

D. C. U.  
N 515103

MARIA CORNELIA FULEA

CONSTANTIN CIOACA

# TRAVAUX PRATIQUES DE MECANIQUE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI  
1997





BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITARĂ  
București

Cota N. 5/5 103  
Inventar - C0163297

MARIA CORNELIA FULEA

CONSTANTIN CIOACĂ

# TRAVAUX PRATIQUES DE MÉCANIQUE

EDITURA UNIVERSITAȚII DIN BUCUREȘTI  
1997

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ  
BUCUREȘTI  
COTA IV 515103

339

78

Referenți științifici: Conf. dr. PETRE ION  
Șef lucrări dr. CORNEL STĂNESCU

B.C.U. București



C 01632 97

© Editura Universității din București  
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN 973-575-146-1

## TABLE DES MATIÈRES

Théorie des erreurs accidentelles .....	5
Erreurs des fonctions .....	14
La vérification de la loi de l'espace et de la vitesse en utilisant le plan incliné .....	18
La détermination de l'intensité de la pesanteur $g$ en utilisant le pendule réversible de Kater .....	22
La détermination du moment d'inertie d'un solide en utilisant le pendule de Hartl .....	28
La vérification du théorème de Steiner .....	31
La détermination de la densité des liquides en utilisant la balance Mohr-Westphall .....	38
Le calcul de la densité d'un gaz à l'aide de l'appareil de Bunsen .....	42
La détermination du module d'élasticité (Young) d'un fil soumis à la traction .....	46
La détermination du module d'élasticité d'une barre .....	49
Méthode hydrodynamique pour mesurer l'intensité de la pesanteur $g$ .....	54
La composition des oscillations perpendiculaires .....	59



# THÉORIE DES ERREURS ACCIDENTELLES

## 1. a) Erreurs accidentelles; b) Propriétés

a) Si on effectue „ $n$ ” mesurages directs sur une grandeur physique  $X$ , (par exemple: longueur, masse) dans les mêmes conditions et avec la même précision (c'est-à-dire avec le même appareil, les mêmes précautions), on obtient les valeurs individuelles  $x_1, \dots, x_n$ . Les valeurs  $x_i$  sont dispersées autour de la valeur réelle  $x_0$ . Autrement dit les valeurs obtenues peuvent être inférieures par rapport à la vraie valeur  $x_0$ .

On constate que les résultats  $x_i$  sont presque les mêmes, parfois la coïncidence est totale. Si en répétant les mesurages on obtient rigoureusement les mêmes valeurs individuelles, ça signifie que la méthode de mesurage utilisée n'est pas assez précise. Chaque valeur individuelle  $x_i$  est affectée par l'erreur absolue accidentelle  $\Delta_i = x_i - x_0$  (ou  $\Delta_i = x_0 - x_i$ ). La valeur mesurée  $x$  de la grandeur  $X$  (ou l'erreur absolue accidentelle  $\Delta = x_0 - x_i$ ) est une variable aléatoire continue.

Pour chaque mesurage on obtient une seule valeur  $x_i$  dont l'apparition ne modifie pas la probabilité pour d'autres valeurs et par conséquent on tire la conclusion que les erreurs constituent un système complet d'événements incompatibles et indépendants.

Donc, pour des mesurages individuels obtenus avec la même précision et un nombre d'essais assez grand ( $n \gg 1$ ) on peut appliquer aux erreurs accidentelles le théorème du calcul probabilistique.

La théorie des erreurs accidentelles est en effet une théorie statistique, donc ses conclusions ne sont pas certaines, mais les plus probables.

b) Les propriétés des erreurs accidentelles sont:

1. Toutes les erreurs accidentelles absolues  $\Delta_i$  sont inférieures à une certaine limite (le principe limitatif).

2. Pour un nombre de mesurages „ $n$ ” assez grand, ( $n \gg 1$ ) on constate que le nombre des erreurs absolues négatives est égal au nombre des erreurs absolues positives et la somme algébrique des erreurs absolues accidentelles est extrêmement petite (le principe distributif).

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \rightarrow 0$$

Autrement dit, les erreurs accidentelles sont dispersées symétriques d'un côté et de l'autre de la valeur réelle  $x_0$ ; les erreurs accidentelles de même module et de signe contraire ont la même probabilité d'apparition.

En conclusion, la fonction de distribution  $f(x)$  est une fonction de  $|x - x_0|$  ou  $(x - x_0)^2$ .

3. Les erreurs  $\Delta_i$  petites en valeur absolue sont plus probables que les erreurs  $\Delta_i$  d'une valeur absolue grande.

Ce fait implique que la fonction pour la distribution des erreurs  $f(x)$  diminue par rapport à  $(x - x_0)^2$  (le principe causal).

4. Parfois, on dit encore que la moyenne arithmétique des erreurs  $\Delta_i$  tend vers 0 pour un nombre infini des mesurages (le principe probabilistique).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_n}{n} = 0$$

Les propriétés énumérées ci-dessus ont été obtenues dans la pratique et sont considérées des axiomes.

*Exemple n° 1:* Soit une série de 40 erreurs accidentelles, ordonnées par rapport à leurs valeurs absolues.

+ 0,02	- 0,25	+ 0,66	- 1,15
- 0,02	- 0,28	+ 0,67	+ 1,18
- 0,05	- 0,50	+ 0,71	+ 1,27
+ 0,15	+ 0,50	- 0,72	- 1,28
- 0,15	- 0,50	+ 0,82	+ 1,29
+ 0,15	- 0,52	- 0,88	- 1,30
- 0,17	- 0,56	- 0,91	+ 1,45
- 0,17	- 0,58	+ 0,95	- 1,55
- 0,22	+ 0,65	+ 0,98	+ 1,65
+ 0,25	- 0,66	+ 1,12	- 2,42

*Observations:*

a) il n'y a aucune règle de succession par rapport à la grandeur aussi bien qu'au signe, donc il s'agit d'erreurs accidentelles (aléatoires);

b) l'erreur maximale contenue dans la série est -2,42 et sa valeur absolue est une limite pour toutes les autres (le principe limitatif);

c) le nombre d'erreurs dont la valeur absolue est inférieure à l'unité est 29 sur 40: il y a donc plus d'erreurs petites en valeur absolue que des erreurs grandes en valeur absolue (le principe causal);

d) il y a 19 valeurs positives et 21 négatives; la somme des erreurs positives (+ 14,64) est très proche de la somme des erreurs négatives (- 14,62) (le principe distributif);

e) la moyenne arithmétique  $\frac{\Delta_1 + \dots + \Delta_{40}}{40} = \frac{0,02}{40} = 0,0005$  se trouve dans le voisinage du 0 (le principe probabilistique).

*Exemple n° 2:* Dans le tableau ci-dessous sont présentés les résultats pour  $n = 100$  mesurages sur la célérité de la lumière dans le vide  $c$ , obtenus par Michelson en 1879. Pour avoir une image plus claire sur les fréquences relatives d'apparition des certains résultats (et par conséquent sur leurs probabilités d'apparition), figurons les données du tableau situé à la droite (un histogramme) comme des barres verticales dont la longueur est égale au nombre  $f_i$  d'apparition d'une valeur

individuelle ( $f_i = \frac{n_i}{n}$ ,  $n = 100$ )

$c$ [km/s]	$f_i = \frac{n_i}{n}$
299.500	1/100
299.550	2/100
299.600	8/100
299.650	14/100
299.700	22/100
299.750	25/100
299.800	20/100
299.850	7/100
299.900	1/100

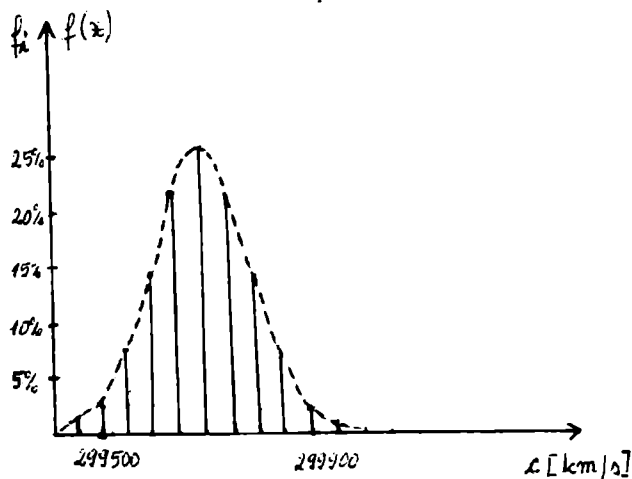


Fig. 1



Si le nombre des mesurages est suffisamment grand  $f_i$  s'approche d'une fonction  $f(x)$  probabilistique. Au lieu de l'histogramme on peut construire une courbe qui représente la densité de répartition  $f(x)$  (la fonction de distribution pour les erreurs accidentelles) sous la forme d'une cloche.

## 2. La courbe de Gauss

Dans la figure n° 1 on a figuré le résultat typique d'une série de „n” mesurage directs, effectués dans des conditions identiques, sur la même grandeur physique. Les valeurs individuelles  $x_i$  (et les erreurs accidentelles  $\Delta_i$ ) ont des différentes fréquences d'apparition. Les valeurs des résultats  $x_i$  plus proche de la valeur réelle  $x_0$  ont une fréquence relative plus grande par rapport aux résultats individuels  $x_i$  éloignés de  $x_0$ .

Gauss a démontré (1821) que la densité de répartition  $f(x)$  qui obéit aux axiomes fondamentaux des erreurs accidentelles peut être mise sous la forme:  $f(x) = k e^{-h^2(x-x_0)^2}$  où  $k, h$  sont des constantes.

Cette fonction est nommée la loi de distribution normale de Gauss (la cloche de Gauss) - fig. n° 2.

La densité de répartition  $f(x)$  est très importante parce que le produit  $f(x) \Delta x = \Delta P$  donne la définition de la probabilité pour qu'une valeur individuelle soit comprise dans l'intervalle  $x$  et  $x + \Delta x$ . Pour  $\Delta x \rightarrow 0$ , on obtient  $dP = f(x) \cdot dx$ .

La constante  $k$  peut être déterminée à condition que la superficie comprise entre la fonction de répartition  $f(x)$  et l'axe  $Ox$  soit égale à unité. Cela signifie que la probabilité d'obtenir n'importe quelle valeur possible est égale à l'unité.

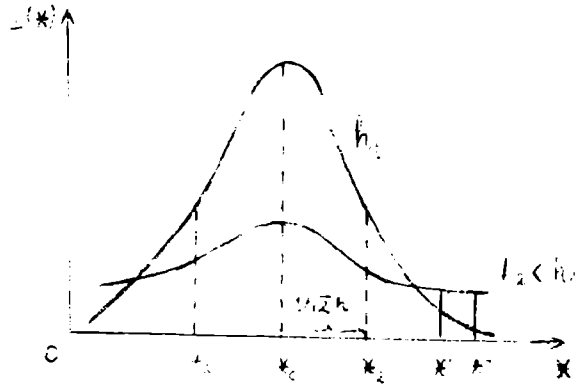


Fig. 2

En utilisant l'intégrale Poisson  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ , il s'ensuit que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 = k \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2(x-x_0)^2} dx = \frac{k}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{k}{h} \sqrt{\pi} = 1$$

On a noté:  $z = h(x - x_0) \Rightarrow dz = h dx$

On a:  $k = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$  et donc pour  $f(x)$ :  $f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2}$

La signification de la constante  $h$  sera obtenue en calculant les coordonnées des points d'inflexion de la courbe. Les dérivées du premier et du second ordre sont:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} (x-x_0) e^{-h^2(x-x_0)^2} \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}} [1 - 2h^2(x-x_0)^2] e^{-h^2(x-x_0)^2}$$

De l'annulation de la dérivée du premier ordre on a  $x = x_0$  qui correspond au maximum de la fonction  $f(x)$ .

De l'annulation de la dérivée du second ordre on obtient les points d'inflexion:  $x_{2,3} = x_0 \pm \frac{1}{\sqrt{2} \cdot h}$ .

La constante  $h$  caractérise la largeur de la courbe de Gauss. Si  $h_2 < h_1$ , la courbe sera plus large que dans le cas  $h = h_1$  (fig. n° 2). Pour  $h$  grand la courbe est très étroite, les erreurs sont petites, autrement dit les valeurs  $x_i$  sont groupées autour de  $x_0$ . Pour  $h$  petit la courbe est très large et les valeurs  $x_i$  sont éloignées par rapport à  $x_0$ .

Par conséquent on peut considérer  $h$  comme un indicateur sur la précision des mesurages (sa dimension est l'inverse de celle de  $x$ ).

La probabilité d'obtenir un résultat compris entre  $x'$  et  $x''$  (voir fig. n° 2) est donnée par la surface comprise entre la courbe, les deux ordonnées et l'axe  $Ox$ :  $\int_{x'}^{x''} f(x) dx$ . La courbe  $f(x)$  est symétrique par rapport à  $x_0$  et tend vers 0 pour  $x \rightarrow \pm \infty$ .

### 3. a) Estimation sur la vraie valeur $x_0$

#### b) Erreurs apparentes. Le principe de la moyenne arithmétique

a) Pour une série de mesurages d'égale précision, la meilleure valeur de la grandeur mesurée est la moyenne arithmétique des résultats obtenus:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

*Observation:*  $\bar{x}$  est la valeur la plus proche par rapport à la vraie valeur  $x_0$ , mais  $\bar{x}$  ne coïncide pas avec  $x_0$ .

b) Les erreurs apparentes (probables ou résiduelles) sont définies comme l'écart des résultats  $x_i$  par rapport à la moyenne arithmétique.

Notation:  $v_i = \bar{x} - x_i$

*Propriétés des erreurs apparentes:*

1. La somme des erreurs apparentes pour une série de déterminations est nulle.

$$\sum_{i=1}^n v_i = 0$$

*Démonstration:*  $\sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i) = (\bar{x} - x_1) + \dots + (\bar{x} - x_n) = n\bar{x} - (x_1 + \dots + x_n) = n\bar{x} - \sum_{i=1}^n x_i$

Parce que:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , il s'ensuit que  $\sum_{i=1}^n v_i = 0$ .

2. On a établi que la moyenne arithmétique  $\bar{x}$  est la valeur la plus probable de la grandeur mesurée, la plus proche de la vraie valeur  $x_0$ . Pour un nombre suffisamment grand des mesurages ( $n \rightarrow \infty$ ), on a  $\bar{x} \rightarrow x_0$ .

*Démonstration:* On considère la somme:

$$\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) = \sum_{i=1}^n x_0 - \sum_{i=1}^n x_i = nx_0 - \sum_{i=1}^n x_i$$

On sait que:  $\sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) = nx_0 - n\bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = x_0 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)$$

On note  $\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} - x_0$  l'erreur de la moyenne arithmétique ou l'erreur moyenne quadratique de la moyenne arithmétique.

Pour  $n$  suffisamment grand, la somme  $\sum_{i=1}^n (x_0 - x_i)$  n'est pas nulle, mais tend statistiquement vers 0,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_0 - x_i) = 0$  puisque on a le même nombre des valeurs positives et négatives. De plus, le dénominateur tend vers l'infini ( $n \rightarrow \infty$ ).

**Conclusion:** La différence entre  $x_o$  et  $\bar{x}$  est extrêmement réduite parce que dans la somme considérée les erreurs ( $x_o - x_i$ ) se compensent mutuellement, puisque la valeur de  $n$  est considérée grande.

3. Entre les erreurs apparentes  $v_i = \bar{x} - x_i$  et les erreurs exactes  $\Delta_i = x_o - x_i$  il y a la relation:

$$v_i = \bar{x} - x_i = x_o - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_o - x_k) - x_i = (x_o - x_i) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_o - x_k); \text{ Il s'ensuit que: } v_i - \Delta_i = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Delta_k.$$

4. Entre les erreurs absolues (exactes ou réelles)  $\Delta_i = x_o - x_i$  et les erreurs apparentes (résiduelles ou probables) il y a la relation:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_o - x_i)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 \text{ ou}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2$$

La relation ci-dessus entraîne:

a) l'inégalité:  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 < \sum_{i=1}^n (x_o - x_i)^2$

b) si la somme  $\sum_{i=1}^n (x_o - x_i)^2$  est minimale, la somme  $\sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2$  sera-t-elle aussi.

#### 4. a) Erreur moyenne quadratique d'un mesurage individuel

#### b) La relation entre l'indice de précision $h$ et l'erreur moyenne quadratique

a) On note par  $\sigma$  l'erreur moyenne quadratique d'un mesurage individuel; du point de vue physique  $\sigma$  nous donne un critère d'appréciation de la précision sur les mesurages  $x_1, \dots, x_n$  individuels.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_o - x_i)^2}$$

**Exemple:** A la suite des manipulations effectuées pour mesurer la densité à l'aide de picnomètre deux étudiants (A et B) ont obtenu les résultats:

Mesurage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Etudiants
$\rho$	530	480	460	520	490	500	540	470	480	530	A
[kg/m <sup>3</sup> ]	500	490	430	520	510	490	580	500	530	510	B

On suppose que la vraie valeur de la densité du liquide soit  $\rho_o = 500 \text{ kg/m}^3$ . En calculant les erreurs moyennes quadratiques dans chaque cas, on obtient:  $\sigma_A = \sqrt{\frac{7200}{10}} \cong 27 \text{ kg/m}^3$  et

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{13000}{10}} = 36 \text{ kg/m}^3.$$

Donc les mesurages effectués par l'étudiant A sont plus précis par rapport à l'étudiant B.

Il faut accentuer que chaque manipulation faite par A et B est affectée par  $\sigma_A$  et  $\sigma_B$ .

Du point de vue pratique l'erreur moyenne quadratique possède l'avantage de conserver la même valeur pour un nombre de mesurages suffisamment grand. Donc, avec un nombre relativement petit des mesurages, on peut avoir une valeur  $\sigma$  stable.

b) La relation entre l'indice de précision  $h$  et l'erreur moyenne quadratique  $\sigma$  est:  $h = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$ .

La forme finale de la densité de distribution Gauss sera:

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-x_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

c) La signification géométrique de l'erreur moyenne quadratique:

Pour établir la signification géométrique de  $\sigma$ , calculons d'une façon approximative la

superficie de la surface hachurée, donnée par l'intégrale:  $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{x_0-\sigma}^{x_0+\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} dx$

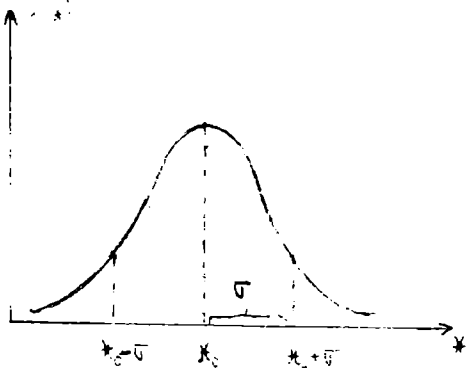


Fig. 3

La superficie considérée est égale approximativement à deux fois la superficie du trapèze double hachuré dont la hauteur est  $\sigma$ , la petite base est  $f(x_0 + \sigma)$  et la grande base est  $f(x_0)$ .

En conséquence:

$$A = [f(x_0 + \sigma) + f(x_0)] \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (e^{-1/2} + 1) = \frac{1}{2,51} \left( \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \right) \cong 0,641 \simeq \frac{2}{3}$$

**Conclusion:** La probabilité de trouver la vraie valeur  $x_0$  de la grandeur considérée  $x$  dans l'intervalle  $[x_0 - \sigma; x_0 + \sigma]$  est égale à  $\frac{2}{3} = 67\%$ . Autrement dit, environ 67% des valeurs individuelles  $x_1, \dots, x_n$  sont situées dans l'intervalle, le reste de 33% se trouve à l'extérieur. En remplaçant  $\sigma$  et  $x_0$  avec leurs estimations  $S_{\bar{x}}$  et  $\bar{x}$ , le résultat d'un mesurage direct sera rendu sous la forme:  $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$ . Donc la probabilité que la moyenne d'une autre série des mesurages directs soit comprise dans l'intervalle  $[\bar{x} - S_{\bar{x}}; \bar{x} + S_{\bar{x}}]$  sera la même, c'est-à-dire 2/3.

### 5. L'erreur moyenne quadratique de la moyenne arithmétique (l'erreur de la moyenne arithmétique)

Par définition, l'erreur de la moyenne arithmétique est:  $\sigma_{\bar{x}} = \bar{x} - x_0$ .

Du fait que:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ et } \sum_{i=1}^n x_0 = nx_0$$

on peut écrire:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)$$

Si on élève au carré, il en résulte que:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \right]^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_0) \cdot (x_j - x_0)$$

Pour le dernier terme on écrit:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n (x_i - x_0)(x_j - x_0) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_j - x_0) = \left[ \sum_{i=1}^n \Delta_i \right] \left[ \sum_{j=1}^n \Delta_j \right]$$

Les erreurs réelles  $\Delta_i, \Delta_j$  sont des grandeurs indépendantes et conformément au principe distributif leurs sommes tendent vers 0.

Par conséquent,  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (x_i - x_0)^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_o - x_i)^2}$$

Par rapport à l'erreur moyenne quadratique  $\sigma$  qui tend vers une valeur stable avec l'accroissement du nombre „ $n$ ” des mesurages, l'erreur de la moyenne arithmétique  $\sigma_{\bar{x}}$  ne possède aucune limite pour baisser.

Pour calculer l'erreur moyenne quadratique  $\sigma$  et l'erreur de la moyenne arithmétique  $\sigma_{\bar{x}}$  on doit savoir les erreurs absolues réelles  $\Delta_i = x_o - x_i$ , donc la vraie valeur  $x_o$ ; ce fait a lieu très rarement, par exemple quand on peut calculer  $x_o$  d'une façon théorique.

Voilà pourquoi il est préférable de remplacer les erreurs absolues réelles  $\Delta_i$  avec les erreurs absolues apparentes  $v_i = \bar{x} - x_i$ , et les relations utilisées dans la pratique seront:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2}$$

Dans la littérature  $\sigma$  et  $\sigma_x$  sont notés par  $S$  et  $S_{\bar{x}}$ , où:

$S$  est nommée l'erreur standard d'un mesurage individuel.

$S_{\bar{x}}$  est nommée l'erreur standard de la moyenne arithmétique.

$S$  sera l'indicateur statistique de la dispersion des mesurages dans une série de „ $n$ ” déterminations sur la même grandeur physique.

$S_{\bar{x}}$  est l'indicateur statistique de la dispersion de la moyenne arithmétique obtenue par l'intermédiaire d'une série de mesurages sur la même grandeur physique.

$S_{\bar{x}}$  est un critère d'appréciation pour la précision du résultat final des déterminations effectuées.

Le résultat final d'un mesurage direct de la grandeur  $x$  doit respecter la forme:

$$x = \bar{x} \pm S_{\bar{x}} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \pm \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2} \right)$$

suivi par l'unité de mesure.

*Exemple:* La résistance d'un conducteur a été mesurée directement 10 fois et les résultats se trouvent dans le tableau ci-dessous.

Comment doit-on écrire le résultat final des mesurages et quelle est sa signification?

Afin de pouvoir répondre à ces questions, on doit calculer les grandeurs:  $\bar{R}$ ,  $v_i = R_i - \bar{R}$ ,  $v_i^2 = (R_i - \bar{R})^2$ .

$R_i$	$v_i = R_i - \bar{R}$	$v_i^2 = (R_i - \bar{R})^2$
6,270	-0,004	16.10 <sup>-6</sup>
6,277	+0,003	9.10 <sup>-6</sup>
6,271	-0,003	9.10 <sup>-6</sup>
6,273	-0,001	1.10 <sup>-6</sup>
6,276	+0,002	4.10 <sup>-6</sup>
6,278	-0,002	4.10 <sup>-6</sup>
6,275	+0,004	16.10 <sup>-6</sup>
6,277	+0,001	1.10 <sup>-6</sup>
6,274	+0,003	9.10 <sup>-6</sup>
0	0	0
La	La	La
somme	somme	somme
62,743	+0,003	69.10 <sup>-6</sup>

Pour  $\bar{R}$ ,  $S$  et  $S_{\bar{R}}$  on calcule:

$$\bar{R} = \frac{R_1 + \dots + R_{10}}{10} = 6,74\Omega \text{ la moyenne arithmétique.}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{10-1} \sum_{i=1}^{10} (R_i - \bar{R})^2} = 2,8 \cdot 10^{-3} \Omega \text{ l'erreur moyenne quadratique d'un mesurage individuel;}$$

$$S_{\bar{R}} = \frac{S}{\sqrt{10}} = \frac{2,8 \cdot 10^{-3}}{3,16} \cong 0,001\Omega \text{ l'erreur standard de la moyenne arithmétique.}$$

Le résultat final s'écrit:

$$R = (6,274 \pm 0,001) \Omega$$

*La signification du résultat final:* On peut considérer que la vraie valeur de la résistance  $R_0$  est comprise dans l'intervalle 6,273 et 6,275  $\Omega$ .

## 6. Niveau de confiance. Intervalle de confiance. Définitions

Soit  $x_1, \dots, x_n$  une série de „ $n$ ” déterminations effectuées dans des conditions identiques sur la même grandeur  $x$ , et les indicateurs statistiques attachés:  $\bar{x}$ ,  $S$ ,  $S_{\bar{x}}$ .

Par définition, on appelle niveau de confiance  $P^*$  du mesurage, la probabilité avec laquelle on peut affirmer que la vraie valeur  $x_0$  de la grandeur mesurée  $x$  se trouve dans l'intervalle de confiance.

L'intervalle de confiance du mesurage est donné par définition comme l'intervalle dont les extrémités coïncident avec les valeurs extrêmes de la série des mesurages, dans notre cas:

$$[\bar{x} - S_{\bar{x}}; \bar{x} + S_{\bar{x}}].$$

*Exemple:* Revenons au calcul de la résistance, pour laquelle on sait  $\bar{R} = 6,274\Omega$ ; et  $S_{\bar{R}} = 0,001\Omega$ .

On trouve ainsi l'intervalle de confiance qui contient la vraie valeur  $R_0$  avec un niveau de confiance  $P^* = 0,90$ ; on va utiliser le tableau pour la fonction  $t(P^*; k)$

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

Dans notre cas,  $n = 10$ , donc  $k = 9$ .

Par conséquent,  $t(P^*; k) = t(0,90; 9) = 1,833$  et le produit  $t(P^*; k) \cdot S_{\bar{R}} = 1,833 \cdot 0,001 = 0,00188 \cong 0,002$ .

Le résultat final sera:

$$R = \bar{R} \pm t(P^*; k) \cdot S_{\bar{R}} = (6,274 \pm 0,002)\Omega.$$

L'intervalle de confiance peut être écrit aussi comme (6,276; 6,272).

*Observation:* Afin d'obtenir l'intervalle de confiance imposé, pour un certain niveau de confiance  $P^*$  il nous faut des mesurages individuels dont la précision est élevée, donc qui conduit à la diminution de l'erreur standard.

Par conséquent, plus une série de „ $n$ ” mesurages individuels est précise, plus la dispersion des résultats individuels est petite.



**7. Conclusions pratiques en ce qui concerne  
les erreurs accidentelles d'une série  
des mesurages directs dans les mêmes conditions**

a) La théorie des erreurs accidentelles, par sa nature probabilistique donne des bons résultats pour „ $n$ ” suffisamment grand:  $n = 10 + 15$ .

Il n'est pas admis d'appliquer les relations présentées pour  $n < 5$ . Egalement, il n'est pas indiqué de prendre  $n > 20$  (le gain de précision sera négligeable par rapport à l'effort du mesurage).

b) Les résultats individuels  $x_i$  qui sont en total désaccord avec  $\bar{x}$  et les autres mesurages sont des erreurs visibles et par conséquent seront éliminés. La moyenne arithmétique et l'erreur moyenne quadratique seront calculées avec le reste des données.

c) La valeur la plus proche par rapport à la vraie valeur de la grandeur physique considérée est la moyenne arithmétique  $\bar{x}$  des valeurs individuelles  $x_1, \dots, x_n$ .

d) L'erreur associée à un seul mesurage est l'erreur standard  $S$ .

e) L'erreur de la moyenne arithmétique est l'erreur standard de la moyenne  $S_{\bar{x}}$ .

**8. a) Erreurs de lecture**

**b) Classe de précision (c) pour un appareil**

a) Dans le cas du mesurage de la longueur à l'aide d'une règle, du temps, à l'aide d'un chronomètre, de la masse à l'aide d'une balance, le résultat sera affecté par une erreur directe, due à l'imprécision de lecture.

Dans la pratique, on considère l'erreur de lecture égale à la plus petite division (ou sa moitié) de l'échelle de l'appareil.

Pour: - une règle:  $\Delta x = 0,5 \text{ mm}$

- un chronomètre:  $\Delta \tau = 0,2 \text{ s}$

- une balance:  $\Delta m = 0,5$  de la valeur du plus petit poids accepté par la balance.

b) La classe de précision indique l'erreur relative calculée en pour-cent par rapport à la limite supérieure des indications de l'appareil.

En général la classe de précision est donnée en pourcentage, de sorte qu'en mesurant une grandeur quelconque, en utilisant un appareil de classe de précision  $c$ , l'erreur absolue sera:

$$\Delta x = \pm (\text{valeur maximale de la scale}) \cdot c\%$$

et l'erreur relative calculée en pour-cent maximale  $\delta$  sera:

$$\delta = \frac{\Delta x}{x} = \frac{(\text{valeur maximale de la scale})}{x} \cdot c\%$$

*Exemple:* Un ampèremètre avec  $c = 1,5\%$ , qui peut mesurer l'intensité du courant entre 0 et 5A introduit une erreur absolue de mesurage:  $\Delta I = \pm 5 \cdot 1,5\% = \pm 7,5\% = \pm 0,007 \text{ A}$ .

La précision d'un mesurage est par définition l'inverse de l'erreur relative:  $P = 1/\delta$  et donc pour avoir une haute précision on doit choisir correctement l'appareil de mesure.

## ERREURS DES FONCTIONS

### 1. Mesurages indirects:

Le plus souvent, la grandeur  $Z$  étudiée n'est pas accessible par des mesurages directs, étant calculée par l'intermédiaire des grandeurs  $x, y, z, t$  qu'on peut mesurer directement. Par conséquent  $Z$  est une fonction des grandeurs  $x, y, z, t$ :  $Z = f(x, y, z, t)$ .

### 2. La loi de propagation des erreurs:

Soit une grandeur  $Z$  mesurée par l'intermédiaire des paramètres  $x, y$ . Alors, on peut écrire:  $Z = F(x, y)$ .

a) Les grandeurs  $x, y$  sont indépendantes:

L'erreur standard de la moyenne arithmétique a l'expression:

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}^2 \cdot S_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=\bar{x}, y=\bar{y}}^2 \cdot S_y^2}$$

b) Les grandeurs  $x, y$  sont dans une relation de dépendance l'une par rapport à l'autre:

Dans ce cas, chaque détermination nous fournit une valeur notée  $z_i$ . Le résultat sera:  $\bar{z} \pm S_{\bar{z}}$ , la *moyenne arithmétique et l'erreur standard de la moyenne* sont calculées avec les formules connues:

$$\bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$$

$$S_{\bar{z}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$$

*Exemple:* Pour l'interférence des ondes, on obtient  $\lambda$  avec la relation:  $\lambda = \frac{i \cdot d}{D}$

où:  $i$  = l'interfrange

$d$  = la distance entre les sources

$D$  = la distance du plan des sources jusqu'à l'écran.

Les grandeurs  $i, d, D$  sont mesurées indépendamment.

On doit calculer l'erreur standard de la moyenne arithmétique  $S_{\bar{\lambda}}$ .

Si on effectue un nombre  $n$  de mesurages pour  $i, d, D$  on peut calculer  $\bar{i}, \bar{d}, \bar{D}, S_{\bar{i}}, S_{\bar{d}}, S_{\bar{D}}$ .

L'erreur standard de la moyenne arithmétique sera donnée par la loi de propagation des erreurs:

$$S_{\bar{\lambda}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial i}\right)_{i=\bar{i}, d=\bar{d}, D=\bar{D}}^2 \cdot S_{\bar{i}}^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)_{i=\bar{i}, d=\bar{d}, D=\bar{D}}^2 \cdot S_{\bar{d}}^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial D}\right)_{i=\bar{i}, d=\bar{d}, D=\bar{D}}^2 \cdot S_{\bar{D}}^2}$$

où:

$$S_i^2 = \frac{(\bar{i} - i_1)^2 + \dots + (\bar{i} - i_n)^2}{n(n-1)}$$

$$S_{\bar{d}}^2 = \frac{(\bar{d} - d_1)^2 + \dots + (\bar{d} - d_n)^2}{n(n-1)}$$

$$S_{\bar{D}}^2 = \frac{(\bar{D} - D_1)^2 + \dots + (\bar{D} - D_n)^2}{n(n-1)}$$

Les dérivées partielles sont:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial i} = \frac{d}{D}; \frac{\partial \lambda}{\partial d} = \frac{i}{D}; \frac{\partial \lambda}{\partial D} = -\frac{id}{D^2},$$

Le calcul doit être effectué avec les valeurs moyennes:  $i = \bar{i}$ ,  $d = \bar{d}$ ,  $D = \bar{D}$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial i}\right)_{\substack{i=\bar{i} \\ d=\bar{d} \\ D=\bar{D}}}^2 = \frac{\bar{d}^2}{\bar{D}^2}; \left(\frac{\partial \lambda}{\partial d}\right)_{\substack{i=\bar{i} \\ d=\bar{d} \\ D=\bar{D}}}^2 = \frac{\bar{i}^2}{\bar{D}^2}; \left(\frac{\partial \lambda}{\partial D}\right)_{\substack{i=\bar{i} \\ d=\bar{d} \\ D=\bar{D}}}^2 = \frac{\bar{i}^2 \cdot \bar{d}^2}{\bar{D}^4}$$

$$\bar{i} = \frac{i_1 + \dots + i_n}{n}; \bar{d} = \frac{d_1 + \dots + d_n}{n}; \bar{D} = \frac{D_1 + \dots + D_n}{n}$$

Le résultat final doit être écrit:

$$\lambda = (\bar{\lambda} \pm S_{\bar{\lambda}})m \quad \text{où} \quad \lambda = \frac{\bar{i} \cdot \bar{d}}{\bar{D}}$$

### ***Erreurs absolues et relatives pour les fonctions***

Soit une fonction continue et les dérivées partielles continues dans un domaine donné. On suppose que dans un processus de mesurage les erreurs absolues accidentelles des arguments de la fonction sont très petites. Dans ces conditions l'erreur absolue de la fonction  $f$  sera calculée en utilisant le calcul différentiel.

*L'erreur absolue:*

Soit une fonction  $f=f(x, y)$  et  $f_o=f(x_o, y_o)$  sa valeur exacte. Tenant compte qu'on peut écrire  $x_o = x + (x_o - x)$  et  $y_o = y + (y_o - y)$ , la relation de Taylor donne:

$$f(x_o, y_o) = f[x + (x_o - x); y + (y_o - y)] = f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_o - x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(y_o - y) + \frac{1}{2!} \left[ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_o - x)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x_o - x)(y_o - y) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(y_o - y)^2 \right] + \dots$$

Pour des petites valeurs absolues  $\Delta x = x_o - x$  et  $\Delta y = y_o - y$ , on peut négliger les termes au carré.

Par conséquent:

$$f(x_o, y_o) \cong f(x, y) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_o - x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(y_o - y)$$

Notons le module de l'erreur absolue par  $|\Delta x|$  et  $|\Delta y|$  et le module de l'erreur relative par  $|\delta x|$  et  $|\delta y|$ .

$$|\Delta x| = x_o - x, \quad \text{ou} \quad x_o - x = \pm |\Delta x|, \quad \text{ou} \quad x_o = x \pm |\Delta x|$$

$$|\delta x| = \frac{|\Delta x|}{|x|}, \quad \text{ou} \quad \frac{x_o - x}{x} = \pm |\delta x|$$

Par hypothèse les erreurs absolues  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  sont petites et également leurs modules. Il s'ensuit.

$$f(x_o, y_o) - f(x, y) \cong \pm |\Delta x| \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \pm |\Delta y| \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Les dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sont calculées pour  $x = x_1, y = y_1$  où  $x_1, y_1$  sont les valeurs obtenues à la suite d'un seul mesurage sur  $x$  et  $y$ .

Par définition, l'erreur absolue accidentelle de la fonction  $f(x, y)$  est:

$$f(x_o, y_o) - f(x, y) = \Delta f = \pm \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) |\Delta x| \pm \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) |\Delta y|$$

L'erreur absolue maximale  $|\Delta f|$  est obtenue dans le cas où les erreurs  $|\Delta x|$  et  $|\Delta y|$  ont les même signes que les dérivées:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y|$$

b) *Erreur relative maximale:*

L'erreur absolue maximale peut être écrite comme

$\Delta f = |f'_x| |\Delta x| + |f'_y| |\Delta y|$  où  $f'_x, f'_y$  sont les dérivées partielles par rapport à  $x$  et  $y$ .

L'erreur relative maximale sur  $f(x, y)$  est:

$$\delta f = \left| \frac{\Delta f}{f} \right| = \left| \frac{f'_x}{f} \right| |\Delta x| + \left| \frac{f'_y}{f} \right| |\Delta y| = \left| \frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial y} \right| |\Delta y| = |\delta \ln f(x, y)|$$

Donc, l'erreur relative pour une fonction de deux variables  $|\delta f|$  est égale à la différentielle logarithmique de la fonction où on a remplacé les différentielles des arguments par les erreurs absolues.

Une autre méthode d'obtenir le même résultat contient les étapes suivantes:

1) on fait la différentielle de la fonction (pour obtenir l'erreur absolue) ou on calcule la différentielle du logarithme naturel de la fonction (pour obtenir l'erreur relative);

2) on passe de la différentielle aux erreurs en remplaçant les différentielles des arguments par leurs erreurs absolues ( $d \rightarrow \delta$ ) et on prend les valeurs absolues des termes obtenus.

*Observation:* Pour les fonctions plus compliquées on calcule premièrement l'erreur relative  $\delta f$  et puis l'erreur absolue  $\Delta f = \delta f \cdot |f|$ .

*Exemples:*

a)  $f(x, y) = ax \pm by$

$$df(x, y) = a dx \pm b dy$$

$$\Delta f(x, y) = |a| \Delta x + |b| \Delta y$$

b)  $f(x, y) = x \cdot y$

$$df(x, y) = x dy + y dx$$

$$\Delta f(x, y) = |x| \Delta y + |y| \Delta x$$

c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$

$$df(x, y) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$$

$$\Delta f(x, y) = \frac{|y| \Delta x + |x| \Delta y}{y^2}$$

d)  $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

$$\ln f = \ln x + \ln y + \ln z$$

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} \Rightarrow \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|}$$

$$\delta f = \delta x + \delta y + \delta z$$

e)  $f(x, y, z) = \frac{x}{yz}$

$$\ln f = \ln x - \ln y - \ln z$$

$$\frac{df}{f} = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z}$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} + \frac{\Delta z}{|z|}$$

$$\delta f = \delta x + \delta y + \delta z$$

f)  $f(x) = x^r$

$$\ln f = r \ln x$$

$$\frac{df}{f} = r \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\Delta f}{|f|} = |r| \frac{\Delta x}{|x|}$$

$$\delta f = |r| \cdot \delta x$$

**Observation:** Les relations établies ci-dessus fournissent l'erreur maximale pour la fonction  $f(x, y)$  en connaissant les erreurs maximales des arguments dans le cas d'un seul mesurage pour chaque argument et dont on a évalué leurs erreurs maximales.

121

## LA VERIFICATION DE LA LOI DE L'ESPACE ET DE LA VITESSE EN UTILISANT LE PLAN INCLINÉ

Le mouvement mécanique peut être classifié selon plusieurs critères. Par exemple, selon la trajectoire, le mouvement mécanique peut être: rectiligne, circulaire, curviligne. Si, lors du mouvement, toute droite solidaire avec le solide rigide reste parallèle à elle-même, il s'agit d'un mouvement de translation.

Le mouvement rotatoire est défini pour le cas dans lequel les points du solide tournent, décrivant des cercles parallèles, avec la même vitesse angulaire et les centres sur l'axe de rotation.

Relativement à l'accélération - défini comme la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on peut avoir:

$$a = \begin{cases} = 0, & \text{mouvement uniforme} \\ \neq 0 & \text{mouvement varié} \end{cases} \begin{cases} a = ct., & \text{mouvement uniformément varié} \\ a = f(t), & \text{mouvement varié} \end{cases} \quad (1)$$

En examinant uniquement le mouvement rectiligne, on a - comme une conséquence de la relation (1):

$$\text{pour } a = 0 \quad \begin{cases} v = ct. \\ s = v \cdot t \end{cases} \quad (2)$$

L'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniforme est une fonction du premier degré par rapport au temps. Cela signifie en particulier que le mobile parcourt des espaces égaux en des temps égaux.

$$\text{pour } a = ct. \quad \begin{cases} v = a \cdot t \\ s = \frac{a \cdot t^2}{2} \end{cases} \quad (3)$$

$v = at$ : l'équation de la valeur algébrique du vecteur vitesse à l'instant  $t$

$s = \frac{at^2}{2}$ : l'équation horaire d'un mouvement rectiligne uniformément varié est une fonction

du deuxième degré par rapport au temps.

Le mouvement uniformément varié peut être selon le signe de l'accélération:

- retardé (décéléré),  $a < 0$ ;
- accéléré,  $a > 0$ .



Le but de ce travail est de vérifier les équations de la vitesse et de l'espace pour le mouvement uniformément varié (rel. 3).

Les lois du mouvement uniformément varié transposées au cas du champ de pesanteur ont l'expression:

$$g = \text{const}; v = gt; s = \frac{g \cdot t^2}{2} \quad (4)$$

La seconde loi de Newton nous donne l'expression de la force:  $G = mg$ . (5)

Donc, la vérification des équations de la vitesse et de l'espace revient à la vérification des lois pour la chute libre des corps.

La vérification directe de ce fait dans le laboratoire est rendue plus difficile à cause de la grande valeur de l'intensité de la pesanteur ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ). Par conséquent, on va étudier le mouvement sur le plan incliné, dû aux forces de pesanteur, dont l'accélération est inférieure à l'intensité de la pesanteur.

Le plan incliné sous un angle donné par rapport à l'horizontale (fig. 1).

Soit un corps A sur le plan incliné, qui se trouve sous l'action de la force de pesanteur:  $\vec{G} = m\vec{g}$ . Cette force peut être décomposée en deux composantes: l'une parallèle au plan notée par  $\vec{G}_t$  et qui donne au corps un mouvement uniformément varié, l'autre normale sur le plan, notée par  $\vec{G}_n$  et qui est compensée par la réaction du plan.

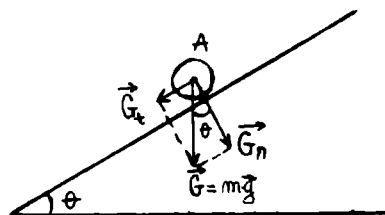


Fig. 1

En examinant la figure n° 1, on constate:

$$G_t = G \sin \theta = mg \sin \theta \quad (6)$$

et aussi  $G_t = ma$  (on a négligé la force de frottement). En résulte:

$$a = g \sin \theta \quad (7)$$

Puisque  $\sin \theta$  prend des valeurs comprises dans l'intervalle  $[-1; +1]$ , le mouvement sur le plan incliné se produit à une accélération inférieure à celle de la pesanteur.

*La description de l'appareil:*

Le dispositif expérimental est composé de deux rails métalliques, dont une portion est inclinée par rapport à l'horizontale avec un angle variable dont la valeur peut être lue sur un arc fixé à l'appareil. Sur ces rails divisées en mm peut rouler un disque métallique. L'arrêt ou le départ du disque est commandé par un dispositif spécial.

Le temps est mesuré à l'aide d'un chronomètre.

### ***Technique de travail et les vérifications expérimentales***

1. *Vérification de la loi d'espace:*

- on choisi une inclinaison quelconque sur l'arc grandé;
  - on met le dispositif de départ à une division convenable; le mobile est fixé dans le dispositif.
- Attention!: Le chronomètre doit être déclenché au moment du départ du mobile;
- on mesure le temps nécessaire au mobile pour parcourir le plan incliné (jusqu'au point où commence le plan horizontal).

Soit  $s$  cet espace et  $t$  le temps du parcours.

En utilisant la relation (3) on peut calculer l'accélération du mobile:

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (8)$$

Si on choisit une inclinaison quelconque, pour n'importe quel espace parcouru (c'est à dire pour n'importe quelle position du dispositif de départ), l'accélération est constate.

On vérifie pour des différents espaces la relation:

$$a = \frac{2s_1}{t_1^2} = \frac{2s_2}{t_2^2} = \dots = ct. \quad (9)$$

On va prendre pour  $s$  les valeurs: 64 cm, 55 cm et 40 cm.

L'angle d'inclinaison sera successivement:  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  et  $4^\circ$ . Pour chaque inclinaison du plan on va vérifier la loi de l'espace (rel. 9), c'est-à-dire, pour chaque inclinaison on doit calculer l'accélération sur les trois distances de  $s$ .

Pour une certaine inclinaison du plan et pour des divers espaces, l'accélération est constante.

On peut aussi déterminer la valeur de l'accélération. Soit un corps sur le plan incliné, dont la hauteur est  $h$ : le moment d'inertie du corps est  $J$ .

En appliquant la loi de la conservation de l'énergie, on obtient:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad (10)$$

Parce que:  $h = l \sin \theta$

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad v^2 = 2la,$$

où par „ $l$ ” on a noté la longueur du plan et par „ $\omega$ ” la vitesse angulaire du corps.

On peut écrire:

$$a = \frac{mg \sin \theta}{m + J/R^2} \quad (11)$$

Si le corps est une sphère,  $J_s = \frac{2}{5}mR^2$ , et si le corps est un cylindre,  $J_c = \frac{1}{2}mR^2$ .

Avec ces données on peut écrire:

$$a_s = \left( \frac{5}{7} \right) g \sin \theta$$

$$a_c = \left( \frac{2}{3} \right) g \sin \theta \quad (12)$$

De cette façon on peut comparer - pour une certaine inclinaison du plan, la valeur de l'accélération obtenue en utilisant la relation (9) avec celle donnée par la relation (12).

Les deux valeurs doivent coïncider aux limites des erreurs expérimentales.

## 2. Vérification de la loi de la vitesse:

Le Principe de l'inertie nous dit qu'un corps tend à conserver son état d'équilibre ou son mouvement rectiligne uniforme tant qu'aucune force extérieure n'intervient. Si le mobile se déplace sur le plan incliné, après son passage par le point 0, il va se déplacer aussi sur l'horizontale. Dans une première approximation (négligeant le frottement du mobile avec les rails et la résistance de l'air), le mouvement sera uniformément rectiligne, conformément au Principe de l'inertie.

Le mobile aura sur l'horizontale un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse est la même que la vitesse du mobile dans le dernier moment de son mouvement sur le plan incliné, c'est-à-dire  $v = at$ ,

où  $a$  = l'accélération sur le pan incliné

$t$  = le temps sur le plan incliné.

La vitesse peut être déterminée aussi par un mesurage direct, en utilisant le déplacement sur l'horizontale:  $v' = s'/t'$ ,

où  $s'$  = l'espace parcouru sur l'horizontale

$t'$  = le temps du parcours  $s'$ .

La vérification pour la loi de la vitesse consiste à obtenir l'égalité:  $v' = v$ .

Ce fait prouve que l'accélération de la loi d'espace est identique à celle calculée par la relation  $a = v'/t$ .

On fixe le dispositif d'arrêt à la division 30 ( $s' = 30$  cm). Le mouvement du mobile commence sur le plan incliné; on mesure le temps  $t'$  pour le parcours  $s'$  de l'horizontale.

On va calculer la vitesse:  $v' = s'/t'$ .

On va également démontrer que l'accélération calculée de la loi de l'espace (l'équation horaire du mouvement) est identique à celle calculée à l'aide de la relation:  $a = \frac{s'/t'}{t}$  pour une même pente du plan incliné et le même  $s'$ .

L'angle du plan sera successivement:  $2^\circ$ ,  $3^\circ$  et  $4^\circ$ .

Les résultats doivent être écrits dans un tableau:

Inclination	$s$	$t$	$s'$	$t'$	$a = \frac{2s}{t^2}$	$v'$	$a = \frac{v'}{t}$

### Calcul des erreurs

a) En utilisant la relation pour l'accélération  $a = \frac{2s}{t^2}$  calculer la précision du mesurage.

Indication: On doit calculer l'erreur relative maximale

$$\delta a = \delta s + \delta t^2 = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t^2}{t^2}$$

On peut écrire:

$$\ln a = \ln 2 + \ln s - 2 \ln t$$

$$\frac{da}{a} = \frac{ds}{s} - 2 \frac{dt}{t}$$

Il en résulte que:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta s}{s} + 2 \frac{\Delta t}{t} \Leftrightarrow \delta a = \delta s + 2\delta t$$

On considère:  $\Delta s = 1$  cm,  $\Delta t = 0,2$  s

L'erreur absolue maximale sera par conséquent  $\Delta a = \delta a \cdot a$ , et la précision du

mesurage:  $P = \frac{1}{\delta a}$ .

L'accélération peut être écrite sous la forme:  $a = (\bar{a} \pm \Delta a)m/s^2$

b) La précision dans le cas de la vitesse peut être calculée à partir de la relation:  $v = s/t$ .

L'erreur relative maximale:  $\delta v = \delta s + \delta t$  ou  $\delta v = \frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}$

En conséquence,  $\delta v = \frac{\Delta v}{v}$  et l'erreur absolue sera:  $\Delta v = v \cdot \delta v$ .

La précision pour la vitesse:  $P = \frac{1}{\delta v}$

On considère:  $\Delta s = 1$  cm  $\Delta t = 0,2$  s.

On peut écrire:

$$v = (\bar{v} \pm \Delta v)m/s.$$

## LA DETERMINATION DE L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR $g$ EN UTILISANT LE PENDULE REVERSIBLE DE KATER

Soit un corps rigide quelconque, qui peut tourner autour d'un axe horizontal qui ne traverse pas son centre de gravité, sous l'action de son propre poids. Un tel corps est nommé le pendule physique.

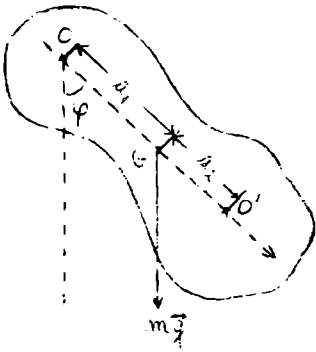


Fig 1

Pour ce cas, le moment de la force de pesanteur par rapport à l'axe de rotation, plus précis au centre de suspension O est:

$$M = -mga_1 \sin \varphi, \quad (1)$$

où les symboles désignent:

$m$  = la masse du pendule (du corps)

$a_1$  = la distance qui sépare le centre de gravité G et l'axe de rotation

$\varphi$  = l'angle de déviation verticale.

Le signe moins nous montre que le moment  $M$  a tendance à baisser l'angle de déviation.

Pour des angles  $\varphi$  petits, le mouvement de rotation du corps se réduit à un mouvement oscillatoire, dont l'équation différentielle s'écrit:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga_1 \sin \varphi \quad (2)$$

où:  $I$  = le moment d'inertie du corps

$\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  = l'accélération angulaire propre du mouvement de rotation du corps.

Si on note  $D = mga_1$  et on divise par  $I$ , tenant compte que pour des petits angles  $\sin \varphi \simeq \varphi$ , l'équation (2) devient:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I} \varphi = 0 \quad (2')$$

Ainsi, on a obtenu l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, dont la solution est de la forme:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \varepsilon) \quad (3)$$

Si on dérive par rapport à  $t$  et puis on introduit le résultat dans l'équation (2'), on obtient:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I}} = \sqrt{\frac{mga_1}{I}} \quad (4)$$

Par conséquent, le corps rigide, sous l'action de son propre poids, appliqué au centre de gravité, et pour des petits angles de déviation par rapport à la verticale, a un mouvement oscillatoire autour du centre de suspension. La période des oscillations est donnée par:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga_1}} \quad (5)$$

Si on introduit la notation  $\frac{I}{ma_1} = \lambda$ , et l'on remplace dans (5), on obtient:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda}{g}} \quad (6)$$

$\lambda$  porte le nom de *longueur réduite* du pendule physique et représente la longueur que doit avoir un pendule mathématique pour osciller synchrone avec le pendule physique.

La longueur réduite du pendule physique peut être déterminée s'il y a à côté de celui-ci un pendule simple dont la longueur est variable, de sorte qu'il se synchronise avec le pendule physique donné.

La longueur  $l = \lambda$  du pendule simple au moment de la synchronisation avec le pendule physique sera la longueur réduite.

Si on remplace dans la relation de la longueur réduite le moment d'inertie avec l'expression donnée par le Théorème de Steiner:  $I = I_o + ma_1^2$ , on a pour la longueur réduite:

$$\lambda = \frac{I_o + ma_1^2}{ma_1} = \frac{I_o}{ma_1} + a_1 \quad (7)$$

Cette expression nous montre que la longueur réduite du pendule physique est supérieure à la distance entre le centre de gravité G et le centre de suspension. Ainsi, la longueur réduite  $\lambda$  détermine un point O', nommé *centre de l'oscillation* qui joue des propriétés exceptionnelles par rapport aux autres points du corps.

Cette propriété nous dit que si on suppose la masse totale du corps concentrée dans ce point, on obtiendrait un pendule simple synchronisé avec le pendule physique. De plus, si on suspend le pendule physique dans le centre d'oscillation, on obtient un *pendule réversible*, le centre de suspension devient le centre d'oscillation et la période d'oscillation ne se modifie pas.

Afin de démontrer cette affirmation, on note la longueur réduite du pendule dans la nouvelle situation avec  $\lambda'$ :

$$\lambda' = \frac{I_o}{ma_2} + a_2 \quad (8)$$

où  $a_2$  est la distance GO'.

Comme  $GO' = OO' - OG$  et donc  $a_2 = \lambda - a_1$  en résulte:

$$\lambda' = \frac{I_o}{m(\lambda - a_1)} + \lambda - a_1 \quad (9)$$

Tenant compte de la relation (7), l'on obtient:

$$\lambda - a_1 = \frac{I_o}{ma_1} \quad (10)$$

Remplaçant (10) dans (9), on va obtenir:

$$\lambda' = \frac{I_o}{ma_1} + a_1, \text{ c'est à dire } \lambda = \lambda'.$$

Autrement dit, le pendule physique est réversible si on change le centre de suspension avec celui d'oscillation.

Un type de pendule réversible est le pendule de Kater (fig. n° 2). En l'utilisant on peut déterminer avec une précision satisfaisant la valeur d'accélération de la pesanteur  $g$ .

Le pendule de Kater est formé d'un tige métallique graduée, sur laquelle peuvent coulisser six poids mobiles, situés par groupes de trois à chaque extrémité de la tige.

Les poids C et C' sont pourvus d'une couteau prismatique. Le couteau de C constitue le centre d'oscillation du pendule. Faisant osciller le pendule autour du C, pour des angles inférieurs à 5 degrés, la période d'oscillation sera:

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + ma_1^2}{mga_1}} \quad (11)$$

Inversant le pendule, qui oscille maintenant autour du couteau C', la période d'oscillation sera:

$$T'' = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + ma_2^2}{mga_2}} \quad (12)$$

Supposant qu'on a trouvé pour le pendule réversible deux position des axes d'oscillation et de suspension, de sorte que, autour de ces axes les périodes soient les mêmes:  $T' = T'' = T_o$ . En s'appuyant sur les relations (11) et (12) on peut écrire:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + ma_1^2}{mga_1}} \quad (11')$$

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{I_o + ma_2^2}{mga_2}} \quad (12')$$

Divisant par  $2\pi$  les relations (11') et (12') et prenant leurs carrés, on a:

$$\left(\frac{T_o}{2\pi}\right)^2 mga_1 = I_o + ma_1^2 \quad (13a)$$

$$\left(\frac{T_o}{2\pi}\right)^2 mga_2 = I_o + ma_2^2 \quad (13b)$$

Effectuant la soustraction des équations (13.a) et (13.b) on obtient:

$$\left(\frac{T_o}{2\pi}\right)^2 g(a_1 - a_2) = a_1^2 - a_2^2$$

Si  $a_1$  n'est pas égal à  $a_2$ , c'est à dire les axes d'oscillation et suspension se trouvent à des distances différentes par rapport au centre de masse, on peut simplifier par  $(a_1 - a_2)$ :

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T_o^2} \quad (14)$$

### *Indications pour le mode d'emploi et les vérifications expérimentales*

#### *A. La méthode des périodes égales:*

On fixe le pendule sur l'un des deux couteaux prismatiques et, en le laissant osciller, on compte 40-50 oscillation complètes. On mesure à l'aide d'un chronomètre le temps total pour les „n” oscillations, et on calcule la période d'oscillation du pendule  $T_1 = t_1/n$  [s].

On inverse le pendule, utilisant l'autre couteau et répétant d'une façon identique l'opération précédente on calcule la période  $T_2$ .

Si les temps  $t_1$  et  $t_2$  diffèrent, on va répéter les opérations, après l'inversion des positions des couteaux (pour une différence entre  $t_1$  et  $t_2$  de quelques secondes), ou celui des petits poids (pour une différence entre  $t_1$  et  $t_2$  de quelques dixièmes de secondes).

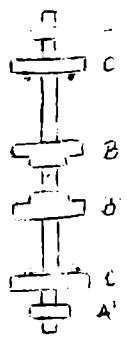


Fig. 2



Si on arrive à trouver des périodes égales  $T_1 = \frac{t_1}{n} = T_2 = \frac{t_2}{n} = T_o$ , on va répéter l'opération en mesurant les périodes pour 100 oscillations (de cette façon la précision du mesurages augmente) et en utilisant la valeur qu'on a ainsi obtenue, on calcule  $g$  avec la relation:

$$T_o = 2\pi \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{g}}$$

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T_o^2}$$

$a_r = a_1 + a_2$  peut être mesurée directement sur la tige, comme la distance entre les deux couteaux prismatiques, dans la position pour laquelle on a obtenu des périodes égales.

B. *La méthode des périodes inégales:*

En réalité, il est bien difficile d'obtenir une égalité parfaite entre les temps d'oscillation  $t_1$  et  $t_2$ , fait qui va induire une différence entre  $T_1$  et  $T_2$ , et par conséquent, le calcul du  $g$  dans des telles conditions ( $T_1 \neq T_2$ ) s'impose.

En utilisant les relations (11) et (12) on obtient:

$$T_1^2 m g a_1 = 4\pi^2 (I_o + m a_1^2)$$

$$T_2^2 m g a_2 = 4\pi^2 (I_o + m a_2^2)$$

En effectuant leur différence:

$$g(T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2) = 4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2)$$

l'on obtient:

$$g = \frac{4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2)}{T_1^2 a_1 - T_2^2 a_2}$$

On va déterminer expérimentalement  $T_1$  et  $T_2$  ( $T_1 \neq T_2$ ) pour un nombre  $n = 50$  d'oscillations complètes, en répétant cinq fois l'opération.

On va calculer la moyenne arithmétique du  $T_1$  et  $T_2$ , avec les cinq valeurs trouvées.

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1^{(1)} + \dots + T_1^{(5)}}{5} \text{ et } \bar{T}_2 = \frac{T_2^{(1)} + \dots + T_2^{(5)}}{5}$$

Pour mesurer  $a_1$  ou bien  $a_2$ , on doit savoir la distance entre le centre de gravité du pendule et l'un des deux couteaux. Afin de l'obtenir, on va poser le pendule sur un support métallique aigu de sorte qu'il soit en équilibre (voire la figure).

Il faut mesurer exactement avec une règle  $a_1$  et  $a_1 + a_2$ , la distance entre les couteaux, et puis on calcule  $a_2$ ,  $a_2 - a_1$ , et d'ici la valeur du  $g$ .

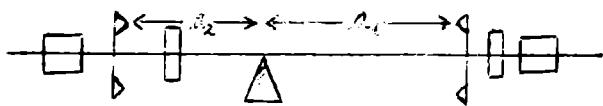


Fig. 3

*Indication pour la méthode B:*

Si les masses sont disposées comme dans la figure du bas, dans laquelle  $a_1 + a_2 = 17,9$  cm,  $a_1$  doit avoir 15,33 cm.

Pour le calcul du  $g$  on utilise la méthode B.

Le calcul des erreurs sera effectué pour la méthode B.

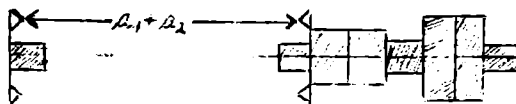


Fig 4

## Calcul des erreurs

**A. Méthode des périodes égales:**

a) Déterminer l'erreur absolue maximale  $\Delta T_o$  pour la valeur numérique du  $T_o$ .

*Indication:*  $T_o = \frac{\tau}{N}$ ;  $\tau$  = le temps nécessaire pour N oscillations complètes.

On va faire la différentielle, et puis on va passer aux erreurs:  $\Delta T_o = \frac{\Delta \tau}{N}$ , l'erreur absolue demandée.

b) La même question pour la grandeur

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T_o^2} \quad (1)$$

Parce que g dépend indirectement du  $T_o$ , l'erreur absolue  $\Delta g$  sera calculée:

$$\Delta g = \left| \left( \frac{\partial g}{\partial T_o} \right) \Delta T_o \right| \quad \text{ou} \quad \left( \frac{\partial g}{\partial T_o} \right) = \frac{8\pi^2(a_1 + a_2)}{T_o^3}$$

c) Calculer les erreurs relatives maximales  $\delta T_o$  et  $\delta g$ .

*Indication:*  $\delta T_o = \frac{\Delta T_o}{T_o}$ ;  $\Delta T_o = \frac{\Delta \tau}{N}$  ( $N = 10$ )

Par pourcentage:  $\delta T_o \% = \frac{\Delta T_o}{T_o} \cdot 100$ , l'erreur relative calculée en pourcent.

$$\delta g = \frac{\Delta g}{g}$$

En faisant le logarithme et puis la différentielle de l'équation (1) on va obtenir:

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + \ln(a_1 + a_2) - 2 \ln T_o$$

$$\frac{dg}{g} = \frac{d4}{4} + 2 \frac{d\pi}{\pi} + \frac{d(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} - 2 \frac{dT_o}{T_o}$$

L'erreur relative maximale est:

$$\frac{\Delta g}{g} = 0 + 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} + 2 \frac{\Delta T_o}{T_o}$$

Attention!: 1) pour des valeurs exactes, la différentielle est nulle  $\Delta(4) = 0$ .

2) en considérant le numéro  $\pi$  avec assez de décimales,  $\Delta \pi = 0$ .

Supposant que:  $\Delta a_1 = \Delta a_2 = 1 \text{ mm}$ , il en résulte que:

$$\delta g = \frac{\Delta(a_1 + a_2)}{a_1 + a_2} + 2 \frac{\Delta T_o}{T_o} = \frac{2\Delta a_1}{a_1 + a_2} + \frac{2\Delta T_o}{T_o}$$

L'erreur relative calculée en pourcent:

$$\delta g \% = \left( \frac{2\Delta a_1}{a_1 + a_2} + \frac{2\Delta T_o}{T_o} \right) \cdot 100$$

d) Calculer la moyenne arithmétique pour g:

*Indication:*  $\bar{g} = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{\bar{T}_o^2}$  où  $\bar{T}_o = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_o^{(k)}$  ( $N = 10$ ).

e) Déterminer l'erreur standard pour la moyenne arithmétique:  $S_{\bar{g}}$

$$\text{Indication: } S_{\bar{g}} = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial T_o} \right)_{T_o = \bar{T}_o}^2} \cdot S_{T_o}^2 = \frac{8\pi^2(a_1 + a_2)}{\bar{T}_o^3} S_{T_o} \quad \text{ou} \quad S_{T_o} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (T_o^{(i)} - \bar{T}_o)^2}{N(N-1)}} \quad (N=10)$$

f) Déterminer l'erreur standard pour un mesurage individuel:

$$\text{Indication: } S = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_o}\right)_{T_o=\bar{T}_o}^2 \cdot S_{T_o}^2} = \left|\left(\frac{\partial g}{\partial T_o}\right)_{T_o=\bar{T}_o}\right| \cdot |S_{T_o}|$$

Par conséquent:  $S_g = \frac{S}{\sqrt{N}}$

$$S_{T_o} = \sqrt{\frac{(T_o - T_1)^2 + \dots + (T_o - T_N)^2}{N-1}} \quad \text{l'erreur moyenne quadratique.}$$

g) Trouver l'intervalle de confiance pour la vraie valeur  $g_o$ , caractérisée par le niveau de confiance  $P^*$  spécifié ( $P^* = 0,999$ ).

Indication:  $\bar{g} - t(P^*, k) \cdot S_{\bar{g}} \leq g_o \leq \bar{g} + t(P^*, k) \cdot S_{\bar{g}}$

ou:  $g_o = (\bar{g} \pm t(P^*, k) \cdot S_{\bar{g}}) m / s^2$

Les valeurs pour la fonction  $t(P^*, k)$  sont spécifiées dans le tableau du bas:

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

B. Méthode des périodes inégales:

a) On va calculer les grandeurs  $S$  et  $S_{\bar{g}}$  avec les relations données plus-bas:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T_1}\right)_{T_1=\bar{T}_1}^2 \cdot S_{T_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T_2}\right) \cdot S_{T_2}^2}, \quad S_g = \frac{S}{\sqrt{n}}; \quad n = 5$$

$$S_{T_1}^2 = \frac{(\bar{T}_1 - T_1^{(1)})^2 + (\bar{T}_1 - T_1^{(2)})^2 + \dots + (\bar{T}_1 - T_1^{(5)})^2}{5 \cdot (5-1)}$$

$$S_{T_2}^2 = \frac{(\bar{T}_2 - T_2^{(1)})^2 + (\bar{T}_2 - T_2^{(2)})^2 + \dots + (\bar{T}_2 - T_2^{(5)})^2}{5 \cdot (5-1)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T_1} = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)(-2a_1T_1)}{(T_1^2a_1 - T_2^2a_2)^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T_2} = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)(2a_2T_2)}{(T_1^2a_1 - T_2^2a_2)^2}$$

$$\bar{T}_1 = \frac{T_1^{(1)} + \dots + T_1^{(5)}}{5}; \quad \bar{T}_2 = \frac{T_2^{(1)} + \dots + T_2^{(5)}}{5}$$

b) Le point (g) des calculs effectués pour A. (Méthode des périodes égales), où  $g$  a

l'expression:  $\bar{g} = \frac{4\pi^2(a_1^2 - a_2^2)}{T_1^2a_1 - T_2^2a_2}$  reste valable.

## LA DÉTERMINATION DU MOMENT D'INERTIE D'UN SOLIDE EN UTILISANT LE PENDULE DE HARTL

La moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe autour duquel il a un mouvement de rotation est donné par l'expression:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = m_1 r_1^2 + \dots + m_n r_n^2 \quad (1)$$

où:  $m_i$  = la masse élémentaire du point matériel „ $i$ ”

$r_i$  = la distance du point „ $i$ ” jusqu'a l'axe de rotation.

Entre le moment d'inertie d'un corp de masse  $M$  par rapport à un axe qui passe par son centre de masse et le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier et situé à la distance „ $a$ ”, il y a la relation établie par Steiner:

$$I = I_o + Ma^2 \quad (2)$$

Théoriquement, pour les solides homogènes d'une forme régulière, le moment d'inertie est déterminé au moyen des calculs.

En ce qui concerne les solides hétérogènes d'une forme quelconque, leurs moments d'inertie peuvent être déterminés en utilisant la voie pratique.

Soit un solide quelconque suspendu à un fil. En général, un fil résiste à la torsion, c'est à dire que si on le tord, on y fait naître des forces qui tendent à s'opposer à la déformation. Pour un fil élastique (fil métallique ou fil de verre filé, par exemple), ces forces antagonistes sont équivalentes à un couple de rappel, appelé couple de torsion, et dont le moment est proportionnel à l'angle de torsion, quel que soit cet angle:

$$M = - C\varphi \quad (3)$$

où:  $C$  = la constate de torsion du fil; on montre que la constante  $C$  de torsion d'un fil cylindrique homogène est proportionnelle à la quatrième puissance de son diamètre et inversement portionnelle à sa longueur:

$$C = k \cdot \frac{D^4}{l}, \quad k = \text{constate caractéristique de la nature du fil.}$$

Le mouvement de rotation du rigide autour d'un axe est donné par la rotation:

$$I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M \quad (4)$$

où:  $M$  = le moment du couple de torsion par rapport à l'axe de relation

$I$  = le moment d'inertie par rapport au même axe.

L'équation du mouvement sera:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -C\varphi$$

$$\text{où: } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{C}{I}\varphi = 0 \quad (4)$$

La solution de l'équation écrite plus-haut a une forme telle que:

$$\varphi = A \sin \omega t \quad (6)$$

où:  $\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}$  et donc

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad (7)$$

$T$  = la période du mouvement sinusoïdal de rotation.

De la sorte, en mesurant la période d'oscillation d'un corps tournant autour d'un axe, on peut déterminer son moment d'inertie.

Dans le cas, si on ajoute au solide un autre corps, dont le moment d'inertie inconnu est noté par  $I_1$ , la période sera cette fois-là:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_1}{C}} \quad (8)$$

Avec les relation (7) et (8) on peut calculer  $I_1$ :

$$I_1 = \frac{T_1^2 - T^2}{T^2} \cdot I \quad (9)$$

### **Mode de travail**

L'appareil est composé d'un dispositif ayant la forme d'une croix, suspendue à un fil d'acier.

On tourne le dispositif de  $180^\circ$  et on le bloque dans cette position.

On va mesurer le temps  $t$  nécessaire à accomplir  $N$  oscillations complètes, en calculant la période d'oscillation du dispositif à l'aide de la formule:

$$T[s] = t/N.$$

La deuxième étape consiste à ajouter au corps initial (qui a la forme d'une croix) le corps pour lequel on doit calculer le moment d'inertie, et de mesurer la période  $T_1$  du système.

En utilisant la relation (9) on calcule  $I_1$ , en prenant  $I = 13960 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .

### **Calcul des erreurs**

a) Calculer l'erreur standard de la moyenne arithmétique  $S_{\bar{I}_1}$  pour les mesurages correspondents au disque d'aluminium  $Al$ .

*Indication:*  $I_1$  dépend des deux variables indépendantes  $T_1$  et  $T$ .

$$I_1 = I \cdot \frac{T_1^2 - T^2}{T^2}, \quad I = \text{const.}$$

On écrit la loi de propagation des erreurs:

$$S_{\bar{I}_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_1}{\partial T_1}\right)_{T=\bar{T}}^2 \cdot S_{\bar{T}_1}^2 + \left(\frac{\partial I_1}{\partial T}\right)_{T_1=\bar{T}_1}^2 \cdot S_{\bar{T}}^2}$$

$$\begin{aligned} \text{o.} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial T_1} &= \frac{2IT_1}{T^2}; & \frac{\partial I_1}{\partial T} &= -\frac{2IT_1^2}{T^3} \\ \bar{T}_1 &= \frac{T_1^{(1)} + \dots + T_1^{(n)}}{n}; & \bar{T} &= \frac{T^{(1)} + \dots + T^{(n)}}{n}; & n &= 5 \\ \left( \frac{\partial I_1}{\partial T_1} \right)_{\substack{T_1 = \bar{T}_1 \\ T = \bar{T}}} &= \frac{2I_1 \bar{T}_1}{\bar{T}^2}; & \left( \frac{\partial I_1}{\partial T} \right)_{\substack{T_1 = \bar{T}_1 \\ T = \bar{T}}} &= -\frac{2I_1 \bar{T}_1^2}{\bar{T}^3} \\ S_{\bar{T}_1}^2 &= \frac{(\bar{T}_1 - T_1^{(1)})^2 + \dots + (\bar{T}_1 - T_1^{(n)})^2}{n(n-1)} \\ S_{\bar{T}}^2 &= \frac{(\bar{T} - T^{(1)})^2 + \dots + (\bar{T} - T^{(n)})^2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

b) Ecrire le résultat final dans ce cas.

*Indication:*  $I_1^0 = (\bar{T}_1 \pm S_{T_1}) \cdot kg \cdot m^2$

où:  $I_1^0$  = la valeur la plus probable de  $I_1$ .

$\bar{T}_1$  = la moyenne arithmétique.

c) Calculer l'erreur standard individuelle  $S_{T_1}$ .

*Indication:* On utilise la relation:

$$S_{T_1} = \sqrt{n} S_{\bar{T}_1}$$

d) Trouver un intervalle de confiance qui contient la vraie valeur  $I_1^0$  avec un niveau de confiance  $P^* = 0,98$ .

*Indication:*  $I_1^0 = (\bar{T}_1 \pm t(P^*, k) \cdot S_{T_1}) \cdot kg \cdot m^2$

où:  $\bar{T}_1 = t \frac{\bar{T}_1^2 - \bar{T}^2}{\bar{T}^2}$

$\bar{T}_1, \bar{T}, S_{\bar{T}_1}$  ont été déterminés au point (a).

Les valeurs pour la fonction  $t(0,98; k)$  où  $k = n - 1 = 5 - 1 = 4$  sont spécifiées dans le tableau:

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

## LA VERIFICATION DU THEOREME DE STEINER

Le théorème de Steiner permet de déduire le moment d'inertie d'un solide rigide par rapport à un axe quelconque:

„Le moment d'inertie d'un corps de masse  $m$  par rapport à un axe  $O_1O_1'$  est égal à la somme de son moment d'inertie par rapport à un axe  $OO'$ , parallèle au précédent et passant par le centre de masse du corps et de la quantité  $mR^2$ , où  $R$  est la distance entre les deux axes." (fig. n° 1)

$$I = I_o + mR^2 \quad (1)$$

où:  $I_o$  = le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $OO'$  passant par le centre de masse et parallèle à  $O_1O_1'$ .

Par la suite, le rôle du solide sera joué par deux disques.

*Description de l'appareil:*

L'appareil (fig. n° 2) est composé d'un support  $AA$ , suspendu par un support, de sorte que le cadre puisse effectuer des oscillations de torsion autour de l'axe verticale  $O_1O_1'$ .

Sur le support, dans le plan horizontal, il y a deux disques métalliques placés symétriquement,  $BB$ , les disques peuvent tourner autour de leur axe de symétrie  $OO'$ .

Egalement, ceux-ci peuvent être immobilisés à l'aide des deux vis spéciales  $dd'$ .

*La théorie de la méthode:*

Par sa construction, l'appareil permet aux disques d'avoir deux types de mouvement:

- tourner autour d'un axe si on a immobilisé les disques;
- décrire un mouvement de translation si on a laissé les disques libres. Toute droite qui unie deux points du corps restera parallèle à elle-même lors du mouvement qui est une caractéristique du mouvement de translation.

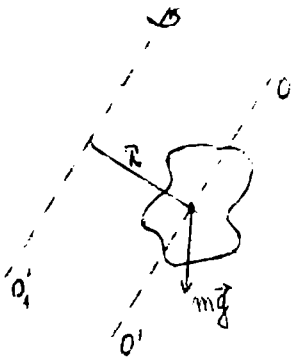


Fig. 1

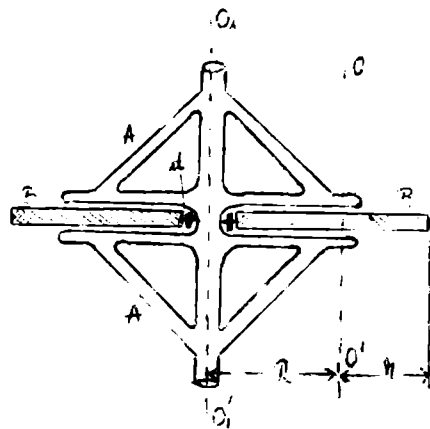


Fig. 2

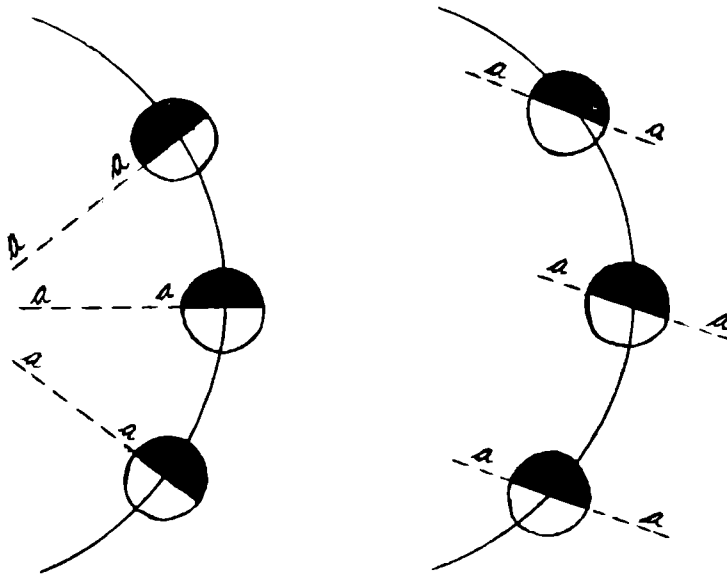


Fig. 3

La figure n° 3 représente trois phases des deux types du mouvement des disques.

En faisant osciller l'appareil à partir des angles de torsion initiaux petits, les disques laissés libres auront un mouvement de translation, mais leur centre tournera autour de l'axe  $0_10'_1$ . Notant par:

$I'$  = le moment d'inertie par rapport à l'axe  $0_10'_1$

$m$  = la masse d'un disque

$R$  = la distance entre le centre d'un disque et l'axe  $0_10'_1$

on a:

$$I' = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \quad (2)$$

Dans la deuxième situation, c'est à dire pour le cas des disques bloqués, en faisant osciller l'appareil à partir d'un angle de torsion initial, les disques vont tourner autour de  $0_10'_1$ . Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe  $0_10'_1$  (qui ne passe pas par son centre de masse), sera donné par l'égalité:

$$I = I_o + I', \quad I' = 2I_1$$

où  $I_1$  = le moment d'inertie d'un disque, calculé par rapport à l'axe  $0_10'_1$ .

On a multiplié par deux parce qu'il s'agit des deux disques identiques et le moment d'inertie est une grandeur physique additive.

Le moment d'inertie  $I_1$  est égal au moment d'inertie d'un point matériel situé au centre du disque, à la distance  $R$  de l'axe  $0_10'_1$ :  $I_1 = mR^2$ , donc  $I' = 2mR^2$ .

Le moment d'inertie  $I_o = 2I_2$ , où  $I_2$  est le moment d'inertie d'un disque de rayon  $r$  et masse  $m$ , par rapport à l'axe  $00'$  qui passe par son centre (le chiffre deux nous montre qu'on a deux disques identiques).

$$I_2 = \frac{1}{2}mr^2 \quad \Rightarrow \quad I_o = 2 \cdot \frac{1}{2}mr^2 = mr^2 \quad \text{ou} \quad I = 2mR^2 + mr^2 \quad (3)$$

En raison de la modification du moment d'inertie  $I$  du système dans les deux situations (disques libres ou disques bloqués), les périodes d'oscillation du système seront différentes et données par les expressions:

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{D}} \quad \text{ct} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \quad (4)$$

où  $D$  = le moment directeur du système

$$\Rightarrow \frac{T'^2}{T^2} = \frac{I'}{I} \quad (5)$$



Utilisant les relations (2) et (3):

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{2R^2}{2R^2 + r^2} \quad (6)$$

En prouvant, du point de vue expérimental, l'exactitude de la relation (6), on confirme la validité du Théorème de Steiner.

### Mode de travail et les vérifications expérimentales

1. On mesure à l'aide d'une règle les grandeurs  $R$  et  $r$ , en calculant la valeur de l'expression:  $2R^2/(2R^2 + r^2)$ .

2. Avec les disques libres et à partir d'un angle de torsion initial de  $20^\circ$ , on mesure à l'aide d'un chronomètre le temps pour 5-6 oscillations complètes.

Soit „ $m$ ” le nombre d'oscillations effectuées par l'appareil dans „ $t$ ” seconds.

Par définition, la période d'oscillation sera:  $T[s] = t/m$ .

Dans notre cas:  $T_1 = \frac{t_1}{6}$ .

On va répéter dix fois l'opération, pour le même „ $m$ ”, en obtenant  $t_1, \dots, t_{10}$ . Si les mesurages sont rigoureusement faits les dix temps auront des valeurs comparables.

Le calcul des périodes conduit à:

$$T_1 = \frac{t_1}{6}, \quad T_2 = \frac{t_2}{6}, \quad \dots, \quad T_{10} = \frac{t_{10}}{6}.$$

3. On répète les opérations plus-haut présentées, pour les disques bloqués.

Pour le même angle de torsion ( $20^\circ$ ) et nombre d'oscillations complètes  $m = 6$ , on mesure à l'aide d'un chronomètre les temps  $t'_1, \dots, t'_{10}$ , en calculant après, les périodes:

$$T'_1 = \frac{t'_1}{6}, \quad T'_2 = \frac{t'_2}{6}, \quad \dots, \quad T'_{10} = \frac{t'_{10}}{6}.$$

4. En disposant de ces valeurs, interpréter les résultats conformément aux indications données.

#### Explications facultatives:

##### a) Théorème de Steiner:

Le moment d'inertie d'un solide quelconque par rapport à un axe qui ne passe pas par son centre de masse, est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle au premier et passant par le centre de masse du corps, augmenté du produit de la masse du solide par le carré de la distance des deux axes.

$$I' = I_o + mR^2$$

##### Démonstration:

Soit un système discret de points matériels, dont le centre de masse est situé au point  $C$  (voir fig.).

La position d'un point  $P$  peut être rapportée au système des axes  $xCyZ$  à l'origine dans le centre de masse  $C$ , aussi bien qu'au système  $XOYZ$  dont les axes sont parallèles à ceux du premier système.

On peut écrire pour les coordonnées du point  $P$ :

$$X = X_c + x; \quad Y = Y_c + y; \quad Z = Z_c + z \quad (1)$$

Des considérations géométriques conduisent à:

$$d^2 = Z_c^2 + Y_c^2 \quad (2)$$

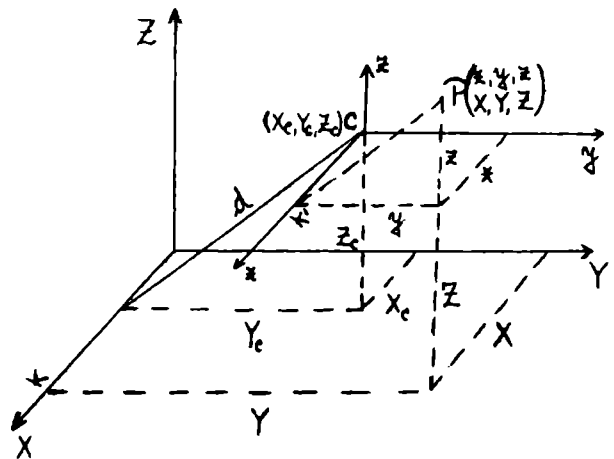


Fig. 4

où:  $d$  = la distance entre les axes  $OX$  et  $Cx$ .

Notons les deux axes parallèles avec  $\Delta$  et  $\Delta_c$ .

Les distances d'un point  $P$  quelconque du solide jusqu'aux deux axes sont:  $PK = d'$  et  $PK' = d''$ , dont les longueurs carrées sont:

$$d'^2 = Y^2 + Z^2$$

$$d''^2 = x^2 + y^2$$

En utilisant les relations (1):

$$\Rightarrow d'^2 = (Y_c + y)^2 + (Z_c + z)^2 \text{ ou bien}$$

$$d'^2 = y^2 + z^2 + Y_c^2 + Z_c^2 + 2yY_c + 2zZ_c = d''^2 + d'^2 + 2yY_c + 2zZ_c.$$

Pour un point  $P_i (m_i)$ :

$$d_i'^2 = d^2 + d_i''^2 + 2y_iY_c + 2z_iZ_c \cdot m_i$$

$$\Rightarrow m_i d_i'^2 = m_i d^2 + m_i d_i''^2 + 2m_i y_i Y_c + 2m_i z_i Z_c$$

$$d = \text{const. } (\forall i).$$

On effectue l'addition de toutes les relations écrites pour  $i = 1, \dots, n$ .

$$\sum_{i=1}^n m_i d_i'^2 = d^2 \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n m_i d_i''^2 + 2Y_c \sum_{i=1}^n m_i y_i + 2Z_c \sum_{i=1}^n m_i z_i \quad (3)$$

D'autre part, on sait que:  $\sum_{i=1}^n m_i x_i / M = x_c$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i y_i / M = y_c$ ,  $\sum_{i=1}^n m_i z_i / M = z_c$ .

où:  $x_c, y_c, z_c$  = les coordonnées du centre de masse d'un corps dont les points possèdent les coordonnées  $\{x_i, y_i, z_i\}$ .

$M = m_1 + \dots + m_n$  la masse totale du corps.

$x_c, y_c, z_c$  sont déterminées dans le système  $x_c y_c z_c$  dont l'origine est fixée par l'hypothèse dans le point  $(x_c, y_c, z_c)$  donc  $x_c = 0, y_c = 0, z_c = 0$ .

En résulte:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i = \sum_{i=1}^n m_i x_i = 0$$

$I' = \sum_{i=1}^n m_i d_i'^2$  représente le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe  $\Delta$

$I = \sum_{i=1}^n m_i d_i''^2$  représente le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe  $\Delta_c$ .

De la relation (3) résulte:

$$I' = I + md^2$$

Q.E.D.

b) Le calcul du moment d'inertie pour un disque de rayon  $R$ :

Soit un disque métallique de rayon  $R$ , densité  $\rho$  et l'épaisseur  $h$  qui peut tourner autour d'un axe perpendiculaire sur le disque et passant par son centre (voir fig.).

L'on suppose que la masse du disque a une distribution continue.

On va calculer le moment d'inertie  $I$  du disque par rapport à cet axe.

Le moment d'inertie élémentaire  $dI$  est:

$$dI = r^2 dm$$

où:  $dm$  = la masse d'un volume extrêmement petit du disque, parallélépipédique, de l'hauteur  $h$  et la surface  $S$ .

$r$  = la distance entre le centre du disque et l'élément du volume.

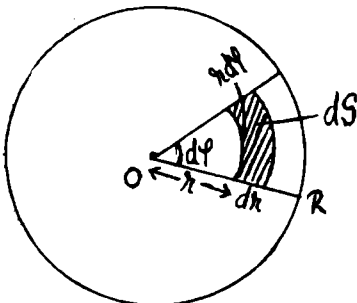


Fig. 5

L'élément de la surface exprimé en coordonnées polaires  $r$  et  $\varphi$  (fig.) est:

$$dS = r \cdot dr \cdot d\varphi \\ \Rightarrow dm = \rho dv = \rho h dS$$

où:  $dv$  = le volume de l'élément de masse  $dm$

$$\Rightarrow dI = r^3 \rho h dr d\varphi \\ I = \rho h \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \rho h \cdot \frac{R^4}{4}$$

La masse  $M$  du disque:  $M = \rho v = \pi R^2 h \rho$

$\Rightarrow I = \frac{MR^2}{2}$  l'expression du moment d'inertie du disque par rapport à un axe perpendiculaire qui passe par le point 0.

### Calcul des erreurs

a) En mesurant le temps pour  $N$  oscillations complètes de l'appareil, calculer l'erreur absolue maximale pour  $T'$ . On doit lire sur le chronomètre l'erreur absolue  $\Delta\tau = 0,2$  s (la valeur de la plus petite graduation).

Indication:  $T' = \frac{\tau}{N}$  ( $N = 5-6$  oscillations complètes)

$$\Delta T' = \frac{1}{N} \Delta\tau$$

Le résultat nous indique le numéro des décimales qu'on doit retenir dans l'opération de division de  $\tau$  par  $N$ .

L'on détermine de la même façon  $\Delta T$ .

b) Calculer l'erreur absolue maximale pour le quotient  $T^2/T^2$  si les erreurs maximales  $\Delta T'$  et  $\Delta T$  sont considérées connues.

Indication: Notons par  $x = \frac{T'}{T}$  et  $f(T', T) = \frac{T'^2}{T^2} = x^2$ .

La différentielle  $df = 2x dx$  sera utilisés par la suite dans le calcul des erreurs.

On calcule  $\Delta x$ , s'appuyant sur  $dx$ .

$$x = \frac{T'}{T}; \quad dx = \frac{T dT' - T' dT}{T^2}$$

L'erreur  $\Delta x$  devient:

$$\Delta x = \frac{T \Delta T' + T' \Delta T}{T^2} \\ \Rightarrow \Delta f = 2 \frac{T'}{T} \cdot \frac{(T \Delta T' + T' \Delta T)}{T^2}$$

Une autre méthode: On fait la différentielle de  $f(T, T')$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial T} dT + \frac{\partial f}{\partial T'} dT'; \quad \frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{2T'^2}{T^3}; \quad \frac{\partial f}{\partial T'} = \frac{2T'}{T^2}$$

L'erreur absolue maximale devient:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial f}{\partial T'} \right| \Delta T' = \frac{2T'}{T^3} \Delta T + \frac{2T'}{T^2} \Delta T'$$

Il en résulte que:

$$\Delta f = \frac{2T'}{T} \left( \frac{T' \Delta T}{T^2} + \frac{T \Delta T'}{T} \right)$$

Le résultat nous indique le numéro des décimales qu'on doit retenir dans l'opération de division de  $T^2$  par  $T^2$ .

Le résultat sera:  $\frac{T'^2}{T^2} \pm \Delta \left( \frac{T'^2}{T^2} \right)$

c) Calculer l'erreur relative maximale pour la grandeur  $f(T', T) = \frac{T'^2}{T^2}$ .

*Indication:* On doit logarithmer, différentier et puis on passe à l'expression de l'erreur maximale:

$$\ln f = \ln T'^2 - \ln T^2 = 2 \ln T' - 2 \ln T$$

$$\frac{df}{f} = 2 \frac{dT'}{T'} - 2 \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{\Delta f}{f} = \delta f = 2 \left( \frac{\Delta T'}{T'} + \frac{\Delta T}{T} \right)$$

ou bien:  $\delta f = 2(\delta T' + \delta T)$

d) Calculer l'erreur relative maximale pour la grandeur  $f(R, r) = \frac{R^2}{2R^2 + r^2}$ .

*Indication:* On fait le logarithme, puis on différentie l'équation aux logarithmes trouvés, en passant à la relation de l'erreur relative:

$$\ln f = 2 \ln R - \ln(2R^2 + r^2)$$

$$\frac{df}{f} = 2 \frac{dR}{R} - \frac{4R dR + 2r dr}{2R^2 + r^2}$$

Il s'ensuit que:

$$\delta f = \frac{\Delta f}{f} = 2 \frac{\Delta R}{R} + \frac{4R\Delta R + 2r\Delta r}{2R^2 + r^2}$$

ou bien:  $\delta f = 2\delta R + \frac{4R\Delta R + 2r\Delta r}{2R^2 + r^2}$

où  $R, r$  sont obtenus par des mesurages.

$\Delta R = \Delta r = 1 \text{ mm}$ .

e) On doit déterminer dans les mêmes conditions les mesurages  $T'_1, \dots, T_j$ , pour des différents nombre d'oscillations (par exemple:  $N_i = 5; 6; 7; 8; 9; j = 1, 5$ ) ou pour le même nombre d'oscillation (par exemple  $N = 8$  oscillations).

Dans les conditions énumérées, calculer l'indicateur statistique de la moyenne arithmétique

$S_j$  sur la fonction  $f(T', T) = \frac{T'^2}{T^2}$ , aussi bien que l'erreur standard.

Ecrire le résultat final.

*Indication:* On va appliquer la loi pour la propagation des erreurs pour une grandeur qui dépend de plusieurs variables.

On peut écrire:

$$f(T', T) = \frac{T'^2}{T^2} \text{ et}$$

$$S_j = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial T'} \right)_{T=\bar{T}, T'=\bar{T}'}^2 \cdot S_{\bar{T}'}^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}, T'=\bar{T}'}^2 \cdot S_{\bar{T}}^2}$$

où:  $\frac{\partial f}{\partial T'} = \frac{2T'}{T^2}$ ;

$$\left( \frac{\partial f}{\partial T'} \right)_{T=\bar{T}, T'=\bar{T}'} = \frac{2\bar{T}'}{\bar{T}^2}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial T} \right)_{T=\bar{T}, T'=\bar{T}'} = -\frac{2\bar{T}'^2}{\bar{T}^3}$$

$S_{\bar{T}}$ ,  $S_{\bar{T}'}$  = les erreurs standard de la moyenne arithmétique relativement aux  $T$  et  $T'$ , dont les expressions sont:

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}}$$

$$S_{\bar{T}'} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T'_i - \bar{T}')^2}{n(n-1)}}$$

où:  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2 + \dots + T_n}{n}$  ( $n = 5$ )

$$\bar{T}' = \frac{T'_1 + T'_2 + \dots + T'_n}{n} \quad (n = 5)$$

$\bar{T}$ ,  $\bar{T}'$  = les moyennes arithmétiques pour les périodes.

f) Estimer la précision avec laquelle on a mesuré les deux périodes  $T'$  et  $T$ : ( $T'_1, \dots, T'_5$ ;  $T_1, \dots, T_5$ ).

*Indication:* On va calculer  $S = \sqrt{n}S_{\bar{T}}$  ( $n = 5$ ), l'erreur standard.

g) On va centraliser les informations obtenues aux points (e) et (f) dans un tableau.

## LA DETERMINATION DE LA DENSITÉ DES LIQUIDES EN UTILISANT LA BALANCE MOHR-WESTPHALL

En vertu du Principe d'Archimède on peut déterminer la densité relative d'un liquide - à l'aide de l'appareil dont la description sera présentée plus-bas.

*Description de l'appareil:* La balance est composée d'un levier dont le point d'appui est  $O$  (voir la figure). A l'extrémité gauche du levier il y a le poids  $G$  - qu'on peut déplacer à droite ou à gauche. L'extrémité droite du levier peut être chargée avec un flotteur de verre (ou métallique)  $P$ . Le segment  $OA$  est divisé en dix parts égales. Il y a aussi trois pièces métalliques en forme de „U”, nommées cavaliers, dont les poids sont:  $a$ ,  $a/10$ ,  $a/100$ ,  $a/1000$ .

Le poids du cavalier „ $a$ ” est égal à la pesanteur du volume d'eau distillée déplacé par le flotteur de verre complètement introduit dans l'eau distillée.

En utilisant les dix graduations, les cavaliers peuvent être placés sur le segment  $OA$  en dix position.

L'appareil dispose aussi d'une bulle d'air à l'aide de laquelle on vérifie l'horizontalité (la vis  $M$ ). En utilisant la vis  $H$  on règle la hauteur de la balance.

La position d'équilibre pour la balance est obtenue dans le cas où les sommets coniques  $V_1$  et  $V_2$  appartiennent à la même horizontale; pour l'obtenir il suffit de déplacer le poids  $G$  (dont la forme est cylindrique) à droite ou à gauche.

### Mode de travail

1. On doit établir l'horizontalité de la balance à l'aide de la vis  $M$ .
  2. On met le levier sur le support, on accroche le flotteur de verre à la division 10.
  3. A l'aide du poids  $G$ , on va équilibrer la balance.
- Attention!: Pour les opérations à faire, on garde la même position du poids  $G$ .
4. Le flotteur est plongé intégralement dans l'eau distillée et par l'addition du cavalier „ $a$ ”

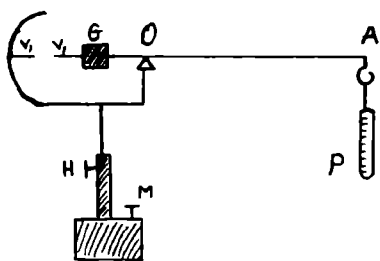


Fig. 1

(le plus grand) à la division 10, l'équilibre aurait du être rétabli. Dans le cas où l'équilibre n'est pas obtenu, on va immerger partiellement le flotteur, tenant compte que pour les opérations suivantes le niveau du plongeon doit être le même qu'à point 4.

Conformément au Principe d'Archimède, la force avec laquelle un liquide agit de bas en haut sur un corps (le flotteur) est égale à la pesanteur du volume du liquide déplacé par le corps. Cette force est nommée la force archimédienne;  $F_A = mg = V_l \cdot \rho_l \cdot g$ .

Par conséquent, le poids „ $a$ ” du cavalier est équilibré par le poids du volume d'eau distillée  $V_{H_2O}$  déplacé par le flotteur. L'expression mathématique est:

$$F_A^{H_2O} = V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g$$

$$V_{H_2O} = V_{\text{corps}} = V_{\text{flotteur}}$$

Dans ce cas, il s'agit de l'accomplissement de la condition: la force archimédienne  $F_A^{H_2O}$  dirigée de bas en haut (qui agit sur le flotteur introduit dans l'eau distillée) est égale en valeur absolue au poids du cavalier „a”, guidé de haut en bas.

En conséquence:  $F_A^{H_2O} = a$ , mais  $F_A^{H_2O} = V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g$

où:  $V_{H_2O}$  = le volume d'eau déplacé par le flotteur (corps) =  $V_{corps}$

$\rho_{H_2O}$  = la densité de l'eau distillée

$g$  = l'intensité de la pesanteur.

Il s'ensuit que:

$$V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g = V_{flotteur} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g = a \text{ (le poids du cavalier).} \quad (1)$$

5. Soit un liquide plus dense que l'eau. En introduisant le flotteur parfaitement séché dans ce liquide, le bras OA de la balance va se lever. Avec le cavalier „a” placé à la division 10, on ajoute par des essais les autres cavaliers dont les poids sont:  $a/10$ ,  $a/100$ ,  $a/1000$ , de sorte qu'on obtienne l'équilibre de la balance.

La condition d'équilibre est: la somme des moments des forces qui actionnent dans le même sens, par rapport au point O est égale avec la somme des moments des forces qui actionnent dans le sens contraire, par rapport au même point O.

Donc:

$$M_{F_A}^l = M_{a/10} + M_{a/100} + M_{a/1000}$$

ou

$$F_A^l \cdot 10 = a \cdot 10 + \frac{a}{10} x + \frac{a}{100} y + \frac{a}{1000} z \quad (2)$$

où:  $F_A^l$  = la force archimédienne qui agit sur le flotteur introduit dans le liquide étudié.

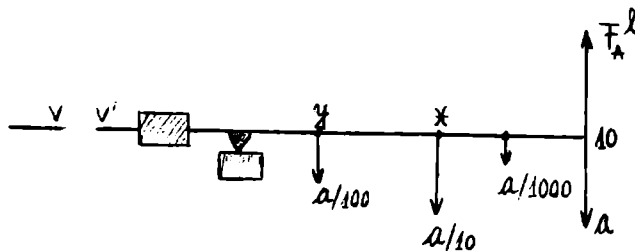


Fig. 2

La densité relative du liquide étudié  $\rho_{rel}^l$  est définie par la relation:

$$\rho_{rel}^l = \frac{\rho^l}{\rho_{H_2O}}$$

où  $\rho^l$  et  $\rho_{H_2O}$  sont les densités absolues du liquide et de l'eau distillée.

On va écrire la condition pour l'équilibre de la balance, le flotteur introduit dans l'eau distillée (le poids „a” se trouve à la division 10)

$$M_{F_A}^{H_2O} = M_a \Rightarrow F_A^{H_2O} \cdot 10 = a \cdot 10 \quad (3)$$

Si on divise la relation (2) par (3), il en résulte que:

$$\frac{\rho^l}{\rho_{H_2O}} = \rho_{rel}^l.$$

$$\text{En effet: } \frac{F_A^l \cdot 10}{F_A^{H_2O} \cdot 10} = \frac{a \cdot 10 + \frac{a}{10} x + \frac{a}{100} y + \frac{a}{1000} z}{a \cdot 10}$$

Parce que:  $F_A^l = V_{corps} \cdot \rho_l \cdot g$

$$F_A^{H_2O} = V_{corps} \rho_{H_2O} \cdot g$$

$$V_{corps} = V_{flotteur}$$

$$\Rightarrow \rho_{rel}^l = \frac{\rho^l}{\rho_{H_2O}} = 1 + \frac{x}{100} + \frac{y}{1000} + \frac{z}{10000}$$

$$\rho_{rel}^l = 1 + 0,0x + 0,00y + 0,000z$$

Par conséquent:  $\rho_{rel}^l = 1,0xyz$  numéro sans dimensions.

Par exemple: Si l'équilibre de la balance est réalisé pour les cavaliers dans les positions:  $x = 4$ ,  $y = 3$ ,  $z = 2$ , il s'ensuit que:

$$\rho_{rel}^l = 1,0432$$

6. Soit un liquide moins dense que l'eau. Dans cette situation, le bras de la balance introduit dans ce liquide va descendre. L'équilibre sera rétabli en arrangeant les poids „a”, „a/10”, „a/100”, „a/1000”.

Attention!: Le poids „a” (le plus grand cavalier, ne sera plus mis sur la divisions 10, mais sur une autre, de sorte que, avec les autres cavaliers, l'on obtienne l'équilibre de la balance.

En supposant que les divisions  $x, y, z$  dans lesquelles sont placées à l'équilibre les poids „a”, „a/10”, „a/100”, „a/1000”, il revient que: (voir la figure)

$$F_A^l \cdot 10 = a \cdot x + \frac{a}{10} y + \frac{a}{100} z + \frac{a}{1000} t$$

La condition d'équilibre de la balance pour le flotteur introduit dans l'eau distillée est donnée par la relation (3):

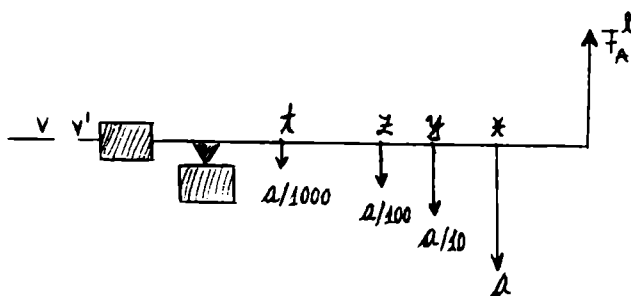


Fig. 3

$$F_A^{H_2O} \cdot 10 = a \cdot 10$$

Comme avant, en faisant leur rapport, il en résulte que:

$$\frac{F_A^l \cdot 10}{F_A^{H_2O} \cdot 10} = \frac{a \cdot x + \frac{a}{10} \cdot y + \frac{a}{100} z + \frac{a}{1000} t}{a \cdot 10}$$

$$\frac{F_A^l \cdot 10}{F_A^{H_2O} \cdot 10} = \frac{x}{10} + \frac{y}{1000} + \frac{z}{1000} + \frac{t}{10000} = 0, x y z t$$

D'autre part:

$$\frac{F_A^l}{F_A^{H_2O}} = \frac{V_{corps} \cdot \rho_l \cdot g}{V_{corps} \cdot \rho_{H_2O} \cdot g} = \frac{\rho_l}{\rho_{H_2O}} = \rho_{rel}^l$$

En conséquence, pour un liquide moins dense que l'eau:

$$\rho_{rel}^l = 0, x y z t$$

Par exemple: Si l'équilibre est obtenu pour  $x = 9, y = 8, z = 7, t = 1$ , il s'ensuit que  $\rho_{rel}^l = 0,9871$  nombre sans dimensions.

Les opérations qu'on doit effectuer sont:

1. Pour le même liquide on va faire  $n = 5-6$  déterminations directes, et en utilisant les relations connues on déterminera la densité relative.

Par exemple: On suppose un liquide avec  $\rho_{rel}^l = 1,8785$  connue. Les déterminations dans le laboratoire sont des valeurs approximatives, qui ne coïncident pas avec la vraie valeur 1,8785. ( $\rho_1 = 1,8784; \rho_2 = 1,8779; \rho_3 = 1,8783; \rho_4 = 1,8786; \rho_5 = 1,87849$ ).

2. Dans la limite du temps, on va calculer les densités relatives pour des solutions  $CuSO_4$  et l'eau dont les concentrations sont connues, ou l'alcool et l'eau, préparées dans le laboratoire.

On va faire les graphes de la densité fonction de la concentration.

Les solutions d'eau et sucre pour lesquelles on peut mesurer la concentration à l'aide du réfractomètre *ABBÉ*, peuvent être aussi utilisées.



## Calcul des erreurs

a) On va faire  $i = 5$  déterminations pour compléter le tableau:

i	$\rho_i$	$\bar{\rho}$	$\rho_i - \bar{\rho}$	$(\rho_i - \bar{\rho})^2$
1				
2				
3				
4				
5				

Pour une détermination choisie ( $\rho_i$ ) on va écrire le résultat sous la forme:  $(\rho_i \pm \Delta\rho)$  où  $\Delta\rho$  est l'erreur absolue maximale qui accompagne les déterminations effectuées.

*Indication:*  $\Delta\rho$  est égale à la précision de l'appareil, autrement dit, c'est la plus petite valeur de la densité, mesurée avec la balance (dans notre cas:  $\Delta\rho = 0,001$ ).

b) Calculer l'estimation de la vraie valeur:

*Indication:*  $\bar{\rho} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i$  la valeur moyenne.

c) Calculer l'erreur standard  $S_\rho$  pour un mesurage singulier, appartenant à la série effectuée.

*Indication:* 
$$S_\rho = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\rho} - \rho_i)^2}{n-1}}$$

d) Ecrire le résultat de la série des mesurages effectués.

*Indication:* On calcule l'erreur standard  $S_{\bar{\rho}}$  pour la valeur moyenne, et la vraie valeur appartient à l'intervalle:  $(S_{\bar{\rho}} = S_\rho / \sqrt{n})$

$$\bar{\rho} - S_{\bar{\rho}} \leq \rho_o \leq \bar{\rho} + S_{\bar{\rho}} \quad \text{ou} \quad \rho_o = (\bar{\rho} \pm S_{\bar{\rho}})$$

e) Déterminer l'intervalle de confiance de sorte que la vraie valeur  $\rho_o$  se trouve dedans, avec un niveau de confiance  $P^* = 0,999$ .

*Indication:*

$$\bar{\rho} - t(P^*; k)S_{\bar{\rho}} \leq \rho_o \leq \bar{\rho} + t(P^*; k) \cdot S_{\bar{\rho}} \quad \text{ou} \quad \rho_o = (\bar{\rho} \pm t(P^*; k) \cdot S_{\bar{\rho}})$$

## LE CALCUL DE LA DENSITÉ D'UN GAZ A L'AIDE DE L'APPAREIL DE BUNSEN

Pour déterminer la densité d'un gaz on va utiliser cette fois-ci la loi d'écoulement des liquides à travers des petits orifices.

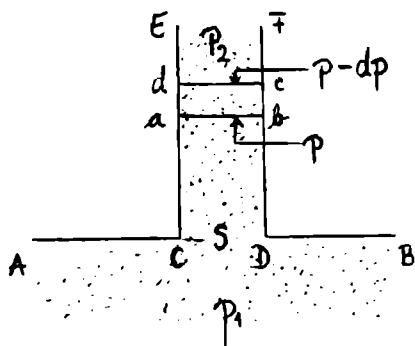


Fig. 1

distance  $h$  l'un de l'autre.

Le volume du cylindre est égal à  $Sh$  et sa masse avec  $hSp$  (où  $\rho$  est la densité du gaz qui s'écoule).

On va noter par  $p$  la pression exercée de bas en haut sur l'élément considéré et par  $p - dp$  la pression de haut en bas. La différence entre ces deux pressions, orientée de bas en haut, imprime à l'élément considéré un mouvement dans la même direction.

On suppose que l'élément s'est déplacé sur la distance  $h$ .

La variation de l'énergie cinétique doit être égale au travail mécanique de la force  $(\mathbf{F})$  détermine le déplacement:

$$dW_c = dF \cdot h$$

où:  $dF = S[(p - dp) - p] = - Sdp$

$$W_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Sh\rho \cdot v^2$$

En portant  $dF$  et  $W_c$  dans la relation (1) on va obtenir:

$$d(v^2) = -\frac{2dp}{\rho}$$

En effectuant l'intégrale entre  $v_1 = 0$  et  $v_2 = v$ , de  $p_1$  à  $p_2$ , on obtient:

$$v^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}$$

(2)

Les conditions considérées pour la déduction de cette équation la rendent approximative.

Ainsi, on a supposé une densité du gaz constante durant l'écoulement, on a négligé le frottement entre le gaz et les murs de l'orifice.

En réalité, ces considérations ne s'appliquent que d'une façon approximative. Quand même, la relation (2) est vérifiée de manière satisfaisante par l'expérience.

Dans le travail qu'on va effectuer en laboratoire, le gaz va sortir d'un récipient où sa pression est  $p_1 = p + H$  dans l'atmosphère, dont la pression est  $p_2 = H$ . (3)

La relation (2) devient:

$$v^2 = \frac{2P}{\rho}$$

A un moment donné, quand la surpression dans le récipient est  $p$ , la vitesse d'écoulement est donnée par la relation (3).

Etant donné que le carré de la vitesse ( $v^2$ ) varie en raison directe à la pression pour laquelle on suppose aussi une variation linéaire, la moyenne temporaire du carré de la vitesse ( $\overline{v^2}$ ) sera donnée par la moyenne arithmétique:

$$\overline{v^2} = \frac{v_I^2 + v_{II}^2}{2} = \frac{P_I + P_{II}}{\rho}$$

où:  $p_I, p_{II}$  sont deux valeurs connues de la surpression du gaz dans le récipient d'où celui-ci s'écoule;

$v_I, v_{II}$  sont les vitesses d'écoulement du gaz qui correspondent aux pressions  $p_I, p_{II}$

Si, par le même orifice s'écoulent deux gaz, dont les vitesses, les pressions et les densités sont distinguées les unes des autres par les indices ' et '', on a: (4)

$$\overline{v'^2} = \frac{P'_I + P'_{II}}{\rho'}; \quad \overline{v''^2} = \frac{P''_I + P''_{II}}{\rho''}$$

On peut choisir les conditions de l'expérience de sorte que:  $p'_I = p''_I$  et  $p'_{II} = p''_{II}$ . Il s'ensuit que: (5)

$$\frac{\overline{v'^2}}{\overline{v''^2}} = \frac{\rho'}{\rho''}$$

En réalité, la détermination des deux vitesses  $v', v''$  est assez compliquée.

Dans ce cas, les volumes des gaz doivent être identiques, leurs temps d'écoulement sont en raison inverse à la vitesse moyenne, c'est à dire: (6)

$$\frac{\overline{v'}}{\overline{v''}} = \frac{t''}{t'} \quad (7)$$

Donc:  $\frac{\rho'}{\rho''} = \frac{t'^2}{t''^2}$

De cette manière, le mesurage du temps d'écoulement des deux gaz - dans les conditions plus haut spécifiées, rend possible la détermination de la densité  $\rho'$ , pour  $\rho''$  connue.

Les étudiants vont déterminer la densité du gaz méthane  $\rho'$ , en leur donnant la densité de l'air  $\rho''$ .

$$\rho' = \frac{t'^2}{t''^2} \rho'', \quad \rho'' = 1,293 \text{ kg} / \text{m}^3$$

### Description de l'appareil

L'appareil qu'on va utiliser est présenté dans la figure n° 2. Il est composé d'un tube de verre A, dont on a laissé ouverte la partie inférieure; le tube est prévu à sa partie supérieure avec un robinet R pourvu de trois orifices, parmi lesquels l'orifice „b” possède un diamètre extrêmement petit.

L'appareil est introduit dans le récipient B avec de l'eau, fixé à l'aide d'un support.

Par la ramification „a” du robinet au moyen d'un tube de caoutchouc, le tube „A” peut être mis en

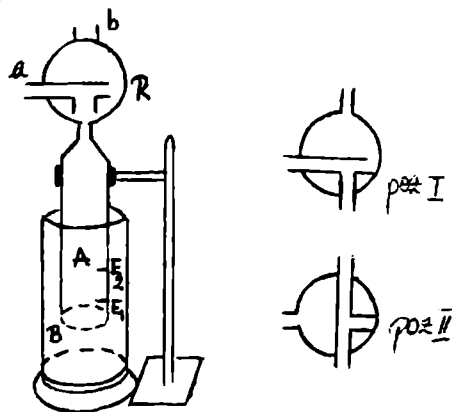


Fig. 2

## Mode de travail

1. On va choisir sur le tube „B" deux repères  $E_1$  et  $E_2$ .
2. On fixe le robinet „R" dans la position I, en faisant le contact avec le tube „A". Pendant ce temps, le contact avec l'ouverture „b" est fermé.
3. En utilisant une pompe, on va introduire de l'air dans le récipient „A", de sorte que le niveau de l'eau descende sous le repère  $E_1$ ; puis on met le robinet sur la position II, obturant ainsi la communication du tube „A" avec la pompe.
4. Chronométrer le temps „t" dans lequel l'eau du tube „A" passe entre les deux repères  $E_1$  et  $E_2$ .
5. Répéter les opérations plus-haut décrites, en utilisant cette fois-ci le gaz méthane.  
Attention!: on utilise les mêmes repères qu'avant.
6. On choisi d'autre repères  $E'_1$  et  $E'_2$ , pour lesquels on va faire les mêmes opérations.
7. Pour chaque intervalle  $E_1 - E_2$  on va faire six déterminations pour l'air et six pour le gaz méthane.

La densité du gaz méthane sera donnée par la relation:

$$\rho' = \rho'' \frac{\overline{t'^2}}{t''^2}; \quad \bar{t} = \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{n}$$

8. Calculer la masse molaire du gaz méthane, pour le volume molaire connu  $V_{\mu_0} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{mol}$  (SI).

$$\mu' = V_{\mu_0} \cdot \rho' = \rho'' \cdot V_{\mu_0} \frac{\overline{t'^2}}{t''^2} = 22,4 \cdot 1,293 \frac{\overline{t'^2}}{t''^2} \cdot 10^{-3} \text{ kg} / \text{mol}$$

Les résultats seront écrits dans le tableau:

Repère	t'	t''	t̄	t̄''	ρ'	μ'

### Calcul des erreurs

- a) Calculer l'erreur standard de la moyenne arithmétique  $S_{\bar{t}}$ .

Indication:  $\rho'$  est une fonction de deux variables indépendantes  $t'$  et  $t''$  mesurées directement.

$$\rho' = \rho'' \frac{t'^2}{t''^2}, \quad \rho'' = \text{const.}$$

L'on utilise la loi de la propagation des erreurs pour deux variables.

$$S_{\bar{\rho}'} = \sqrt{\left( \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \right)_{t'=\bar{t}', t''=\bar{t}''}^2 \cdot S_{\bar{t}'}^2 + \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t''} \right)_{t'=\bar{t}', t''=\bar{t}''}^2 \cdot S_{\bar{t}''}^2}$$

$$\text{où: } \frac{\partial \rho'}{\partial t'} = \rho'' \frac{2t'}{t''^2}; \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t''} = -\rho'' \frac{2t'^2}{t''^3}$$

$$\left( \frac{\partial \rho'}{\partial t'} \right)_{t'=\bar{t}', t''=\bar{t}''} = \rho'' \frac{2\bar{t}'}{\bar{t}''^2}; \quad \left( \frac{\partial \rho'}{\partial t''} \right)_{t'=\bar{t}', t''=\bar{t}''} = -\rho'' \frac{2\bar{t}'^2}{\bar{t}''^3};$$

$$S_{\bar{t}}^2 = \frac{(\bar{t} - t'_1)^2 + \dots + (\bar{t} - t'_n)^2}{n(n-1)}$$

$$S_{\bar{t}'}^2 = \frac{(\bar{t}' - t_1'')^2 + \dots + (\bar{t}' - t_n'')^2}{n(n-1)}$$

$$\bar{t}' = \frac{t_1' + \dots + t_n'}{n}; \quad \bar{t}'' = \frac{t_1'' + \dots + t_n''}{n}; \quad n = 6$$

b) Trouver l'intervalle de confiance auquel appartient la vraie valeur du  $\rho'$ , notée par  $\rho'_o$ ; l'intervalle doit être trouvé avec un niveau de confiance donné par  $P^*$  ( $P^* = 0,999$ ;  $k = n - 1 = 6 - 1 = 5$ ).

$$\bar{\rho}' - t(P^*; k) \cdot S_{\bar{\rho}'} \leq \rho'_o \leq \bar{\rho}' + t(P^*; k) \cdot S_{\bar{\rho}'}$$

ou:  $\rho'_o = (\bar{\rho}' \pm t(P^*; k) \cdot S_{\bar{\rho}'}) \text{ kg / m}^3$

$$\bar{\rho}' = \rho'' \frac{(\bar{t}')^2}{(\bar{t}'')^2}$$

Les valeurs pour la fonction  $t(P^*; k)$  sont données dans le tableau:

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

c) Sans utiliser le niveau de confiance  $P^*$ , écrire le résultat final.

d) Calculer la précision pour les deux séries des mesurages ( $t_1', \dots, t_6'$ ) et ( $t_1'', \dots, t_6''$ ).

*Indication:* L'on utilise l'indicateur statistique, l'erreur standard d'une détermination singulière d'une série donnée.

$$S_{t'}^2 = \frac{(\bar{t}' - t_1')^2 + \dots + (\bar{t}' - t_n')^2}{n-1}; \quad S_{t''}^2 = \frac{(\bar{t}'' - t_1'')^2 + \dots + (\bar{t}'' - t_n'')^2}{n-1}$$

## DETERMINATION DU MODULE D'ELASTICITÉ (YOUNG) D'UN FIL SOUMIS À LA TRACTION

Si une force  $\bar{F}$  agit sur un fil de longueur  $l$  et section transversale  $S$ , celui-ci peut se raccourcir ou s'allonger de  $\Delta l$ .

La loi de Hooke nous dit que la grandeur  $\Delta l$  est en raison directe de  $|\bar{F}|$  et  $l$  et en raison inverse de  $S$ .

$$\Delta l = \alpha \frac{F \cdot l}{S \Delta l} \quad (1)$$

où  $\alpha$  est une constante de proportionnalité nommée coefficient d'allongement (compression longitudinale).

Par définition, le module d'élasticité d'extension, autrement dit le module de Young, est égal à l'inverse de la constante d'élasticité  $\alpha$ ; d'habitude on le note par  $E$ .

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{Fl}{S \Delta l} \quad (2)$$

Sous l'action de la force  $\bar{F}$ , le fil d'acier va manifester à côté de l'extension, une contraction, transversale, dont l'expression mathématique est:

$$\Delta d = \beta \frac{Fd}{S} \quad (3)$$

où on a noté par:

$d$  = le diamètre du fil d'acier;

$\Delta d$  = la variation du diamètre sous l'action de la force  $\bar{F}$ ;

$\beta$  = une constante, dénommée le coefficient de contraction transversale.

Le rapport  $\sigma = \frac{\beta}{\alpha}$  est dit coefficient de Poisson et possède théoriquement la même valeur pour tous corps isotropes, c'est à dire 0,25.

### *Description de l'appareil et du mode de travail*

Le fil confectionné du matériel qu'on étudie est fixé entre deux consoles (fig. n° 1). Par le chargement en utilisant des poids, le fil va subir une élongation.

Par conséquent, la barre  $r$  sur laquelle on a fixé à angle droit un miroir plan  $M$  va tourner autour de l'axe  $O$ , s'appuyant sur le cylindre  $d$  qui se déplace avec le fil sous l'action des poids.

Donc, pour un allongement du fil avec  $\Delta l$ , le miroir va tourner avec l'angle  $\alpha$ ; en regardant la figure:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta l}{b} \simeq \alpha \quad (\text{pour des petits angles}) \quad (4)$$

où:  $b$  = la longueur de la barre  $r$ .

Pour le miroir, le changement de sa position peut être enregistré à l'aide de l'échelle graduée  $S$  dont l'image est observée par la lunette  $R$ .

Pour une différence  $\Delta n$  entre les graduations de l'échelle correspondant à la rotation du miroir à un angle  $\alpha$  et tenant compte de la distance  $D$  entre le miroir et l'échelle, on peut écrire:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\Delta n}{D} \simeq 2\alpha \quad (\text{l'angle } \alpha \text{ petit}) \quad (5)$$

En comparant les relations (4) et (5), il s'ensuit:

$$\Delta l = \frac{\Delta n}{2D} \cdot b \quad (6)$$

Avant de commencer les mesures, on doit régler la lunette et également établir sur l'échelle graduée  $S$  un repère arbitraire (un graduation quelconque) qui sera la même pour tous les mesurages.

On mesure à l'aide d'un mètre la distance  $D$  entre le miroir et l'échelle graduée.

On note le „point zéro" sur l'échelle ( $n_0$ ), autrement dit, la graduation sans aucun poids.

Pour le chargement successivement avec des unités de masse  $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ , ...,  $m_{10} = 10 \text{ kg}$ , dont les forces sont:  $F_1 = m_1 g(N)$ , ...,  $F_{10} = m_{10} g(N)$  on va lire les graduations  $n_1, \dots, n_{10}$  en utilisant la lunette; puis on va calculer  $\Delta n_1 = n_1 - n_0$ ,  $\Delta n_2 = n_2 - n_0$ , ...,  $\Delta n_{10} = n_{10} - n_0$ , c'est à dire le déplacement de l'image de l'échelle.

En utilisant la relation (6), on va calculer les allongements  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_{10}$ .

Pour chaque  $\Delta l$  on doit calculer le module d'élasticité  $E_1, E_2, \dots, E_{10}$  à l'aide de la relation (2).

Les grandeurs  $l, s, b$ , seront déterminées en les mesurant directement, dans le Système International des Unités.

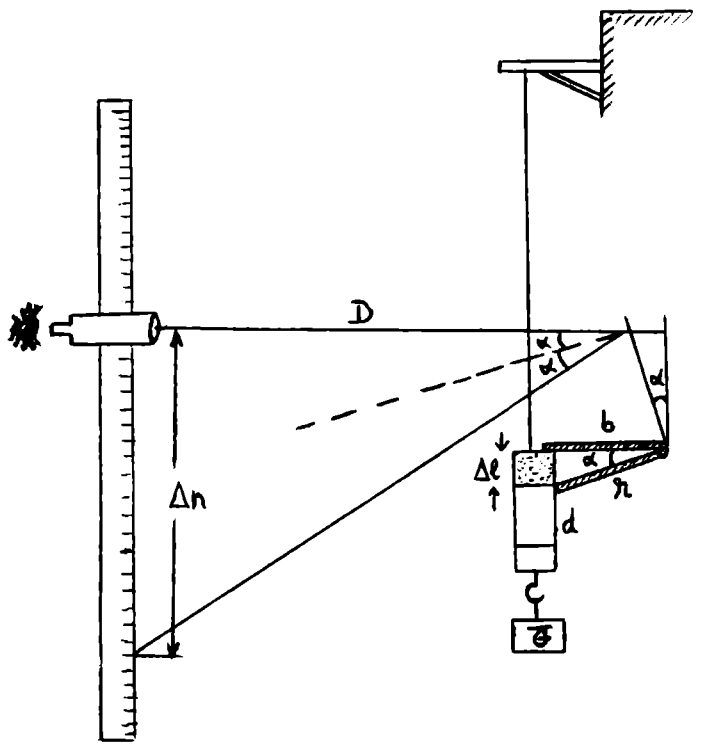


Fig. 1

### Calcul des erreurs

a) En mesurant les grandeurs  $\Delta n$  et  $m$ , compléter le tableau:

$i$	$m_i$ [kg]	$\Delta n_i$ [m]	$x_i$	$E_i$	$\bar{E}$	$(E_i - \bar{E})$	$(E_i - \bar{E})^2$
1							
2							
3							
4							
5							

où on a noté par:  $x_i = \frac{m_i}{\Delta n_i}$

$$E_i = kx_i; \quad k = \frac{2lDg}{Sb}$$

$$E = \frac{\sum x_i}{5} \cdot k$$

On suppose que les valeurs des grandeurs  $l, D, g, r, b$  sont exactes (affectées par des erreurs absolues petites).

b) Indiquer l'intervalle de confiance dans lequel on peut affirmer que se trouve la vraie valeur  $E_o$ , avec un niveau de confiance  $P^* = 0,99$ .

Indication: On va déterminer l'erreur standard de la moyenne arithmétique  $S_{\bar{E}}$ .

$$S_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(\bar{E} - E_1)^2 + \dots + (\bar{E} - E_5)^2}{5 \cdot 4}}$$

La valeur pour la fonction  $t(P^*; k) = t(0,99; 4)$  sera trouvée en utilisant le tableau:

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

$$E_o = \left( \bar{E} \pm t(0,99; 4) \cdot S_{\bar{E}} \right) N / m^2$$

c) Caractériser la précision des mesurages  $E_1, \dots, E_5$ .

Indication: On va utiliser l'indicateur statistique  $S_{\bar{E}}$ .

$$S_E = \sqrt{n} S_{\bar{E}}$$

d) En connaissant les valeurs des grandeurs  $l, g, b, d, D$  et leurs erreurs absolues maximales

$$\Delta l = \Delta D = 10^{-3} m, \Delta g = 5 \cdot 10^{-4} m/s^2, \Delta d = 0,01 \cdot 10^{-3} m, \Delta b = 10^{-3} m (l = 2\pi, g = 9,8064 m/s^2; d = 0,80 \cdot 10^{-3} m, h = 60 \cdot 10^{-3}; D = 1,5 m),$$

calculer l'erreur absolue et relative pour la constante  $k$ .

$$\text{Indication: } k = \frac{2lDg}{\pi r^2 b}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \delta_k = \delta_l + \delta_D + \delta_g + \delta_{r^2} + \delta_b$$

Les numéros 2 et  $\pi$  ont été considérés exacts.

$\Delta k = l$  ' erreur absolue maximale

$$\Delta k = k(\delta_l + \delta_D + \delta_g + 2\delta_r + \delta_b)$$

$$\Delta(d) = \Delta(2r) = 2 \cdot \Delta r.$$



## LA DETERMINATION DU MODULE D'ELASTICITÉ D'UNE BARRE

*Indication:* Dans la théorie d'élasticité le mot „déformation" signifie le changement dans la position des particules d'un corps solide, dû à l'action des forces extérieures.

Pour des forces extérieures petites, les déformations vont disparaître quand les forces cessent d'agir.

Pour des grandes déformations, après l'arrêt de l'action des forces, la déformation ne disparaîtra pas en totalité. On va la nommer la déformation rémanente. Quand on constate une première trace d'une déformation rémanente on dit qu'on a atteint la limite d'élasticité.

Un corps se dit élastique quand la limite d'élasticité va apparaître pour des grandes forces.

Au contraire, un corps se dit inélastique quand la limite d'élasticité apparaît même pour des très petites forces.

Les déformations élastiques se classifient dans: *l'extension (l'allongement), le glissement, la torsion, le courbement.* L'extension et le glissement sont des déformations simples, les autres sont plus complexes.

Pour des petites déformations, une déformation quelconque peut être considérée comme la somme des déformations simples.

Les petites déformations d'un corps élastique respectent les lois fondamentales suivantes:

a. entre les limites d'élasticité la déformation est en raison directe au module de la force extérieure;

b. le changement du signe de la force extérieure influence uniquement le signe de la déformation, en conservant même module;

c. dans le cas de plusieurs forces extérieures, la déformation totale sera la somme des déformations partielles.

Par conséquent, on peut écrire:

$$\Delta = K \cdot P \quad (1)$$

où:  $\Delta$  = la déformation

$K$  = une constante

$P$  = la force extérieure.

L'étude qu'on va entreprendre cette fois-ci consiste à étudier le courbement d'une barre sous l'action d'une force  $\vec{P} = m\vec{g}$ .

Une barre élastique fixée à une extrémité dans un mur rigide et qui subit l'action d'une force extérieure à l'autre extrémité, va se courber.

Dans cette situation, les couches supérieures vont s'allonger et les couches inférieures vont se comprimer. Quand même'il y a une couche intermédiaire, nommée couche neutre dont la longueur est constante et qui va seulement se courber.

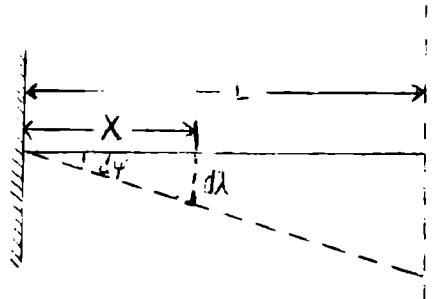


Fig. 1

On appelle la flèche du courbement, le déplacement de l'extrémité de la barre.

La flèche du courbement est en raison directe à la force qui agit, et la constante de proportionnalité  $\lambda$  dépend de la nature et les dimensions de la barre.

Pour calculer la flèche du courbement on va analyser une section transversale quelconque dans la barre rectangulaire, de longueur  $L$ , hauteur  $h$  et largeur  $a$ .

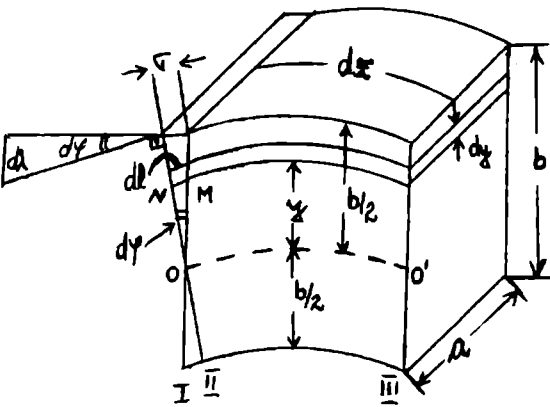


Fig. 2

On suppose que la section considérée se trouve à la distance  $x$  de l'extrémité libre de la barre. Dans la figure n° 2 on a représenté un élément de la barre, dont la longueur est  $dx$ , situé dans le voisinage de la section considérée.

(I) donne la position de la section avant le courbement;

(II) donne la position de la section après le courbement;

(III) la section de référence située dans la proximité de celle courbée.

Avant de la courber, la section (I) est parallèle avec la section (III).

Après le courbement, la section (I) passe dans la position (II), parce que la section tourne autour d'un axe qui traverse la couche neutre  $OO'$ .

Le fait est dû aux portions appartenant à  $dx$  et situées au-dessus de la couche neutre qui s'allongent, et celles du dessous de la couche neutre devient plus courtes.

On va calculer l'allongement  $dl$  d'une couche quelconque de la barre, de l'hauteur  $dy$  et située à la distance  $y$  de la couche neutre.

La figure n° 2 nous donne:

$$\begin{aligned} \Delta ONM &\sim \Delta OAB \\ \Rightarrow \frac{dl}{\sigma} &= \frac{y}{\frac{b}{2}}; \quad dl = \frac{2\sigma y}{b} \end{aligned} \quad (2)$$

Pour obtenir cet allongement on doit agir au contraire de la force élastique donnée par la loi de Hooke:

$$dF = \frac{E \cdot dS \cdot dl}{dx} \quad (3)$$

où:  $E$  = le module d'élasticité du matériel

$dS$  = la surface de la couche.

En portant dans cette expression la valeur trouvée de  $dl$ , aussi bien que  $dS = a \cdot dy$  obtenu de la figure n° 2, on a:

$$dF = \frac{2 E a \sigma \cdot y}{b dx} \cdot dy \quad (4)$$

Pour calculer le moment qui agit dans toute la section transversale de la barre il faut additionner les moments de toutes les forces  $dF$ .

Le moment élémentaire du courbement est:

$$dM = y \cdot dF = \frac{2 E a \sigma}{b dx} y^2 dy \quad (5)$$

Le moment total du courbement créé par les forces élastiques dans la section transversale sera:

$$M = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{2 E a \sigma}{b dx} y^2 dy = \frac{E a \sigma b^2}{6 dx} \quad (6)$$

A l'équilibre, le moment du courbement dû aux forces élastiques doit être égal à celui des forces extérieures; donc on va écrire:

$$M = \frac{E a \sigma b^2}{6dx} = Px \quad (7)$$

où:  $P$  = le poids situé à l'extrémité libre de la barre

$x$  = la distance entre le point d'application de la force  $\bar{P}$  et la section considérée.

L'angle fait par les directions (I) et (II) de la section transversale est une mesure du courbement.

Parce que l'angle  $d\varphi$  est extrêmement petit, on peut écrire dans le triangle  $AOB$ :

$$\text{tg}(d\varphi) \simeq d\varphi = \frac{\sigma}{(b/2)} = \frac{2\sigma}{b} \quad (8)$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{2\sigma}{b} \quad (9)$$

Dans les points  $A$  et  $B$  on va construire des perpendiculaires sur les directions des sections (I) et (II), en les prolongeant jusqu'à l'extrémité libre de la barre.

Soit  $x$  leur longueur; de la figure n° 1 ou n° 2, il résulte que:

$$d\lambda = x d\varphi \quad (10)$$

En utilisant l'expression qu'on a trouvé pour  $d\varphi$  et l'expression du  $\sigma$  (relation 7):

$$\sigma = \frac{6Px dx}{Eab^2} \quad (11)$$

de l'équation (10) on trouvera:

$$d\lambda = \frac{12 \cdot P \cdot x^2 dx}{Eab^3}$$

L'entière flèche du courbement sera donnée par l'intégrale:

$$\lambda = \int_0^L \frac{12P}{Eab^3} x^2 dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4 P L^3}{E a b^3} \quad (12)$$

La flèche d'une barre fixée à une extrémité et actionnée par une force de pesanteur  $P$  à l'extrémité libre est donnée par la relation (12).

Le but de ce travail est de calculer expérimentalement la grandeur  $\lambda$  et puis, à l'aide de la relation (12) de déterminer le module d'élasticité.

### Description de l'appareil

L'appareil utilisé est dessiné dans la figure n° 3. Il est composé d'une plaque de bois  $M$  sur laquelle sont disposés les supports  $s_1$ ,  $s_2$  et  $s_3$ . Les supports  $s_1$  et  $s_2$  soutiennent le tambour  $T$  avec lequel on fixe l'extrémité de la barre étudiée  $B$ .

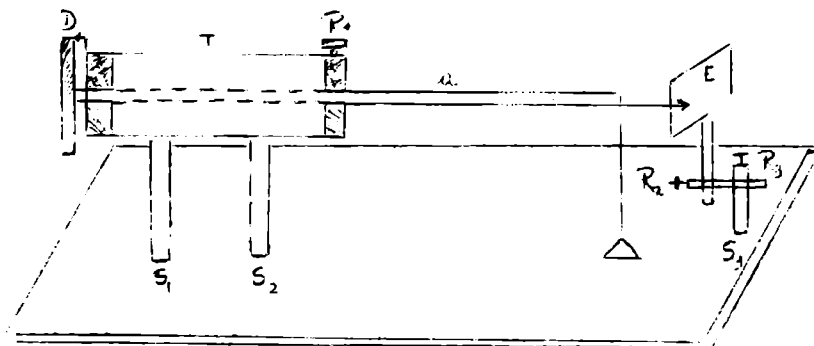


Fig. 3

Les différentes positions de la barre B peuvent être réglées à l'aide du disque D. On établit la position choisie de la barre en utilisant la vis  $R_1$ .

A droite, il y a le support  $s_3$  pour une petite plaque graduée en mm; avec celle-ci on va mesurer le déplacement de l'extrémité libre de la barre.

A l'aide des vis  $R_2$  et  $R_3$  l'on fixe l'aiguille indicatrice de l'extrémité libre à côté d'une graduation choisie comme point de repère.

### Mode de travail

1. A l'aide du disque D et de la vis  $R_1$ , mettons la barre dans la position n° 1.
2. En utilisant les vis  $R_2$  et  $R_3$ , on va amener le repère (appartenant à la plaque E) à côté de l'aiguille indicatrice.
3. L'on charge la barre de 20 g jusqu'à 300 g, de 20 g en 20 g, en lisant chaque fois la division indiquée par l'aiguille.
4. De cette façon, il est possible de lire directement la flèche  $\lambda$  par rapport au repère choisie.
5. En utilisant la relation  $E = \frac{4PL^3}{ab^3\lambda} = \frac{4mgL^3}{ab^3\lambda}$  calculer  $E [N/m^2]$

### Calcul des erreurs

a) Avec les mesurages de la flèche  $\lambda$  et de la masse  $m$ , compléter le tableau:

$i$	$m_i [kg]$	$\Delta n_i [m]$	$x_i$	$E_i$	$\bar{E}$	$(E_i - \bar{E})$	$(E_i - \bar{E})^2$
1							
2							
3							
4							
5							

Les notations signifient:  $x_i = \frac{m_i}{\lambda_i}$ ;  $E_i = kx_i$

$$k = \frac{4gL^3}{ab^3}; \quad \bar{E} = \frac{x_1 + \dots + x_5}{5} \cdot k$$

On considère les valeurs numériques pour  $L$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $g$ , „exactes" (c'est-à-dire, les erreurs absolues sont suffisamment petites)

$$L = 0,6 \text{ m}; \quad a = 4 \text{ mm}; \quad b = 3 \text{ mm}; \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

b) Indiquer l'intervalle de confiance pour lequel on peut affirmer l'appartenance de la vraie valeur  $E_0$  avec un niveau de confiance  $P^* = 0,999$ .

Indication: On considère l'indicateur statistique

$$S_{\bar{E}} = \sqrt{\frac{(\bar{E} - E_1)^2 + \dots + (\bar{E} - E_5)^2}{5 \cdot 4}}$$

La valeur de la fonction  $t(0,999; 4)$  va être lue dans le tableau  $t(P^*; k)$  présenté plus-bas: ( $k = n-1 = 5-1 = 4$  les degrés de liberté)

$k \backslash p^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

Le résultat sera:

$$\bar{E} - t(0,999; 4) \cdot S_{\bar{E}} \leq E_o \leq \bar{E} + t(0,999; 4) \cdot S_{\bar{E}}$$

où

$$E_n = (\bar{E} \pm t(0,999; 4) \cdot S_{\bar{E}}) \text{ N / m}^2$$

c) Calculer la précision des mesurages  $E_1, \dots, E_5$ .

*Indication:* L'on calcule la grandeur  $S_{\bar{E}}$ :

$$S_{\bar{E}} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_E \quad n = 5$$

d) Pour les valeurs numériques des grandeurs:  $L=0,6 \text{ m}$ ,  $a=4 \text{ mm}$ ,  $b=3 \text{ mm}$ ,  $g=9,81 \text{ m/s}^2$

( $g = 9,8064 = 0,0005 \text{ m/s}^2$ ) calculer l'erreur absolue et relative pour la constante  $k = \frac{4gL^3}{ab^3}$ .

*Indication:*  $\delta_k = \delta_g + \delta_{L^3} + \delta_a + \delta_{b^3}$

$$\Delta_k = k \cdot \delta_k$$

$$\delta_{L^3} = 3 \cdot \frac{\Delta L}{L} = 3\delta_L$$

$$\delta_{b^3} = 3 \cdot \frac{\Delta b}{b} = 3\delta_b$$

$$\Delta L = \Delta b = 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \delta_k = \delta_g + 3\delta_L + \delta_a + 3\delta_b$$

## MÉTHODE HYDRODYNAMIQUE POUR MESURER L'INTENSITÉ DE LA PESANTEUR $g$

L'intensité de la pesanteur (pour la chute libre des corps sur la Terre) dépend de l'altitude (la distance jusqu'au centre de la Terre) et ne dépend pas trop de la latitude, à cause de l'aplatissement aux Pôles et surtout en raison du mouvement circulaire autour de son propre axe.

On considère l'intensité de la pesanteur normale ou standard  $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$  et sur la parallèle  $45^\circ$  au niveau de la mer,  $g_o = 9,80616 \text{ m/s}^2$ .

Une méthode dont la précision est très élevée suppose le mesurage du temps d'écoulement de l'eau mise dans un récipient d'une forme quelconque.

*Principe de la méthode:*

On suppose un récipient cylindrique de rayon  $R$  qui possède dans la partie inférieure un orifice de rayon  $r$  (fig. n° 1). En considérant le cylindre complètement rempli on poursuit à déterminer le temps nécessaire pour que toute la quantité de l'eau s'écoule du récipient.

On va noter par:

$h$  = le niveau de l'eau au moment  $t$

$H$  = le niveau de l'eau au moment  $t = 0$ .

La vitesse d'écoulement du liquide à travers l'orifice inférieur est donnée par la relation de Toricelli:

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)} \quad (1)$$

Pendant l'intervalle du temps infiniment petit  $dt$  on peut admettre que la vitesse d'écoulement du liquide ne se modifie pas. Soit  $dV$  le volume de l'eau qui se déplace en même temps dans la partie supérieure du cylindre que par l'orifice d'écoulement:

$$dV = S \cdot dh = \pi R^2 \cdot dh \quad (2)$$

D'autre part:

$$dV = -s \cdot dl = -\pi r^2 v(t) dt = -\pi r^2 \sqrt{2gh(t)} \cdot dt \quad (3)$$

où:  $S$  = la surface de la section transversale du cylindre

$s$  = la surface de l'orifice de la partie inférieure du cylindre.

Du fait que  $h(t)$  est une fonction qui décroît (voir le signe „moins") en comparant (2) et (3), il s'ensuit que

$$\pi R^2 dh = -\pi r^2 \sqrt{2gh(t)} dt \quad (4)$$

(4) est une équation différentielle du premier ordre. Si on sépare les variables  $h$  et  $t$ , on obtient

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} \cdot dt \quad (5)$$

Par intégration il résulte:

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g} \int dt \quad (6)$$

$$\text{ou: } 2\sqrt{h} = -\frac{r^2}{R^2} \sqrt{2g}t + C \quad (7)$$

où:  $C$  = constante d'intégration arbitraire.

Pour déterminer  $C$  on utilise la condition qu'au moment  $t = 0$ ,  $h = H$ . Par conséquent:

$$C = 2\sqrt{H} \quad (8)$$

La relation (7) devient:

$$\sqrt{h} = -\frac{r^2}{2R^2} \sqrt{2g}t + \sqrt{H} \quad (9)$$

Si dans la relation (9) on met  $h = h_1$ , on obtient le temps d'écoulement:

$$t = \frac{2R^2(\sqrt{H} - \sqrt{h_1})}{r^2 \sqrt{2g}} \quad (10)$$

En utilisant la relation (10) l'intensité de la pesanteur a l'expression:

$$g = \frac{2R^4(H + h_1 - 2\sqrt{Hh_1})}{r^4 t^2} \quad (11)$$

Pour simplifier l'écriture, on note

$$\frac{2R^4(H + h_1 - 2\sqrt{Hh_1})}{r^4} = k \quad (12)$$

En conséquence:

$$\boxed{g = \frac{k}{t^2}} \quad (13)$$

La grandeur  $k$  sera considérée comme une constante du récipient.

Quelle est la précision de la mesure de  $g$  dans la relation (13)?

La précision de  $g$  dépend à son tour de la précision avec laquelle on a mesuré  $R$ ,  $r$ ,  $H$  qui intervient dans la constante du récipient et surtout de la précision de la mesure du temps „ $t$ “ d'écoulement pour le fluide.

En ce qui concerne le mesurage de  $r$ ,  $R$  et  $H$  on peut écrire en utilisant la relation (11) dans deux endroits différents de la Terre:

$$g_1 = \frac{2R^4(H + h_1 - 2\sqrt{Hh_1})}{r^4 t_1^2} \quad (14)$$

$$g_2 = \frac{2R^4(H + h_1 - 2\sqrt{Hh_1})}{r^4 t_2^2}$$

$$\text{ou: } \frac{g_1}{g_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 \quad (15)$$

Par conséquent, il suffit de connaître l'intensité de la pesanteur  $g_1$  et le temps  $t_1$ , dans un endroit et de calculer ainsi la constante du récipient  $k = g_1 t_1^2$  dans le but de calculer après l'intensité de la pesanteur dans n'importe quel endroit sur la Terre.

Pour illustrer la précision avec laquelle on a mesuré le temps  $t$ , prenons un exemple numérique: si le temps d'écoulement est  $t = 10^4$  s et le chronomètre nous indique dans cet intervalle une

erreur absolue égale à 0,1 s, en utilisant la relation (13), l'erreur relative sur  $g$  sera obtenue de la façon suivante:

$$\ln g = \ln k - 2 \ln t$$

$$\Rightarrow \frac{dg}{g} = \frac{dk}{k} - \frac{2dt}{t} = -2 \frac{dt}{t} \quad (16)$$

ou:  $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = 2 \left| \frac{\Delta t}{t} \right|$

$$\Rightarrow \left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \frac{2 \cdot 0,1}{10^4} = 2 \cdot 10^{-5} = 20 \cdot 10^{-6} \quad (17)$$

Si on choisit un intervalle plus grand pour  $t$  on pourra obtenir une précision encore plus élevée pour  $g$ .

Une très bonne précision pour mesurer l'intensité de la pesanteur est très importante dans beaucoup d'activités pratiques.

### Manipulation:

Le récipient de la figure n° 1 est prévu avec un tube latéral de petit diamètre (qui n'est pas dessiné sur la figure), qui possède deux repères - inférieur et supérieur - le repère supérieur peut coïncider avec l'extrémité supérieur du tube latéral. Le récipient possède également un bouchon de rayon  $r$  pour fermer le tube qui est situé dans la partie inférieure du récipient de rayon  $R$ . Pour déterminer  $g$  on doit agir de la façon suivante:

- on met dans le récipient de l'eau distillée (le bouchon ferme la partie inférieure) jusqu'au moment où le ménisque dans le tube latéral devient tangent au repère supérieur;
- le chronomètre dans la main gauche on ouvre le tube de rayon  $r$  en enlevant le bouchon avec la main droite, dans le même temps que le départ du chronomètre; l'eau s'écoule dans un récipient situé au dessous de l'appareil;
- on chronomètre le temps  $t$  d'écoulement du liquide jusqu'au moment où le ménisque du liquide dans le tube auxiliaire devient tangent au repère inférieur qui est marqué;
- en connaissant la constante  $k$  de l'appareil on calcule la valeur pour  $g$  avec la relation (13);
- on évaluera la valeur relative du  $g$  avec la relation (17). La valeur pour  $k = 57293,5 m$  (valable seulement pour les repères, inférieur et supérieur marqués sur le tube).

### Le cas du récipient sphérique

On considère le cas d'un récipient de forme sphérique ou semisphérique de rayon  $R$  qui possède dans la partie inférieure un orifice de rayon  $r$  (voir la figure no 2). Si on suppose le récipient rempli avec de l'eau, on va déterminer le temps d'écoulement

Soit  $h$  le niveau de l'eau au moment  $t$

La vitesse „ $v$ ” d'écoulement par l'orifice qui se trouve en bas du récipient est donnée par la relation de Toricelli:  $v = \sqrt{2gh}$ . On prend un intervalle du temps  $dt$  infiniment petit dans lequel la vitesse d'écoulement de l'eau ne se modifie pas d'une manière sensible. Soit  $dV$  le volume de

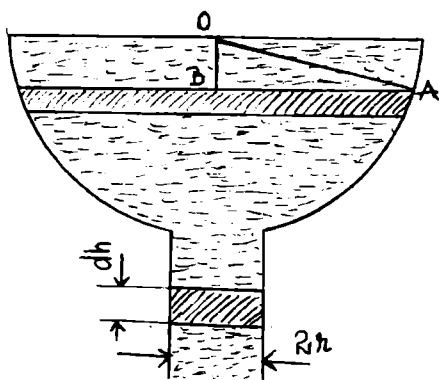


Fig. 2

liquide qui s'écoule dans  $dt$  par la partie supérieure et aussi bien à travers l'orifice d'écoulement.

On peut écrire pour  $dV$ :

$$dV = S \cdot dh = \pi AB^2 dh = s \cdot dl = \pi r^2 v dt = \pi r^2 \sqrt{2gh} \cdot dt$$

Il s'ensuit que:

$$\pi AB^2 dh = -\pi r^2 \sqrt{2gh} dt \text{ (le signe „-” nous montre la décroissance pour la fonction } h(t)\text{).}$$

$$\text{Parce que: } AB^2 = AD^2 - DB^2 = R^2 - (R - h)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2Rh - h^2$$

En conséquence on peut écrire l'équation différentielle linéaire de premier ordre:

$$\frac{(2Rh - h^2)}{\sqrt{h}} dh = -r^2 \sqrt{2g} dt$$



Par intégration on obtient:

$$\int (2R\sqrt{h} - \sqrt{h^3}) dh = -r^2 \sqrt{2g} \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} Rh\sqrt{h} - \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} = -r^2 \sqrt{2g} t + C$$

En imposant la condition initiale: pour  $t = 0$ ,  $h = R$ , on calcule la constante d'intégration:

$$C = \frac{14R^2\sqrt{R}}{15}$$

La relation devient:

$$\frac{4}{3} Rh\sqrt{h} - \frac{2}{5} h^2 \sqrt{h} = \frac{14R^2\sqrt{R}}{15} - r^2 \sqrt{2g} t$$

Si on impose  $h = 0$ , le temps d'écoulement devient:

$$t = \frac{14R^2\sqrt{R}}{15r^2\sqrt{2g}} \quad \text{D'ici on a: } g = \frac{98R^5}{225r^4t^2}$$

Pour simplifier, on met  $k = \frac{98R^5}{225r^4} = \text{constante} \Rightarrow g = \frac{k}{t^2}$

Pour un récipient sphérique et complètement rempli avec de l'eau, pour  $t = 0$   $h = 2R$  la valeur de la constante  $C$  devient:  $C = \frac{16}{15} R^2 \sqrt{2R}$

Dans ce cas:  $t = \frac{16R^2\sqrt{R}}{15r^2\sqrt{g}}$  et  $g = \frac{256}{225} \cdot \frac{R^5}{r^4} \cdot \frac{1}{t^2}$  où  $k = \frac{256}{225} \cdot \frac{R^5}{r^4}$ .

Dans le laboratoire on peut utiliser des récipients cylindriques aussi bien que sphériques.

### Calcul des erreurs

a) En effectuant 10 déterminations pour le temps d'écoulement entre deux repères donnés:  $t_1, \dots, t_{10}$ , on doit évaluer la précision de la mesure pour la série des déterminations.

*Indication:* On utilise l'erreur standard d'un mesurage individuel (erreur moyenne d'une grandeur directe  $S$  pour une détermination individuelle).

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}; \quad \bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \quad n = 10.$$

b) Pour un „ $t$ ” donné avec une erreur absolue maximale  $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ , calculer l'erreur relative maximale  $\delta g$  et l'erreur absolue maximale  $\Delta g$ .

*Indication:* On considère la relation initiale

$$g = \frac{k}{t^2} \tag{1}$$

Le logarithme de la relation (1) est:

$$\ln g = \ln k - 2 \ln t \tag{2}$$

La différentielle de la relation (2) est:

$$\frac{dg}{g} = \frac{dk}{k} - \frac{2dt}{t} \tag{3}$$

L'erreur relative maximale s'écrit:

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta t}{t} \tag{4}$$

d'où

$$\delta g = 2 \frac{\Delta t}{t} \tag{5}$$

L'erreur absolue maximale peut être calculée en utilisant la relation:

$$\Delta g = \Delta \left( \frac{k}{t^2} \right) = 2 \frac{k}{t^3} \Delta t \text{ ou avec (1), (4) et (5):}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta t}{t} \text{ ou } \Delta g = 2 \frac{\Delta t}{t} \cdot g$$

$$\Delta g = 2 \frac{\Delta t}{t} \frac{k}{t^2} = \frac{2k}{t^3} \Delta t$$

(la valeur pour  $k$  est donnée dans la théoriee, le temps  $t$  est le résultat d'un seul mesurage,  $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ ).

c) En utilisant la loi de propagation des erreurs, calculer l'erreur standard de la moyenne arithmétique  $S_{\bar{g}}$ :

$$S_{\bar{g}} = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{t=i}^2 \cdot S_i^2} = \left| \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{t=\bar{t}} \right| \cdot |S_i| \quad (6)$$

où:  $\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{2k}{t^3}$

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{(\bar{t} - t_1)^2 + \dots + (\bar{t} - t_{10})^2}{9 \cdot 10}} \quad \text{l'erreur standard de la moyenne arithmétique.}$$

$$\bar{t} = \frac{t_1 + \dots + t_{10}}{10}$$

$$\left| \left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{t=\bar{t}} \right| = \frac{2k}{\bar{t}^3} \quad (7)$$

$t_1, \dots, t_{10}$  obtenus par mesurages.

d) Ecrire le résultat final des mesurages effectués.

Indication:  $g_o = (\bar{g} \pm S_{\bar{g}}) \text{ m/s}^2$

ou:  $g_o \in [\bar{g} - S_{\bar{g}}; \bar{g} + S_{\bar{g}}]$

ou:  $\bar{g} - S_{\bar{g}} < g_o < \bar{g} + S_{\bar{g}}$

Dans toutes les relations:  $\bar{g} = \frac{k}{\bar{t}^2}$ .

La vraie valeur du  $g$ , notée  $g_o$ , appartient à cet intervalle.

e) Déterminer la précision sur la série de déterminations:  $g_1, \dots, g_{10}$ .

Indication: On calcule l'erreur standard d'un mesurage individuel pour les déterminations indirectes:

$$S_g = \sqrt{\left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)_{t=t}^2 \cdot S_t^2} = \left| \frac{\partial g}{\partial t} \right| \cdot |S_t|$$

où:  $S_t$  = l'erreur standard d'une détermination singulière

$$S_t = \sqrt{\frac{(\bar{t} - t_1)^2 + \dots + (\bar{t} - t_{10})^2}{10 - 1}}$$

f) Trouver l'intervalle de confiance de sorte que la vraie valeur du  $g$ , notée  $g_o$ , lui appartienne avec un niveau de confiance  $P^* = 0,999$ .

$k \backslash P^*$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
4	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781

## LA COMPOSITION DES OSCILLATIONS PERPENDICULAIRES

*L'appareil: l'oscilloscope.*

**Théorie de travail:** On va démontrer qu'un point matériel, sous l'action d'une force élastique (ou quasiélastique) possède un mouvement oscillatoire. Une force élastique  $f$  (ou quasiélastique) est proportionnelle au déplacement  $x$  et orientée vers la position d'équilibre (le mouvement est dans la direction de l'axe  $OX$ ).

Donc:

$$f = -k \cdot x \quad (1)$$

Le signe „-“ signifie que la force est orientée contrairement au déplacement - par exemple, la force qui agit sur un corps suspendu par un ressort.

La loi de Newton nous donne:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f = -k \cdot x \quad (2)$$

où:  $m$  = la masse du point matériel considéré

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \text{l'accélération du point matériel.}$$

De la relation (2) il en résulte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} \cdot x \quad (3)$$

On note  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , où  $\omega$  représente la pulsation du mouvement oscillatoire. Il résulte:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (4)$$

L'équation (4) est une équation différentielle de deuxième ordre, homogène, aux coefficients constants.

La solution de l'équation (4) a une forme telle que (on peut se convaincre directement en la remplaçant dans l'équation):

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) \quad (5)$$

où:  $a$ ,  $\alpha$  = constantes qui peuvent être déterminées en utilisant les conditions initiales

La grandeur „ $a$ “ est nommée l'amplitude du mouvement et  $(\omega t + \alpha)$  est la phase.

Une autre solution de l'équation (4) est:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha) \quad (6)$$

Les relations (5) et (6) sont les équations du mouvement oscillatoire harmonique.

La période d'oscillation notée par  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  représente le temps nécessaire au point matériel de passer deux fois successivement par chaque point du trajet.

La fréquence d'oscillation  $\nu = \frac{1}{T}$  représente le numéro des oscillations dans l'unité du temps.

L'amplitude représente le plus grand déplacement possible du point matériel, par rapport à la position d'équilibre.

Considérons maintenant l'addition des deux oscillations, dont les directions de propagation sont perpendiculaires.

On suppose que le point matériel participe simultanément à deux mouvements, dont les périodes sont égales.

Soit les axes  $Ox$  et  $Oy$  au long desquels les oscillations se propagent.

On a :

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ y &= a_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (7)$$

où:  $a_1, a_2$  = l'amplitude de la première et de la deuxième oscillation;

$\alpha_1, \alpha_2$  = les phases des deux mouvements considérés.

A partir de (7) on doit établir l'équation de la trajectoire du point matériel.

En éliminant le temps „ $t$ ” dans les équations (7), on trouve l'équation de la trajectoire.

En effet:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a_1} &= \cos \omega t \cdot \cos \alpha_1 - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_1 \quad (a) \\ \frac{y}{a_2} &= \cos \omega t \cdot \cos \alpha_2 - \sin \omega t \cdot \sin \alpha_2 \quad (b) \end{aligned} \quad (8)$$

Si on multiplie la relation (a) par  $\cos \alpha_2$  et (b) par  $\cos \alpha_1$  et on fait leur différence, il s'ensuit que:

$$\frac{x}{a_1} \cos \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \cos \alpha_1 = \sin \omega t \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (9)$$

Maintenant, si on multiplie la relation (a) par  $\sin \alpha_2$  et (b) par  $\sin \alpha_1$  et on fait leur différence, il en résulte que:

$$\frac{x}{a_1} \sin \alpha_2 - \frac{y}{a_2} \sin \alpha_1 = \cos \omega t \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \quad (10)$$

En additionnant les carrés des relations (9) et (10), on obtient finalement:

$$\boxed{\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin^2(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (11)$$

L'équation (11) représente une ellipse.

*Cas particulier:*

1. Pour  $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$  ou  $\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$ , il en résulte:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0 \quad (12)$$

ou  $\frac{x}{y} = \frac{a_1}{a_2}$  - l'équation d'une droite qui traverse l'origine des axes.

2. Pour  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ :

De la relation (11) il en résulte que:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} + \frac{2xy}{a_1 a_2} = 0$$

ou  $\frac{x}{y} = -\frac{a_1}{a_2}$  - l'équation d'une droite qui traverse l'origine des axes et passe par les cadrans II et IV.

3. Pour  $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2}$ , on obtient:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1, \quad (15)$$

l'équation d'une ellipse rapportée aux axes des coordonnées (fig. n° 1).

Donc, la forme de la trajectoire dépend de la différence de phase ( $\alpha_2 - \alpha_1$ ). Toutes les autres valeurs pour la différence de phase, exceptant  $\pm \frac{\pi}{2}$  et  $\pm \frac{3\pi}{2}$  donnent des ellipses qui ne sont pas rapportées aux axes  $Ox$  et  $Oy$  (fig. n° 2).

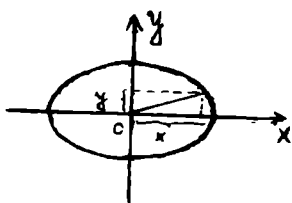


Fig. 1

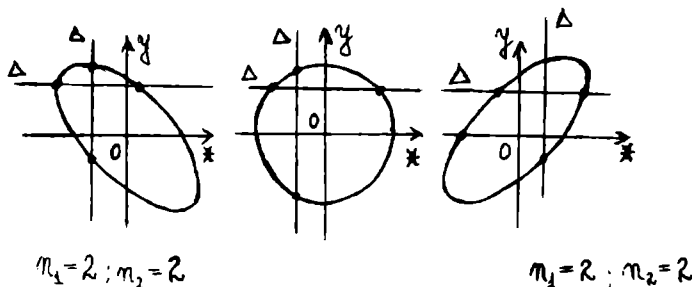


Fig. 2

La composition des oscillations perpendiculaires avec des périodes différentes conduira à des trajectoires plus compliquées, nommées des figures Lissajous (fig. n° 3).

L'appareil utilisé pour l'étude et l'observation des oscillations perpendiculaires est oscilloscope.

Le principe de cet appareil est basé sur la déviation d'un faisceau d'électrons à la traversée d'un champ électrique uniforme régnant entre deux surfaces conductrices planes et parallèles entre elles.

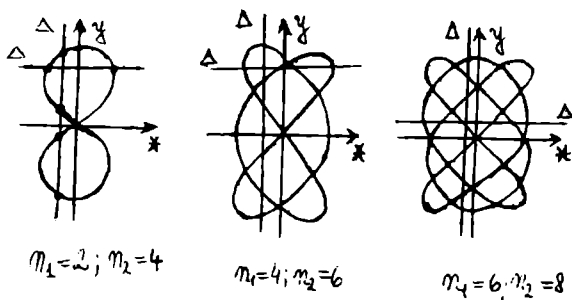


Fig. 3

Entre les deux plaques défectrices la trajectoire des électrons est un arc de parabole qui se prolonge à la sortie des plaques par une droite. Celle-ci rencontre l'écran en un point d'impact I. On montre que la déviation  $d = OI$  du faisceau d'électrons est proportionnelle à la différence de potentiel  $U$  appliquée entre les deux plaques.

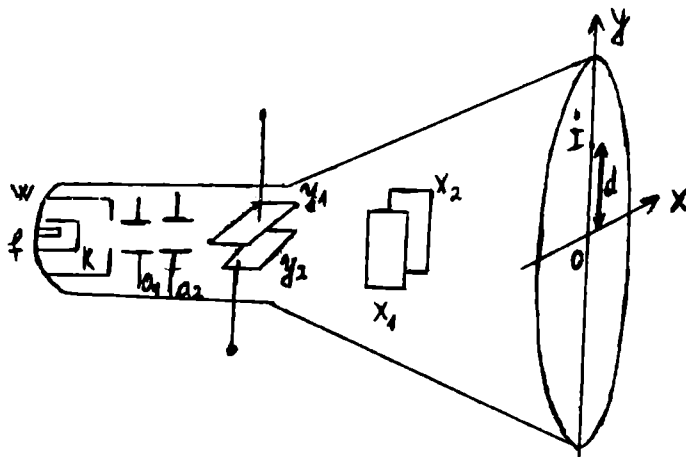


Fig. 4

L'oscilloscope est constitué d'un tube de verre dans lequel on a réalisé le vide et qui contient:

- un canon à électrons qui crée le faisceau d'électrons;
- un système déflecteur qui permet de dévier le faisceau d'électrons verticalement et horizontalement;
- un écran fluorescent qui permet de visualiser le point d'impact du faisceau d'électrons sous la forme d'un spot lumineux.

*Dans le canon à électrons:*

- le filament  $f$  porté à l'incandescence chauffe la cathode  $k$ ;
- la cathode  $k$  émet des électrons par effet thermoélectronique;
- le Wehnelt  $w$  est un cylindre entourant la cathode et percé d'un trou dans l'axe du système.

Il est porté à un potentiel réglable inférieur à celui de la cathode et commande l'intensité du faisceau électronique;

- les anodes  $a_1$  et  $a_2$  portées à des potentiels supérieurs à celui de la cathode (de plusieurs centaines de Volts) accélèrent les électrons et en même temps focalisent le faisceau.

*Le système déflecteur est constitué de:*

- plaques déflectrices horizontales  $Y_1$  et  $Y_2$  qui produisent un champ électrique vertical, donc une déviation verticale du spot sur l'écran. C'est entre ces deux plaques que l'on applique la tension  $U$  à étudier;

- plaques déflectrices verticales  $x_1$  et  $x_2$  qui produisent un champ électrique horizontal, donc une déviation du spot de la gauche vers la droite de l'écran lorsqu'on leur applique la tension de balayage  $U_x$ .

Ce balayage synchronisé du spot de gauche à droite de l'écran permet d'observer sur l'oscilloscope une courbe  $y = f(x)$  qui reproduit les variations de la tension  $u$ , en ordonnée, en fonction du temps  $t$ , en abscisse.

Pour une période de la tension délivrée par le générateur qui est égale à un multiple de la tension étudiée, on aura sur l'écran une courbe immobile.

Pour deux tensions de la même fréquence mais d'amplitude et phase différentes, la trajectoire du spot lumineux sera une ellipse.

Si les tensions ne sont pas égales et  $T_1 = \frac{T_2}{2}$ ,  $T_1 = \frac{2}{3}T_2$  ou  $T_1 = \frac{3}{4}T_2$  on va obtenir les figures présentées dans la fig. n° 3.

Dans ce travail pratique on va trouver l'image de l'ellipse et les figures Lissajous.

Les périodes seront fournies par le générateur des fréquences; pour une fréquence de la tension du générateur égale à  $\nu = 50$  Hz et appliquée sur les deux plaques déflectrices d'un condensateur et pour une tension délivrée par la borne 18(50 Hz) appliquée sur les deux autres plaques on aura une ellipse.

On va déterminer l'amplitude de la tension étudiée par rapport à l'amplitude d'une tension connue.

*Annexe:* L'oscilloscope qui se trouve dans le laboratoire est de type EO-4, avec les parties suivantes: 1. la partie d'alimentation; 2. l'amplificateur pour la déflexion verticale et horizontale; 3. le générateur avec 8 échelles dont les fréquences sont comprises entre 2 et 50 kHz.

Les sections de l'oscilloscope sont fixées sur un support fermé. Les boutons de commande se trouvent fixés sur la partie frontale du support, représentée dans la fig. no 5.

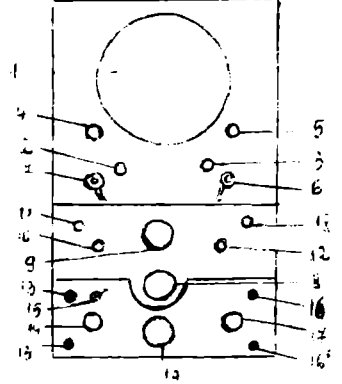


Fig. 5

Pour déterminer l'amplitude de la tension étudiée, on va fixer sur l'écran de l'oscilloscope des axes des coordonnées. Les boutons de 2 à 7 servent à régler le faisceau.

La signification des chiffres sur la région frontale est:

1. l'écran de l'oscilloscope;
2. le réglage de la luminosité de l'image sur l'écran;
3. la focalisation du faisceau;
4. la déviation du faisceau suivant l'axe  $Oy$ ;
5. la déviation du faisceau suivant l'axe  $Ox$ ;
6. la connexion de l'appareil dans le réseau;
7. l'interrupteur du faisceau;
8. le commutateur de gamme (la variation demandée de la tension);
9. le réglage fin de la fréquence.

Pour les commutateurs dans la position „fermé”, le générateur est déconnecté et l'amplificateur de la déflexion horizontale sera connecté aux bornes d'entrée pour la déflexion sur l'axe  $Ox$ .

10. le commutateur de la source d'alimentation synchronique: la tension extérieure du réseau et la synchronisation intérieure du circuit du générateur;

11. la borne d'entrée pour la synchronisation intérieur;

12. la variation de l'amplitude de la tension de synchronisation pour les deux modes de synchronisation.

Les boutons de 13 à 19 sont utilisés pour régler l'amplification.

13 et 13'. les bornes d'entrée de la tension étudiée sur les plaques de déflexion verticale du tube par l'amplificateur;

14. le réglage de cette tension, à l'entrée de l'amplificateur;

15. le changement de cette tension jusqu'au 25 V et 250 V;

16 et 16'. les bornes d'entrée pour la tension étudiée sur les plaques de déflexion horizontale;

17. le réglage de cette tension à la sortie de l'amplificateur;

18. la borne du signal de contrôle, dont la fréquence est 50 Hz et l'amplitude 2,5 V;

19. l'ampoule indicatrice.

*Manipulation:*

Détermination de l'amplitude d'une tension inconnue:

On va connecter 18 et 13'; on va régler 14 sur une des divisions 0,5; 1; 1,5; 2 (de sorte que l'image soit trouvée sur l'écran). Pour mesurer l'amplitude de la tension 17 doit être au 0. Dans ce cas l'amplitude de la tension sera représentée sur l'écran par un segment vertical, dont la longueur se trouve à l'aide d'un papier millimétrique.

Cette amplitude sera comparée à celle d'une tension connue délivrée par le générateur Tesla. Les manipulations à faire sont:

- connecter les bornes 1' est 13' (voir fig. no 6 qui représente le panneau frontal du générateur Tesla);

- le bouton 7' est dans la position „ouvert” (dans ce cas 8' sera allumé). Avec un fil conducteur on va connecter les bornes 3' et 13, l'aiguille indicatrice du bouton 4' indique par exemple 1 V (elle peut indiquer aussi d'autres tensions: 0,001; 0,01; 0,1 V; 10 V.

Sur l'écran de l'oscilloscope apparaîtra un segment lumineux dont la longueur sera mesurée. De cette manière on aura l'amplitude de la tension 1 V pour la comparer avec celle inconnue.

La borne 2' délivre une tension constante égale à 10 V, quelque soit la position du bouton 4.

Le mesurage des fréquences en utilisant les figures Lissajous:

Manipulations à faire pour obtenir l'ellipse et les figures Lissajous:

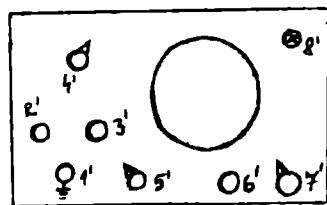


Fig. 6

- le bouton 8 est dans la position „fermé”;  
- on va connecter les bornes 18 avec 16 et 3' avec 13. En agissant sur les boutons 14, 17 et 6' on obtiendra l'ellipse et les figures Lissajous.

Avec 6' on peut varier la fréquence d'une tension d'amplitude constante. Si, par exemple, 4' indique 10 V et 5' indique une valeur 0,025 Kc/s, c'est-à-dire que si on tourne 6' on peut obtenir les fréquences comprises dans l'intervalle 0,025 et 0,15 Kc/s, dont les valeurs peuvent être lues sur l'échelle rouge du disque indicateur des fréquences.

Si 5' indique la valeur 0,15 Kc/s, à l'aide de 6' on peut obtenir les fréquences comprises entre 0,15 et 0,9 Kc/s, dont les valeurs seront lues sur l'échelle jaune du disque central.

Si 6' indique 50 Hz, sur l'écran apparaîtra une ellipse.

Le calcul de la fréquence d'une tension inconnue et d'une autre tension connue, à l'aide des figures Lissajous: Prenons en tant que fréquence connue  $\nu_c = \frac{1}{T} = 50\text{Hz}$ , la fréquence de la tension du signal de contrôle (la borne 18) et la fréquence inconnue  $\nu_x$  parmi les fréquences délivrées par le générateur Tesla.

Pour les figures obtenues dans la fig. no 3 on peut appliquer la relation:

$$\frac{\nu_x}{\nu_c} = \frac{n_1}{n_2}$$

où:  $n_1$  = le nombre maximum des points d'intersection d'une droite  $\Delta$  parallèle à l'axe  $Ox$  et la figure Lissajous:

$n_2$  = le nombre maximum des points d'intersection d'une droite  $\Delta'$  parallèle à l'axe  $Oy$  et la figure Lissajous.

Par exemple, dans la figure n° 3, pour les deux premiers cas, on a les relations:  $\frac{\nu_x}{\nu_c} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$  et

$\frac{\nu_x}{\nu_c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . Ainsi on peut déterminer  $\nu_x$  pour chaque figure Lissajous obtenue.

## Bibliographie

1. PLĂCINTEANU, IOAN I., *Teoria erorilor de măsurare și metoda celor mai mici patrate*, Editura tehnică, București, 1957.
2. HRISTEV, A. P., *Mecanică fizică și acustică (lucrări practice)*, Centrul de multiplicare al Universității, București, 1972.
3. WORTHING, A. G., GEFFNER, J., *Prelucrarea datelor experimentale*, Editura tehnică, 1959.
4. IVERONOVA, V. I., *Lucrări practice de fizică*, Editura tehnică, 1953.
5. CIOACĂ, C., *Lucrări practice de fizică (mecanică)*, Editura Universității București, 1993.
6. Physique T<sup>le</sup> D, Collection G.G.E. Magnard, 1989.
7. *Travaux pratique*, Université des Sciences et Technologies de Lille, année 1995-1996.

VERIFICAT  
2017



VERIFICAT  
2007





ISBN 973-575-146-1

Lei 2960