UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ

Asistent DOREL FLOREA • Lector dr. CONSTANTIN TUDOR

PROBLEME DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR

(PARTEA A II-A)

MARTINGALE ȘI LANȚURI MARKOV

BUCUREȘTI
— 1980 —

U N I V E R S I T A T E A   D I N   B U C U R E S T I
FACULTATEA DE MATEMATICA

ASISTENT DOREL FLOREA   LECTOR DR.CONSTANTIN TUDOR

PROBLEME
DE
TEORIA PROBABILITATILOR
(partea a II-a)
Martingale şi lanţuri Markov

Bucureşti
-1980-

Prezenta culegere de probleme este destinată studenţilor facultăţii de matematică anul III şi IV curs de zi şi fără frecvenţă.

Textul a fost analizat în colectivul de catedră care s-a declarat de acord cu multiplicarea în actuala redactare.

C U P R I N S

PREFATA

Volumul de faţă este o continuare firească a lucrării "Probleme de teoria probabilităţilor", partea I, apărută în 1978.

Ne-am oprit de această dată la două capitole deosebit de importante ale teoriei probabilităţilor, şi aceasta nu întîmplător.

Teoria martingalelor a devenit un instrument curent al analizei probabilistice a proceselor stocastice, cu numeroase implicaţii practice. Noţiunea de dependenţă markoviană este una dintre cele mai utilizate noţiuni atît din punct de vedere teoretic cît şi din punct de vedere al aplicaţiilor în cele mai variate domenii de activitate (statistică, fizică, economie, biologie, sociologie, etc.).

Problemele din capitolul I au fost redactate de C.Tudor iar cele din capitolul II de D.Florea. Rezumatele teoretice de la începutul fiecărui capitol au fost redactate de C.Tudor.

Menţionăm că bibliografia nu are pretenţii de a fi completă. Am căutat să evidenţiem numai unele dintre cursurile şi tratatele de bază, fără a cita dintre numeroasele articole din diferite reviste de specialitate, consacrate celor două capitole tratate în culegere.

Mulţumim conducerii facultăţii şi membrilor catedrei de "Informatică şi teoria probabilităţilor" pentru sprijinul acordat în elaborarea prezentei lucrări.

CAPITOLUL I

MARTINGALE

1. DEFINITII SI REZULTATE DE BAZA

In cele ce urmează T va fi una din mulţimile $N = \{1, 2, \ldots\}$ sau $R_+ = [0, \infty)$

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate şi fie $(\mathcal{K}_t)_{t \in T}$ o familie crescătoare (adică $\mathcal{K}_s \subset \mathcal{K}_t$ dacă $s < t$) de corpuri boreliene incluse în $\mathcal{K}$.

Fie $X_t : (E, \mathcal{K}, P) \longrightarrow R$, $t \in T$, o familie de variabile aleatoare (familia $(X_t)_{t \in T}$ se mai numeşte şi <u>proces stocastic</u>).

<u>DEFINITIA 1</u>. Vom spune că procesul $(X_t)_{t \in T}$ este $\mathcal{K}_t$ - martingal (respectiv $\mathcal{K}_t$ - supermartingal, $\mathcal{K}_t$ - submartingal) dacă:

a) X_t este $\mathcal{K}_t$ - măsurabilă pentru orice t (se mai zice că procesul (X_t) este $\mathcal{K}_t$ - <u>adaptat</u>).

b) $M(|X_t|) < \infty$ pentru orice t.

c) $M[X_t / \mathcal{K}_s] = X_s$ (respectiv $M[X_t / \mathcal{K}_s] \leq X_s$, $M[X_t / \mathcal{K}_s] \geq X_s$) pentru orice $s < t$.

Este vizibil că c) este echivalentă cu următoarea condiție:

c') $\int_A X_t \, dP = \int_A X_s \, dP$ (respectiv :

$\int_A X_t \, dP \leq \int_A X_s \, dP$, $\int_A X_t \, dP \geq \int_A X_s \, dP$) pentru

orice $s < t$ și $A \in \mathcal{K}_s$.

In cazul T = N condiția c) este totuna cu condiția:

c1) $M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] = X_n$ (resp. : $M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] \leq X_n$,

$M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] \geq X_n$ pentru orice n sau cu condiția

c'1) $\int_A X_{n+1} \, dP = \int_A X_n \, dP$ (respectiv: $\int_A X_{n+1} dP \leq \int_A X_n dP$,

$\int_A X_{n+1} \, dP \geq \int_A X_n \, dP$) pentru orice n și $A \in \mathcal{K}_n$.

Maximumul unui număr finit de submartingale este submartingal și dacă (X_t) este martingal și $p \geq 1$ atunci $(|X_t|^p)_t$ este submartingal.

<u>DEFINITIA 2</u>. O aplicaţie $\tau : \Omega \longrightarrow T \cup \{+\infty\}$ vom spune că este $\mathcal{K}_t$ - opţională dacă $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{K}_t$ pentru orice $t \in T$.

In cazul T = N este uşor de văzut că τ este $\mathcal{K}_t$ - opţională dacă şi numai dacă $\{\tau = t\} \in \mathcal{K}_t$ pentru orice $t \in N$.

Maximumul şi minumul unui număr finit de opţionale este opţională. De asemenea dacă τ_n sînt $\mathcal{K}_t$ -opţionale atunci $\sup_n \tau_n$ este $\mathcal{K}_t$ - opţională iar $\inf_n \tau_n$ este $\mathcal{K}_{t+}$- opţională unde $\mathcal{K}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{K}_s$

<u>Oricărei oţionale τ i se ataşează un corp borelian $\mathcal{K}_\tau$ definit prin</u>:

$$\mathcal{K}_\tau = \{ A \in \mathcal{B}(\bigcup_{t\in T} \mathcal{K}_t / A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{K}_t \text{ pentru orice } t \in T\}$$

<u>In cazul T = N avem şi următoarea descriere</u>:

$$\mathcal{K}_\tau = \{ A \in \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n) / A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{K}_n \text{ pentru orice } n\}$$

Dacă $(X_t)_{t\in T}$ este un proces stocastic (continuu la dreapta dacă $T = R_+$) astfel încît X_t este $\mathcal{K}_t$ - măsurabilă pentru orice t şi τ este $\mathcal{K}_t$ - opţională atunci:

$X_\tau \chi_{\{\tau<\infty\}} : \Omega \longrightarrow R$ definită prin:

$(X_\tau \chi_{\{\tau<\infty\}})(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)\, \chi_{\{\tau<\infty\}}(\omega)$ este $\mathcal{K}_\tau$-măsurabilă.

De asemenea dacă σ şi τ sînt $\mathcal{K}_t$-opţionale şi $A \in \mathcal{K}_\tau$ atunci $A \cap \{\sigma<\tau\}$ şi $A \cap \{\sigma \le \tau\}$ sînt în $\mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau$. In particular $\mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{K}_\tau$ dacă $\sigma \le \tau$.

Cît priveşte valabilitatea inegalităţii de submartingal pentru momente de tip aleatoare avem următorul rezultat parţial.

T3 Teorema de opţionalizare (cazul mărginit)

Fie (X_t) un $\mathcal{K}_t$- submartingal ($\mathcal{K}_t$ - martingal) continuu la dreapta dacă $T = R_+$, şi σ, τ $\mathcal{K}_t$ - opţionale astfel încît $\sigma \le \tau \le a$ cu a constantă. Atunci $X_\sigma \le M[X_\tau / \mathcal{K}_\sigma]$ $\quad (X_\sigma = M[X_\tau / \mathcal{K}_\sigma])$.

4.1 Inegalitatea submartingalului

Fie (X_t) un submartingal, continuu la dreapta dacă $T = R_+$. Atunci pentru orice $a>0$ şi $s \in T$ are loc inegalitatea

$$P(\sup_{t\le s} X_t \ge a) \le \frac{1}{a} \int_{(\sup_{t\le s} X_t \ge a)} X_s \, dP \le \frac{1}{a} M(X_s^+)$$

4.2 Inegalitatea supermartingalului

Fie$(X_t)_{t\in T}$ un supermartingal(continuu la dreapta dacă $T = R_+$).

Atunci pentru orice $a>0$ şi $r<s$ din T are loc inegalitatea:

$$P(\sup_{r\le t\le s} X_t \ge a) \le \frac{1}{a}\left[M(X_r) + M(X_s^-)\right]$$

T5 Teorema de convergenţă a martingalelor

Fie (X) un submartingal(continuu la dreapta dacă $T = R_+$).

a) Dacă este îndeplinită condiţia: $\sup_{t\in T} M(X_t^+) = \lim_{t\to\infty} M(X_t^+) < \infty$ (această condiţie este echivalentă cu condiţia $\sup_{t\in T} M(|X_t|) < \infty$ dacă (X_t) este martingal) atunci $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{a.s.} X_\infty$ cu X_∞ variabilă aleatoare integrabilă.

b) Presupunem că familia (X_t) este uniform integrabilă. Atunci condiţia din a) este îndeplinită, procesul $(X_t)_{t\in T\cup\{\infty\}}$ este $\mathcal{K}_t$ - submartingal (unde $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_t \mathcal{K}_t)$ şi $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{L_1} X_\infty$.

c) Presupunem că (X_t) este uniform integrabilă şi că (X_t) este $\mathcal{K}_t$ - martingal. Atunci $(X_t)_{t\in T\cup\{\infty\}}$ este $\mathcal{K}_t$- martingal.

6 <u>Corolar (P.Levy)</u>.i) Fie $p \geq 1$, $X \in L^p_R(E,\mathcal{K},P)$ şi $(\mathcal{K}_t)_{t\in T}$ un şir crescător de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$. Atunci $M[X/\mathcal{K}_t] \xrightarrow[t\to\infty]{L^p} M[X/\mathcal{K}_\infty]$ şi în plus cînd $T = N$ convergenta de mai sus are loc a.s.

ii) Orice martingal convergent în L^1 este convergent şi a.s.

T7 <u>Teorema de opţionalizare (cazul general)</u>

Fie (X_t) un $\mathcal{K}_t$ - submartingal ($\mathcal{K}_t$ - martingal) continuu la dreapta dacă $T = R_+$.

Dacă familia (X_t) este uniform integrabilă şi τ este $\mathcal{K}_t$ - opţională atunci X_τ este integrabilă. Pentru orice cuplu de opţionale σ, τ cu $\sigma \leq \tau$ avem $X_\sigma \leq M[X_\tau/\mathcal{K}_\sigma]$ ($X_\sigma = M[X_\tau/\mathcal{K}_\sigma]$)
(Reamintim că din teorema de convergenţă, ale cărei ipoteze sînt satisfăcute, rezultă că $X_t \xrightarrow{a.s} X_\infty$ şi atunci prin definiţie X_τ este egală cu X_∞ pe $\tau = \infty$).
In continuare fie $(\mathcal{K}_t)_{t\in T}$ o familie descendentă (adică $\mathcal{K}_s \subset \mathcal{K}_t$ dacă $s > t$) de corpuri boreliene.

<u>DEFINTIE</u> . Un proces $(X_t)_{t\in T}$ vom spune că este $\mathcal{K}_t$ - submartingal invers ($\mathcal{K}_t$ - supermartingal invers, $\mathcal{K}_t$ - martingal invers) dacă:

a) X_t este $\mathcal{K}_t$ - măsurabilă şi integrabilă pentru orice t.

b) $M[X_s/\mathcal{K}_t] \geq X_t$ ($M[X_s/\mathcal{K}_t] \leq X_t$, $M[X_s/\mathcal{K}_t] = X_t$)

dacă $s \leq t$

Cît priveşte comportarea la infinit a submartingalelor inverse vom da următorul rezultat:

T8 <u>Teorema de convergenţă a martingalelor inverse</u>

Fie $(X_t)_{t\in T}$ un $\mathcal{K}_t$ - submartingal invers (continuu la dreapta dacă $T = R_+$) şi fie $\mathcal{K}_\infty = \bigcap\limits_{t\in T} \mathcal{K}_t$

a) Atunci există o variabilă aleatoare X_∞ care este $\mathcal{K}_\infty$-măsurabilă (nu neapărat integrabilă) astfel încît $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{a.s} X_\infty$. Dacă este îndeplinită condiţia:

1) $\inf\limits_{t\in T} M(X_t) > -\infty$ atunci X_∞ este integrabilă, $X_t \xrightarrow[a.s.]{L_1} X_\infty$ şi $(X_t)_{t\in T\cup\{\infty\}}$ este $\mathcal{K}_t$- submartingal invers.

b) Dacă $(X_t)_{t\in T}$ este $\mathcal{K}_t$ - martingal invers atunci condiţia 1) este îndeplinită şi procesul $(X_t)_{t\in T\cup\{\infty\}}$ este $\mathcal{K}_t$ - martingal invers.

9. <u>Corolar (P.Levy)</u>

Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_t)_{t\in T}$ o familie descendentă de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$ şi X o variabilă aleatoare integrabilă.

Atunci $M[X/\mathcal{K}_t] \xrightarrow[t\to\infty]{L_1} M[X/\mathcal{K}_\infty]$ şi în plus dacă

$T = N$ atunci convergenţa are loc şi a.s.

Amintim în încheierea consideraţiilor din acest paragraf că majoritatea rezultatelor de bază din teoria clasică a probabilităţilor cît şi din teoria proceselor stocastice se pot obţine cu ajutorul martingalelor.

§ 2. PROBLEME REZOLVATE

1. a) Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente şi cu medie finită şi fie $S_n = X_1+\dots+X_n$, $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n) = \mathcal{B}(S_1,\dots,S_n)$. Să se arate că şirul (S_n) este $\mathcal{K}_n$ - submartingal dacă $M(X_n) \geq 0$ pentru orice n şi $\mathcal{K}_n$ - martingal dacă $M(X_n) = 0$ pentru orice n.

b) Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente astfel încît $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1-p$ pentru orice n.

Fie (b_n) un şir de funcţii definite pe $\{-1,1\}^{n-1}$ şi cu valori în R_+, b_1 constantă şi S_0 o constantă. Definim şirul de variabile aleatoare prin $S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \cdot b_{n+1}(X_1,\dots,X_n)$.

Să se arate că şirul (S_n) este $\mathcal{B}(S_1,\dots,S_n)$ - submartingal (respectiv $\mathcal{B}(S_1,\dots,S_n)$ - martingal) dacă $p > \frac{1}{2}$ (respectiv $p = \frac{1}{2}$).

<u>Soluție</u> a) In primul rînd este vizibil că pentru orice n, S_n este $\mathcal{K}_n$-măsurabilă și

$$M(|S_n|) \leq \sum_{i=1}^{n} M(|X_i|) < \infty$$

Apoi din asociativitatea independenței rezultă că X_{n+1} și $\mathcal{K}_n$ sînt independente și deci $M[S_{n+1}/\mathcal{K}_n] =$ $= S_n + M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] = S_n + M(X_{n+1})$ de unde afirmația rezultă cu ușurință.

b) De asemenea este clar că S_n este $\mathcal{K}_n =$ $= \mathcal{B}(S_1, \ldots, S_n)$ - măsurabilă și

$$M(|S_{n+1}|) \leq |S_0| + \sum_{i=1}^{n} b_i(\{-1,1\}^{i-1}) M(|X_i|) =$$

$$= |S_0| + \sum_{i=1}^{n} b_i(\{-1,1\}^{i-1}) < \infty$$

Apoi $M[S_{n+1}/\mathcal{K}_n] = S_n + M[X_{n+1} b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)/\mathcal{K}_n] =$

$$= S_n + M[X_{n+1} b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)/\mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n)/\mathcal{K}_n] =$$

$$= S_n + M[b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)] M[X_{n+1}/\mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n)]/\mathcal{K}_n] =$$

$$= S_n + M[b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)] M(X_{n+1})/\mathcal{K}_n] = S_n + M(X_{n+1}) \cdot$$

$$\cdot M[b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)/\mathcal{K}_n] = S_n + (2p-1) M[b_{n+1}(X_1, \ldots, X_n)]/\mathcal{K}_n]$$

de unde afirmația rezultă ușor dacă ținem cont că $b_n \geq 0$.

2. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente cu media 0 şi $\sigma_n^2 = D^2(X_n) < \infty$.

Fie $s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$, $Y_n = S_n^2 - s_n^2$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ şi $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n)$. Să se arate că şirul (Y_n) este $\mathcal{K}_n$-martingal.

<u>Soluţie</u>: Este vizibil că Y_n este $\mathcal{K}_n$- măsurabilă şi de asemenea $M(|Y_n|) \leq M(S_n^2) + s_n^2 =$

$$= \sum_{i=1}^{n} M(X_i^2) + s_n^2 = 2s_n^2 < \infty .$$

Apoi din egalitatea $S_{n+1}^2 = S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2$ şi din faptul că X_{n+1} şi $\mathcal{K}_n$ sînt independente rezultă:

$$M[Y_{n+1} / \mathcal{K}_n] = S_n^2 + 2S_n\, M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] + M[X_{n+1}^2 / \mathcal{K}_n] -$$

$$- s_{n+1}^2 = S_n^2 + 2S_n\, M(X_{n+1}) + M(X_{n+1}^2) - s_{n+1}^2 =$$

$$= S_n^2 + \sigma_{n+1}^2 - s_{n+1}^2 = S_n^2 - s_n^2 = Y_n$$

3. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare nenegative, independente şi astfel încît $M(X_n) = 1$ pentru orice n.

Să se arate că $Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$ este $\mathcal{K}_n =$ $=\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - martingal.

<u>Soluţie</u>: In primul rînd este vizibil că Y_n este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă şi de asemenea $M(Y_n) = \prod_{i=1}^{n} M(X_i) = 1 < \infty$ pentru orice n.

Apoi $M[Y_{n+1}/\mathcal{K}_n] = Y_n M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] = Y_n M(X_{n+1}) = Y_n$

4. Fie $X : (E,\mathcal{K}, P) \longrightarrow R$ o variabilă aleatoare cu medie finită şi fie $(\mathcal{K}_t)_{t\in T}$ (T = N sau R+) o familie crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$.
Să se arate că $\{M[X/\mathcal{K}_t]\}_{t\in T}$ este $\mathcal{K}_t$ - martingal

<u>Soluţie</u>:

$M[X|\mathcal{K}_t]$ este evident $\mathcal{K}_t$ - măsurabilă şi
$M(|M[X|\mathcal{K}_t]|) \leq M(M[|X|/\mathcal{K}_t]) = M(|X|) < \infty$
Apoi $M[M[X/\mathcal{K}_t]/\mathcal{K}_s] = M[X/\mathcal{K}_s]$ dacă $s < t$

5. Fie $(Z_n)_{n=1,2,\ldots}$ un şir de variabile aleatoare independente simetrice şi fie
$\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(Z_1,\ldots,Z_n, /Z_{n+1}/)$

Să se arate că şirul $X_n = \sum_{m=1}^{n} \text{sign}\,(Z_m)$ este $\mathcal{K}_n$-martingal.

<u>Soluţie</u>: Intîi să observăm că $\mathcal{K}_n =$

$= \mathcal{B}(\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in A\}\cap\{|Z_{n+1}|\in B\};A\in\mathcal{B}_{R^n}, B\in\mathcal{B}_R)$;

deci $\mathcal{K}_n$ este generat de o familie închisă la intersecţia finită. Acest fapt arată că rămîne de arătat că:

$$\int\limits_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in A\}\cap\{|Z_{n+1}|\in B\}} \sum_{m=1}^{n+1} \text{sign}(Z_m)\,dP = \int\limits_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in A\}\cap\{|Z_{n+1}|\in B\}} \sum_{m=1}^{n} \text{sign}(Z_m)\,dP$$

Cum
$$\int\limits_{(\quad)} \sum_{m=1}^{n+1} \text{sign}(Z_m)\,dP = \int\limits_{(\ )} \sum_{m=1}^{n} \text{sign}(Z_m)\,dP + \int\limits_{(\ )} \text{sign}(Z_{n+1})\,dP$$

rezultă că trebuie să probăm că: $\displaystyle\int\limits_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in A\}\cap\{|Z_{n+1}|\in B\}} \text{sign}(Z_{n+1})\,dP = 0$

Intrucît $\chi_A(Z_1,\ldots,Z_n)$ şi $\chi_B(|Z_{n+1}|)\,\text{sign}(Z_{n+1})$ sînt independente rezultă că:

$$\int\limits_{\{(Z_1,\ldots,Z_n)\in A\}\cap\{|Z_{n+1}|\in B\}} \text{sign}(Z_{n+1})\,dP = P((Z_1,\ldots,Z_n)\in A)\int \chi_B(|Z_{n+1}|)\cdot$$

$$\cdot\,\text{sign}(Z_{n+1})\,dP$$

dar $\int \chi_B(|Z_{n+1}|) \operatorname{sign}(Z_{n+1})dP = \int\limits_{(Z_{n+1}>0)} \chi_B(+Z_{n+1})dP - \int\limits_{(Z_{n+1}<0)} \chi_B(-Z_{n+1})dP$

şi $\int\limits_{(Z_{n+1}>0)} \chi_B(Z_{n+1})\, dP = \int\limits_{(0,\infty)} \chi_B(x)\, dP \circ Z_{n+1}^{-1}(x)$ $\underset{=}{\text{simetrie}}$

$$= \int\limits_{(0,\infty)} \chi_B(x)\, dP \circ (-Z_{n+1})^{-1}(x) = \int\limits_{(Z_{n+1}<0)} \chi_B(-Z_{n+1})\, dP$$

6. Schema lui Polya

Se fac extrageri repetate dintr-o urnă care conţine bile albe şi negre.

Să presupunem că după fiecare extragere bila extrasă se introduce în urnă împreună cu încu c bile de aceeaşi culoare, $c > 0$.

Fie Y_n numărul bilelor albe aflate în urnă după cea de a n extragere şi fie X_n variabila aleatoare definită prin $X_n = 1$ dacă la a n extragere s-a obţinut bila albă şi $X_n = 0$ în caz contrar. Să se arate că şirul $(Y_n)_{n=1,2,..}$ este $\mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)$ - martingal şi să se calculeze $P(X_n = 1)$ cu alte cuvinte probabilitatea ca la n extragere să obţinem bila albă.

Soluţie: Fie a şi b numărul de bile albe şi negre aflate iniţial în urnă. Fie a_n, b_n numărul de bile albe şi negre după a n extragere.

Atunci: $Y_n = \dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ şi a_n, b_n, X_n sînt legate prin relaţiile

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + C & \text{dacă } X_{n+1} = 1 \\ a_n & \text{dacă } X_n = 0 \end{cases}$$

$$b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{dacă } X_{n+1} = 1 \\ b_n + C & \text{dacă } X_n = 0 \end{cases} \quad \text{unde } a_0=a,\ b_0=b$$

Avem $P(X_{n+1} = 1/X_n) = Y_n$ pentru $n = 1,2,\ldots$ așa că

$$M[Y_{n+1}/ X_1,\ldots,X_n] = \frac{a_n+C}{a_n+b_n+C} \cdot \frac{a_n}{a_n+b_n} + \frac{a_n}{a_n+b_n+C} \cdot \frac{b_n}{a_n+b_n} =$$

$= \frac{a_n}{a_n+b_n} = Y_n$ deci (Y_n) este martingal.

Apoi $P(X_n=1) = M[P(X_n=1/X_{n-1})] = M(Y_{n-1}) = M(Y_1) = \frac{a}{a+b}$

7. Fie $(X_t)_{t\in T}$, $(X'_t)_{t\in T}$, $T = N$ sau R_+, două procese stocastice definite pe același cîmp de probabilitate $(E,\mathcal{K}, P)$ și $(\mathcal{K}_t)_{t\in T}$, $(\mathcal{K}'_t)_{t\in T}$ două șiruri crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$ astfel încît $\mathcal{K}_t$ și $\mathcal{K}'_t$ sînt independente pentru orice t.

Să se arate că dacă (X_t) este $\mathcal{K}_t$ - martingal și (X'_t) este $\mathcal{K}'_t$ - martingal atunci $(X_t + X_t)$, $(X_tX'_t)$ sînt $\mathcal{B}(\mathcal{K}_t\cup\mathcal{K}'_t)$ - martingale.

Soluţie: Fie familia $\mathcal{C}_s$ închisă la intersecţia finită definită prin $\mathcal{C}_s = \{ A\cap B \,/\, A\in \mathcal{K}_s,\ B\in \mathcal{K}'_s \}$. Este uşor de văzut că $\mathcal{B}(\mathcal{K}_s \cup \mathcal{K}'_s) = \mathcal{B}(\mathcal{C}_s)$. Fie $s<t$ şi $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_s\cup\mathcal{K}'_s)$ Trebuie să arătăm că:

$$\int_C (X_t + X'_t)\, dP = \int_C (X'_s + X_s)\, dP$$

Ca funcţie de C cei doi membri ai egalităţii sînt măsuri finite şi cum coincid în E, este suficient (conform teoremei de unicitate a probabilităţilor) să arătăm că ele coincid pe $\mathcal{C}_s$.

Fie deci $A\in\mathcal{K}_s$, $B\in\mathcal{K}'_s$ atunci:

$$\int_{A\cap B}(X_t + X'_t)\,dP = \int \chi_A \chi_B (X_t + X'_t)\,dP = \int \chi_A X_t \chi_B\, dP +$$

$$+\int \chi_A\chi_B X'_t\, dP = P(B)\int_A X_t\, dP + P(A)\int_B X'_t\, dP = P(B)\int_A X_s\, dP +$$

$$+P(A)\int_B X'_s\, dP = \int \chi_A \chi_B (X'_s + X_s)\,dP = \int_{A\cap B}(X_s + X'_s)\,dP,$$ deci $(X_t + X'_t)$ este martingal

Asemănător avem:

$$\int_{A\cap B} X_t X'_t\, dP = \int \chi_A X_t \chi_B X'_t\, dP = \left(\int \chi_A X_t\, dP\right)\left(\int \chi_B X'_t\, dP\right) =$$

$$= \left(\int \chi_A X_s\, dP\right)\left(\int \chi_B X'_s\, dP\right) = \int_{A\cap B} X_s X'_s\, dP$$ deci $(X_t X'_t)$ este martingal.

8. Fie $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_n)_n$ un şir crescător de corpuri boreliene din $\mathcal{K}_n$ şi (X_n) un şir de variabile aleatoare. Să se arate că (X_n) este $\mathcal{K}_n$ - submartingal dacă şi numai dacă există două şiruri (Y_n) , (A_n) de variabile aleatoare astfel încît $X_n = Y_n + A_n$ a.s. pentru orice n, unde (Y_n) este $\mathcal{K}_n$-martingal, $0 = A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \dots$ a.s. şi A_n este $\mathcal{K}_{n-1}$ - măsurabilă pentru orice $n \geq 1$ (<u>descompunerea Doob-Meyer</u>). In plus să se arate că (Y_n) şi (A_n) cu proprietăţile de mai sus sînt unic determinaţi.

<u>Soluţie</u>: Avem că: $X_n = X_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)$; $X_{i+1} - X_i =$

$= X_{i+1} - M[X_{i+1}/\mathcal{K}_i] + M[X_{i+1}/\mathcal{K}_i] - X_i$

Definim $U_1 = X_1$, $V_1 = 0$ şi $U_{i+1} = X_{i+1} - M[X_{i+1}/\mathcal{K}_i]$; $V_{i+1} = M[X_{i+1}/\mathcal{K}_i] - X_i$ pentru $i > 1$.

Este vizibil că $M[U_{i+1}/\mathcal{K}_i] = 0$ şi $V_{i+1} \geq 0$ a.s. (prima din proprietăţile valorilor medii condiţionate şi a doua din inegalitatea de submartingal). Punem prin definiţie: $Y_n = \sum_{i=1}^{n} U_n$; $A_n = \sum_{i=1}^{n} V_n$

Este vizibil că Y_n este $\mathcal{K}_n$-măsurabilă iar A_n este

$\mathcal{K}_{n-1}$ - măsurabilă şi avem:

$$M[Y_{n+1}/\mathcal{K}_n] = M[\sum_{i=1}^{n} U_i + U_{n+1}/\mathcal{K}_n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} U_i + M[U_{n+1}/\mathcal{K}_n] = \sum_{i=1}^{n} U_i = Y_n,$$ deci (Y_n) este

$\mathcal{K}_n$ - martingal.

De asemenea $X_n = Y_n + A_n$, $0 = A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq A_n \leq \cdots$

<u>Unicitatea</u>. Fie $X_n = Y_n + A_n = Y'_n + A'_n$; atunci şirul $A''_n = A_n - A'_n = Y_n - Y'_n$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal şi în plus $A''_1 = 0$, A''_n este $\mathcal{K}_{n-1}$ - măsurabilă dacă $n>1$.
Avem $A''_{n+1} = M[A''_{n+1}/\mathcal{K}_n] = A''_n$ (prima egalitate din $\mathcal{K}_n$-măsurabilitatea lui A''_{n+1} iar a doua din egalitatea de martingal). Inductiv vom obţine: $0=A''_1 = A''_2 = \dots = A''_n$ de unde $A_n = A'_n$ (egalităţile sînt adevărate a.s.).
Apoi $Y_n=X_n-A_n=X_n-A'_n=Y'_n$ şi cu aceasta unicitatea este demonstrată.

9. Fie (X_t) un submartingal nenegativ şi $t_1 \in T$. Să se arate că $(X_t)_{t\leq t_1}$ este o familie uniformă integrabilă.

<u>Soluţie</u>: Avem că:

$$\int_{(X_t \geq \alpha)} X_t \, dP \leq \int_{(X_t \geq \alpha)} X_{t_1} \, dP = \int_{(X_t \geq \alpha, X_{t_1} \geq \beta)} X_{t_1} \, dP + \int_{(X_t \geq \alpha, X_{t_1} < \beta)} X_{t_1} \, dP \leq$$

$$\leq \int_{(X_{t_1} \geq \beta)} X_{t_1} \, dP + \beta \, P(X_t \geq \alpha) \leq \int_{(X_{t_1} \geq \beta)} X_{t_1} \, dP + \frac{\beta}{\alpha} \int X_t \, dP \leq$$

$$\leq \int_{(X_{t_1} \geq \beta)} X_{t_1} \, dP + \frac{\beta}{\alpha} \int X_{t_1} \, dP \longrightarrow 0 \text{ cînd } \alpha \to \infty, \beta \to \infty$$

unifomr în $t \leq t_1$, prin urmare familia $(X_t)_{t \leq t_1}$ este uniform integrabilă.

1o. Pentru orice n fie (X_t^n) un proces stocastic astfel încît $\sup_n X_t^n$ este integrabilă pentru orice t.

a) Să se arate că dacă $(X_t^n)_t$ este $\mathcal{K}_t$ - submartingal pentru orice n atunci $(\sup_n X_t^n)_t$ este $\mathcal{K}_t$ -submartingal.

b) Să se arate că dacă $(X_t^n)_t$ este $\mathcal{K}_t$ - supermartingal crescător pentru orice n atunci $(\sup_n X_t^n)_t$ este $\mathcal{K}_t$ - supermartingal.

<u>Soluţie</u>: Fie $Y_t = \sup_n X_t^n$, $Y_t^n = \sup_{K \leq n} X_t^K$

Cum Y_t^n este submartingal rezultă că dacă $s \leq t$ şi $A \in \mathcal{K}_s$ atunci $\int_A Y_t^n \, dP \geq \int_A Y_s^n \, dP$

Prin trecerea la limită rezultă că

$$\int_A Y_t \, dP \geq \int Y_s \, dP$$

(deoarece şirul Y_t^n este crescător), deci (Y_t) este submartingal.

b) Fie $s \leq t$ şi $A \in \mathcal{K}_s$. Atunci :

$$\int_A \sup_n X_t^n \, dP = \lim_{n \to \infty} \int_A X_t^n \, dP \leq \lim_{n \to \infty} \int_A X_s^n \, dP = \int_A \sup_n X_s^n \, dP$$

11. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_t)_{t \in T}$, $T = N$ sau R_+, o familie crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$. Fie $(X_t)_{t \in T}$ un proces stocastic astfel încît X_t este $\mathcal{K}_t$-măsurabilă pentru orice t. Dacă $F \subset R$ definim aplicaţia $D_F : E \longrightarrow T \cup \{\infty\}$ prin:

$$D_F(\omega) = \begin{cases} \inf(t \in T;\ X_t(\omega) \in F) & \text{dacă mulţimea de sub inf este nevidă} \\ \infty & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

a) Dacă $T = N$ şi $F \in \mathcal{B}_R$ să se arate că D_F este $\mathcal{K}_t$ - opţională.

b) In cazul $T = R_+$ să se arate că dacă F este mulţime închisă şi (X_t) este continuu la dreapta atunci D_F este $\mathcal{K}_t$ - opţională.

<u>Soluţie</u>: a) Deoarece X_n este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă pentru orice n şi familia $(\mathcal{K}_n)$ este crescătoare rezultă că mulţimea $\{D_F = n\} = \{X_1 \in \complement F, \dots, X_{n-1} \in \complement F, X_n \in F\}$ este în $\mathcal{K}_n$, cu alte cuvinte D_F este $\mathcal{K}_n$-opţională.

b) Dacă F este mulţime închisă atunci $\{D_F \leq t\} =$

$$= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\substack{r \leq t \\ r \in Q_+}} \left\{ d(X_n, F) \leq \frac{1}{m} \right\}$$

Deoarece $d(x,F)$ este continuă în x (deci boreliană) şi X_r este $\mathcal{K}_r$ - măsurabilă rezultă că $d(X_r, F)$ este $\mathcal{K}_r$-măsurabilă şi deci $\{d(X_r, F) \leq \frac{1}{m}\} \in \mathcal{K}_r \subset \mathcal{K}_t$, de unde $\{D_F \leq t\} \in \mathcal{K}_t$ şi cu aceasta afirmaţia este dovedită.

12. Fie σ o $\mathcal{K}_t$-opţională şi $A \in \mathcal{K}_\sigma$.

a) Să se arate că aplicaţia $\sigma_A = \begin{cases} \sigma & \text{pe } A \\ \infty & \text{pe } \complement A \end{cases}$ este $\mathcal{K}_t$-opţională.

b) Fie $(X_n)_{n \in N}$ un proces stocastic astfel încît X_n este $\mathcal{K}_n$-măsurabilă pentru orice n.

Să se arate că pentru $F \in \mathcal{B}_R$ aplicaţia:

$$\tau = \begin{cases} \inf(n > \sigma;\ X_n \in F) & \text{dacă mulţimea de sub inf este nevidă} \\ \infty & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

este $\mathcal{K}_n$ - opţională.

<u>Soluţie</u>: a) Dacă $t < \infty$ atunci $\{\sigma_A \le t\} = A \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{K}_t$ dacă σ_A este $\mathcal{K}_t$ - opţională.

a) Avem: $\{\tau = n\} = \bigcup_{\ell=1}^{n-1} \{\tau = n, \sigma = \ell\} =$

$$= \bigcup_{\ell=1}^{n-1} \{X_n \in F,\ X_i \in \complement F,\ i = \ell+1,\dots,n\} \cap \{\sigma = \ell\} \in \mathcal{K}_n$$

13. Fie σ o $\mathcal{K}_t$-opţională şi $\tau \ge \sigma$, τ $\mathcal{K}_\sigma$-măsurabilă.

a) Să se arate că τ este $\mathcal{K}_t$ - opţională. In particular să se deducă că dacă τ_1, τ_2 sînt $\mathcal{K}_t$-opţionale atunci $\tau_1 + \tau_2$ este $\mathcal{K}_t$ - opţională.

b) Să se arate că orice opţională este limita unui şir descrescător de opţionale simple.

Soluţie: a) Avem că $\{\tau \le t\} = \{\tau \le t\} \cap \{\sigma \le t\} \in \mathcal{K}_t$ deoarece $\{\tau \le t\} \in \mathcal{K}_\sigma$, aşa că τ este opţională.

Deoarece $\tau_1 + \tau_2$ este $\mathcal{K}_{\tau_1 \vee \tau_2}$ -măsurabilă şi $\tau_1 \vee \tau_2 \leq$ $\leq \tau_1 + \tau_2$ rezultă că $\tau_1 + \tau_2$ este opţională.

b) Fie $\sigma_n = \infty \cdot \chi_{\{\sigma=\infty\}} + \sum_{K \in N} \frac{K}{2^n} \chi_{\left\{\frac{K-1}{2^n} < \sigma < \frac{K}{2^n}\right\}}$

unde σ este opţională.

Avem că $\sigma_n \geq \sigma$ şi σ_n sînt $\mathcal{K}_\sigma$-măsurabile, deci opţionale conform punctului a). Este apoi vizibil că (σ_n) este descrescător şi că $\sigma_n \longrightarrow \sigma$.

14. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate , $(\mathcal{K}_t)_{t \in T}$ ($T=N$ sau R_+) o familie crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$.

Dacă σ este $\mathcal{K}_t$ - opţională finită şi $t_n \nearrow \infty$ să se arate că $\mathcal{K}_\sigma = \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\sigma \wedge t_n})$.

<u>Soluţie</u>: Intîi este vizibil că are loc egalitatea:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [A \cap \{\sigma \leq t_n\}]$$

Deoarece σ este $\mathcal{K}_\sigma$ -măsurabilă rezultă că $A_n = A \cap \{\sigma \leq t_n\} \in \mathcal{K}_\sigma$ dacă $A \in \mathcal{K}_\sigma$. De asemenea

$A_n \in \mathcal{K}_{t_n}$ (vezi paragraful 1). Rezultă deci că

$A_n \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_{t_n} = \mathcal{K}_{\sigma \wedge t_n} \subset \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\sigma \wedge t_n})$ de unde

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_{\sigma \wedge t_n})$.

15. Fie σ, τ $\mathcal{K}_t$ - opționale. Să se arate că au loc egalitățile:

$$\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau = \{A \cup B / A \in \mathcal{K}_\sigma, A \subset \{\sigma \leq \tau\}, B \in \mathcal{K}_\tau, B \subset \{\tau < \sigma\}\}$$

$$\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau} = \{A \cup B / A \in \mathcal{K}_\tau, A \subset \{\sigma \leq \tau\}, B \in \mathcal{K}_\sigma, B \subset \{\tau < \sigma\}\}$$

__Soluție:__ Dacă $A \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau$ atunci $A \cap \{\sigma\wedge\tau \leq t\} =$
$= A \cap \{\sigma \leq t\} \cup A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{K}_t$

Invers, deoarece $\sigma\wedge\tau \leq \tau$, $\sigma\wedge\tau \leq \sigma$ rezultă că

$\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{K}_\tau$, $\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{K}_\sigma$ și deci $\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau} \subset \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau$

și cu aceasta am probat egalitatea $\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau} = \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau$

Fie $C \in \mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}$; atunci $C = A \cup B$, $A = C \cap \{\sigma \leq \tau\}$,
$B = C \cap \{\tau < \sigma\}$. Cum $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau =$
$= \mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}$ rezultă că $A \in \mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}$ (analog pentru B).

Reciproc dacă $A \in \mathcal{K}_\sigma$, $A \subset \{\sigma \le \tau\}$ atunci $A = A \cap \{\sigma \le \le \tau\} \in \mathcal{K}_\tau$ deci $A \in \mathcal{K}_\sigma \cap \mathcal{K}_\tau$ (analog pentru $B \in \mathcal{K}_\tau$ cu $B \subset \{\tau < \sigma\}$).

Fie acum $C \in \mathcal{K}_{\sigma \vee \tau}$; atunci $C = A \cup B$, $A = C \cap \{\sigma \le \tau\}$, $B = C \cap \{\tau < \infty\}$. Apoi putem scrie $A = C \cap \{\sigma \le \tau\} \cap \{\sigma \vee \tau \le \tau\}$ și cum $C \cap \{\sigma \le \tau\} \in \mathcal{K}_{\sigma \vee \tau}$ rezultă că $A \in \mathcal{K}_\tau$.

Se procedează analog pentru B.

Incluziunea inversă este imediată.

17. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate , $(\mathcal{K}_t)_{t \in T}$, $T = N$ sau R_+, o familie crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$ și X o variabilă aleatoare integrabilă. Fie σ , τ $\mathcal{K}_t$ - opționale.

a) Să se arate că: $M[X / \mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}] + M[X / \mathcal{K}_{\sigma \vee \tau}] = M[X / \mathcal{K}_\sigma] + M[X / \mathcal{K}_\tau]$ și $M[X / \mathcal{K}_\sigma / \mathcal{K}_\tau] = M[X / \mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}]$

b) Să se arate că: $M[X / \mathcal{K}_\sigma]\chi_{\{\sigma = t\}} = M[X / \mathcal{K}_t]\chi_{\{\sigma = t\}}$

(Egalitățile precedente au loc a.s.)

<u>Soluție</u>: a) Aplicațiile $\chi_{\{\sigma \le \tau\}} M[X / \mathcal{K}_\sigma]$ și $\chi_{\{\tau < \sigma\}} M[X / \mathcal{K}_\tau]$ sînt $\mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}$ - măsurabile și deci sînt egale cu valorile lor medii condiționate în raport cu $\mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}$. Acestea sînt $M[\chi_{\{\sigma \le \tau\}} X / \mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}]$ și $M[\chi_{\{\tau < \sigma\}} X / \mathcal{K}_{\sigma \wedge \tau}]$

Pe deasupra $\lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma] = M[\lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma]/\mathcal{K}_\tau] =$
$= \lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma/\mathcal{K}_\tau]$.

Aplicațiile $\lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_\tau]$ și $\lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma/\mathcal{K}_\tau]$ fiind $\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}$ -măsurabile, rezultă că sînt egale cu valorile lor medii condiționate în raport cu $\mathcal{K}$.

Dar cum aceste valori medii condiționate sînt egale rezultă că aplicațiile precedente sînt egale. Rezultă că:

$$M[X/\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}] = M[\lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} X/\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}] + M[\lambda_{\{\tau<\sigma\}} X/\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}] =$$

$$= \lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma/\mathcal{K}_\tau] + \lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma/\mathcal{K}_\tau] = M[X/\mathcal{K}_\sigma/\mathcal{K}_\tau]$$

ceea ce probează că a doua egalitate din a) este adevărată.

Să reținem următoarea egalitate ce a fost arătată mai sus:

$$\alpha)\ M[X/\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}] = \lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma] + \lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_\tau]$$

Avînd în vedere că $\lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}]$ este $\mathcal{K}_\tau$ -măsurabilă și $\lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}]$ este $\mathcal{K}_\sigma$- măsurabilă obținem:

$$M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}] = \lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}] + \lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}] =$$

$$= M[\lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}]/\mathcal{K}_\tau] + M[\lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma\vee\tau}]/\mathcal{K}_\sigma] =$$

$$= \lambda_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_\tau] + \lambda_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma].$$

Reținînd primul și ultimul termen din egalitățile de mai sus obținem

$$\beta)\ M[X/\mathcal{K}_{\sigma\wedge\tau}] = \chi_{\{\sigma\leq\tau\}} M[X/\mathcal{K}_{\tau}] + \chi_{\{\tau<\sigma\}} M[X/\mathcal{K}_{\sigma}]$$

Prin adunare din α) și β) obținem prima egalitate din a)

b) Deoarece ambii membri ai egalității sînt $\mathcal{K}_t$ - măsurabili rezultă că este suficient să arătăm că integralele pe orice mulțime din $\mathcal{K}_t$ ai ambilor termeni ai egalității de demonstrat coincid.

Fie deci $A\in\mathcal{K}_t$; atunci $\int_A M[X/\mathcal{K}_\sigma]\chi_{\{\sigma=t\}}\, dP =$

$$= \int_{A\cap\{\sigma=t\}} M[X/\mathcal{K}_\sigma]\, dP = \int_{A\cap\{\sigma=t\}} X\, dP = \int_A X\chi_{\{\sigma=t\}}\, dP =$$

$$= \int_A M[X\chi_{\{\sigma=t\}}/\mathcal{K}_t]\, dP = \int_A M[X/\mathcal{K}_t]\chi_{\{\sigma=t\}}\, dP$$

Am ținut cont mai sus că $A\cap\{\sigma=t\}\in\mathcal{K}_t$, fapt care se verifică cu ușurință.

17. Fie $(E,\mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și X o variabilă aleatoare integrabilă.

Să se arate că familia $M[X/\mathcal{F}]$, unde $\mathcal{F}$ parcurge corpurile boreliene din $\mathcal{K}$, este uniform integrabilă.

Să se deducă că pentru orice $\mathcal{K}_n$ - submartin-
(uniform integrabil)
gal (X_n) familia $\{X_\tau ; \tau\ \mathcal{K}_n$- opțională$\}$ este uniform integrabilă (din teorema de convergență a martingalelor rezultă că $X_n \xrightarrow[\cdot L^1]{a.s} X_\infty$ şi atunci prin definiţie $X_\tau = X_\infty$ pe $\{\tau = \infty\}$).

<u>Soluţie</u>: Inlocuind X cu $|X|$ dacă este necesar, putem presupune $X \geq 0$. Atunci avem:

$$\int_{(M[X/\mathcal{F}]>c)} M[X/\mathcal{F}]\, dP = \int_{(M[X/\mathcal{F}]>c)} X\, dP$$

$$P(M[X/\mathcal{F}]>c) \leq \frac{1}{c} M\left(M[X/\mathcal{F}] \right) = \frac{1}{c} M(X) \longrightarrow 0$$

cînd $c \longrightarrow \infty$ uniform în $\mathcal{F}$.

Rezultă că prima integrală este $< \varepsilon$ pentru c suficient de mare şi aceasta uniform în $\mathcal{F}$, fapt ce este echivalent cu uniform integrabilitatea familiei din enunţul problemei.

Fie acum (X_n) un $\mathcal{K}_n$ - submartingal uniform integrabil.
Din teorema de opţionalizare (T7, §1) aplicată opţionalelor τ, ∞ obţinem: $X_\tau \leq M[X_\infty / \mathcal{K}_\tau]$ şi cum familia $\{M[X_\infty/\mathcal{K}_\tau] ; \tau\ \mathcal{K}_n$ - opţională$\}$ este uniform integrabilă rezultă că şi familia

$\{X_\tau ; \tau\ \mathcal{K}_n$ - opţională$\}$ este uniform integrabilă (fiind mai mică).

18. Fie $(X_t)_{t\in R_+}$ un $\mathcal{K}_t$ - martingal continuu la dreapta şi fie:

$\mathcal{K}_{t_+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{K}_s$ pentru orice t. Să se arate că X_t este $\mathcal{K}_{t_+}$-martingal.

<u>Soluţie</u>: Este vizibil că familia $(\mathcal{K}_{t_+})_t$ este crescătoare şi deoarece $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{K}_{t+}$ avem şi că X_t este $\mathcal{K}_{t+}$ - măsurabilă pentru orice t.

Fie $s<t$, $A\in\mathcal{K}_{s+}$ şi (s_n), (t_n) două şiruri aşa încît $s < s_n < t$ $s_n \searrow s$, $t_n \searrow t$. Intrucît $A\in\mathcal{K}_{s_n}$ avem că:

$$1)\quad \int_A X_{s_n}\, dP = \int_A X_{t_n}\, dP$$

Deoarece $X_{s_n} = M[X_{s_1}/\mathcal{K}_{s_n}]$, $X_{t_n} = M[X_{t_1}/\mathcal{K}_{t_n}]$ rezultă că familiile (X_{s_n}), (X_{t_n}) sînt uniform integrabile (vezi problema 17). In acest caz prin trecere la limită în 1) obţinînd că

$\int_A X_s\, dP = \int_A X_t\, dP$ cu alte cuvinte (X_t) este $\mathcal{K}_{t+}$ - martingal.

19. Fie $\Omega^d = \{f : R_+ \longrightarrow R^d;\ f \text{ continuă}\}$ ~~și mărginită~~ . Ω^d este spațiu metric separabil și complet în raport cu metrica:

$$d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sup\limits_{t\leq n} |\omega_1(t)-\omega_2(t)|}{1+\sup\limits_{t\leq n} |\omega_1(t)-\omega_2(t)|}$$

Pentru orice $0 \leq s \leq t$ definim aplicația $x_t : \Omega^d \longrightarrow R^d$ prin $x_t(\omega) = \omega(t)$ și $\mathcal{K}^s = \mathcal{B}(x_u / u \geq s)$, $\mathcal{K}_t^s = \mathcal{B}(x_u / s \leq u \leq t)$.

Fie $A \in \mathcal{K}^s$ și τ o $\mathcal{K}^s$ - opțională finită.

a) Să se arate că $A \in \mathcal{K}_t^s \iff \omega \in A$ și $\omega'(u) = \omega(u)$ pentru $u \in [s,t]$ implică $\omega' \in A$.

b) Să se arate că $A \in \mathcal{K}_\tau^s \iff \omega \in A$ și $\omega(u) = \omega'(u)$ pentru $u \in [s, \tau(\omega)]$ implică $\omega' \in A$.

<u>Soluție</u>: a) Fie $A \in \mathcal{K}_t^s$, $\omega \in A$ și ω' astfel încît $x_u(\omega) = x_u(\omega')$ pentru $u \in [s,t]$. Considerăm aplicația $j : \Omega^d \longrightarrow C([s,t], R^d)$ definită prin $\widetilde{x}_u \circ j = x_u$ care este măsurabilă (deci j este restricția). Din problema 26 (din [27]) rezultă că $\mathcal{B}_{C([s,t],R^d)} = \mathcal{B}(\widetilde{x}_u / s \leq u \leq t)$ de unde:

$$j^{-1}(\mathcal{B}_{C([s,t],R^d)}) = j^{-1}(\mathcal{B}(\widetilde{x}_u / s \leq u \leq t)) = \mathcal{B}(j^{-1}(\widetilde{x}_u / s \leq u \leq t))$$

$$= \mathcal{B}(x_u / s \leq u \leq t) = \mathcal{K}_t^s \text{ și prin urmare } A = j^{-1}(B) \text{ cu}$$

$B \in \mathcal{B}(\tilde{x}_u / s \leq u \leq t)$. Cum prin ipoteză avem $j(\omega)=j(\omega') \in B$ rezultă că $\omega' \in j^{-1}(B) = A$

Fie acum $A \in \mathcal{K}^s$ cu proprietatea că dacă $\omega \in A$ şi ω' este astfel încît $x_u(\omega) = x_u(\omega')$ pentru $u \in [s,t]$ atunci $\omega' \in A$ şi să arătăm că $A \in \mathcal{K}^s_t$.

Fie aplicaţia măsurabilă $\varphi : \Omega^d \longrightarrow \Omega^d$ definită prin $x_u \circ \varphi = x_{t \wedge u}$. Avem :

$$\varphi^{-1}(\mathcal{K}^s) = \varphi^{-1}\mathcal{B}(\bigcup_{u \geq s} x_u^{-1}(\mathcal{B}_{R^d})) = \mathcal{B}(\bigcup_{u \geq s} \varphi^{-1}(x_u^{-1}(\mathcal{B}_{R^d}))) =$$

$$= \mathcal{B}(\bigcup_{s \leq u \leq t} x_u^{-1}(\mathcal{B}_{R^d})) = \mathcal{K}^s_t$$

Din ipoteză rezultă că $\omega \in A \Longleftrightarrow \varphi(\omega) \in A \Longleftrightarrow \omega \in \varphi^{-1}(A)$ deci $A = \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{K}^s_t$.

b) Fie $t = \tau(\omega)$, avem $\omega \in A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{K}^s_t$ şi cum $\omega = \omega'$ pe $[s,t]$ rezultă din problema precedentă că $\omega' \in A \cap \{\tau \leq t\}$ şi deci $\omega' \in A$.

Reciproc fie $A \in \mathcal{K}^s$ cu proprietatea că $\omega \in A$ şi $x_u(\omega) = x_u(\omega')$ pe $[s, \tau(\omega)]$ implică $\omega' \in A$ şi să arătăm că $A \in \mathcal{K}^s_\tau$.

Pentru aceasta arătăm întîi că $\tau(\omega) = \tau(\omega')$. Fie $t = \tau(\omega)$; atunci $\omega \in \{\tau \leq t\} \in \mathcal{K}^s_t$ şi cum $\omega = \omega'$ pe $[s,t]$ rezultă că $\omega' \in \{\tau \leq t\}$ adică $\tau(\omega') \leq \tau(\omega)$.

Cum şi $x_u(\omega) = x_u(\omega')$ pe $[s, \tau(\omega')]$ rezultă că $\tau(\omega) \le \tau(\omega')$ şi în final $\tau(\omega) = \tau(\omega')$.
Fie $s < t$ şi să arătăm că $A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{K}_t^s$. Fie $\omega \in A \cap \{\tau \le t\}$ şi $\omega' = \omega$ pe $[s,t]$. Rezultă că $\omega' = \omega$ pe $[s, \tau(\omega)]$ ceea ce implică $\omega' \in A$ şi $\tau(\omega) = \tau(\omega') \le t$ şi deci $\omega' \in \{\tau \le t\}$ adică $\omega' \in A \cap \{\tau \le t\}$

20. Cu notaţiile din problema 19 fie τ σ $\mathcal{K}_t$-opţională finită.

a) Să se arate că $\mathcal{K}_\tau^s$ are o mulţime numărabilă de generatori.

b) Fie τ_n $\mathcal{K}_t^s$ - opţionale astfel încît $\tau_n \nearrow \tau$. Să se arate că:

$$\mathcal{K}_\tau^s = \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_{\tau_n}^s)$$

<u>Soluţie</u>: a) Fie aplicaţia măsurabilă $\varphi : \Omega^d \longrightarrow \Omega^d$ definită prin $x_u \circ \varphi = x_{\tau \wedge u}$. Avem că $\varphi(\mathcal{K}^s) = \mathcal{B}(x_{\tau \wedge t} / t \ge s)$.

Fie $A \in \mathcal{K}_\tau^s$ şi $\omega \in A$; atunci $\omega = \varphi(\omega)$ pe $[s, \tau(\omega)]$ deci $\varphi(\omega) \in A$ (din problema precedentă) $\Longrightarrow \omega \in \varphi^{-1}(A)$ şi $\tau(\omega) = \tau(\varphi(\omega))$ ceea ce arată că $A = \varphi^{-1}(A)$ şi prin urmare $A \in \mathcal{B}(x_{\tau \wedge t} / t \ge s)$.
Cum $x_{\tau \wedge t}$ este $\mathcal{K}_{\tau \wedge t}^s \subset \mathcal{K}_\tau^s$ măsurabilă rezultă că:

$$\mathcal{K}_\tau^s = \mathcal{B}(x_{\tau \wedge t} / t \ge s.)$$

Fie N numărabilă astfel încît $\mathcal{B}(N) = \mathcal{B}_{R^d}$.

Avem atunci $\mathcal{K}_{\tau}^{s} = \mathcal{B}(x_{\tau\wedge t} / t \geq s) =$

$= \mathcal{B}(x_{\tau\wedge t} / t \geq s,\ t-s \in Q_+) = \mathcal{B}\Big(\bigcup_{\substack{t\geq s \\ t\in Q_+}} x^{-1}_{\tau\wedge t}(\mathcal{B}_{R^d})\Big) =$

$= \mathcal{B}\Big(\bigcup_{\substack{t\geq s \\ t-s\in Q_+}} x^{-1}_{\tau\wedge t}(N)\Big)$ și este vizibil că

$\bigcup_{\substack{t\geq s \\ t-s\in Q_+}} x^{-1}_{\tau\wedge t}(N)$ este numărabilă.

b) Din punctul a) știm că $\mathcal{K}_{\tau}^{s} = \mathcal{B}(x_{\tau\wedge t} / t \geq s)$.

Cum $\lim_{n\to\infty} x_{\tau_n\wedge t} = x_{\tau\wedge t}$ rezultă că $x_{\tau\wedge t}$ este

$\mathcal{B}(x_{\tau_n \vee r} / n\geq 1,\ r\geq s) = \mathcal{B}\big(\bigcup_n \mathcal{K}_{\tau_n}^{s}\big)$ -măsurabilă

și deci $\mathcal{K}_{\tau}^{s} \subset \mathcal{B}\big(\bigcup_n \mathcal{K}_{\tau_n}^{s}\big)$.

Incluziunea reciprocă este evidentă.

21. Fie $E = R_+$, $\mathcal{K}^{\circ} = \mathcal{B}_{R^+}$, $S : E \longrightarrow R_+$ aplicația identică și pentru orice $t \in R_+$ punem $\mathcal{K}_t^{\circ} =$

$= \mathcal{B}(S \wedge t)$

a) Să se arate că $\mathcal{K}^{\circ}_t = \mathcal{B}(\mathcal{B}_{[0,t]}, (t,\infty))$, $\mathcal{K}^{\circ}_s \subset \mathcal{K}^{\circ}_t$ dacă $s < t$ şi $\mathcal{K}^{\circ}_s = \bigcap_{t>s} \mathcal{K}^{\circ}_t$ pentru orice s.

b) Să se deducă că S este $\mathcal{K}^{\circ}_t$ - opţională şi $\mathcal{K}^{\circ}_S = \mathcal{K}^{\circ}$.

c) Fie $T : E \longrightarrow R_+ \cup \{+\infty\}$ o aplicaţie $\mathcal{K}^{0}$-măsurabilă. Să se arate că T este $\mathcal{K}_t$ - opţională dacă şi numai dacă există $s \in R_+ \cup \{+\infty\}$ astfel încît $T \geq S$ pe $\{S \leq s\}$ şi $T = S$ pe $\{S > s\}$.

<u>Soluţie</u>: a) Fie $A \in \mathcal{B}_{R_+}$; atunci $\{S \wedge t \in A\} = A_1 \cup A_2$ unde $A_1 = A \cap [0,t]$, $A_2 = (t,\infty)$ dacă $t \in A$, $A_2 = \emptyset$ dacă $t \notin A$. Cum $A \in \mathcal{B}_{[0,t]}$ rezultă că $\{S \wedge t \in A\} \in \mathcal{B}(\mathcal{B}_{[0,t]}, (t,\infty))$. Reciproc dacă $A = [0,a)$, $a < 1$, atunci $A = \{S \wedge t \in A\} \in \mathcal{B}(S \wedge t)$ iar $(t,\infty) = \{S \wedge t \in (t,\infty)\} \in \mathcal{B}(S \wedge t)$.

Incluziunea $\mathcal{K}^{\circ}_s \subset \mathcal{K}^{\circ}_t$ dacă $s < t$ rezultă din $\mathcal{B}_{[0,s]} \subset \mathcal{B}_{[0,t]}$ şi $(s,\infty) = (s,t] \cup (t,\infty)$, $(s,t] \in \mathcal{B}_{[0,t]}$

A rămas să arătăm egalitatea $\mathcal{K}^{\circ}_s = \bigcap_{t>s} \mathcal{K}^{\circ}_t$. Fie pentru aceasta $A \in \mathcal{K}^{\circ}_{s_n}$ cu $s_n \searrow s$. Dacă există n_0 astfel încît $s_n \notin A$ pentru orice $n \geq n_0$ atunci $A = A \cap [0,s_n]$ pentru $n \geq n_0$, de unde $A = A \cap [0,s] \in \mathcal{B}_{[0,s]} \subset \mathcal{K}^{\circ}_s$. Dacă pentru orice ℓ există $n_\ell > \ell$ astfel încît $s_{n_\ell} \in A_{n_\ell}$ (evident putem presupune $n_\ell > n_{\ell-1}$) atunci $A = A \cap [0,s_{n_\ell}] \cup (s_{n_\ell},\infty)$ de unde:

$A = A \cap [0,s] \cup (s,\infty) \in \mathcal{K}^\circ_s$.

b) $\{S \leq t\} = [0,t] \in \mathcal{B}_{[0,t]} \subset \mathcal{K}^\circ_t$ deci S este $\mathcal{K}^\circ_t$ - opţională.

Apoi dacă $A \in \mathcal{K}^\circ$ atunci $A \cap \{S < t\} = A \cap [0,t] \in \mathcal{B}_{[0,t]} \subset \mathcal{K}^\circ_t$

c) Fie T o opţională şi $s \in R_+ \cup \{\infty\}$ aşa încît $T \geq S$ pe $\{S \leq s\}$ şi $T = s$ pe $\{S > s\}$

Atunci $\{T \leq t\} = \{T \leq t;\ S \leq s\} \cup \{T \leq t;\ s < S\} =$

$= A_1 \cup A_2$ unde $A_1 = \{T \leq t,\ S \leq s,\ S \leq t\}$, $A_2 = \emptyset$ dacă $s > t$ şi $A_2 = \{T < S \leq t,\ T = s\}$ dacă $s \leq t$.

Deoarece $\{T \leq t,\ S \leq s\} \in \mathcal{K}^\circ = \mathcal{K}^\circ_S$ rezultă că $A_1 \in \mathcal{K}^\circ_t$ şi de asemenea $A_2 \in \mathcal{K}^\circ_t$ dacă $s > t$.

Dacă $s \leq t$ atunci $A_2 = \{T = s,\ T < S \leq t\}$ şi cum $\{T = s, T < S\} \in \mathcal{K}^\circ_s$ rezultă din nou că $A_2 \in \mathcal{K}^\circ_t$ şi în final $A \in \mathcal{K}^\circ_t$ deci T este $\mathcal{K}^\circ_t$- opţională.

Fie acum T o $\mathcal{K}^\circ_t$ - opţională. Atunci pentru orice $t \in R_+$, $\{T \leq t\} \in \mathcal{K}^\circ_t$ şi deci $\{T \leq t\}$ ori aparţine la $\mathcal{B}_{[0,t]}$ ori este de forma $A \cup (t,\infty)$ cu $A \in \mathcal{B}_{[0,t]}$

Punem $s = \inf\{s;\ \{T \leq t\} \subset (t,\infty)\}$

Dacă $t \leq s$ atunci $\{T \leq t\} \subset [0,t]$ şi deci $T \geq S$ pe $\{S \leq s\}$

Apoi pentru $s \leq t$ atunci $\{s \leq T \leq t\} \supset (t,\infty)$ şi deci făcînd $t \searrow s$ obţinem $\{T=s\} \supset (s,\infty)$ aşa că $\{T=s\}$ pe $\{S > s\}$.

22. Să se dea exemplu de un supermartingal X_t continuu la dreapta şi pozitiv astfel încît $\lim_{t \to \infty} X_t = 0$ a.s. dar $M(X_t) \not\longrightarrow 0$.

<u>Soluţie</u>: Cu notaţiile din problema precedentă fie P o probabilitate pe $\mathcal{K}^o$ astfel încît $P(\{0\}) = 0$ şi $P(\mathcal{S} > t) > 0$ pentru orice t. (P poate fi de exemplu repartiţia exponenţială).

Fie $X_t = \dfrac{\chi_{\{\mathcal{S} > t\}}}{P(\mathcal{S} > t)}$; avem că $X_t \longrightarrow 0$ şi $M(X_t) = 1$ pentru orice t.

Este vizibil că X_t este continuu la dreapta ca funcţie de t şi $X_t \geq 0$ pentru orice t.

A rămas să arătăm că (X_t) este $\mathcal{K}^o_t$-martingal. Avem

$$M[X_{t+s} / \mathcal{K}^o_s] = \frac{1}{P(S > s+t)} M[\chi_{\{S > s+t\}} / \mathcal{K}^o_s] \geq$$

$$\geq \frac{1}{P(S > s)} M[\chi_{\{S > s+t\}} / \mathcal{K}^o_s] \geq \frac{1}{P(S > s)} M[\chi_{\{S > s\}} / \mathcal{K}^o_s] =$$

$$= \frac{\chi_{\{S > s\}}}{P(S > s)} = X_s.$$

23. Să se construiască un martingal (X_t) uniform integrabil şi continuu la dreapta aşa încît $\sup_t M(X_t) < \infty$ şi $M(\sup_t X_t) = \infty$.

Soluţie: Cu notaţiile din problema 21 fie P repartiţia exponenţială pe $\mathcal{K}^{\circ}$, Z o variabilă integrabilă pozitivă (definită pe E) şi fie

$$X_t = Z\chi_{\{S \leq t\}} + \frac{M(\chi_{\{S>t\}} \cdot Z)}{P(S>t)}\chi_{\{S>t\}}$$ care este

vizibil continuu la dreapta.

Arătăm că $X_t = M[Z / \mathcal{K}_t^{\circ}]$ fapt ce arată că (X_t) este $\mathcal{K}_t^{\circ}$-martingal uniform integrabil.

Deoarece $\mathcal{K}_t^{\circ} = \mathcal{B}(S \wedge t)$ (vezi problema 21) este suficient să arătăm că $\int_{(S\wedge t \in A)} X_t \, dP = \int_{(S\wedge t\in A)} Z \, dP$ pentru orice $A \in \mathcal{B}_{R_+}$ cu $t \notin A$ (familia acestor A este un sistem de generatori închis la intersecţia finită pentru $\mathcal{B}_{R_+}$).

Avem: $\int_{(S\wedge t\in A)} X_t \, dP = \int_{(S\wedge t \in A, S\leq t)} X_t \, dP = \int_{(S\wedge t\in A, S\leq t)} Z \, dP = \int_{(S\wedge t\in A, S\leq t)} M[Z/\mathcal{K}_t^{\circ}] dP =$

$= \int_{(S\wedge t\in A)} M[Z/\mathcal{K}_t^{\circ}] \, dP$

Fie $Z = \chi_{\{S\leq 1\}} + S^{-2} e^{S} \chi_{\{S>1\}}$, atunci $M(Z) \leq 1 +$

$+ \int_1^{\infty} x^{-2} e^{x} e^{-x} \, dx < \infty$ deci $\sup_t M(X_t) = M(Z) < \infty$.

Rămîne să arătăm că $M(\sup_t X_t) = \infty$.

Avem: $\sup_t X_t \geq \sup_{t<S} X_t = \sup_{t<S} \dfrac{M[\chi_{\{S>t\}} \cdot Z]}{P(S>t)} =$

$= \sup_{t<S} e^t M[\chi_{\{S>t\}} \cdot Z] \geq M(Z) e^S$ şi $M(e^S) = \infty$ după cum uşor se poate verifica; aşa că $M(\sup_t X_t) \geq M(Z)\, M(e^S) = \infty$.

24. Să se dea exemplu de un martingal (X_t) continuu la dreapta şi uniform integrabil astfel încît $M(X_T^2) = \infty$ pentru orice T opţională neidentic nulă.

<u>Soluţie</u>: Cu notaţiile din problema 21 fie P repartiţia exponenţială cu parametru 1,

$Z = \chi_{\{0<S\leq 1\}} \dfrac{1}{\sqrt{S}} e^{\frac{S}{2}}$ şi procesul continuu la dreapta:

$X_t = Z\chi_{\{S\leq t\}} + \dfrac{M[Z\chi_{\{S>t\}}]}{P(S>t)} \chi_{\{S>t\}}$. Avem că:

$M(Z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\frac{x}{2}} e^{-x}\, dx < \infty$. Din problema 23 ştim că:

$X_t = M[Z / \mathcal{K}_t^{\circ}]$ aşa că (X_t) este martingal uniform integrabil (vezi problema 17).

Pentru orice $a \in (0,1]$ avem:

$$X^2_{S\wedge a} \geq z^2 \chi_{\{S \leq S\wedge a\}} = \frac{1}{S} e^{S} \chi_{\{0 < S \leq a\}}$$

şi deci $M(X^2_{S\wedge a}) \geq \int_0^a \frac{1}{x} e^{x} e^{-x} dx = +\infty$

Fie acum T σ $\mathcal{K}^{\circ}_t$ - opţională aşa încît $P(T=0) < 1$.

Din problema 21 rezultă că există $a \in (0,1]$ aşa încît $S\wedge a \leq T$. Nu putem avea $M(X_T^2) < \infty$ căci aceasta ar atrage $M(X^2_{S\wedge a}) \leq M(X^2_T) < \infty$ deci o contradicţie.

25. Fie (X_n) un $\mathcal{K}_n$ - martingal ($\mathcal{K}_n$-submartingal) şi (V_n) un şir de variabile aleatoare astfel încît V_n să fie $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă pentru orice n (aceeaşi ipoteză asupra lui (V_n) plus faptul că $V_n \geq 0$ a.s. pentru orice n). Dacă variabilele aleatoare:

$$(V.X)_n = \begin{cases} X_1 & \text{dacă } n = 1 \\ (V.X)_{n-1} + V_{n-1}(X_n - X_{n-1}) & \text{dacă } n > 1 \end{cases}$$ sînt

integrabile pentru orice n să se arate că procesul $V.X$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal ($\mathcal{K}_n$ - submartingal).
In particular dacă τ este $\mathcal{K}_n$ - opţională să se deducă că procesul $(X_{\tau\wedge n})_n$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal ($\mathcal{K}_n$-submartingal).

<u>Soluţie:</u> Avem: $M[(V.X)_{n+1} - (V.X)_n / \mathcal{K}_n] = M[V_n(X_{n+1} - X_n)/\mathcal{K}_n]$

$= V_n M[X_{n+1} - X_n / \mathcal{K}_n]$

Dacă (X_n) este martingal atunci ultima condiţionare este 0 şi deci V.X este martingal.
Dacă (X_n) este submartingal atunci această condiţionare este ≥ 0 şi deci $V_n M[X_{n+1} - X_n / \mathcal{K}_n] \geq 0$ aşa că V.X este submartingal.
Cum $X_{\tau \wedge n}$ este $\mathcal{K}_{\tau \wedge n}$ - măsurabilă rezultă că este şi $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă.

Din inegalitatea $|X_{\tau \wedge n}| \leq |X_1| + \ldots + |X_n|$ rezultă că $|X_{\tau \wedge n}|$ este integrabilă.
Cu notaţia $V_n = \chi_{\{n \leq \tau\}}$ rezultă că $X_{\tau \wedge n} = (V.X)_n$ şi afirmaţia este acum o consecinţă a consideraţiilor precedente.

26. Fie (X_n) un supermartingal pozitiv şi τ o $\mathcal{K}_n$ -opţională. Să se arate că $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] \leq X_{\tau \wedge n}$ (dacă X_∞ este limita a.s. a lui X_n care există din teorema de convergenţă a martingalelor atunci $X_\tau = X_\infty$ pe $\tau = \infty$ prin definiţie).

Soluţie: Deoarece $(X_{\tau \wedge n})_n$ este supermartingal şi $X_{\tau \wedge M} \xrightarrow{a.s} X_\tau$ rezultă că este suficient să arătăm că $M[Y_\infty / \mathcal{K}_n] \leq Y_n$ pentru orice supermartingal pozitiv (Y_n). Inegalitatea $M[\inf_{m \geq n} Y_m / \mathcal{K}_p] \leq M[Y_n / \mathcal{K}_p] \leq Y_p$ valabilă dacă $n>p$, arată prin trecere la limită că $M[Y_\infty / \mathcal{K}_p] \le Y_p$ dacă avem în vedere că $\inf_{m \ge n} Y_m \nearrow Y_\infty$ şi media condiţională este continuă la limitele ascendente.

27. Fie (X_n), (X'_n) $\mathcal{K}_n$ - submartingale şi τ o $\mathcal{K}_t$ - opţională finită astfel încît $X_\tau \le X'_\tau$ a.s. Să se arate că şirul $Y_n = X_n \chi_{(n<\tau)} + X'_n \chi_{(\tau \le n)}$ este $\mathcal{K}_n$ - submartingal (<u>cuplarea submartingalelor</u>).

<u>Soluţie</u>: Este clar că Y_n este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă şi $M(|Y_n|) \le M(|X_n|) + M(|X'_n|) < \infty$ pentru orice n.

Apoi proprietatea de submartingal a lui (X_n), (X'_n) permite să scriem:

$$Y_n = X_n \chi_{(n<\tau)} + X'_n \chi_{(\tau \le n)} \le \chi_{(n<\tau)} M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] +$$

$$+ \chi_{(\tau \le n)} M[X'_{n+1} / \mathcal{K}_n] = M[\chi_{(n<\tau)} X_{n+1} + \chi_{(\tau \le n)} X'_{n+1} / \mathcal{K}_n]$$

Dar ipoteza $X_\tau \le X'_\tau$ atrage că $X_{n+1} \le X'_{n+1}$ pe $\{\tau = n+1\}$, deci $\chi_{(n<\tau)} X_{n+1} + \chi_{(\tau \le n)} X'_{n+1} \le \chi_{(n+1<\tau)} X_{n+1} +$

$+ \chi_{(\tau \le n+1)} X'_{n+1} = Y_{n+1}$ fapt care arată că $Y_n \le M[Y_{n+1} / \mathcal{K}_n]$.

28. Fie (X_n) un $\mathcal{K}_n$ - submartingal ($\mathcal{K}_n$ - martingal) şi $\tau_1 \leq \tau_2$ $\mathcal{K}_n$ - opţionale finite astfel încît $M(|X_{\tau_i}|) < \infty$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{(\tau_i > n)} X_n \, dP = 0$, $i = 1,2$. Să se arate că $M(X_{\tau_1}) \leq M(X_{\tau_2})$ (= în cazul martingalului).

<u>Soluţie</u>: Din teorema de opţionalizare corespunzătoare cazului mărginit avem că $M(X_{\tau_1 \wedge n}) \leq M(X_{\tau_2 \wedge n})$ sau echivalent:

$$M(X_{\tau_1} \chi_{\{\tau_1 \leq n\}}) + M(X_n \chi_{\{\tau_1 > n\}}) \leq M(X_{\tau_2} \chi_{\{\tau_2 \leq n\}}) +$$

$$+ M(X_n \chi_{\{\tau_2 > n\}}).$$

Deoarece din ipoteză avem $\lim\limits_{n \to \infty} M(X_n \chi_{\{\tau_i > n\}}) = 0$ rezultă că este suficient să arătăm că $\lim\limits_{n \to \infty} M(X_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq n\}}) = M(X_{\tau_i})$.

Ori aceasta este o consecinţă a teoremei de convergenţă dominată deoarece $X_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq n\}} \longrightarrow X_{\tau_i}$ şi $|X_{\tau_i} \chi_{\{\tau_i \leq n\}}| \leq |X_{\tau_i}|$ care este integrabilă.

29. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate şi $\tau : E \longrightarrow \{0,1,\dots\}$ o variabilă aleatoare astfel încît $P(\tau = n) = \frac{a}{(a+1)^{n+1}}$ unde $a > 0$.

Fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(\tau \wedge n)$ şi $X_n = a(\tau \wedge n) - \chi_{\{\tau < n\}}$,

$Y_n = X_n^2 - a(a+1)(\tau \wedge n)$. Să se arate că X_n, Y_n sînt $\mathcal{K}_n$ - martingale.

<u>Soluţie</u>: Se observă că $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(\{\tau = 1\}, \dots, \{\tau = n-1\}, \{\tau \geq n\})$

Deoarece $\{\tau \geq n\} = \{\tau = n\} \cup \{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{K}_{n+1}$ rezultă

că $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}$ aşa că familia $(\mathcal{K}_n)$ este crescătoare.

Apoi $\chi_{\{\tau < n\}} = \chi_{\{\tau \wedge (n-1) < n\}}$ este $\mathcal{K}_{n-1}$ (deci $\mathcal{K}_n$) -măsurabilă fapt ce arată că X_n este $\mathcal{K}_n$-măsurabilă.

Din $|X_n| \leq an+1$ rezultă că $M(|X_n|) < \infty$.

Pentru a demonstra că (X_n) este $\mathcal{K}_n$ - martingal rămîne să probăm că:

$$1) \quad \int_A X_n \, dP = \int_A X_{n+1} \, dP$$

unde $A = \{\tau = K\}$, $K \leq n-1$, sau $A = \{\tau \geq n\}$.

Dacă $A = \{\tau = K\}$ cu $K \leq n-1$ atunci $X_n = X_{n+1}$ deci 1) este adevărată.

Dacă $A = \{\tau \geq n\}$ atunci $X_n = an$, $X_{n+1} = \begin{cases} a(n+1) \text{ dacă } \tau > n \\ an - 1 \text{ dacă } \tau = n \end{cases}$

de unde $\int_A X_n \, dP = an \, P(\tau \geq n)$ şi $\int_A X_{n+1} \, dP = a(n+1)P(\tau > n) +$

$+ anP(\tau = n) - P(\tau = n) = anP(\tau \geq n) + aP(\tau > n) - P(\tau = n) =$

$= anP(\tau \geq n)$ deoarece $aP(\tau > n) = a^2 \sum_{K=n+1}^{\infty} \frac{1}{(a+1)^{K+1}} =$

$= \frac{a}{(a+1)^{n+1}} = P(\tau = n)$

Cu aceasta am probat 1) şi pentru $A = \{\tau \geq n\}$.

Pentru a arăta că Y_n este $\mathcal{K}_n$ - martingal, deoarece $Y_{n+1} = Y_n$ pe $\{\tau = K\}$ cu $K \leq n-1$, rezultă că este suficient ca

$$\int_{(\tau \geq n)} (X_{n+1}^2 - X_n^2) \, dP = \int_{(\tau \geq n)} a(a+1)[\tau \wedge (n+1) - \tau \wedge n] \, dP.$$

Avem

$$\int_{(\tau \geq n)} (X_{n+1}^2 - X_n^2) \, dP = \int_{(\tau = n)} (X_{n+1}^2 - X_n^2) \, dP + \int_{(\tau > n)} (X_{n+1}^2 - X_n^2) \, dP =$$

$$= [(an-1)^2 - a^2n^2] \, P(\tau = n) + a^2(n+1)^2 - a^2n^2 \, P(\tau > n) =$$

$$= (1-2an) \, P(\tau = n) + a^2(1+2n) \, P(\tau > n) = (1-2an) \, P(\tau = n) +$$

$$+ a(1+2n) \, P(\tau > n) = (a+1) \, P(\tau = n).$$

Apoi,

$$\int_{(\tau \geq n)} a(a+1)[\tau \wedge (n+1) - \tau \wedge n] \, dP = a(a+1) \, P(\tau > n) =$$

$$= (a+1) \, P(\tau = n).$$

30. Fie $B_1, \dots, B_n, \dots$ un şir de evenimente şi $(\mathcal{K}_n)_{n\geq 0}$ o bază stocastică aşa încît $B_n \in \mathcal{K}_n$ pentru orice $n \geq 1$.

Să se arate că $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} B_n) = P(\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n/\mathcal{K}_{n-1}) = \infty)$

<u>Soluţie:</u> Fie $X_n = \sum_{m=1}^{n} [\chi_{B_m} - P(B_m/\mathcal{K}_{m-1})]$, $1 \leq n < \infty$

Este uşor de văzut că X_n este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

Fie

$$\tau = \begin{cases} \min\ (n \geq 1;\ X_n \geq C) & \text{dacă } (\ ) \neq \emptyset \\ \infty & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Cum $X_{\tau\wedge n}$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal, $X_{\tau\wedge n} \leq c+1$ din teorema de convergenţă a martingalelor rezultă că $\lim_{n\to\infty} X_{\tau\wedge n}$ există a.s. deci $\lim_{n\to\infty} X_n$ există şi este finită pe $\{\tau = \infty\}$

Cum $\{\sup_n X_n < \infty\} = \bigcup_{c=1}^{\infty} \{\sup_n X_n < c\}$ rezultă că $\lim_{n\to\infty} X_n$ există şi este finită pe mulţimea $\{\sup_n X_n < \infty\}$, de unde $\sum_{m=1}^{\infty} P(B_m/\mathcal{K}_{m-1}) < \infty$ pe mulţimea $\{\sum_{m=1}^{\infty} \chi_{B_m} < \infty\}$.

Aplicînd acelaşi raţionament şi martingalului $(-X_n)$ se obţine afirmaţia.

31. (<u>Ruinarea jucătorului</u>)

Fie $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ un şir de variabile aleatoare independente astfel încît $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$ pentru orice n şi fie $S_n = X_1+\ldots+X_n$.
Fie a,b întregi pozitivi şi $D = \min(n \geq 1;\ S_n=-a$ sau $S_n = b)$, unde prin definiţie se pune:
$D = \infty$ dacă $(\ldots)$ este vidă . Se cere să se calculeze:

$\pi = P(S_D = b)$ şi $M(D)$.

<u>Soluţie</u>: Din problemele 1,2 rezultă că S_n şi $S_n^2 - n$ sînt $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - martingale.
Aplicînd teorema de opţionalizare (cazul mărginit) cuplului 1, $D\wedge m$ obţinem $0 = M(S^2_{D\wedge m} - D\wedge n)$ şi cum $|S_m| \leq a+b$ dacă $m < D$ rezultă că $M(D\wedge n) = M(S^2_{D\wedge m}) \leq (a+b)^2$ şi apoi lema lui Fatou implică $M(D) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} M(D\wedge m) \leq (a+b)^2$ aşa că $P(D<\infty) = 1$.
Pentru $D<\infty$ se observă că avem $S_D = -a$ sau b, deci $|S_D| \leq a+b$ şi prin urmare $M(|S_D|) \leq a+b < \infty$.
Apoi $\left| \int_{(m<D)} S_m \, dP \right| \leq (a+b)\, P(D\ \ m) \xrightarrow{m\to\infty} (a+b)P(D=\infty) = 0$

Condiţiile din problema ~~precedentă~~ 28 fiind îndeplinite rezultă că:

$0 = M(S_1) = M(S_D) = \pi b - (1-\pi)\, a$ deci $\pi = \frac{a}{a+b}$

Analog se verifică condiţiile din problema 28 [redacted]
pentru martingalul $Y_n = S_n^2 - n$ şi opţionala D.
Obţinem că $0 = M(Y_1) = M(Y_D)$ sau echivalent:
$M(S_D^2) = M(D)$ şi cum $M(S_D^2) = \pi b^2 - (1-\pi)a^2 = ab$

32. Fie (X_n) un $\mathcal{K}_n$ - martingal şi τ o $\mathcal{K}_n$-opţională cu $M(\tau) < \infty$. Presupunem că există o constantă c astfel încît $M[|X_{n+1}-X_n| / \mathcal{K}_n]\, \chi_{\{n \le \tau\}} \le c\, \chi_{\{n \le \tau\}}$ a.s.

<u>Aplicaţie (identitatea lui Wald)</u>: Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate şi cu $a = M(X_1) < \infty$.

Fie τ o $\mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)$ - opţională cu $M(\tau) < \infty$ şi fie $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Să se arate că are loc egalitatea: $M(S_\tau) = aM(\tau)$.

<u>Soluţie</u>: Conform problemei 28, este suficient să arătăm că: $M(|X_\tau|) < \infty$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(\tau>n)} X_n \, dP = 0$ (se aplică concluzia problemei cuplului de opţionale τ, 1 şi martingalului X_n).

Fie $Y_1 = |X_1|$, $Y_n = |X_n - X_{n-1}|$ dacă $n > 1$. Y_n sînt pozitive şi din ipoteză avem $M[Y_n / \mathcal{K}_{n-1}]\, \chi_{\{n \le \tau\}} \le c\, \chi_{\{n \le \tau\}}$ a.s.

şi $|X_n| \le Y_1 + \dots + Y_n$.

Apoi $M(Y_1+\ldots+Y_\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau=n)} (Y_1+\ldots+Y_n)dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau\geq n)} Y_n\, dP =$

(deoarece $\{\tau\geq n\}\in \mathcal{K}_{n-1}$)

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau\geq n)} M[Y_n/\mathcal{K}_{n-1}]\, dP \leq \sum_{n=1}^{\infty} cP(\tau\geq n) = cM(\tau)$$

de unde $M(/X_\tau/) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau=n)} /X_n/\, dP \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(\tau=n)} (Y_1+\ldots+Y_n)\, dP =$

$= M(Y_1+\ldots+Y_\tau) < \infty$.

Mai departe $\int_{(\tau>n)} X_n dP \leq \int_{(\tau>n)} (Y_1+\ldots+Y_n)\, dP \leq \int_{(\tau>n)} (Y_1+\ldots+Y_\tau)dP \to 0$

cînd $n\to\infty$ deoarece $Y_1+\ldots+Y_\tau$ este integrabilă.

Aplicație. Sirul $S_n' = S_n - na$ este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$-martingal

şi pe deasupra avem:

$M[/S_{n+1}'-S_n'//\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)] = M[/X_{n+1}-a//\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)] =$

$= M(/X_{n+1}-a/) = M(/X_1-a/)$ şi cum $M(\tau)<\infty$ rezultă

că inegalitatea din enunțul problemei are loc cu $c =$

$= M(/X_1-a/)$ şi deci $M(S_\tau') = M(S_1')$ sau echivalent $M(S_\tau) =$

$= aM(\tau)$.

33. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate, pozitive şi cu $0 < a = M(X_1) < \infty$ şi fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $S_0 = 0$.
Pentru $t > 0$ fie $N_t = \min(n \geq 1;\ S_n > t)$, $N_t = \infty$ dacă (. . .) este vidă. Să se arate că $\frac{t}{a} \leq M(N_t) < \infty$.

<u>Soluţie</u>: Intîi arătăm că $M(N_t) < \infty$. Fie pentru aceasta $t > 0$, atunci există un întreg r astfel încît $P(S_r > t) > 0$ pentru că în caz contrar dacă $P(S_r \leq t) = 1$ pentru orice n atunci $P(X_1 + \ldots + X_n + \ldots \leq t) = 1$ de unde $M(X_1 + \ldots + X_n + \ldots) < \infty$ deci o contradicţie.
Atunci $P(N_t > nr) = P(S_{nr} \leq t) \leq [P(S_r\ \ t)]^n$ şi deci

$$M(N_t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t > nr) \leq \sum_{n=1}^{\infty} [P(S_r \leq t)]^n < \infty.$$

Fiind îndeplinite ipotezele din identitatea lui Wald (vezi problema 32) rezultă că $M(S_{N_t}) = aM(N_t)$ şi cum $S_{N_t} > t$ dacă $N_t < \infty$ deci a.s. obţinem $t < M(S_{N_t}) = aM(N_t)$ sau $M(N_t) > \frac{t}{a}$.

34. Fie $Y_1, Y_2, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate aşa încît $M(Y_1) = 0$, $P(Y_1 = 0) < 1$ şi fie $S_n = \sum_{K=1}^{n} Y_K$. Atunci

$P(S_n > 0 \text{ pentru orice } n) = P(S_n < 0 \text{ pentru orice } n) = 0$

<u>Soluţie</u>: Fie $q = P(S_n < 0 \text{ pentru orice } n)$ şi

$A_n = \{S_K < S_n \text{ pentru orice } K \neq n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Avem că $P(A_n) = P(S_n - S_K > 0$ pentru orice $K < n$ şi $S_K - S_n < 0$ pentru orice $K > n) = q\, P(S_n - S_K > 0$ pentru orice $K < n)$.

$$\text{Fie } \tau = \begin{cases} \min(n \geq 1 \ ; \ S_n \leq 0) & \text{dacă } (\ldots) \neq \emptyset \\ \infty & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Atunci $P(S_n - S_K > 0$ pentru orice $K < n) = P(S_i > 0$ pentru $1 \leq i \leq n-1) = P(\tau \geq n)$, deci $P(A_n) = q\, P(\tau \geq n)$ şi prin urmare $1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = q \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau \geq n) = qM(\tau)$.

Prin absurd dacă $q > 0$ atunci $M(\tau) < \infty$ şi din identitatea lui Wald (vezi problema 32) rezultă că $M(S_\tau) = 0$ şi în particular $P(S_\tau = 0) = 1$ fapt ce contrazice ipoteza $P(Y_1 = 0) < 1$. Aplicînd raţionamentul precedent şirului $(-Y_n)_n$ se obţine şi că $P(S_n > 0 \text{ pentru orice } n) = 0$.

35. O generalizare a identității lui Wald.

Fie $Y_1, \ldots, Y_n, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente cu $M(Y_K) > 0$ pentru orice K şi $\sup_n n^{-1}\sum_{K=1}^{n} M(|Y_K|^{\alpha}) = B < \infty$ pentru un $1 < \alpha \le 2$.

Fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(Y_1, \ldots, Y_n)$, $S_n = \sum_{K=1}^{n} Y_K$. Să se arate că $M(S_\tau) = 0$ pentru orice $\mathcal{K}_n$ - opțională τ pentru care $M(\tau^{\frac{1}{\alpha}}) < \infty$.

<u>Soluție</u>: Din teorema de opționalizare rezultă că $M(S_{\tau\wedge n}) > 0$.

Teorema de convergență dominată ne spune că este suficient să arătăm că $M[\sup_n |S_{\tau\wedge n}|] < \infty$.

Avem atunci ~~34.1~~ $P(\sup_n |S_{\tau\wedge n}| \ge n) \le P(\tau \ge n^{\alpha}) +$

(1)

$+ P(\sup_{n < n^{\alpha}} |S_{\tau\wedge n}| \ge n) \le P(\tau \ge n^{\alpha}) + n^{-\alpha} M[|S_{\tau\wedge n^{\alpha}}|^{\alpha}]$

Din problema 52 din [27] şi din ipoteză rezultă că:

$$M[|S_{\tau\wedge n^{\alpha}}|^{\alpha}] \le 2M[\sum_{k=1}^{[\tau\wedge n^{\alpha}]} M(|Y_K|^{\alpha})] \le$$

$$\le 2B\, n^{\alpha}\, P(\tau \ge n^{\alpha}) + 2B \int_{(\tau < n^{\alpha})} \tau\, dP$$

Obținem ținînd cont de (1):

$$M[\sup_n |S_{\tau\wedge n}|] = \int_0^{\infty} P(\sup_n |S_{\tau\wedge n}| \ge u)\, du \le$$

$$\le (1+2B)\int_0^\infty P(\tau \ge u^{\alpha})du + \int_0^\infty u^{-\alpha}\int_{(\tau < u^{\alpha})} \tau\, dP\, du =$$

$$= (1+2B)\, M(\tau^{\frac{1}{\alpha}}) + \int_{\Omega} \tau \int_{\tau^{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} u^{-\alpha} du\, dP =$$

$$= (1+2B)\, M(\tau^{\frac{1}{\alpha}}) + (\alpha - 1)^{-1} M(\tau^{\frac{1}{\alpha}}) < \infty .$$

3.6. Fie $Y_1,\dots,Y_n,\dots$ variabile aleatoare independente, identic repartizate cu $a = M(Y_1) < \infty$ şi fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(Y_1,\dots,Y_n)$ $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Atunci pentru orice $\mathcal{K}_n$ - opţională finită τ pentru care $M(X_{\tau}) < \infty$ să se arate că are loc egalitatea: $M(S_{\tau}) = aM(\tau)$.

<u>Soluţie:</u> Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cîmpul de probabilitate pe care sînt definite variabilele aleatoare Y_n.

Fără a restrînge generabilitatea putem presupune că $\Omega = \{(y_1,\dots,y_n,\dots) / y_i \in R\}$ şi $Y_n(\omega) = y_n$ pentru orice n.

Definim $Q : \Omega \to \Omega$ prin $Q(\omega) = (y_{\tau+1}(\omega), y_{\tau+2}(\omega),\dots)$.

Fie $\tau_0 = 0$, $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = \tau \circ Q, \dots, \tau_n = \tau \circ Q^{n-1}$ unde $Q^1 = Q$, $Q^{n+1} = Q \circ Q^n$ şi fie Z_i , $i = 1,2,\dots$, definite prin

$$Z_i = Y_{\tau_1+\dots+\tau_{i-1}+1} + \dots + Y_{\tau_1+\dots+\tau_i}$$

(τ_1, Z_1), (τ_2, Z_2) ... sînt variabile aleatoare independente şi identic repartizate. Din ipoteza avem că:

$M(S_\tau) = M(Z_1) < \infty$. Cum:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i = \frac{Y_1+\dots+Y\tau_1+\dots+\tau_n}{\tau_1+\dots+\tau_n} \cdot \frac{\tau_1+\dots+\tau_n}{n},$$ afirmaţia

rezultă din legea tare a numerelor mari.

37. Fie $(E, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_n)_{0\le n\le p}$ un şir crescător de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$ şi fie $(Z_n)_{0\le n\le p}$ un şir de variabile aleatoare definite pe $(E, \mathcal{K}, P)$ astfel încît Z_n să fie $\mathcal{K}_n$-măsurabilă şi integrabilă pentru orice n.

Definim prin recurenţă descendentă şirul de variabile aleatoare $(X_n)_{0\le n\le p}$ prin: $X_p = Z_p$ şi $X_{p-m} = \max\{Z_{p-m}, M[X_{p-m+1}/\mathcal{K}_{p-m}]\}$ pentru $1\le m\le p$.

a) Să se arate că şirul (X_n) este cel mai mic $\mathcal{K}_n$ - supermartingal ce majorează pe (Z_n).

b) Fie $\mathcal{K}_n$ - opţională τ_0 definită prin $\tau_0 = \min(n; X_n = Z_n)$. Să se arate că are loc egalitatea:

$$M[Z_{\tau_0}/\mathcal{K}_0] = \operatorname*{ess\,sup}_{\substack{\tau\ \mathcal{K}_n-\\ \text{opţională}}} M[Z_\tau/\mathcal{K}_0]$$

(Se mai zice că τ_0 este optimală în raport cu $(Z_n, \mathcal{K}_n)$)

<u>Soluţie</u>: a) Din definiţie rezultă că X_n este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă pentru orice n. Prin inducţie descendentă se verifică cu uşurinţă că $Z_n \leq X_n$ şi $X_n \leq$ $\leq M[\sup\limits_{n \leq m \leq p} Z_m / \mathcal{K}_n]$; în particular rezultă că X_n este integrabilă pentru orice n.

Din definiţie avem că $M[X_{p-m+1} / \mathcal{K}_{p-m}] \leq X_{p-m}$ fapt ce arată că (X_n) este $\mathcal{K}_n$ - supermartingal.

Mai sus s-a văzut că $X_n \geq Z_n$ pentru orice n.

Fie (X'_n) un alt $\mathcal{K}_n$ - supermartingal ce majorează pe Z_n.

Prin inducţie descendentă se verifică că $X'_n \geq X_n$ pentru orice n.

b) Deoarece $X_n - Z_n$ este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă pentru orice n, rezultă că τ_0 este $\mathcal{K}_n$ - opţională (vezi problema 11)

Arătăm că $(X_{\tau_0 \wedge n})_{0 \leq n \leq p}$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

Intr-adevăr pe $\{\tau_0 > n\}$ avem că $X_n > Z_n$ deci şi

$X_n = M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n]$

$$M[X_{\tau_0 \wedge (n+1)} / \mathcal{K}_n] = X_{\tau_0} \chi_{\{\tau_0 \leq n\}} + M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] \chi_{\{\tau_0 > n\}}$$

$= X_{\tau_0} \chi_{\{\tau_0 \le n\}} + X_n \chi_{\{\tau_0 > n\}} = X_{\tau_0 \wedge n}$, cu alte cuvinte $X_{\tau_0 \wedge n}$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

In particular obţinem că $X_0 = M[X_{\tau_0} / \mathcal{K}_0] = M[Z_{\tau_0} / \mathcal{K}_0]$.

Cum pe de altă parte $X_0 \ge M[X_\tau / \mathcal{K}_0] \ge M[Z_\tau / \mathcal{K}_0]$

pentru orice opţională τ afirmaţia din b) rezultă.

38. Pe un cîmp de probabilitate $(E, \mathcal{K}, P)$ fie $Y_1, \dots, Y_p$ variabile aleatoare independente de medie 0 şi fie $0 = C_0 < C_1 < \dots < C_p$.

Definim $Z_0 = 0$, $\mathcal{K}_0 = \{\emptyset, E\}$, $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n - C_n$, $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(Y_1, \dots, Y_n)$ pentru $1 \le n \le p$. Să se arate că 0 este opţională optimală în raport cu $(Z_n, \mathcal{K}_n)$ (pentru definiţie vezi problema precedentă)

<u>Soluţie</u>: Din problema 1 rezultă că $(Y_1 + \dots + Y_n)_{1 \le n \le p}$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal şi cum şirul (C_n) este strict crescător rezultă că $(Z_n)_{0 \le n \le p}$ este $\mathcal{K}_n$ - supermartingal, mai mult avem inegalitatea strictă $Z_n > M[Z_{n+1} / \mathcal{K}_n]$.

Rezultă atunci cu notaţiile din problema precedentă că $X_n = Z_n$ pentru $0 \le n \le p$ şi deci $\tau_0 = 0$, cu alte cuvinte 0 este opţională optimală.

39 Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un proces $(\mathcal{K}_n)_{n\geq 1}$ - adaptat și să presupunem că X_n este integrabilă pentru orice n. Definim:

$F = \{ \tau \ ; \tau \ \mathcal{K}_n$ - opționalǎ finită a.s. astfel încît $M(X_\tau) < \infty \}$ și $V = \sup\limits_{\tau \in F} M(X_\tau)$

a) Să se arate că dacă $\tau, \sigma \in F$ și $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] \geq X_n$ pe $\{\tau > n\}$, $M[X_\sigma / \mathcal{K}_n] \leq X_n$ pe $\{\tau = n, \ \sigma \geq n\}$ pentru orice n, atunci $M(X_\tau) \geq M(X_\sigma)$

b) Dacă $M(X_\tau) = V < \infty$ să se arate că pentru orice $\sigma \in F$ au loc ipotezele din punctul a) pentru cuplul τ, σ.

<u>Soluție</u>: a) Avem $M(X_\tau) = \int\limits_{(\tau<\sigma)} X_\tau \, dP + \int\limits_{(\tau\geq\sigma)} X_\tau \, dP =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\tau=n<\sigma)} X_n \, dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\tau\geq\sigma=n)} M[X_\tau / \mathcal{K}_n] \, dP \geq$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\tau=n<\sigma)} M[X_\sigma / \mathcal{K}_n] dP + \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{(\tau\geq\sigma=n)} X_n \, dP = M(X_\sigma)$$

b) Fie $M(X_\tau) = V < \infty$ și $A = \{\tau > n; \ M[X_\tau / \mathcal{K}_n] < n\} \in$ $\in \mathcal{K}_n$.

Atunci $\sigma' = n \chi_A + \tau \chi_{\complement A} \in F$ și dacă $P(A) > 0$ atunci

$$M(X_{\sigma'}) = \int\limits_A X_n \, dP + \int\limits_{\complement A} X_\tau \, dP > \int\limits_A X_\tau \, dP + \int\limits_{\complement A} X_\tau \, dP = M(X_\tau)$$

ceea ce nu se poate dacă avem în vedere definiția lui A.

Rezultă deci că $P(A) = 0$ deci obținem prima dintre ipotezele din a). Luînd acum $B = \{\tau = n, \sigma > n, M[X_\sigma / \mathcal{K}_n] > X_n\}$, $\sigma' = \sigma \chi_B + \tau \chi_{CB}$ și procedînd ca mai înainte se obține și a doua ipoteză din a).

40. Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un proces $\mathcal{K}_n$ - adaptat astfel încît X_n să fie integrabilă pentru orice n și fie τ o $\mathcal{K}_n$ - opțională finită.

a) Să se arate că $(X_{\tau \wedge n})$ este $\mathcal{K}_n$ - submartingal dacă:

$$M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] \geq X_n \text{ pe } \{\tau > n\}$$

b) Dacă în plus $M(X_\tau) < \infty$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{(\tau > n)} X_n^+ \, dP = 0$ atunci

$$M[X_\tau / \mathcal{K}_n] \geq X_n \text{ pe } \{\tau > n\}.$$

c) Dacă $\tau, \sigma \in F$ (vezi problema precedentă pentru definiție) și $M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] \leq X_n$ pe $\{\tau \leq n\}$ pentru orice n și

$\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{(\sigma > n)} X_n^- = 0$ să se arate că $M[X_\sigma / \mathcal{K}_n] \leq X_n$ pe mulțimea $\{\tau = n; \sigma \geq n\}$.

<u>Soluţie:</u> a) Dacă $A \in \mathcal{K}_n$ atunci

$$\int_A X_{\tau\wedge n}\, dP = \int_{(A;\tau\le n)} X_\tau dP + \int_{(A;\tau>n)} X_n\, dP \le \int_{(A;\tau\le n)} X_\tau\, dP + \int_{(A;\tau\ge n+1)} X_{n+1} dP =$$

$$= \int_A X_{\tau\wedge(n+1)}\, dP.$$

b) Fie $M(X_\tau) < \infty$. Atunci pentru $A \in \mathcal{K}_n$ şi $m \ge n+1$ avem,

$$\int_{(A;\tau\ge n)} X_n\, dP \le \int_{(A;\tau\ge n)} X_{\tau\wedge m}\, dP = \int_{(A;n\le\tau\le m)} X_\tau\, dP + \int_{(A;\tau>m)} X_m\, dP \le$$

$$\le \int_{(A;n\le\tau\le m)} X_\tau dP + \int_{(A;\tau>m)} X_m^+ dP.$$ Trecînd la limită în inegalitatea astfel obţinută (scrisă pentru un subşir $m_K \to \infty$ pentru care $\int_{(\tau>m_K)} X_{m_K}^+\, dP \longrightarrow \underline{\lim}_{m\to\infty} \int_{(\tau>m)} X_m^+\, dP = 0$) vom obţine $\int_{(A;\tau\ge n)} X_n\, dP \le \int_{(A;\tau\ge n)} X_\tau\, dP = \int_{(A;\tau\ge n)} M[X_\tau / \mathcal{K}_n]\, dP$ exact ceea ce vroiam.

c) Fie $A \in \mathcal{K}_n$ şi $m \ge n+1$. Atunci

$$\int_{(A;\tau=n\le\sigma)} X_n\, dP \ge \int_{(A;\tau=n\le\sigma)} X_{\sigma\wedge m}\, dP = \int_{(A;\tau=n\le\sigma\le m)} X_\sigma\, dP + \int_{(A;\tau=n\le\sigma>m)} X_m\, dP$$

In continuare se procedează ca la punctul precedent.

41. Fie (X_n) un şir $\mathcal{K}_n$ - adaptat astfel încît X_n să fie integrabilă pentru orice n.

Fie $A_n = \{ M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] \leq X_n \}$ şi să presupunem că

$A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ excepţie făcînd o mulţime neglijabilă şi că $\tau = \min(n \geq 1;\ X_n \geq M[X_{n+1}/\mathcal{K}_n] \in F$ cu F ca în problema 39.

Dacă $\lim_{n\to\infty} \int_{(\tau>n)} X_n^+ \, dP = 0$ şi $\sigma \in F$ este astfel încît:

$\lim_{n\to\infty} \int_{(\sigma>n)} X_n^- \, dP = 0$ să se arate că $M(X_\tau) \geq M(X_\sigma)$.

Pe deasupra dacă există o variabilă aleatoare $W \geq 0$ cu medie finită şi un şir strict crescător de numere pozitive a astfel încît $X_n^- \leq W + C_n$ pentru orice n, să se arate că $M(X_\tau) \geq M(X_{\tau'})$ pentru orice $\tau' \in F$ cu $M(C_{\tau'}) < \infty$.

<u>Aplicaţie</u>. Fie $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate şi cu medie finită.

Fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(Y_1, \ldots, Y_n)$, $M_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$, $X_n = M_n - n$.

Fie β unica soluţie a ecuaţiei $M[(Y-\beta)^+] = 1$ şi

$\tau = \min(n \geq 1,\ M_n \geq \beta)$.

Să se arate că $M(X_{\tau}) = \sup_{\sigma \in F} M(X_{\sigma}) = \beta$ cu alte cuvinte τ este $\mathcal{K}_n$ - opţională optimală.

Soluţie: Prima parte a problemei rezultă din problemele 39, 40.

Din $X_n^- \leq W + C_n$ şi $M(C_{\tau'}) < \infty$ rezultă:

$$\int_{(\tau'>n)} X_n^- \, dP \leq \int_{(\tau'>n)} w \, dP + \int_{(\tau'>n)} C_{\tau'} \, dP \longrightarrow 0 \quad \text{deci}$$

$M(X_{\tau}) \geq M(X_{\tau'})$ conform primei părţi a problemei.

Aplicaţie. Avem $X_{n+1} - X_n = (Y_{n+1} - Y_n)^+ - 1$, de unde

$$M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n] \leq X_n \Longleftrightarrow M[(Y_{n+1} - M_n)^+ / \mathcal{K}_n] \leq 1, \; M_n \geq \beta$$

Rezultă că $\tau = \min(n \geq 1;\; X_n \geq M[X_{n+1} / \mathcal{K}_n])$.

Din $M[(Y-\beta)^+] = 1$ rezultă că $p = P(Y < \beta) < 1$ şi deci $P(\tau > n) \leq P(Y_1 < \beta, \ldots, Y_n < \beta) = p^n \longrightarrow 0$, deci $P(\tau < \infty) = 1$.

Mai departe $M(\tau^m) \leq \sum_{K=1}^{\infty} K^m P(\tau \geq K) \leq \sum_{K=1}^{\infty} K^m p^{K-1} < \infty$

pentru orice $m \geq 1$.

Avînd în vedere identitatea lui Wald (vezi problema 32) şi rezultatele precedente obţinem că $M(|X_{\tau}|) \leq$
$\leq M(|Y_1|) + \ldots + M(|Y_{\tau}|)$ [redacted] $= M(|Y_1|) \cdot M(\tau)$

cu alte cuvinte $\tau \in F$.

De asemenea $\int_{(\tau>n)} X_n^+ \, dP \le \beta^+ \cdot P(\tau > n) \longrightarrow 0$ cînd $n \to \infty$

şi $X_n^- \le Y_1^- + n$, deci conform primei părţi a problemei

obţinem că $M(X_\tau) \ge M(X_\sigma)$ pentru orice σ cu $M(\sigma) < \infty$.

Egalitatea $M(X_\tau) = \sup_{\sigma \in F} M(X_\sigma)$ rezultă dacă arătăm că

$M(\sigma) < \infty$ dacă $\sigma \in F$. Fie $\beta' > \beta$ şi fie $S_n =$

$= \sum_{K=1}^{n} [(Y_K - \beta')^+ - 1]$. Atunci $X_n \le \beta' + S_n$, deci

$X_\sigma \le \beta' + S_\sigma$ şi dacă $\sigma \in F$ obţinem, avînd în vedere problema 36, că $M(S_\sigma)$ există şi $M(S_\sigma) = M(\sigma)[M(Y-\beta')^+ - 1] < 0$

De aici rezultă că $M(\sigma) < \infty$ şi $M(X_\sigma) \le \beta$.

A rămas să probăm că $M(X_\sigma) = \beta$. Avem:

$$M(X_\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P(\tau \ge n) \int_{(Y \ge \beta)} Y dP - P(\tau \ge n) \right] =$$

$$= \frac{1}{P(Y \ge \beta)} \left[\int_{(Y > \beta)} Y dP - 1 \right] = \beta$$

Egalitatea $M(X_\sigma) = \sup_{\sigma \in F} M(X_\sigma)$ este astfel demonstrată.

42. Fie θ o probabilitate pe R cu media m şi dispersia σ^2. Presupunem că $-\frac{m}{\sigma^2} \ge a > 0$

Fie $q_a : R \longrightarrow R$ definită prin $q_a(x) = 1$ dacă $x \ge 0$;

$q_a(x) = \frac{1}{1-ax}$ dacă $x < 0$. Să se arate că are loc inegalitatea:

1) $\int q_a(x+y)d\theta(y) \leq q_a(x)$ pentru orice x.

Aplicaţie: Fie $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_n)_{n=0,1,..}$ un şir crescător de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$, $0=a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ un şir crescător de numere şi $(Y_n)_{n=0,1,\ldots}$ un şir de variabile aleatoare astfel încît:

i_1) $M(Y_n^2)<\infty$, Y_n este $\mathcal{K}_n$ - măsurabilă pentru orice n şi $Y_o = 0$.

i_2) $Y_n^2 - a_n$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

i_3) $\mathcal{K}_n$ şi $Y_{n+1} - Y_n$ sînt independente pentru orice n.

Fie $Z_n = Y_n - aa_n$; Să se arate că pentru orice $a > 0$ şirul $q_a(Z_n)$ este $\mathcal{K}_n$ - supermartingal.

Observaţie. Dacă (Y_n) este un şir de variabile aleatoare cu proprietatea i_1) atunci se ştie din problema 8 că există şi este unic un şir de variabile aleatoare (A_n) aşa încît $Y_n^2 - A_n$ să fie $\mathcal{K}_n$- martingal unde $0=A_o \leq A_1 \leq \ldots$ şi A_n este $\mathcal{K}_{n-1}$ - măsurabilă pentru orice n (se aplică problema 8 submartingalului Y_n^2).
Se poate arăta că şirul $q_a(Z_n)$ unde $Z_n=Y_n-aA_n$ este $\mathcal{K}_n$-martingal pentru orice $a>0$ (demonstraţia acestei afirmaţii nu o dăm aici)

<u>Soluţia problemei</u>. Deoarece $q_a \leq 1$ rezultă că inegalitatea ~~tea~~

1) este evidentă pentru $x \geq 0$. Dacă $x < 0$ fie $x^1 = x+m < x$ şi $r(x^1+u) = q_a(x^1) + (u + au^2)\, q_a^1(x^1)$.

Graficul lui r este o parabolă tangentă la graficul lui q_a în x^1. Ţinînd cont că $q_a^1(x^1) = aq_a^2(x^1)$ obţinem:

$$r(0) = q_a(x^1) + aq_a^2(-x^1 + ax^{1^2}) = \left[q_a(x^1) - ax^1 q_a(x^1)\right] +$$

$$+ ax^1 q_a(x^1)\left[1 + ax^1 q_a(x^1) - q_a(x^1)\right] = 1 = q_a(0)$$

Parabola ce reprezintă pe r şi hiperbola ce reprezintă pe q_a au la stînga lui 0, 4 puncte comune: unul la infinit, unul dublu în x^1 şi unul în 0. Contactul în x^1 este simplu şi cele două curbe nu se traversează în x^1, deci $q_a(y) \leq r(y)$ pentru $y \leq 0$ şi de asemenea evident pentru $y \geq 0$. Atunci

$$\int q_a(x+y)\,d\theta(y) \leq \int r(x+y)\,d\theta(y) = \int r(x^1+y-m)\,d\theta(y) =$$

$$= q_a(x^1) + q_a^1(x^1)\left[\int (y-m)\,d\theta(y) + a\int (y-m)^2\,d\theta(y)\right] =$$

$$= q_a(x^1) + a\sigma^2 q_a^1(x^1) \leq q_a(x^1) + (x-x^1)q_a^1(x^1) \leq q_a(x)$$

(ultima inegalitate din convexitate).

<u>Aplicaţie</u>. Intîi să observăm că $Z_{n+1}-Z_n$ şi $\mathcal{K}_n$ sînt independente (din i_3) deci $P \circ h^{-1} = P/\mathcal{K}_n \otimes P/\mathcal{B}(Z_{n+1}-Z_n)$

unde $h : E \longrightarrow E\times E$, $h(\omega)=(\omega,\omega)$. Fie $A\in \mathcal{K}_n$. Trebuie să arătăm că: $\int_A q_a(Z_{n+1})\,dP \le \int_A q_a(Z_n)\,dP$. Avem

$$\int_A q_a(Z_{n+1})\,dP = \int_A q_a\,(Z_n + Z_{n+1} - Z_n)\,dP =$$

$$= \int \chi_A(\omega_1)\, q_a(Z_n(\omega_1)+Z_{n+1}(\omega_2)-Z_n(\omega_2))\,dP(\omega_1)\,dP(\omega_2) =$$

$$= \int \chi_A(\omega_1)\Big[\int q_a(Z_n(\omega_1)+u)\,dP\circ(Z_{n+1}-Z_n)^{-1}(u)\Big]\,dP(\omega_1) \le$$

$$\le \int \chi_A(\omega_1)\,q_a(Z_n(\omega_1))\,dP(\omega_1) = \int_A q_a(Z_n)\,dP$$

Mai sus am aplicat inegalitatea 1) deoarece $M[P\circ(Z_{n+1} - Z_n)^{-1}] = \int (Z_{n+1}-Z_n)\,dP = -a(a_{n+1} - a_n)$ și

$M^2[P\circ(Z_{n+1} - Z_n)^{-1}] = D^2(Z_{n+1} - Z_n) = a_{n+1} - a_n$ și

$$\frac{a(a_{n+1} - a_n)}{a_{n+1} - a_n} = a > 0$$

43. Să se arate că șirul $\dfrac{Y_n^2}{a_n^2} + \dfrac{1}{a_n}$ este $\mathcal{K}_n$ - supermartingal (cu notațiile și ipotezele din problema 42)

<u>Soluție</u>: Fie $h : E \longrightarrow E\times E$, $h(\omega) = (\omega,\omega)$. Deoarece $Y_{n+1} - Y_n$ și $\mathcal{K}_n$ sînt independente rezultă că $P\circ h^{-1}=$

$$= P / \mathcal{K}_n \otimes P/\mathcal{B}(Y_{n-1} - Y_n)$$

Fie $K(y,v) = \frac{y^2}{v^2} + \frac{1}{v}$ şi $A \in \mathcal{K}_n$; ţinînd cont că

$M(Y_{n-1} - Y_n) = 0$, $D^2(Y_{n+1} - Y_n) = a_{n+1} - a_n$ avem :

$$\int_A K(Y_{n+1}, a_{n+1})\, dP = \int_A K(Y_n + Y_{n+1} - Y_n, a_{n+1})\, dP =$$

$$= \int \chi_A(\omega_1) \left[\int K(Y_n(\omega_1) + u, a_{n+1})\, dP \circ (Y_{n+1} - Y_n)^{-1}_{(u)} \right] dP(\omega_1) \overset{1}{\leq}$$

$$\overset{1}{\leq} \int_A \left[\frac{1}{a_{n+1}^2} \int (Y_n + u)^2\, dP \circ (Y_{n+1} - Y_n)^{-1}_{(u)} - \frac{1}{a_{n+1}} \right] =$$

$$= \int_A \left[\frac{1}{a_{n+1}^2} (Y_n^2 + a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{a_{n+1}} \right] dP =$$

$$= \int_A \left[\frac{Y_n^2 + a_{n+1} - a_n}{(a_n + a_{n+1} - a_n)^2} + \frac{1}{a_n + a_{n+1} - a_n} \right] dP$$

Dar funcţia $\frac{a+x}{(b+x)^2} + \frac{1}{b+x}$ este descrescătoare pentru $x \geq 0$ pentru orice $a,b > 0$.

Atunci ultimul termen din inegalităţile de mai sus este majorat de

$$\int_A \left(\frac{Y_n^2}{a_n^2} + \frac{1}{a_n} \right) dP = \int_A K(Y_n, a_n)\, dP.$$

44. In ipotezele problemei precedente să se arate că are loc inegalitatea:

1) P(există n astfel încît $Y_n \geq b+a_n a) \leq \frac{1}{a+b}$

pentru orice $a,b > 0$.

Să se deducă că $\frac{Y_n}{a_n}$ converge a.s. către o variabilă aleatoare nulă dacă $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (<u>legea tare a numerelor mari pentru martingale</u>).

<u>Soluție</u>: Fie $a_n' = \frac{b}{a} + a_n$; atunci $\{Y_n \geq aa_n'\} = \{Z_n \geq 0\} = \{q_a(Z_n) = 1\}$ deci P (există n astfel încît $Y_n \geq aa_n+b$)= = P (există n astfel încît $Y_n \geq aa_n'$)= P (există n astfel încît $q_n(Z_n)=1) \leq P(\sup_n q_a(Z_n) \geq 1) \leq M[q_a(Z_o)] = q_a(-b) = \frac{1}{1+ab}$. In particular din 1) rezultă că:

2) P(există n astfel încît $|Y_n| \geq aa_n+b) \leq \frac{2}{1+ab}$ pentru orice $a,b > 0$.

Presupunem că șirul (a_n) este mărginit; fie deci $\overline{M}$ astfel încît $a_n \leq \overline{M}$ pentru orice n.

Deoarece $(Y_n^2 - a_n)$ este martingal avem că $M(Y_n^2)=M(a_n)= =a_n \leq \overline{M}$ de unde $\sup_n M(|Y_n|) \leq [M(Y_n^2)]^{\frac{1}{2}} \leq \overline{M}^{\frac{1}{2}}$ și prin urmare Y_n converge a.s. (vezi T 5 , §1) şi cum a_n este convergent rezultă că $\frac{Y_n}{a_n}$ converge a.s.

Presupunem acum că $a_n \nearrow \infty$. Vom arăta că $\frac{Y_n}{a_n} \xrightarrow{a.s.} 0$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|Y_n|}{a_n} \geq 2a) = 0$ pentru orice $a > 0$.

Ori $\{ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|Y_n|}{a_n} \geq 2a \} \subset \{$ există n astfel încît $|Y_n| \geq$ $\geq aa_n + b \}$ pentru orice $b > 0$, deci $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|Y_n|}{a_n} \geq 2a) \leq$ $\leq P($există n astfel încît $|Y_n| \geq aa_n + b) \leq \frac{2}{1+ab} \xrightarrow[b\to\infty]{} 0$.

45. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente astfel încît $M(X_n) = 0$, $D^2(X_n) < \infty$ pentru orice n.

Să se arate că are loc inegalitatea (<u>inegalitatea lui Kolmogorov</u>):

$$P(\max_{m \leq n} |X_1 + \ldots + X_m| \geq a) \leq a^{-2} \sum_{i=1}^{n} D^2(X_i).$$

<u>Soluţie</u>: Din problema 1 rezultă că şirul $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ este martingal deci $|S_n|^2$ este submartingal.

In acest caz inegalitatea supermartingalului ne dă:

$$P(\max_{m\le n} |X_1+\ldots+X_m| \geq a) \leq P(\max_{m\le n} S_m^2 \geq a^2) \leq a^{-2}M(S_n^2) =$$

$$= a^{-2}\sum_{i=1}^{n} M(X_i^2)$$ (ultima egalitate rezultă din independența şirului (X_n)).

46. Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un $\mathcal{K}_n$ - martingal astfel încît $M(X_1)=0$ şi $M(X_n^2)<\infty$ pentru orice n. Fie $\mathcal{K}_0=\{\emptyset,\Omega\}$, $X_0 = 0$, $Y_n = X_n-X_{n-1}$ şi $\sigma_n^2 = M[Y_n^2/\mathcal{K}_{n-1}]$, $n \geq 1$.

Dacă τ este $\mathcal{K}_n$ - opţională finită să se arate că are loc egalitatea: $M(X_\tau^2) = M(\sum_{n=1}^{\tau} \sigma_n^2)$.

<u>Aplicaţie</u>. Fie $Y_1,\ldots,Y_n$ variabile aleatoare independente cu $M(Y_K) = 0$, $M(Y_K^2) = \sigma_K^2 < \infty$ pentru orice K.

Fie $Z_n = \max_{1\leq K\leq n} |Y_K|$, $X_K = \sum_{i=1}^{K} Y_i$.

Pentru orice $a > 0$ să se arate că are loc inegalitatea:

$$P(\max_{1\leq K\leq n} |X_K| > a) \geq 1 - \frac{M[(a+Z_n)^2]}{\sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2}$$

<u>Soluţie</u>: Fie $U_n = X_n^2 - \sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2$. Este uşor de văzut că U_n este $\mathcal{F}_n$ - martingal.

Din teorema de opţionalizare rezultă că $M(U_{\tau\wedge n}) = 0$ sau echivalent $M(X^2_{\tau\wedge n}) = M(\sum_{K=1}^{\tau\wedge n} \sigma_K^2)$

de unde prin aplicarea lemei lui Fatou şi teoremei Beppo - Levy obţinem:

$$M(X_\tau^2) \leq \varliminf_{n\to\infty} M(X^2_{\tau\wedge n}) = \lim_{n\to\infty} M(\sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2) =$$

$$= M(\sum_{K=1}^{\tau} \sigma_K^2)$$

Dacă $M(X_\tau^2) = \infty$ atunci este vizibil că egalitatea din enunţ rezultă. Presupunem că $M(X_\tau^2) < \infty$. Afirmaţia rezultă dacă arătăm: $M(X^2_{\tau\wedge n}) \leq M(X_\tau^2)$ pentru orice n. Ori aceasta este o consecinţă a problemei 26 aplicată submartingalului $(X^2_{\tau\wedge n})_n$.

<u>Aplicaţie</u>: Fie $\tau = \begin{cases} \min(K \geq 1;\ X_K > a) & \text{dacă} (\ ) \neq \emptyset \\ n & \text{în caz contrar} \end{cases}$

τ este $\mathcal{B}(Y_1, \ldots, Y_n)$ - opţională finită şi avem:

$$\sum_{K=1}^{n} \sigma_K^2\, P(\max_{1\leq K\leq n} |X_K| \leq \varepsilon) \leq M(\sum_{K=1}^{\tau} \sigma_K^2) = M(X_\tau^2) \leq M[(a+Z_n)^2]$$

47. Fie $(X_m)_{0 \leq m \leq n}$ un $\mathcal{K}_m$ - submartingal pozitiv cu $X_0 = 0$, şi fie (C_m) un şir de constante pozitive:

Să se arate că are loc inegalitatea:

$$P(\max_{1 \leq m \leq n} C_m X_m \geq 1) \leq \sum_{m=1}^{n} \left[C_m M(X_m - X_{m-1}) + (C_m - C_{m-1}) \cdot M(X_{m-1}) \right].$$

Aplicaţie. Să se deducă legea tare a numerelor mari sub forma lui Kolmogorov cu ajutorul inegalităţii precedente.

Soluţie: Avem $C_m X_m = \sum_{i=1}^{m} (C_i X_i - C_{i-1} X_{i-1}) \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \left[C_i (X_i - X_{i-1}) + (C_i - C_{i-1})^+ X_{i-1} \right]$$ şi nu este greu de arătat că $Y_m = \sum_{i=1}^{m} \left[C_i (X_i - X_{i-1}) + (C_i - C_{i-1})^+ X_{i-1} \right]$ este $\mathcal{K}_m$ - submartingal pozitiv.

In acest caz din inegalitatea submartingalului obţinem:

$$P(\max_{1 \leq m \leq n} C_m X_m \geq 1) \leq P(\max_{1 \leq m \leq n} Y_m \geq 1) \leq M(Y_n) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \left[C_m M(X_m - X_{m-1}) + (C_m - C_{m-1})^+ M(X_{m-1}) \right]$$

<u>Aplicație</u>. Fie $Y_1,\dots,Y_n,\dots$ variabile aleatoare independente cu $M(Y_m) = 0$, $M(Y_m^2) = \sigma_m^2 < \infty$, $m=1,2,\dots$ și astfel încît $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma_m^2}{m^2} < \infty$. Să arătăm că $\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} Y_m \xrightarrow{a.s.} 0$.

Pentru aceasta este suficient să arătăm că $P(\sup_{m\geq n} \frac{1}{m} \sum_{K=1}^{m} Y_K \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$ cînd $n \to \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$.

Ori ținînd cont de inegalitatea demonstrată obținem:

$$P(\sup_{m\geq n} \frac{1}{m} \sum_{K=1}^{m} Y_n \geq \varepsilon) \leq P(\sup_{m\geq n} \frac{1}{m^2} (\sum_{K=1}^{m} Y_K)^2 \geq \varepsilon^2) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} M\left[(\sum_{K=1}^{m} Y_K)^2 - (\sum_{K=1}^{m-1} Y_K)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{M(Y_m^2)}{m^2} \longrightarrow 0$$ cînd $n \to \infty$ conform ipotezei.

48. Fie X_n un șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate definite pe un cîmp de probabilitate $(E,\mathcal{K},P)$. Definim $S_0=0$, $\mathcal{K}_0 =\{\emptyset , E\}$,

$S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{B}(S_1, \ldots, S_n)$ pentru $n \geq 1$.

a) Să se arate că pentru orice $u \in R$ aşa încît $\varphi(u) \overset{def}{=} \log M[\exp(u.X_1)] < \infty$ şirul $Y_n = \exp\{uS_n - n\varphi(u)\}$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

Apoi să se deducă că dacă în plus $u \neq 0$ atunci $Y_n \xrightarrow{a.s} 0$

b) Presupunem că funcţia φ este finită într-o vecinătate deschisă V a lui O şi fie pentru orice $x \in R$ şi $n \in N$ fixaţi $\exp\{ux - n\varphi(u)\} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{u^K}{K!} f_K(n,x)$, $u \in V$, dezvoltarea în serie a funcţiei analitice $u \longrightarrow \exp\{u\, x - n\varphi(u)\}$ definită pe V.

Să se arate că pentru orice K, şirul $\{f_K(n, S_n)\}_n$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

- Soluţie Din asociativitatea independenţei obţinem că X_{n+1} şi $\mathcal{K}_n$ sînt independente şi în particular

$M[\exp(uX_{n+1})/\mathcal{K}_n] = \exp\varphi(u)$.

Mai departe $M[Y_{n+1}/\mathcal{K}_n] = \exp\{uS_n - (n+1)\varphi(u)\}$.

$M[\exp(uX_{n+1}/\mathcal{K}_n] = \exp\{uS_n - (n+1)\varphi(u)\}\exp\varphi(u) = Y_n$

cu alte cuvinte Y_n este $\mathcal{K}_n$ - martingal.

Fie acum $u \neq 0$ aşa încît $\varphi(u) < \infty$. Din inegalitatea lui Schwartz obţinem $M[\exp(\frac{u}{2}X_1)] \leq \{M[\exp(uX_1)]\}^{\frac{1}{2}}$ deci

$\varphi(\frac{u}{2}) < \frac{1}{2}\varphi(u)$.

Din teorema de convergenţă a martingalelor rezultă că:

$\exp\{uS_n - n\varphi(u)\} \xrightarrow{a.s.} Z < \infty$

$\exp\{\frac{u}{2}S_n - n\varphi(\frac{u}{2})\} \xrightarrow{a.s.} Z' < \infty$

Să presupunem prin absurd că $P(Z > 0) > 0$. Cum

$\exp\{uS_n - 2n\varphi(\frac{u}{2})\} \xrightarrow{a.s.} Z'^2$ şi $\varphi(\frac{u}{2}) < \frac{1}{2}\varphi(u)$

rezultă că $\exp\{uS_n - n\varphi(u)\} \leq \exp\{uS_n - 2n\varphi(\frac{u}{2})\}$ şi

prin urmare $Z \leq Z'^2 < \infty$.

Rezultă că pe mulţimea $0 < Z < \infty$ avem că şirul

$\exp\{-n[\varphi(u) - 2\varphi(\frac{u}{2})]\} = \exp\{uS_n - 2n\varphi(\frac{u}{2})\}/$

$/\exp\{uS_n - n\varphi(u)\} \longrightarrow \frac{Z'^2}{Z} \neq 0$, dar pe de altă parte

cum $\varphi(u) > 2\varphi(\frac{u}{2})$ rezultă că acelaşi şir converge către

O ceea ce nu se poate.

b) Dacă $m \leq n$ şi $A \in \mathcal{K}_n$ avem că

x) $$\int_A \exp\{u S_n - n\varphi(u)\}\, dP = \int_A \exp\{u S_m - m\varphi(u)\}\, dP$$

Alegem $\varepsilon > 0$ astfel încît $M[\exp(+2\varepsilon S_n)] < \infty$, $M[\exp(-2\varepsilon S_n)] < \infty$.

Cum pentru $u \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ avem o majorare de tipul

$|x|^K \exp(ux) \leq C_K[\exp(2\varepsilon x) + \exp(-2\varepsilon x)]$ valabilă

pentru orice $x \in R$ şi $K \geq 0$ cu C_K constante, rezultă că

teorema de derivare sub integrală are loc.

Derivînd în x) în raport cu u de K ori şi făcînd apoi

$u = 0$ se obţine că:

$\int_A f_K(n, S_n)\, dP = \int_A f_K(m, S_m)\, dP$ cu alte cuvinte

$\{f_K(n, S_n)\}_n$ este $\mathcal{K}_n$ - martingal pentru orice $K \geq 0$.

49. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente cu repartiţia $N(0,1)$ şi fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

a) Să se arate că pentru orice $u \in R$ şirul

$Y_n^u = \exp\left(uS_n - \frac{u^2}{2} n\right)$ este $\mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n)$ - martingal şi

să se deducă inegalitatea:

$P(\max|S_m| \geq \ell) \leq \exp\left(-\frac{\ell^2}{2n}\right)$ pentru orice n.

b) Fie F o repartiție pe R. Să se arate că șirul $Y_n = \int_R Y_n^u \, dF(u)$ este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ martingal.

In particular să se deducă că șirul $Y_n = \dfrac{\exp\left(\frac{S_n^2}{2n+2}\right)}{\sqrt{n+1}}$ este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - martingal.

Soluție: a) Faptul că Y_n^u este martingal rezultă din problema precedentă dacă avem în vedere că $\psi(u) = \log M\left[\exp(uX_1)\right] = \frac{u^2}{2}$.

Apoi $P(\max|S_m| \geq \ell) \leq P(\max|uS_m| \geq |u|\ell) \leq$

$P\left(\max_{m \leq n} Y_m^u \geq e^{|u|\ell - \frac{u^2}{2}n}\right) \leq e^{-|u|\ell + \frac{nu^2}{2}} M(Y_n^u) =$

$= e^{-|u|\ell + \frac{nu^2}{2}}$ pentru orice $u \in R$.

Luînd $u = \frac{\ell}{n}$ obținem $P(\max_{m \leq n} |S_m| \geq \ell) \leq e^{-\frac{\ell^2}{2n}}$

Deoarece pentru u fixat aplicația $u \longrightarrow Y_n^u(\omega)$ este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - măsurabilă și pentru orice ω fixat aplicația $u \longrightarrow Y_n^u(\omega)$ este continuă (deci măsurabilă) rezultă că aplicația $(\omega, u) \longrightarrow Y_n^u(\omega)$ este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n) \otimes \mathcal{B}_R$ - măsurabilă. Teorema lui Fubini ne permite să tragem concluzia că Y_n este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - măsurabilă.

b) Dacă $A \in \mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ atunci

$$\int_A Y_n \, dP = \int_A \left(\int_R Y_n^u \, dF(u) \right) dP \overset{\text{Fubini}}{=} \int_R \left(\int_A Y_n^u \, dP \right) dF(u) =$$

$$= \int_R \left(\int_A Y^u_{n+1} \; dP \right) dF(u) = \int_A Y_{n+1} \, dP$$

aşa că Y_n este $\mathcal{B}(X_1,..,X_n)$ - martingal.

Luînd $F = N(0,1)$ se obţine şi ultima parte a afirmaţiei.

50. Fie (X_n) un submartingal cu $M(X_n) \doteq 1$ pentru orice n. Să se arate că: $P(X_m > a$ pentru orice $m) \leq \frac{1}{a}$, $a > 1$.

In particular dacă $Y_1,\dots,Y_n,\dots$ sînt variabile aleatoare independente cu repartiţia $N(0,1)$, $X_n = Y_1+\dots+Y_n$, $C_n^2(a) = (n+1)\left[a^2 + \log(n+1)\right]$.

Să se arate că: $P(|X_n| > C_n(a)$ pentru un anumit $n) \leq$ $\leq \exp(-\frac{a^2}{2})$.

<u>Soluţie</u>: $\{X_m > a \text{ pentru un } m\} = \{\sup_m X_m > a\} =$

$$= \bigcup_n \{\sup_{m \leq n} X_m > a\}.$$

Atunci $P(X_m > a$ pentru un $m) = \lim_{n\to\infty} P(\sup_{m\leq n} X_m > a) \overset{4.51}{\leq}$

$$\overset{4.51}{\leq} \frac{1}{a} \lim_{n\to\infty} M(X_n) = \frac{1}{a}$$

Din problema 49 rezultă că $\exp\left(\frac{X_n^2}{2n+2}\right)/\sqrt{n+1}$ este martingal de unde $P(|X_n| > C_n(a)$ pentru un anumit $n) =$

$= P\left(\exp\left(\frac{X_n^2}{2n+2}\right)/\sqrt{n+1} > \exp\left(\frac{C_n^2(a)}{2n+2}\right)/\sqrt{n+1}\right.$ pentru un anumit $n) = P\left(\exp\left(\frac{X_n^2}{2n+2}\right)/\sqrt{n+1} > e^{+\frac{a^2}{2}}\right.$ pentru un anumit $n) \leq e^{-\frac{a^2}{2}}$ dacă avem în vedere prima parte a problemei.

51. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare cu dispersie finită şi fie $Y_1 = X_1 - M(X_1)$ şi $Y_n = X_n - M[X_n / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_{n-1})]$ pentru $n > 1$.

Să se arate că dacă $\sum_{n=1}^{\infty} M(Y_n^2) < \infty$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ este a.s. şi în L^2 convergentă.

Soluţie. Fie $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$. Trebuie să arătăm că:

$P\left(\max_{N\leq n\leq M} |Z_n - Z_N| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0$ cînd $N,M \to \infty$ pentru orice $\varepsilon > 0$

Deoarece $M[Y_{n+1} / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)] = 0$ rezultă că şirul $Z_n = Y_1 + \dots + Y_n$ este $\mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)$ - martingal.

Din inegalitatea submartingalului obţinem:

$$P\left(\max_{N\le n\le M} |Z_n-Z_N| >\varepsilon\right)\le \varepsilon^{-1} \| Z_M-Z_N\|_1 \overset{\text{Schwartz}}{\leq} \varepsilon^{-1} \| Z_M-Z_N\|_2 =$$

$$= \varepsilon^{-1} \left(\sum_{i=N+1}^{M} M(Y_i^2)\right)^{1/2} \longrightarrow 0 \text{ cînd } M,N \to \infty \quad \text{deoarece}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(Y_n^2) < \infty.$$

Din calculul precedent se observă şi că $\| Z_M-Z_N\|_2 \to 0$ cu alte cuvinte seria $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ este convergentă şi în L^2.

52. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente astfel încît $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$ pentru orice n şi fie $S_n = X_1+\ldots+X_n$

a) Să se arate că $P\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} S_n = \infty\right) = 1$

b) Fie $\tau = \min(n;\ S_n = 1)$. Să se arate că

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_{(\tau > n)} S_n \, dP \neq 0$$

<u>Soluţie</u>: a) Să presupunem că $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n < \infty) > 0$.

Cum avem $\{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} S_n < \infty\} = \bigcup\limits_{K=1}^{\infty} \{\sup\limits_n S_n < K\}$ rezultă

că există un K astfel încît $P(\sup\limits_n S_n < K) > 0$.

Fie $\tau_K = \min(n;\ S_n = K)$, $\tau_K = \infty$ dacă $(\cdots)$ este vidă. Deoarece $S_{n\wedge\tau_K} \leq K$ rezultă din teorema de convergenţă a martingalelor că $S_{n\wedge\tau_K} \xrightarrow{a.s.} S$ cînd $n \to \infty$. Pe mulţimea $\{\sup\limits_n S_n < K\}$ avem $S_{n\wedge\tau_K} = S_n$, dacă S_n converge a.s. pe această mulţime care are probabilitatea pozitivă. Mulţimea de convergenţă a lui S_n fiind eveniment terminal înseamnă că neapărat S_n converge a.s.

In particular trebuie ca $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ fapt care nu este posibil dacă avem în vedere că X_n ia numai valorile ± 1.

b) Din punctul a) rezultă că $\tau = \min(n;\ S_n = 1) < \infty$ a.s.

Dacă am avea $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(\tau > n)} S_n \, dP = 0$, cum $M(|S_\tau|) = 1$

atunci din problema 28 ar rezulta că $0 = M(S_1) = M(S_\tau)$

fapt imposibil deoarece $S_{\tau}=1$ a.s. deci $M(S_{\tau})=1$.

53. Fie $X_0,\dots,X_N$ un supermartingal astfel încît $M(X_K^2)<\infty$ pentru orice $0\le K\le N$ şi fie $X_i=Y_i-A_i$ descompunerea Doob-Meyer a lui X (vezi problema 8 aplicată lui $-X$)

a) Să se arate că are loc inegalitatea:

$$M(Y_N^2)\le M(X_N^2)+2M\Big(\sum_{i=0}^{N-1}X_i(A_{i+1}-A_i)\Big)$$

b) Să se deducă că dacă $0\le X_i\le a$, a constantă, atunci

$$M(Y_N^2)\le 3aM(X_0)$$

<u>Soluţie</u>: a) Avînd în vedere că $M[X_{i+1}-X_i/\mathcal{K}_i]=A_i-A_{i+1}$ obţinem: $M(Y_{i+1}^2-Y_i^2)=M[(Y_{i+1}-Y_i)^2]=$

$=M[(X_{i+1}-X_i)^2+2(A_{i+1}-A_i)(X_{i+1}-X_i)+(A_{i+1}-A_i)^2]=$

$=M[(X_{i+1}-X_i)^2]-M[(A_{i+1}-A_i)^2]\le M[(X_{i+1}-X_i)^2]=$

$=M(X_{i+1}^2-X_i^2)+2M[X_i(X_i-X_{i+1})]=M(X_{i+1}^2-X_i^2)+$

$+2M[X_i(A_{i+1}-A_i)]$

şi deoarece $X_o = Y_o$ vom obţine:

$$M(Y_N^2) = M(Y_o^2) + \sum_{i=0}^{N-1} M[(Y_{i+1} - Y_i)^2] \leq M(X_o^2) + \sum_{i=0}^{N-1} M(X_{i+1}^2 - X_i^2) + 2\sum_{i=0}^{N-1} M[X_i(A_{i+1} - A_i)] =$$

$$= M(X_N^2) + 2\sum_{i=0}^{N-1} M[X_i(A_{i+1} - A_i)]$$

b) Deoarece $X_i \geq 0$ rezultă că $M(A_N) \leq M(Y_N) = M(X_o)$ şi atunci din inegalitatea de la punctul a) se obţine

$$M(Y_N^2) \leq aM(X_N) + 2aM(A_N) \leq aM(X_o) + 2aM(X_o) = 3aM(X_o)$$

54. Fie $X_o, \ldots, X_N$ un martingal relativ la corpurile boreliene $\mathcal{K}_o, \ldots, \mathcal{K}_N$. Fie $x_o = X_o$, $x_i = X_i - X_{i-1}$ pentru $i \geq 1$ şi fie $|V_i| \leq 1$, $0 \leq i \leq N$, V_{i+1} $\mathcal{K}_i$ - măsurabilă pentru $0 \leq i \leq N-1$.

Fie $g_n = \sum_{i=0}^{n} v_i x_i$, $0 \leq n \leq N$, $g_N^* = \max_n |g_n|$ şi $S_n = S_N(x) = \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$

Să se arate că dacă $X_i \geq 0$, $0 \leq i \leq N$, atunci au loc inegalităţile:

1) $aP(g_N^* > a) \leq 13\, M(|X_0|)$

2) $aP(S_N > a) \leq 13\, M(|X_0|)$ pentru orice $a > 0$.

<u>Soluție</u>: Fie $Z_i = X_i \wedge a$ și $Z_i = Y_i - A_i$ descompunerea Doob-Meyer a lui (Z_i) și $U_n = Z_0 v_0 + \sum_{i=1}^{n} (Z_i - Z_{i-1})\, v_i$;

$$V_n = v_0 Y_0 + \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_{i-1})\, v_i$$

Din inegalitatea submartingalului obținem $aP(X_N^* > a) \leq$ $\leq M(X_0)$. Pe mulțimea $\{X_N^* \leq a\}$ avem $g_n = U_n$ pentru orice n de unde

3) $aP(g_N^* > a) \leq aP(X_N^* > a) + aP(g_N^* > a,\ X_N \leq a) \leq$

$\leq M(X_0) + aP(U_N^* > a)$

Evident $|U_n| \leq |V_n| + A_n$ (de notat că $|v_i| \leq 1$, $A_n \geq 0$) și $|V_n| + A_n$ este submartingal).

Inegalitatea submartingalului dă:

$P(U_N^* > a) \leq P((|V| + A)_N^* > a) \leq \frac{1}{a^2} M[(|V_N| + A_N)^2] \leq$

$\leq \frac{2}{a^2} M\,(V_N^2 + A_N^2) \leq \frac{4}{a^2} M\,(Y_N^2)$ deoarece $M(V_N^2) \leq$

$\leq M\,(Y_N^2)$ și $A_N \leq Y_N$.

Utilizînd inegalitatea din problema precedentă punctul b) şi faptul că $Z_0 \leq X_0$ obţinem $P(U_N^* > a) \leq \frac{12}{a} M(X_0)$ care împreună cu 3) dă 1)

In continuare avem:

4) $P(S_N(X) > a) \leq P(X_N^* > a) + P(S_N(X) > a, X_N^* \leq a) \leq$

$\leq \frac{1}{a} M(X_0) + P(S_N(Z)^2 > a^2)$

Apoi este vizibil că $S_N^2(Z) \leq 2S_N^2(Y) + 2S_N^2(A) \leq$

$\leq 2 S_N^2(Y) + 2A_N^2$ de unde:

$P(S_N^2(Z) > a^2) \leq P(S_N^2(Y) + A_N^2 > \frac{a^2}{2}) \leq \frac{2}{a^2} M [S_N^2(Y) + A_N^2] =$

$= \frac{2}{a^2} M (Y_N^2 + A_N^2) \leq \frac{4}{a^2} M(Y_N^2) \leq \frac{13}{a} M(X_0)$ care împreună cu 4) dă 2).

54. Fie (X_n) un $\mathcal{K}_n$ - martingal pozitiv.

a) Să se arate că formula $Q(A) = \int_A X_n dP$, $A \in \mathcal{K}_n$, $n \in N$, defineşte fără ambiguitate o funcţie de mulţime finit aditivă $Q : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n \longrightarrow R_+$ a cărei restricţie la orice $\mathcal{K}_n$ este numărabil aditivă.

b) Să se deducă că limita $X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n$ (limita există a.s. din teorema de convergență a martingalelor) este cea mai mare funcție $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$ - măsurabilă și pozitivă astfel încît $\int_A X_\infty \, dP \leq Q(A)$ pentru orice $A \in \bigcup_n \mathcal{K}_n$.

<u>Soluție</u>: a) Pentru $A \in \mathcal{K}_n$ egalitatea de martingal $X_n = M[X_p / \mathcal{K}_n]$ unde $p > n$ atrage că $\int_A X_n \, dP = \int_A X_p \, dP$ și deci Q este binedefinită.

Apoi avem $Q/_{\mathcal{K}_n} = X_n . P$, care este numărabil aditivă.

Fie $A_1, \dots, A_\ell \in \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$ disjuncte două cîte două; deoarece $\mathcal{K}_n$ este crescător rezultă că există ℓ_0 astfel încît $A_i \in \mathcal{B}_{\ell_0}$ pentru orice $1 \leq i \leq \ell$. Atunci:

$$Q\left(\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1}^{\ell} A_i} X_{\ell_0} \, dP = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{A_i} X_{\ell_0} \, dP = \sum_{i=1}^{\ell} Q(A_i)$$ așa că

Q este finit aditivă.

b) Din lema lui Fatou obținem

$$\int_A X_\infty \, dP \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A X_n \, dP = Q(A)$$

pentru orice $A \in \bigcup_{\ell} \mathcal{K}_{\ell}$, deoarece avem egalitatea

$\int_A X_n \, dP = Q(A)$ dacă $A \in \mathcal{K}_p$, $n \geq p$.

Invers fie Y o funcţie $\mathcal{K}_{\infty}$-măsurabilă şi pozitivă astfel încît $\int_A Y dP \leq Q(A)$ pentru orice $A \in \bigcup_n \mathcal{K}_n$.

Atunci dacă $A \in \mathcal{K}_n$ obţinem: $\int_A M[Y/\mathcal{K}_n] \, dP = \int_A Y dP \leq$
$\leq Q(A) = \int_A X_n \, dP$ deci $M[Y/\mathcal{K}_n] \leq X_n$ deoarece ambele sînt $\mathcal{K}_n$ - măsurabile.

Atunci $Y \overset{6\S 1}{=} \lim_n M[Y/\mathcal{K}_n] \leq \lim_n X_n = X_{\infty}$

55. Fie X_n, $\mathcal{K}_n$, Q ca în problema precedentă.

a) Să se arate că Q este numărabil aditivă pe $\bigcup_n \mathcal{K}_n$ dacă şi numai dacă $\int_E X_{\tau} \, dP = Q(E)$ pentru orice τ $\mathcal{K}_n$ - opţională finită sau echivalent $M[X_{\tau}/\mathcal{K}_n] = X_{\tau \wedge n}$ pentru orice n şi orice opţională finită τ.

Dacă această condiţie este îndeplinită să se arate că Q se prelungeşte în mod unic la o funcţie numărabil aditivă pe $\mathcal{K}_{\infty} = \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$ şi că are loc egalitatea

$Q = X_{\tau} \cdot P$ pe $\mathcal{K}_{\tau}$ pentru orice opţională finită τ.

b) Pentru ca Q să se prelungească la $\mathcal{K}_{\infty}$ într-o măsură de forma X.P, X integrabilă şi pozitivă este necesar şi suficient ca $\int_E X_{\infty}\, dP = Q(E)$ sau încă $M[X_{\infty} / \mathcal{K}_n] = X_n$ pentru orice n.

<u>Soluţie</u>: a) Dacă Q este numărabil aditivă pe $\bigcup_n \mathcal{K}_n$ şi τ este o opţională finită atunci $Q(E) = \sum_n Q(\tau = n)$ şi deci $Q(E) = \sum_n \int_{(\tau=n)} X_n\, dP = \int_E X_\tau\, dP$.

Invers dacă τ este opţională finită şi dacă $\int_E X_\tau\, dP = Q(E)$ atunci inegalitatea $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] \leq X_{\tau \wedge n}$ (vezi problema 2(6) ~~rezultă~~ şi faptul că: $\int X_{\tau \wedge n} dP = \int X_1 dP = Q(E) = \int X_\tau\, dP$ implică $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] = X_{\tau\wedge n}$.
Să presupunem acum că $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] = X_{\tau \wedge n}$ pentru orice opţională finită τ şi să arătăm că Q este numărabil aditivă pe $\bigcup_n \mathcal{K}_n$. Fie deci $(A_p)_p$ disjuncte două cîte două cu $A = \bigcup_p A_p$, $A_p \in \mathcal{K}_{n_p}$ şi $A \in \mathcal{K}_n$.

Fie τ opţionala finită definită prin $\tau = n$ pe $\complement A$ $\tau = n \vee n_p$ pe A_p.

Avem că $\sum_p Q(A_p) = \sum_p \int_{A_p} X_{n \vee n_p}\, dP = \int_A X_\tau\, dP$

Deoarece $\tau \geq n$ avem din ipoteză că $M[X_\tau / \mathcal{K}_n] = X_n$ de unde $\sum_p Q(A_p) = \int_A X_\tau\, dP = \int_A X_n\, dP = Q(A)$ deoarece $A \in \mathcal{K}_n$.

Fie acum Q numărabil aditivă pe $\bigcup_n \mathcal{K}_n$.

Din teorema lui Caratheodory rezultă că Q are o unică prelungire numărabil aditivă pe $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$.

Atunci pentru orice opţională finită τ şi $B \in \mathcal{K}_\tau$ avem:

$$Q(B) = \sum_n Q(B \cap \{\tau = n\}) = \sum_n \int_{B\cap\{\tau=n\}} X_n dP = \int_B X_\tau \, dP \text{ deci}$$

$Q = X_\tau . P$ pe $\mathcal{K}_\tau$.

b) Dacă Q admite o prelungire de forma X.P pe $\mathcal{K}_\infty$ atunci $X_n = M[X / \mathcal{K}_n]$ deoarece $\int_A X_n \, dP = Q(A) = \int_A X dP$ dacă $A \in \mathcal{K}_n$ de unde rezultă că $X_\infty = M[X / \mathcal{K}_\infty]$ şi deci $X_n = M[X / \mathcal{K}_n]$ pentru orice n.

Invers dacă $X_n = M[X_\infty / \mathcal{K}_n]$ atunci (X_n) este martingal uniform integrabil şi deci $X_n \xrightarrow[L^1]{a.s.} X_\infty$.

Atunci $\int_A X_\infty \, dP = \lim_{p\to\infty} \int_A X_p \, dP = Q(A)$ pentru orice $A \in \bigcup_n \mathcal{K}_n$.

Rezultă că măsura $X_\infty .P$ se prelungeşte pe Q la $\mathcal{K}_\infty$.

56. (<u>Legea 0-1</u>)

Fie $(\mathcal{K}_n)$ un şir de corpuri boreliene independente şi fie $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{B}(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n+1}, \ldots)$ corpul borelian al evenimentelor terminale.

Dacă X este o variabilă aleatoare cu media finită şi $\mathcal{T}$-măsurabilă să se arate că X=M(X) a.s.

Soluţie: Din 9, §1, rezultă că

$$M[X/\mathcal{B}(\mathcal{K}_n,\mathcal{K}_{n+1},\ldots)] \longrightarrow M[X/\mathcal{T}] = X$$

Dar X este independentă de $\mathcal{B}(\mathcal{K}_n, \mathcal{K}_{n+1},\ldots)$, deci $M[X/\mathcal{B}(\mathcal{K}_n,\ldots)] = M(X)$ şi prin urmare $X = M(X)$.

57. Fie $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate şi pentru orice n fie $\Delta_n = \{A_{n1},\ldots,A_{nm_n}\}$ o partiţie finită a lui E cu elemente din $\mathcal{K}$ şi fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(\Delta_n)$. Fie Q o probabilitate pe $\mathcal{K}$ absolut continuă în raport cu P şi fie $X_n = \sum_{n=1}^{m_n} \frac{Q(A_{ni})}{P(A_{ni})} \chi_{A_{ni}}$; $X_n = 0$ în cazul $\frac{0}{0}$.

Presupunem că dacă $n < m$ atunci Δ_n este mai fină decît Δ_m, aşa că şirul de corpuri boreliene $(\mathcal{K}_n)$ este crescător.

a) Să se arate că X_n este $\mathcal{K}_n$- martingal relativ la P.

b) Dacă $\frac{dQ}{dP}$ este $\mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$ - măsurabilă să se deducă că $\frac{Q(A_n(\omega))}{P(A_n(\omega))} \xrightarrow{a.s.} \frac{dQ}{dP}(\omega)$ unde $A_n(\omega) = A_{ni}$ dacă $\omega \in A_{ni}$

<u>Soluţie:</u> a) Afirmaţia rezultă dacă arătăm că $X_n =$
$= M\left[\frac{dQ}{dP} / \mathcal{K}_n\right]$. Deoarece $\Delta_n \cup \{\emptyset\}$ este un sistem de generatori închis la intersecţia finală din teorema de unicitate a probabilităţilor rezultă că este suficient să arătăm că

$$\int_{A_{ni}} X_n dP = \int_{A_{ni}} M\left[\frac{dQ}{dP} / \mathcal{K}_n\right] dP$$

Ori avem $\int_{A_{ni}} X_n dP = \int_{A_{ni}} \frac{Q(A_{ni})}{P(A_{ni})} dP = Q(A_{ni})$ şi

$$\int_{A_{ni}} M\left[\frac{dQ}{dP} / \mathcal{K}_n\right] dP = \int_{A_{ni}} \frac{dQ}{dP}(\omega)\, dP(\omega) = Q(A_{ni})$$ aşa că

egalitatea rezultă.

Mai departe din teorema de convergenţă a martingalelor (vezi 6, §1) rezultă că

$$\frac{Q(A_n(\omega))}{P(A_n(\omega))} \; X_n(\omega) \xrightarrow{a.s.} M\left[\frac{dQ}{dP} / \mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)\right] =$$

$= \frac{dQ}{dP}$ (ultima egalitate rezultă din $\mathcal{B}(\bigcup_n \mathcal{K}_n)$ - măsurabilitatea lui $\frac{dQ}{dP}$).

58. Fie $f: [0,1) \longrightarrow R$ o funcţie boreliană astfel încît $\int |f(x)| dm(x) < \infty$, m fiind măsura Lebesgue şi fie $I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, \dots, I_{2^n}^{(n)}$ intervalele $[0, \frac{1}{2^n})$, $[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}), \dots, [\frac{2^n-1}{2^n}, 1)$

Fie funcţia simplă f_n definită prin:

$$f_n(x) = 2^n \int_{I_K^{(n)}} f(y)dm(y) \text{ dacă } x \in I_K^{(n)}.$$

Să se arate că $f_n \xrightarrow{a.s.} f$ în raport cu m.

<u>Soluţie</u>: Fie Q probabilitatea pe $\mathcal{B}_{[0;1)}$ definită prin

$$Q(A) = C \int_A f(x)\, dm(x) \text{ unde } C = \left[\int f(x)dm(x)\right]^{-1}.$$

Cum Q este absolut continuă în raport cu m şi $\frac{dQ}{dm} = Cf$ rezultă din problema 57 că $g_n = \sum_{K=1}^{2^n} \frac{Q(I_K^{(n)})}{m(I_K^{(n)})} \chi_{I_K^{(n)}} =$

$$= \sum_{K=1}^{2^n} \frac{C \int_{I_K^{(n)}} f(x)dm(x)}{2^n} \chi_{I_K^{(n)}} = Cf_n \text{ este}$$

$\mathcal{B}(I_1^{(n)}, \dots, I_{2^n}^{(n)})$ -martingal şi $f_n \xrightarrow{a.s.} M[f/\mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{2^n} I_K^{(n)})]$

Problema este rezolvată dacă dovedim că $\mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{2^n} I_K^{(n)}) =$

$= \mathcal{B}_{[0,1)}$.

Deoarece orice interval deschis (a,b) se scrie ca reuniune numărabilă de intervale $I_K^{(n)}$ rezultă că $\mathcal{B}_{[0,1)} \subset \mathcal{B}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{K=1}^{2^n} I_K^{(n)})$. Incluziunea inversă este vizibilă.

59. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare şi $\mathcal{T}_n = \mathcal{B}(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, $\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n$. Să se arate că $A \in \mathcal{T}$ implică $P(A) = 0$ sau 1 dacă şi numai dacă

$\lim_{n\to\infty} \sup_{B\in\mathcal{T}_n} | P(B\cap C) - P(B)P(C) | = 0$ pentru orice $C \in \mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$

<u>Soluţie</u>. Presupunem că dacă $A \in \mathcal{T}$ atunci $P(A) = 0$ sau 1. In particular rezultă că $M[f / \mathcal{T}] = M(f)$ pentru orice variabilă aleatoare integrabilă f.

Din 9§1 rezultă că dacă $C \in \mathcal{B}(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ atunci

$M[\chi_C - P(C) / \mathcal{T}_n] \xrightarrow{L^1} M[\chi_C - P(C) / \mathcal{T}] =$

$= M[\chi_C - P(C)] = 0$

Atunci $\sup_{B\in\mathcal{T}_n} |P(B\cap C) - P(B)P(C)| = \sup_{B\in\mathcal{T}_n} |\int_B [\chi_C - P(C)] dP| =$

$= \sup_{B\in\mathcal{T}_n} |\int_B M[\chi_C - P(C)/\mathcal{T}_n] dP \leq \sup_{B\in\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)} |\int_B M[\chi_C - P(C)/\mathcal{T}_n] dP| \to$

$\longrightarrow 0$ din convergența în L^1 către 0 a lui $M[\chi_C - P(C)/\mathcal{T}_n]$

Reciproc să presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{B\in\mathcal{T}_n} |P(B\cap C)-P(B)P(C)| = 0$ pentru orice $C\in\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n,\ldots)$

Fie $A\in\mathcal{T}$ și să arătăm că $P(A) = 0$ sau 1. Din ipoteză avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{B\in\mathcal{T}_n} |P(A\cap B)-P(A)P(B)| = 0$, dar cum $A\in\mathcal{T}_n$ pentru orice n rezultă $|P(A)-[P(A)]^2| = |P(A\cap A)-P(A)P(A)|$

$\leq \sup\limits_{B\in\mathcal{T}_n} |P(A\cap B) - P(A)P(B)| \longrightarrow 0$ deci $P(A) = [P(A)]^2$ de unde $P(A)$ este 0 sau 1.

60. Fie (Y_n) un șir de variabile aleatoare independente astfel încît $P(Y_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$ pentru orice n și fie $B_n\in\mathcal{B}(Y_1,\ldots,Y_n)$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ și $P(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n) = 1$.

Să se arate că șirul $X_0 = 0$, $X_{n+1} = X_n(1+Y_{n+1}) + \chi_{B_n} Y_{n+1}$ este $\mathcal{B}(Y_1,\ldots,Y_n)$ - martingal și $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=0)=1$, $P(X_n$ converge$) = 0$, deci $X_n \xrightarrow{P} 0$ și X_n diverge a.s.

<u>Soluție</u>: Avem $M[X_{n+1}/\mathcal{B}(Y_1,\ldots,Y_n)] = M[X_n(1 + Y_{n+1})/\mathcal{B}(Y_1\ldots Y_n)] + M[\chi_{B_n} Y_{n+1}/\mathcal{B}(Y_1,\ldots,Y_n)] =$

$$= X_n M[1 + Y_{n+1} / \mathcal{B}(Y_1,\dots,Y_n)] + \chi_{B_n} M[Y_{n+1} / \mathcal{B}(Y_1,\dots,Y_n)] =$$

$= X_n\ M\ (1+Y_{n+1}) + \chi_{B_n}\ M\ (Y_{n+1}) = X_n$ deoarece $M(Y_{n+1})=0$, aşa că (X_n) este $\mathcal{B}(Y_1,\dots,Y_n)$ - martingal. Se observă că X_n ia numai valori întregi nenegative.

Apoi pentru $\varepsilon > 0$ avem $P(X_{n+1} > \varepsilon) \le P(X_{n+1} \ne 0) \le$

$\le \frac{1}{2} P(X_n \ne 0) + P(B_n)$ aşa că $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P(X_{n+1} > \varepsilon) \le$

$\le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P\ (X_{n+1} \ne 0) \le \frac{1}{2}\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P(X_n \ne 0).$

Din ultima inegalitate rezultă că $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P(X_n \ne 0) = 0$ şi deci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P(X_{n+1} > \varepsilon) = 0$ cu alte cuvinte $X_n \xrightarrow{P} 0$

Să arătăm că $P(X_n$ diverge$) = 1$. Prin absurd presupunem că $P(X_n$ converge$) > 0$ şi să arătăm că ajungem la o contradicţie. Se observă că dacă X_n converge atunci χ_{B_n} converge deci χ_{CB_n} converge şi cum χ_{CB_n} ia numai valorile 0,1 rezultă că χ_{CB_n} converge către $\chi_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} CB_n} =$

$= \chi_{C\,\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n}$ cu alte cuvinte χ_{B_n} converge către

$\chi_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} B_n}$.

Fie $B = \{X_n$ converge$\} \cap \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, B_n$; avem

$P(B) = P(X_n$ converge$) > 0$ şi $\chi_{B \cap B_n} \longrightarrow \chi_B$, deci

$\chi_{B \setminus B \cap B_n}$ converge către 0 şi în particular

$P(B \setminus B \cap B_n) \longrightarrow 0$ sau echivalent $P(B \cap B_n) \longrightarrow P(B) > 0$

ceea ce nu este posibil fiindcă $P(B \cap B_n) \leq P(B_n) \longrightarrow 0$.

61. Pe cîmpul de probabilitate $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, m)$, m măsura Lebesgue, considerăm şirul de variabile aleatoare (X_n) definit prin: $X_n(\omega) = 2^n$ dacă $0 \leq \omega < 2^{-n}$ şi $X_n(\omega) = 0$ în caz contrar

Să se arate că (X_n) este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - martingal care converge a.s. către 0 dar $M(X_n) \not\longrightarrow 0$ şi $(X_1,\ldots,X_n,\ldots 0)$ nu este submartingal (deci în teorema de convergenţă a martingalelor condiţia de uniform integrabilitate este esenţială).

<u>Soluţie</u>: Arătăm întîi că $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n) = \mathcal{B}(\Delta_n)$ unde Δ_n este partiţia $\Delta_n = \left\{\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right); 0 \leq K < 2^n\right\}$

Vom face aceasta prin inducţie după n. Afirmaţia este imediată pentru n=1. Presupunem afirmaţia adevărată pentru n şi să o arătăm pentru n+1. Deoarece

$$\{X_{n+1} = 2^n\} = \bigcup_{K=0}^{2^n-1} \left[\frac{2K}{2^{n+1}}, \frac{2K+1}{2^{n+1}}\right)$$ rezultă că $\mathcal{B}(X_1,\ldots X_{n+1})$ este inclus în corpul borelian generat de partiţia Δ_{n+1}.

Incluziunea inversă rezultă din egalitățile:

$$\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right) \cap \{X_{n+1} = 2^n\} = \left[\frac{2K}{2^{n+1}}, \frac{2K+1}{2^{n+1}}\right) ;$$

$$\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right) \cap C(\{X_{n+1} = 2^n\}) = \left[\frac{2K+1}{2^{n+1}}, \frac{2K+2}{2^{n+1}}\right)$$

Pentru a arăta că (X_n) este martingal este suficient de dovedit că: $\int_{\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right)} X_n \, dm = \int_{\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right)} X_{n+1} \, dm$ pentru $0 \le K < 2^n$. Ori avem:

$$\int_{\left[0, \frac{1}{2^n}\right)} X_n dm = 2^n 2^{-n} = 1 \text{ şi } \int_{\left[0, \frac{1}{2^n}\right)} X_{n+1} dm = \int_{\left[0, \frac{1}{2^{n+1}}\right)} X_{m+1} dm = 2^{(n+1)} 2^{-(n+1)} = 1$$

şi pentru $K > 0$ avem:

$$\int_{\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right)} X_n dm = 0 ; \int_{\left[\frac{K}{2^n}, \frac{K+1}{2^n}\right)} X_{n+1} dm = \int_{\left[\frac{2K}{2^{n+1}}, \frac{2(K+1)}{2^n}\right)} X_{n+1} dm = 0$$

deoarece pe mulţimile pe care se iau integralele X_n, X_{n+1} sînt 0. Este vizibil că X_n converge punctual către 0 (deci a.s.) Deoarece $M(X_n) = 1$ pentru orice n rezultă că $M(X_n) \not\to 0$. De asemenea $(X_1, \ldots, X_n, \ldots 0)$ nu este submartingal pentru că de exemplu

$$\int_{\left[0, \frac{1}{2^n}\right)} X_n \, dm = 1 \le \int_{\left[0, \frac{1}{2^n}\right)} 0 dm = 0$$

62. Să se arate că nu întotdeauna un martingal care converge a.s. converge şi în L^1 (reciproca se ştie că este adevărată).

Soluţie: Fie (Y_n) un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate cu $Y_n \geq 0$,

$M(Y_n) = 1, P(Y_n=1) < 1$ şi fie $X_n = Y_1 \ldots Y_n$

Este cunoscut că (X_n) este $\mathcal{B}(X_1,\ldots,X_n)$ - martingal (vezi problema 3) şi de asemenea avem $X_n \geq 0$, $M(X_n) = 1$. Condiţia din teorema de convergenţă a martingalelor fiind îndeplinită rezultă că X_n converge a.s. Vom arăta că X_n nu converge în L^1. Această afirmaţie rezultă din faptul că:

$$M(|X_{n+1} - X_n|) = M(Y_1 \ldots Y_n |Y_{n+1} - 1|) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} M(Y_i)\, M(|Y_{n+1} - 1|) = M(|Y_1 - 1|) = C \neq 0$$

Observaţie. Alte exemple de astfel de martingale sînt oferite de problema precedentă şi de problema 48.

63. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente cu media 0, $M(|X_n|^p) < \infty$ pentru orice $n (p \geq 1)$ şi fie $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Să se arate că $S_n \xrightarrow{a.s.} S$ şi $M(|S|^p) < \infty$ dacă şi numai dacă $S_n \xrightarrow{L^p} S$.

<u>Soluţie</u>. Deoarece S_n este martingal rezultă că dacă $S_n \xrightarrow{L^p} S$, deci $S_n \xrightarrow{L^1} S$ atunci $S_n \xrightarrow{a.s.} S$ (vezi p6, §1).

Apoi $M[S / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)] = M[S-S_n / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)] +$

$+ M[S_n / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)] = M(S) + S_n$ deoarece $S-S_n$ este independentă de $\mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)$.

Deoarece $M[S / \mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)] \xrightarrow{a.s.} M(S)$ (vezi 6, §1) rezultă că $M(S) = 0$ dacă $S_n \xrightarrow{a.s.} S$ deci $M[S / \mathcal{B}(X_1 \dots X_n)] =$ $= S_n$ şi apelînd din nou la 6, §1 obţinem că $S_n \xrightarrow{L^p} S$.

64. Fie(X_n) un şir de variabile aleatoare independente astfel încît $S_n = \sum_{K=1}^{n} X_K$ converge în repartiţie.

Să se arate că S_n converge a.s. (reciproca se ştie că este adevărată)

<u>Soluţie</u>: Din ipoteză $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{K=1}^{n} \varphi_{X_K}(t)$ converge uniform pe orice compact către $\varphi_S(t)$ unde $S_n \xrightarrow{rep.} S$.

Fie t_o astfel încît $\varphi_S(t) \neq 0$ pentru $|t| \leq t_o$, deci $\varphi_{S_n}(t) \neq 0$ pentru $|t| \leq t_o$ pentru n suficient de mare.

Pentru t fixat cu $|t| \leq t_0$ şi n suficient de mare putem defini variabila aleatoare complexă $Z_n = \frac{e^{itS_n}}{\varphi_{S_n}(t)}$

Asemănător cu problema 3 se arată că (Z_n) este $\mathcal{B}(X_1,\dots,X_n)$-martingal (în sensul că partea reală şi cea imaginară sînt martingale). Deoarece (Z_n) este uniform mărginit rezultă din teorema de convergenţă a martingalelor că Z_n converge a.s.

Deci există o mulţime E_t cu $P(E_t) = 1$ astfel încît dacă $\omega \in E_t$ atunci şirul de numere complexe $\frac{e^{itS_n(\omega)}}{\varphi_{S_n}(t)}$ converge şi cum numitorul converge rezultă că $e^{itS_n(\omega)}$ converge.

Considerăm $e^{itS_n(\omega)}$ ca funcţie de (t,ω) pe spaţiul $[-t_0,t_0] \times E$. Pentru orice n, $e^{itS_n(\omega)}$ este $\mathcal{B}_{[-t_0,t_0]} \otimes \mathcal{K}$-măsurabilă.

Fie $D = \{(t,\omega) \in [-t_0,t_0] \times E \,/\, e^{itS_n(\omega)} \text{ converge}\}$; din ipoteză secţiunile D_t au P-măsura 0 şi din teorema lui Fubini obţinem:

$$\int m(D_\omega)\, dP(\omega) = (m \otimes P)(D) = \int_{[-t_0,t_0]} P(D_t)\, dm(t) = 0,$$

m măsura Lebesgue.

Deci P-a.s. avem $m(D_\omega) = 0$

Ori pentru astfel de ω şirul $e^{itS_n(\omega)}$ converge pentru aproape toţi $t \in [-t_0, t_0]$ şi $\varphi(S_n(\omega)) = \int_{[-t_0,t_0]} e^{itS_n(\omega)} dm(t)$ converge în virtutea teoremei de convergenţă dominată.

Evenimentul $\{\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n| < \infty\}$ este eveniment coadă, deci conform legii 0-1 are probabilitatea 0 sau 1.

Dacă el are probabilitatea 0 deci $\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n| = \infty$ a.s. atunci limitele şirurilor $\varphi(S_n(\omega))$, care există P-a.s., sînt zero.

Folosind de două ori teorema de convergenţă dominată şi ţinînd cont că: $|\varphi(S_n)| \leq 2t_0, |\prod_{K=1}^{n} \varphi_{X_K}| \leq 1$, $M[\varphi(S_n)] =$

$= \int_{[-t_0,t]} \varphi_{S_n}(t) dm(t) = \int_{[-t_0,t_0]} \prod_{K=1}^{n} \varphi_{X_K}(t) dm(t)$ se obţine că:

$$0 = \lim_{n\to\infty} M[\varphi(S_n)] = \lim_{n\to\infty} \int_{[-t_0,t_0]} \prod_{K=1}^{n} \varphi_{X_K}(t) dm(t) = \int_{[-t_0,t_0]} \varphi_S(t) dm(t),$$

deci $\varphi_S(t) = 0$ m-a.p.t. pe $[-t_0, t_0]$ deci $\varphi_S(t) = 0$ pentru cel puţin un $t \in [-t_0, t_0]$ fapt ce contrazice alegerea lui t_0.

Prin urmare $\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n| < \infty$ a.s.

Fie $t, t' \in [-t_0, t_0]$ astfel încît $\frac{t}{t'}$ să fie iraţional şi cum orice şir mărginit de numere reale (s_n) converge dacă (e^{its_n}), $(e^{it's_n})$ converg, rezultă că şirul (S_n) converge a.s.

65. Fie $\{(X_n^i)_n\}_{i\in I}$ o familie numărabilă de submartingale astfel încît $\sup\limits_n M[\sup\limits_{i\in I}(X_n^i)^+] < \infty$.
Să se arate că $X_n^i \xrightarrow{a.s.} X_\infty^i$ pentru orice i cu X_∞^i integrabilă şi că $\sup\limits_{i\in I} X_n^i \xrightarrow{a.s.} \sup\limits_{i\in I} X_\infty^i$.

Soluţie: Din ipoteză rezultă că $\sup\limits_n M[(X_n^i)^+] < \infty$ pentru orice i aşa că teorema de convergenţă a martingalelor rezultă existenţa unei variabile aleatoare integrabile X_∞^i aşa încît $X_n^i \xrightarrow{a.s.} X_\infty^i$.
Din problema 10 rezultă că şirul $(\sup\limits_{i\in I} X_n^i)_n$ este submartingal care din ipoteză verifică condiţia din teorema de convergenţă a martingalelor.
Rezultă că există o variabilă aleatoare integrabilă X_∞ astfel încît $\sup\limits_i X_n^i \xrightarrow{a.s.} X_\infty$.
Evident $X_\infty \geq X_\infty^i$ a.s. pentru orice i deci $X_\infty \geq \sup\limits_i X_\infty^i$ a.s.
Pentru a arăta că această inegalitate este egalitate este suficient să verificăm că $M(X_\infty) = M(\sup\limits_i X_\infty^i)$.
Fie $(I_p)_{p\in N}$ un şir de părţi finite ale lui I a căror reuniune este I.

$M(\sup\limits_{i\in I_p} X_n^i)$ este crescător în p şi de asemenea în n deoarece $\sup\limits_{i\in I_p} X_n^i$ este submartingal pentru orice p.

Cum $S \overset{def}{=} \sup_{p,n} M[\sup_{i\in I_p} X_n^i] = \sup_n M(\sup_{i\in I} X_n^i)$ este finită

fiind majorată de $\sup_n M[\sup_{i\in I} (X_n^i)^+]$ care este finită

prin ipoteză, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există

p_ε, n_ε astfel încît $M[\sup_{i\in I_p} X_n^i] \geq S-\varepsilon$ pentru $p \geq p_\varepsilon$,

$n \geq n_\varepsilon$.

Insă $X_\infty - \sup_{i\in I_p} X_\infty^i$ este limita a.s. a şirului de variabile aleatoare pozitive $(\sup_{i\in I} X_n^i - \sup_{i\in I_p} X_n^i)$ deci conform lemei lui Fatou avem

$M(X_\infty - \sup_{i\in I_p} X_\infty^i) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} M(\sup_{i\in I} X_n^i - \sup_{i\in I_p} X_n^i) \leq$

$\leq S-(S-\varepsilon) = \varepsilon$ pentru $p \geq p_\varepsilon$.

Rezultă că $M(X_\infty - \sup_{i\in I} X_\infty^i) \leq \varepsilon$ pentru $\varepsilon > 0$ adică tocmai ce vroiam.

66. Fie X, Y variabile aleatoare pozitive astfel încît $X \leq Y$ a.s. şi fie $a,b > 0$. Presupunem că pentru orice $\lambda \geq a$ are loc inegalitatea

1) $\frac{1}{\lambda} \int_{(Y>\lambda)} X dP \leq bP(Y > \lambda)$

Să se arate că dacă Y este integrabilă atunci $X\log^+ X$ este integrabilă.

<u>Aplicație</u>. Fie $(X_n)_n$ un martingal pozitiv uniform integrabil (sau un martingal invers pozitiv) și fie $a > 0$ și $b > 1$ astfel încît $X_n \leq bX_{n-1}$ ($X_{-\infty} \leq a$, $X_n \leq bX_{n-1}$) pentru orice n. Să se arate că $X_\infty \lg^+ X_\infty$ (resp. $X_{-\infty} \lg^+ X_{-\infty}$) sînt integrabile.

<u>Soluție</u>: Arătăm întîi că are loc egalitatea:

$$2) \quad \int X \lg^+ X \, dP = \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{(X>\lambda)} X \, dP$$

Avem $\int X \lg^+ X \, dP = \int_{(X<1)} X \lg^+ X \, dP + \int_{(X\geq 1)} X \lg^+ X \, dP = \int_{(X\geq 1)} X \lg X \, dP =$

$$= \int_{(X\geq 1)} X \left(\int_1^X \frac{1}{\lambda} d\lambda \right) dP \overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_1^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{(X>\lambda)} X \, dP$$

Fie $\alpha = \max(1, a)$; deoarece $\{X > \lambda\} \subset \{Y > \lambda\}$, din inegalitatea 1) obținem:

$$\int_\alpha^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{(X>\lambda)} X \, dP \leq b \int_0^\infty P(Y > \lambda) \, d\lambda = bM(Y) < \infty$$

Apoi egalitatea 2) ne dă:

$$M(X \lg^+ X) = \int_1^\alpha \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{(X>\lambda)} X dP + \int_\alpha^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \int_{(X>\lambda)} X \, dP \leq$$

$$\leq M(X) \int_1^\alpha \frac{d\lambda}{\lambda} + bM(Y) < \infty .$$

<u>Aplicație</u>: Fie $(X_n)_{n=1,2,..}$ un martingal pozitiv uniform integrabil astfel încît $X_n \leq bX_{n-1}$ pentru orice n.

Fie $Y = \sup_n X_n$ și pentru $\lambda \geq 0$ fie $A_\lambda = \{Y > \lambda\}$

Deoarece din teorema de convergență a martingalelor avem

$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ avem și $X_\infty \leq Y$.

Vom demonstra inegalitatea 1) pentru variabilele aleatoare X_∞, Y; deoarece $A_\lambda \nearrow A_a$ cînd $\lambda \searrow a$ este suficient de probat 1) pentru $\lambda > a$.

Considerăm opționala $\tau_\lambda = \begin{cases} \min(n ; X_n > \lambda) & \text{dacă există astfel de } n \\ \infty & \text{în caz contrar.} \end{cases}$

Din inegalitățile $X_n \leq \lambda X_{n-1}$ rezultă că $X_{\tau_\lambda} \leq b\lambda$

(aceasta este adevărată și pentru $\tau_\lambda = \infty$).

Avem $A_\lambda = \{\tau_\lambda < \infty\}$ și din teorema de opționalizare obținem:

$$\int_{A_\lambda} X_\infty \, dP = \int_{(\tau_\lambda < \infty)} X_{\tau_\lambda} \, dP \leq b\lambda P(\tau_\lambda < \infty) = b\lambda P(A_\lambda) \text{ deci 1)}$$

și conform cu prima parte a problemei rezultă că $X_\infty \lg^+ X_\infty$ este integrabilă.

Fie acum $(X_{-n})_{n=1,2,\ldots}$ un martingal invers pozitiv astfel încît $X_{-\infty} \leq a$ și $X_{-n} \leq b X_{-n-1}$ pentru orice n.

Fie $Y = \sup_n X_{-n}$, $A_\lambda = \{Y > \lambda\}$ pentru $\lambda > 0$. Rezolvarea se face la fel ca în cazul precedent unde X_{-1} ia locul lui X_∞ cu observația că τ_λ nu poate lua valoarea $-\infty$ deoarece $\lim_{n\to\infty} X_{-n} = X_{-\infty} \leq a < \lambda$ (din teorema de convergență a martingalelor inverse se știe că $X_{-n} \xrightarrow{a.s.} X_{\infty}$)

67. Fie $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate, $(\mathcal{K}_n)$ o familie crescătoare de corpuri boreliene din $\mathcal{K}$ și (X_n) un $\mathcal{K}_n$-martingal pozitiv. Dacă este îndeplinită una din următoarele două condiții:

1) $(X_{n+1}-X_n)^2 \leq C\, M[(X_{n+1}-X_n)^2/\mathcal{K}_n] < \infty$ a.s. unde C este o constantă.

2) $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(\Delta_n)$, Δ_n partiție numărabilă a lui E cu elemente din $\mathcal{K}$ și $P(B_n) \leq CP(B_{n+1})$ pentru orice $B_{n+1} \in \Delta_{n+1}$ unde $B_n \in \Delta_n$ este astfel încît $B_{n+1} \subset B_n$ și C este o constantă.

Să se arate că există o constantă K astfel încît $X_{n+1} \leq K X_n$ a.s.

<u>Soluție</u>: 1) Avem $M[(X_{n+1}-X_n)^2/\mathcal{K}_n] = M[|X_{n+1}-X_n||X_{n+1} - X_n|/\mathcal{K}_n] \leq \sqrt{CM[(X_{n+1}-X_n)^2/\mathcal{K}_n]}\, M[|X_{n+1}-X_n|/\mathcal{K}_n]$ de unde rezultă $M[(X_{n+1}-X_n)^2/\mathcal{K}_n] \leq C\{M[|X_{n+1}-X_n|/\mathcal{K}_n]\}^2$

Deoarece (X_n) este martingal pozitiv obținem:

$M[|X_{n+1}-X_n|/\mathcal{K}_n] = 2M[(X_{n+1}-X_n)^-/\mathcal{K}_n] \leq 2X_n$

Din cele de mai sus și din ipoteză rezultă:

$$(X_{n+1}-X_n)^2 \leq CM[(X_{n+1}-X_n)^2/\mathcal{K}_n] \leq C^2\{M[|X_{n+1}-X_n|/\mathcal{K}_n]\}^2 \leq$$

$$\leq 4C^2X_n^2 \quad \text{de unde } X_{n+1} \leq (2C+1)\,X_n .$$

2) Se ştie că orice variabilă aleatoare măsurabilă în raport cu un corp borelian generat de o partiţie numărabilă este constantă a.s. pe elementele partiţiei.

Rezultă că $X_{n+1}P(B_{n+1}) = \int_{B_{n+1}} X_{n+1}dP \leq \int_{B_{n+1}} X_{n+1}\, dP = \int_{B_n} X_n dP =$

$= X_n\, P(B_n)$

dacă avem în vedere că X_{n+1} este a.s. constantă pe B_{n+1} şi X_n este a.s. constantă pe B_n.

Cum $P(B_n) \leq CP(B_{n+1})$ rezultă că $X_{n+1} \leq CX_n$ a.s.

68. Fie (X_n) un şir de variabile aleatoare independente, identic repartizate şi cu medie finită şi fie $S_n = X_1+\ldots+X_n$.

a) Să se arate că $Y_{-n} = \frac{S_n}{n}$ este $\mathcal{K}_{-n} = (S_p;\ p \geq n)$ - martingal invers.

b) Dacă $X_n \geq 0$ pentru orice n, să se deducă că $X_1 \lg^+ X_1$ este integrabilă dacă $\sup\limits_n \frac{S_n}{n}$ este integrabilă.

<u>Soluție</u>: a) Arătăm întîi că $M[X_1/S_n] = M[X_i/S_n]$ pentru $1 \leq i \leq n$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$\int_A X_1 dP = \int_A X_i \, dP \text{ pentru orice } A = S_n^{-1}(B) \text{ cu } B \in \mathcal{B}_R.$$

Avem:

$$\int_A X_i dP = \int (\chi_B \circ S_n) X_i \, dP = \int \chi_B(s(X_1,\dots,X_n)) p_i(X_1,\dots,X_n) \, dP = \int (\chi_B \circ s) \, p_i \, dP \circ X_1^{-1} \dots dP \circ X_n^{-1} =$$

$$= \int (\chi_B \circ s) p_i \, dF(x_1) \dots dF(x_n)$$

unde s, p_i sînt aplicațiile $(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow x_1+\dots+x_n$, $(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow x_i$ și F este repartiția comună a variabilelor X_n.

Apoi din teorema lui Fubini avem:

$$\int_A X_i dP = \int \chi_B(x_1+\dots+x_n) x_i \, dF(x_1) \dots dF(x_n) =$$

$$= \int F^{*(n-1)}(B-x_i) x_i \, dF(x_i) = \int F^{*(n-1)}(B-x) x \, dF(x) \text{ deci}$$

nu depinde de i.

Ținînd cont de asociativitatea independenței (S_n, $\mathcal{B}(X_{n+1},\dots)$) sînt independente) obținem:

$$M[X_1 / \mathcal{K}_n] = M[X_1 / S_n, X_{n+1}, \dots] = M[X_1 / S_n] \text{ și deci:}$$

$$Y_{-n} = \frac{1}{n} S_n = \frac{1}{n} M\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i / S_n\Big] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M[X_i/S_n] = M[X_1/S_n] =$$

$= M[X_1/\mathcal{K}_{-n}]$ şi este imediat că $\{M[X_1/\mathcal{K}_{-n}]\}_{n=1,2,\ldots}$

este $\mathcal{K}_{-n}$ -martingal invers.

b) Din legea tare a numerelor mari rezultă că $\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{a.s.} M(X_1)$

Se observă că martingalul invers (Y_{-n}) verifică ipotezele

din problema precedentă (de la aplicaţie) cu $a=M(Y_1)$ şi

$b = 2$, deci $X_1 \lg^+ X_1$ este integrabilă dacă $\sup_n \frac{S_n}{n}$ este

integrabilă.

69. Fie $Y_1,\ldots,Y_n$ variabile aleatoare independente identic repartizate cu valori în $\{0,1,\ldots\}$ şi cu medie finită.

Fie $S_m = \sum_{i=1}^{m} Y_i$, $1 \le m < n$. Să se arate că are loc egalitatea.

(*) $P(S_m < m \text{ pentru orice } 1 \le m \le n / S_n) = (1 - \frac{S_n}{n})^+$

<u>Soluţie:</u> Fie $\mathcal{K}_m = \mathcal{B}(S_m, S_{m+1},\ldots,S_n)$ şi $X_{-m} = \frac{S_m}{m}$

Din problema precedentă rezultă că X_{-m} este $\mathcal{K}_m$ -martingal invers sau echivalent că $(X_m)_{-n \le m \le 1}$ este $\mathcal{K}_m$ -martingal. Este evident că (*) are loc pe $\{S_n \ge n\}$. Rămîne să o demonstrăm pe mulţimea $\{S_n < n\}$.

$$\text{Fie} \quad \tau = \begin{cases} \min\left(m;\ -n \le m \le -1,\ X_m \ge 1\right) & \text{dacă} (\ ) \ne \emptyset \\ -1 & \text{în caz contrar} \end{cases}$$

Arătăm că $X_\tau = 1$ pe $\left\{\max_{1\le m\le n} \frac{S_m}{m} \ge 1\right\} \cap \{S_n < n\}$.

Prin ipoteză avem $\frac{S_n}{n} < 1$. Să presupunem că $\frac{S_{n-1}}{n-1} \ge 1$

şi să arătăm că $\frac{S_{n-1}}{n-1} = 1$. Prin absurd dacă $\frac{S_{n-1}}{n-1} > 1$

atunci $\frac{S_n}{n} = \frac{n-1}{n}\left[\frac{S_{n-1}}{n-1} + \frac{Y_n}{n-1}\right] > \frac{n-1}{n}\left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) + \right.$

$\left. + \frac{0}{n-1}\right] = 1$ ceea ce nu se poate.

Cum şi $X_\tau = 0$ pe $C\left\{\left(\max_{1\le m\le n} \frac{S_m}{m} \ge 1\right) \cap (S_n < n)\right\}$

rezultă că pe $\{S_n < n\}$ avem:

$P(S_m > m$ pentru un anumit $1 \le m \le n / S_n) = M[X_\tau / \mathcal{K}_{-n}] =$

$= X_{-n} = \frac{S_n}{n}$ de unde rezultă (*) .

70. Fie cîmpul de probabilitate $(N, \mathcal{P}(N), P)$ unde P este definită prin $P(\{n\}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ şi fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, \{n+1\})$. Să se arate că şirul $X_n = (n+1)\chi_{\{n+1,\dots\}}$ este $\mathcal{K}_n$-martingal astfel încît $M(X_n) = 1$ dar $\sup_n X_n(\omega) = \omega$ nu este integra-

bilă (aceasta arată că inegalitatea lui Doob

$\|\sup_n X_n\|_p \leq q \sup_n \|X_n\|_p$ este falsă pentru $p = 1$)

<u>Soluție</u>: Deoarece $\mathcal{K}_n$ este generat de o partiție, pentru a arăta că (X_n) este $\mathcal{K}_n$ - martingal este suficient de verificat că:

$$\int_A X_n \, dP = \int_A X_{n+1} \text{ pentru } A = \{K\},\ K \leq n \text{ sau } A = \{n+1, \ldots\}.$$

Dacă $A = \{K\}$, $K \leq n$, este clar că egalitatea are loc (ambii membri ai egalității sînt zero) iar dacă $A = \{n+1, \ldots\}$ avem

$$\int_{\{n+1,\cdots\}} X_n \, dP = \int_{\{n+1,\cdots\}} (n+1) \chi_{\{n+1,\ldots\}} dP = (n+1)P(\{\tfrac{1}{n+1}, \ldots\}) =$$

$= (n+1) \frac{1}{n+1} = 1$ iar $\int_{\{n+1,\cdots\}} X_{n+1} \, dP = (n+2) \, P(\{n+2, \ldots\}) =$

$= (n+2) \frac{1}{n+2} = 1.$

Apoi $M(X_n) = (n+1) \, P(\{n+1, \ldots\}) = 1$ iar $\sup_n X_n(\omega) = \omega$ are integrala $\sum_{n=1}^{\infty} nP(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$

CAPITOLUL II

LANTURI MARKOV

1. DEFINITII SI REZULTATE DE BAZA

Fie $(E,\mathcal{K},P)$ un cîmp de probabilitate, I o mulțime cel mult numărabilă și pentru orice $n=0,1,2,\dots$ fie $X_n : (E,\mathcal{K}) \longrightarrow (I,\mathcal{P}(I))$ o aplicație măsurabilă .

DEFINITIA 1. Vom spune că șirul (X_n) este lanț Markov cu spațiul stărilor I dacă pentru orice n și $i,\dots,i_{n+1} \in I$ are loc egalitatea:

$$(1.1)\quad P(X_{n+1} = i_{n+1} / X_n=i_n,\dots,X_0=i_0)=P(X_{n+1}=i_{n+1}/X_n=i_n)$$

de îndată ce $P(X_n=i_n,\dots,X_0=i_0)>0$.

Egalitatea (1.1) este cunoscută în literatură sub numele de <u>proprietatea Markov</u>.

Sistemul de numere $p_i=P(X_0=i), i\in I$, se numește <u>repartiția inițială</u> a lanțului Markov.

Evident $p_i \geqslant 0$ pentru orice i și $\sum\limits_{i\in I} p_i = 1$.

T2. <u>Teoremă</u>. Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) (X_n) este lanț Markov.

2) $P(X_0=i_0,\dots,X_n=i_n)=p_{i_0}P(X_1=i_1/X_0=i_0)\dots P(X_n=i_n/X_{n-1}=$
$=i_{n-1})$ pentru orice n şi $i_0,\dots,i_n\in I$, de îndată ce
$P(X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1})>0$.

3) $P(X_{n+m}=i_{n+m},\dots,X_{n+1}=i_{n+1}/X_n=i_n,\dots,X_0=i_0)=$

$=P(X_{n+m}=i_{n+m},\dots,X_{n+1}=i_{n+1}/X_n=i_n)$ pentru orice n, m
şi $i_0,\dots,i_{n+m}\in I$, de îndată ce $P(X_n=i_n,\dots,X_0=i_0)>0$.

4) $P(A|X_n=i,B)=P(A|X_n=i)$ pentru orice $n,i;A\in\mathcal{B}(X_m|\,m\geqslant n)$,
$B\in\mathcal{B}(X_m\,|\,m\leqslant n)$, de îndată ce $P(X_n=i)>0$.

5) $P(A\cap B/X_n=i)=P(A/X_n=i)P(B/X_n=i)$ pentru orice n,i,
A,B ca în punctul precedent (această egalitate ne spune că dat fiind prezentul atunci viitorul şi trecutul sînt independente).

6) $P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}/X_{t_n}=i_n,\dots,X_{t_0}=i_0)=P(X_{t_{n+1}}=i_{n+1}/X_{t_n}=i_n)$
pentru orice n, i_j şi $0\leq t_0<t_1<\dots<t_{n+1}$

O matrice $P=(p_{i,j})_{i,j\in I}$ este <u>stocastică</u> dacă $p_{i,j}\geqslant 0$
şi $\sum\limits_j p_{i,j}=1$ pentru orice i,j.

Pentru orice $m\geqslant 0$ fie $P(m)=(p(m,i,m+1,j))_{i,j\in I}$ o matrice stocastică ale cărei elemente le vom numi <u>probabilităţi de trecere într-un pas</u> (interpretare justificată de P_4 care urmează).

DEFINITIA 3. Lanţul Markov (X_n) vom spune că este asociat matricilor de trecere $P(m)$, $m \geqslant 0$, dacă $P(X_{m+1}=j/X_m=i)=$ $= p(m,i,m+1,j)$ pentru orice m,i,j ori de cîte ori $P(X_m=i)>0$.

Avînd în vedere T2 rezultă că şirul (X_n) este lanţ Markov cu matricile de trecere $P(m)$ dacă şi numai dacă

$$P(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n)=P(X_0=i_0)p(0,i_0,1,i_1)p(1,i_1,2,i_2)\ldots$$
$$\ldots p(n-1,i_{n-1},n,i_n) \text{ pentru orice } n, i_j.$$

Pentru $m,n \geqslant 0$ definim matricile $P(m,m+n)$ prin:

$$P(m,m+n) = \begin{cases} I & \text{dacă } n = 0 \\ P(m) & \text{dacă } n = 1 \\ P(m)\ldots P(m+n-1) & \text{dacă } n>1,\ m \geqslant 0. \end{cases}$$

P4 <u>Propozitie</u>. Fie (X_n) un lanţ Markov cu matricile de trecere $P(m)$. Atunci:

a) Pentru orice $m,n \geqslant 0$ cu $P(X_m=i)>0$ are loc egalitatea:

$$P(X_{m+n} = j / X_m = i) = p(m,i,m+n,j)$$

(cu alte cuvinte elementele matricii $P(m,m+n)$ permit calcularea probabilităţilor de trecere în n paşi).

b) Pentru orice $m < \ell < n$ are loc egalitatea matricială (cunoscută sub numele de <u>relaţia Chapman-Kolmogorov</u>):

$$P(m,m+n) = P(m,m+\ell\ )\ P(m+\ell\ ,m+n)$$

sau echivalent

$$p(m,i,m+n,j) = \sum_{k\in I} p(m,i,m+\ell\ ,k)p(m+\ell\ ,k,m+n,j)$$

$i,j\in I$.

DEFINITIA 5. Lanţul Markov (X_n) este omogen dacă $P(X_{n+1}=j/X_n=i)$ nu depinde de n, ci numai de i,j.

In cazul cînd lanţul Markov (X_n) are matricile de trecere $P(m)$ atunci vom spune că este omogen dacă $P(m) = P$ pentru orice m unde P este o matrice stocastică, sau echivalent dacă:

$$P(X_{n+1} = j/X_n=i,\ldots,X_o=i_o) = P(X_{n+1}=j/X_n=i) = p(i,j)$$

pentru orice n,i,j,i_k, de îndată ce $P(X_n=i,\ldots,X_o=i_o)>0$.

6 OBSERVATIE i_1) Şirul (X_n) este lanţ Markov omogen cu matricea de trecere $P=(p(i,j))$ dacă şi numai dacă:

(6.1) $P(X_o=i_o,\ldots,X_n=i_n) = P(X_o=i_o)p(i_o,i_1)\ldots p(i_{n-1},i_n)$

pentru orice n,i_k.

i_2) Fie (X_n) un lanţ Markov omogen cu matricea de trecere $P=(p(i,j))$ şi fie $P^n=(p(n,i,j))$.

Dacă $P(X_m=i)>0$ atunci $P(X_{m+n}=j/\ X_m=i)=p(n,i,j)$, cu alte cuvinte probabilitățile de trecere în n pași sînt date de elementele matricii P^n.

i_3) Are loc următoarea egalitate (care reprezintă relația Chapman-Kolmogorev în cazul omogen): $P^{m+n}=P^m \cdot P^n$ sau echivalent

$$p(m+n,i,j) = \sum_{k\in I} p(m,i,k)p(n,k,j), \quad i,j \in I$$

T7. <u>Teoremă (existența lanțurilor Markov)</u>. Fie I o mulțime cel mult numărabilă, $(p_i)_{i\in I}$ o familie de numere reale astfel încît $p_i \geqslant 0$ și $\sum_i p_i=1$ și fie $P(m) = (p(m,i,m+1,j))_{i,j}$, $n = 0,1,\ldots$, un șir de matrici stocastice pe I x I.

Atunci există un cîmp de probabilitate $(E,\mathcal{K},P)$ și pe el un lanț Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ cu mulțimea stărilor I, cu repartiția inițială (p_i) și care corespunde matricilor $P(m)$.

8. <u>PROPRIETATEA TARE MARKOV</u> Fie $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un lanț Markov cu spațiul stărilor I și cu matricile de trecere $P(m)$ și fie $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(X_0,\ldots,X_n)$.

Dacă T este $\mathcal{K}_n$ - opțională atunci este posibil ca $T(\omega)$ să ia valoarea $+\infty$ pentru anumiți ω și în acest caz $X_{T(\omega)}(\omega)$ nu este definit.

Introducem următoarea <u>convenție</u> care ne va permite să simplificăm o serie de afirmații în care apare situația descrisă mai sus.

Fie δ un punct ce nu este în I; în acest caz punem prin definiţie $X_{\infty}(\omega) = \delta$ pentru orice ω ; de asemenea dacă $f : I \longrightarrow R$ este o aplicaţie atunci extindem f pe $I \cup \{\delta\}$ punînd prin definiţie $f(\delta) = 0$. In acest fel dacă $T(\omega) = \infty$ atunci $f(X_{T(\omega)}(\omega)) = f(\delta) = 0$

T8.1 <u>Teoremă</u>. Fie T o $\mathcal{K}_n$-opţională, $A \in \mathcal{K}_T$ şi $B \in \mathcal{B}(X_{T+n} | n \geq 0)$ (A se zice anterior lui T iar B este posterior lui T).

Atunci are loc următoarea egalitate cunoscută sub numele de <u>proprietatea tare Markov</u>:

$$P(B / X_T = i, A) = P(B / X_T = i)$$

de îndată ce $P(A, X_T = i) > 0$.

In particular dacă $B = \{X_{T+n} = j\}$ şi T este finită obţinem:

$$P(X_{T+n} = j / X_T = i, A) = P(X_{T+n} = j / X_T = i) = M[p(T, i, T+n, j) / X_T = i, A]$$

8.2. <u>Corolar</u>. Fie (X_n) un lanţ Markov omogen cu matricea de trecere $P = (p(i,j))$ şi fie T o $\mathcal{K}_n$-opţională finită. Dacă $A \in \mathcal{K}_T$ atunci $P(X_{T+n} = j / X_T = i, A) = P(X_{T+n} = j / X_T = i) = p(n, i, j)$
In particular rezultă că $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ este lanţ Markov omogen cu matricea de trecere P.

9 <u>CLASIFICAREA STARILOR</u>. Fie (X_n) un lanţ Markov omogen cu spaţiul stărilor I şi cu matricea de trecere P.
Pentru simplificarea scrierii vom utiliza notaţia $P_i(A)$

pentru $P(A/X_0=i)$ şi $M_i(Y)$ pentru $M[Y/X_0=i]$.

Fie $T_1^j = \min\{n \geq 1;\ X_n=j\}$, $T_1^j = \infty$ dacă $\{\ \}$ este vidă.

Definim : $f(k,i,j) \overset{def}{=} P_i(T_1^j=k)$, $f(i,j) \overset{def}{=} P_i(T_1^j < \infty) =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} f(k,i,j) = P_i\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n=j\}\right),\ i,j \in I,\ k = 1,2,\ldots$$

Cu alte cuvinte $f(k,i,j)$ este probabilitatea ca plecînd din i, lanţul Markov X_n să fie în j pentru prima dată după k paşi, iar $f(i,j)$ este probabilitatea ca plecînd din i lanţul Markov X_n să fie în j după un număr finit de paşi

<u>DEFINITIE</u>. O stare $i \in I$ este recurentă dacă $f(i,i) = 1$ şi nerecurentă sau tranzientă dacă $f(i,i) < 1$.

Fie $N_j = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_j(X_n)$, cu alte cuvinte N_j reprezintă numărul de vizite în j.

P9.1 <u>Propozitie</u>. Au loc egalităţile:

$$P_j(N_j = k) = f(j,j)^{k-1}[1-f(j,j)]\ ,\ k = 1,2,\ldots$$

şi pentru $i \neq j$:

$$P_i(N_j=k) = \begin{cases} 1 - f(i,j) & k=0 \\ f(i,j)f(j,j)^{k-1}[1-f(j,j)] & k = 1,2,\ldots \end{cases}$$

9.2 <u>Corolar</u>

$$P_i(N_j<\infty) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad f(j,j)< 1 \\ 0 & \text{dacă} \quad f(j,j) =1 \end{cases}$$

<u>DEFINITIE</u>. Matricea R cu elementele $r(i,j)=M_i(N_j)$ se numeste matricea potențial a lui X_n

L9.3. <u>Lemă</u>. Au loc egalitățile:

$$r(j,j) = \frac{1}{1-f(j,j)} \quad \text{și} \quad r(i,j) = f(i,j)r(j,j) \text{ dacă } i \neq j.$$

Are loc următorul criteriu de recurență:

T9.4. <u>Teoremă</u>. Următoarele afirmații sînt echivalente:

a_1) j este recurentă (j este tranzientă)

a_2) $r(j,j)=\infty$ $\qquad (r(j,j)<\infty)$

a_3) $P_j(N_j=\infty)=1$ $\qquad (P_j(N_j<\infty)=1)$

T9.5 <u>Teorema primei intrări</u>. Oricare ar fi stările i, j și numărul natural n avem:

$$p(n,i,j) = \sum_{m=1}^{n} f(m,i,j)p(n-m,j,j)$$

9.6 <u>CRITERIU</u>. Starea i este recurentă sau tranzientă după cum seria $g(i,i) = \sum_{n=1} p(n,i,i)$ este convergentă sau divergentă.

In cazul tranzient avem $g(i,i) = \dfrac{1}{1-f(i,i)}$

9.7 <u>Corolar</u>. Oricare ar fi starea i, dacă j este tranzientă, atunci seria $\sum_{n=1} p(n,i,j)$ este convergentă, deci

$\lim p(n,i,j) = 0$.

9.8 <u>Corolar</u>. Un lanţ Markov cu mulţimea stărilor finită nu poate avea toate stările tranziente.

10. <u>RELAŢIA DE COMUNICARE</u>. Vom spune că starea j este accesibilă din starea i şi vom scrie $i \rightarrow j$ dacă există $n \geqslant 0$ astfel încît $p(n,i,j) > 0$. Relaţia " $\rightarrow$ " este reflexivă şi tranzitivă.

Vom spune că stările i şi j comunică şi vom scrie $i \leftrightarrow j$ dacă $i \rightarrow j$, $j \rightarrow i$.

Relaţia " $\leftrightarrow$ " este reflexivă, simetrică şi tranzitivă aşa că ea împarte mulţimea stărilor în clase de echivalenţă.

<u>DEFINIŢIE</u>. a) O submulţime $C \subset I$ vom spune că este închisă dacă nici o stare din afara lui C nu este accesibilă din nici o stare din C sau echivalent dacă $\sum_{j \in C} p(i,j)=1$ pentru orice $i \in C$ sau cu alte cuvinte dacă matricea $(p(i,j))_{i,j \in C}$ este stocastică.

b) O stare i este absorbantă dacă $\{i\}$ este închisă sau echivalent dacă $p(i,i) = 1$.

c) O mulţime închisă C este ireductibilă dacă nici o submulţime a lui C nu este închisă.

d) Lanţul Markov (X_n) este ireductibilul dacă I este ireductibilă sau echivalent dacă oricare ar fi două stări din I ele comunică.

DEFINITIE. O proprietate a stărilor unui lanț Markov este proprietate de clasă dacă de îndată ce o stare are această proprietate, acest lucru rămîne adevărat pentru toate stările din clasa care conține această stare.

T1o.1 Teoremă. Recurența și tranziența sînt proprietăți de clasă.

T1o.2 Teoremă. Fie i o stare recurentă astfel încît $i \longrightarrow j$. Atunci $j \longrightarrow i$ și $f(i,j)=f(j,i) = 1$. In particular rezultă că j este recurentă.

T1o.3 Teoremă. Intr-un lanț Markov omogen X stările recurente pot fi partiționate într-o manieră unică în mulțimile închise și ireductibile $C_1, C_2, \ldots$

Matricea de trecere P a lanțului are forma următoare (după o eventuală renumerotare a stărilor)

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \ldots\ldots\ldots & Q \end{bmatrix}$$

unde $P_1, P_2, \ldots$ sînt matricile stocastice corespunzătoare mulțimilor de stări $C_1, C_2, \ldots$, iar Q corespunde stărilor tranziente.

11. PERIODICITATE. Pentru o stare i pentru care $p(n,i,i) > 0$ pentru un $n \geq 1$ definim perioada d(i) ca fiind egală

cu cel mai mare divizor comun al numerelor $m \geq 1$ pentru care $p(m,i,i) > 0$.

Dacă $d(i) > 1$ vom spune că i este periodică şi dacă $d(i)=1$ vom spune că i este neperiodică.

T11.1 <u>Teoremă</u>. Proprietatea de a avea o perioadă d este o proprietate de clasă.

Deci într-o clasă toate stările au aceeaşi perioadă d şi d se numeşte perioada clasei.

In particular dacă clasa este mulţimea stărilor, d se numeşte perioada lanţului.

Un lanţ Markov ireductibil se spune că este periodic dacă $d > 1$ şi neperiodic dacă $d = 1$.

12. CALCULUL MATRICILOR $\mathcal{R}=(r(i,j))_{i,j\in I}$, $F=(f(i,j))_{i,j\in I}$

Dacă j este o stare recurentă atunci

$$r(i,j) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } f(i,j) = 0 \\ +\infty \text{ dacă } f(i,j) > 0 \end{cases}$$

Dacă j este tranzientă şi i recurentă atunci $r(i,j)= 0$

Rămîne cazul cînd i,j sînt tranziente. Fie D mulţimea stărilor tranziente, Q şi S matricile obţinute din P şi R prin reţinerea liniilor şi coloanelor corespunzînd stărilor tranziente, adică $q(i,j)=p(i,j)$, $S(i,j)=r(i,j)$, $i,j\in D$.

P12.1. <u>Propoziţie</u>. Dacă D este finită atunci $S=(I-Q)^{-1}$

In general avem următorul rezultat.

T12.2 <u>Teoremă</u>. S este soluția minimală a sistemului:

$$(I - Q)\, Y = I, \quad Y \geqslant 0$$

Mai departe dacă i,j sînt recurente și aparțin aceleiași clase închise și ireductibile atunci $f(i,j) = 1$

Dacă i este recurentă și j tranzientă sau dacă i,j sînt recurente dar aparțin la clase ireductibile disjuncte atunci $f(i,j) = 0$.

Dacă i,j sînt tranziente, $i \neq j$, atunci

$$f(j,j) = 1 - \frac{1}{r(j,j)}\ , \quad f(i,j) = \frac{r(i,j)}{r(j,j)}$$

Rămîne cazul cînd i este tranzientă și j recurentă. In acest caz calculele sînt simplificate de următoarea lemă.

L12.3 <u>Lemă</u>. Fie C o mulțime ireductibilă și închisă de stări recurente. Atunci pentru orice stare tranzientă i avem $f(i,j) = f(i,k)$ pentru orice $j,k \in C$.

P12.4. <u>Propozitie</u>. Fie C_j o clasă recurentă și $B=(b(i,j))_{i\in D}$ definit prin $b(i,j) = \sum\limits_{k\in C_j} p(i,k)$.

Atunci pentru orice stare tranzientă i avem $g(i,j) =$ $= f(i,k)$ unde $G = SB$.

13. <u>TEOREME LIMITA</u>.

T13.1.(<u>Teorema ergodică medie</u>) Limita Cesaro $\lim \frac{1}{n} \sum\limits_{n=1}^{n} p(m,i,j) = \pi(i,j)$ există pentru orice i,j.

Matricea $\Pi = (\Pi(i,j))_{i,j\in I}$ satisface următoarele:

$\Pi P = P\Pi = \Pi = \Pi^2$ și $\sum_{j\in I} \Pi(i,j) \leq 1$ pentru orice i.

T13.2. <u>Teoremă</u>. a) Dacă j este tranzientă atunci

$\lim_{n\to\infty} p(n,i,j) = 0$

b) Dacă j este recurentă și are perioada d(j) atunci

$$\lim_{n\to\infty} p(nd(j),j,j) = \frac{d(j)}{m(j)} \quad \text{unde } m(j) = M_j(T_1^j) = \sum_{n=1}^{\infty} nf(n,j,j)$$

T.13.3(<u>Teorema ergodică</u>) Oricare ar fi stările i,j avem:

$$\lim_{n\to\infty} p(nd(j)+r,i,j) = \frac{f_r(i,j)d(j)}{m(j)}, \quad 1 \leq r \leq d(j)$$

unde $f_r(i,j) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nd(j)+r,i,j))$.

Vom spune că o stare recurentă i este nulă dacă $M_i(T_1^i) = \infty$ și nenulă dacă $M_i(T_1^i) < \infty$.

Teorema următoare împreună cu T arată structura unui lanț Markov.

T.13.4. <u>Teoremă</u>. Fie (X_n) un lanț Markov ireductibil. Atunci sau toate stările sînt tranziente sau toate sînt recurente (în acest din urmă caz sau toate stările sînt recurente nule sau toate sînt recurente nenule). De asemenea sau toate stările sînt neperiodice sau toate au perioada $d > 1$.

14. <u>CRITERII DE RECURENTA</u>. Are loc următorul criteriu de recurență:

14.1. <u>Criteriu</u>. Fie (X_n) un lanț Markov ireductibil cu stările I și cu matricea de trecere $P=(p(i,j))$ și fie $Q=(q(i,j))$ matricea obținută din P prin înlăturarea liniei k și coloanei k pentru un $k \in I$.

Atunci toate stările din I sînt recurente dacă și numai dacă unica soluție a sistemului:

$$x_i = \sum_{j \in I_0} q(i,j)x_j, \quad 0 \leq x_i \leq 1, i \in I_0$$

este $x_i = 0$ pentru orice $i \in I_0 \overset{def}{=} I \setminus \{k\}$

O repartiție $\pi = (\pi(i))_{i \in I}$ este <u>staționară (sau invariantă)</u> în raport cu P dacă $\pi P = \pi$

T.14.2. <u>Teoremă</u>. Fie (X_n) un lanț Markov ireductibil și neperiodic, cu stările I și matricea de trecere $P=(p(i,j))$ Atunci există o repartiție staționară în raportul cu P dacă și numai dacă toate stările sînt recurente nenule. Dacă există o repartiție staționară $\pi=(\pi(i))_{i \in I}$ atunci $\pi(i) > 0$ pentru orice i, π este unica repartiție staționară și $\pi(j) = \lim_{n \to \infty} p(n,i,j)$ pentru orice i,j.

14.3. <u>Corolar</u>. Dacă (X_n) este un lanț Markov ireductibil, neperiodic și cu mulțimea stărilor finită atunci sistemul: $\pi P=\pi$, $\pi 1 = 1$, $\pi \geq 0$ are o unică soluție.

P14.4. <u>Propoziție</u>. Intr-un lanț Markov ireductibil și cu mulțimea finită de stări toate stările sînt recurente nenule.

15. <u>LANTURI MARKOV IN TEORIA ASTEPTARII</u>. In acest paragraf vom considera următorul model de sistem de așteptare.

a) Clienții sosesc individual și numărul lor (în șirul de așteptare) poate fi infinit.

b) Intervalele dintre sosiri sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate și cu repartiția F.

c) Există un singur server

d) Regula de servire: primul venit_primul servit.

e) Clienții sînt serviți individual iar timpii de servire sînt variabile aleatoare independente, identic repartizate cu repartiția G și sînt independenți de veniri.

f) Se presupune că serverul este ocupat de îndată ce există un client.

Fie deci $\tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ variabile aleatoare independente, identic repartizate, nenegative, cu repartiția F, ce reprezintă intervalele de timp între sosiri.

Fie $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ variabile aleatoare independente identic repartizate, nenegative, cu repartiția G, ce reprezintă timpii de servire.

<u>Sistemul de asteptare M|G|1</u>. Acest sistem este definit ca mai sus cu F repartiția exponențială cu parametrul λ.

Fie (X_n) numărul de clienţi în sistem imediat după plecarea clientului n.

T15.1. <u>Teoremă</u>. a) (X_n) este lanţ Markov omogen cu stările $\{0,1,\ldots\}$ şi cu matricea de trecere:

$$P = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots\cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & \cdots\cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

unde $q_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} dG(t)$, $k = 0,1\ldots$

In plus (X_n) este ireductibil şi neperiodic.

b) Fie $r = M(N_{\alpha_1}) = \lambda M(\alpha_1)$. Atunci (X_n) este recurent nenul dacă şi numai dacă $r < 1$.

Sistemul de aşteptare $G|M|1$. Acest sistem de aşteptare este dualul sistemului $M|G|1$ în sensul că se inversează rolurile timpilor între sosiri şi al timpilor de servire. Cu alte cuvinte în cadrul acestui sistem $\zeta_1,\ldots,\zeta_n,\ldots$ au repartiţia F (nu neapărat repartiţia exponenţială) iar $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\ldots$ au repartiţia exponenţială cu parametrul μ.

Fie (X'_n) numărul de clienţi prezenţi în staţie (în care se include şi cel care este servit) imediat înainte de a n-a venire.

T15.2. <u>Teoremă</u>. a) (X'_n) este lanț Markov omogen cu stările $\{0,1,\dots\}$ și cu matricea de trecere:

$$P' = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ r_1 & q_1 & q_0 & 0 & 0 & \dots \\ r_2 & q_2 & q_1 & q_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

unde $q_n = \int_0^\infty \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} dF(t)$; $r_n = q_{n+1} + q_{n+2} + \dots$

In plus (X'_n) este ireductibil și neperiodic.

b) (X'_n) este recurent nenul dacă și numai dacă $r \overset{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n_{q_n} > 1$. Dacă $r > 1$ atunci $\lim P(X'_n = j \mid X'_0 = i) = (1-\beta)\beta^j$, $j = 0,1,2,\dots$, unde β este unica soluție a ecuației: $\beta = q_0 + q_1\beta + q_2\beta^2 + \dots$, $0 < \beta < 1$.

Dacă $r \leq 1$ atunci $\lim P(X'_n = j \mid X'_0 = i) = 0$ pentru orice i, j.

16. <u>METODA ALGEBRICA IN STUDIUL LANTURILOR MARKOV</u>.

Prin asocierea de matrici de trecere lanțurilor Markov este vizibil că se impune și metoda matricială ca posibilitate de studiu a lanțurilor Markov.

Avantajul acestei metode constă în faptul că dă posibilitatea construirii de algoritmi pentru calculul unor mărimi ce sînt în conexiune cu probabilitățile de trecere.

Fie $P = (p(i,j))_{1\leq i,j\leq r}$ o matrice stocastică ce reprezintă matricea de trecere asociată unui lanț Markov omogen (X_n) cu stările $\{1,\dots,r\}$.

P16.1. Propoziție. Matricea P are ca valoare proprie valoarea $\lambda_1 = 1$ și orice valoare proprie λ a lui P satisface $|\lambda| \leq 1$.

Să presupunem că P are valorile proprii distincte $\lambda_1 = 1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$.

Pentru orice $1\leq i\leq r$ fie un vector propriu la dreapta $a_i = (a(j,i))_{1\leq j\leq r}$ și un vector propriu la stînga $b_i = b(i,j))_{1\leq j\leq r}$ asociați valorii proprii λ_i.

Fie $A = (a(i,j))_{i,j}$, $B = (b(i,j))_{i,j}$.

Normăm vectori a_i, b_i astfel încît $\langle a_i, b_i\rangle = 1$,

P61.3 Propoziție. Are loc egalitate $P^n = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^n \Lambda_i$

unde $\Lambda_i = a_i b_i$.

61.3. Observație. Dacă valorile proprii ale matricii P sînt $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ cu multiplicitățile $r_1, \dots r_m, r_1+\dots+r_m = r$ atunci conform formulei lui Perron are loc egalitatea:

$$P^n = \sum_{h=1}^{m} \frac{1}{(r_h-1)!} \left[\frac{d^{r_h-1}}{d\lambda^{r_h-1}} \left\{ \frac{\lambda^n \operatorname{adj}(\lambda I - P)}{\psi_i(\lambda)} \right\} \right]_{\lambda=\lambda_h}$$

unde $\psi_i(\lambda) = \prod_{h \neq i} (\lambda - \lambda_h)^{r_h}$

T16.4. Teoremă. Multiplicitatea geometrică a valorii proprii $\lambda_1 = 1$ (adică dimensiunea spaţiului vectorial al vectorilor proprii asociaţi lui $\lambda_1 = 1$) coincide cu multiplicitatea algebrică a lui $\lambda_1 = 1$ şi de asemenea coincide cu numărul de clase recurente ale lanţului Markov (X_n).

T61.5. Teoremă. Dacă (X_n) este ireductibil şi are perioada d atunci rădăcinile de ordin d ale unităţii sînt valori proprii pentru P cu multiplicitatea algebrică unu şi în plus P nu mai are alte valori proprii de modul unu.

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie $A=(a_{ij})$, o matrice patratică complexă de ordinul n. Un număr complex λ se numeşte valoare proprie a matricei A dacă există un vector complex (numit vector propriu), $v=(v_1, v_2, \ldots v_n) \neq (0,0,\ldots,0)$ astfel încît $v.A = \lambda.v$.

Se observă că valorile proprii ale matricei A sînt soluțiile ecuației (numită ecuația caracteristică) $\det(\lambda I - A) = 0$, unde I este matricea unitate de ordinul n.

Să se arate că valorile proprii ale unei matrici stochastice $P=(p_{ij})$ de ordinul n sînt în valoare absolută cel mult egale cu 1.

Soluție: Fie λ o valoare proprie a matricii stocastice $P=(p_{ij})$ și $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ un vector propriu asociat lui λ. Atunci

$$\lambda v_j = \sum_{i=1}^{n} v_i p_{ij} \quad , \qquad j = 1,2,\dots,$$

de unde
$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda v_j| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} v_i p_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |v_i| p_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |v_i| \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

deci $|\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{n} |v_j| \leq \sum_{i=1}^{n} v_i$ și de aici evident $|\lambda| \leq 1$.

Obs. Vectorul $e = (1,1,\dots,1)$ satisface relația $e.P=e$ deci $\lambda = 1$ este valoare proprie.

2. Fie $P=(p_{ij})$, $i,j = o,1,2$ o matrice stocastică

şi $\mu(P) = \max\limits_{i_1,i_2,j} |p_{i_1 j} - p_{i_2 j}|$. Să se arate că $\mu(P)=1$

dacă şi numai dacă P este de forma

$$\begin{bmatrix} 1 & o & o \\ o & p & q \\ v & s & t \end{bmatrix} \quad , \; p+q=1, \; v+s+t=1$$

(sau se obţine dintr-o astfel de matrice prin permutarea unor linii sau a unor coloane)

__Soluţie:__ Dacă $\mu(P) = 1$, P stocastică există un triplet i_1, i_2, j astfel încît $|p_{i_1 j} - p_{i_2 j}| = 1$. Să alegem de exemplu $i_1 = 0$, $j = o$, $i_2 = 1$ deci $|p_{oo} - p_{1o}| = 1$ de unde rezultă că $p_{oo} = 1$ şi $p_{1o} = 1$ (sau invers)

Dacă $p_{oo} = 1$ atunci $p_{o1} = p_{o2} = 0$

şi dacă $p_{1o} = 1$ atunci $p_{11} + p_{12} = 1$

deci P are forma din enunţ.

Reciproc dacă $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ r & s & t \end{bmatrix}$ $p+q = 1$, $v+s+t = 1$

$$\max_{i_1,i_2,j} |p_{i_1 j} - p_{i_2 j}| = |p_{oo} - p_{1o}| = 1$$

3. Fie P o matrice stocastică de ordinul p şi

$$\Pi = \lim \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^m \text{ (limita Cesaro).}$$

Să se arate că:

a) Matrice $I-P+\Pi$ este nedegenerată şi pentru $\beta \nearrow 1$

$$H(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m (P^m - \Pi) \to H = (I-P+\Pi)^{-1} - \Pi$$

b) $H(\beta)\Pi = \Pi H(\beta) = H.\Pi = \Pi \cdot H = 0$

$(I-P)H = H(I-P) = I - \Pi$

c) Rang $(I-P)$ + Rang $\Pi = p$

<u>Soluţie</u>: a) Deoarece $P\Pi = \Pi P = \Pi^2 = \Pi$ prin inducţie se obţine pt. $m \geq 1$

$$P^m - \Pi = (P - \Pi)^m$$

Pentru $0 \leq \beta < 1$

$$H(\beta) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m (P-\Pi)^m = \left[I - \beta(P-\Pi)\right]^{-1} - \Pi \text{ sau}$$

$$\left[H(\beta) + \Pi\right]\left[I - \beta(P-\Pi)\right] = I \text{ şi deci}$$

$$\left[H(\beta) + \Pi\right](I-P+\Pi) = I - (1-\beta)H(\beta)(P-\Pi) \qquad (1)$$

Se ştie însă că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{m=1}^{n} P^n = \Pi$ (limita Cesaro) implică

$$\lim_{\beta \nearrow 1} (1-\beta) \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m P^m = \Pi \quad \text{(limita Abel)}$$

De aici obţinem

$$(1-\beta)\sum_{m=0}^{\infty}\beta^{m}(P^{m}-\Pi) = (1-\beta)H(\beta) \to 0 \quad \text{pt.}\ \beta \nearrow 1.$$

şi deci din (i) rezultă că $I-P+\Pi$ este nedegenerată.

Inmulţind tot, relaţia (i) cu $(I-P+\Pi)^{-1}$ şi făcînd $\beta \nearrow 1$ obţinem $H(\beta)+\widetilde{\Pi} \to (I-P+\Pi)^{-1}$

b) Să arătăm de exemplu că $H(\beta)\Pi = 0$

$$H(\beta)\Pi = \left[(I-\beta(P-\Pi))^{-1}-\widetilde{\Pi}\right]\Pi = \left[I-\beta(P-\Pi)\right]^{-1}\left[I - \right.$$
$$\left.-(I-\beta(P-\Pi))\widetilde{\Pi}\right]\Pi = \left[I-(P-\Pi)\right]^{-1}(\Pi-\widetilde{\Pi}+\beta\widetilde{\Pi}-\beta\Pi)=0$$

şi analog arătăm că

$$\Pi H(\beta) = H\Pi = \Pi H = 0$$

Avem mai departe:

$$(I-P)H = \left[(I-P+\Pi)-\Pi\right]H = (I-P+\Pi)H = (I-P+\Pi)\left[(I-P+\Pi)^{-1}-\widetilde{\Pi}\right]$$

$=I-\Pi$ şi analog obţinem $H(I-P)=I-\Pi$

c) Rezultă din inegalităţile

$$p-\text{Rang}(I-P+\Pi) \leq \text{Rang}(I-P)+\text{Rang}\,\Pi \leq p$$

4. Fie $P=(p_{ij})$ o matrice stocastică de ordinul n şi

$$\alpha(p) = \min_{1\leq i,j\leq m}\sum_{k=1}^{n}\min(p_{ik},p_{jk})$$

Să se arate că

$$\alpha(p) = 1-\frac{1}{2}\max_{1\le i,j\le m}\ \max_{I}\sum_{k\in I}(p_{ik}-p_{jk}),\quad I\subset\{1,2,\dots,n\}$$

Soluție: Deoarece $\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|)$

putem scrie $\alpha(p) = 1-\frac{1}{2}\max\limits_{1\le i,j\le m}\sum\limits_{k=1}^{n}|p_{ik}-p_{jk}|$

Notînd $a^+ = \max(a,0)$, $a^- = \min(a,0)$, $a\in R$

și ținînd cont că

$$\sum_{k=1}^{n}(p_{ik}-p_{jk}) = \sum_{k=1}^{n}p_{ik}-\sum_{k=1}^{n}p_{jk} = 0$$

avem

$$\sum_{k=1}^{n}(p_{ik}-p_{jk})^+ = -\sum_{k=1}^{n}(p_{ik}-p_{jk})^- = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|p_{ik}-p_{jk}|$$

De aici rezultă că

$$\max_{I}\sum_{k\in I}(p_{ik}-p_{jk}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|p_{ik}-p_{jk}|,\quad I\subset\{1,2,\dots,n\}$$

de unde formula din enunț.

5. Oricare ar fi matricele stocastice P_1, P_2 ... ... P_m de ordinul n, avem:

$$1-\alpha(P_1 P_2\dots P_m)\le[1-\alpha(P_1)]\,[1-\alpha(P_2)]\dots[1-\alpha(P_m)]$$

Pentru m = 2 inegalitatea devine egalitate.

Soluție: Vom demonstra prin inducție în raport cu m.

Fie deci $P=(p_{ij})$ și $Q=(q_{ij})$ două matrici stocastice de ordinul n.

Utilizînd rezultatele din problema [4] avem

$$1-\alpha(PQ)=\frac{1}{2}\max_{1\le i,j\le m}\max_{I}\sum_{k=1}\sum_{l=1}(p_{il}-p_{jl})q_{lk},$$

$I\subseteq\{1,2,..,n\}$ și

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in I}\sum_{l=1}^{m}(p_{il}-p_{jl})q_{lk}=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{m}(p_{il}-p_{jl})^{+}\sum_{k\in I}q_{lk}+\sum_{l=1}^{m}(p_{il}-p_{jl})^{-}\sum_{k\in I}q_{lk}\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=1}^{m}(p_{il}-p_{jl})^{+}\sum_{k\in I}q_{lk}+\sum_{l=1}^{m}[-(p_{il}-p_{jl})]\left[-\sum_{k\in I}q_{lk}\right]\le\right.$$

$$\frac{1}{4}\sum_{h=1}^{m}|p_{ih}-p_{jh}|\cdot\left(\max_{1\le l\le m}\sum_{k\in I}q_{lk}-\min_{1\le l\le m}\sum_{k\in I}q_{lk}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{h=1}^{m}|p_{ih}-p_{jh}|\cdot\max_{1\le l',l''\le m}\sum_{k\in I}(q_{l'k}-q_{l''k})$$

pentru orice $i,j=1,2,\dots n$, $I\subset\{1,2,\dots n\}$ deci

$$1-\alpha(PQ)\le[1-\alpha(P)][1-\alpha(Q)].$$

Presupunem inegalitatea adevărată pt. m. Avem succesiv

$$\alpha(P_1P_2\dots P_{m+1})\geqslant\alpha(P_1P_2\dots P_m)+\alpha(P_{m+1})-\alpha(P_{m+1}).$$

$\alpha(P_1P_2\dots P_m)$

$$1-\alpha(P_1P_2\dots P_{m+1}) \leq \left[1-\alpha(P_1P_2\dots P_m)\right]\left[1-\alpha(P_{m+1})\right] \leq$$

$$\left[1-\alpha(P_1)\right]\left[1-\alpha(P_2)\right]\dots\left[1-\alpha(P_{m+1})\right]$$

Dacă $P_i = \begin{bmatrix} 1-p_i & p_i \\ q_i & 1-q_i \end{bmatrix}$, $p_i, q_i \in [0,1]$, $\alpha(P_i) = 1-|1-p_i-q_i|$

şi rezultatul din enunţ se verifică prin calcul direct.

6. Fie (x_n), $n = 0,1,2,\dots$ un lanţ Markov omogen $I = \{0,1,2\}$ spaţiul stărilor, matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

şi repartiţia iniţială $p_0 = \frac{1}{2}$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 0$

a) Să se calculeze probabilităţile de trecere după doi paşi.

b) Să se calculeze:

$$P(x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2)$$

$$P(x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1)$$

c) Să se calculeze repartiţia lui x_2 (probabilităţile absolute după 2 paşi).

d) Fie τ prima intrare a procesului în starea 2

Să se calculeze $P(\tau = 2)$

Soluţie.

a) $$p^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{36} & \frac{7}{36} & \frac{16}{36} \\ \frac{19}{48} & \frac{7}{48} & \frac{22}{48} \\ \frac{5}{12} & \frac{2}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

b) $P(x_0=0,x_1=1,x_2=2)=P(x_0=0)\ P(x_1=1 | x_0=0)P(x_2=2 | x_1=1)$

$= p_0 p_{01} p_{12} = \frac{1}{12}$

$p(x_1=0,x_2=2,x_3=2) = p(x_0=0,x_1=0,x_2=2,x_3=2) +$

$p(x_0=1,x_1=0,x_2=2,x_3=2) + p(x_0=2,x_1=0,x_2=2,x_3=2)$

$= p_p p_{00} p_{02} p_{22} + p_1 p_{10} p_{02} p_{22} + p_2 p_{20} p_{02} p_{22} = \frac{7}{144}$

c) In general $p(x_2=j) = \sum_{i \in I} p(x_2=j, x_0=i) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^2$

deci $p(x_2=0) = p_0 p_{00}^2 + p_1 p_{10}^2 + p_2 p_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{36} + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{48}$ şi

analog $p(x_2=1)$, $p(x_2=2)$.

d) $\{\tau = 2\} = \{x_0 \neq 2, x_1 \neq 1, x_2 = 2\} = \{x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 2\} \cup$

$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\} \cup \{x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 2\} \cup \{x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 2\}$

de aici

şi deci se calculează uşor $p\{\tau = 2)$

7. Variabilele aleatoare (x_n) formează un lanţ Markov omogen cu două stări A_0 şi A_1. Fie $x_n = 0$ sau $x_n = 1$ după cum la pasul n sistemul este în starea A_0 sau A_1 şi $p(x_{n+1}=1 \mid x_n = 0) = \lambda$ iar $p(x_{n+1} = 0 \mid x_n=1)=\mu$

Să punem $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$. Atunci

$$\lim \left(\frac{y_n - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} n}{\sqrt{\frac{n\lambda\mu(2-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^3}}} < x \right) = \Phi\ (x)$$

(O generalizare a teoremei Moivre-Laplace)

Soluţie.

Fie τ_n pasul cînd sistemul revine pentru a n-oară în starea A_1.

Avem $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots \quad \tau_n < \dots$ şi $x_k = 0$ pt. $k<\tau_1$ sau $\tau_n < k < \tau_{n+1}$.

Construim în continuare şirul de variabile aleatoare (Z_n) unde $Z_1 = \tau_1$, $Z_n = \tau_n - \tau_{n-1}$, $n \geq 2$.

Cum (x_n) este lanţ Markov rezultă că v.a. Z_n este independentă de v.a. $Z_1, Z_2, \dots, Z_{n+1}$, iar din ipoteză de omogenitate deducem în plus că Z_n, $n \geq 2$ sînt egal repartizate.

Apoi $P(Z_n=1) = 1-\mu$ și $P(Z_n=k) = \mu k(1-\lambda)^{k-2}$, $k \geq 2$

Deci pt. $n \geq 2$

$$M(Z_n) = \frac{\lambda+\mu}{\mu} \quad \text{și} \quad D^2(Z_n) = \frac{\mu(2-\lambda-\mu)}{\lambda^2}$$

Dacă $x_0 = 1$, Z_1 are aceiași repartiție ca Z_n, $n \geq 2$ iar dacă $x_0 = 0$ avem $p(Z_1=1)=\lambda$, $p(Z_1=k)=(1-\lambda)^{k-1}\lambda$. Deci

$$M(Z_1) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{și} \quad D^2(Z_1) = \frac{1-\lambda}{\lambda^2}$$

Aplicînd o variantă adecvată a teoremei limite centrale obținem:

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\frac{\zeta_k - k\frac{\lambda+\mu}{\lambda}}{\frac{\sqrt{k\mu(2-\lambda-\mu)}}{\lambda}} < x \right) = \Phi(x)$$

Fie k partea întreagă a expresiei

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu} n + x\sqrt{\frac{n\lambda\mu(2-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^3}}$$

de unde obținem

$$n = \frac{k(\lambda+\mu)}{\lambda} - \frac{x\sqrt{k\mu(2-\lambda-\mu)}}{\lambda} + o(1)$$

Ţinînd cont şi de faptul că $P(y_n < k) = P(\tau_k > n)$ avem

$$P\left(\frac{y_n - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}n}{\sqrt{\frac{n\lambda\mu(2-\lambda-\mu)}{(\lambda+\mu)^3}}} < x\right) = P\left(\frac{\tau_k - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}k}{\sqrt{\frac{k\mu(2-\lambda-\mu)}{\lambda}}} > -x + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) \to$$

$1 - \Phi(-x) = \Phi(x)$ odată cu $k \to \infty$ (deci şi odată cu $n \to \infty$).

Obs.: Dacă $\lambda + \mu = 1$, v.a x_n sînt independente şi y_n are o distribuţie binormală de ordinul n. Cum în acest caz:

$$\frac{\lambda\mu(2-\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^3} = \lambda(1-\lambda)$$

obţinem chiar teorema Moivre-Laplace.

8. Fie $\{E, \mathcal{K}, P\}$ un cîmp de probabilitate, $I = \{0,1,2,\ldots\}$ şi $(x_n)_{n=0,1,2,\ldots}$, $x_n : E \to I$ un şir de v.a. independente, egal repartizate (există $p_i \geq 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$, astfel încît $p(x_n=i)=p_i$, pentru orice $n = 0,1,2,\ldots$)

a) Să se arate că (x_n) este un lanţ Markov omogen.

b) Dacă $y_n = \sum_{i=0}^{n} x_i$, $(y_n)_{n=0,1,2,\ldots}$ este de asemenea

un lanţ Markov omogen .

<u>Soluţie</u>. a) Se constată uşor că de îndată ce $P(x_n=i, x_{n-1}=i_{n-1},\ldots,x_o=i_o)>0$

$$P(x_{n+1}=j \mid x_n=i, x_{n-1}=i_{n-1},\ldots,x_o=i_o)=P(x_{n+1}=j\mid x_n=i) =$$

$$= p(x_{n+1}=j) = p_j$$

Şi matricea de trecere are forma

$$P = \begin{bmatrix} p_o & p_1 & p_2 & \cdots\cdots \\ p_o & p_1 & p_2 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

b) Dacă $P(y_n=i, y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,y_o=i_o) > 0$

$$P(y_{n+1}=j\mid y_n=i, y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,y_o=i_o)=P(y_{n+1}=j\mid y_n=i)=$$

$$= P(x_{n+1}=j-i) = \begin{cases} p_{j-i} & \text{dacă } j \geqslant i \\ 0 & \text{dacă } j < i \end{cases}$$

şi matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} p_o & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots\cdots \\ 0 & p_o & p_1 & p_2 & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & p_o & p_1 & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

9. (<u>Modelul lui Ehrenfest</u>). Se dau N bile numerotate de la 1 la N, repartizate în două urne (în prima bilă M bile iar în cea de a doua N-M) şi o cutie cu N jetoane numerotate tot de la 1 la N. Se extrage un jeton din cutie şi se schimbă urna bilei cu acelaşi număr (adică bila cu numărul corespunzător jetonului extras aflată într-o urnă se mută în cealaltă). Se repune jetonul în cutie şi se repetă aceiaşi operaţie. Fie x_n, numărul de bile aflat în prima urnă la pasul n.
(n = 1,2,....). Evident din ipoteză x_0 = M. Se consideră lanţul Markov omogen corespunzător acestei experienţe.

a) Să se scrie matricea de trecere.

b) Să se arate că $M(x_n) = \frac{N}{2} + (M - \frac{N}{2})(1 - \frac{2}{N})^n$

<u>Soluţie</u>:

a) Probabilităţile de trecere sînt:

$$p_{k,k+1} = 1 - \frac{k}{N} \quad \text{pentru } k = 0,1,\dots,N-1$$

$$p_{k,k-1} = \frac{k}{N} \quad \text{pentru } k = 1,2,\dots,N$$

$$p_{h,\ell} = 0 \quad \text{pentru } |h-\ell| \neq 1$$

deci matricea de trecere este de forma

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & 1-\frac{1}{N} & 0 & \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 & 1-\frac{2}{N} & \ldots\ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots 0 & \frac{1}{N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Pentru n = 1

$$M(x_1) = \sum_{k=0}^{N} kP(x_1=k) = \sum_{k=0}^{N} k \left(\sum_{j=0}^{N} p_j \cdot p_{jk} \right) = \sum_{k=0}^{N} k . p_{Mk} =$$

$$(M-1) \frac{M}{N} + (M+1)(1-\frac{M}{N}) = \frac{N}{2} + (M - \frac{N}{2}) (1 - \frac{2}{N})$$

Presupunem apoi că

$$M(x_n) = \sum_{j=0}^{N} j\ p(x_n=j) = \frac{N}{2} + (M - \frac{N}{2}) (1 - \frac{2}{N})^n$$

Să calculăm

$$M(x_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N} k\ p(x_{n+1}=k) = \sum_{k=0}^{N} k \left(\sum_{j=0}^{N} p(x_n=j)\ p_{jk} \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} p(x_n=j) \left(\sum_{k=0}^{N} k p_{jk} \right) = \sum_{j=0}^{N} p(x_n=j) \left[(j-1 \frac{j}{N} + (j+1)(1 - \frac{j}{N}) \right]$$

$$= \sum_{j=0}^{N} p(x_n=j)\left[j\left(1-\frac{2}{N}\right)+1\right] = \left(1-\frac{2}{N}\right)\left[\frac{N}{2}+\left(N-\frac{N}{2}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n\right]$$

$$= \frac{N}{2} + \left(N-\frac{N}{2}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n+1} .$$

10. Intr-un atelier există o maşină care este alternativ cuplată sau decuplată. La un moment dat există deci două situaţii opuse: starea A_1 cînd maşina lucrează; starea A_0 cînd maşina este oprită. Fie p_{jk} probabilitatea ca la pasul n+1 maşina să fie în starea A_k, ştiind că la pasul n era în starea A_j $(j,k = 0,1)$.
Să notăm $p_{01} = \lambda$, $p_{10} = \mu$ ($\lambda \in (0,1)$, $\mu \in (0,1)$). Se consideră lanţul Markov omogen corespunzător acestui experiment.

a) Să se calculeze probabilitatea de trecere în n paşi.

b) Să se arate că lanţul Markov este ergodic.

<u>Soluţie:</u>

a) Cum $p_{00}+p_{01}=1$, $p_{10}+p_{11}=1$ rezultă $p_{00}=1-\lambda$, $p_{11}=1-\mu$

Deci matricea de trecere este $P = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda \\ \mu & 1-\mu \end{bmatrix}$

Prin inducţie se găseşte :

$$P^{n} = \begin{bmatrix} 1-\lambda(1+\theta+\theta^{2}+\cdots+\theta^{n}) & \lambda(1+\theta+\theta^{2}+\cdots+\theta^{n} \\ \mu(1+\theta+\theta^{2}+\cdots+\theta^{n}) & 1-\mu(1+\theta+\theta^{2}+\cdots+\theta^{n}) \end{bmatrix}$$

unde $\theta = 1-\lambda-\mu$

b) Dacă notăm cu $p_n(0)$, $p_n(1)$, $n = 0,1,2,\ldots$ probabilitățile ca la pasul n, mașina să fie oprită, respectiv să lucreze se obține:

$$p_n(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \theta^{n}\left(p_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

$$p_n(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \theta^{n}\left(p_0(1) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$$

și cum $|\theta| < 1$

$$\lim p_n(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \text{și} \quad \lim p_n(1) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(independent de distribuția inițială $p_0(0)$, $p_0(1)$)

deci lanțul este ergodic.

Ergodicitatea r poate constata și direct. Tinînd cont de a) avem:

$$p_{11}^{n} = \frac{\mu+\lambda\theta^{n+1}}{\lambda+\mu} \to \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_{12}^{n} = \frac{\mu(1-\theta^{n+1})}{\lambda+\mu} \to \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_{12}^{n} = \frac{\lambda(1-\theta^{n+1})}{\lambda+\mu} \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$p_{22}^{n} = \frac{\lambda+\mu\theta^{n+1}}{\lambda+\mu} \to \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

11. Se cunoaşte formula lui Perron pentru calculul puterilor unei matrici pătrate A, de ordinul m, în funcţie de valorile sale proprii distincte $\lambda_1, \lambda_2 .. \lambda_q$, $q \leq m$, de multiplicităţi algebrice respectiv $m_1, m_2 .., m_q$ $m_1+m_2+....+m_q=m$, şi anume

$$A^n = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(m_i-1)!} \left[\frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}} \left\{ \frac{\lambda^n \operatorname{adj}(\lambda I - A)}{\prod_{j\neq i} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}} \right\} \right]_{\lambda=\lambda_i}$$

(O demonstraţie foarte simplă a acestei formule este dată în articolul lui Ion Cuculescu: "O demonstraţie simplă a unei formule a lui Perron", din An.Univ., seria Mat.Fiz., nr.25, 1960, pag.7-8). Folosind formula lui Perron să se calculeze P^n unde

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \quad p,q \in (0,1)$$

Soluţie:

$$\lambda I-P = \begin{bmatrix} \lambda -1+p & -p \\ -q & \lambda -1+q \end{bmatrix}$$

Din ecuaţia caracteristică $\det(\lambda I-P)=0$ care în acest caz are forma $\lambda^2-(2-p-q)\lambda+1-p-q=0$, găsim valorile proprii $\lambda_1=1$ şi $\lambda_2=1-p-q$ şi evident $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Avem mai departe:

$$(\lambda I - P_1) = \begin{bmatrix} \lambda-1+p & -q \\ -p & \lambda-1+q \end{bmatrix}$$

deci $\operatorname{adj}(\lambda I - P_1) = \begin{bmatrix} \lambda-1+q & p \\ q & \lambda-1+p \end{bmatrix}$

şi conform formulei lui Perron vom obţine:

$$P^n = \left[\frac{\lambda^n}{\lambda-\lambda_2}\operatorname{adj}(\lambda I - P)\right]_{\lambda=\lambda_1} + \left[\frac{\lambda^n}{\lambda-\lambda_1}\operatorname{adj}(\lambda I - P)\right]_{\lambda=\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$$

Acelaşi rezultat poate obţine şi folosind reprezentarea spectrală a matricei P.

omogen

12. Se dă lanţul Markov cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2\}$ şi cu matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calculînd probabilităţile de trecere după n paşi să se arate că lanţul este ireductibil.

b) Să se calculeze matricea Π .

<u>Soluţie:</u>

a) $$\lambda I-P = \begin{bmatrix} \lambda & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

şi din ecuaţia caracteristică $|\lambda I-P| = 0$ obţinem valorile proprii $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3= -1$.

Utilizînd formula lui Perron şi ţinînd cont că

$$\operatorname{adj}(\lambda I-P) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \frac{2}{5}\lambda & \frac{3}{5}\lambda \\ \lambda & \lambda^2-\frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ \lambda & \frac{2}{5} & \lambda^2-\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$ obţinem

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix} + (-1)^n \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

deci $$P^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$ şi $$P^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad q \geq 1$$

de unde rezultă şi că lanţul este ireductibil.

b) $$\Pi = \lim \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} P^{m} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

13. Dintr-o urnă în care se găsesc m bile numerotate de la 1 la m, se extrage pe rînd cîte o bilă, punîndu-se de fiecare dată bila extrasă înapoi. Vom spune că sistemul se găsește la un anumit pas în starea Q_j dacă cel mai mare dintre numerele extrase este j $(j = 1,2,\dots,m)$. Să se scrie matricea de trecere corespunzătoare lanțului Markov omogen atașat acestei experiențe și să se calculeze probabilitatea de trecere după n pași.

Soluție:

Trecerile din starea Q_1 (cel mai mare număr extras este 1) iar orice stare Q_j, $j \geq 1$ sînt egal probabile, deci $p_{1j} = \frac{1}{m}$, $j \geq 1$.

Cum trecerea din starea Q_2 în starea Q_1 este imposibilă $p_{21} = 0$. In starea Q_2 se poate rămîne în două moduri egal probabile, fie extrăgînd bila cu nr.1, fie extrăgînd bila cu nr.2, deci $p_{22} = \frac{2}{m}$. Evident că $p_{2j} = \frac{1}{m}$ $j > 2$. Continuînd acest raționament obținem $p_{ij} = 0$ pt. $i > j$,

$p_{ii} = \frac{i}{m}$ $p_{ij} = \frac{1}{m}$ pt. $i < j$ deci matricea de trecere are forma

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \cdots\cdots\cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & \frac{2}{m} & \frac{1}{m} & \cdots\cdots\cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{3}{m} & \cdots\cdots\cdots & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & \frac{m-1}{m} & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuaţia caracteristică este $|\lambda I - P| = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \frac{j}{m})$

şi dacă notăm cu q_{ij} elementele matricei adj $(\lambda I - P)$

$$q_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i > j \\ \dfrac{|\lambda I - P|}{\lambda - \frac{j}{m}} & \text{pentru } i = j \\ \dfrac{|\lambda I - P|}{m(\lambda - \frac{j}{m})(\lambda - \frac{j-1}{m})} & \text{pentru } i < j \end{cases}$$

şi utilizînd formula lui Perron obţinem

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } i > j \\ (\frac{j}{m})^n & \text{pentru } i = j \\ (\frac{j}{m})^n - (\frac{j-1}{m})^n & \text{pentru } i < j \end{cases}$$

14. Se consideră un lanţ Markov omogen cu spaţiul stărilor $I = \{1,2,\dots,2m\}$ şi matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & 0 \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 \dots & 0 & q & 0 \end{bmatrix}$$

(Mers la întîmplare pe o circomferinţă)

a) Să se calculeze probabilităţile de trecere după n paşi.

b) Să se arate că lanţul nu este ergodic.

<u>Soluţie</u>:

a) Utilizăm scrierea matricii P sub formă normală. Dacă matricea are valori proprii simple λ_k, $k \in I$, există H ireversibilă astfel încît $PH = HJ$ unde $J=(\delta_{jk}\lambda_k)$, $j,k \in I$, $\delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } j \neq k \\ 1 & \text{pentru } j = k \end{cases}$ şi $P^n = HJ^nH^{-1}$ unde

$J^n = (\delta_{jk}\lambda_k^n)$, $j,k \in I$.

In cazul nostru $H = (\varepsilon^{(j-1)(k-1)})$, $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{m}}$

$$H^{-1} = \frac{1}{2m}\left(\varepsilon^{-(j-1)(k-1)}\right) \text{ şi } J = \left(\left(p\varepsilon^{k-1} + q\varepsilon^{-(k-1)}\right)\delta_{jk}\right),$$

$$j,k \in I$$

şi deci din egalitatea $P^n = HJ^nH^{-1}$ obţinem

$$p_{jk}^{n} = \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{2m}\left[p\,\varepsilon^{(i-1)} + q\,\varepsilon^{-(i-1)}\right]^{n}\varepsilon^{(i-1)(j-k)} =$$

$$= \frac{1}{2m}\left[1 + (-1)^{n+j-k}\right]\sum_{i=1}^{m}\left[p\varepsilon^{i-1} + q\varepsilon^{-(i-1)}\right]^{n}\varepsilon^{(i-1)(j-k)}$$

b) Rezultă din faptul că

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{2n} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{dacă } j+k \text{ este par} \\ 0 & \text{dacă } j+k \text{ este impar} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{2n+1} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{dacă } j+k \text{ este impar} \\ 0 & \text{dacă } j+k \text{ este par} \end{cases}$$

15. Se consideră lanţul Markov omogen cu spaţiul stărilor $I = \{1,2,\ldots,m\}$ şi matricea de trecere $P = (p_{jk})$ cu $p_{j,j+1} = 1$, $j = 1,2,\ldots,m-1$, $p_{m1} = 1$.

Să se calculeze probabilitățile de trecere după n pași.

<u>Soluție</u>: Utilizăm aceiași metodă ca în problema 14.

$$H = \left(\varepsilon^{(j-1)(k-1)}\right), \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}, \quad H^{-1} = \frac{1}{m}\left(\varepsilon^{-(j-1)(k-1)}\right)$$

$$J = \left(\varepsilon^{k-1}\,\delta_{jk}\right), \quad j,k \in I$$

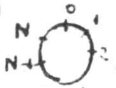
Obținem deci

$$p^{n}_{jk} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{(i-1)(n+j-k)}$$

adică $p^{n}_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n+j-k \text{ se divide cu } m \\ 0 & \text{în caz contrar.} \end{cases}$

16. Se consideră un lanț Markov omogen cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots.N\}$ și cu matricea de de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

(Mers la întîmplare pe o corcomferință 

)

Să se calculeze probabilitățile de trecere după n pași

Soluție: Pentru comoditatea scrierii să introducem notațiile

$$Z(\theta) = \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{-i\theta} = \cos\theta \quad \text{și} \quad Q_n(\theta) = e^{in\theta}$$

Avem în general

$$Z(\theta) Q_m(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) e^{im\theta} = \frac{1}{2} Q_{m+1}(\theta) + \frac{1}{2} Q_{m-1}(\theta)$$

In particular dacă θ este de forma $\theta_k = \frac{2k\pi}{N+1}$, $k=0,1,2,..N$

$$Z(\theta) Q_0(\theta) = \frac{1}{2} e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{-i\theta} e^{i(N+1)\theta} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\theta} + \frac{1}{2} e^{iN\theta} = \frac{1}{2} Q_1(\theta) + \frac{1}{2} Q_N(\theta)$$

și analog

$$Z(\theta) Q_N(\theta) = \frac{1}{2} Q_{N-1}(\theta) + \frac{1}{2} Q_0(\theta)$$

Deci putem scrie pentru $\theta = \frac{2k\pi}{N+1}$, $k = 0,1,2,...N$

$$Z(\theta) Q_n(\theta) = \sum_{m=0}^{N} p_{nm} Q_m(\theta) \qquad n,m = 0,1,...N$$

Inmulțind cu $Z(\theta)$ obținem:

$$Z^2(\theta) Q_n(\theta) = \sum_{m=0}^{N} p_{nm} Z(\theta) Q_m(\theta) = \sum_{m=0}^{N} p_{nm} \sum_{s=0}^{N} p_{ms} Q_s(\theta)$$

$$= \sum_{s=0}^{N} \left(\sum_{m=0}^{N} p_{nm} p_{ms} \right) Q_s(\theta) = \sum_{s=0}^{N} p_{ns}^{2} Q_s(\theta)$$

şi prin recurenţă se obţine relaţia

$$Z^r(\theta)\, Q_n(\theta) = \sum_{m=0}^{N} p^r_{nm}\, Q_m(\theta) \qquad (\alpha)$$

Se observă apoi că pentru $\theta_k = \frac{2k\pi}{N+1}$ $(k=0,1,\ldots,N)$ şi pentru $m \neq n$

$$\sum_{k=0}^{N} Q_n(\theta_k)\, \overline{Q_m(\theta_k)} = \sum_{k=0}^{N} e^{\frac{i2k\pi(n-m)}{N+1}} = 0$$

şi în plus $\sum_{k=0}^{N} \left| Q_n(\theta_k) \right|^2 = N+1$

Inmulţind relaţia (α) cu $\overline{Q_m(\theta)}$ cu m fixat se obţine pentru $\theta = \theta_k$ $Z^r(\theta)\, Q_n(\theta_k) Q_m(\theta_k) = p^r_{nm} |Q_m(\theta)|^2$ şi însumînd după k obţinem .

$$\sum_{k=0}^{N} Z^r(\theta_k)\, Q_n(\theta_k)\, Q_m(\theta_k) = p^r_{nm} \sum_{k=0}^{N} |Q_m(\theta_k)|^2 = (N+1) p^r_{nm}$$

deci $p^r_{nm} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \cos^r \frac{2k}{N+1} \; e^{\frac{2k\pi(n-m)i}{N+1}}$

Observație: Dacă considerăm mersul la întîmplare pe o circumferință mai general, cu matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & q & 0 \end{bmatrix}$$

se pot calcula în mod analog probabilitățile de trecere după n pași luînd $Z(\theta) = re^{i\theta} + qe^{-i\theta}$,

$$p^{r}_{nm} = \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left(p\, e^{\frac{2\pi ik}{N+1}} + q e^{-\frac{2\pi ik}{N+1}}\right)^{r} e^{\frac{2\pi ik(n-m)}{N+1}}$$

17. Se consideră un lanț Markov omogen cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots N\}$ și cu matricea de trecere de forma

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Mers la întîmplare cu două ecrane reflectante)

Să se calculeze probabilitățile de trecere după n pași.

<u>Soluție</u>: Observăm că polinomul trigonometric

$$Q_n(x) = \cos n\theta \qquad \text{cu } x = \cos\theta$$

satisface relațiile

$$xQ_n(x) = \frac{1}{2} Q_{n-1}(x) + \frac{1}{2} Q_{n+1}(x) \,, \qquad n = 1,2,\dots,N-1$$

$$xQ_0(x) = Q_1(x)$$

iar dacă $\theta = \frac{k\pi}{N}$, $k = 0,1,2,\dots,2N-1$, și relația

$$xQ_N(x) = Q_{N-1}(x)$$

Deci pt. $\theta = \frac{k\pi}{N}$ putem scrie

$$xQ_n(x) = \sum_{m=0}^{N} p_{nm} Q_m(x) \quad , \qquad n = 0,1\dots N$$

și prin inducție $x^r Q_n(x) = \sum\limits_{m=0}^{N} p_{nm}^r Q_m(x)$ (α)

Dar pt. $x_k = \cos\frac{k\pi}{N}$, $k = 0,1,2,\dots 2N-1$

$$\sum_{k=0}^{2N-1} Q_n(x_k)Q_m(x_k) = \sum_{k=0}^{2N-1} \cos\frac{nk\pi}{N}\cos\frac{mk\pi}{N} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1}\left[\cos\frac{(n-m)k\pi}{N} + \cos\frac{(n+m)k\pi}{N}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\sum_{k=0}^{2N-1}\left(e^{\frac{(n-m)k\pi i}{N}} + e^{\frac{(n+m)k\pi i}{N}}\right) = 0$$

și în plus $\sum_{k=0}^{2N-1} Q_n^2(x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2N-1} (1+\cos\frac{2nk\pi}{N}) = N$

Inmulțind relația (α) cu $Q_m(x)$ pentru un m fixat se obține pentru $x = x_k$, și însumînd după k

$$\sum_{k=0}^{2N-1} x_k^r Q_n(x_k)Q_m(x_k) = p_{nm}^r N$$

deci $p_{nm}^r = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2N-1} \cos^r\frac{k\pi}{N}\cos\frac{nk\pi}{N}\cos\frac{mk\pi}{N}$, n,m=0,1..N

18. Se consideră un lanț Markov omogen cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots,n,\dots\}$ și probabilitățile de trecere: $p_{00}=1$, $p_{k,k+1} = p$, $p_{k,k-1}=1-p$, $k \geqslant 1$.

și $p_{ks} = 0$ în celelalte cazuri. (Mersul la întîmplare cu ecran absorbant; starea absorbantă fiind 0). Pentru $p = \frac{1}{2}$ să se calculeze probabilitățile de trecere după n pași p_{ks}^n, $k,s = 1,2,\dots$.

<u>Soluție</u>: Matricea de tredere are forma:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \end{bmatrix}$$

Ţinînd cont de formula trigonometrică

$$\cos\theta \sin k\theta = \frac{1}{2}\sin(k-1)\theta + \frac{1}{2}\sin(k+1)\theta$$

putem scrie:

$$\cos\theta \sin k\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr} \sin r\theta \quad , \quad k=0,1,\dots.$$

Amplificînd cu $\cos\theta$ obţinem succesiv:

$$\cos^2\theta \sin k\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr} \cos\theta \sin r\theta =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr} \left(\sum_{s=0}^{\infty} p_{rs} \sin s\theta\right) = \sum_{s=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}p_{rs}\right)\sin s =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} p_{ks}^{2} \sin s\theta$$

de unde prin recurenţă

$$\cos^n\theta \sin k\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{rk}^{n} \sin r\theta$$

Amplificînd din nou cu $\sin s\theta$ şi integrînd în raport cu θ pe intervalul $[0,2\pi]$ obţinem:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n\theta \sin k\theta \sin s\theta \, d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sin r\theta \sin s\theta \, d\theta = \pi p_{ks}^{n}$$

pentru $s = 1,2,\dots.$

deoarece

$$\int_0^{2\pi} \sin r\theta \sin s\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dacă } r \neq s \\ \pi & \text{dacă } r = s \end{cases} \qquad r,s=1,2,\ldots$$

deci $p_{ks}^{n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n\theta \sin k\theta \sin s\theta \, d\theta$

pentru $k,s=1,2,\ldots$, $n = 0,1,2,\ldots$

19. Se consideră lanţul Markov omogen cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots\}$ şi probabilităţile de trecere $p_{0,1} = 1$, $p_{k,k+1} = p$, $p_{k,k-1} = 1-p$, $k \geq 1$ şi $p_{ks} = 0$ în celelalte cazuri (Mers la întîmplare cu ecran reflectant).

Pentru $p = \frac{1}{2}$ să se calculeze probabilităţile de trecere după n paşi.

<u>Soluţie</u>. Matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots\cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Ţinînd cont de formula trigonometrică

$$\cos\theta \cos k\theta = \frac{1}{2}\cos(k+1)\theta + \frac{1}{2}\cos(k-1)\theta .$$

putem scrie

$$\cos\theta \cos k\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr} \cos r\theta.$$

Amplificînd cu $\cos\theta$ obţinem

$$\cos^2\theta \cos k = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ks}^2 \cos s\theta$$

de unde prin recurenţă

$$\cos^n\theta \cos k\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^n \cos r\theta$$

Amplificînd din nou cu $\cos s\theta$ şi integrînd în raport cu θ pe intervalul $[0,2\pi]$ obţinem

$$\int_0^{2\pi} \cos^n\theta \cos k\theta \cos s\theta \, d\theta = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^n \int_0^{2\pi} \cos r\theta \cos s\theta d\theta$$

Dar

$$\int_0^{2\pi} \cos r\theta \cos s\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dacă } r \neq s \\ \pi & \text{dacă } r = s \geqslant 1 \\ 2\pi & \text{dacă } r = s = 0 \end{cases}$$

deci

$$p_{ks}^n = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n\theta \cos k\theta \cos s\theta \, d\theta & \text{pentru } s \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^n\theta \cos k\theta \, d\theta & \text{pentru } s = 0 \end{cases}$$

$$n,k,s = 0,1,2,\ldots\ldots$$

2o. Se consideră o particulă care se poate deplasa pe o axă orientată neputînd ocupa decît punctele de abcisă $0,1,2,\ldots,n\ldots$ Presupunem că de cîte ori particula se află într-o poziție $i \neq 0$, ea face un salt de o unitate spre dreapta cu probabilitatea $p_i > 0$, spre stînga cu probabilitate $q_i > 0$ sau rămîne pe loc cu probabilitatea $r_i > 0$, $p_i + q_i + r_i = 1$. Din poziția 0 particula face un salt în poziția 1 cu probabilitatea $p_o > 0$, rămînînd pe loc cu probabilitatea $r_o \geqslant 0$, $p_o + r_o = 1$. Să se scrie matricea de trecere a lanțului Markov omogen ce descrie mișcarea particulei și să se dea o metodă de calcul a probabilităților de trecere după n pași, folosind teoria polinoamelor ortogonale.

<u>Soluție</u>. Matricea de trecere are forma:

$$P = \begin{bmatrix} r_o & p_o & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}$$

Să considerăm în continuare sistemul de ecuații

$$xQ_k(x) = q_kQ_{k-1}(x)+r_kQ_k(x) + p_kQ_{k+1}(x) \ , \quad k = 1,2,\ldots$$

cu condițiile $Q_o(x) = 1$, $Q_1(x) = \dfrac{x-r_o}{p_o}$

Utilizînd aceste ecuații putem scrie relațiile

$$xQ_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}Q_r(x) \qquad k = 0,1,\ldots.$$

de unde prin inducţie după n se obţine

$$x^n Q_k(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^n \, Q_r(x) \qquad (\alpha)$$

Deoarece $p_k > 0$, se demonstrează uşor că

Q_k este un polinom de grad k.

Există atunci în mod unic (modulul o constantă aditivă) o funcţie $\sigma(x)$ definită pe $[-1,1]$ nedescrescătoare şi neconstantă astfel încît

$$\int_{-1}^{1} Q_k(x)\, Q_h(x) d\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \neq h \\ >0 & \text{dacă } k = h \end{cases}$$

Inmulţind relaţia (α) cu $Q_h(x)$ şi integrînd pe intervalul $[-1,1]$ în raport cu $d\sigma(x)$ obţinem

$$\int_{-1}^{1} x^n Q_k(x) Q_h(x) d\,\sigma(x) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{kr}^n \int_{-1}^{1} Q_r(x) Q_h(x) d\sigma(x) =$$

$$= p_{kh}^n \int_{-1}^{1} Q_h^2 \ \ d\sigma(x)$$

de unde rezultă p_{kh}^n.

21. Se dă un lanţ Markov omogen (x_n), cu un număr finit de stări: $A_0, A_1, \ldots, A_N$ şi fie p_{jk}, $j,k=0,1,\ldots$ probabilităţile de trecere corespunzătoare. Presupunem că există întregi $s > 0$ şi $k_0 \geqslant 0$ astfel încît

$$\min p_{jk_0}^{(s)} = d > 0.$$

In acest caz lanţul (x_n) este ergodic adică limitele

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = p_k$ $j,k=0,1,\dots N$ există, independente de j.
Numerele $p_0, p_1, \dots p_N$ formează singura soluţie nenegativă a sistemului de ecuaţii

$$p_k = \sum_{j=0}^{N} p_j\, p_{jk} \quad k = 0,1,\dots,N$$

care satisface relaţia $\sum\limits_{k=0}^{N} p_k = 1.$

<u>Soluţie</u>:

Să notăm $m_k^{(n)} = \min\limits_{0\le \ell\le N} p_{\ell k}^{(n)}$, $M_k^{(n)} = \max\limits_{0\le \ell\le N} p_{\ell k}^{(n)}$ $k = 0,1,\dots,N.$

Sint evidente relaţiile: $m_k^{(n)} \le m_k^{(n+1)}$, $M_k^{(n)} \ge M_k^{(n+1)}$

şi $0 \le m_k^{(n)} \le M_k^{(n)} \le 1$

deci există limitele $m_k = \lim\limits_{n\to\infty} m_k^{(n)}$ şi $M_k = \lim\limits_{n\to\infty} M_k^{(n)}$, şi

$m_k \le M_k$

Vom arăta că de fapt $m_k = M_k$

Pt. anumiţi ℓ_0 şi ℓ_1

$$M_k^{(n+s)} - m_k^{(n+s)} = \sum_{j=0}^{N} (p_{\ell_1 j}^{(s)} - p_{\ell_0 j}^{(s)})\, p_{jk}^{(n)}$$

Fie $\overline{H} = \left\{ j,\ 0 \le j \le N,\ p_{\ell_1 j}^{(s)} - p_{\ell_0 j}^{(s)} < 0 \right\}.$

şi $H = \left\{ j,\ 0 \le j \le N,\ p_{\ell_1 j}^{(s)} - p_{\ell_0 j}^{(s)} \ge 0 \right\}.$

Să punem $A = \sum_{j\in H} (p^{(s)}_{\ell_1 j} - p^{(s)}_{\ell_0 j})$ şi $B = \sum_{j\in \overline{H}} (p^{(s)}_{\ell_1 j} - p^{(s)}_{\ell_0 j})$

Se observă că $A \geqslant 0$ şi $A + B = 0$.

deci $M_k^{(n+s)} - m_k^{(n+s)} \leqslant (M_k^{(n)} - m_k^{(n)})A$

Sînt două cazuri posibile

$k_0 \in H$, atunci $B \geqslant -(1- p^{(s)}_{\ell_1 k_0}) \geqslant -(1-d)$ de unde $A \leqslant 1-d$

sau $k_0 \in \overline{H}$ şi atunci $A \leqslant 1 - p^{(s)}_{\ell_0 k_0} \leqslant 1 - d$ de asemeni.

Deci $M_k^{(n+s)} - m_k^{(n+s)} \leqslant (1-d)(M_k^{(n)} - m_k^{(n)})$

şi cum $M_k^{(s)} - m_k^{(s)} \leqslant 1-d$

prin recurenţă $M_k^{(ns)} - m_k^{(ns)} \leqslant (1-d)^n \to 0$ cînd n .

deci $m_k = M_k$ ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = p_k$ cu $p_k = m_k = M_k$

Trecînd la limita din relaţia $\sum\limits_{k=0}^{N} p_{jk}^{(n)} = 1$ se obţine.

$$\sum_{k=0}^{N} p_k = 1$$

Prin acelaşi raţionament utilizînd relaţia $p_{jk}^{(n)} =$

$= \sum\limits_{j=0}^{N} p^{(n-1)}_{\ell j} \quad p_{jk}$ se obţine $p_k = \sum\limits_{j=0}^{N} p_j \cdot p_{jk}$.

Să arătăm unicitatea numerelor $p_0, p_1, \dots, p_N$.

Presupunem că ar mai exista şi $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ diferite de cele anterioare pentru care

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k = 1 \quad \text{şi} \quad Q_k = \sum_{j=0}^{N} Q_j p_{jk}$$

Se obţine cu uşurinţă $Q_k = \sum_{j=0}^{N} Q_j \, p_{jk}^{(n)}$ şi pt. $n \to \infty$ avem

$$Q_k = \sum_{j=0}^{N} Q_j \cdot p_k = p_k \sum_{j=0}^{N} Q_j = p_k.$$

P.S. A nu se confunda numerele $p_0, p_1, \dots, p_N$ cu repartitia initiala.

22. In condiţiile problemei [21] fie $p_{jk}^{(-n)} =$

$= p(x_n = k \mid x_{n+1} = j)$ $j,k = 0,1,\dots,N$. Să se arate că

$\lim p_{jk}^{(-n)} = p_{jk}^{*}$ există şi formează o matrice stocastică.

<u>Soluţie</u>:

$$p_{jk}^{(-n)} = \frac{P(x_n = k, x_{n+1} = j)}{P(x_{n+1} = j)} = \frac{P(x_{n+1} = j \mid x_n = k) \cdot P(x_n = k)}{P(x_{n+1} = j)} =$$

$$= \frac{p_{kj} \cdot P(x_n = k)}{P(x_{n+1} = j)}$$

Dar cum $P(x_n = k) = \sum_{j=0}^{N} P(x_0 = j) \cdot p_{jk}^{(n)}$ rezultă că

$$\lim_{n \to \infty} P(x_n = k) = \sum_{j=0}^{N} P(x_0 = j) \cdot p_k = p_k$$

Deci $\lim \rho_{jk}^{(-n)} = \frac{p_{jk}\, \rho_k}{\rho_j} = \rho_{jk}^{*}$

In continuare avem $\sum_{k=0}^{N} \rho_{jk} = \frac{1}{\rho_j} \sum_{k=0}^{N} \rho_k \cdot p_{jk} = 1$

23. Considerăm îndeplinite condiţiile din problema [21]. Presupunem că la momentul $t = 0$ sistemul se găseşte în starea A_k, şi revine în starea A_k pt.prima dată după un număr de paşi pe care îl notăm cu $\nu^{(k)}$.
Să se arate că $P(\nu^{(k)} > n) < (1-d)^n$.

<u>Soluţie</u>:

a) Avem evident $P(\nu^{(k)} > 1) = 1 - \rho_{kk}$ deci pt. n=1. relatia din enunt este adevărată.
Să raţionăm prin recurenţă:

$$P(\nu^{(k)} > n+1) = \sum_{h \neq k} \sum_{j \neq k} P(\nu^{(k)} > n,\ x_n = j, x_{n+1} = h)$$

deci

$$P(\nu^{(k)} > n+1) = \sum_{j \neq k} P(\nu^{(k)} > n,\ x_n = j) \sum_{h \neq k} p_{jk} \quad (1-d)P(\nu^{(k)} > n)$$

$$\leq (1-d)^{n+1}$$

24. Dat fiind un lanţ Markov cu I spaţiul stărilor cel mult numărabil şi cu $P = (p_{ij})$, $i,j \in I$ matricea de trecere, să se arate că:

$$f(i,j) = \lim_{s\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n}}{1+\sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}}, \quad \text{oricare } i,j \in I.$$

(Formula lui Doeblin)

<u>Soluţie:</u> Folosind teorema primei intrări:

$$\sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n} = \sum_{n=1}^{s} \sum_{m=1}^{n} f(m,i,j) \cdot p_{jj}^{n-m} = \sum_{m=1}^{s} \left(f(m,i,j) \sum_{n=m}^{s} p_{jj}^{n-m} \right).$$

de unde

$$\left(1+\sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}\right) \sum_{m=1}^{s} f(m,i,j) \geq \sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n} \geq \left(1+\sum_{n=1}^{s-s'} p_{jj}^{n}\right) \sum_{m=1}^{s'} f(m,i,j)$$

oricare $s' < s$.

Impărţind prin $1 + \sum_{n=1}^{s} p_{jj}^{n}$ şi făcînd $s \to \infty$ şi apoi $s' \to \infty$ obţinem formula lui Doeblin

In particular

$$f(i,i) = 1 - \lim_{s\to\infty} \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{s} p_{ij}^{n}}.$$

25. Se dă un lanț Markov omogen, cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots\}$ și cu matricea de trecere

(p_{ij}), i,j I

Dacă șirul $\{u_i\}$, $i \in I$ îndeplinește condițiile

$$u_i \geqslant 0 \quad \sum_j p_{ij}\, u_j \leqslant u_i \,, \qquad i \in I$$

atunci $a_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_j p_{ij}^n\, u_j$ există pentru orice $i \in I$

și $\quad a_i = \sum\limits_j p_{ij}\, a_j$

<u>**Soluție**</u>

$$\sum_j p_{ij}^{n+1} u_j = \sum_j \Big(\sum_k p_{ik}^{n} p_{kj}\Big) u_j = \sum_k p_{ik}^{n} \Big(\sum_j p_{kj}\, u_j\Big) \leqslant \sum_k p_{ik}^{n}\, u_k$$

deci $\quad u_i \geqslant \sum\limits_j p_{ij}\, u_j \geqslant \sum\limits_j p_{ij}^2\, u_j \geqslant \ldots.$

Există deci pentru orice $i \in I$

$$a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_j p_{ij}^n\, u_j \leqslant u_i$$

Trecînd apoi la limita pentru $n \to \infty$ în relația

$\sum\limits_j p_{ij} \sum\limits_k p_{ik}\, u_k = \sum\limits_k p_{ik}^{n+1}\, u_k$ obținem

$$\sum_j p_{ij}\, a_j = a_i.$$

26. (Un model al accidentelor de muncă).

Intr-o întreprindere, un lucrător poate suferi accidente de muncă care necesită perioade de spitalizare de o zi pînă la m-1 zile. Să presupunem că probabilitatea ca lucrătorul să nu fie accidentat în decursul unei zile este $0 < q < 1$ şi că probabilitatea ca să fie accidentat şi să fie spitalizat m-r zile este $p.p_{m-r}, 1 \leq r \leq m-1$, $p = 1-q$, $\sum_{r=1}^{m-1} p_{m-r} = 1$. Convenim să spunem că lucrătorul se află în starea 0 la sfîrşitul unei zile dacă, fie nu a suferit nici un accident în decursul acelei zile, fie se găseşte la sfîrşitul unei perioade de spitalizare şi că lucrătorul se află în starea r la sfîrşitul unei zile dacă el are de executat m-r zile de spitalizare, $1 \leq r \leq m-1$. Evident lucrătorul se poate găsi în starea r fie ca urmare a unui accident în ziua respectivă şi care necesită m-r zile, de spitalizare, fie ca urmare a aflării sale în starea r-1 la sfîrşitul zilei precedente. Este normal să acceptăm că accidentările sau neaccidentele din zile diferite sînt evenimente independente.

a) Să se scrie matricea P de trecere corespunzătoare lanţului omogen Markov care descrie trecerile lucrătorului prin stările 0,1,....,m-1.

b) Să se determine repartiţia staţionară π în raport cu P pentru care $\pi 1=1$

Solutie:

a) Matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} q & p\,p_{m-1} & p\,p_{m-1} & \cdots\cdots & pp_2 & pp_1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Ecuaţia $\pi P = \pi$ ne conduce la sistemul

$$\pi_0 q + \pi_{m-1} = \pi_0$$

$$\pi_0 p\, p_{m-1} = \pi_1$$

$$\pi_0 p\, p_{m-1} + \pi_{\ell-1} = \pi_\ell \quad 2 \leq \ell \leq m-1$$

Din ultimele m-1 ecuaţii obţinem succesiv

$$\pi_1 = p\, p_{m-1}\pi_0$$

$$\pi_2 = p(p_{m-1} + p_{m-2})\,\pi_0$$

şi în general $\pi_\ell = p\,(\sum_{i=1}^{\ell} p_{m-i})\,\pi_0 \quad 1 \leq \ell \leq m-1$

şi din condiţia $\pi 1 = 1$, adică $\sum_{i=0}^{m-1} \pi_i = 1$.

găsim $\pi_0 = \dfrac{1}{1+p\sum_{i=1}^{m-1} i p_i}$

27. Necesar și suficient ca lanțul Markov cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots\}$ și cu matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \ldots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \qquad p_i + q_i = 1;\ p_i, q_i > 0$$

să admită o repartiție staționară $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$, $\pi \geqslant 0$, $\pi 1 = 1$ este ca $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \prod\limits_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}} < \infty$

<u>**Soluție**</u>: Ecuația $\pi P = \pi$ de definiție a unei repartiții staționare ne conduce la sistemul

$$\pi_1 q_1 = \pi_0$$

$$\pi_0 + \pi_2 q_2 = \pi_1$$

$$p_{i-1}\pi_{i-1} + q_{i+1}\pi_{i+1} = \pi_i \qquad i = 2,3,\ldots.$$

Din acest sistem se obține prin recurența:

$$\pi_i = x_0 \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}, \quad i \geqslant 1$$

Din condiția $\pi.1 = 1$, care înseamnă $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ avem:

$$1 = \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_0 \prod_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{q_{k+1}} \qquad \text{sau}$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1+ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \prod\limits_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}}}$$

şi de aici $\pi_0 > 0$ dacă şi numai dacă

$$\sum_{i=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k+1}} < \infty$$

In particular dacă $p_k = p$, $q_k = q = 1-p$, $k \geqslant 1$

seria $\sum\limits_{i=1} \prod\limits_{k=0}^{i-1} \frac{p_k}{q_{k-1}} = \frac{1}{p} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^i$ converge

numai dacă $p < q$.

28. Fie lanţul Markov cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots\}$ şi cu matrice de trecere

$$P = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i & a_0 & 0 & 0 & \dots \\ \sum\limits_{i=2}^{\infty} a_i & a_1 & a_0 & 0 & \dots \\ \sum\limits_{i=3}^{\infty} a_i & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Cda. 41/1980 Fasc. 12

Dacă $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$ există o repartiţie staţionară π,

$\pi > 0$ şi $\pi 1 = 1$.

<u>Soluţie</u>: Vom căuta repartiţia staţionară $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$

de forma $\pi_i = x^i$, $x \in (0,1)$

Din ecuaţia $\pi P = \pi$ pentru $j \in I$, $j \geq 1$ obţinem

ecuaţiile

$$\sum_{i=j-1}^{\infty} x^i a_{i-j+1} = x^j, \text{ sau inmulţind cu } x^{1-j}$$

$$\sum_{i=j-1}^{\infty} x^{i-j+1} a_{i-j+1} = x \text{ , care sînt deci identice}$$

şi cu notaţia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, sînt de forma $f(x)=x$

Dar $f(0) = a_0 > 0$, $f(1)= 1$ şi $f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$

deci există $x_0 \in (0,1)$ astfel încît $f(x_0) = x_0$

Să observăm apoi că

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_{i0} x_0^i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=i+1}^{\infty} a_k \right) x_0^i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} a_k x_0^i$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{1-x_0^k}{1-x_0}\right) = \frac{1}{1-x_0}\left(1-a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_0^k\right)$$

$$= \frac{1}{1-x_0}\left[1 - a_0 - (x_0 - a_0)\right] = 1$$

Luînd $\pi_i = \dfrac{x_0^i}{1-x_0}$, $\pi = (\pi_i)_{i \in I}$ este o repartiție

staționară $\pi > 0$ și $\pi 1 = 1$

29. Să se calculeze probabilitatea $h(i,j)$ ca plecînd din starea i, un lanț Markov (x_n), $n \geqslant 0$ (cu spațiul stărilor I cel mult numărabil) să ajungă în starea j de o infinitate de ori.

Soluție: Notînd cu $h(s,i,j) = P(x_{n+m} = j$, pentru cel puțin s valori $n \geqslant 1)$ avem succesiv.

$$h(s+1,i,j) = \sum_{n \geqslant 1} P(x_\nu \neq j,\ m < \nu < m+n, x_{m+n}=j, x_{m+n+k} = j$$

pentru cel puțin s valori $k \geqslant 1 \mid x_m = i) =$

$$= \sum_{n \geqslant 1} P(x_\nu \neq j,\ m<\nu<m+n,\ x_{m+n} = j \mid x_m = i)\ .$$

$.P\ (x_{m+n+k} = j$ pentru cel puțin s valori $k \geqslant 1 \mid x_{m+n} = j) =$

$= f(i,j) \cdot h(s,i,j)$

Cum $h(1,i,j) = f(i,j)$ obţinem prin inducţie

$$h(s+1,i,j) = f(i,j) \left[f(j,j)\right]^s$$

Dar $h(i,j) = \lim_{s \to \infty} h(s,i,j)$ deci

$$h(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } f(j,j) < 1 \\ f(i,j) & \text{dacă } f(j,j) = 1 \end{cases}$$

3o. Se dă un lanţ Markov omogen cu spaţiul stărilor $I = \{0,1\}$ şi cu matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} \qquad p,q \in (0,1)$$

a) Să se calculeze probabilitate ca plecînd din i, lanţul să fie în j pentru prima dată după n paşi.

b) Să se calculeze probabilitatea plecînd din i, lanţul să fie în j după un număr finit de paşi.

c) Să se calculeze probabilitatea că plecînd din i, lanţul să ajungă în j de o infinitate de ori.

Soluţie. a) Se obţine cu uşurinţă

$$f(n,1,1) = \begin{cases} 1-p & \text{dacă } n = 1 \\ pq(1-q)^{n-2} & \text{dacă } n \geqslant 2. \end{cases}$$

$$f(n,1,2) = p(1-p)^{n-1}$$

$$f(n,2,1) = q(1-q)^{n-1}$$

$$f(n,2,2) = \begin{cases} 1-q & \text{dacă } n = 1 \\ pq(1-p)^{n-2} & \text{dacă } n \geqslant 2 \end{cases}$$

b) $f(1,1) = (1-p)+pq \sum_{n=2}^{\infty} (1-q)^{n-2} = 1$ şi analog $f(2,2)=1$

$f(1,2) = p\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = 1$ şi analog $f(2,1) = 1$

(Deci ambele stări sînt recurente)

c) Conform unei probleme anterioare rezultă că

$$h(i,j) = f(i,j) = 1 \quad , \quad i,j = 0,1$$

31. Se dă lanţul Markov (x_n), $n \geqslant 0$ cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,3\}$ şi cu matricea de trecere

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se arate că:

a) toate stările sînt recurente, reflexive și pozitive.

b) lanțul nu este ergodic.

Soluție: Calculînd puterile lui P obținem

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = P$$

de unde rezultă

$$p_{11}^n = p_{22}^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 3k-2,\ n = 3k-1 \\ \frac{1}{2} & \text{dacă } n = 3k \end{cases}$$

$$p_{33}^n = p_{44}^n = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n = 3k-2,\ n = 3k-1 \\ 1 & \text{dacă } n = 3k \end{cases}$$

$k = 1,2,\ldots$

a) Utilizînd teoremele

- o stare i este recurentă sau nerecurentă după cum $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^n$ diverge sau converge,

- o stare i este reflexivă sau nereflexivă după cum $p_{ii}^n > 0$ pentru cel puțin o valoare $n = 1,2,\ldots$ sau

$p_{ii}^n = 0$ pentru orice $n = 1,2,\ldots$

- o stare i este pozitivă sau nulă după cum $\overline{\lim}\, p_{ii}^n > 0$ sau $\lim p_{ii}^n = 0$,

şi forma concretă a probabilităţilor p_{ii}^n rezultă că toate stările sînt recurente, reflexive şi pozitive.

b) Rezultă imediat tot din forma probabilitatea p_{ij}^n.

Obs. Lanţul este inductibil deoarece se observă că pentru orice i,j există n=1, n=2, sau n=3 astfel încît $p_{ij}^n > 0$ şi rezultă şi de aici că toate stările sînt recurente şi pozitive.

32. Fie (x_n), n 0 un lanţ Markov (cu spaţiul stărilor I finit). Se ştie că oricare ar fi starea i, dacă j este stare tranzientă $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^n = 0$. Să se arate că această convergentă este exponenţială.

Soluţie. Va trebui să arătăm că există $a > 0$ şi $a < b < 1$ astfel încît $p_{ij}^n \leqslant ab^n$.

Din ipoteză rezultă că pentru $0 < \varepsilon < 1$ există n_0, astfel încît $\sum\limits_{j\in I} p_{ij}^n < \varepsilon$, pentru orice $n \geqslant n_0$ şi $i \in I$.

Se ştie că dacă i este stare recurentă şi $i \to j$ atunci şi j este de asemenea recurentă. Din acest motiv putem scrie în continuare:

$$\sum_{j\in I} p_{ij}^{(s+1)n_0} = \sum_{j,k\in I} p_{ik}^{sn_0}\, p_{kj}^{n_0} \leq \varepsilon \sum_{k\in I} p_{ik}^{sn_0}$$

de unde $\sum_{j\in I} p_{ij}^{sn_0} \leq \varepsilon^{s}$

Cum orice $n \geq 1$ este de forma $n = sn_0 + r$, $0 \leq r \leq n_0$ avem

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{sn_0} \cdot p_{kj}^{r} \leq \varepsilon^{s} \leq {}^{\frac{n}{n_0}-1} = ab^{n}$$

cu $a = \frac{1}{\varepsilon}$, $b = (\varepsilon)^{\frac{1}{n_0}}$

33. Fie (x_n), $n \geq 0$ un lanț Markov omogen cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,3,\ldots\}$ și matricea de trecere:

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 & 0 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \end{bmatrix}, \quad p_i \in (0,1)$$

Să se arate că starea 0 este recurentă dacă și numai dacă

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$$

Soluţie. Avem:

$$f(1,0,0) = p_0 - (1 - p_0)$$

şi pt. $n > 1$

$$f(n,0,0) = \prod_{i=0}^{n-2} (1-p_i)p_{n-1} = \prod_{i=0}^{n-2} (1-p_i)\ 1-(1-p_{n-1}) =$$

$$= \prod_{i=0}^{n-2} (1-p_i) - \prod_{i=0}^{n-1} (1-p_i) = U_{n-2} - U_{n-1}$$

$$\text{unde } U_n = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n-2} (1-p_i) & \text{dacă } n \geqslant 0 \\ 1 & \text{dacă } n = -1 \end{cases}$$

$$\text{Deci} \sum_{n=1}^{m+1} f_{oo}^n = \sum_{n=1}^{m+1} (U_{n-2} - U_{n-1}) = 1 - U_m$$

Folosim în continuare următorul rezultat clasic

Dacă $p_i \in (0,1)$ şi $U_m = \prod_{i=0}^{m} (1-p_i)$ atunci $U_m \to 0$ cînd $m \to \infty$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$.

Rezultă deci că $\sum_{n=1}^{\infty} f_{oo}^n = 1$ dacă şi numai dacă $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \infty$

34. Fie lanţul Markov cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots\}$ şi matricea de trecere

$$P=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots\dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots\dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \end{bmatrix} \qquad a_k>0 \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$$

Să se arate că:

a) dacă $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$ lanţul este tranzient (toate stările sînt tranziente)

b) dacă $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k \leq 1$ lanţul este recurent (toate stările sînt recurente).

Soluţie. Se observă că lanţul este ireductibil.

a) Folosim teorema:

Necesar şi suficient ca un lanţ Markov ireductibil, cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots\}$ şi cu matricea de trecere $P=(p_{ij})$ $i,j\in I$, să fie tranzient este ca să existe un şir $(y_i)_{i\in I}$, neconstant care să satisfacă sistemul de ecuaţii:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}y_j = y_i, \quad i\in I,\ i\neq 0$$

Vom căuta soluții ale acestui sistem de forma $y_i = x^i$

$x \in (0,1)$.

Sistemul va deveni:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}x^j = x^i, \ i \neq 0 \quad \text{sau}$$

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1}\, x^j = x^i \ , \ i \neq 0$$ sau încă (înmulțind respectiv cu x^{1-i})

$$\sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1}\, x^{j-i+1} = x$$

Observăm că toate ecuațiile sistemului sînt de forma $f(x) = x$ cu $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Dar cum $f(0) = a_0 > 0$, $f(1) = \sum a_k = 1$ și $f'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k > 1$

există $x_0 \in (0,1)$ încît $f(x_0) = x_0$, deci

$y_i = x_0^i$ este șirul care asigură tranziența șirului

b) De această dată folosim teorema:

Necesar și suficient ca un lanț Markov ireductibil cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots\}$ și cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, $i,j \in I$ să fie recurent este ca să existe un șir $(y_i)_{i \in I}$, $\lim y_i = \infty$ care să satisfacă sistemul de inecuații:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}\, y_j \le y_i, \quad i \ne 0.$$

Vom arăta că şirul $y_i = i$ satisface pentru lanţul dat teorema de mai sus

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}\cdot j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1}\cdot j = \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j-i+1}(j-i+1)+i-1 =$$

$$= \sum_{k=0} k a_k - 1 + i \le i, \quad i \ne 0.$$

35. Se dă un lanţ Markov omogen (x_n) $n \geqslant 0$, cu spaţiul stărilor I cel mult numărabil şi $P = (p_{ij})$, $i,j \in I$ matricea de trecere.

Notînd cu ${}_k p_{ij}^{n} = P(x_n = j,\ x_\nu \ne k,\ 1 \le \nu \le n-1 \mid x_0 = i)$, $k \ne j$, $n \geqslant 1$ şi ${}_k p_{ij}^{*} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_k p_{ij}^{n}$

Să se arate că dacă i şi j aparţin aceleiaşi clase recurente

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n}}{\sum_{n=0}^{m} p_{ii}^{n}} = {}_i p_{ij}^{*}$$

Soluție. Avem:

$$\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{m} p_{ii} \; {}_{i}p_{ij}^{n-\nu} = \sum_{n=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ii} \; {}_{i}p_{ij}^{n-\nu}$$

deoarece ${}_{i}p_{ij}^{n-\nu} = 0$ pt $\nu > n$.

și mai departe,

$$\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ii}^{\nu} \sum_{n=0}^{m} {}_{i}p_{ij}^{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_{ii}^{\nu} \; {}_{i}\tilde{p}_{ij}^{m-\nu}$$

unde

$${}_{i}\tilde{p}_{ij}^{m} = \begin{cases} \sum_{\mu=0}^{m} {}_{i}p_{ij} & , m = 0,1,2,\ldots \\ 0 & m = -1,-2,\ldots \end{cases}$$

Deci $\sum_{n=0}^{m} p_{ij}^{n} = \sum_{\nu=0}^{m} p_{ii}^{\nu} \; {}_{i}\tilde{p}_{ij}^{m-\nu} = \sum_{\nu=0}^{m} p_{ii}^{m-\nu} \; {}_{i}\tilde{p}_{ij}$

Folosim în continuare următorul rezultat din analiză:

Fie $C_m = \sum_{\nu=0}^{m} a_{m-\nu} b_{\nu}$, unde $0 \leq a_m \leq K$, $K > 0$, $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \infty$;

dacă $\lim b_m = b < \infty$ atunci $\lim \dfrac{C_n}{\sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu}} = b$

Să punem $a_m = p_{ii}^m$, $b_m = {}_i\tilde{p}_{ij}^m$ şi $c_m = \sum_{n=0}^{m} p_{ij}^n$

Se observă că $0 \leq p_{ii}^m \leq 1$, $\sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^m = \infty$ (starea i este recurentă)

$\lim b_m = \lim {}_i\tilde{p}_{ij}^m = \sum_{\nu=0}^{\infty} {}_i p_{ij} = {}_i p_{ij}^{*}$ (din ipoteză asupra stărilor i şi j)

rezultă deci că $\lim \dfrac{\sum_{m=0}^{m} p_{ij}^{n}}{\sum_{m=0}^{m} p_{ii}^{m}} = {}_i p_{ij}$

36. Fie (x_n), $n \geq 0$, un lanţ Markov omogen cu spaţiul stărilor I finit, şi $T \subset I$, $T \neq \emptyset$ mulţimea stărilor tranziente. Să se arate că probabilitatea de a rămîne la nesfîrşit în mulţimea T este 0.

<u>Soluţie.</u> Să presupunem că lanţul pleacă dintr-o stare $i \in I$ oarecare şi fie $j \in T$. Avem succesiv:

P(starea j revine de o infinitate de ori) $= \sum_{i=I} p(x_o=i) \cdot$

$\cdot\, P\underbrace{(\text{starea } j \text{ revine de o infinitate de ori} \mid x_o=i)}_{0} = 0$

Dar evident există $j_o \in I$ încît

$(x_n \in T,\ n \geq 0) \subseteq$ (starea j_o revine de o infinitate de ori) deci $P(x_n \in T,\ n \geq 0) \leq P$ (starea j_0 revine de o infinitate de ori) = 0 ceea ce demonstrează că probabilitatea de a rămîne la nesfîrşit în mulţimea T este 0.

37. In condiţiile problemei 36, notînd cu a(i,k) probabilitatea ca lanţul Markov plecînd din starea tranzientă i, să ajungă în starea absorbantă $k(p_{kk} = 1)$ satisface relaţia:

$$a(i,k) = p_{ik} + \sum_{j \in T} p_{ij}\, a(j,k)$$

Soluţie. Neexistînd probabilitatea mişcării de la o stare absorbantă la altă stare absorbantă, în condiţiile noastre $a(i,k) = f(i,k)$

Dar cum $f(i,k) = P_i\left(\bigcup_{n \geq 1} x_n = k\right)$

şi deoarece $\{x_n = k\} \subseteq \{x_{n-1} = k\}$, k fiind absorbantă rezultă

$$a(i,k) = f(i,k) = \lim_{n\to\infty} P_i(x_n = k) = \lim_{n\to\infty} p_{ik}^{n} \quad (\alpha)$$

Din relaţia Chapman-Kolmogorov

$$p_{ik}^{n+1} = \sum_{j \in I} p_{ij}\, p_{jk}^{n+1}$$

deducem $p_{ik}^{n+1} = p_{ik} + \sum_{j \in T} p_{ij}\, p_{jk}^{n}$ (β)

(Am ţinut cont că numai pt. $j \in T$ $p_{jk}^{n} \neq 0$ şi că $p_{kk}^{n}=1$)

Trecînd în relaţia (β) la limită după n şi ţinînd cont de relaţia (α) obţinem

$$a(i,k) = p_{ik} + \sum_{j \in T} p_{ij}\, a(j,k)$$

38. Să se arate că dacă pentru lanţul Markov (x_n), $n \geqslant 0$ cu spaţiul stărilor I numărabil şi cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, i,j I, mulţimea $F \subset I$ a stărilor neesenţiale este finită, atunci cu probabilitatea egală cu 1, lanţul Markov rămîne în stări din F numai de un număr finit de ori.

<u>Soluţie</u>. Deoarece o stare neesenţială nu este accesibilă dintr-o stare esenţială avem

$$P(x_{m+n} \in F \mid x_m = i) = P(x_{m+k} \in F,\ 1 \leq k \leq n \mid x_m = i) = \sum_{j \in F} p_{ij}^{n}$$

$i \in F$, $m,n = 1,2,\ldots$

şi este suficient să arătăm că $\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in F} p_{ij}^{n} = 0$, $i \in F$

Deoarece

$$P(x_{m+k'} \in F,\ 1 \leq k' \leq n+1 \mid x_m = 1) \leq$$

$$P(x_{m+k''} \in F,\ 1 \leq k'' \leq n \mid x_m = i)$$

şirul $\sum_{j \in F} p_{ij}^{(n)}$ este monoton descrescător.

Tinînd cont că o stare este neesenţială este nulă

($\lim p_{ij}^{n} = 0$, $i \in I$, dacă j este nulă) pentru $0 < \varepsilon < 1$

există m astfel încît $\sum_{j \in F} p_{ij}^{n} < \varepsilon < 1$, $n \geq m$. $i \in F$

şi cum $\sum_{j \in F} p_{ij}^{(s+1)m} = \sum_{j,k \in F} p_{ik}^{sm} \cdot p_{kj} \leq \varepsilon \sum_{k \in F} p_{ik}^{sm}$, $i \in F$ $s=1,2,\ldots$

prin inducţie rezultă că:

$\sum_{j \in F} p_{ij}^{sm} \leq \varepsilon^{s}$ ceea ce atrage că $\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in F} p_{ij}^{n} = 0$

39.(Problema ruinării judecătorului).

Doi jucători susţin o serie de partide ale aceluiaşi joc, sumele lor iniţiale puse în joc fiind de k şi ℓ-k lei.

Să presupunem că la fiecare partidă se pariază pe un singur leu, că probabilitățile de cîștig a unei partide de către cei doi parteneri sînt p şi $q = 1-p$, $p \in (0,1)$ și în plus că rezultatele partidelor sînt independente.

a) Să se scrie matricea de trecere a lanțului Markov omogen care reprezintă evoluția capitalului primului jucător.

b) Să se calculeze matricea fundamentală a acestui lanț Markov (ca particular $\ell=3$, $\ell=4$ pt. $p \neq \frac{1}{2}$).

c) Să se determine probabilitățile de ruinare ale primului, respectiv ale celui de al doilea jucător.

d) Să se determine durata medie a competiției.

<u>Soluție:</u>

a) Spațiul stărilor este $I = \{0,1,2,\ldots\}$ iar matricea de trecere este

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Utilizăm în continuare excelenta monografie "Lanțuri Markov finite și aplicații" de Marius Iosifescu.

Pentru un lanț cu stări tranziente (numit și lanț absorbant) care este de forma $P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & T \end{bmatrix}$, I matrice unitate, matricea fundamentală este $N = (I - T)^{-1}$.

In cazul nostru

$$T = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & & q & 0 \end{bmatrix}$$

şi prin calcul direct obţinem matricea fundamentală $N = (n(i,j))$ şi anume:

pentru $p \neq \frac{1}{2}$

$$n(i,j) = \frac{1}{(p-q)\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell} - 1\right]} \begin{cases} \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{j} - 1\right]\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell-i} - 1\right] & \text{dacă } j \leq i \\ \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{i} - 1\right]\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell-i} - \left(\frac{p}{q}\right)^{j-i}\right] & \text{dacă } j > i \end{cases}$$

iar pentru $p = \frac{1}{2}$

$$n(i,j) = \frac{2}{\ell} \begin{cases} j\,(\ell - i) & \text{dacă } j \leq i \\ i\,(\ell - j) & \text{dacă } j > i \end{cases}$$

In particular pt. $\ell = 3$, $p \neq \frac{1}{2}$

$$N = \frac{1}{p^2+pq+q^2}\begin{bmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{bmatrix}$$

iar pt. $\ell = 4,\ p \neq \frac{1}{2}$

$$N = \frac{1}{p^2+q^2}\begin{bmatrix} p+q^2 & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & q+p^2 \end{bmatrix}$$

c) Probabilitatea de ruinare a primului jucător este

$$a(i,0) = \sum_{j=1}^{\ell-1} n(i,j)p_{jo} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell-i} - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell} - 1}, & \text{dacă } p \neq \frac{1}{2} \\ 1 - i/\ell & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Probabilitatea de ruinare a celui de-al doilea jucător.

$$a(i, \ell) = 1 - a(i, 0)$$

d) Durata medie a competiţiei este

$$M_i(\nu) = \sum_{j=1}^{\ell-1} n(i,j) = \begin{cases} \dfrac{1}{2p-1}\left(\dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\ell} - \left(\frac{p}{q}\right)^{\ell-i}}{\left(\frac{p}{2}\right)^{\ell} - 1} - i\right) & \text{dacă } p \neq \frac{1}{2} \\ i(\ell - i) & \text{dacă } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$1 \leq i \leq \ell - i$$

($M_1(\nu)$ este valoarea medie a variabilei aleatoare, ce exprimă timpul pe care lanţul îl petrece în mulţimea stărilor tranziente, calculată în raport cu probabilitatea P_i

4o) Să presupunem că lanţul Markov omogen (x_n) $n \geq 0$, cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\dots\}$ şi cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, $i,j \in I$ este ireductibil. Dacă sistemul de ecuaţii

$$\sum_{j=0} y_j p_{ij} = y_i , \quad i \in I$$

are cel puţin o soluţie care satisface condiţiile

$$(\alpha) \qquad \sum_{j=0}^{\infty} |y_j| < \infty$$

(β), există cel puţin un $j_0 \in I$ încît $y_{j_0} \neq 0$

atunci lanţul este pozitiv recurent.

Soluţie: Să notăm $\widetilde{p}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} p_{ij}^{n}$ şi deoarece $\sum_{j=0}^{\infty} y_j p_{ji}^{n} = y_i$, $n = 1,2,\dots$ rezultă $\sum_{j=0}^{\infty} y_j \widetilde{p}_{ji}^{m} = y_i$

Utilizînd condiţia (α) avem $\sum_{j=0}^{\infty} |y_j| \widetilde{p}_{ji}^{m} \leq \sum_{j=0}^{\infty} |y_j| < \infty$

deci pt. $m \to \infty$ obţinem

$$y_i = \lim_{m \to \infty} \sum_{j=0}^{\infty} y_j \widetilde{p}_{ji} = \sum_{j=0}^{\infty} y_j \lim \widetilde{p}_{ji}^{m}$$

şi cum $\lim_{m \to \infty} \widetilde{p}_{ji} = \lim \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m} p_{ji}^{n} = \pi_i \geq 0$

rezultă $y_i = \pi_i \sum_{j=0}^{\infty} y_j$.

Din condițiile (α) și (β) se constată că există i_0 încît $\pi_{i_0} \neq 0$, deci $\pi_{i_0} > 0$

41. Să presupunem că lanțul Markov omogen $(x_n^{\cdot})$, $n \geq 0$, cu spațiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots\}$ și cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, i,j I este ireductibil și pozitiv recurent. Dacă șirul $\{y_j\}$, $y_j \geq 0$, $j = 0,1,2,\ldots$ satisface sistemul de inecuații:

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j \, p_{ji} \leq y_i$$

atunci $\sum_{j=0}^{\infty} y_j < \infty$

Soluție. Prin inducție obținem $\sum_{j=0}^{\infty} y_j \, p_{ji}^n \leq y_i$, $n \geq 1$

și pentru $m \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j \, \tilde{p}_{ji}^m \leq y_j \text{ unde } \tilde{p}_{ji}^m = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} p_{ji}^n$$

și cum $y_j \geq 0$, $\tilde{p}_{ji}^m \geq 0$ atunci $\sum_{j=0}^{M} y_j \, \tilde{p}_{ji} \leq y_i$ pt.orice $M > 0$

Pentru $m \to$ obținem

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{M} y_j \, \tilde{p}_{ji}^{m} = \pi_i \sum_{j=0}^{M} y_j \leqslant y_i$$

Dar cum $\pi_i > 0$, sumele parţiale $\sum\limits_{j=0}^{M} y_j$ sînt egal măr-

ginite pentru orice $M > 0$, deci

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j < \infty,$$

42. Se dă lanţul Markov omogen (x_n), $n \geqslant 0$, cu spaţiul stărilor $I = \{0,1,2,\ldots\}$ şi cu matricea de trecere $P = (p_{ij})$, $i,j \in I$, ireductibil şi recurent. Să se arate că şirul

$$v_0 = 1, \; v_i = {}_0p_{0i}^{*} \qquad i = 1,2,\ldots$$

este soluţie a sistemului

$$v_i = \sum_{j=0}^{\infty} v_j \, p_{ji} \qquad i = 0,1,2,\ldots$$

(Utilizăm notaţiile introduse în problema 35)

<u>Soluţie</u>:

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j p_{ji} = \sum_{j=}^{\infty} {}_0p_{0j}^{*} p_{ji} + p_{0i} = p_{0i} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} {}_0p_{0j}^{n} \, p_{ji}$$

şi cum ${}_0p_{0j}^{*} < \infty$ avem mai departe

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j \, p_{ji} = p_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} {}_0p_{0j}^{n} \, p_{ji}$$

$$\text{Dar } \sum_{j=1}^{\infty} {}_0P^n_{0j}\, p_{ji} = \begin{cases} {}_0P^{n+1}_{0i} & \text{pt } i \neq 0 \\ f(0,0)^{n+1} & \text{pt. } i = 0 \end{cases}$$

Deci pentru $i \neq 0$

$$\sum_{j=0} v_j p_{ji} = p_{0i} + \sum_{n=1}^{\infty} {}_0P^{n+1}_{0i} = \sum_{n=0}^{\infty} {}_0P^{n+1}_{0i} = {}_0P^{*}_{0i} = v_i$$

$$(\text{pt. } i \neq 0 \ p_{0i} = {}_0P_i)$$

şi pentru $i = 0$

$$\sum_{j=0}^{\infty} v_j p_{j0} = p_{00} + \sum_{n=1}^{\infty} f(0,0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} f(0,0)^{n+1} = f(0,0) = 1 = v_0$$

43. Fie I o mulţime cel mult numărabilă, $I^N = \{\omega = (i_0, i_1, \ldots) / i_k \in I\}$ şi $X_n : I^N \longrightarrow I$ proiecţia de ordin n.

Pentru $k \in N$ fie aplicaţia $\theta_k : I^N \longrightarrow I^N$ definită prin $X_n \circ \theta_k = X_{n+k}$ pentru orice n şi pentru $\nu : I^N \to N$ fie aplicaţiile $X_\nu : I^N \to I$, $\theta_\nu : I^N \longrightarrow I^N$ definite prin $X_\nu(\omega) = X_{\nu(\omega)}(\omega)$, $\theta_\nu(\omega) = \theta_{\nu(\omega)}(\omega)$

Fie P o matrice de tranziţie pe I, q o lege pe I şi fie P_q probabilitatea pe $\mathcal{K} = \mathcal{B}(X_n \mid n \geq 0)$ în raport cu care (X_n) este lanţ Markov cu matricea de trecere P şi legea iniţială q.

Să se arate că dacă ν este o $\mathcal{K}_n = \mathcal{B}(X_0, \ldots X_n)$ -opțională finită atunci are loc egalitatea:

(1) $P_q(A \cap \theta_\nu^{-1}(B)) = P_q(A)P_j(B)$

pentru orice $j \in I$, $A \in \mathcal{K}_\nu$, $A \subset \{X_\nu = j\}$ și $B \in \mathcal{B}$.
In particular să se deducă egalitatea

(2) $M_{P_q}\left[Z \circ \theta_\nu \mid \mathcal{K}_\nu\right] = b(X_\nu)$ $\quad P_q$ - a.s.

pentru orice v.a. $Z \geqslant 0$ unde $b(i) = M_i(Z)$

<u>Soluție</u>. Presupunem pentru început că ν este constant, deci $\tau \equiv n$.

Dacă $A \in \mathcal{K}_n$ și $B \in \mathcal{K}$ sînt de forma: $A = \{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\}$, $B = \{X_0 = j_0, \ldots, X_p = j_p\}$ atunci egalitatea de demonstrat se scrie sub forma

$$P_q(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n; X_{n+1} = j_1, \ldots X_{n+p} = j_p) =$$
$$= P_q(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) \cdot P_{i_n}(X_0 = j_0, \ldots, X_p = j_p)$$

Din definiția lanțului Markov rezultă că cei doi membri ai egalității precedente sînt egali cu

$q_{i_0} p(i_0 i_1) \ldots p(i_{n-1}, i_n) p(j_0, j_1) \ldots p(j_{p-1}, j_p)$ dacă $i_n = j_0$

și sînt egali cu 0 dacă $i_n \neq j_0$, deci egalitatea are loc. Apoi teorema de unicitate a probabilităților permite să concludem că egalitatea (1) are loc pentru A,B ca în enunțul teoremei.

Fie acum ν arbitrară, $A \in \mathcal{K}_\nu$, $A \subset \{X_\nu = j\}$ și $B \in \mathcal{K}$ Deoarece $A \cap \{\nu = n\} \in \mathcal{K}_n$ conform celor precedente putem scrie:

$$P_q\left[\{\nu = n\} \cap A \cap \theta_\nu^{-1}(B)\right] = P_q\left[(\{\nu = n\} \cap A) \cap \theta_n^{-1}(B)\right] =$$
$$= P_q\left[\{\nu = n\} \cap A\right] \cdot P_j(B)$$

de unde însumînd după n rezultă (1).

Pentru egalitatea (2) este suficient de arătat că:

$$\int_A Z\circ\theta_\nu \, dP_q = \int_A b(X_\nu)\, dP_q$$ dacă $A\in\mathcal{K}_\nu$ sau avînd în vedere teorema clasei monotone putem presupune că

$Z = \chi_B,\ B\in\mathcal{B}$

In acest caz avem $\int_A \chi_B\circ\theta_\nu \, dP_q = P_q(A\cap\theta_\nu^{-1}(B)) =$

$$\sum_{j\in I} P_q(A\cap\{X_\nu = j\}\cap\theta_\nu^{-1}(B)) = \sum_{j\in I} P_q(A\cap\{X_\nu = j\})P_j(B) =$$

$$= \sum_{j\in I}\int_{A\cap\{X_\nu=j\}} P_j(B)\,dP_q = \sum_{j\in I}\int_{A\cap\{X_\nu=j\}} P_{X_\nu}(B)\,dP_q =$$

$$= \int_A P_{X_\nu}(B)\,dP_q.$$

44. Fie $(X_n)_{n\geqslant 0}$ un lanț Markov omogen cu repartiția inițială ε_i. Definim prin recurență următorul șir $(\nu_i^k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathcal{K}_n \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(X_0,\ldots,X_n)$-opționale:

$\nu_i^0 = 0,\ \nu_i^{k+1} = \min\{n>\nu_i^k\ ;\ X_n = i\},\ \nu_i^{k+1} = \infty$ dacă

mulțimea de sub min este vidă. Dacă i este stare recurentă și Z este o v.a. cu valori în N și $\mathcal{K}_{\nu_i^l}$- măsurabilă să se arate că şirul $(Z\circ\theta_{\nu_i^k})_{k\geq 0}$ este un şir de v.a. independente şi identic repartizate.

<u>Soluţie</u>. Deoarece i este recurentă rezultă că lanţul (X_n) o vizitează de o infinitate de ori, aşa că v.a ν_i^k sînt bine definite (finite a.s.).

Fie $p(j) = P_i(Z=j)$; problema este rezolvată dacă arătăm că:

$$P_i(Z\circ\theta_{\nu_i^k} = j_k,\ 0\leq k\leq \ell) = p(j_0)\dots p(j_\ell)$$

Vom dovedi aceasta prin inducţie după ℓ

Pentru $\ell=0$ afirmaţia este imediată. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $\ell-1$ şi să o arătăm pentru ℓ

Aplicînd egalitatea (1) din problema precedentă opţionalei ν_i^1 şi evenimentelor $A = \{Z=j_0\}$, $B=\{Z\circ\theta_{\nu_1^k} = j_{k+1},\ 0\leq k<\ell\}$ vom obţine:

$P_i(A\cap\theta_{\nu_i^1}^{-1}(B)) = P_i(A)P_i(B)$ deoarece $X_{\nu_i^1} = i$ pe A.

Ori $A\cap\theta_{\nu_i^1}^{-1}(B) = \{Z=j_0, Z\circ\theta_{\nu_i^k}\circ\theta_{\nu_i^1} = j_{k+1},\ 0\leq k<\ell\} =$

$=\{Z\circ\theta_{\nu_i^k} = j_k,\ 0\leq k\leq\ell\}$ deoarece $\theta_{\nu_i^k}\circ\theta_{\nu_i^1} = \theta_{\nu_i^{k+1}}$

Pe de altă parte ipoteza inducţiei arată că $P_i(B) = p(j_1)\dots p(j_\ell)$.

45. (Urna lui Polya). Se consideră o urnă care la momentul inițial conține a bile albe și b bile negre. Se extrage o bilă, după care bila extrasă este reintrodusă în urnă împreună cu c bile de aceiași culoare. Fie x_n numărul bilelor albe obținute în primele n extrageri $0 \leq x_n < n$, $x_0 = 0$ prin definiție. Dacă $x_n = i$, aceasta însemnînd că în primele n extrageri au apărut i bile albe și n-i bile negre, compoziția urnei înaintea celei de (n+1) - a extragerii va fi atunci a+ci bile albe și b+(n-i)c bile negre. Evident probabilitatea ca x_{n+1} să ia o anumită valoare, condiționată de cunoașterea valorilor lui x_0, $x_1, \ldots, x_n$ nu va depinde decît de valoarea luată de x_n, deci x_n este un lanț Markov.

Să se calculeze probabilitatea de trecere:

Soluție:

$$P(x_{n+1} = i \mid x_n = i) = \frac{b+(n-i)c}{a+b+nc}$$

$$P(x_{n+1} = i+1 \mid x_n = i) = \frac{a+ic}{a+b+nc}$$

$$P(x_{n+1} = j \mid x_n = i) = 0 \quad \text{pt. } j \neq i, i+1$$

pt. orice $0 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 0$

Se observă deci că acest lanț Markov nu este omogen și în plus spațiul stărilor variază în timp (stările i posibile la momentul n, cele pentru care $p(x_n=i) > 0$, sînt $0,1,\ldots,n$).

BIBLIOGRAFIE

1. Breiman L., Probability. Addison-Wesley, 1968
2. Ciucu G., Tudor C., Probabilităţi şi procese stocastice. Ed. Academiei R.S.R. 1979.
3. Ciucu G., Sâmboan G., Teoria probabilităţilor şi statistică matematică - Culegere de probleme. Ed. tehnică, Bucureşti,1962.
4. Ciucu G., Craiu V., Săcuiu I., Probleme de teoria probabilităţilor. Ed. tehnică, Bucureşti, 1974.
5. Cuculescu I., Procese Markov şi funcţii excesive. Ed. Academiei R.S.R., 1968.
6. Cuculescu I., Elemente de teoria proceselor stocastice. Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1978.
7. Cinlar E., Introduction to Stochastic Processes.
8. Chung K.,L., Marcov chains with stationary transition probabilities. Springer-Verlang Berlin, Heidelberg New York, 1967.
9. Doob J.L., Stochastic processes, John Wiley, 1953.
10. Emelianov G.V., Skitovici V.P., Probleme de teoria probabilităţilor şi statistică matematică. (în ruseşte) Izd.Leningr. Univ.1967.
11. Feller W., An introduction to probability theory and its application, vol. I.John Wiley 1966).
12. Ghihman I., Skorohod A.V., Procese stocastice, vol. III (în ruseşte).Izd.Nauka, 1975.
13. Iosifescu M., Tăutu P., Procese stohastice şi aplicaţii în biologie şi medicină.Ed.Acad.RSR,1968.

14. Iosifescu M., Lanţuri Markov finite şi aplicaţii. Ed. tehnică, 1977.
15. Karling S., A first course in stochastic processes. Academic Press, New York and London, 1968.
16. Kemeny J.G., Snell J.L., Finite Markov chain. Princeton, Van Nostrad, 1960.
17. Kemeny J.G., Snell J.L., Denumerable Markov chain. Ne New York, 1966
18. Meyer P.A., Probabilité et Potential. Herman, 1966.
19. Meyer P.A., Martingales and stochastic integrals, I. Springer-Verlang, 1972.
20. Mihoc Gh., Bergthaller C., Urseanu V., Procese stochastice. Elemente de teorie şi aplicaţii. Ed. şt. şi enciclopedică, 1978.
21. Meşalkin L.D., Culegere de probleme de teoria probabilităţilor (în ruseşte). Izd.Mosk.Univ. 1963.
22. Neveu J., Martingales à temps discret. Masson, 1972.
23. Onicescu O., Mihoc Gh., Ionescu-Tulcea C.T., Calculul probabilităţilor şi aplicaţii. Ed. Acad. R.P.R., 1956.
24. Onicescu O., Probabilităţi şi procese aleatoare. Ed. şt. şi enciclopedică, 1977.
25. Renyi A., Probability theory. Budapest, 1970.
26. Volodin B.G., şi alţii, Culegere de probleme de teoria probabilităţilor, statistică matematică şi teoria funcţiilor aleatoare. (în ruseşte) Izd. Nauka, Moscova, 1965.
27. M. Bad., D.Florea, C.Tudor, Probleme de teoria probabilităţilor (partea I).Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1978.

Bun de tipar 1.07.980 Apărut iul.80

Tiraj 600 Coli tipar (Fasc.) 13

Tipar executat sub comanda nr.41/980
Tipografia Universității București

Lei 11,65