed. Științifică, 1981.
16. P. KOMAREK, *Cryogenics*, 16, 131 (1976).
17. H. BECHNA în *Superconducting Machine and Devices*, Plenum Press, 1974.
18. S. HÖRNFELDT et al., *IEEE Trans. Mag.*, 29, 3556 (1993).
19. K. FUNAKI et al., *IEEE Trans. Mag.*, 28, 394 (1992).

Capitolul 9

1. M. KETCHEN et al., *IEEE Trans. Mag.*, 25, 1212 (1989).
2. D. AWSCHALOM et al., *Appl. Phys. Lett.*, 53, 2108 (1989).
3. E. C. HIRSCHKOFF et al., *J. Low Temp. Phys.*, 2, 653 (1970).
4. J. C. WEATLEY, *Rev. Mod. Phys.*, 17, 415 (1975).
5. W. GORCE, M. FULLER, *Rev. Geophys. Space Phys.*, 14, 511 (1976).
6. M. AITKEN, *Physics and Archeology*, Oxford University Press, 1972.
7. M. CERDONIO et al., *Rev. Sci. Instrum.*, 47, 1 (1976); 48, 300 (1977).
8. M. HÂMĂLAINEN et al., *Rev. Mod. Phys.*, 65, 413 (1993).
9. E. P. DAY, *Appl. Phys. Lett.*, 29, 540 (1972).
10. D. MEREDITH et. al., *Phys. Lett.*, 42 A, 13 (1973).
11. J. ZIMMERMAN, *J. Appl. Phys.*, 42, 4483 (1972).
12. J. CLARKE, în *Superconducting Applications*, Plenum Press, 1976.
13. S. FONER, *Rev. Sci. Instrum.*, 46, 1425 (1975).
14. J. GALLOP, W. RADCLIFFE, *Physica*, B 107, 621 (1981).
15. M. RICHARDS et al., *J. Phys.*, B: At. Mol. Phys., 21, 665 (1988).
16. C. HILBERT, J. CLARKE, *Appl. Phys. Lett.*, 43, 649 (1983).

17. S. WILLIAMSON, L. KAUFMAN, D. BRENNER, în *Superconductor application: SQUID and machines*, Plenum Press, 1976, p. 355.
18. A. MAGER, *Naturwissenschaften*, 69, 383 (1982).
19. J. ZIMMERMAN, *J. Appl. Phys.*, 48, 702 (1977).
20. V. L. TOURNEAU et al., în *Advances in Cryogenic Engineering*, vol. 32, ed. R. P. Reed, A. F. Clark, Plenum Press, 1986, p. 579.
21. *Biomagnetism-An interdisciplinary approach*, ed. S. J. Williamson et al., Plenum Press, 1983.
22. G. DONALDSON, R. BAIN, *Appl. Phys. Lett.*, 45, 990 (1984).
23. Y. TAVRIN et al., *Appl. Phys. Lett.*, 62, 1824 (1993).
24. H. KOCH, în *Superconducting quantum Electronics*, ed. V. Kose, Springer-Verlag, 1989.
25. J. SARVAS, *Physics in Medicine and Biology*, 32, 11 (1987).
26. D. KOHEN, H. HOSAKA, *J. Electrocardiology*, 9, 409 (1976).
27. J. H. TRIPP, *Biomagnetism-an interdisciplinary approach*, ed. S. J. Williamson et al., Plenum Press, 1983.
28. J. CLARKE, *IEEE Trans. Magn. Mag-19*, 2888 (1983).
29. T. D. GAMBLE, W. M. GOUBAU, J. CLARKE, *Geophysics*, 44, 53 (1979).
30. S. BREINER, în *SQUID applications to geophysics*, ed. H. Weinstock, W. C. Overton Jr, Tulsa, Oklahoma, 1984.
31. E. MAPLES în op. cit., 30.
32. A. DAVIDSON, R. NEWBOWER, M. BEASLEY, *Rev. Sci. Instrum.*, 45, 838 (1974).
33. N. FREDERICK et al., *IEEE Trans. Magn. Mag-13*, 361 (1977).
34. P. GUTMANN, H. BACHMAIR, în *Superconducting Quantum Electronics*, ed. K. Vose, Springer Verlag, 1989.
35. A. HARTLAN et al., *IEEE Trans. Instrum. Meas. IM2T*, 470, (1978).
36. A. HARTLAND, *Precis. Meas. Fundam. Constants*, 2, 543 (1981), *NBC Spec. Publ.*, 617.
37. R. WEBB, R. GIFFORD, J. WHEATLEN, *J. Low. Temp. Phys.*, 13, 383 (1973).
38. R. KAMPER, J. ZIMMERMAN, *J. Appl. Phys.*, 42, 132 (1971).
39. R. A. KAMPER în *Superconductions: SQUID and machines*, ed. B. Foner, Plenum Press, 1976.
40. M. FARDMANESH et al., *J. Appl. Phys.*, 77, 4568 (1995).

Capitolul 10

1. D. BUCK, *Proc. IRE*, 44, 492 (1956)
2. J. MATISOO, *Proc. IEEE*, 55, 172 (1967).
3. W. LUM, H. CHAN, T. van DUZER, *J. Appl. Phys.*, 49, 4302 (1978).
4. H. ZAPPE, *Appl. Phys. Lett.*, 27, 432 (1975).
5. Y. WADA, *Proc. IEEE*, 77, 1194 (1975).
6. H. ZAPPE, *IEEE J. Solid State Cir. SC-10*, 12 (1975).
7. K. LIKHAREV, *ASC* 76, 245 (1976).
8. S. KOTANI et al., *Digest of Technical Papers Int. Conf. on Solid State Circuits*, 1989, p. 150.
9. T. R. GHEWALA, *IEEE Trans. on Electron Devices*, ED-27, 1957 (1980).
10. H. H. ZAPPE, *IEEE Trans. Magn. MAG-13*, 41 (1977).
11. F. F. TSUI, *IBM J. Res. Develop.*, 24, 243 (1980).
12. V. DOLOCAN, *Fizica electronică a stării solide*, Ed. Academiei, București, 1984.
13. T. R. GHEWALA, *Appl. Phys. Lett.*, 30, 8 (1978).
14. V. DOLOCAN, *Fenomene de tunelare și aplicații*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1989.
15. C. HAMILTON, F. LLOYD, R. NAUTZ, *IEEE Trans. Magn. MAG-21*, 226 (1985).
16. P. WOLF, B. ZEGHIBROEL, U. DEUTSCH, *IEEE Trans. Magn. MAG-21*, 226 (1985).

Capitolul 11

1. J. CLARKE, *Phys. Rev. Lett.*, 23, 229 (1969); 28, 163 (1972).
2. T. F. FINNEGAN et al., *Phys. Rev. Lett.*, 23, 229 (1969).
3. A. K. JAIN, J. E. LUKENS, J. S. TSUI, *Phys. Rev. Lett.*, 58, 1165 (1987).
4. W. H. PARKER et al., *Phys. Rev.*, 177, 639 (1969).
5. V. KOSE, *IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-25*, 483 (1976).
6. B. P. FIELD, V. W. HESTERMAN, *IEEE Trans. Instrum. Meas. IM-25*, 509 (1976).

7. M. T. LEVINSEN et al., Appl. Phys. Lett., 31, 776 (1977).
8. J. NIEMEYER et al., Appl. Phys. Lett., 47, 1222 (1985).
9. R. L. KAUTZ, C. A. HAMILTON, F. L. LLOYD, IEEE Trans. Magn. MAG-23, 883 (1987).
10. C. A. HAMILTON et al., Proc. IEEE, 77, 1224 (1990).
11. J. NIEMEYER in *Superconducting Quantum Electronics*, Springer verlag, 1989.
12. J. WEBER in *Gravitation and relativity*, ed. H. Chiu, W. Hoffmann Benjamin Inc., 1964.
13. D. G. BLAIR, Contemp. Phys., 28, 457 (1987).
14. H. PAIK, *Nuovo Cimento*, B 55, 15 (1980).
15. D. D. AWSCHALOM et al., Appl. Phys. Lett., 53, 2108 (1989).
16. M. GELL-MANN, E. ROSENBAUM, *Elementary particles*, iulie 1957, p. 72.
17. W. M. FAIRBANK, *Weak interaction physics*, AIP Conf. Publ., 37, p. 51.
18. B. CABRERA, Phys. Rev. Lett., 48, 1387 (1982).
19. S. BERMON et al., Phys. Rev. Lett., 55, 1850 (1985).
20. J. S. SCHOUTEN et al., J. Phys. E: Sci. Instrum. 20, 850 (1987).
21. S. WEINBERG, *Gravitation and Cosmology: principles and applicationsof the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, I Inc., 1972.
22. H. THIRRING, Phys. Zeitschr. 19, 33 (1918).
23. J. LENSE, H. THIRRING, Phys. Zeitchr. 19, 156 (1918).
24. J. E. TURNEAURE et al., Adv. Space. res., 9, 29 (1989).



**Tiparul s-a executat sub c-da nr. 246/1996 la
Tipografia Editurii Universității din București**

ISBN - 973 - 575 - 069 - 4

Lei 14100