LIVIU NICOLESCU

CURS DE GEOMETRIE

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
– 1996 –

LIVIU NICOLESCU

CURS DE GEOMETRIE

EDITURA UNIVERSITĂŢII BUCUREŞTI
-1996-

Referenţi ştiinţifici: Conf. dr. **Adriana Turtoi**
Lector dr. **Nicolae Soare**

ISBN – 973 – 575 – 030 – 9

PREFATA

Cursurile de GEOMETRIE pe care le-am ţinut la Facultatea de Matematică din Bucureşti în semestrul I al anului universitar 1994-1995, fac obiectul acestei lucrări.

Cartea se adresează studenţilor anului al II-lea din învăţământul matematic universitar. Ea urmăreşte să servească drept referinţă pentru cursul de GEOMETRIE.

In perioada redactării acestui material am primit un sprijin preţios din partea colectivului Catedrei de Geometrie a Facultăţii de Matematică. Tuturor le adresez cele mai sincere mulţumiri.

Conf.dr. Liviu NICOLESCU

27 martie 1995

CAPITOLUL O

STRUCTURI CANONICE ALE SPATIULUI $\mathbb{R}^n$

In acest capitol reamintim unele noţiuni întîlnite la cursurile de algebră şi analiză sau la cursul de geometrie din anul I, noţiuni ce vor fi utilizate în capitolele următoare.

§1. Spaţiul $\mathbb{R}^n$

1.1. Fie $\mathbb{R}$ mulţimea numerelor reale şi fie

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x^1,\dots,x^n) \mid x^1,\dots,x^n \in \mathbb{R}\right\}$$

mulţimea tuturor sistemelor ordonate de n numere reale. Se ştie de la algebră că mulţimea $\mathbb{R}^n$ poate fi structurată ca un <u>spaţiu vectorial</u> peste corpul numerelor reale, operaţiile fiind:

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x,y) \longrightarrow x+y = (x^1+y^1,\dots,x^n+y^n),$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\lambda,x) \longrightarrow \lambda x = (\lambda x^1,\dots,\lambda x^n),$$

unde $x = (x^1,\dots,x^n)$, $y = (y^1,\dots,y^n) \in \mathbb{R}^n$. Dimensiunea spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ este n.

Elementele spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ se numesc vectori. Vectorii

$$e_1 = (1,0,\dots,0), \quad e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$$

formează o bază, numită <u>baza canonică</u> a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$. Un vector $x = (x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n$ se mai scrie

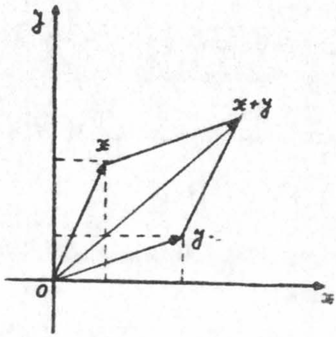
$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$$

sau, dacă adoptăm convenţia de sumare a lui Einstein, avem

$$x = x^i e_i$$

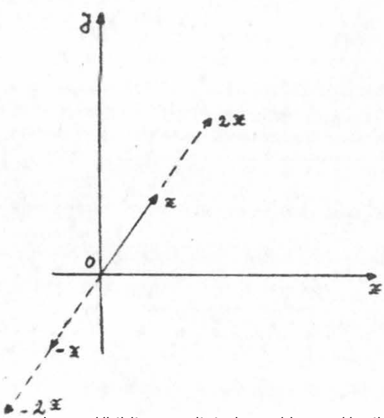
Geometric un vector x se reprezintă printr-un segment orientat cu originea în punctul $O = (o,\dots,o)$ şi extremitatea în punctul x.

Pentru exemplificare, să arătăm la ce revine adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorilor cu scalari în R^2. Fie $x = (x^1,x^2)$ şi $y = (y^1,y^2)$ doi vectori în R^2. Vectorul $x+y = (x^1+y^1,\ x^2+y^2)$ se reprezintă geometric printr-un segment cu originea în punctul $O = (o,o)$ şi extremitatea în al patrulea vîrf al paralelogramului avînd trei vîrfuri în punctele $O = (o,o)$, $x = (x^1,x^2)$ şi $y = (y^1,y^2)$.



Adunarea vectorilor se face după regula paralelogramului, de adunare a forţelor, aşa cum se defineşte în fizică.

Dacă $x = (x^1,x^2)$, atunci vectorii $2x = (2x^1,2x^2)$, $-x = (-x^1,-x^2)$, $-2x = (-2x^1,-2x^2)$ se reprezintă astfel



1.2. O submulţime S din $\mathbb{R}^n$ se numeşte <u>subspaţiu vectorial</u> dacă

1) $x+y \in S$, $(\forall)$ $x,y \in S$

2) $\lambda x \in S$, $(\forall) \lambda \in \mathbb{R}$, $(\forall)$ $x \in S$.

• Fie S un subspaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ şi fie $\{v_1,\ldots,v_k\}$, $\{v'_1,\ldots,v'_k\}$ două baze ale lui S. Trecerea de la o bază la cealaltă se face prin:

$$v'_i = \sum_{j=1}^{k} a_i^j v_j , \qquad i \in \{1,\ldots,k\},$$

unde $\det(a_i^j) \neq 0$. Dacă $\det(a_i^j) > 0$, atunci se spune că cele două baze sînt la fel orientate; prin convenţie baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n$ este pozitiv orientată.

1.3. Spunem că aplicaţia

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

este <u>liniară</u> dacă

$$u(x+y) = u(x) + u(y),$$
$$u(ax) = au(x),$$

oricare ar fi $x,y \in \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}$. Vom folosi în continuare următoarea notaţie

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid u \text{ este liniară}\}.$$

Dacă $u \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, atunci avem

$$u(e_i) = \sum_{k=1}^{m} u_i^k \tilde{e}_k, \quad i \in \{1,\ldots,n\},$$

unde $\{\tilde{e}_1 = (1,0,\ldots,0),\ \tilde{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots,\ \tilde{e}_m = (0,\ldots,0,1)\}$ este baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^m$ şi unde u_i^k sînt numere reale unic determinate de aplicaţia liniară u. In acest fel oricărei aplicaţii liniare $u \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ i se asociază o matrice $(u_i^k)_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq i \leq n}}$ şi invers, oricărei matrice $(u_i^k)_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le i\le n}}$ i se asociază o unică aplicaţie liniară $u\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ prin formula $u(e_i)=\sum_{k=1}^{m} u_i^k\tilde{e}_k$. Să mai observăm că fiecărei matrice $(u_i^k)_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le i\le n}}$ i se asociază punctul

$(u_1^1,\ldots,u_n^1,u_1^2,\ldots,u_n^2,\ldots,u_1^m,\ldots,u_n^m)\in\mathbb{R}^{nm}$ şi invers, oricărui punct $(a^1,a^2,\ldots,a^{nm})\in\mathbb{R}^{nm}$ îi corespunde o matrice unică (u_i^k), unde $u_1^1=a^1,\ldots,u_n^1=a^n,\ u_1^2=a^{n+1},\ldots,u_n^2=a^{2n},\ldots,\ u_1^m=a^{nm-n+1},\ldots,u_m^m=a^{nm}$.

In acest fel spaţiul $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ se identifică cu spaţiul $\mathbb{R}^{nm}$.

1.4. Fie $u\in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Un vector $x\in\mathbb{R}^n-\{0\}$ se numeşte <u>vector propriu</u> al lui u, dacă există un număr λ, numit <u>valoare proprie</u>, astfel încît

$$u(x)=\lambda x$$

Valorile proprii ale operatorului liniar u sînt rădăcinile reale ale ecuaţiei

$$\det(u_i^k-\lambda\delta_i^k)=0,$$

unde $u(e_i)=\sum_{k=1}^{n} u_i^k e_k$, $\quad i\in\{1,\ldots,n\}$.

1.5. <u>Produsul scalar</u> al vectorilor $x=(x^1,\ldots,x^n)$ şi $y=(y^1,\ldots,y^n)$ din $\mathbb{R}^n$ se defineşte prin formula

$$\langle x,y\rangle=x^1y^1+\ldots+x^ny^n$$

Pentru orice vectori $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ şi orice scalar $\lambda\in\mathbb{R}$ avem:

1) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$,

2) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$,

3) $\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$,

4) $\langle x,x\rangle\geq 0$,

5) $\langle x,x\rangle=0\iff x=0$.

Spaţiul vectorial real $\mathbb{R}^n$, cu produsul scalar definit mai sus, este un <u>spaţiu vectorial euclidian</u>, pe care îl vom nota cu E

1.6. Cu ajutorul produsului scalar putem să asociem fiecărui vector $x \in E_n$ un număr real pozitiv, notat $\|x\|$ şi numit <u>norma</u> sau <u>lungimea vectorului</u> x. Norma unui vector $x=(x^1,\dots,x^n)$ este numărul real pozitiv dat de egalitatea

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Este evident că avem

$$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2}$$

Pentru vectorii din baza canonică a spaţiului E_n avem

$$\|e_1\| = 1,\ \|e_2\| = 1,\dots,\ \|e_n\| = 1.$$

Vectorii de lungime unu se numesc <u>vectori unitari</u> sau vectori normaţi sau versori.

Pentru orice vectori $x,y \in E_n$ şi orice scalar $\lambda \in R$ avem

1) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
2) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inegalitatea triunghiului).

Pentru a demonstra inegalitatea triunghiului se foloseşte <u>inegalitatea lui Schwarz</u>

$$\langle x,y\rangle^2 \leq (\|x\| \cdot \|y\|)^2$$

1.7. Din inegalitatea lui Schwarz rezultă că pentru doi vectori nenuli x şi y din E_n avem

$$-1 \leq \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Se numeşte <u>unghi a doi vectori</u> nenuli $x,y \in E_n - \{0\}$ numărul real $\theta \in [0,\pi]$ dat de egalitatea

$$\cos\theta = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

1.8. Se spune că vectorul $x \in E_n$ este <u>perpendicular</u> (<u>ortogonal</u>) pe vectorul $y \in E_n$ şi se notează $x \perp y$ dacă

$$\langle x,y\rangle = 0.$$

Se vede ușor că relația de ortogonalitate este simetrică și că vectorul nul este singurul vector ortogonal pe el însuși.

O <u>bază</u> a spațiului vectorial E_n se numește <u>ortonormată</u> dacă vectorii bazei sînt unitari și ortogonali doi cîte doi.

Baza canonică $\{e_1,\dots,e_n\}$ a spațiului E_n este ortonormată, deoarece avem

$$\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i=j \\ 0 \text{ dacă } i\neq j \end{cases}$$

1.9. Unui sistem ordonat de n-1 vectori $v_1,\dots,v_{n-1}$ din E_n îi asociem vectorul

$$w = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

determinat astfel:

1) dacă $v_1,\dots,v_{n-1}$ sînt liniar dependenți, atunci $w=0$

2) dacă $v_1,\dots,v_{n-1}$ sînt liniar independenți, atunci:

i) vectorul w este perpendicular pe vectorul v_k, $(\forall)\ k\in\{1,\dots,n-1\}$, adică $\langle w,v_k\rangle = 0$, $(\forall)\ k\in\{1,\dots,n-1\}$.

ii) lungimea vectorului w este dată de egalitatea

$$\|w\|^2 = \begin{vmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \dots & \langle v_1,v_{n-1}\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \dots & \langle v_2,v_{n-1}\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle v_{n-1},v_1\rangle & \dots & \langle v_{n-1},v_{n-1}\rangle \end{vmatrix}$$

iii) baza $\{v_1,\dots,v_{n-1},w\}$ este pozitiv orientată.

Vectorul w se numește <u>produsul vectorial</u> al vectorilor $v_1,\dots,v_{n-1}$.

Dacă punem

$$v_k = v_k^1 e_1 + \dots + v_k^n e_n, \quad k\in\{1,\dots,n-1\}$$

atunci produsul vectorial al vectorilor $v_1,\dots,v_{n-1}$ poate fi scris simbolic sub următoarea formă de "determinant"

$$v = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} v_1^1 & v_2^1 & \dots & v_{n-1}^1 & e_1 \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_{n-1}^2 & e_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_1^n & v_2^n & \dots & v_{n-1}^n & e_n \end{vmatrix}$$

1.10. Cu ajutorul normei se poate defini în E_n distanţa dintre două puncte.

Prin definiţie, <u>distanţa</u> $d(x,y)$ <u>dintre două puncte</u> x şi y din E_n este dată de egalitatea

$$d(x,y) = \| x-y \|$$

Proprietăţile distanţei se deduc imediat din proprietăţile normei:

1) $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $x=y$

2) $d(x,y) = d(y,x)$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (inegalitatea triunghiului)

<u>Observaţie</u>. Dacă pe o mulţime arbitrară E s-a definit o funcţie

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y)$$

cu proprietăţile 1), 2) şi 3) de mai sus, atunci această funcţie se numeşte <u>metrică</u> sau <u>distanţă</u>, iar perechea (E,d) se numeşte <u>spaţiu metric</u>.

<u>Spaţiul euclidian</u> E_n este spaţiul metric ce se obţine introducînd în spaţiul numeric $\mathbb{R}^n$ funcţia distanţă d prin formula lui Pitagora

$$d(x,y)^2 = (x^1-y^1)^2 + \dots + (x^n-y^n)^2,$$

unde $x = (x^1,\dots,x^n)$ şi $y = (y^1,\dots,y^n)$ sînt două puncte arbitrare din E_n.

1.11. Transformările spaţiului euclidian E_n care conservă structura euclidiană, adică transformările lui E_n care conservă metrica (distanţa) sînt numite <u>izometrii</u> sau <u>automorfisme ale spaţiului euclidian</u> E_n. Deci prin izometrie sau automorfism al spaţiului euclidian E_n înţelegem o aplicaţie $B : E_n \longrightarrow E_n$ cu proprietatea că

$$\| x - y \| = \| B(x) - B(y) \| \quad , \quad (\forall)\ x,y \in E_n$$

<u>Exemple de izometrii</u> i) Fie $x_0 \in E_n$ un element fixat şi aplicaţia

$$T_{x_0} : E_n \longrightarrow E_n \ , \quad T_{x_0}(x) = x + x_0$$

Este evident că T_{x_0} este o izometrie (<u>translaţia determinată de x_0</u>).

ii) Fie $R : E_n \to E_n$ <u>o transformare ortogonală</u>, adică R este aplicație liniară și

$$\langle R\,x, R\,y \rangle = \langle x, y \rangle \quad , \quad (\forall)\ x, y \in E_n$$

(am notat R x în loc de R(x)). Este ușor de văzut că R <u>este o izometrie</u>.

<u>Observație</u>. Fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ reperul canonic din E_n și fie $R : E_n \to E_n$ o transformare ortogonală. Se spune că R <u>păstrează orientarea</u> dacă matricea ale cărei coloane sînt $R\,e_1,\dots,R\,e_n$ are determinantul egal cu unu. <u>O transformare ortogonală care păstrează orientarea se numește rotație</u>.

<u>Exemplu de transformare ortogonală care nu este rotație este simetria</u>

$$s : E_n \to E_n \quad , \quad x \mapsto s(x) = -x$$

<u>Observație</u>. Se știe că o aplicație $B : E_n \to E_n$ este <u>izometrie</u> dacă și numai dacă există o <u>matrice ortogonală</u> R de tip (n,n) și un vector $x_o \in E_n$ astfel încît

$$B(x) = R(x) + x_o \quad , \quad (\forall)\ x \in E_n$$

Cu alte cuvinte orice izometrie se obține prin compunerea unei transformări ortogonale definită de R, cu o translație T_{x_o} determinată de vectorul x_o. Vom numi R <u>componenta ortogonală a izometriei</u> B.

§ 2. <u>TOPOLOGIA SPATIULUI $\mathbb{R}^n$</u>

2.1. Se numește <u>spațiu topologic</u> o pereche $(M,\mathcal{T})$, unde M este o mulțime arbitrară, iar $\mathcal{T}$ este o familie de submulțimi ale lui M ce verifică următoarele axiome:

i) mulțimea vidă aparține lui $\mathcal{T}$

ii) $M \in \mathcal{T}$,

iii) orice reuniune de submulțimi din $\mathcal{T}$ este o submulțime din $\mathcal{T}$.

iv) intersecția a două submulțimi din $\mathcal{T}$ este o submulțime din $\mathcal{T}$.

Mulțimile din $\mathcal{T}$ se numesc mulțimi deschise ale spațiului topologic $(M,\mathcal{T})$, iar $\mathcal{T}$ poartă numele de <u>topologie</u> a mulțimii M sau de <u>structură topologică</u> a lui M.

2.2. In $\mathbb{R}^n$ se introduce o topologie cu ajutorul sferelor deschise din spațiul euclidian E_n . Fiind dat un punct $x \in E_n$ și un număr strict pozitiv $r > 0$ se numește <u>sferă deschisă</u> de centru x și rază r, mulțimea

$$S_r(x) = \{\, y \in E_n \mid d(x,y) < r \,\}$$

O mulţime U din $\mathbb{R}^n$ se numeşte <u>mulţime deschisă</u> dacă pentru orice punct $x \in U$ există un număr real strict pozitiv $r>0$, astfel încît $S_r(x) \subset U$. O mulţime $V \subset \mathbb{R}^n$ este <u>mulţime închisă</u> dacă $\mathbb{R}^n - V$ este mulţime deschisă.

Mulţimea $U \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte <u>stelată în raport cu originea</u> dacă $(\forall)\ x \in U$ şi $(\forall)\ t \in [0,1]$ avem $t\,x \in U$.

2.3. Fie $U \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ şi $F: U \to \mathbb{R}^n$. Spunem că <u>aplicaţia</u> F este <u>continuă</u> în punctul x_0, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$ astfel încît

$$F(U \cap S_\delta(x_0)) \subseteq S_\varepsilon(F(x_0))$$

Dacă F este continuă în fiecare punct din U, atunci F este continuă pe U.

Orice aplicaţie liniară

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

este continuă. Orice automorfism al spaţiului $\mathcal{E}_m$ este o aplicaţie continuă.

§ 3. <u>DIFERENTIABILITATE IN SPATIUL $\mathbb{R}^n$</u>

3.1. Fie $U \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $x_0 \in U$ şi $F: U \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie continuă. Spunem că <u>aplicaţia</u> F este <u>diferenţiabilă în punctul x_0</u>, dacă există o aplicaţie liniară

$$u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m ,$$

astfel încît

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in U - \{x_0\}}} \frac{\| F(x) - F(x_0) - u(x-x_0) \|}{\| x-x_0 \|} = 0.$$

Aplicaţia liniară u, unic determinată se numeşte <u>diferenţiala aplicaţiei F în punctul x_0</u> şi se notează cu dF_{x_0}. Am văzut la 1.3. că spaţiul $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se identifică cu $\mathbb{R}^{nm}$. Această identificare se extinde şi în legătură cu topologia de pe spaţiul $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Dacă funcţia $F : U \to \mathbb{R}^m$ este diferenţiabilă în orice punct din U, iar aplicaţia

$$dF : U \to \mathbb{R}^{nm} = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), \quad x \to dF_x$$

este continuă, atunci se spune că F este de clasă C^1.

Dacă aplicaţia $dF : U \to \mathbb{R}^{nm}$ este de clasă C^1, atunci se spune că F este de clasă C^2. Diferenţiala aplicaţiei dF se notează cu $d^2F = d(dF)$.

Recurent, dacă aplicaţia $dF : U \to \mathbb{R}^{nm}$ este de clasă C^{k-1}, atunci se spune că F este de clasă C^k. Dacă aplicaţia F este de clasă C^k pentru orice $k \in \{1,2,3,\dots\}$, atunci se spune că F este de clasă C^∞.

Convenţie. In cele ce urmează prin aplicaţie diferenţiabilă convenim să înţelegem aplicaţie de clasă C^∞.

Observaţie. In general, despre o funcţie $F : U \mapsto \mathbb{R}^m$, unde $U \subset \mathbb{R}^n$, se spune că este diferenţiabilă dacă există o aplicaţie diferenţiabilă $\overline{F} : \overline{U} \to \mathbb{R}^m$, unde $\overline{U}$ este o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $U \subset \overline{U}$ şi $\overline{F}/_U = F$.

3.2. Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $F : U \to \mathbb{R}^m$ o aplicaţie diferenţiabilă,

$$F = (F^1, \dots, F^m).$$

Fie $x_0 \in U$. Considerăm matricea

$$J_F(x_0) = \left(\frac{\partial F^i(x_0)}{\partial x^j} \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Aplicaţia $F : U \to \mathbb{R}^m$ se numeşte <u>imersie</u>, respectiv <u>submersie în punctul x_0</u> dacă rang $J_F(x_0) = n$, respectiv rang $J_F(x_0) = m$. Dacă rang $J_F(x_0) = m = n$, atunci aplicaţia F se numeşte <u>difeomorfism local în x_0</u>.

Dacă aplicaţia $F : U \to \mathbb{R}^m$ este imersie, respectiv submersie, în orice punct $x_0 \in U$, atunci F se numeşte <u>imersie</u>, respectiv <u>submersie</u>.

Fie $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ două mulţimi deschise şi $F : U \to V$ o aplicaţie bijectivă. F se numeşte <u>difeomorfism</u> (între U şi V) dacă aplicaţiile $F : U \to V$ şi $F^{-1} : V \to U$ sînt diferenţiabile.

3.3. Exemple

3.3.1. Considerăm aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definită prin

$$F(x^1,x^2) = (x^1+x^2,\ x^1x^2,x^2).$$

Deoarece rang $J_F(x) = 2$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^2$, rezultă că F este o imersie.

3.3.2. Considerăm aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definită prin

$$F(x^1,x^2) = (e^{x^1} \cos x^2,\ e^{x^1} \sin x^2)$$

Deoarece rang $J_F(x) = 2$, rezultă că F este difeomorfism local în orice punct $x \in \mathbb{R}^2$. Aplicaţia F nu este difeomorfism, deoarece ea nu este injectivă.

3.3.3. Fie $m,n \in \mathbb{N}$ cu $n > m$ şi aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definită prin

$$F(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^m,\ 0,\dots,0)$$

Deoarece rang $J_F(x) = m$, rezultă că F este submersie.

3.3.4. Considerăm mulţimea

$$V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \middle|\ \|x\| < 1 \right\}$$

şi aplicaţia

$$F : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

definită prin

$$F(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{x^1}{1+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2}},\dots,\ \frac{x^n}{1+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^k)^2}} \right)$$

Se constată uşor că F este bijectivă şi că rang $J_F(x) = n$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$. Rezultă că F este un difeomorfism.

3.3.5. Fie $L : R^n \to R^n$ o aplicaţie liniară şi omogenă, deci ecuaţiile lui L sînt de forma

$$x'^i = a^i_j x^j \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\},$$

unde $x = (x^1,\dots,x^n)$, $x' = L(x) = (x'^1,\dots,x'^n) \in R^n$. Observăm că matricea iacobiană a aplicaţiei L în punctul x este

$$\mathcal{J}_L(x) = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Rezultă că avem

$$d\,L_x = L \qquad (\forall)\ x \in R^n$$

3.3.6. Fie $R : E_n \to E_n$ o transformare ortogonală, deci ecuaţiile lui R sînt de forma

$$x'^i = a^i_j x^j \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\},$$

unde $x = (x^1,\dots,x^n) \in E_n$, $x' = R\,x = (x'^1,\dots,x'^n) \in E_n$ şi unde coeficienţii a^i_j satisfac condiţiile de ortogonalitate

$$\sum_{i=1}^{n} a^i_j\, a^i_k = \delta_{jk}$$

Avem, ca la exemplul 3.3.5,

$$d\,R_x = R \quad , \quad (\forall)\ x \in E_n$$

3.3.7 Fie $B : E_n \to E_n$ o izometrie. Ecuaţiile aplicaţiei B sînt de forma

$$x'^i = a^i_j x^j + a^i \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

unde $\sum_{i=1}^{n} a^i_j \; a^i_k = \delta_{jk}$. Matricea iacobiană a aplicaţiei B este

$$\mathcal{J}_B(x) = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Vedem de aici că

$$d\,B_x = R \quad , \quad (\forall)\ x \in E_n ,$$

unde R este componenta ortogonală a izometriei B.

§ 4. SPATIUL VECTORIAL TANGENT INTR-UN PUNCT LA $\mathbb{R}^n$

Fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considerăm mulţimea

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n = \{(x_0,x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

Aplicaţia

$$T_{x_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_0,x) \longrightarrow x$$

este o bijecţie. Prin această bijecţie înzestrăm mulţimea $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ cu o structură de spaţiu vectorial real. Operaţiile de adunare şi de înmulţire cu scalari sînt definite prin

$$(x_0,x) + (x_0,y) = (x_0, x+y)$$

$$\lambda(x_0,x) = (x_0, \lambda x)$$

Spaţiul vectorial $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ se numeşte <u>spaţiul tangent în punctul x_0 la $\mathbb{R}^n$</u>.

Elementele spaţiului liniar tangent $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ se numesc <u>vectori tangenţi în punctul x_0 la $\mathbb{R}^n$</u>. Dimensiunea spaţiului vectorial $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ este n.

Dacă $\{e_1,\dots,e_n\}$ este baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$, atunci

$$\{(x_0,e_1),\dots,(x_0,e_n)\}$$

este o bază a spaţiului vectorial $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ numită <u>baza canonică</u> a spaţiului tangent $T_{x_0}\mathbb{R}^n$.

Pe viitor, cînd punctul x_0 din $\mathbb{R}^n$ este fixat, un vector din $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ îl vom nota simplu cu x în loc de (x_0,x) şi spunem că x este vector tangent la $\mathbb{R}^n$ în punctul x_0.

Dacă identificăm în mod canonic $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ cu $\mathbb{R}^n$, atunci baza canonică a spaţiului vectorial $T_{x_0}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ este formată din vectorii $e_1 = (1,0,\dots,0),\dots, e_n = (0,\dots,0,1)$.

Doi vectori $(x_0, x) \in T_{x_0}\mathbb{R}^n$ şi $(y_0, y) \in T_{y_0}\mathbb{R}^n$ se numesc paraleli dacă $x = y$.

CAPITOLUL I

TEORIA LOCALA A CURBELOR

§ 1. CURBE IN SPATIUL EUCLIDIAN n-DIMENSIONAL E_n. TANGENTA, HIPERPLAN NORMAL

1.1. DEFINITIE. Considerăm un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Se numeşte curbă parametrizată, sau pe scurt curbă în spaţiul E_n, orice aplicaţie C^∞ - diferenţiabilă $c : I \to E_n$.

1.2. OBSERVATIE.

1.2.1. Dacă I nu este interval deschis, atunci aplicaţia $c : I \to E_n$ este curbă în E_n dacă există un interval deschis $\bar{I} \subseteq \mathbb{R}$ şi o aplicaţie C^∞ - diferenţiabilă $\bar{c} : \bar{I} \to E_n$ astfel încît

$$I \subseteq \bar{I} \quad \text{şi} \quad \bar{c}|_I = c$$

1.2.2. Fie $c : I \to E_n$ o curbă parametrizată. Punctele care aparţin imaginii $c(I)$ se numesc puncte ale curbei c .

1.2.3. Curbele din E_2 se numesc curbe plane, iar curbele din E_3 se numesc curbe strîmbe.

1.3. DEFINITIE. Un punct $c(t_0)$ al unei curbe $c : I \to E_n$ se numeşte punct regulat dacă $\dot{c}(t_0) \neq 0$. Dacă $\dot{c}(t_0) = 0$ atunci punctul $c(t_0)$ al curbei c se numeşte punct singular.

Curba $c : I \to E_n$ se numeşte curbă regulată dacă toate punctele ei sînt puncte regulate, deci dacă $\dot{c}(t) \neq 0$, oricare ar fi $t \in I$.

1.4. OBSERVATIE. 1.4.1. Fie M imaginea geometrică a curbei parametrizate $c : I \to E_n$, deci $M = c(I) \subset E_n$. Se spune că c este o parametrizare de clasă C^∞ a lui M .

1.4.2. Considerînd în $\mathcal{E}_n$ un sistem de coordonate carteziene, o curbă parametrizată este dată prin ecuațiile

$$(1.1)\qquad \begin{cases} x^1 = c^1(t) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x^n = c^n(t) \end{cases} \qquad t \in I \quad ,$$

astfel că avem $c(t) = (c^1(t),\dots,c^n(t))$ pentru orice $t \in I$. Se spune că t este <u>parametrul curbei.</u> Dacă notăm $P = c(t_1)$, unde $t_1 \in I$, atunci spunem că punctul P corespunde valorii t_1 a parametrului t (se mai spune că punctul P are <u>abscisa curbilinie</u> t_1).

1.4.3. Fie $c : I \to \mathcal{E}_n$ o curbă parametrizată, $t_0 \in I$ şi $T_{t_0}\mathbb{R}$ spaţiul tangent în punctul t_0 la $\mathbb{R}$.

Baza canonică $\{(t_0,1)\}$ a spaţiului vectorial $T_{t_0}\mathbb{R}$ este formată din vectorul $(t_0,1) = 1$. Deoarece aplicaţia c este diferenţiabilă în t_0 rezultă că

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I - \{t_0\}}} \frac{\| c(t) - c(t_0) - dc_{t_0}(t-t_0)\|}{\| t - t_0 \|} = 0$$

Deoarece aplicaţia

$$dc_{t_0} : \mathbb{R} \cong T_{t_0}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \cong T_{c(t_0)}\mathbb{R}^n$$

este $\mathbb{R}$-liniară, avem

$$dc_{t_0}(t-t_0) = dc_{t_0}((t-t_0)\cdot 1) = (t-t_0)dc_{t_0}(1)$$

In continuare, obţinem

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I - \{t_0\}}} \left\| \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} - dc_{t_0}(1) \right\| = 0$$

De aici rezultă

$$dc_{t_0}(1) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \in I - \{t_0\}}} \frac{c(t) - c(t_0)}{t - t_0} = \dot{c}(t_0)$$

Prin urmare vectorul $\dot{c}(t_0) = dc_{t_0}(1)$ aparţine spaţiului tangent $T_{c(t_0)} \mathbb{R}^n$.

1.5. <u>DEFINITIE. Considerăm două curbe parametrizate</u> :

$$c : I \longrightarrow E_n \quad \text{şi} \quad \bar{c} : \bar{I} \longrightarrow E_n$$

<u>Se spune că curba $\bar{c}$ a fost obţinută din curba c printr-o schimbare de parametru</u> (<u>sau că c şi $\bar{c}$ diferă printr-o schimbare de parametru sau că c şi $\bar{c}$ sînt echivalente</u>), <u>dacă există un difeomorfism</u>

$$\varphi : \bar{I} \longrightarrow I$$

<u>astfel încît</u>

(1.2) $$\bar{c} = c \circ \varphi$$

1.6. <u>OBSERVATIE</u> 1.6.1. Din egalitatea (1.2) rezultă

$$\bar{c}(\bar{I}) = c(I) ,$$

adică curbele parametrizate c şi $\bar{c}$ au aceeaşi imagine geometrică.

1.6.2. Este evident că curbele parametrizate care diferă între ele printr-o schimbare de parametru formează o clasă de echivalenţă. O astfel de clasă se numeşte <u>curbă neparametrizată</u>.

1.6.3. Din egalitatea (1.2) rezultă

(1.3) $$\dot{\bar{c}}(\bar{t}) = \dot{c}(t)\,\dot{\varphi}(\bar{t}) , \quad \text{unde} \quad t = \varphi(\bar{t}) .$$

Egalitatea (1.3) ne arată că vectorii $\dot{\bar{c}}(\bar{t})$ şi $\dot{c}(t)$ sînt coliniari. Dacă $\dot{\varphi}(\bar{t}) > 0$, $(\forall)\ \bar{t} \in \bar{I}$, atunci se spune că <u>schimbarea de parametru păstrează orientarea.</u> In acest caz, egalitatea (1.3) ne arată că vectorii coliniari $\dot{c}(t)$ şi $\dot{\bar{c}}(\bar{t})$ au acelaşi sens.

1.7. <u>DEFINITIE. Considerăm o curbă parametrizată</u>

$$c : I \longrightarrow E_n$$

şi fie $[a,b] \subseteq I$. Curba parametrizată $c|_{[a,b]} : [a,b] \longmapsto E_n$ se numeşte arc al curbei c. Prin lungimea arcului de curbă $c|_{[a,b]}$ înţelegem lungimea imaginii aplicaţiei $c|_{[a,b]}$.

1.8. DEFINIŢIE. Lungimea arcului de curbă $c|_{[a,b]}$ este

$$(1.4)\qquad L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

1.9. PROPOZIŢIE. Lungimea unui arc de curbă este un invariant al schimbărilor de parametru.

Demonstraţie. Fie $c : I \longrightarrow E_n$ şi $\bar{c} : \bar{I} \longrightarrow E_n$ două curbe care diferă între ele printr-o schimbare de parametru, adică există un diferomorfism

$$\varphi : \bar{t} \in \bar{I} \longrightarrow \varphi(\bar{t}) = t \in I .$$

astfel încît $\bar{c} = c \circ \varphi$. Sînt posibile două cazuri:

Cazul I. $\dot{\varphi}(\bar{t}) > 0$, $(\forall)\ \bar{t} \in \bar{I}$.

Fie $[\bar{a},\bar{b}] \subseteq \bar{I}$. Dacă notăm $a = \varphi(\bar{a})$, $b = \varphi(\bar{b})$, atunci avem

$$L(\bar{c}|_{[\bar{a},\bar{b}]}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\, d\bar{t} =$$

$$= \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\widehat{c\circ\varphi}(\bar{t})\|\, d\bar{t} = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\dot{c}(\varphi(\bar{t}))\dot{\varphi}(\bar{t})\|\, d\bar{t} =$$

$$= \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt = L(c|_{[a,b]})$$

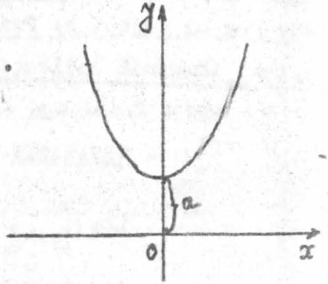
Cazul II. $\dot{\varphi}(\bar{t}) < 0$, $(\forall)\ \bar{t} \in \bar{I}$.

Luăm un interval $[\bar{a},\bar{b}] \subset \bar{I}$. Dacă notăm $a = \varphi(\bar{b})$, $b = \varphi(\bar{a})$ atunci avem $a < b$ (funcţia φ este descrescătoare). Rezultă

$$L(\bar{c}|_{[\bar{a},\bar{b}]}) = \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\, d\bar{t} = -\int_{\bar{a}}^{\bar{b}} \|\dot{c}(\varphi(\bar{t}))\|\, \dot{\varphi}(\bar{t})d\bar{t} =$$

$$= -\int_b^a \|\dot{c}(t)\|\, dt = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt = L(c|_{[a,b]})$$

1.9'. <u>Aplicatii</u> i) Lungimea unui arc <u>al lănțișorului</u>. Considerăm curba $c : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow E_2$, $c(t) = (t, a \operatorname{ch} \frac{t}{a})$, $a > 0$ (imaginea aplicației c se numește <u>lănțișor</u>). Ne propunem să calculăm lungimea $L(c|_{[0,t]})$. Avem $\dot{c}(t) = (1, \operatorname{sh} \frac{t}{a})$.



Rezultă

$$L(c|_{[0,t]}) = \int_0^t \|\dot{c}(t)\| \, dt = \int_0^t \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 \frac{t}{a}} \, dt =$$

$$= \int_0^t \operatorname{ch} \frac{t}{a} \, dt = a \operatorname{sh} \frac{t}{a}$$

ii) <u>Lungimea cercului</u>. Considerăm un cerc de rază r

$$c : [0, 2\pi] \longrightarrow E_2, \quad c(t) = (r \cos t, r \sin t),$$

Avem $\dot{c}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$. Rezultă că lungimea cercului este

$$L = \int_0^{2\pi} \|\dot{c}(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = r\, t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r$$

iii) Considerăm curba

$$c : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E_2, \quad c(\theta) = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta),$$

unde $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcție diferențiabilă. Fie $[\theta_1, \theta_2] \subset I$. Avem

$$L(c|_{[\theta_1,\theta_2]}) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \|\dot{c}(\theta)\| \, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} \, d\theta$$

1.10. <u>PROPOZITIE</u>. <u>Fie</u> $c : I \longrightarrow E_m$ <u>o curbă regulată. Fixă un punct</u> $t_0 \in I$. <u>Atunci există un interval</u> $J \subset \mathbb{R}$, <u>cu</u> $0 \in J$ <u>și o schimbare de parametru care păstrează orientarea</u>

$$\varphi : J \longrightarrow I$$

<u>astfel încît</u>

$$\varphi(0) = t_0 \quad \text{și} \quad \|\dot{\widehat{c \circ \varphi}}(s)\| = 1, \quad (\forall)\, s \in J$$

<u>Demonstratie</u>. Definim funcţia reală $f : I \to \mathbb{R}$ prin $f(t) = \int_{t_0}^{t} \| \dot{c}(u) \| \, du$.

Avem $\dot{f}(t) = \| \dot{c}(t) \| > 0$, $(\forall) t \in I$, deci funcţia $t \mapsto f(t)$ este strict crescătoare. Deoarece avem $f(t_0) = 0$, rezultă că $f(t) < 0$ pentru $t < t_0$, $t \in I$ şi $f(t) > 0$ pentru $t > t_0$, $t \in I$. Notăm $J = f(I)$. Este evident că $f : I \mapsto J$ este bijecţie. Fie $\varphi : J \mapsto I$, $s \to \varphi(s) = t$, inversa aplicaţiei f. Aplicaţia φ este bijectivă. Este evident că $\varphi(0) = t_0$. Funcţia f este diferenţiabilă şi $\dot{f}(t) > 0$, $(\forall) t \in I$. Funcţia φ este diferenţiabilă şi avem $\dot{\varphi}(s) = \frac{1}{\dot{f}(t)} > 0$, $(\forall)$ $t = \varphi(s) \in I$.

Deoarece φ şi $\varphi^{-1} = f$ sînt funcţii diferenţiabile, rezultă că aplicaţia φ este difeomorfism. Deoarece $\dot{\varphi}(s) > 0$, $(\forall) s \in J$, rezultă că schimbarea de parametru $\varphi : J \to I$ păstrează orientarea. Luăm $s = s(t) = f(t)$, $t = \varphi(s)$ şi avem

$$\| \dot{\widehat{c \circ \varphi}}(s) \| = \| \dot{c}(\varphi(s)) \| \, \dot{\varphi}(s) = \| \dot{c}(t) \| \, \dot{\varphi}(s) = \dot{f}(t) \frac{1}{\dot{f}(t)} = 1$$

1.11. <u>OBSERVATIE</u>. Funcţia $s = s(t)$ nu depinde de parametrizare şi măsoară lungimea arcelor pe curba $c : t \in I \to c(t) \in E_m$, unde s-a fixat un punct origine $c(t_0)$.

Funcţia $s = s(t)$ se numeşte lungimea de arc pe curba c.

Dacă curba $c : I \to E_m$ are reprezentarea parametrică (1.1) atunci avem

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dc}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dc^1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dc^n}{dt}\right)^2}$$

1.12. <u>DEFINITIE</u>. O <u>curbă</u> $c : I \to E_m$ se spune că este <u>parametrizată canonic</u>, dacă $\| \dot{c}(s) \| = 1$, $(\forall)$ $s \in I$. Parametrul s se numeşte <u>parametrul canonic</u>.

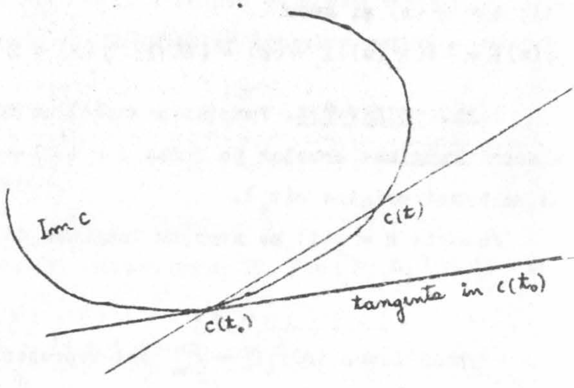
1.13. <u>OBSERVATIE.</u>1.13.1. Propoziţia 1.1o ne arată că <u>orice curbă regulată este echivalentă cu o curbă parametrizată canonic</u>.

1.13.2. Fie $c : I \to \mathcal{E}_n$ o curbă parametrizată canonic, deci $\|\dot{c}(s)\| = 1$, $(\forall)$ $s \in I$. Considerăm un interval $[s_0, s_1] \subset I$. Lungimea arcului de curbă $c|_{[s_0,s_1]}$ este dată de

$$L(c|_{[s_0,s_1]}) = \int_{s_0}^{s_1} \|\dot{c}(s)\|\, ds = \int_{s_0}^{s_1} ds = s_1 - s_0$$

1.14. Considerăm o curbă $c : I \to \mathcal{E}_m$ şi fie $c(t_0)$ un punct regulat al curbei c.

<u>Prin tangenta la curba c în punctul regulat</u> $c(t_0)$ <u>înțelegem poziția limită a dreptei determinate de $c(t_0)$ şi de un punct oarecare $c(t)$ al curbei cînd t tinde către</u> t_0.



Dreapta determinată de punctele $c(t) = (c^1(t),\ldots,c^n(t))$ şi $c(t_0) = (c^1(t_0),\ldots,c^n(t_0))$ are ecuaţiile

$$\frac{x^1 - c^1(t_0)}{c^1(t)-c^1(t_0)} = \ldots = \frac{x^n - c^n(t_0)}{c^n(t)-c^n(t_0)}$$

Impărţind numitorii cu $t-t_0$, apoi trecînd la limită cu $t \to t_0$, obţinem ecuaţiile tangentei la curba c în punctul regulat $c(t_0)$.

$$\frac{x^1-c^1(t_0)}{\dot{c}^1(t_0)} = \ldots = \frac{x^n - c^n(t_0)}{\dot{c}^n(t_0)} \tag{1.5}$$

Vectorul $\dot{c}(t_0) = (\dot{c}^1(t_0),\dots,\dot{c}^n(t_0))$ este numit vector tangent la curba c în punctul $c(t_0)$.

1.15. Prin hiperplan normal la curba $c : I \to E_n$ $(n>2)$ în punctul regulat $c(t_0)$ înţelegem hiperplanul care trece prin punctul $c(t_0)$ şi este perpendicular pe tangenta la curba c în punctul $c(t_0)$.

Ţinînd seama de (1.5), obţinem ecuaţia hiperplanului normal la curba $c : I \to E_n$ $(n>2)$ în punctul $c(t_0)$

$$(x^1-c^1(t_0))\dot{c}^1(t_0)+\dots+(x^n-c^n(t_0))\,\dot{c}^n(t_0) = 0 \tag{1.6}$$

Fie $c : I \to E_2$ o curbă plană. Prin normala la curba c în punctul regulat $c(t_0)$ înţelegem dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ şi este perpendiculară pe tangenta la curba c în punctul $c(t_0)$.

1.16. EXEMPLE. 1.16.1. Fie a şi b doi vectori în E_n. Considerăm aplicaţia

$$c : \mathbb{R} \to E_n$$

definită prin

$$c(t) = at + b$$

Este clar că c este o curbă parametrizată în E_n. Curba $c : \mathbb{R} \to E_n$ este regulată dacă şi numai dacă $a \neq 0$ şi în acest caz curba este o dreaptă.

1.16.2. Considerăm aplicaţia

$$c : \mathbb{R} \to E_2$$

definită prin

$$c(t) = (r(t-\sin t),\ r(1-\cos t)),$$

unde r este o constantă reală pozitivă. Este evident că c este o curbă parametrizată în E_2. Fie $[0,2\pi]\subset\mathbb{R}$. Vrem să găsim lungimea arcului de curbă $c|_{[0,2\pi]}$. Avem

$$\dot{c}(t) = (r(1-\cos t),\ r\sin t)$$

$$\|\dot{c}(t)\| = r\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t} =$$
$$= r\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = 2r\sin\frac{t}{2}$$

Rezultă

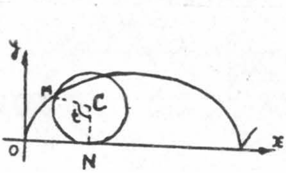
$$L(c|_{[0,2\pi]}) = \int_0^{2\pi} 2r\sin\frac{t}{2}\,dt = 8r$$

Este uşor de văzut că punctele $c(2k\pi)$, cu $k\in\mathbb{Z}$, sînt puncte singulare ale curbei, celelalte puncte fiind puncte regulate.

<u>Observaţie</u>.Imaginea aplicaţiei c se numeşte <u>cicloidă.</u> Cicloida este descrisă de un punct M al unui cerc Γ care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă D. In decursul rostogolirii cercului, punctul M, care descrie cicloida, coincide succesiv cu o infinitate de puncte ale dreptei fixe, distanţa dintre două puncte consecutive fiind egală cu lungimea cercului. Alegem unul dintre aceste puncte drept originea O, dreapta fixă ca axă Ox şi perpendiculara în O pe Ox ca axă Oy (partea pozitivă a axei Oy fiind de aceeaşi parte cu cercul faţă de Ox). Notăm cu r raza cercului şi cu t măsura în radiani a unghiului $\widehat{MCN}$. Fie x şi y coordonatele punctului M.

Rezultă

$$x = rt + r\cos(\pi - t + \frac{\pi}{2}) = r(t - \sin t)$$
$$y = r + r\sin(\pi - t + \frac{\pi}{2}) = r(1 - \cos t)$$



Ecuaţia normalei într-un punct oarecare $c(t) = (x(t), y(t))$ al unei curbe plane este

$$y - y(t) = -\frac{\dot{x}(t)}{\dot{y}(t)}(x - x(t))$$

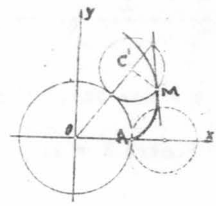
Ecuaţia normalei într-un punct oarecare $c(t)$ al cicloidei este

$$y - r(1-\cos t) = \frac{\cos t - 1}{\sin t}(x - r(t - \sin t))$$

Normala intersectează axa Ox în punctul $N(rt, 0)$. Prin urmare normala într-un punct al cicloidei taie axa Ox în punctul de contact al cercului mobil Γ cu axa Ox.

1.16.3. Ne propunem să găsim o parametrizare a locului geometric descris de un punct M de pe un cerc γ care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix Γ. Locul geometric se numeşte <u>epicicloidă</u> cînd cercul mobil este tangent exterior cercului fix şi <u>hipocicloidă</u> cînd cercul mobil este tangent interior cercului fix.

1.16.3.1. Considerăm mai întîi cazul epicicloidei. Notăm cu R raza cercului Γ şi cu r raza cercului γ. In decursul rostogolirii cercului γ, punctul M, care descrie epicicloida, coincide succesiv cu o infinitate de puncte ale cercului fix Γ. Fie A unul dintre aceste puncte. Alegem sistemul de axe xOy unde O este centrul cercului Γ, iar Ox conţine punctul A.



Fie x,y coordonatele punctului M (care inițial a fost în A) și fie C' centrul cercului γ pe care se află M. Fie t măsura în radiani a unghiului $\widehat{xOC'}$. Notăm de asemenea cu t' măsura în radiani a unghiului $\widehat{MC'O}$. Deoarece rostogolirea cercului mobil pe cercul Γ se face fără alunecare, rezultă

$$Rt = rt'$$

Folosind această egalitate, rezultă

$$x = (R+r)\cos t + r\cos(t+t'-\pi) =$$
$$= (R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t,$$
$$y = (R+r)\sin t + r\sin(t+t'-\pi) =$$
$$= (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t$$

Prin urmare epicicloida este imaginea aplicației

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$c(t) = \left((R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t, (R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}\right.$$

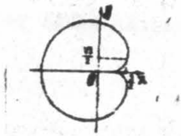
Un caz particular interesant este acela cînd cercul mobil are raza eg cu raza cercului fix. In acest caz epicicloida se numește <u>cardioidă</u>. Cardioida este deci imaginea aplicației

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$c(t) = (R(2\cos t - \cos 2t), R(2\sin t - \sin 2t))$$

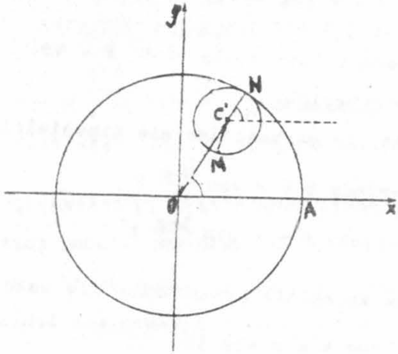
Prezentăm în continuare Im c pentru $R = 1$.



1.16.3.2. Considerăm acum cazul hipocicloidei. Notăm cu R(resp. r) raza cercului Γ (resp. γ)

In decursul rostogolirii cercului γ, punctul M, care descrie hipocicloida coincide succesiv cu o infinitate de puncte ale cercului fix Γ.

Fie A unul dintre aceste puncte. Alegem sistemul de axe xOy, unde O este centrul cercului Γ, iar Ox conţine punctul A. Presupunem că R > r



Fie x,y coordonatele punctului M (care inițial a fost în A) și fie C' centrul cercului $\mathcal{C}$ pe care se află M. Notăm cu t măsura în radiani a unghiului $\widehat{xOC'}$. Fie t' măsura în radiani a unghiului $\widehat{MC'N}$. Deoarece rostogolirea cercului mobil pe cercul fix se face fără alunecare, avem

$$Rt = rt'$$

Folosind această egalitate, rezultă :

$$x = (R-r)\cos t - r\cos(\pi - (t'-t)) =$$
$$= (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t$$

$$y = (R-r)\sin t - r\sin(\pi - (t'-t)) =$$
$$= (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t$$

Prin urmare hipocicloida este imaginea aplicației

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$e(t) = ((R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t,\ (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t)$$

Un caz particular interesant este acela cînt $R = 4r$. In acest caz hipocicloida se numește <u>astroidă.</u>

Dacă în ecuațiile parametrice ale hipocicloidei

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\frac{R-r}{r}t \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\frac{R-r}{r}t \end{cases}$$

facem $R = 4r$, rezultă ecuațiile parametrice ale astroidei :

$$\begin{cases} x = 3r\cos t + r\cos 3t \\ y = 3r\sin t - r\sin 3t \end{cases}$$

sau

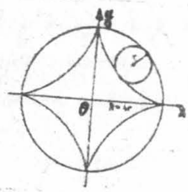
$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}$$

Prin urmare astroida este imaginea aplicației

$$c : \mathbb{R} \to E_2$$

definită prin

$$c(t) = (R\cos^3 t,\ R\sin^3 t)$$



Punctele $A(R,0)$, $A'(-R,0)$, $B(0,R)$ și $B'(0,-R)$ sînt vîrfurile astroidei.

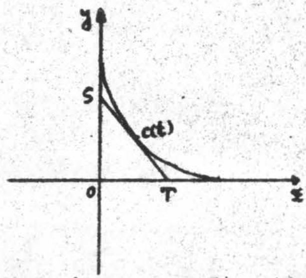
Avem

$$\dot{c}(t) = (-3R\cos^2 t\sin t,\ 3R\sin^2 t\cos t)$$

Rezultă că vîrfurile astroidei sînt puncte singulare ale curbei, toate celelalte puncte sînt puncte regulate.

Tangenta într-un punct regulat oarecare $c(t) = (R\cos^3 t,\ R\sin^3 t)$ al astroidei are ecuația

$$x\sin t + y\cos t - R\sin t\cos t = 0$$



Este uşor de verificat că, dacă $T(R\cos t, 0)$ şi $S(0, R\sin t)$ sînt punctele de intersecţie ale tangentei într-un punct oarecare al astroidei cu axele de coordonate, atunci lungimea segmentului TS este constantă şi egală cu R.

Lungimea astroidei este

$$L(c|_{[0,2\pi]}) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \|\dot{c}(t)\|\, dt =$$

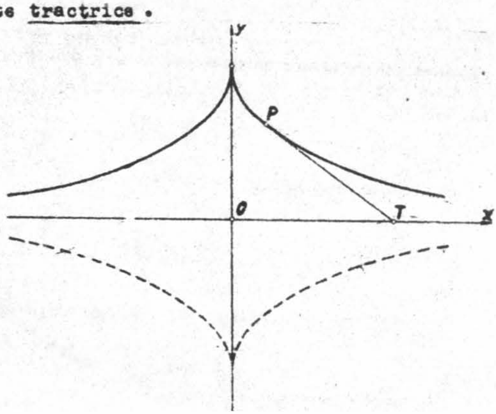
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3R\cos t\sin t\, dt = 6R$$

1.16.4. Considerăm aplicaţia $c : (0, \pi) \longmapsto E_2$ definită pr

$$c(t) = \left(a\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + \cos t\right) + b,\ a\sin t\right),$$

unde a şi b sînt constante reale şi $a > 0$.

Este evident că aplicaţia c este o curbă parametrizată. Imaginea aplicaţiei c se numeşte <u>tractrice</u>.



Ecuaţia tangentei într-un punct oarecare $c(t)$ al tractricei este

$$\frac{x-a(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+\cos t)-b}{\frac{\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{y-a\sin t}{\cos t}.$$

Punctul de intersecţie dintre tangenta în punctul $c(t)$ la tractricei şi axa Ox are coordonatele $(a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right|+b\,,\,0)$. Lungimea segmentului de pe tangentă cuprins între punctul de tangentă şi axa Ox este constantă şi egală cu a.

1.17. <u>PROPOZITIE</u>. <u>Fie</u> $c: I \to E_n$ <u>o curbă parametrizată.</u> <u>Următoarele afirmaţii sînt echivalente</u> :

(i) <u>Hiperplanele normale la curbă trec printr-un punct fix</u>.

(ii) <u>Imaginea geometrică a curbei parametrizate</u> $c: I \to E_n$ <u>este situată pe o hipersferă.</u>

<u>Demonstratie</u>. (i) $\Rightarrow$ (ii) Ecuaţia hiperplanului normal curbei $c: I \to E_n$ într-un punct oarecare $c(t) = (c^1(t),\dots,c^n(t))$ este

$$(1.7)\qquad [x^1-c^1(t)]\dot{c}^1(t)+\dots+[x^n-c^n(t)]\,\dot{c}^n(t)=0$$

Presupunem că hiperplanul de ecuaţie (1.7) trece prin punctul fix $(a^1,\dots,a^n)\in E_n$, deci avem

$$(1.7')\qquad [a^1-c^1(t)]\,\dot{c}^1(t)+\dots+[a^n-c^n(t)]\,\dot{c}^n(t)=0$$

Prin integrare, din (1.7') obţinem

$$[c^1(t)-a^1]^2+\dots+[(c^n(t)-a^n]^2 = K \text{ (=const.)},\ (\forall)t\in I.$$

Deci pentru orice $t\in I$ am obţinut că $(c^1(t),\dots,c^n(t))$ verifică ecuaţia unei hipersfere, deci $c(I)$ se află pe o hipersferă.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Dacă imaginea aplicaţiei

$$c: t\in I \to c(t) = (c^1(t),\dots,c^n(t))\in E_n$$

este situată pe hipersfera de ecuație

$$(x^1-a^1)^2 + \dots + (x^n-a^n)^2 = r^2 ,$$

atunci avem

$$(1.9) \qquad (c^1(t)-a^1)^2 + \dots + (c^n(t)-a^n)^2 = r^2$$

Prin derivare, din (1.9) obținem

$$\left[c^1(t)-a^1\right] \dot{c}^1(t) + \dots + \left[c^n(t)-a^n\right] \dot{c}^n(t) = 0$$

ceea ce ne arată că hiperplanele normale curbei $c : I \to E_n$ trec prin punctul fix $(a^1,\dots,a^n)$.

§2. CURBE IN POZITIE GENERALA. HIPERPLAN OSCULATOR

2.1. DEFINITIE. Fie $c : I \to E_n$ o curbă parametrizată. Spunem că curba c este în poziție generală dacă vectorii $\dot{c}(t)$, $c^{(2)}(t),\dots,c^{(n-1)}(t)$ sînt liniar independenți, oricare ar fi valoarea parametrului t în intervalul I.

2.2. DEFINITIE. Fie $c : I \to E_n$ $(n \geq 3)$ o curbă în poziție generală și fie $t_0 \in I$. Hiperplanul care trece prin punctul $c(t_0)$ și este paralel cu vectorii $\dot{c}(t_0)$, $c^{(2)}(t_0),\dots,c^{(n-1)}(t_0)$ se numește hiperplan osculator curbei c în punctul $c(t_0)$.

OBSERVATIE. Ecuația hiperplanului osculator curbei $c : I \to E_n$ în punctul $c(t_0) = (c^1(t_0),\dots,c^n(t_0))$ este :

$$(2.1)\qquad \begin{vmatrix} x^1-c^1(t_0) & x^2-c^2(t_0) & \dots & x^n-c^n(t_0) \\ \dot{c}^1(t_0) & \dot{c}^2(t_0) & \dots & \dot{c}^n(t_0) \\ (c^1)^{(2)}(t_0) & (c^2)^{(2)}(t_0) & \dots & (c^n)^{(2)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c^1)^{(n-1)}(t_0) & (c^2)^{(n-1)}(t_0) & \dots & (c^n)^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = 0$$

2.3. PROPOZITIE. Fie $c : I \longrightarrow E_n$ $((n \geq 3)$ o curbă în poziție generală şi fie $t_0 \in I$. Dacă un hiperplan H ce trece prin punctul $c(t_0)$ intersectează imaginea aplicației c în n puncte confundate în $c(t_0)$, atunci H este hiperplanul osculator curbei în punctul $c(t_0)$.

Demonstrație. Fie H un hiperplan care trece prin punctul $c(t_0) = (c^1(t_0),\dots, c^n(t_0))$. H are ecuația

$$(2.2)\qquad A_1\left[x^1-c^1(t_0)\right]+\dots+A_n\left[x^n-c^n(t_0)\right] = 0 ,$$

unde $A_1,\dots,A_n \in R$ şi $\sum_{i=1}^{n} (A_i)^2 > 0$.

Punctele de intersecție ale hiperplanului de ecuație (2.2) cu imaginea aplicației

$$c : I \longrightarrow E_n ,$$
$$t \longrightarrow c(t) = (c^1(t),\dots,c^n(t))$$

au ca abscise curbilinii rădăcinile ecuației

$$(2.3)\qquad A_1\left[c^1(t)-c^1(t_0)\right] + A_2\left[c^2(t)-c^2(t_0)\right]+\dots+ A_n\left[c^n(t)-c^n(t_0)\right] = 0$$

Dacă dezvoltăm funcțiile $c^1(t),\dots,c^n(t)$ în serie Taylor în jurul punctului t_0, ecuația (2.3) devine

$$A_1\left[\frac{t-t_o}{1!}\dot{c}^1(t_o)+\frac{(t-t_o)^2}{2!}(c^1)^{(2)}(t_o)+\frac{(t-t_o)^3}{3!}(c^1)^{(3)}(t_o)+\dots\right]+$$

$$+A_2\left[\frac{t-t_o}{1!}\dot{c}^2(t_o)+\frac{(t-t_o)^2}{2!}(c^2)^{(2)}(t_o)+\frac{(t-t_o)^3}{3!}(c^2)^{(3)}(t_o)+\dots\right]+$$

$$+\dots+A_n\left[\frac{t-t_o}{1!}\dot{c}^n(t_o)+\frac{(t-t_o)^2}{2!}(c^n)^{(2)}(t_o)+\frac{(t-t_o)^3}{3!}(c^n)^{(3)}(t_o)+\dots\right]=$$

$$=0$$

sau

$$\frac{t-t_o}{1!}\left[A_1\dot{c}^1(t_o)+A_2\dot{c}^2(t_o)+\dots+A_n\dot{c}^n(t_o)\right]+ \tag{2.4}$$

$$+\frac{(t-t_o)^2}{2!}\left[A_1(c^1)^{(2)}(t_o)+A_2(c^2)^{(2)}(t_o)+\dots+A_n(c^n)^{(2)}(t_o)\right]+$$

$$+\dots+\frac{(t-t_o)^n}{n!}\left[A_1(c^1)^{(n)}(t_o)+A_2(c^2)^{(n)}(t_o)+\right.$$

$$\left.+\dots+A_n(c^n)^{(n)}(t_o)\right]+\dots=0$$

Deoarece hiperplanul de ecuaţie (2.2) intersectează imaginea aplicaţiei $c: I \to \mathcal{E}_n$ în n puncte confundate în $c(t_o)$ rezultă că ecuaţia (2.4) trebuie să admită rădăcina $t = t_o$ multiplă de ordinul n, deci trebuie să avem

$$A_1\dot{c}^1(t_o)+A_2\dot{c}^2(t_o)+\dots+A_n\dot{c}^n(t_o)=0$$

$$A_1(c^1)^{(2)}(t_o)+A_2(c^2)^{(2)}(t_o)+\dots+A_n(c^n)^{(2)}(t_o)=0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_1(c^1)^{(n-1)}(t_o)+A_2(c^2)^{(n-1)}(t_o)+\dots+A_n(c^n)^{(n-1)}(t_o)=0$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n}(A_i)^2>0$, din ultimele $n-1$ ecuaţii şi din ecuaţia (2.2) obţinem

$$\begin{vmatrix} x^1-c^1(t_0) & x^2-c^2(t_0) & \dots & x^n-c^n(t_0) \\ \dot{c}^1(t_0) & \dot{c}^2(t_0) & \dots & \dot{c}^n(t_0) \\ (c^1)^{(2)}(t_0) & (c^2)^{(2)}(t_0) & \dots & (c^n)^{(2)}(t_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (c^1)^{(n-1)}(t_0) & (c^2)^{(n-1)}(t_0) & \dots & (c^n)^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = 0 ,$$

dică tocmai ecuaţia hiperplanului osculator curbei în punctul $c(t_0)$

2.4. EXEMPLU. Considerăm aplicaţia

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_4$$

efinită prin

$$c(t) = (t, t, \sin t, \cos t)$$

ste evident că c este o curbă parametrizată în E_4. Ne propunem să rătăm că curba este în poziţie generală şi apoi să scriem ecuaţia iperplanului osculator curbei în punctul $(0,0,0,1) = c(0)$

Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem :

$$\dot{c}(t) = (1, 1, \cos t, -\sin t)$$

$$c^{(2)}(t) = (0, 0, -\sin t, -\cos t)$$

$$c^{(3)}(t) = (0, 0, -\cos t, \sin t)$$

Să presupunem că pentru un sistem de numere reale a_1, a_2, a_3 vem :

$$a_1\dot{c}(t) + a_2c^{(2)}(t) + a_3c^{(3)}(t) = 0 , \ (\forall) t \in \mathbb{R}$$

e aici obţinem $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, deci vectorii $\dot{c}(t), c^{(2)}(t), c^{(3)}(t)$ înt liniar independenţi oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Rezultă că curba dată ste în poziţie generală.

Ecuaţia hiperplanului osculator curbei date în punctul (0,0,0,1) este :

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4-1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

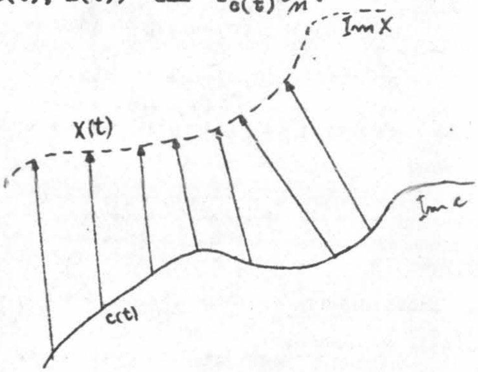
sau

$$x^1 - x^2 = 0$$

§ 3. CIMPURI DE VECTORI DE-A LUNGUL UNEI CURBE. REPERUL LUI FRENET. TEOREMA DE EXISTENTA SI UNICITATE A REPERULUI FRENET PENTRU O CURBA IN POZITIE GENERALA.

3.1. DEFINITIE. Fie $c : I \longrightarrow E_n$ o curbă parametrizată. Prin cîmp de vectori de-a lungul curbei c înţelegem o aplicaţie diferenţiabilă $X : I \longrightarrow E_n$.

In reprezentarea geometrică, vectorul $X(t)$ se consideră ca vector tangent la spaţiul E_n în punctul $c(t)$, adică se identifică cu vectorul $(c(t), X(t))$ din $T_{c(t)}E_n$.



3.2. EXEMPLU. Fie $c : I \to E_n$ o curbă parametrizată. Atunci aplicația

$$\dot{c} : t \in I \to \dot{c}(t) \in E_n \cong T_{c(t)} E_n ,$$

este un cîmp vectorial de-a lungul curbei c.

Cîmpul vectorial $t \to \dot{c}(t)$ se numește cîmpul vectorial tangent curbei $t \to c(t)$.

3.3. DEFINIȚIE. Prin reper Frenet asociat curbei $c : I \to E_n$ înțelegem un sistem de n cîmpuri vectoriale $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de-a lungul curbei c, astfel încît pentru orice $t \in I$, să avem îndeplinite următoarele proprietăți :

F) $\quad < e_i(t), e_j(t) > = \delta_{ij}, \ (\forall) i,j \in \{1, \ldots, n\}$

F') $\quad sp(\dot{c}(t), c^{(2)}(t), \ldots, c^{(k)}(t)) =$

$= sp(e_1(t), \ldots, e_k(t)), \ (\forall) k \in \{1, \ldots, n-1\}$

F") sistemele de vectori $\{\dot{c}(t, c^{(2)}(t), \ldots, c^{(k)}(t)\}$ și $\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\}$ sînt la fel orientate pentru orice $k \in \{1, \ldots, n-1\}$

F"') sistemul de vectori $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ este orientat pozitiv.

3.4. TEOREMA (de existență și unicitate a reperului Frenet). Fie $c : I \to E_n$ o curbă în poziție generală. Atunci există un unic reper Frenet $\{e_1, \ldots, e_n\}$ asociat curbei c.

Demonstrație. Deoarece curba este în poziție generală rezultă că vectorul $f_1(t) = \dot{c}(t)$ este nenul, oricare ar fi $t \in I$. Luăm

$$(3.1) \qquad e_1(t) = \frac{f_1(t)}{\|f_1(t)\|}$$

Fie vectorul

$$(3.2) \qquad f_2(t) = c^{(2)}(t) + A(t) e_1(t)$$

Determinăm funcţia $A(t)$ astfel ca vectorii $f_2(t)$ şi $e_1(t)$ să fie ortogonali, adică să avem :

(3.3) $\quad < f_2(t) \; , \; e_1(t) > = 0 \quad , (\forall) t \in I$

Din (3.2) şi (3.3) rezultă

(3.4) $\quad A(t) = - < c^{(2)}(t), e_1(t) >$

Din (3.2) şi (3.4) obţinem

(3.2') $\quad f_2(t) = c^{(2)}(t) - < c^{(2)}(t), e_1(t) > e_1(t)$

Deoarece vectorii $\dot{c}(t)$ şi $c^{(2)}(t)$ sînt liniar independenţi oricar ar fi $t \in I$, din (3.2') rezultă că $f_2(t) \neq 0$, $(\forall)\, t \in I$, deci şi $\| f_2(t) \| \neq 0$, $(\forall)\, t \in I$. Luăm

(3.5) $$e_2(t) = \frac{f_2(t)}{\| f_2(t) \|}$$

Este evident că $\| e_2(t) \| = 1$ şi că $< e_2(t), e_1(t) > = 0$. Din formulele (3.1), (3.2') şi (3.5) avem :

(3.1') $\quad \dot{c}(t) = \| \dot{c}(t) \| \; e_1(t),$

(3.2") $\quad c^{(2)}(t) = < c^{(2)}(t), e_1(t) > e_1(t) + \| f_2(t) \| \, e_2(t).$

Relaţiile (3.1') şi (3.2") ne arată că

$$sp(\dot{c}(t), c^{(2)}(t)) = sp(e_1(t), e_2(t)$$

Deoarece

$$\begin{vmatrix} \| \dot{c}(t) \| & 0 \\ < c^{(2)}(t), e_1(t) > & \| f_2(t) \| \end{vmatrix} > 0 \quad , (\forall)\; t \in I,$$

rezultă că sistemele de vectori $\left\{ \dot{c}(t), c^{(2)}(t) \right\}$ şi $\left\{ e_1(t), e_2(t) \right\}$ sînt la fel orientate, $(\forall)\; t \in I$.

Presupunem că am construit vectorii $e_1(t),\dots,e_{j-1}(t)$, $(j<n)$ unitari, ortogonali doi cîte doi, cu proprietatea că

$$sp(\dot{c}(t), c^{(2)}(t),\dots,c^{(j-1)}(t)) = sp(e_1(t),\dots,e_{j-1}(t))$$

şi astfel încît sistemele de vectori

$$\left\{\dot{c}(t), c^{(2)}(t),\dots,c^{(j-1)}(t)\right\} \text{ şi } \left\{e_1(t),\dots,e_{j-1}(t)\right\}$$

sînt la fel orientate pentru orice $t\in I$. Vectorul $f_j(t)$ îl construim astfel :

$$(3.6) \qquad f_j(t) = c^{(j)}(t) + \sum_{s=1}^{j-1} A_s(t)e_s(t),\ j<n,$$

unde $t\to A_s(t)$ sînt funcţii diferenţiabile pentru orice $s\in\{1,\dots,j-1\}$ ce vor fi determinate din condiţiile

$$(3.7) \qquad \langle f_j(t), e_h(t)\rangle = 0\ ,\ j<n,\ h\in\{1,\dots,j-1\}$$

Ţinînd seama de (3.6) şi (3.7) obţinem

$$(3.7') \qquad A_s(t) = -\langle c^{(j)}(t), e_s(t)\rangle\ ,\ j<n,\ \ s\in\{1,\dots,j-1\}$$

Din (3.6) şi (3.7') avem :

$$(3.6') \qquad f_j(t) = c^{(j)}(t) - \sum_{s=1}^{j-1} \langle c^{(j)}(t), e_s(t)\rangle\, e_s(t)$$

Deoarece vectorii $\dot{c}(t), c^{(2)}(t),\dots,c^{(j)}(t)$ $(j<n)$ sînt liniar independenţi rezultă $f_j(t)\neq 0$. Luăm

$$(3.8) \qquad e_j(t) = \frac{f_j(t)}{\|f_j(t)\|}\ ,\ \ j<n$$

In acest fel am construit vectorii $e_1(t),\dots,e_{n-1}(t)$ unitari şi ortogonali doi cîte doi. Pe de altă parte din (3.6') şi (3.8) rezultă pentru orice $j<n$ relaţiile

$$(3.9) \qquad e^{(j)}(t) = \langle e^{(j)}(t), e_1(t)\rangle e_1(t) + \dots +$$
$$+ \langle e^{(j)}(t), e_{j-1}(t)\rangle e_{j-1}(t) + \| f_j(t)\| \, e_j(t)$$

Din egalitățile (3.1'), (3.2") și (3.9) obținem :

$$sp(\dot{e}(t), e^{(2)}(t), \dots, e^{(j)}(t)) = sp(e_1(t), \dots, e_j(t))$$

Ținînd seama de relațiile (3.1'), (3.2") și (3.9) obținem că determinantul matricei aplicației liniare care duce baza $\{e_1(t), \dots, e_j(t)\}$ în baza $\{\dot{e}(t), e^{(2)}(t), \dots, e^{(j)}(t)\}$ $(j < n)$ este dat de

$$\Delta(t) = \| f_1(t)\| \dots \| f_j(t)\|$$

Prin urmare $\Delta(t) > 0$, $(\forall)\ t \in I$ și deci sistemele de vectori $\{\dot{e}(t), e^{(2)}(t), \dots, e^{(j)}(t)\}$ și $\{e_1(t), \dots, e_j(t)\}$ $(j<n)$ sînt la fel orientate, pentru orice $t \in I$.

Dacă luăm

$$e_n(t) = e_1(t) \times \dots \times e_{n-1}(t) ,$$

atunci este evident că vectorul $e_n(t)$ este unitar, și ortogonal spațiului generat de vectorii $e_1(t), \dots, e_{n-1}(t)$. De asemenea este evident că sistemul de vectori $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ este orientat pozitiv pentru orice $t \in I$.

Să arătăm acum că aplicațiile

$$t \to e_i(t) \ , \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

sînt diferențiabile.

Este evident că funcțiile

$$t \longmapsto e_k(t) \quad , \quad k \in \{1, \dots, n-1\}$$

sînt diferențiabile (din construcție).

Din relațiile

$$< e_n(t),\ e_k(t) > = 0,\ k \in \{1,\dots,n-1\}$$

em :

$$\begin{aligned} &e_n^1(t)e_1^1(t) +\dots+ e_n^n(t)e_1^n(t) = 0\ , \\ &e_n^1(t)e_2^1(t) +\dots+ e_n^n(t)e_2^n(t) = 0\ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &e_n^1(t)e_{n-1}^1(t)+\dots+ e_n^n(t)e_{n-1}^n(t) = 0\ , \end{aligned} \tag{.1o}$$

de $e_i^1(t),\dots,e_i^n(t)$ sînt componentele vectorului $e_i(t)$, $\in\{1,\dots,n\}$.

Privim (3.1o) ca un sistem de n-1 ecuații liniare și omo- ne cu n necunoscute $e_n^1(t),\dots,e_n^n(t)$. Deoarece vectorii $e_1(t),\dots,$ $_{-1}(t)$ sînt liniar independenți rezultă că rangul matricei

$$M(t) = \begin{pmatrix} e_1^1(t) & e_1^2(t) & \dots & e_1^n(t) \\ e_2^1(t) & e_2^2(t) & \dots & e_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1}^1(t) & e_{n-1}^2(t) & \dots & e_{n-1}^n(t) \end{pmatrix}$$

te n-1 . Fie $D_i(t)$ minorul de ordinul n-1 obținut după ștergerea loanei $i(1 \le i \le n)$ din matricea $M(t)$. Atunci din (3.1o) obținem

$$e_n^i(t) = (-1)^{i-1}\ \lambda(t)\ \ D_i(t)\ \ ,\ \ 1 \le i \le n\ , \tag{.11}$$

de $\lambda(t)$ trebuie să îndeplinească condiția

$$\| e_n(t) \| = 1 \tag{.11'}$$

oarece rang $M(t) = n-1$ rezultă că

$$D(t) = D_1(t)^2 +\dots+ D_n(t)^2 > 0$$

Din (3.11) şi (3.11') obţinem

(3.11")
$$\lambda(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{D(t)}} ,$$

unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$, aceasta rezultînd din cerinţa ca reperul $\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$ şi fie pozitiv orientat. Din (3.11) şi (3.11") obţinem

(3.11''')
$$e_n^i(t) = \frac{(-1)^{i-1}\,\varepsilon\, D_i(t)}{\sqrt{D(t)}} , \quad 1 \leq i \leq n ,$$

unde ε verifică condiţiile $|\varepsilon| = 1$ şi

$$\begin{vmatrix} e_1^1(t) & e_1^2(t) & \dots & e_1^n(t) \\ e_2^1(t) & e_2^2(t) & \dots & e_2^n(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{n-1}^1(t) & e_{n-1}^2(t) & \dots & e_{n-1}^n(t) \\ \frac{\varepsilon D_1(t)}{\sqrt{D(t)}} & \frac{-\varepsilon D_2(t)}{\sqrt{D(t)}} & \dots & \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon D_{n-1}(t)}{\sqrt{D(t)}} \end{vmatrix} > 0$$

Din (3.11''') rezultă că funcţiile

$$t \to e_n^i(t) \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

sînt diferenţiabile, deci şi aplicaţia $t \to e_n(t)$ este diferenţiabil[ă].
Unicitatea reperului Frenet rezultă din construcţie.

3.5. <u>EXEMPLE</u> 3.5.1. Ne propunem să precizăm dacă curba

$$c : \mathbb{R} \to E_5 ,$$

$$c(t) = (2t, 2\cos t, \cos t, 2\sin t, \sin t)$$

îndeplineşte condiţia de existenţă şi unicitate a reperului Frenet.

Avem :

$$\dot{c}(t) = (2, -2 \sin t, -\sin t, 2 \cos t, \cos t)$$

$$c^{(2)}(t) = (0, -2 \cos t, -\cos t, -2 \sin t, -\sin t)$$

$$c^{(3)}(t) = (0, 2 \sin t, \sin t, -2 \cos t, -\cos t)$$

$$c^{(4)}(t) = (0, 2 \cos t, \cos t, 2 \sin t, \sin t)$$

Să presupunem că pentru un sistem de numere reale a_1, a_2, a_3, a_4 avem

$$a_1 \dot{c}(t) + a_2 c^{(2)}(t) + a_3 c^{(3)}(t) + a_4 c^{(4)}(t) = 0$$

De aici rezultă

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 \cos t - a_3 \sin t - a_4 \cos t = 0 \\ a_2 \sin t + a_3 \cos t - a_4 \sin t = 0 \end{cases}$$

De aici obținem $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = a_4$ ceea ce ne arată că vectorii $\dot{c}(t)$, $c^{(2)}(t)$, $c^{(3)}(t)$ și $c^{(4)}(t)$ nu sînt liniar independenți, deci curba considerată nu este în poziție generală. Prin urmare curba dată nu îndeplinește condiția de existență și unicitate a reperului Frenet.

3.5.2. Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_4,$$

$$c(t) = (\cos t, \sin t, t, t)$$

Ne propunem următoarele :

i) Să arătăm că curba dată îndeplinește condiția de existență și unicitate a reperului mobil Frenet.

ii) Să scriem reperul Frenet asociat curbei .

i) Vom folosi notațiile din teorema 3.4.

Avem :

$$\dot{c}(t) = (-\sin t, \cos t, 1, 1)$$

$$c^{(2)}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0, 0)$$

$$c^{(3)}(t) = (\sin t, -\cos t, 0, 0)$$

Să presupunem că pentru un sistem de numere reale a_i, $i \in \{1,2,3\}$ avem

$$a_1\dot{c}(t) + a_2c^{(2)}(t) + a_3c^{(3)}(t) = 0 \quad , \quad (\forall)\ t \in \mathbb{R}$$

De aici obținem $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, deci vectorii $\dot{c}(t)$, $c^{(2)}(t)$, $c^{(3)}(t)$ sînt liniar independenți oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Rezultă că curba dată este în poziție generală, deci îndeplinește condiția de existență și unicitate a reperului mobil Frenet.

ii) Deoarece $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{3}$, rezultă

(3.12) $$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin t, \cos t, 1, 1)$$

Deoarece $\langle c^{(2)}(t), e_1(t)\rangle = 0$, rezultă $f_2(t) = c^{(2)}(t)$, deci avem

(3.13) $$e_2(t) = \frac{f_2(t)}{\|f_2(t)\|} = (-\cos t, -\sin t, 0, 0)$$

Ținînd seama de egalitățile :

$$\langle c^{(3)}(t), e_1(t)\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad , \langle c^{(3)}(t), e_2(t)\rangle = 0 \quad ,$$

rezultă :

$$f_3(t) = c^{(3)}(t) - \langle c^{(3)}(t), e_1(t)\rangle\, e_1(t) -$$

$$- \langle c^{(3)}(t), e_2(t)\rangle\, e_2(t) = c^{(3)}(t) + \frac{1}{\sqrt{3}}\, e_1(t) =$$

$$= (\sin t, -\cos t, 0, 0) + \left(-\frac{\sin t}{3}, \frac{\cos t}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{3}\sin t, -\frac{2}{3}\cos t, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\|f_3(t)\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(3.14) $$e_3(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \sin t,\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \cos t,\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Să determinăm vectorul

$$e_4(t) = (e_4^1(t),\ e_4^2(t),\ e_4^3(t),\ e_4^4(t))$$

Din relaţiile

$$\langle e_4(t),\ e_i(t) \rangle = 0 \quad , \quad i \in \{1,2,3\}$$

rezultă :

(3.15) $$\begin{cases} -e_4^1(t)\sin t + e_4^2(t)\cos t + e_4^3(t) + e_4^4(t) = 0 \\ e_4^1(t)\cos t + e_4^2(t)\sin t = 0 \\ 2e_4^1(t)\sin t - 2e_4^2(t)\cos t + e_4^3(t) + e_4^4(t) = 0 \end{cases}$$

Din prima şi a treia ecuaţie a sistemului (3.15) obţinem :

$$3e_4^1(t)\sin t - 3e_4^2(t)\cos t = 0$$

sau

(3.15') $$e_4^1(t)\sin t - e_4^2(t)\cos t = 0$$

Din a doua ecuaţie a sistemului (3.15) şi din (3.15') rezultă :

(3.16) $$e_4^1(t) = e_4^2(t) = 0$$

Din prima ecuaţie a sistemului (3.15) şi din (3.16) obţinem :

(3.16') $$e_4^3(t) = -e_4^4(t)$$

Deoarece $\| e_4(t) \| = 1$, din (3.16) şi (3.16') rezultă :

$$\sqrt{(e_4^3(t))^2 + (e_4^4(t))^2} = 1$$

şi folosind (3.16') avem :

$$e_4^3(t) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$

Determinăm pe ε astfel încît reperul $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)\}$ să fie orientat pozitiv. Va trebui ca matricea transformării liniare care duce baza canonică

$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

a lui R^4 în baza $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t), e_4(t)\}$ să aibă determinantul pozitiv, deci trebuie să avem :

$$\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & 1 & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ 2\sin t & -2\cos t & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{vmatrix} > 0$$

sau

$$-\varepsilon(2 + \cos^2 t) > 0$$

ceea ce ne arată că $\varepsilon = -1$. Rezultă :

(3.17) $$e_4(t) = (0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Am obținut reperul Frenet $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ asociat curbei c, unde cîmpurile e_1, e_2, e_3, e_4 sînt definite prin (3.12), (3.13), (3.14) și (3.17).

4. FORMULELE LUI FRENET. CURBURILE UNEI CURBE. INVARIANTA CURBURILOR UNEI CURBE LA SCHIMBARI DE PARAMETRU CE PASTREAZA ORIENTAREA SI LA IZOMETRII PROPRII. TEOREMA FUNDAMENTALA A TEORIEI CURBELOR.

4.1. **PROPOZITIE.** *Fie $c : I \to \mathcal{E}_n$ o curbă în poziție generală și fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ reperul Frenet asociat curbei. Avem formulele*

(4.1) $$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, e_j(t) ,$$

unde

(4.1') $$a_{ij}(t) + a_{ji}(t) = 0, \ (\forall)\ i,j \in \{1,\dots,n\}$$

și

(4.1") $$a_{ij}(t) = 0 \ , \ \text{dacă} \ j > i+1$$

Demonstrație. Fixăm un indice $i \in \{1,\dots,n\}$. Exprimăm vectorul $\dot{e}_i(t)$ în baza $\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$. Avem

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) e_j(t)$$

Inmulțim scalar aceste relații cu $e_k(t)$ și obținem

(4.2) $$a_{ik}(t) = \langle \dot{e}_i(t), e_k(t) \rangle$$

Dacă derivăm relațiile $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$, obținem

(4.3) $$\langle \dot{e}_i(t), e_j(t) \rangle + \langle e_i(t), \dot{e}_j(t) \rangle = 0$$

Ținînd seama de relațiile (4.2) și (4.3) obținem

$$a_{ij}(t) + a_{ji}(t) = 0$$

adică tocmai (4.1'). Rămîne să mai arătăm că $a_{ij}(t) = 0$ pentru $j > i+1$. Deoarece $\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$ este reper Frenet rezultă că avem:

(4.4) $$c^{(i)}(t) \in sp(e_1(t),\dots,e_i(t)), (\forall) i \in \{1,2,\dots,n-1\},$$

(4.5) $$e_i(t) \in sp(\dot{c}(t), c^{(2)}(t),\dots,c^{(i)}(t)), \quad i \in \{1,\dots,n-1\}$$

De aici rezultă :

(4.5') $\quad \dot{e}_i(t) \in sp(\dot{c}(t), c^{(2)}(t), \dots, c^{(i+1)}(t)), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$

Din (4.5') şi (4.4) obţinem

(4.5") $\quad \dot{e}_i(t) \in sp(e_1(t), \dots, e_{i+1}(t)), \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$

Din (4.5") vedem că în scrierea $\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) e_j(t)$, coeficienţii $a_{ij}(t)$ sînt nuli dacă $j > i+1$. Formulele (4.1) se numesc formulele lui Frenet.

4.2. OBSERVAŢIE. Folosind (4.1') şi (4.1") rezultă

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & a_{34} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots -a_{n-1n} & 0 \end{pmatrix}$$

4.3. DEFINIŢIE. Fie $c : I \to E_n$ o curbă în poziţie generală şi fie $\{e_1, \dots, e_n\}$ reperul Frenet asociat curbei. Definim funcţiile

$$K_i : I \to \mathbb{R}$$

prin

(4.6) $\quad K_i(t) = \dfrac{a_{ii+1}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \quad , \quad i \in \{1, \dots, n-1\},$

unde $\quad a_{ii+1}(t) = \langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t) \rangle .$

$K_1(t), \dots, K_{n-1}(t)$ se numesc curburile curbei c în punctul $c(t)$.

4.4. PROPOZIȚIE. Fie $c : I \to E_n$ o curbă în poziție generală și fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ reperul Frenet asociat curbei. Notăm cu $K_1(t),\dots,K_{n-1}(t)$ curburile curbei într-un punct oarecare $c(t)$ al curbei. Atunci, pentru $n>2$, avem

$$K_i(t) > 0 \quad , \quad (\forall) i \in \{1,\dots,n-2\}$$

Demonstrație. Vom folosi notațiile de la teorema 3.4. Știm că curburile $K_i(t)$ sînt date de

$$K_i(t) = \frac{a_{i\ i+1}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \quad , \ i\in\{1,\dots,n-1\}$$

Deoarece $\|\dot{c}(t)\|>0$ este suficient să arătăm că $a_{i\ i+1}(t) > 0$ oricare ar fi $i\in\{1,\dots,n-2\}$. Știm că $a_{i\ i+1}(t) = \langle\dot{e}_i(t),e_{i+1}(t)\rangle$. Din (3.8) rezultă :

(4.7) $$\dot{e}_i(t) = \frac{1}{\|f_i(t)\|}\ \dot{f}_i(t) + \left(\frac{1}{\|f_i(t)\|}\right)' f_i(t),$$

unde $f_i(t)$ este dat prin (3.6'). Din (3.6') rezultă

(4.8) $$\dot{f}_i(t) = c^{(i+1)}(t) + B_i(t),$$

unde $B_i(t)\in sp(e_1(t),\dots,e_i(t))$. Din (4.7) și (4.8) rezultă :

(4.9) $$\dot{e}_i(t) = \frac{1}{\|f_i(t)\|}\ c^{(i+1)}(t) + h_i(t),$$

unde $h_i(t)\in sp(e_1(t),\dots,e_i(t))$. Ținînd seama de (4.9) și (3.6') rezultă $a_{i\ i+1}(t) = \langle\dot{e}_i(t),e_{i+1}(t)\rangle = \frac{1}{\|f_i(t)\|}\langle c^{(i+1)}(t),e_{i+1}(t)\rangle =$

$$= \frac{1}{\|f_i(t)\|}\langle f_{i+1}(t),\ e_{i+1}(t)\rangle = \frac{\|f_{i+1}(t)\|}{\|f_i(t)\|}\langle e_{i+1}(t),\ e_{i+1}(t)\rangle > 0$$

Cînd am aplicat formulele (3.6') am ținut seama de faptul că avem $i+1 \in \{2,\dots,n-1\}$ și deci $i\in\{1,\dots,n-2\}$. Prin urmare

$$K_i(t)>0 \quad , \quad (\forall)\ i \in \{1,\dots,n-2\}$$

4.5. **PROPOZITIE.** __Fie__ $c : I \to E_n$ __şi__ $\bar{c} : \bar{I} \to E_n$ __două curbe în poziţie generală care diferă între ele printr-o schimbare de parametru care păstrează orientarea, adică există un difeomorfism__ $\varphi : \bar{I} \to I$ __cu__ $\dot{\varphi}(\bar{t}) > 0$ __oricare ar fi__ $\bar{t} \in \bar{I}$ __şi astfel încît__ $\bar{c} = c \circ \varphi$. __Dacă__ $\{e_1,\ldots,e_n\}$ __este reperul Frenet asociat curbei c şi dacă notăm__ $\bar{e}_i = e_i \circ \varphi$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, __atunci:__

i) $\{\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n\}$ __este reperul Frenet asociat curbei__ $\bar{c}$,

ii) $\bar{K}_i(\bar{t}) = K_i(t)$, __unde__ $t = \varphi(\bar{t})$, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ __şi unde__ $K_i(t)$, resp. $\bar{K}_i(\bar{t})$ sînt curburile curbei c, respectiv $\bar{c}$.

__Demonstraţie.__ i) Avem $\bar{c}(\bar{t}) = c(t)$ şi $\bar{e}_i(\bar{t}) = e_i(t)$, unde $t = \varphi(\bar{t})$. Rezultă

$$< \bar{e}_i(\bar{t}),\bar{e}_j(\bar{t}) > = < e_i(t),e_j(t) > = \delta_{ij} ,$$

deci prima condiţie din definiţia reperului Frenet este îndeplinită de cîmpurile $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$. Vom arăta în continuare că $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_n$ îndeplinesc şi celelalte trei condiţii din definiţia 3.3. Pentru aceasta vom folosi egalităţile

$$\bar{c}(\bar{t}) = c(t),\ \bar{e}_i(\bar{t}) = e_i(t),\ t = \varphi(\bar{t}),\ i \in \{1,\ldots,n\},\ e_1 = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} ,$$

precum şi formulele Frenet pentru curba c

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, e_j(t)$$

unde $a_{ij} + a_{ji} = 0$, $a_{ij}(t) = 0$ dacă $j > i+1$. In plus vom mai folosi faptul că primele n-2 curburi ale unei curbe din E_n (n >2) sînt pozitive.

Din $\bar{c}(\bar{t}) = c(t)$ rezultă

$$\dot{\bar{c}}(\bar{t}) = \dot{\widehat{c \circ \varphi}}(\bar{t}) = \dot{c}(\varphi(\bar{t}))\,\dot{\varphi}(\bar{t}) = \dot{c}(t)\,\dot{\varphi}(\bar{t}) =$$

$$= \|\dot{c}(t)\|\, e_1(t)\,\dot{\varphi}(\bar{t}) = \|\dot{c}(t)\,\dot{\varphi}(\bar{t})\|\,\bar{e}_1(\bar{t}) = \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\,\bar{e}_1(\bar{t})$$

Am obţinut egalitatea

$$\dot{\bar{c}}(\bar{t}) = \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\,\bar{e}_1(\bar{t})$$

De aici rezultă

$$\bar{c}^{(2)}(\bar{t}) = (\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|)'\,\bar{e}_1(\bar{t}) + \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\,\dot{\bar{e}}_1(\bar{t})$$

eoarece avem

$$\dot{\bar{e}}_1(\bar{t}) = \dot{\widehat{e_1\circ\varphi}}(\bar{t}) = \dot{e}_1(t)\dot{\varphi}(\bar{t}) = a_{12}(t)e_2(t)\dot{\varphi}(\bar{t}) =$$

$$= (a_{12}\circ\varphi)(\bar{t})\,\bar{e}_2(\bar{t})\,\dot{\varphi}(\bar{t})$$

entru orice $t = \varphi(\bar{t})\in I$, rezultă

$$\bar{c}^{(2)}(\bar{t}) = (\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|)'\,\bar{e}_1(\bar{t}) + \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|\,(a_{12}\circ\varphi(\bar{t}))\,\dot{\varphi}(\bar{t})\,\bar{e}_2(\bar{t})$$

erivînd în continuare şi folosind formulele Frenet pentru curba c, bţinem $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$

$$\bar{c}^{(k)}(\bar{t})\in sp(\bar{e}_1(\bar{t}),\dots,\bar{e}_k(\bar{t}))\ ,\ k\in\{1,\dots,n-1\}$$

ectorii $\dot{\bar{c}}(\bar{t}), \bar{c}^{(2)}(\bar{t}),\dots,\bar{c}^{(n-1)}(\bar{t}))$ fiind liniar independenţi, $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$ (curba $\bar{c}$ este în poziţie generală), rezultă

$$\bar{e}_k(\bar{t})\in sp(\dot{\bar{c}}(\bar{t}),\ \bar{c}^{(2)}(\bar{t}),\dots,\bar{c}^{(k)}(\bar{t}))\ ,\ (\forall)\ k\in\{1,\dots,n-1\}$$

cum este evident că $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$ avem

$$sp(\bar{e}_1(\bar{t}),\dots,\bar{e}_k(\bar{t})) = sp(\dot{\bar{c}}(\bar{t}),\ \bar{c}^{(2)}(\bar{t}),\dots,\bar{c}^{(k)}(\bar{t})),(\forall)k\in\{1,\dots,n-1\}$$

n plus, observăm că sistemele de vectori

$$\{\dot{\bar{c}}(\bar{t}),\ \bar{c}^{(2)}(\bar{t}),\dots,\bar{c}^{(k)}(\bar{t})\}\ \text{şi}\ \{\bar{e}_1(\bar{t}),\dots,\bar{e}_k(\bar{t})\}$$

înt la fel orientate $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$, $(\forall)\ k\in\{1,\dots,n-1\}$.

In adevăr, observăm că dacă punem

$$\bar{c}^{(k)}(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{k} a_i^k(\bar{t})\,\bar{e}_i(\bar{t}),\quad k\in\{1,\dots,n-1\},$$

tunci avem $a_1^1(t) = \|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\| > 0$, $a_2^2(\bar{t}) = (a_{12}\circ\varphi)(\bar{t})\dot{\varphi}(\bar{t})\,\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\| > 0,\dots,$ $\dots,a_k^k(\bar{t}) > 0$ şi deci determinantul următor este pozitiv

$$\Delta(t) = \det(a_l^k(\bar{t})) = \begin{vmatrix} a_1^1(\bar{t}) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1^2(\bar{t}) & a_2^2(\bar{t}) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^k(\bar{t}) & a_2^k(\bar{t}) & a_3^k(\bar{t}) & \dots & a_{k-1}^k(\bar{t}) & a_k^k(\bar{t}) \end{vmatrix}$$

$$= a_1^1(\bar{t})\, a_2^2(\bar{t}) \dots a_k^k(\bar{t}) > 0 \;, \; (\forall)\; \bar{t} \in \bar{I}$$

Reperul $\{\bar{e}_1(\bar{t}),\dots,\bar{e}_n(\bar{t})\}$ este pozitiv orientat $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$, deoarece avem

$$\bar{e}_n(\bar{t}) = e_n(t) = e_1(t) \times\dots\times e_{n-1}(t) = \bar{e}_1(\bar{t}) \times\dots\times \bar{e}_{n-1}(\bar{t})$$

Prin urmare $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ este reperul Frenet asociat curbei $\bar{c}$.

ii) Este evident că $\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\| \neq 0$, $(\forall)\ \bar{t}\in\bar{I}$. Rezultă

$$K_i(\bar{t}) = \frac{\bar{a}_{i\,i+1}(\bar{t})}{\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|} = \frac{\langle \dot{\bar{e}}_i(\bar{t}),\, \bar{e}_{i+1}(\bar{t})\rangle}{\|\dot{\bar{c}}(\bar{t})\|} = \frac{\langle \dot{e}_i(t)\,\dot{\varphi}(\bar{t}),\, e_{i+1}(t)\rangle}{\|\dot{c}(t)\|\,\dot{\varphi}(\bar{t})} =$$

$$= \frac{a_{i\,i+1}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = K_i(t), \quad (\forall)\ i\in\{1,\dots,n-1\}$$

4.6. <u>PROPOZITIE</u>. <u>Fie $c : I \longrightarrow E_n$ o curbă şi $B : E_n \longrightarrow E_n$ o izometrie. Atunci</u>:

i) $\bar{c} = B\circ c : I \longrightarrow E_n$ <u>este o curbă parametrizată</u>

(componenta ortogonală a)

ii) $\dot{\bar{c}}(t) = R\ \dot{c}(t)$, <u>unde</u> $R = dB_x$ <u>este</u> <u>izometriei B</u>.

iii) $\|\dot{\bar{c}}(t)\| = \|\dot{c}(t)\|$, $(\forall)\, t\in I$

iv) <u>dacă curba c este în poziţie generală, rezultă că şi curba $\bar{c}$ este în poziţie generală</u>.

<u>Demonstraţie</u> i) Este evident că $\bar{c}$ este aplicaţie diferenţiabilă.

ii) Baza canonică $\{(t,1)\}$ a spaţiului vectorial $T_t\,\mathbb{R}\cong\mathbb{R}$ este formată din vectorul $(t,1) = 1$. Avem

$$\dot{\bar{c}}(t) = d\,\bar{c}_t(1) = d(B\circ c)_t(1) = d\,B_{c(t)} \circ d\,c_t(1) =$$

$$= d\,B_{c(t)}\ \dot{c}(t) = R\ \dot{c}(t)$$

iii) Avem

$$\|\dot{\bar{c}}(t)\|^2 = <\dot{\bar{c}}(t), \dot{\bar{c}}(t)> = <R\,\dot{c}(t), R\,\dot{c}(t)> =$$

$$= <\dot{c}(t), \dot{c}(t)> = \|\dot{c}(t)\|^2$$

fie $t \in I$.

iv) Presupunem că pentru $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ **avem**

$$\lambda_1 \dot{\bar{c}}(t) + \lambda_2 \bar{c}^{(2)}(t) + \ldots + \lambda_{n-1} \bar{c}^{(n-1)}(t) = 0.$$

Deoarece $d R_x = R$, $(\forall)\ x \in E_n$, avem

$$\dot{\bar{c}}(t) = R\dot{c}(t),\ \bar{c}^{(2)}(t) = Rc^{(2)}(t), \ldots, \bar{c}^{(n-1)}(t) = Rc^{(n-1)}(t)$$

şi înlocuind în relaţia de mai sus obţinem

$$\lambda_1 R\dot{c}(t) + \lambda_2 Rc^{(2)}(t) + \ldots + \lambda_{n-1} Rc^{(n-1)}(t) = 0.$$

Deoarece R este liniară, rezultă

$$R(\lambda_1 \dot{c}(t) + \lambda_2 c^{(2)}(t) + \ldots + \lambda_{n-1} c^{(n-1)}(t)) = 0$$

De aici obţinem

$$\lambda_1 \dot{c}(t) + \lambda_2 c^{(2)}(t) + \ldots + \lambda_{n-1} c^{(n-1)}(t) = 0,$$

Deoarece vectorii $\dot{c}(t), c^{(2)}(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ sînt liniar independenţi, ultima egalitate implică $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Prin urmare vectorii $\dot{\bar{c}}(t), \bar{c}^{(2)}(t), \ldots, \bar{c}^{(n-1)}(t)$ sînt liniar independenţi, $(\forall) t \in I$ şi deci curba $\bar{c}$ este în poziţie generală.

4.7. <u>PROPOZITIE. Fie $c : I \to E_n$ o curbă în poziţie generală, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ reperul Frenet asociat curbei şi fie $B : E_n \to E_n$ o izometrie proprie. Notăm $\bar{e}_i = R\,e_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, unde R este rotaţia izometriei B. Atunci:</u>

1) <u>$\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ este reperul Frenet asociat curbei $\bar{c} = B \circ c$</u>

ii) $\bar{K}_i(t) = K_i(t)$, $(\forall) i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $(\forall) t \in I$

<u>Demonstraţie</u> i) Este evident că curba $\bar{c}$ este în poziţie generală. Pentru orice $t \in I$ avem

$$<\bar{e}_i(t), \bar{e}_j(t)> = <Re_i(t), Re_j(t)> = <e_i(t), e_j(t)> = \delta_{ij}$$

Stim că pentru orice numere reale $a_1,\ldots,a_k$, $b_1,\ldots,b_k \in \mathbb{R}$ $(k<n)$, avem

$$a_1\dot{c}(t) + a_2c^{(2)}(t)+\ldots+a_kc^{(k)}(t) = b_1e_1(t)+\ldots+b_ke_k(t) \quad (\forall)t\in I$$

Aplicînd rotaţia R, obţinem

$$a_1\dot{\bar{c}}(t) + a_2\bar{c}^{(2)}(t)+\ldots+a_k\bar{c}^{(k)}(t) = b_1\bar{e}_1(t)+\ldots+b_k\bar{e}_k(t), \ (\forall)a_i,b_i\in \mathbb{R},\ i=\overline{1,k} \quad (\forall)t\in I,$$

ceea ce ne arată că

$$sp(\dot{\bar{c}}(t),\ \bar{c}^{(2)}(t),\ldots,\bar{c}^{(k)}(t)) = sp(\bar{e}_1(t),\ldots,\bar{e}_k(t)),\ k\in\{1,\ldots,n-1\}$$

Deoarece pentru orice $j\in\{1,\ldots,n-1\}$ avem $c^{(j)}(t)\in sp(e_1(t),\ldots,e_j(t))$, rezultă că există funcţiile diferenţiabile $a_j^i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $i,j\in\{1,\ldots,n-1\}$ astfel încît să avem

$$\dot{c}(t) = a_1^1(t)e_1(t)$$

$$c^{(2)}(t) = a_2^1(t)e_1(t) + a_2^2(t)e_2(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c^{(j)}(t) = a_j^1(t)e_1(t) +\ldots+ a_j^j(t)e_j(t),$$

unde

$$\Delta(t) = \det(a_j^i(t)) = a_1^1(t)\ \ldots\ a_j^j(t) > 0$$

Aplicăm rotaţia R egalităţilor de mai sus şi obţinem

$$\dot{\bar{c}}(t) = a_1^1(t)\bar{e}_1(t)$$

$$\bar{c}^{(2)}(t) = a_2^1(t)\bar{e}_1(t) + a_2^2(t)\bar{e}_2(t)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\bar{c}^{(j)}(t) = a_j^1(t)\bar{e}_1(t) +\ldots+ a_j^j(t)\bar{e}_j(t)$$

şi cum $\Delta(t)>0$ rezultă că sistemele de vectori

$\left\{\dot{\bar{c}}(t),\ \bar{c}^{(2)}(t),\ldots,\bar{c}^{(j)}(t)\right\}$ şi $\left\{\bar{e}_1(t),\ldots,\bar{e}_j(t)\right\}$ sînt la fel orientate $(\forall)j\in\{1,\ldots,n-1\}$, $(\forall)t\in I$

Stim că reperul $\{e_1(t),\ldots,e_n(t)\}$ este pozitiv orientat şi că izometria B este proprie, deci $\det R = 1$. Rezultă că şi reperul $\{\bar{e}_1(t),\ldots,\bar{e}_n(t)\}$ (unde $\bar{e}_i(t) = R\, e_i(t)$) este pozitiv orientat.

In adevăr reperul $\{e_1(t),\dots,e_n(t)\}$ fiind pozitiv orientat avem $\det(e_i^j(t)) = 1$, $(\forall)t\in I$, unde $(e_i^1(t),\dots,e_i^n(t))$ sînt componentele vectorului $e_i(t)$ relative la baza canonică a spațiului E_n. Rotația R este definită de formulele

$$v'^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i v^j \ ,\ \det(a_j^i) = 1,$$

unde $v = (v^1,\dots,v^n)$, $v' = Rv = (v'^1,\dots,v'^n) \in E_n$. Deoarece $\bar{e}_i(t) = R\, e_i(t)$ rezultă

$$\bar{e}_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i\ e_k^j(t)$$

De aici obținem

$$\det(\bar{e}_k^i(t)) = \det(a_j^i)\det(e_k^j(t)) = 1\ ,$$

ceea ce ne arată că reperul $\{\bar{e}_1(t),\dots,\bar{e}_n(t)\}$ este pozitiv orientat, $(\forall)t\in I$.

ii) Pentru orice $i,j\in\{1,\dots,n\}$ avem

$$\bar{a}_{ij}(t) = <\dot{\bar{e}}_i(t),\ \bar{e}_j(t)> = <R\ \dot{e}_i(t),\ R\ e_j(t)> =$$
$$= <\dot{e}_i(t),\ e_j(t)> = a_{ij}(t)$$

Rezultă

$$\bar{K}_i(t) = \frac{\bar{a}_{i\ i+1}(t)}{\|\dot{\bar{c}}(t)\|} = \frac{a_{i\ i+1}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = K_i(t)$$

4.8. <u>PROPOZITIE. Fie $c : I \to E_n$ şi $\bar{c} : I \to E_n$ două curbe în poziție generală.</u>

<u>Presupunem că $(\forall)t\in I$ avem</u>

(4.10) $\|\dot{c}(t)\| = \|\dot{\bar{c}}(t)\|$, $K_i(t) = \bar{K}_i(t)$, $(\forall)i\in\{1,\dots,n-1\}$

<u>Atunci există o unică izometrie proprie $B : E_n \to E_n$ astfel încît $\bar{c} = B\circ c$.</u> (Fie $\{e_1,\dots,e_n\}$, resp. $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ reperul Frenet asociat curbei c, resp. $\bar{c}$.

<u>Demonstrație</u>. Fixăm un punct $t_o\in I$. In $c(t_o)$ avem reperul $\{e_1(t_o),\dots,e_n(t_o)\}$, iar în punctul $\bar{c}(t_o)$ avem reperul $\{\bar{e}_1(t_o),\dots,\bar{e}_n(t_o)\}$

Există o unică transformare ortogonală

$$R : E_n \to E_n$$

astfel încît

$$R\, e_i(t_o) = \bar{e}_i(t_o) \quad , \quad i \in \{1,\ldots,n\}$$

Există apoi o unică izometrie

$$B : E_n \to E_n$$

cu $dB_x = R$, $(\forall) x \in E_n$, care să ducă originea $c(t_o)$ a reperului $\{e_i(t_o)\}$ în originea $\bar{c}(t_o)$ a reperului $\{\bar{e}_i(t_o)\}$. Observăm că izometria B este proprie deoarece reperele $\{e_i(t_o)\}$ şi $\{\bar{e}_i(t_o)\}$ sînt pozitiv orientate.

În adevăr, avem

$$\det(e_i^j(t_o)) = \det(\bar{e}_i^j(t_o)) = 1$$

Aplicaţia R fiind definită de formulele $v'^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i v^j$, din egalităţile $\bar{e}_i(t_o) = R\, e_i(t_o)$ obţinem

$$\bar{e}_i^j(t_o) = \sum_{k=1}^{n} a_k^j e_i^k(t_o)$$

De aici obţinem $\det(a_k^j) = 1$, adică izometria B este proprie.

Ţinînd seama de (4.10), rezultă $\bar{a}_{i\ i+1}(t) = a_{i\ i+1}(t)$ şi deci formulele Frenet pentru curbele c şi $\bar{c}$ se scriu

(4.11) $\quad \dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) e_j(t), \quad \dot{\bar{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \bar{e}_j(t)$

Aplicînd rotaţia R primului grup de formule (4.11) rezultă

(4.12) $\quad R \circ \dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) R \circ e_j(t), \quad \dot{\bar{e}}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \bar{e}_j(t)$

De asemenea, avem

(4.12') $\quad R \circ e_i(t_o) = \bar{e}_i(t_o)$

Relaţiile (4.12) ne arată că funcţiile $R \circ e_i$ şi $\bar{e}_i$ verifică acelaşi sistem de ecuaţii diferenţiale, cu exact aceleaşi condiţii iniţiale (4.12') n punctul t_0. Ştim de la cursul de ecuaţii diferenţiale că soluţia ste unică şi deci avem

$$R \cdot e_i(t) = \bar{e}_i(t), \quad (\forall) i \in \{1,\dots,n\}$$

e aici pentru i = 1 avem

$$R \cdot e_1(t) = \bar{e}_1(t) \qquad \text{sau}$$

$$R\, \dot{c}(t) = \dot{\bar{c}}(t)$$

esultă

$$B \cdot c(t) - B \cdot c(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{\widehat{B \cdot c}}(\theta)\, d\theta = \int_{t_0}^{t} R\, \dot{c}(\theta)\, d\theta =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \dot{\bar{c}}(\theta)\, d\theta = \bar{c}(t) - \bar{c}(t_0)$$

i deoarece $B \cdot c(t_0) = \bar{c}(t_0)$, obţinem $B \cdot c(t) = \bar{c}(t)$, $(\forall) t \in I$, adică $\bar{c} = B \cdot c$.

4.9. TEOREMA (Teorema fundamentală a teoriei curbelor). ie un interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Presupunem date n-1 funcţii diferenţiabile

$$F_i : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i \in \{1,\dots,n-1\}$$

u proprietatea că $F_j(s) > 0$, $(\forall) s \in I$ şi $(\forall) j \in \{1,\dots,n-2\}$.

Atunci există o curbă parametrizată

$$c : s \in I \longrightarrow c(s) \in E_n, \quad \|\dot{c}(s)\| = 1, \quad (\forall) s \in I,$$

unică, abstracţie făcînd de o izometrie proprie, ale cărei curburi sînt

$$K_i(s) = F_i(s), \quad (\forall) i \in \{1,\dots,n-1\}$$

Demonstraţie. Unicitatea este evidentă datorită propoziţiei 4.8. Considerăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

(4.13) $\quad \dot{e}_i(s) = -F_{i-1}(s) e_{i-1}(s) + F_i(s) e_{i+1}(s), \quad i = \overline{1,n}$,

unde $F_1(s),\dots,F_{n-1}(s)$ sînt funcţiile date, $e_1(s),\dots,e_n(s)$ sînt funcţii necunoscute şi unde am folosit notaţiile

$$e_0 = e_{n+1} = 0, \qquad F_0 = F_n = 0$$

Fixăm un punct $s_o \in I$. Pentru integrare presupunem condiţiile iniţiale de forma

(4.13') $$(e_i^j(s_o))_{1 \leq i,j \leq n} = E \ ,$$

unde $(e_i^1(s_o),\dots,e_i^n(s_o))$ sînt componentele vectorului $e_i(s_o)$, $(i \in \{1,\dots,n\})$în baza canonică a spaţiului E_n, iar E este matricea unitate de ordinul n. Geometric, aceasta revine la alegerea sistemului de axe de coordonate astfel încît pentru $s = s_o$, versorul $e_i(s_o)$ să devină versorul axei Ox^i, pentru orice $i \in \{1,\dots,n\}$.

Se ştie de la cursul de ecuaţii diferenţiale că sistemul (4.13), (4.13') admite soluţie unică. Fie aceasta $e_1,\dots,e_n$, unde

$$e_i : I \to E_n, \quad i = \overline{1,n}$$

sînt funcţii diferenţiabile. Vom arăta că $\{e_1(s),\dots,e_n(s)\}$ este un reper ortonormat, $(\forall) s \in I$. Pentru aceasta considerăm funcţiile

$$\alpha_{ij} : I \to \mathbb{R} \ , \ \alpha_{ij}(s) = \langle e_i(s), e_j(s) \rangle \ , \ i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Prin derivare, obţinem

$$\dot{\alpha}_{ij}(s) = \langle \dot{e}_i(s), e_j(s) \rangle + \langle e_i(s), \dot{e}_j(s) \rangle$$

şi folosind din nou (4.13) obţinem ecuaţiile:

(4.14) $$\dot{\alpha}_{ij}(s) = -\alpha_{ji-1}(s)F_{i-1}(s) + \alpha_{ji+1}(s)F_i(s) - \\ -\alpha_{ij-1}(s)F_{j-1}(s) + \alpha_{ij+1}(s)F_j(s)$$

Funcţiile α_{ij} verifică condiţiile iniţiale

(4.14') $$\alpha_{ij}(s_o) = \langle e_i(s_o), e_j(s_o) \rangle = \delta_{ij}$$

Se constată cu uşurinţă că sistemul (4.14), (4.14') admite soluţia

$$\alpha_{ij}(s) = \delta_{ij}$$

Această soluţie este unică conform unei teoreme de la cursul de ecuaţii diferenţiale.

Prin urmare avem

$$\langle e_i(s) \ , \ e_j(s) \rangle = \delta_{ij} \ , \ (\forall) s \in I$$

şi deci $\{e_1(s),\ldots,e_n(s)\}$ este un reper ortonormat.

Mai mult, reperul $\{e_1(s),\ldots,e_n(s)\}$ este pozitiv orientat. In adevăr, fie $(e_i^1(s),\ldots,e_i^n(s))$ componentele vectorului $e_i(s)$ în baza canonică a spaţiului R^n. Este evident că matricea $(e_i^j(s))_{1\leq i,j\leq n}$ este ortogonală. Notăm

$$\Delta(s) = \det(e_i^j(s))$$

Deoarece funcţiile $s \longrightarrow e_j^i(s)$ sînt diferenţiabile, rezultă că funcţia $s \longrightarrow \Delta(s)$ este diferenţiabilă. Prin urmare funcţia $s \longrightarrow \Delta(s)$ este continuă. Deoarece

$$\Delta(s_o) = \det(e_i^j(s_o)) = 1 \quad ,$$

rezultă că avem

$$\Delta(s) = 1 \ , \quad (\forall) s\in I$$

Prin urmare reperul $\{e_1(s),\ldots,e_n(s)\}$ este pozitiv orientat $(\forall)s\in I$.

Pentru determinarea curbei vom folosi formula $e_1(s) = \dot{c}(s)$. Avem

$$c(s) = \int_{s_o}^{s} e_1(u)du \tag{4.15}$$

Curba c astfel determinată este în poziţie generală. Acest lucru este evident pentru $n = 2$ sau $n = 3$. Pentru $n \geq 4$, din (4.15) şi din (4.13) obţinem, pentru orice indice $i\in\{3,4,\ldots,n-1\}$, relaţiile

$$\begin{aligned} \dot{c}(s) &= e_1(s) \\ c^{(2)}(s) &= F_1(s)e_2(s) \\ c^{(i)}(s) &= \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}(F_1(s),\ldots,F_{i-2}(s))e_k(s) + \\ &\quad + F_1(s)\ldots F_{i-1}(s)e_i(s), \end{aligned} \tag{4.16}$$

unde coeficienţii $h_{ik}(k<i)$ depind de funcţiile $F_1(s),\ldots,F_{i-2}(s)$ şi de derivatele acestor funcţii. Folosind relaţiile (4.16) se constată cu uşurinţă că curba c este în poziţie generală. Rezultă că c admite un unic reper Frenet.

Vom arăta că reperul Frenet asociat curbei c este $\{e_1,\ldots,e_n\}$

şi că curburile curbei c într-un punct oarecare $c(s)$ sînt $F_1(s),\dots,$ $,\dots,F_{n-1}(s)$. Pentru $n = 2$ sau $n = 3$ acest lucru rezultă imediat. Vom presupune $n \geqslant 4$. Fie $\{f_1,\dots,f_n\}$ reperul Frenet asociat curbei c şi fie $K_1(s),\dots,K_{n-1}(s)$ curburile curbei într-un punct oarecare $c(s)$. Folosind formulele lui Frenet, obţinem, pentru orice indice $i\in\{3,4,\dots,$ $,\dots,n-1\}$, relaţiile

$$\dot{c}(s) = f_1(s)$$

$$(4.17)\quad c^{(2)}(s) = K_1(s)f_2(s)$$

$$c^{(i)}(s) = \sum_{k=1}^{i-1} h_{ik}(K_1(s),\dots,K_{i-2}(s))f_k(s) + K_1(s)\dots K_{i-1}(s)f_i(s).$$

In relaţiile (4.17) h_{ik} sînt coeficienţii ce apar în relaţiile (4.16), unde $F_i(s)$ sînt înlocuiţi prin $K_i(s)$. Din primele două relaţii (4.16), (4.17) obţinem

$$(4.18)\qquad f_1 = e_1 \quad , \quad K_1 = F_1 \quad , \quad f_2 = e_2$$

Pentru $i = 3$, din (4.15) şi (4.17) rezultă, dacă ţinem seama de (4.18), relaţia

$$(4.18')\qquad F_2(s)e_3(s) = K_2(s)f_3(s)$$

Deoarece $F_2(s) > 0$, $K_2(s) > 0$, $(\forall)s\in I$ şi $\|e_3(s)\| = \|f_3(s)\| = 1$, din (4.26') obţinem

$$(4.19)\qquad K_2 = F_2 \quad , \quad f_3 = e_3$$

Continuăm în acest fel şi obţinem

$$K_{i-1} = F_{i-1} \ , \ f_i = e_i \ , \ (\forall)i\in\{1,\dots,n-1\}$$

Tinînd seama de aceste egalităţi rezultă

$$f_n(s) = f_1(s)\times\dots\times f_{n-1}(s) = e_1(s)\times\dots\times e_{n-1}(s) = e_n(s)$$

Din $f_n(s) = e_n(s)$ rezultă $\dot{f}_n(s) = \dot{e}_n(s)$ şi ţinînd seama de ultima formulă a lui Frenet şi de (4.13), unde $i = n$, obţinem

$$- K_{n-1}(s)f_{n-1}(s) = - F_{n-1}(s)e_{n-1}(s)$$

De aici rezultă $K_{n-1} = F_{n-1}$

Q.E.D.

4.10. <u>PROPOZIȚIE. Fie $c : I \longrightarrow E_n$ o curbă în poziție generală. Următoarele afirmații sînt echivalente:</u>

(i) <u>Ultima curbură a curbei c este nulă</u>

(ii) <u>Imaginea aplicației c este inclusă într-un hiperplan.</u>

<u>Demonstrație</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Presupunem că $c : I \longrightarrow E_m$, $s \to c(s) = (x^1(s),\dots,x^n(s))$, $\|\dot{c}(s)\| = 1$ $(\forall)s\in I$ este în poziție generală și fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ reperul Frenet asociat curbei. Din ultima formulă a lui Frenet

$$\dot{e}_n(s) = -K_{n-1}(s)e_{n-1}(s) \quad ,$$

obținem $\dot{e}_n(s) = 0$, $(\forall)s\in I$, deci $e_n(s) = w = (w_1,\dots,w_n)$(= vector unitar constant). Deoarece avem

$$\langle e_n(s), e_1(s)\rangle = 0 \quad , \quad e_1(s) = \dot{c}(s) \quad , \quad (\forall)s\in I \ ,$$

rezultă $\langle w, \dot{c}(s)\rangle = 0$, $(\forall)s\in I$. De aici, prin integrare găsim $\langle w, c(s)\rangle = d$, $(\forall)s\in I$, unde d este o constantă reală. Prin urmare avem

$$w_1x^1(s) +\dots+ w_nx^n(s) = d \quad , \quad (\forall)s\in I,$$

adică toate punctele curbei se găsesc într-un hiperplan.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dacă imaginea aplicației c se găsește într-un hiperplan, atunci acest hiperplan va fi tocmai hiperplanul osculator curbei în punctul $c(s)$, $(\forall)s\in I$. Rezultă că vectorul $e_n(s)$ este un vector constant, $(\forall)s\in I$, ceea ce implică $\dot{e}_n(s) = 0$, $(\forall)s\in I$ și folosind ultima formulă a lui Frenet obținem $K_{n-1}(s) = 0$, $(\forall)s\in I$.

4.11. <u>EXEMPLE</u>. 4.11.1. Ne propunem să determinăm <u>curbele din E_m care au curburile constante</u>.

Fie $c : I \longrightarrow E_m$ o curbă în poziție generală. Presupunem că curba este canonic parametrizată, deci $\|\dot{c}(s)\| = 1$, oricare ar fi $s\in I$. Avem formulele Frenet

$$e_1(s) = \dot{c}(s) \quad , \quad \dot{e}_i(s) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)e_j(s) \tag{4.2o}$$

unde

$$a_{ij}(s) + a_{ji}(s) = 0 \quad , \quad a_{ij}(s) = 0 \ \text{ dacă } \ j > i+1 \quad . \tag{4.21}$$

Curburile curbei c sînt:

$$K_i(s) = a_{i\,i+1}(s) \quad , \quad i = 1,\dots,n-1 \tag{4.22}$$

Presupunem în continuare că $K_i(s) = K_i$ = constant, oricare ar fi $i\in\{1,\dots,n-1\}$. Dacă notăm $e_i = (e_i^1,\dots,e_i^n)$, atunci din (4.2o) avem

$$\dot{e}_i^k(s) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(s)e_j^k(s) \quad , \quad k\in\{1,\dots,n\} \tag{4.23}$$

Dacă notăm $\phi = (e^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$, atunci (4.23) se scrie :

(4.24) $$\frac{d\phi(s)}{ds} = a\phi(s),$$

unde $a = (a_{ij})$ este o matrice constantă.

Alegem axele astfel încît pentru $s = 0$, versorii $e_i(0)$ să devină versorii axelor Ox^i, deci presupunem condiția inițială de forma

(4.25) $$\phi(0) = E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Soluția ecuației (4.24), (4.25) este

(4.26) $$\phi(s) = E + \frac{s}{1!} a + \frac{s^2}{2!} a^2 + \dots$$

Ca să determinăm curba va trebui să luăm prima linie din matricea ϕ. Va rezulta vectorul $e_1(s)$. Dar $e_1(s) = \dot{c}(s)$ și prin integrare obținem $c(s)$. Să facem calculul efectiv în cazul $n = 2$. Avem :

$$a = \begin{Vmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad a^2 = \begin{Vmatrix} -K_1^2 & 0 \\ 0 & -K_1^2 \end{Vmatrix}, \quad a^3 = \begin{Vmatrix} 0 & -K_1^3 \\ K_1^3 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$a^4 = \begin{Vmatrix} K_1^4 & 0 \\ 0 & K_1^4 \end{Vmatrix}, \dots$$

Matricea ϕ din (4.26) se scrie :

$$\phi = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \frac{s}{1!}\begin{Vmatrix} 0 & K_1 \\ -K_1 & 0 \end{Vmatrix} + \frac{s^2}{2!}\begin{Vmatrix} -K_1^2 & 0 \\ 0 & -K_1^2 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \frac{s^3}{3!}\begin{Vmatrix} 0 & -K_1^3 \\ K_1^3 & 0 \end{Vmatrix} + \frac{s^4}{4!}\begin{Vmatrix} K_1^4 & 0 \\ 0 & K_1^4 \end{Vmatrix} + \dots$$

sau

$$\phi = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{(sK_1)^2}{2!} + \frac{(sK_1)^4}{4!} - \frac{(sK_1)^6}{6!} + \dots & sK_1 - \frac{(sK_1)^3}{3!} + \frac{(sK_1)^5}{5!} - \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{Vmatrix}$$

sau

$$\phi = \begin{Vmatrix} \cos sK_1 & \sin sK_1 \\ \dots\dots & \dots\dots \end{Vmatrix}$$

Deoarece prima linie din matricea ϕ reprezintă componentele vectorului $e_1(s)$ avem

$$e_1(s) = (\cos sK_1, \sin sK_1).$$

Deoarece $e_1(s) = \dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, rezultă uşor $c(s) = (x(s), y(s))$ din ecuaţiile :

(4.27) $$\dot{x}(s) = \cos sK_1 \quad , \quad \dot{y}(s) = \sin sK_1$$

Presupunem $K_1 = 0$. Atunci din (4.27) rezultă

$$x(s) = s+a \ , \ y(s) = b \quad , \ a,b = \text{const.},$$

şi deci curba este o dreaptă şi anume dreapta $y = b$ (=constant).

Prin urmare, curbele plane care au curbura nulă sînt drepte .

Dacă $K_1 \neq 0$, atunci din (4.27) obţinem :

$$x(s) = \frac{1}{K_1} \sin sK_1 + a \ ,$$

$$y(s) = -\frac{1}{K_1} \cos sK_1 + b \ ,$$

unde a şi b sînt constante şi deci curba este un cerc şi anume cercul:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{1}{K_1^2}$$

Prin urmare curbele plane care au curbura constantă (nenulă) sînt cercuri .

4.11. 2. Am văzut că curba

$$c : \mathbb{R} \to E_4 ,$$

$$c(t) = (\cos t, \sin t, t, t)$$

este în poziţie generală şi că reperul Frenet $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ asociat curbei c este definit prin (a se vedea exemplul 3.5.2) :

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\sin t, \cos t, 1, 1)$$

$$e_2(t) = (-\cos t, -\sin t, 0, 0)$$

$$e_3(t) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2 \sin t, -2 \cos t, 1, 1)$$

$$e_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 0, -1, 1)$$

Ne propunem să calculăm curburile curbei c . Vom folosi formulele

$$K_i(t) = \frac{a_{i\ i+1}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \quad , \ i \in \{1,2,3\}$$

unde $a_{i\ i+1}(t) = \langle \dot{e}_i(t), e_{i+1}(t) \rangle$. Avem :

$$\dot{e}_1(t) = \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{3}} , \frac{-\sin t}{\sqrt{3}} , 0, 0 \right)$$

$$\dot{e}_2(t) = (\sin t, -\cos t, 0, 0)$$

$$\dot{e}_3(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{6}} \cos t, \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t, 0, 0 \right)$$

$$a_{12}(t) = \langle \dot{e}_1(t), e_2(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_{23}(t) = \langle \dot{e}_2(t), e_3(t) \rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$a_{34}(t) = \langle \dot{e}_3(t), e_4(t) \rangle = 0$$

Prin urmare, curburile curbei c sînt :

$$K_1(t) = \frac{1}{3}, \quad K_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad K_3(t) = 0$$

Deoarece $K_3(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$, rezultă că c este o curbă strîmbă.

§ 5. CURBE IN SPATIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL E_3. (CURBE STRIMBE)

5.1. Expresia curburii și torsiunii unei curbe strîmbe într-o parametrizare arbitrară.

PROPOZITIE. Considerăm o curbă în poziție generală

$$c : I \to E_3$$
$$t \to c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Fie $K_1(t)$ și $K_2(t)$ curburile curbei c într-un punct oarecare $c(t)$. Atunci avem formulele :

(5.1) $$K_1(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times c^{(2)}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3},$$

(5.2) $$K_2(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), c^{(2)}(t), c^{(3)}(t))}{\|\dot{c}(t) \times c^{(2)}(t)\|^2},$$

(5.1') $$K_1(t) = \frac{(A^2(t) + B^2(t) + C^2(t))^{1/2}}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t))^{3/2}},$$

(5.2') $$K_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}}{A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)},$$

unde am folosit notațiile :

$$A(t) = \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}, \quad B(t) = \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix},$$

$$C(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix}$$

<u>Demonstrație</u>. Notăm cu $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul mobil Frenet asociat curbei c. Avem formulele :

$$(5.4) \qquad e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

$$(5.5) \qquad \dot{e}_1(t) = a_{12}(t)\, e_2(t)$$

$$(5.6) \qquad \dot{e}_2(t) = -a_{12}(t)e_1(t) + a_{23}(t)e_3(t)$$

$$(5.7) \qquad \dot{e}_3(t) = -a_{23}(t)e_2(t)$$

Curburile curbei sînt date de :

$$(5.8) \qquad K_1(t) = \frac{a_{12}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

$$(5.9) \qquad K_2(t) = \frac{a_{23}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

Prima curbură , $K_1(t)$, se mai numește <u>curbura curbei c</u> , iar a doua curbură $K_2(t)$, se mai numește <u>torsiunea curbei c</u>. Să stabilim formulele (5.1) și (5.2). Din relația :

$$\dot{c}(t) = \|\dot{c}(t)\|\, e_1(t)$$

obținem :

$$c^{(2)}(t) = \|\dot{c}(t)\|' e_1(t) + \|\dot{c}(t)\|\, \dot{e}_1(t) = \|\dot{c}(t)\|' e_1(t) +$$

$$+ \|\dot{c}(t)\|\, a_{12}(t)\, e_2(t) = \|\dot{c}(t)\|' e_1(t) + \|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t) e_2(t)$$

Derivăm în continuare și avem :

$$e^{(3)}(t) = \|\dot{c}(t)\|'' e_1(t) + \|\dot{c}(t)\|' \dot{e}_1(t) + (\|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t))' e_2(t)$$
$$+ \|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t) \dot{e}_2(t)$$

i folosind relațiile (5.5), (5.6), (5.8) și (5.9) rezultă :

$$e^{(3)}(t) = [\|\dot{c}(t)\|'' - \|\dot{c}(t)\|^3 K_1^2(t)]\, e_1(t) +$$
$$+ [\|\dot{c}(t)\|' \|\dot{c}(t)\| K_1(t) + (\|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t))']\, e_2(t) +$$
$$+ \|\dot{c}(t)\|^3 K_1(t) K_2(t) e_3(t)$$

acem produsul vectorial al vectorilor $\dot{c}(t)$ și $e^{(2)}(t)$ și obținem

(5.10) $$\dot{c}(t) \times e^{(2)}(t) = \|\dot{c}(t)\|^3 K_1(t) e_3(t)$$

Din (5.10) rezultă :

(5.10') $$\|\dot{c}(t) \times e^{(2)}(t)\| = \|\dot{c}(t)\|^3 K_1(t) \quad ,$$

adică tocmai relația (5.1) .

Folosind (5.10) avem :

$$\langle \dot{c}(t) \times e^{(2)}(t),\ e^{(3)}(t) \rangle = \|\dot{c}(t)\|^6 K_1^2(t) K_2(t)$$

Din ultima egalitate și din (5.10') rezultă

$$\langle \dot{c}(t) \times e^{(2)}(t),\ e^{(3)}(t) \rangle = \|\dot{c}(t) \times e^{(2)}(t)\|^2 K_2(t) \ ,$$

adică tocmai formula (5.2)

Deoarece avem :

$$\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$
$$c^{(2)}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)),$$
$$e^{(3)}(t) = (\dddot{x}(t), \dddot{y}(t), \dddot{z}(t)) \ ,$$

rezultă :

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

$$\dot{c}(t) \times c^{(2)}(t) = (A(t), B(t), C(t))$$

$$\|\dot{c}(t) \times c^{(2)}(t)\| = (A^2(t) + B^2(t) + C^2(t))^{\frac{1}{2}}$$

Folosind ultimele egalităţi obţinem uşor formulele (5.1') şi (5.2').

<u>OBSERVATIE</u>. Fie $c : I \longrightarrow E_3$ o curbă parametrizată canonic, deci $\|\dot{c}(s)\| = 1$, $(\forall) s \in I$. Notăm $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul Frenet asociat curbei şi fie $K_1(s)$, $K_2(s)$ curburile curbei într-un punct $c(s)$. Formulele Frenet se scriu

$$\dot{e}_1(s) = K_1(s)e_2(s)$$

$$\dot{e}_2(s) = -K_1(s)e_1(s) + K_2(s)e_3(s)$$

$$\dot{e}_3(s) = -K_2(s)e_2(s)$$

sau, sub formă matriceală

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(s) \\ \dot{e}_2(s) \\ \dot{e}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & K_1(s) & 0 \\ -K_1(s) & 0 & K_2(s) \\ 0 & -K_2(s) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{pmatrix}$$

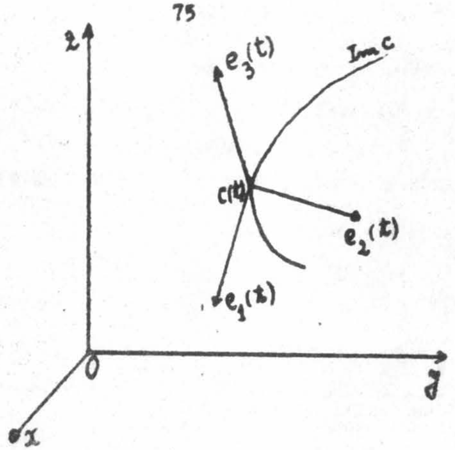
Deoarece avem $e_1(s) = \dot{c}(s)$, $(\forall) s \in I$, din prima formulă Frenet, obţinem

$$K_1(s) = \|\dot{e}_1(s)\| = \|\ddot{c}(s)\|$$

Folosind acum a treia formulă Frenet obţinem

$$|K_2(s)| = \|\dot{e}_3(s)\| = \frac{|\det(\dot{c}(s), c^{(2)}(s), c^{(3)}(s))|}{K_1^2(s)}$$

5.2. <u>Triedrul lui Frenet</u>. Fie $c : I \longrightarrow E_3$ o curbă în poziţie generală şi fie $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ reperul lui Frenet într-un punct $c(t)$ al curbei



Dreapta situată la intersecţia planului normal cu planul osculator curbei într-un punct c(t) se numeşte <u>normala principală</u>, iar dreapta perpendiculară pe planul osculator curbei în punctul c(t) se numeşte <u>binormala</u> la curbă în acel punct. Planul determinat de tangenta şi binormala la curbă într-un punct c(t) se numeşte <u>planul rectificant</u> al curbei. În definitiv, în fiecare punct c(t) al unei curbe strîmbe în poziţie generală putem să asociem un triedru tridreptunghic (numit <u>triedrul lui Frenet</u>) ale cărui muchii sînt tangenta, normala principală şi binormala şi ale cărui feţe sînt planul normal, planul osculator şi planul rectificant.

Fie $c : t \in I \to c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in E_3$ o curbă în poziţie generală. Obţinem fără dificultate ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului Frenet asociat curbei într-un punct $c(t) = (x(t),\ y(t),\ z(t))$ şi anume

- ecuaţiile tangentei:

$$\frac{x - x(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{y - y(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{z - z(t)}{\dot{z}(t)}$$

- ecuaţia planului normal:

$$\dot{x}(t)\left[x - x(t)\right] + \dot{y}(t)\left[y - y(t)\right] + \dot{z}(t)\left[z - z(t)\right] = 0,$$

- ecuaţia planului osculator:

$$A(t)\left[x - x(t)\right] + B(t)\left[y - y(t)\right] + C(t)\left[z - z(t)\right] = 0,$$

unde:

$$A(t) = \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}, \quad B(t) = \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) & \ddot{x}(t) \end{vmatrix},$$

$$C(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) \end{vmatrix},$$

- ecuaţiile binormalei :

$$\frac{x - x(t)}{A(t)} = \frac{y - y(t)}{B(t)} = \frac{z - z(t)}{C(t)},$$

- ecuaţiile normalei principale :

$$\frac{x - x(t)}{\ell(t)} = \frac{y - y(t)}{m(t)} = \frac{z - z(t)}{n(t)},$$

unde

$$\ell(t) = \begin{vmatrix} \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ B(t) & C(t) \end{vmatrix}, \quad m(t) = \begin{vmatrix} \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \\ C(t) & A(t) \end{vmatrix},$$

$$n(t) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ A(t) & B(t) \end{vmatrix},$$

- ecuaţia planului rectificant :

$$\ell(t)\,[x - x(t)] + m(t)\,[y - y(t)] + n(t)\,[z - z(t)] = 0$$

5.3. <u>EXEMPLE</u>. 5.3.1. Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_3$$

definită prin :

$$c(t) = (a \cos t,\ a \sin t,\ bt),$$

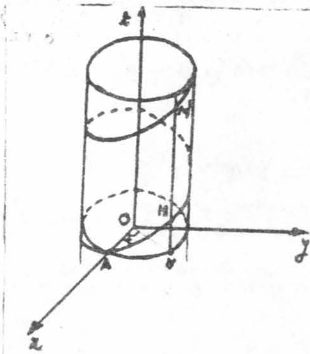
le a şi b sînt constante , $a>0$, $b\neq 0$. Ne propunem următoarele:

i) să arătăm că curba îndeplineşte condiţia de existenţă reperului Frenet ,

să scriem ecuaţiile muchiilor şi feţelor triedrului Frenet ataşat rbei într-un punct oarecare $c(t)$,

iii) să calculăm curbura şi tosiunea curbei .

Mai întîi vom arăta cum se obţine imaginea aplicaţiei c. considerăm un cilindru circular drept. Fie M un punct situat pe prafaţa cilindrică de rotaţie nsiderată. Presupunem că punctul are o mişcare compusă dintr-o rotţie în jurul axei cilindrului şi translaţie de-a lungul acestei e, cele două mişcări fiind proporţionale. Curba c a cărei imane este descrisă de punctul M numeşte elice circulară. Presu-



nem că mobilul pleacă din punctul $A(a,0,0)$. Fie $M(x,y,z)$ un nct oarecare al elicei circulare şi fie $N(x,y,0)$ proiecţia punctui M pe planul xOy . Dacă notăm cu $t = \widehat{AON}$, găsim ecuaţiile paratrice ale elicei circulare :

$$x = a\cos t,\quad y = a\sin t\ ,\quad z = bt\ ,$$

de z reprezintă translaţia, t rotaţia, iar b = const. Este uşor văzut că elicea circulară întîlneşte fiecare generatoare a suprațţei cilindrice de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = a^2\ ,$$

tr-o infinitate de puncte. Distanţa dintre două puncte consecutive şi M' ale elicei, situate pe aceeaşi generatoare este constantă şi numeşte pasul elicei. Se constată uşor că pasul elicei este $2\pi b$ = constant.

i) Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem :

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$c^{(2)}(t) = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

şi se constată cu uşurinţă că vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\dot{c}^{(2)}(t)$ sînt liniar independenţi oricare ar fi $t \in I$, deci curba c este în poziţie generală.

ii) Ecuaţiile tangentei la curba c într-un punct oarecare $c(t)$ sînt :

$$\frac{x - a \cos t}{a \sin t} = \frac{y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{z - bt}{b},$$

iar ecuaţia planului normal este :

$$-a(x - a \cos t)\sin t + a(y-a \sin t)\cos t + b(z-bt) = 0$$

Fie $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ parametrii directori ai binormalei. Avem :

$$A(t) = ab \sin t \quad , \quad B(t) = -ab \cos t \quad ,$$

$$C(t) = a^2$$

Rezultă că ecuaţiile binormalei sînt :

$$\frac{x - a \cos t}{b \sin t} = \frac{y - a \sin t}{-b \cos t} = \frac{z - bt}{a},$$

iar ecuaţia planului osculator este :

$$b(x-a \cos t)\sin t - b(y - a \sin t)\cos t + a(z-bt) = 0$$

Fie $\ell(t)$, $m(t)$, $n(t)$ parametrii directori ai normalei principale. Avem :

$$\ell(t) = (a^2+b^2)\cos t \quad , \quad m(t) = (a^2+b^2)\sin t, \quad n(t) = 0$$

$$(\forall) t \in \mathbb{R}.$$

ezultă că ecuațiile normalei principale sînt

$$\frac{x - a\cos t}{\cos t} = \frac{y - a\sin t}{\sin t} = \frac{z - bt}{0},$$

ar ecuația planului rectificant este :

$$(x - a\cos t)\cos t + (y - a\sin t)\sin t = 0$$

iii) Fie $K_1(t)$, resp. $K_2(t)$ curbura, resp. torsiunea curbei n punctul $c(t)$. Vom utiliza formulele stabilite în propoziția 5.1. entru orice $t \in \mathbb{R}$ avem :

$$K_1(t) = \frac{[A(t)^2 + B(t)^2 + C(t)^2]^{1/2}}{[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)]^{3/2}} = \frac{a}{a^2 + b^2} = \text{const.}$$

$$K_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}}{A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)} = \frac{b}{a^2 + b^2} = \text{const.}$$

5.3.2. Considerăm curba

$$c : (0, +\infty) \longrightarrow E_3$$

efinită prin :

$$c(t) = (2t, \ln t, t^2)$$

e propunem următoarele :

i) să arătăm că imaginea aplicației c se află pe un cilindru ,

ii) să arătăm că curba c este în poziție generală ,

iii) să scriem reperul Frenet și să calculăm curbura și toriunea curbei într-un punct oarecare $c(t)$.

i) Un punct oarecare de pe imaginea aplicației c are coorонatele $x = 2t$, $y = \ln t$, $z = t^2$, ceea ce ne arată că imaginea aplicației c se află pe un cilindru parabolic cu generatoare paralele u axa ordonatelor și avînd curba directoare:

$$x^2 = 4z \quad , \quad y = 0 .$$

ii) Avem $\dot{c}(t) = (2, \frac{1}{t}, 2t)$

$$c^{(2)}(t) = (0, -\frac{1}{t^2}, 0) \quad ,$$

şi este uşor de văzut că vectorii $\dot{c}(t)$ şi $c^{(2)}(t)$ sînt liniar independenţi pentru orice $t \in (0, +\infty)$. Prin urmare curba c este în poziţie generală.

iii) Fie $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ reperul mobil Frenet şi $K_1(t), K_2(t)$ curburile curbei într-un punct oarecare $c(t) = (2t, \ln t, t$ al curbei.

Avem $\|\dot{c}(t)\| = \frac{1}{t}(1 + 2t^2)$. Rezultă :

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{1}{1+2t^2}(2t, 1, 2t^2)$$

De aici obţinem :

$$\dot{e}_1(t) = \frac{2}{(1+2t^2)^2}(1-2t^2, -2t, 2t)$$

Din prima formulă Frenet

$$\dot{e}_1(t) = a_{12}(t)e_2(t)$$

rezultă :

$$a_{12}(t) = \|\dot{e}_1(t)\| = \frac{2}{1 + 2t^2}$$

şi deci curbura curbei este

$$K_1(t) = \frac{a_{12}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{2t}{(1+ 2t^2)^2}$$

Folosind formulele de mai sus, rezultă

$$e_2(t) = \frac{1}{1 + 2t^2}(1 - 2t^2, -2t, 2t)$$

In continuare avem :

$$e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t) = \frac{1}{1+2t^2}(2t,\ -2t^2,\ -1)$$

De aici obținem

$$\dot{e}_3(t) = \frac{2}{(1+2t^2)^2}(1-2t^2, -2t, 2t)$$

Folosind formula a treia a lui Frenet

$$\dot{e}_3(t) = -a_{23}(t)\, e_2(t) \quad ,$$

obținem :

$$a_{23}(t) = \frac{-2}{1+2t^2}$$

Rezultă că torsiunea curbei c este

$$K_2(t) = \frac{a_{23}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{-2t}{(1+2t^2)^2}$$

5.4. TEOREMA (Lancret). Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziție generală și fie $K_1(t)$ și $K_2(t)$ curburile curbei într-un punct oarecare $c(t)$. Presupunem că

$$K_2(t) \neq 0 \quad , (\forall)\ t \in I$$

Următoarele afirmații sînt echivalente :

(i) tangenta în fiecare punct al curbei formează un unghi constant cu o direcție fixă,

(ii) normala principală în fiecare punct al curbei este perpendiculară pe o direcție fixă,

(iii) binormala în orice punct al curbei formează un unghi constant cu o direcție fixă,

(iv) curbura și torsiunea curbei diferă printr-un factor constant.

<u>Demonstrație.</u> Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul mobil Frenet. Scriem formulele lui Frenet :

$$\dot{e}_1(t) = a_{12}(t)\, e_2(t) \,,$$

$$\dot{e}_2(t) = -a_{12}(t)\, e_1(t) + a_{23}(t)\, e_3(t) \,,$$

$$\dot{e}_3(t) = -a_{23}(t)\, e_2(t)$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Prin ipoteză există o direcție fixă dată de un versor d cu care tangenta în fiecare punct al curbei formează un unghi constant u, deci avem :

(5.11) $\qquad \langle e_1(t), d \rangle = \cos u \quad , (\forall)\ t \in I$

Derivînd (5.11) obținem $\langle \dot{e}_1(t), d \rangle = 0$ și folosind prima formulă Frenet rezultă

(5.12) $\qquad \langle a_{12}(t)\, e_2(t), d \rangle = 0 \quad , (\forall)\ t \in I,$

unde

(5.12') $\qquad a_{12}(t) = \| \dot{c}(t) \|\, K_1(t)$

Curba fiind regulată avem $\| \dot{c}(t) \| \neq 0$, $(\forall)\ t \in I$. Deoarece $K_1(t) > 0$, $(\forall)\ t \in I$, din (5.12) și (5.12') rezultă $\langle e_2(t), d \rangle = 0$, oricare ar fi $t \in I$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) , Din relația

$$\langle e_2(t), d \rangle = 0 \quad , (\forall)\ t \in I,$$

rezultă

$$\langle a_{12}(t)\, e_2(t), d \rangle = 0$$

sau

$$\langle \dot{e}_1(t), d \rangle = 0$$

Integrînd ultima relație obținem $\langle e_1(t),d\rangle = \cos u$, unde $u = \text{const.}$

(ii) $\longrightarrow$ (iii) Din relația $\langle e_2(t),d\rangle = 0$, rezultă :

$$\langle \|\dot{e}(t)\| K_2(t)e_2(t),d\rangle = 0 \tag{5.13}$$

sau, dacă folosim formula a treia a lui Frenet, rezultă $\langle \dot{e}_3(t),d\rangle = 0$ și prin integrare obținem

$$\langle e_3(t),d\rangle = \cos v, \quad (\forall)t\in I,$$

adică binormala în fiecare punct al curbei formează un unghi constant v cu o direcție fixă d.

(iii) $\longrightarrow$ (ii) Din (5.13) rezultă

$$\langle \dot{e}_3(t),d\rangle = 0 \quad , (\forall)\ t\in I$$

și ținînd seama de formula a treia a lui Frenet, obținem :

$$\langle -a_{23}(t)\ e_2(t),d\rangle = 0$$

sau

$$\|\dot{e}(t)\|\ K_2(t)\langle e_2(t),d\rangle = 0$$

și deoarece $K_2(t) \neq 0$, oricare ar fi $t\in I$, obținem $\langle e_2(t),d\rangle = 0$, oricare ar fi $t\in I$, adică (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iv) Prin ipoteză avem :

$$\langle e_2(t), d\rangle = 0 \quad , (\forall)\ t\in I$$

Aceasta implică

$$\langle e_1(t),d\rangle = \cos u \quad \text{și} \ \langle e_3(t),d\rangle = \cos v,$$

unde u și v sînt unghiuri constante. Derivînd relația $\langle e_2(t),d\rangle = 0$ și folosind formula a doua a lui Frenet, rezultă :

$$\langle -a_{12}(t)\ e_1(t) + a_{23}(t)\ e_3(t), d\rangle = 0$$

sau, dacă împărțim cu $\|\dot{e}(t)\|$ obținem :

$$(5.14) \qquad -K_1(t)\cos u + K_2(t)\cos v = 0 \quad , (\forall)\, t\in I$$

Deoarece $\cos u$ şi $\cos v$ nu pot fi simultan nule, din (5.14) obţinem (iv).

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Prin ipoteză avem :

$$K_1(t) = k\, K_2(t) \quad , (\forall)t\in I \quad , \quad k = \text{const.} \quad ,$$

sau

$$(5.15) \qquad a_{12}(t) = k a_{23}(t) \quad , (\forall)t\in I.$$

Dacă adunăm prima formulă Frenet cu a treia formulă Frenet înmulţită cu k şi ţinem seama de (5.15) , obţinem

$$(5.16) \qquad \dot{e}_1(t) + k\dot{e}_3(t) = 0 \quad , \quad (\forall)t\in I.$$

Prin integrare, din (5.16) rezultă

$$(5.17) \qquad e_1(t) + k e_3(t) = D \quad , \quad (\forall)t\in I,$$

unde D este un vector constant. Inmulţind scalar relaţia (5.17) cu $e_2(t)$, obţinem

$$\langle e_2(t), D\rangle = 0 \quad , (\forall)t\in I,$$

adică normala principală în orice punct al curbei este perpendiculară pe o direcţie fixă.

5.5. Elice în spaţiul E_3.

DEFINIŢIE. Se numeşte elice curba strîmbă ale cărei tangente fac un unghi constant cu o direcţie fixă.

OBSERVAŢIE. 5.5.1. Folosind teorema lui Lancret se observă cu uşurinţă că curba considerată la 5.3.2 este o elice.

5.5.2. La elicea circulară curba şi torsiunea sînt constant pe cînd la o elice raportul între torsiune şi curbură este constant.

EXEMPLU. Considerăm curba

$$c : t\in\mathbb{R} \longrightarrow c(t) = (t, t^2, \tfrac{2}{3}t^3) \in E_3$$

Ne propunem următoarele :

i) să arătăm că c este în poziţie generală,

ii) să scriem reperul mobil Frenet şi să calculăm curbura şi torsiunea curbei ,

iii) dacă curba c este elice să determinăm direcţia fixă cu care tangenta în fiecare punct al curbei formează un unghi constant.

i) $\dot{c}(t) = (1, 2t, 2t^2)$, $\ddot{c}(t) = (0, 2, 4t)$. Fie două numere reale a, b astfel încît $a\dot{c}(t) + b\ddot{c}(t) = 0$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$. Rezultă $a = b = 0$, deci vectorii $\dot{c}(t)$ şi $\ddot{c}(t)$ sînt liniar independenţi oricare ar fi $t\in\mathbb{R}$. Prin urmare curba considerată este în poziţie generală.

ii) Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul mobil Frenet. Deoarece $\|\dot{c}(t)\| = 2t^2+1$, rezultă

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \left(\frac{1}{2t^2+1}, \frac{2t}{2t^2+1}, \frac{2t^2}{2t^2+1} \right).$$

De aici obţinem

$$\dot{e}_1(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2}(-2t, 1-2t^2, 2t)$$

şi folosind prima formulă Frenet

$$\dot{e}_1(t) = a_{12}(t)e_2(t) ,$$

rezultă

$$a_{12}(t) = \frac{2}{1+2t^2}.$$

Obţinem curbura curbei

$$K_1(t) = \frac{a_{12}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

Folosind din nou prima formulă Frenet, obţinem :

$$e_2(t) = \frac{1}{2t^2+1}(-2t, 1-2t^2, 2t)$$

In continuare obţinem :

$$e_3(t) = e_1(t) \times e_2(t) = \frac{1}{2t^2+1}(2t^2, -2t, 1)$$

De aici rezultă :

$$\dot{e}_3(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2}(2t,\ 2t^2-1, -2t)$$

şi folosind formula a treia a lui Frenet

$$\dot{e}_3(t) = -a_{23}(t)\, e_2(t),$$

obţinem

$$a_{23}(t) = \frac{2}{2t^2+1}.$$

Rezultă că torsiunea curbei c este

$$K_2(t) = \frac{a_{23}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

iii) Deoarece avem :

$$K_1(t) = K_2(t) = \frac{2}{(2t^2+1)^2}$$

rezultă că curba dată este elice. Conform teoremei 5.4. există o direcţie fixă cu care tangenta în fiecare punct al curbei formează un unghi constant. Dacă direcţia fixă este dată de un versor $d = (d^1, d^2, d^3)$ şi dacă notăm

$e_1 = (e_1^1, e_1^2, e_1^3)$, atunci avem

$$e_1^1(t)d^1 + e_1^2(t)d^2 + e_1^3(t)d^3 = k \ , \ (\forall)\ t \in \mathbb{R} \ ,$$

unde $k = \text{const.}$, $k \in [-1,1]$. Rezultă

$$2t^2(d^3-k) + 2td^2 + d^1 - k = 0 \ , \ (\forall)\ t \in \mathbb{R}$$

De aici obținem $d^1 = d^3 = k$, $d^2 = 0$, unde $(d^1)^2 + (d^2)^2 + (d^3)^2 = 1$.
Rezultă $d = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5.6. Curbe cu torsiunea nulă.

PROPOZITIE. *Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziție generală. Următoarele afirmații sînt echivalente:*

(i) *torsiunea curbei este nulă în orice punct,*

(ii) *imaginea aplicației c se găsește într-un plan,*

(iii) *versorul binormalei este constant.*

Demonstrație. Presupunem că curba c este parametrizată canonic, deci $\| \dot{c}(s) \| = 1$, $(\forall)\ s \in I$.

Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul lui Frenet asociat curbei. Formulele lui Frenet se scriu:

(F.1) $$\dot{e}_1(s) = K_1(s)\, e_2(s)$$

(F.2) $$\dot{e}_2(s) = -K_1(s)e_1(s) + K_2(s)e_3(s)$$

(F.3) $$\dot{e}_3(s) = -K_2(s)e_2(s)$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Deoarece $K_2(s) = 0$, $(\forall)\ s \in I$, din formula (F.3) rezultă $\dot{e}_3(s) = 0$, ceea ce ne arată că $e_3(s) = e_3(s_0)$ = vector constant, $(\forall)\ s \in I$.

Deoarece avem

$$\langle e_1(s), e_3(s) \rangle = 0 \quad , (\forall)\ s \in I ,$$

rezultă

$$\langle \dot{c}(s) , e_3(s_0) \rangle = 0$$

Prin integrare, rezultă

$$\langle c(s) , e_3(s_0) \rangle = k \quad , (\forall)\ s \in I ,$$

unde $k = \langle c(s_o), e_3(s_o)\rangle$ este o constantă reală. Am obţinut

$$\langle c(s) - c(s_o) , e_3(s_o)\rangle = 0 , (\forall)s\in I$$

sau

$$[x(s) - x(s_o)] A(s_o) + [y(s)-y(s_o)] B(s_o) + [z(s) - z(s_o)] C(s_o) = 0,$$

ceea ce ne arată că toate punctele curbei sînt conţinute în planul osculator curbei în punctul

$$c(s_o) = (x(s_o), y(s_o), z(s_o)) .$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Dacă imaginea aplicaţiei c se găseşte într-un plan, atunci acest plan va fi planul osculator curbei în punctul c(s), $(\forall)s\in I$. Rezultă că $e_3(s)$ este un vector constant $(\forall)s\in I$. Aceasta implică $\dot{e}_3(s) = 0$, $(\forall)s\in I$ şi folosind formula (F.3) obţinem $K_2(s) = 0$, $(\forall)s\in I$.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Din a treia formulă a lui Frenet

$$\dot{e}_3(s) = - K_2(s)e_2(s) ,$$

obţinem că torsiunea curbei c este nulă în orice punct dacă şi numai dacă

$$\dot{e}_3(s) = 0 \quad , \quad (\forall)s\in I ,$$

deci dacă şi numai dacă $e_3(s) = e_3^o$ (= vector constant).

<u>Exemplu</u>. Ne propunem să demonstrăm că curba

$$c : R \longrightarrow E_3 , \; c(t) = (1 + 3t + 2t^2, 2 - 2t + 5t^2, 1 - t^2)$$

este plană şi apoi să găsim ecuaţia planului ei.

Avem:

$$\dot{c}(t) = (3 + 4t, - 2 + 10t, - 2t)$$

$$\ddot{c}(t) = (4, 10, - 2)$$

$$\dddot{c}(t) = (0, 0, 0) .$$

Deoarece $\dddot{c}(t) = 0 = (0, 0, 0)$, $(\forall)t\in I$, rezultă că curba c are torsiunea nulă şi deci, conform propoziţiei anterioare imaginea aplicaţiei c se află într-un plan, deci c este o curbă plană.

Pentru a demonstra direct că curba dată este o curbă plană şi a determina o dată cu aceasta ecuaţia planului în care se găseşte imaginea aplicaţiei c se procedează în felul următor: se scrie ecuaţia planului osculator într-un punct oarecare c(t) al curbei şi apoi se va observa că această ecuaţie nu depinde de parametrul t.

In cazul exemplului nostru, ecuaţia planului osculator curbei ntr-un punct oarecare c(t) este

$$2x + 3y + 19z - 27 = 0 \qquad (z)$$

eoarece această ecuaţie nu depinde de parametrul t, rezultă că c este urbă plană, imaginea aplicaţiei c fiind inclusă în planul de ecuaţie (z).

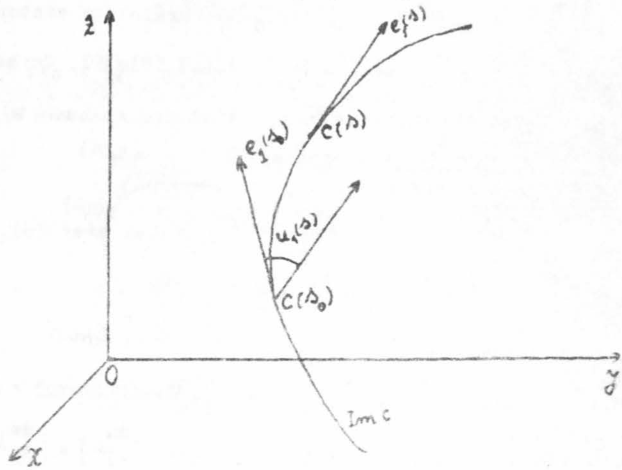
5.7. Interpretarea geometrică a curburii unei curbe strîmbe. ndicatoarea sferică a tangentelor.

5.7.1. PROPOZITIE. Fie $c : I \longmapsto E_3$ o curbă în poziţie generală. resupunem că curba c este canonic parametrizată. Fixăm un punct $c(s_0)$ l curbei c şi fie c(s) un punct al curbei c în vecinătatea punctului (s_0). Notăm cu $u_1(s)$ unghiul format de tangentele la curbă în $c(s_0)$ i c(s). Atunci

$$\lim_{s \to s_0} \frac{u_1(s)}{|s - s_0|} = K_1(s_0)$$

Demonstratie. Fie $e_1(s_0)$, resp. $e_1(s)$ versorul tangentei în (s_0), resp. c(s). Avem:

$$\sin u_1(s) = \| e_1(s_0) \times e_1(s) \| \qquad (5.18)$$



Desvoltăm în serie vectorul $e_1(s)$ în jurul punctului s_o. Avem

$$(5.19)\qquad e_1(s) = e_1(s_o) + \frac{s - s_o}{1!}\left[\dot{e}_1(s_o) + v_1(s)\right],$$

unde $v_1(s)$ este un vector ce tinde la zero dacă $s \to s_o$.

Fie $e_2(s_o)$, resp. $e_3(s_o)$ versorul normalei principale, resp. al binormalei în punctul $c(s_o)$. Din prima formulă Frenet avem

$$\dot{e}_1(s_o) = K_1(s_o)e_2(s_o)$$

şi înlocuind în (5.19) obţinem

$$(5.19')\qquad e_1(s) = e_1(s_o) + \frac{s - s_o}{1!}\left[K_1(s_o)\, e_2(s_o) + v_1(s)\right]$$

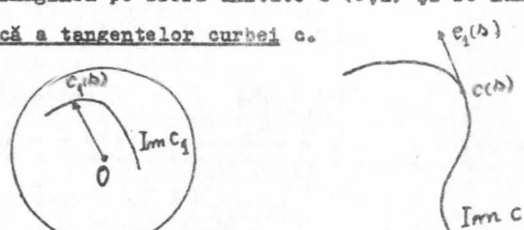
Din (5.18) şi (5.19') rezultă

$$(5.20)\qquad \sin u_1(s) = |s - s_o| \cdot \| K_1(s_o)\, e_3(s_o) + e_1(s_o) \times v_1(s) \|$$

Ţinînd seama de (5.2o) rezultă:

$$\lim_{s \to s_o} \frac{u_1(s)}{|s - s_o|} = \lim_{s \to s_o} \frac{u_1(s)}{\sin u_1(s)}\,\frac{\sin u_1(s)}{|s - s_o|} = K_1(s_o)$$

5.7.2. <u>Indicatoarea sferică a tangentelor</u>. Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziţie generală. Presupunem că c este canonic parametrizată. Fie $e_1(s)$ versorul tangentei la curba c într-un punct oarecare $c(s)$. Printr-un punct fix, de exemplu prin originea O a axelor de coordonate, ducem un vector unitar $(O, e_1(s)) = e_1(s) \in T_O E_3$ paralel cu vectorul $(c(s), e_1(s)) = e_1(s) \in T_{c(s)} E_3$, deci $c_1(s) = e_1(s)$ $(\forall) s \in I$. Curba $c_1 : I \to E_3$ are imaginea pe sfera unitate $\mathcal{S}(0,1)$ şi se numeşte <u>indicatoarea sferică a tangentelor curbei</u> c.



Fie s_1 parametrul canonic pe curba $c_1 : I \to E_3$. Avem:

$$K_1(s) = \|\ddot{c}(s)\| = \|\dot{e}_1(s)\| = \|\dot{c}_1(s)\| = \|\dot{c}_1(s_1)\,\frac{ds_1}{ds}\| = \left|\frac{ds_1}{ds}\right|$$

Am obţinut următoarea

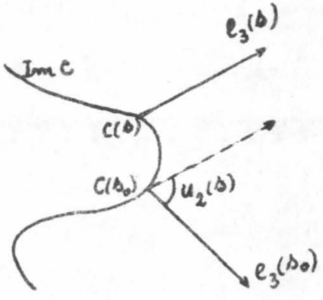
PROPOZITIE. Curbura unei curbe c este egală cu valoarea absolută a derivatei arcului indicatoarei sferice a tangentelor în raport cu arcul curbei c.

5.8. Interpretarea geometrică a torsiunii unei curbe strîmbe. Indicatoarea sferică a binormalelor.

5.8.1. PROPOZITIE. Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziţie generală. Presupunem că c este parametrizată canonic. Fixăm un punct $c(s_o)$ al curbei si fie $c(s)$ un punct al curbei c în vecinătatea punctului $c(s_o)$. Notăm cu $u_2(s)$ unghiul format de binormalele la curba dată în punctele $c(s_o)$ şi $c(s)$. Atunci:

$$\lim_{s \to s_o} \frac{u_2(s)}{|s - s_o|} = |K_2(s_o)|$$

Demonstratie.



Fie $e_3(s)$ versorul binormalei în punctul $c(s)$. Dezvoltăm vectorul $e_3(s)$ în serie Taylor în jurul punctului s_o. Avem

$$e_3(s) = e_3(s_o) + \frac{s - s_o}{1!}\left[\dot{e}_3(s_o) + v_2(s)\right],$$

unde $v_2(s)$ este un vector ce tinde la zero dacă $s \to s_o$. Avem:

$$\sin u_2(s) = \| e_3(s_o) \times e_3(s) \| =$$

$$= |s - s_o| \cdot \| e_3(s_o) \times \dot{e}_3(s_o) + e_3(s_o) \times v_2(s) \|$$

Folosind formula a treia a lui Frenet

$$\dot{e}_3(s_o) = - K_2(s_o)\, e_2(s_o) \quad ,$$

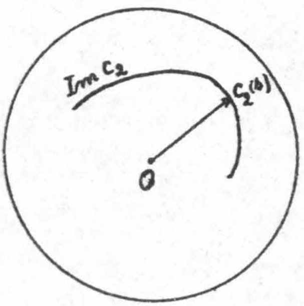
obţinem

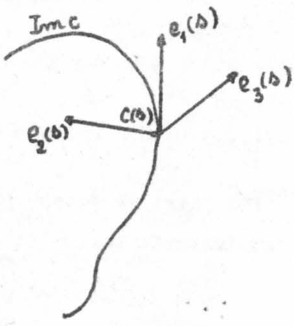
$$\sin u_2(s) = |s-s_0| \cdot \| K_2(s_0) e_1(s_0) + e_3(s_0) \times v_2(s) \| ,$$

unde am folosit egalitatea $e_1(s_0) = e_2(s_0) \times e_3(s_0)$. Rezultă:

$$\lim_{s \to s_0} \frac{u_2(s)}{|s - s_0|} = \lim_{s \to s_0} \frac{u_2(s)}{\sin u_2(s)} \, \frac{\sin u_2(s)}{|s - s_0|} = |K_2(s_0)|$$

5.8.2. <u>Indicatoarea sferică a binormalelor</u>. Fie $c : I \longrightarrow E_3$ o curbă în poziţie generală. Presupunem că curba c este canonic parametrizată. Fie $e_3(s)$ versorul binormalei la curba dată într-un punct $c(s)$. Printr-un punct fix, de exemplu prin originea O a axelor de coordonate ducem un vector unitar $(0, c_2(s)) = c_2(s) \in T_0 E_3$ paralel cu vectorul $(c(s), e_3(s)) = e_3(s) \in T_{c(s)} E_3$, deci $c_2(s) = e_3(s)$, $(\forall) s \in I$. Curba $c_2 : I \longrightarrow E_3$ are imaginea pe sfera unitate $\mathcal{S}(0,1)$ şi se numeşte <u>indicatoarea sferică a binormalelor curbei c</u>.





Considerînd ca parametru pe indicatoare arcul s al curbei c şi notînd cu s_1 arcul indicatoarei, avem:

$$|K_2(s)| = \| \dot{e}_3(s) \| = \| \dot{c}_2(s) \| = \| \dot{c}_2(s_1) \frac{ds_1}{ds} \| = \left| \frac{ds_1}{ds} \right|$$

Am obţinut următoarea

PROPOZITIE. Valoarea absolută a torsiunii unei curbe este egală cu valoarea absolută a derivatei arcului indicatoarei sferice a binormalelor în raport cu arcul curbei.

5.9. Cerc și sferă osculatoare la o curbă strîmbă.

5.9.1 DEFINITIE. Considerăm o curbă în poziție generală $c : I \to \mathcal{E}_3$ și fie M_0 un punct al curbei. Cercul din planul osculator la curbă în M_0 care întîlnește imaginea aplicației c în trei puncte confundate în acest punct se numește cercul osculator curbei în punctul M_0.

PROPOZITIE. Considerăm o curbă în poziție generală
$c : s \in I \to c(s) \in \mathcal{E}_3$, $\|c(s)\| = 1$, $(\forall)\ s \in I$
și fie $c(s_0) = M_0$ un punct al curbei.

Centrul cercului osculator curbei în punctul M_0 este situat pe normala principală la curbă în acest punct, iar raza cercului osculator este egală cu $\dfrac{1}{K_1(s_0)}$, unde $K_1(s_0)$ este curbura curbei c în punctul M_0.

Demonstrație. Considerăm un cerc care trece printr-un punct $M = c(s)$ al curbei și care este tangent la tangenta la curba dată în punctul $M_0 = c(s_0)$. Cînd $s \to s_0$, acest cerc tinde către cercul osculator la curbă în punctul M_0. Rezultă că centrul cercului osculator se află pe normala principală la curba dată în punctul M_0.

Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul Frenet asociat curbei

$$s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s))$$

Notăm cu r, resp. (a,b,c) raza și respectiv coordonatele centrului cercului osculator curbei în punctul $M_0 = c(s_0) = (x_0, y_0, z_0)$,

$$x(s_0) = x_0 \ , \ y(s_0) = y_0 \ \text{ și } \ z(s_0) = z_0 \ .$$

Deoarece centrul cercului osculator se află pe normala principală la curbă în punctul M_0, rezultă:

$$a = x_0 + re_2^1(s_0), \quad b = y_0 + re_2^2(s_0), \quad c = z_0 + re_2^3(s_0),$$

unde

$$e_2(s_0) = (e_2^1(s_0), e_2^2(s_0), e_2^3(s_0))$$

Ecuaţia sferei care intersectează planul osculator în M_0 după cercul osculator în M_0 este

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

sau

$$(x-x_0-re_2^1(s_0))^2 + (y-y_0-re_2^2(s_0))^2 + + (z-z_0-re_2^3(s_0))^2 = 0$$

Punctele de intersecţie ale cercului de ecuaţie

$$\begin{cases} (x-x_0-re_2^1(s_0))^2+(y-y_0-re_2^2(s_0))^2+(z-z_0-re_2^3(s_0))^2 = r^2, \\ (x-x(s_0))\, e_3^1(s_0) + (y-y(s_0))\, e_3^2(s_0)+(z-z_0)e_3^3(s_0) = 0 \end{cases}$$

cu imaginea aplicaţiei $s \to c(s) = (x(s), y(s), z(s))$ au ca abscise curbilinii rădăcinile ecuaţiei

$$(x(s)-x_0-re_2^1(s_0))^2 + (y(s)-y_0-re_2^2(s_0))^2 + + (z(s)-z_0-re_2^3(s_0))^2 - r^2 = 0 \tag{5.21}$$

Dezvoltînd funcţiile $x(s), y(s), z(s)$ în serie Taylor în jurul punctului s_0, obţinem

$$x(s) = x(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{x}(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{x}(s_0) + \dots$$

(5.22)
$$y(s) = y(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{y}(s_0) + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{y}(s_0) + \dots$$

$$z(s) = z(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{z}(s_0) + \frac{(s-s_0)}{2!}\ddot{z}(s_0) + \dots ,$$

Dacă notăm $\dot{x}(s_0) = \dot{x}_0$, $\dot{y}(s_0) = \dot{y}_0$, $\dot{z}(s_0) = \dot{z}_0$, $\ddot{x}(s_0) = \ddot{x}_0$, $\ddot{y}(s_0) = \ddot{y}_0$, $\ddot{z}(s_0) = \ddot{z}_0$, atunci din (5.21) şi (5.22) rezultă

$$\left[-re_2^1(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{x}_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{x}_0 + \dots\right]^2 +$$
$$+\left[-re_2^2(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{y}_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{y}_0 + \dots\right]^2 +$$
$$+\left[-re_2^3(s_0) + \frac{s-s_0}{1!}\dot{z}_0 + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{z}_0 + \dots\right]^2 = r^2$$

sau

(5.21')
$$r^2\left[(e_2^1(s_0))^2 + (e_2^2(s_0))^2 + (e_2^3(s_0))^2\right] -$$
$$- 2r\frac{s-s_0}{1!}\left[\dot{x}_0 e_2^1(s_0) + \dot{y}_0 e_2^2(s_0))^2 + \dot{z}_0 e_2^3(s_0)\right] +$$
$$+ \frac{(s-s_0)^2}{1!}\left[\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 - r(\ddot{x}_0 e_2^1(s_0) + \ddot{y}_0 e_2^2(s_0) + \right.$$
$$\left. + \ddot{z}_0 e_2^3(s_0))\right] + \dots = r^2$$

Deoarece avem

$$\|e_1(s_0)\| = \|e_2(s_0)\| = 1 \quad , \quad e_1(s_0) = \dot{c}(s_0) = (\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) ,$$

rezultă

$$(e_2^1(s_0))^2 + (e_2^2(s_0))^2 + (e_2^3(s_0))^2 = 1 ,$$
$$\dot{x}_0 e_2^1(s_0) + \dot{y}_0 e_2^2(s_0) + \dot{z}_0 e_2^3(s_0) = 0 ,$$
$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = 1$$

Ţinînd seama de ultimele trei egalităţi ecuaţia (5.21') se scrie

$$(s-s_o)^2\left[1-r(\ddot{x}_o e_2^1(s_o) + \ddot{y}_o e_2^2(s_o) + \ddot{z}_o e_2^3(s_o))\right]+\ldots = 0\ ,$$

termenii nescrişi fiind de grad mai mare sau egal cu trei în $s-s_o$.

Cercul are trei puncte confundate cu imaginea aplicaţiei c în M_o , dacă avem

$$1 - r(\ddot{x}_o e_2^1(s_o) + \ddot{y}_o e_2^2(s_o) + \ddot{z}_o e_2^3(s_o)) = 0$$

sau

$$1 - r\langle \dot{e}_1(s_o)\ ,\ e_2(s_o)\rangle = 0$$

Ştim că prima curbură a curbei c în punctul $c(s_o)$ este

$$K_1(s_o) = \langle \dot{e}_1(s_o),\ e_2(s_o)\rangle$$

Din ultimele două egalităţi obţinem că raza cercului osculator curbei în punctul $c(s_o)$ este

$$r = \frac{1}{K_1(s_o)}$$

<u>OBSERVAŢIE</u>. Cercul osculator unei curbe strîmbe într-un punct se mai numeşte <u>cerc de curbură</u> al curbei în punctul respectiv, iar centrul lui se numeşte <u>centru de curbură</u> .

5.9.2. <u>DEFINIŢIE. Considerăm o curbă în poziţie generală $c : I \to E_3$ şi fie M_o un punct al curbei. Sfera care intersectează imaginea aplicaţiei c în patru puncte confundate în M_o se numeşte sfera osculatoare curbei în punctul M_o</u> .

<u>PROPOZIŢIE. Considerăm o curbă în poziţie generală</u>

$$c : s \in I \to c(s) = (x^1(s),\ x^2(s),\ x^3(s)) \in E_3,\ \|\dot{c}(s)\| = 1,\ (\forall) s \in$$

Fie $c(s_0)$ **un punct al curbei. Presupunem că torsiunea curbei nu se anulează în punctul** $c(s_0)$. **Coordonatele** a^1, a^2, a^3 **ale centrului sferei osculatoare curbei în punctul** $c(s_0) = (x^1(s_0), x^2(s_0), x^3(s_0))$ **sînt date de :**

$$a^i = x^i(s_0) + R(s_0)e_2^i(s_0) + \dot{R}(s_0)T(s_0)e_3^i(s_0) \ , \quad i\in\{1,2,3\}$$

iar raza r **a sferei osculatoare curbei în** $c(s_0)$ **este**

$$r = \sqrt{R^2(s_0) + \dot{R}^2(s_0)T^2(s_0)}$$

unde am folosit notațiile

$$R(s_0) = \frac{1}{K_1(s_0)} \ , \quad T(s_0) = \frac{1}{K_2(s_0)}$$

$(K_1(s)$ **și** $K_2(s)$ **sînt curburile curbei** c **în punctul** $c(s))$.

Demonstrație. Fie

$$\sum_{i=1}^{3} (X^i - a^i)^2 - r^2 = 0$$

ecuația unei sfere cu centrul în punctul $A(a^1,a^2,a^3)$ și de rază r. Pentru ca sfera dată să treacă prin punctul $c(s_0)$ trebuie ca :

$$\sum_{i=1}^{3} (x^i(s_0) - a^i)^2 - r^2 = 0 \tag{5.23}$$

Dezvoltăm funcțiile $x^i(s)$ în serie Taylor în jurul punctului s_0. Avem :

$$x^i(s) = x^i(s_0) + \frac{s - s_0}{1!}\dot{x}^i(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2!}\ddot{x}^i(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{3!}\dddot{x}^i(s_0) + \dots \tag{5.24}$$

Punctele de intersecție ale sferei date cu imaginea aplicației $s \to c(s)$ au ca abscise curbilinii soluțiile ecuației

$$(5.25)\qquad \sum_{i=1}^{3} (x^i(s) - a^i)^2 - r^2 = 0$$

Ţinînd seama de (5.24), ecuaţia (5.25) se scrie

$$(5.25')\qquad \sum_{i=1}^{3} \Big[x_0^i - a^i + \frac{s-s_0}{1!}\dot{x}_0^i + \frac{(s-s_0)^2}{2!}\ddot{x}_0^i + \frac{(s-s_0)^3}{3!}\dddot{x}_0^i + \ldots \Big]^2 - r^2 = 0,$$

unde am folosit notaţiile

$$x^i(s_0) = x_0^i \ ,\quad \dot{x}^i(s_0) = \dot{x}_0^i \ ,\quad \ddot{x}^i(s_0) = \ddot{x}_0^i \ ,$$

$$\dddot{x}^i(s_0) = \dddot{x}_0^i \ ,\quad i \in \{1,2,3\}$$

Din (5.25) şi (5.25') rezultă :

$$(5.26)\qquad 2(s-s_0)\sum_{i=1}^{3}(x_0^i - a^i)\dot{x}_0^i + (s-s_0)^2\Big[\sum_{i=1}^{3}(x_0^i - a^i)\ddot{x}_0^i + \sum_{i=1}^{3}(\dot{x}_0^i)^2\Big] + (s-s_0)^3\Big[\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_0^i\ddot{x}_0^i + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\dddot{x}_0^i(x_0^i - a^i)\Big] + \ldots = 0$$

Fie $\{e_1 = (e_1^1, e_1^2, e_1^3)\ ,\ e_2 = (e_2^1, e_2^2, e_2^3)\ ,\ e_3 = (e_3^1, e_3^2, e_3^3)\}$ reperul mobil Frenet. Din $e_1(s) = \dot{e}(s)$ rezultă $e_1^i = \dot{x}^i$ $(i=1,2,3)$, iar din prima formulă Frenet $\dot{e}_1(s) = K_1(s)e_2(s)$ rezultă $\ddot{x}^i = K_1 e_2^i$ $(i = 1,2,3)$. Derivind ultimele relaţii obţinem $\dddot{x}^i = K_1\dot{e}_2^i + \dot{K}_1 e_2^i$ şi ţinînd seama de a doua formulă Frenet $\dot{e}_2^i = -K_1 e_1^i + K_2 e_3^i$, rezultă

$$\dddot{x}^i = -K_1^2 e_1^i + \dot{K}_1 e_2^i + K_1K_2e_3^i \quad (i = 1,2,3).$$

In punctul s_0 avem :

$$\dot{x}_0^i = e_1^i(s_0)\quad ,\quad \ddot{x}_0^i = K_1(s_0)e_2^i(s_0)$$

$$\ddot{x}_o = - K_1^2(s_o)e_1^i(s_o) + \dot{K}_1(s_o)e_2^i(s_o) + K_1(s_o)K_2(s_o)e_3^i(s_o)$$

Cu aceste chestiuni pregătitoare ne întoarcem la ecuația (5.26) și vom scrie coeficienții lui $s - s_o$, $(s - s_o)^2$ și $(s - s_o)^3$ sub altă formă. Avem egalitățile

$$\sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)\dot{x}_o^i = \sum_{i=1}^{3}(x_o^i - a^i)e_1^i(s_o) \quad ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\dot{x}_o^i)^2 = \| e_1(s_o)\|^2 = 1 \quad , \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_o^i\ddot{x}_o^i = 0 \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)\ddot{x}_o^i = \sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i) K_1(s_o)e_2^i(s_o) \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{3} \dddot{x}_o^i(x_o^i - a^i) = - K_1^2(s_o) \sum_{i=1}^{3}(x_o^i - a^i)e_1^i(s_o) +$$

$$+ \dot{K}_1(s_o) \sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)e_2^i(s_o) +$$

$$+ K_1(s_o)K_2(s_o)\sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)e_3^i(s_o)$$

Pentru ca ecuația (5.26) să aibă rădăcina $s = s_o$ multiplă de ordinul patru trebuie ca :

$$(5.27) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)e_1^i(s_o) = 0 \, , \\ \sum_{i=1}^{3} (x^i - a^i)e_2^i(s_o) = - R(s_o) \, , \\ \sum_{i=1}^{3} (x_o^i - a^i)e_3^i(s_o) = - \dot{R}(s_o)\, T(s_o) \, , \end{cases}$$

unde am notat :

$$R(s_0) = \frac{1}{K_1(s_0)} \quad , \quad T(s_0) = \frac{1}{K_2(s_0)} \quad , \quad \dot{R}(s_0) = -\frac{\dot{K}_1(s_0)}{K_1^2(s_0)}$$

Dacă notăm $Y^i = a^i - x_0^i$, atunci (5.27) se scrie :

$$(5.27') \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} Y^i e_1^i(s_0) = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} Y^i e_2^i(s_0) = R(s_0) \\ \sum_{i=1}^{3} Y^i e_3^i(s_0) = \dot{R}(s_0)\, T(s_0) \end{cases}$$

Deoarece $\det \| e_j^i(s_0) \| = 1$, din (5.27') se obține

$$Y^i = R(s_0) e_2^i(s_0) + \dot{R}(s_0)\, T(s_0) e_3^i(s_0)$$

Prin urmare, coordonatele a^1, a^2, a^3 ale centrului sferei osculatoare sînt :

$$(5.28) \qquad a^i = x^i(s_0) + R(s_0) e_2^i(s_0) + \dot{R}(s_0) T(s_0) e_3^i(s_0) \quad , \quad i \in \{1,2,3\}$$

Din (5.28) și (5.23) obținem raza sferei osculatoare

$$r = \sqrt{R^2(s_0) + \dot{R}^2(s_0) T^2(s_0)}$$

$R(s_0)$ (resp. $T(s_0)$) se numește raza de curbură (resp. raza de torsiune) a curbei în punctul $c(s_0)$.

5.10. <u>Curbe Enneper. Curbe Bertrand. Curbe Țițeica</u>. Vom studia în continuare trei clase de curbe: curbe Enneper, curbe Bertrand și curbele introduse de geometrul român Gh.Țițeica.

5.10.1. DEFINITIE. Considerăm o curbă în poziție generală

$$c : s \in I \longrightarrow c(s) \in E_3 \quad , \quad \| \dot{c}(s) \| = 1, \ (\forall)\ s \in I$$

Spunem că c este curbă Enneper dacă

(5.29) $K_2(s) = asK_1(s) \quad , \quad (\forall)\ s \in I \quad ,$

unde $K_1(s)$ și $K_2(s)$ sînt curburile curbei într-un punct oarecare $c(s)$, iar a este o constantă reală nenulă.

PROPOZITIE. Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziție generală, parametrizată canonic, cu $K_2(s) \neq 0$, $(\forall) s \in I^* = I - \{0\}$. Sînt echivalente:

(i) c este curbă Enneper

(ii) planele rectificante ale curbei trec printr-un punct fix

(iii) planele osculatoare ale curbei sînt tangente la o sferă fixă.

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, e_3\}$ reperul Frenet asociat curbei.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Din (5.29) rezultă

(5.30) $K_2(s)e_2(s) = asK_1(s)e_2(s)$

Folosind prima și a treia formulă Frenet

$$\dot{e}_1(s) = K_1(s)e_2(s) \quad , \quad \dot{e}_3(s) = -K_2(s)e_2(s) \quad ,$$

din (5.30) rezultă

$$\dot{e}_3(s) + as\dot{e}_1(s) = 0$$

Prin integrare obținem

(5.30') $e_3(s) + a[se_1(s) - c(s)] = k \quad ,$

unde $k = (k^1, k^2, k^3)$ este un vector constant oarecare. Scriem ecuația planului rectificant la curba c într-un punct $c(s) = (c^1(s), c^2(s), c^3(s))$

$$\begin{vmatrix} x - c^1(s) & y - c^2(s) & z - c^3(s) \\ e_1^1(s) & e_1^2(s) & e_1^3(s) \\ e_3^1(s) & e_3^2(s) & e_3^3(s) \end{vmatrix} = 0$$

Ținînd seama de faptul că $a \neq 0$ și de relația (5.30') ultima ecuație se scrie

$$\begin{vmatrix} x + \frac{k^1}{a} & y + \frac{k^2}{a} & z + \frac{k^3}{a} \\ e_1^1(s) & e_1^2(s) & e_1^3(s) \\ e_3^1(s) & e_3^2(s) & e_3^3(s) \end{vmatrix} = 0$$

De aici se vede că planul rectificant trece prin punctul fix $\left(-\frac{k^1}{a}, -\frac{k^2}{a}, -\frac{k^3}{a}\right)$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Presupunem că există un punct fix $k=(k^1, k^2, k^3)$ pentru care avem

$$\langle (k - c(s)), e_2(s) \rangle = 0$$

Atunci există funcțiile diferențiabile $\alpha, \beta : I \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît

(5.31) $\quad k - c(s) = \alpha(s)e_1(s) + \beta(s)e_3(s)$

Dacă derivăm relația (5.31) și folosim formulele lui Frenet, rezultă

$$[1 + \dot{\alpha}(s)]e_1(s) + [\alpha(s)K_1(s) - \beta(s)K_2(s)]e_2(s) + \dot{\beta}(s)e_3(s) = 0$$

De aici rezultă $\dot{\beta}(s) = 0$, adică β = const. In baza ipotezei că c este în poziție generală avem $\beta \neq 0$. Inmulțim scalar (5.31) cu e_3 și obținem

$$\langle k - c(s), e_3(s) \rangle = \beta$$

Folosind această egalitate în ecuația planului osculator

$$[x - c^1(s)]e_3^1(s) + [y - c^2(s)]e_3^2(s) + [z - c^3(s)]e_3^3(s) = 0 \quad ,$$

obținem

$$(x - k^1)e_3^1(s) + (y - k^2)e_3^2(s) + (z - k^3)e_3^3(s) + \beta = 0$$

Distanța de la punctul (k^1, k^2, k^3) la planul osculator este $|\beta|$, ceea ce ne arată că planul osculator este tangent la sfera de centru $k = (k^1, k^2, k^3)$ și de rază $|\beta|$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Presupunem că distanța de la un punct fix $k = (k^1, k^2, k^3)$ la planul osculator este b = const. > 0, adică avem

(5.33) $\qquad < k - c(s), e_3(s) > = b \, , (\forall) s \in I$

Stim că există funcţiile diferenţiabile

$$\alpha, \beta, \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît să avem

(5.33') $\qquad k - c(s) = \alpha(s)e_1(s) + \beta(s)e_2(s) + \gamma(s)e_3(s)$

Derivăm în ambii membrii, apoi înmulţim scalar cu e_1, e_2, e_3. Rezultă

$$(5.33'') \quad \begin{cases} \dot{\alpha}(s) - \beta(s)K_1(s) + 1 = 0 \\ \alpha(s)K_1(s) + \dot{\beta}(s) - \gamma(s)K_2(s) = 0 \\ \dot{\gamma}(s) + \beta(s)K_2(s) = 0 \end{cases}$$

Din relaţiile (5.33), (5.33') rezultă

$$\gamma(s) = b, \ (\forall) s \in I, \quad \text{deci} \quad \dot{\gamma}(s) = 0$$

Deoarece $K_2(s) \neq 0$, $(\forall) s \in I^*$ din a treia relaţie (5.33'') obţinem $\beta(s) = 0$, $(\forall) s \in I$. Din prima relaţie (5.33'') obţinem $\alpha(s) = - s + B$, cu B constantă arbitrară. Putem presupune $B = 0$, deci $\alpha(s) = - s$. Din a doua relaţie (5.33'') rezultă

$$- sK_1(s) - bK_2(s) = 0$$

Notăm $a = - \frac{1}{b}$ şi obţinem (5.29).

5.10.2. <u>DEFINITIE. Se numeşte curbă Bertrand o curbă strîmbă ale cărei normale principale sînt normale principale şi pentru o altă curbă.</u>

<u>PROPOZITIE</u>. i) <u>Distanţa dintre două puncte corespondente situate pe două curbe Bertrand asociate, măsurată pe normala principală, este constantă</u>.

ii) <u>Unghiul tangentelor la două curbe Bertrand asociate, în puncte corespondente, este constant</u>.

iii) <u>Dacă</u> $K_1(s)$ <u>şi</u> $K_2(s))$ <u>sînt curburile unei curbe Bertrand</u> $c : I \longrightarrow E_3$ <u>într-un punct oarecare</u> $c(s)$ <u>atunci există trei constante reale</u> $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ <u>astfel încît să avem</u>

$$a_1K_1(s) + a_2K_2(s) + a_3 = 0 \quad , \quad (\forall) s \in I \ .$$

<u>Demonstraţie</u>. i) Considerăm o curbă în poziţie generală

(5.34) $$c : s \in I \longrightarrow c(s) \in E_3 \quad , \|\dot{c}(s)\| = 1 \quad , (\forall) s \in I$$

ale cărei normale principale sînt normale principale şi pentru o altă curbă

(5.35) $$\bar{c} : \bar{s} \in \bar{I} \longrightarrow \bar{c}(\bar{s}) \in E_3 \quad , \|\dot{\bar{c}}(\bar{s})\| = 1 \quad , (\forall) \bar{s} \in \bar{I}$$

Fie $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$, resp. $\{\bar{e}_1(\bar{s}), \bar{e}_2(\bar{s}), \bar{e}_3(\bar{s})\}$ reperul Frenet asociat curbei (5.34), resp. (5.35), în punctul $c(s)$, resp. $\bar{c}(\bar{s})$.

Deoarece normala principală în punctul $c(s)$ la curba (5.34) coincide cu normala principală în punctul $\bar{c}(\bar{s})$ la curba (5.35) rezultă că avem :

$$e_2(s) = \pm \bar{e}_2(\bar{s})$$

Notăm cu $a(s)$ distanţa dintre punctele corespondente $c(s)$ şi $\bar{c}(\bar{s})$ măsurată pe normala principală în $c(s)$ la curba (5.34). Avem

(5.36) $$\bar{c}(\bar{s}) = c(s) + a(s)e_2(s)$$

Din (5.36) rezultă

(5.37) $$\dot{\bar{c}}(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{ds} = \dot{c}(s) + \dot{a}(s)e_2(s) + a(s)\dot{e}_2(s)$$

Tinînd seama de formula a doua a lui Frenet, din (5.37) obţinem

(5.38) $$\bar{e}_1(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{ds} = (1-a(s)K_1(s))e_1(s) + \dot{a}(s)e_2(s) + a(s)K_2(s)e_3(s)$$

Inmulţind scalar relaţia (5.38) cu $e_2(s)$ şi ţinînd seama de faptul că vectorii $\bar{e}_2(\bar{s})$ şi $e_2(s)$ sînt coliniari, obţinem $\dot{a}(s) = 0$, deci avem :

(5.38') $$a(s) = a \ (= \text{const.}) \quad , (\forall)\ s \in I .$$

ii) Scriem prima formulă Frenet pentru curbele (5.34) şi (5.35)

(5.39) $\quad \dot{e}_1(s) = K_1(s)e_2(s) \quad , \quad \dot{\bar{e}}_1(\bar{s}) = \pm \bar{K}_1(\bar{s})e_2(s)$, unde $\bar{K}_1(\bar{s})$ este curbura curbei (5.35) în punctul $\bar{c}(\bar{s})$ şi unde am folosit faptul că normala principală a curbei (5.34) în punctul $c(s)$ este normală principală a curbei (5.35) în punctul $\bar{c}(\bar{s})$. Derivăm relaţiile $\langle e_1(s), e_1(s)\rangle = 1$ şi $\langle \bar{e}_1(\bar{s}), \bar{e}_1(\bar{s})\rangle = 1$ şi rezultă

(5.40) $$\langle e_1(s), \dot{e}_1(s)\rangle = 0 \quad , \langle \bar{e}_1(\bar{s}), \dot{\bar{e}}_1(\bar{s})\rangle = 0$$

Deoarece vectorii $\dot{e}_1(s)$ şi $\dot{\bar{e}}_1(\bar{s})$ sînt coliniari, din (5.40) rezultă:

$$\langle e_1(s), \dot{\bar{e}}_1(\bar{s})\rangle = 0 \quad , \langle \bar{e}_1(\bar{s}), \dot{e}_1(s)\rangle = 0$$

sau

(5.40') $$\langle e_1(s), \dot{\bar{e}}_1(\bar{s}) \frac{d\bar{s}}{ds}\rangle = 0 \quad , \langle \bar{e}_1(\bar{s}), \dot{e}_1(s)\rangle = 0$$

Din (5.40') obţinem

$$\frac{d}{ds} (\langle e_1(s), \bar{e}_1(\bar{s})\rangle) = 0 ,$$

adică

(5.41) $$\langle e_1(s), \bar{e}_1(\bar{s})\rangle = \cos u \quad , u = \text{const.} ,$$

unde u este unghiul format de cele două tangente la curbele Bertrand în punctele corespondente $c(s)$ şi $\bar{c}(\bar{s})$.

iii) Din (5.38) şi (5.38') rezultă

(5.42) $$\bar{e}_1(\bar{s}) = (1 - aK_1(s))e_1(s) \frac{ds}{d\bar{s}} + aK_2(s)e_3(s) \frac{ds}{d\bar{s}} ,$$

iar (5.41) ne arată că avem

(5.43) $$\bar{e}_1(\bar{s}) = e_1(s) \cos u + e_3(s) \sin u$$

Din (5.42) şi (5.43) rezultă :

(5.44) $$(1 - aK_1(s)) \frac{ds}{d\bar{s}} = \cos u \quad , aK_2(s) \frac{ds}{d\bar{s}} = \sin u$$

Din (5.44) obţinem :

$$a_1K_1(s) + a_2K_2(s) + a_3 = 0 \quad , \quad (\forall)s\in I \quad ,$$

unde $a_1 = a \sin u$, $a_2 = a \cos u$, $a_3 = -\sin u$, sînt constante reale.

5.10.3. DEFINIŢIE. Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziţie generală. Se spune că c este curbă Ţiţeica dacă

$$\frac{K_2(t)}{d^2(t)} = \text{constant} \quad , (\forall)\ t\in I \ , \tag{5.45}$$

unde $K_2(t)$ este torsiunea curbei c în punctul $c(t)$, iar $d(t)$ este distanţa de la originea spaţiului E_3 la planul osculator curbei în punctul $c(t)$.

PROPOZIŢIE. Fie $c : I \to E_3$ o curbă în poziţie generală. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

i) Curba $t \to c(t) = (x(t),y(t),z(t))$ este curbă Ţiţeica

ii) Pentru orice $t\in I$ are loc relaţia

$$\begin{vmatrix} \dot x(t) & \dot y(t) & \dot z(t) \\ \ddot x(t) & \ddot y(t) & \ddot z(t) \\ \dddot x(t) & \dddot y(t) & \dddot z(t) \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ \dot x(t) & \dot y(t) & \dot z(t) \\ \ddot x(t) & \ddot y(t) & \ddot z(t) \end{vmatrix}^2 \ , \ k = \text{const.} \tag{5.46}$$

Demonstraţie. Ecuaţia planului osculator curbei c într-un punct oarecare $c(t) = (x(t),y(t),z(t))$ este

$$A(t)\left[x-x(t) \right] + B(t)\left[y-y(t) \right] + C(t)\left[z-z(t) \right] = 0.$$

Distanţa de la origine la planul osculator curbei este dată de

$$d^2(t) = \frac{\begin{vmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \end{vmatrix}^2}{A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)}$$

Torsiunea curbei c într-un punct oarecare $c(t)$ este
ată de formula

$$K_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \\ \ddot{x}(t) & \ddot{y}(t) & \ddot{z}(t) \\ \dddot{x}(t) & \dddot{y}(t) & \dddot{z}(t) \end{vmatrix}}{A^2(t) + B^2(t) + C^2(t)}$$

Folosind ultimele două formule rezultă ușor (i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

<u>OBSERVATIE</u>. Fie

$$c : t \in I \longrightarrow c(t) = (c^1(t), c^2(t), c^3(t)) \in E_3$$

curbă în poziție generală. Presupunem că curba nu este plană, deci
ă torsiunea $K_2(t)$ este nenulă, $(\forall) t \in I$. Acestei curbe i se asociază
ecuație diferențială de gradul trei verificată de funcțiile c^1, c^2, c^3,
le forma

5.46) $\quad \dddot{u} + a_1\ddot{u} + a_2\dot{u} + a_3 u = 0 , \qquad u : I \longrightarrow \mathbb{R} ,$

nde coeficienții sînt dați de

$$a_1 = -\frac{\det(\dddot{c}, \dot{c}, c)}{\Delta} , \quad a_2 = -\frac{\det(\ddot{c}, \dddot{c}, c)}{\Delta}$$

$$a_3 = -\frac{\det(\ddot{c}, \dot{c}, \dddot{c})}{\Delta} , \quad \Delta = \det(\ddot{c}, \dot{c}, c)$$

Se observă că

$$\| \dot{c} \times \ddot{c} \|^2 K_2 = \Delta a_3$$

Ultima egalitate ne arată că avem $a_3 \neq 0$. La o schimbare de parametru pe curbă rezultă

$$a_3 = \bar{a}_3 \left(\frac{d\bar{t}}{dt} \right)^3$$

Curba c se poate reparametriza astfel încît să avem $a_3 = 1$. Spunem în acest caz că curba este parametrizată afin. Pentru a avea parametru afin se pune condiţia

$$\Delta = \det(\dot{c}, \ddot{c}, \dddot{c})$$

Despre o curbă parametrizată afin se arată că este curbă Ţiţeica dacă ecuaţia (5.46) avem şi $a_1 = 0$ [10],[15].

Fie acum două curba în poziţie generală

$$c : I \to E_3 \quad , \quad \bar{c} : \bar{I} \to E_3 .$$

Se spune că c şi $\bar{c}$ sînt centroafin echivalente dacă

$$\bar{c}^i = A^i_j c^j \qquad , \quad i \in \{1,2,3\}$$

unde $c = (c^1, c^2, c^3)$, $\bar{c} = (\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3)$,

$$A^i_j \in \mathbb{R} \quad , \det (A^i_j) \neq 0 \quad , \quad i,j \in \{1,2,3\}$$

Deoarece ecuaţia diferenţială (5.46) este omogenă, rezultă că această ecuaţie este ataşată tuturor curbelor centroafin echivalente cu curba c . Rezultă că toate curbele centroafin echivalente cu o curbă Titeica , sînt curbe Titeica .

§ 6. CURBE PLANE

6.1. Curbura unei curbe din E_2. Formulele Frenet. Interpretarea geometrică a curburii unei curbe plane.

Fie $c : I \to E_2$ o curbă plană regulată. Este evident că curba este în poziție generală. Notăm cu $\{e_1, e_2\}$ reperul Frenet asociat curbei.

Prima curbură $K_1(t)$ a curbei c în punctul $c(t)$ se mai numește <u>curbura curbei</u> c în punctul $c(t)$.

PROPOZIȚIE. Considerăm o curbă regulată

$$c : t \in I \to c(t) = (x(t), y(t)) \in E_2$$

Avem formulele :

$$K_1(t) = \frac{\det(\dot{c}(t), \ddot{c}(t))}{\|\dot{c}(t)\|^3} \tag{6.1}$$

$$K_1(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}} \tag{6.1'}$$

<u>Demonstrație</u>. Dacă $\{e_1, e_2\}$ este reperul Frenet asociat curbei, atunci avem

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\|\dot{c}(t)\|} \tag{6.2}$$

Fie $e_2^1(t)$, $e_2^2(t)$ componentele vectorului $e_2(t)$. Din condiția $\langle e_2(t), e_1(t)\rangle = 0$, rezultă :

$$e_2^1(t)\dot{x}(t) + e_2^2(t)\dot{y}(t) = 0$$

sau

$$\frac{e_2^1(t)}{\dot{y}(t)} = \frac{e_2^2(t)}{-\dot{x}(t)} = \lambda(t) \tag{6.3}$$

Deoarece $\|e_2(t)\| = 1$, rezultă

(6.3') $$(e_2^1(t))^2 + (e_2^2(t))^2 = 1$$

Din (6,3) şi (6.3') avem $\lambda(t)^2 \|\dot{c}(t)\|^2 = 1$, sau

$$\lambda(t) = \frac{\varepsilon}{\|\dot{c}(t)\|}$$

unde $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$

Din (6.3) şi (6.3') rezultă :

$$e_2(t) = \frac{(\varepsilon \dot{y}(t), -\varepsilon \dot{x}(t))}{\|\dot{c}(t)\|}$$

Determinăm pe ε astfel încît reperul $\{e_1(t), e_2(t)\}$ să fie orientat pozitiv. Va trebui ca matricea transformării liniare care duce baza canonică $\{(1,0),(0,1)\}$ a lui $\mathbb{R}^2$ în baza $\{e_1(t), e_2(t)\}$ să aibă determinantul pozitiv, deci trebuie să avem :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\dot{x}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} & \dfrac{\dot{y}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \\ \\ \dfrac{\varepsilon \dot{y}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} & \dfrac{-\varepsilon \dot{x}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \end{vmatrix} > 0$$

sau

$$-\varepsilon(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)) > 0 .$$

Rezultă $\varepsilon = -1$ şi deci

(6.2') $$e_2(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\|\dot{c}(t)\|}$$

Prin urmare reperul Frenet $\{e_1, e_2\}$ asociat curbei $c(t) = (x(t), y(t))$ este dat prin (6.2) şi (6.2') .

Formulele Frenet se scriu :

$$\dot{e}_1(t) = a_{12}(t)\, e_2(t)$$

$$\dot{e}_2(t) = -a_{12}(t) e_1(t)$$

Curbura curbei c este dată de formula

$$K_1(t) = \frac{a_{12}(t)}{\|\dot{c}(t)\|}$$

vem :

$$a_{12}(t) = \langle \dot{e}_1(t), e_2(t)\rangle = \langle \frac{c^{(2)}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} + \dot{c}(t)\left(\frac{1}{\|\dot{c}(t)\|}\right)', e_2(t)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|}\langle c^{(2)}(t), e_2(t)\rangle = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^2}(-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\ddot{y}(t))$$

esultă că curbura curbei c este

$$K_1(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^3}(-\ddot{x}(t)\dot{y}(t) + \dot{x}(t)\ddot{y}(t)),$$

e unde obținem ușor (6.1) și (6.1') . Este ușor de văzut că dacă urba c este parametrizată canonic, atunci curbura curbei într-un unct $c(s) = (x(s), y(s))$ este dată de :

(6.1") $\quad K_1(s) = \det(\dot{c}(s), \ddot{c}(s)) = \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)$

<u>Observații</u>. i) Fie $c : I \longrightarrow \mathcal{E}_2$ o curbă parametrizată canonic, leci $\|\dot{c}(s)\| = 1$, $(\forall) s \in I$. Formulele lui Frenet se scriu

$$\dot{e}_1(s) = K_1(s) e_2(s)$$

$$\dot{e}_2(s) = -K_1(s) e_1(s)$$

din prima formulă a lui Frenet și din egalitatea $e_1(s) = \dot{c}(s)$, $(\forall) s \in I$, obținem $|K_1(s)| = \|\ddot{c}(s)\|$.

ii) Considerăm o curbă plană

$$c : I \longrightarrow \mathcal{E}_2 \ , \quad c(t) = (t, y(t))$$

vem $\dot{c}(t) = (1, \dot{y}(t))$, $\ddot{c}(t) = (0, \ddot{y}(t))$

Tinînd seama de formula (6.1') obţinem

$$K_1(t) = \frac{\ddot{y}(t)}{(1 + \dot{y}(t))^{\frac{3}{2}}}$$

De aici rezultă

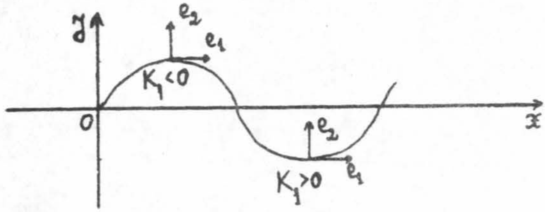
$$K_1(t) > 0 \Longleftrightarrow \ddot{y}(t) > 0 ,$$

$$K_1(t) < 0 \Longleftrightarrow \ddot{y}(t) < 0$$

Prin urmare curbura curbei c este pozitivă în punctele care aparţin părţii convexe a curbei şi negativă în punctele care aparţin părţii concave a curbei.

Ca exemplu, să considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2, \ c(t) = (t, \sin t)$$



Avem: $K_1(t) < 0$ pentru $t \in (0, \pi)$

$K_1(t) > 0$ pentru $t \in (\pi, 2\pi)$

Un punct c(t) al curbei se numeşte <u>punct de inflexiune</u> dacă $K_1(t) = 0$ şi $\dot{K}_1(t) \neq 0$.

Este uşor de văzut că punctele c(0) şi c(π) sînt puncte de inflexiune.

<u>EXEMPLE</u>. 6.1.1. Ne propunem să calculăm curbura unei elipse. Considerăm aplicaţia

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$c(t) = (a \cos t, \ b \sin t)$$

unde $a > 0$ şi $b > 0$. Avem

$$\dot{c}(t) = (-a \sin t, \ b \cos t)$$

Rezultă

$$\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

Deoarece $\|\dot{c}(t)\| \neq 0$, $(\forall)\ t \in I$ rezultă că curba parametrizată c este în poziţie generală. Imaginea aplicaţiei c este o elipsă avînd ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

Vectorul $\ddot{c}(t)$ este dat de

$$\ddot{c}(t) = (-a \cos t, -b \sin t)$$

Folosind formula stabilită în propoziţia anterioară obţinem

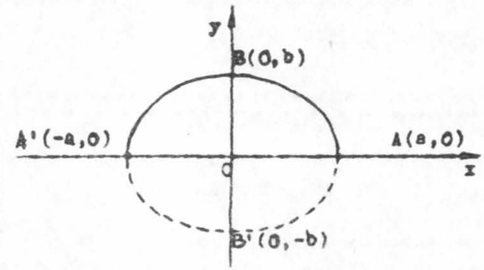
$$K_1(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

Presupunem că $a > b$.

Avem :

$c(0) = A$, $c(\pi) = A'$

$c(\frac{\pi}{2}) = B$, $c(\frac{3\pi}{2}) = B'$



Rezultă :

$$K_1(0) = K_1(\pi) = \frac{a}{b^2} < K_1(\frac{\pi}{2}) = K_1(\frac{3\pi}{2}) = \frac{b}{a^2}$$

In particular, dacă $a = b$, obţinem că curbura cercului

$$c : t \in \mathbb{R} \longrightarrow c(t) = (a \cos t, a \sin t) \in E_2$$

este constantă ,

$$K_1(t) = \frac{1}{a}\ , \ (\forall)\ t \in \mathbb{R}$$

6.1.2. Fie $c : I \to E_2$ o curbă parametrizată regulată. Imaginea aplicației c este un segment de dreaptă dacă și numai dacă curbura curbei este nulă în fiecare punct.

In adevăr, dacă imaginea aplicației c este un segment de dreaptă atunci avem

$$c(s) = (x_0 + s\ell \,,\; y = y_0 + sm) \quad , \quad s \in I \;,$$

unde (ℓ, m) sînt cosinusurile directoare, deci $\ell^2 + m^2 = 1$, iar s este parametru canonic, deci $\|\dot{c}(s)\| = 1$, $(\forall)\; s \in I$.

Rezultă $\quad \dot{c}(s) = (\ell, m)$, $\ddot{c}(s) = (0,0)$ și deci avem

$$K_1(s) = \det(\dot{c}(s), \ddot{c}(s)) = 0$$

Reciproc, dacă avem $K_1(s) = 0$, $(\forall)\; s \in I$ atunci din prima formulă a lui Frenet rezultă

$$\ddot{c}(s) = 0$$

adică $\quad c(s) = as + b$

unde a și b sînt constante.

Deoarece curba c este regulată trebuie să avem $a \neq 0$. Prin urmare curba c este un segment de dreaptă.

<u>OBSERVATIE</u>. Considerăm o curbă regulată

$$c : s \in I \longmapsto c(s) \in E_2 \quad , \quad \|\dot{c}(s)\| = 1, \; (\forall) s \in I$$

Fie $c(s) = (x(s), y(s))$ un punct oarecare al curbei. Notăm cu $\alpha(s)$ unghiul format de tangenta la curbă în punctul $c(s)$ cu axa Ox. Tangenta la curba dată în punctul $c(s) = (x(s), y(s))$ are ecuația

$$\frac{x - x(s)}{\dot{x}(s)} = \frac{y - y(s)}{\dot{y}(s)}$$

Rezultă că coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul $c(s)$ este

$$tg\,\alpha(s) = \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}$$

De aici avem

$$\alpha(s) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)} ,$$

Rezultă

$$\dot{\alpha}(s) = \frac{1}{1+\left(\frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}\right)^2} \cdot \frac{\ddot{y}(s)\dot{x}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)}{\dot{x}^2(s)} =$$

$$= \dot{x}(s)\ddot{y}(s) - \ddot{x}(s)\dot{y}(s)$$

şi folosind (1.1") obţinem

(6.4) $\qquad K_1(s) = \dot{\alpha}(s)$

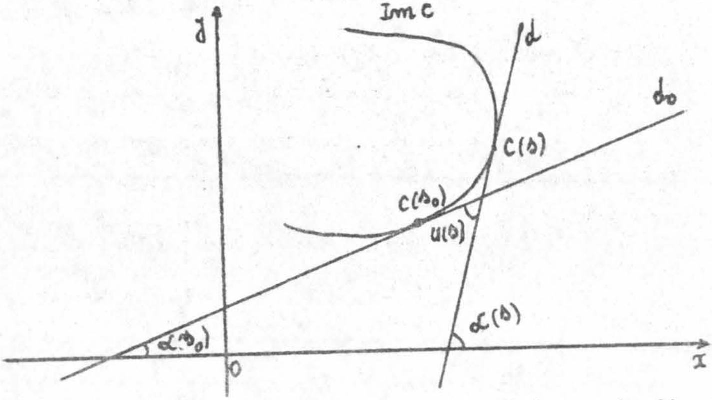
Cosinusurile directoare ale tangentei la curba c în punctul $c(s)$ sînt

(6.4') $\qquad \cos\alpha(s) = \dot{x}(s)$, $\sin\alpha(s) = \dot{y}(s)$

Dacă $c(s_0)$ este un punct fixat, iar $c(s)$ este un punct arbitrar al curbei în vecinătatea punctului $c(s_0)$, atunci folosind (6.4) avem:

$$K_1(s_0) = \dot{\alpha}(s_0) = \lim_{s \to s_0} \frac{\alpha(s) - \alpha(s_0)}{s - s_0} = \lim_{s \to s_0} \frac{u(s)}{s - s_0} ,$$

unde $u(s)$ este unghiul format de tangentele la curba c în punctele $c(s_0)$ şi $c(s)$.



Am obţinut astfel interpretarea geometrică a curburii unei curbe plane. Unghiul u(s) se numeşte unghiul de contingenţă al tangentelor la curba c în punctele $c(s_0)$ şi c(s).

6.2. Cerc osculator

DEFINITIE. Considerăm o curbă $c : I \to E_2$ şi fie $t_0 \in I$ astfel încît $\dot{c}(t_0) \neq 0$ şi $K_1(t_0) \neq 0$. Un cerc se numeşte cerc osculator curbei în punctul $c(t_0)$, dacă are cu imaginea curbei c trei puncte confundate în $c(t_0)$.

PROPOZITIE. Considerăm o curbă parametrizată

$$c : t \in I \longrightarrow c(t) = (x(t), y(t)) \in E_2$$

şi fie $t_0 \in I$ astfel încît $\dot{c}(t_0) \neq 0$ şi $K_1(t_0) \neq 0$. Cercul osculator curbei în punctul $c(t_0)$ are centrul în punctul $\Omega_0 = (a,b)$ şi raza $R(t_0)$, unde

$$a = x(t_0) + \dot{y}(t_0)\,\frac{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)}{\ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0) - \dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)}$$

(6.5)

$$b = y(t_0) - \dot{x}(t_0)\,\frac{\dot{x}^2(t_0) + \dot{y}^2(t_0)}{\ddot{x}(t_0)\dot{y}(t_0) - \dot{x}(t_0)\ddot{y}(t_0)}$$

$$R(t_0) = \frac{1}{|K_1(t_0)|} \tag{6.6}$$

<u>**Demonstrație**</u>. Fie

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + k = 0 \tag{6.7}$$

ecuația cercului. Abscisele curbilinii ale punctelor de intersecție ale cercului de ecuație (6.7) cu imaginea curbei parametrizate c sînt rădăcinile ecuației

$$x^2(t) + y^2(t) - 2ax(t) - 2by(t) + k = 0 \tag{6.8}$$

Dacă în (6.8) punem $t = t_0 + h$ și dacă ținem seama de dezvoltările :

$$x(t_0 + h) = x(t_0) + \frac{h}{1!}\dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{x}(t_0) + \dots ,$$

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + \frac{h}{1!}\dot{y}(t_0) + \frac{h^2}{2!}\ddot{y}(t_0) + \dots ,$$

atunci (6.8) se scrie :

$$\begin{aligned} x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + k + 2\frac{h}{1!}(x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 - 2a\dot{x}_0 - 2b\dot{y}_0) + \\ + h^2(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + x_0\ddot{x}_0 + y_0\ddot{y}_0 - a\ddot{x}_0 - b\ddot{y}_0) + \dots , \end{aligned} \tag{6.8'}$$

unde am folosit notațiile :

$$x(t_0) = x_0 \quad , \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \quad , \quad \ddot{x}(t_0) = \ddot{x}_0 \quad ,$$
$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \quad , \quad \ddot{y}(t_0) = \ddot{y}_0$$

Cercul de ecuație (6.7) intersectează imaginea aplicației c în trei puncte confundate în $c(t_0)$ dacă ecuația (6.8') are rădăcina triplă $h = 0$, deci dacă

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + k = 0 \\ x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 - a\dot{x}_0 - b\dot{y}_0 = 0 \\ \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + x_0\ddot{x}_0 + y_0\ddot{y}_0 - a\ddot{x}_0 - b\ddot{y}_0 = 0 \end{cases} \tag{6.9}$$

Deoarece $K_1(t_o) \neq 0$, rezultă că $\dot{x}_o\ddot{y}_o - \ddot{x}_o\dot{y}_o \neq 0$.

Din (6.9) obţinem :

(6.1o) $$a = x_o + \dot{y}_o \frac{\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2}{\ddot{x}_o\dot{y}_o - \dot{x}_o\ddot{y}_o} , \quad b = y_o - \dot{x}_o \frac{\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2}{\ddot{x}_o\dot{y}_o - \dot{x}_o\ddot{y}_o}$$

(6.11) $$k = x_o^2 + y_o^2 + \frac{2(x_o\dot{y}_o - \dot{x}_o y_o)(\dot{x}_o^2 + \dot{y}_o^2)}{\ddot{x}_o\dot{y}_o - \dot{x}_o\ddot{y}_o}$$

Folosind (6.10) şi (6.11) obţinem că raza cercului osculator curbei c în punctul $c(t_o)$ este :

$$R(t_o) = \frac{1}{|K_1(t_o)|}$$

Centrul cercului osculator curbei în punctul $c(t_o)$ se numeşte centrul de curbură al curbei c în punctul $c(t_o)$, iar raza $R(t_o)$ se numeşte raza de curbură a curbei c în punctul $c(t_o)$.

EXEMPLE. 6.2.1. Considerăm aplicaţia

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$c(t) = (r(t-\sin t), r(1-\cos t))$$

unde $r = \text{const} > 0$. Imaginea aplicaţiei c este cicloida (a se vedea exemplul 1.16.2). Ne propunem următoarele :

i) Să scriem ecuaţia cercului osculator cicloidei în punctul $c(\pi)$.

ii) Să arătăm că raza cercului osculator cicloidei într-un punct oarecare $c(t)$, $t \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, este egală cu dublul lungimii segmentului de pe normală cuprins între punctul $c(t)$ şi axa Ox.

i) Dacă notăm

$$x(t) = r(t-\sin t) , \quad y(t) = r(1-\cos t),$$

atunci avem

$$\dot{x}(t) = r(1-\cos t) \quad , \quad \dot{y}(t) = r \sin t$$

$$\ddot{x}(t) = r\sin t \quad , \quad \ddot{y}(t) = r \cos t$$

Curbura cicloidei într-un punct oarecare $c(t)$ este

$$K_1(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}} = \frac{-1}{4r \sin \frac{t}{2}}$$

In punctul $c(\pi)$ curbura cicloidei este

$$K_1(\pi) = -\frac{1}{4r}$$

Rezultă că raza cercului osculator cicloidei în punctul $c(\pi)$ este $R(\pi) = 4r$. Avem:

$$x(\pi) = r\pi \ , \ y(\pi) = 2r \quad , \quad \dot{x}(\pi) = 2r, \ \dot{y}(\pi) = 0 \ ,$$

$$\ddot{x}(\pi) = 0 \quad , \quad \ddot{y}(\pi) = -r$$

Rezultă că coordonatele centrului cercului osculator cicloidei în punctul $c(\pi)$ sînt $a = r\pi$, $b=-2r$. Deci ecuația cercului osculator cicloidei în punctul $c(\pi)$ este

$$(x - r\pi)^2 + (y + 2r)^2 = 16r^2$$

ii) Raza de curbură a cicloidei într-un punct oarecare $c(t)$, $t \neq 2m\pi$, $m \in Z$, este

$$R(t) = \frac{1}{|K_1(t)|} = 4r \left|\sin \frac{t}{2}\right|$$

Am văzut în exemplul 1.16.2. că normala într-un punct $c(t) = (r(t-\sin t), r(1-\cos t))$ al cicloidei intersectează axa Ox în punctul $N = (rt,0)$. Lungimea segmentului de pe normală cuprins între punctul $c(t)$ și axa Ox este

$$L(t) = 2r\left|\sin \frac{t}{2}\right|$$

Rezultă $R(t) = 2L(t)$

6.3.2. Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$$

definită prin

$$c(t) = \left(t, \frac{a}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)\right) \quad , \quad a = \text{const.} > 0$$

Ne propunem următoarele :

i) Să găsim raza de curbură într-un punct oarecare

ii) Să scriem ecuaţia cercului osculator curbei în punctul $c(0)$.

iii) Să arătăm că ordonata unui punct $c(t)$ al curbei este medie geometrică între raza de curbură în punctul $c(t)$, şi raza de curbură în punctul $c(0)$.

iv) Să arătăm că raza de curbură într-un punct oarecare $c(t)$ al curbei este egală cu lungimea segmentului de pe normală cuprins între punctul $c(t)$ şi axa Ox.

i) Pentru orice $t \in \mathbb{R}$, avem :

$$\dot{c}(t) = \left(1, \frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)\right)$$

$$\ddot{c}(t) = \left(0, \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)\right)$$

Din calcul rezultă că raza de curbură într-un punct oarecare $c(t)$ este

$$R(t) = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)^2$$

Rezultă $R(0) = a$

ii) Cercul osculator curbei în punctul $c(0)$ are centrul în punctul $(0,2a)$ şi raza $R(0) = a$. Obţinem ecuaţia cercului osculator curbei în punctul $c(0)$

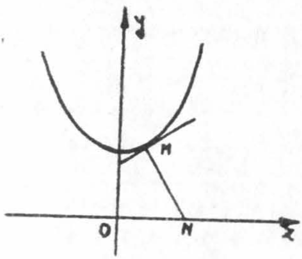
$$x^2 + (y - 2a)^2 = a^2$$

iii) Pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$R(t)R(0) = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)^2$$

iv) Lungimea segmentului de pe normală cuprins între punctul $c(t)$ şi axa Ox este :

$$L(t) = a\,ch^2\frac{t}{a} =$$
$$= \frac{a}{4}\left(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}}\right)^2 =$$
$$= R(t)$$



Imaginea aplicaţiei c se numeşte <u>lănţişor</u>.

6.3. <u>Evoluta unei curbe plane</u>.

Fie $c : t \in I \longrightarrow c(t) = (x(t), y(t)) \in E_2$ o curbă regulată cu proprietatea că pentru orice $t \in I$, $K_1(t) \neq 0$. Atunci cercul osculator curbei c într-un punct oarecare $c(t)$ are centrul $\Omega = (X(t), Y(t))$ unde :

$$(6.12)\qquad \begin{cases} X(t) = x(t) - \dfrac{\dot{y}(t)(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \\[2ex] Y(t) = y(t) + \dfrac{\dot{x}(t)(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))}{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)} \end{cases}$$

Curba

$$\Gamma : t \in I \longrightarrow \Gamma(t) = (X(t), Y(t)) \in E_2$$

se numeşte <u>evoluta curbei</u> c .

<u>EXEMPLE</u>. Ne propunem să aflăm evolutele curbelor :

1) $c : t \in I = (0, \pi) \longrightarrow c(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)) \in E_2$,

$a = \text{const.} > 0$,

ii) $c : t \in \mathbb{R} \longrightarrow c(t) = (a \cos t, b \sin t) \in E_2$, $a,b = \text{const.} > 0$,

iii) $c : t \in I = (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow c(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t) \in E_2$,
$a = \text{const.} > 0$.

Vom folosi formulele (6.12)

i) Dacă notăm $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, atunci avem :

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t) \quad , \quad \dot{y}(t) = a \sin t$$
$$\ddot{x}(t) = a \sin t \quad , \quad \ddot{y}(t) = a \cos t$$

Rezultă :

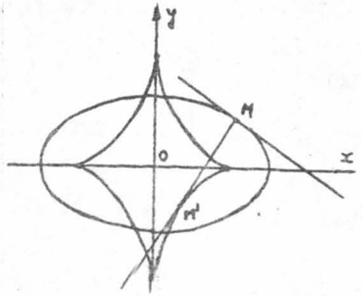
$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = 2a^2(1 - \cos t)$$
$$\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t) = a^2(\cos t - 1)$$

Folosind formula (6.12) obţinem că evoluta curbei i) este curba

$$\Gamma : t \in I \longrightarrow \Gamma(t) = (a(t + \sin t, a(\cos t - 1)) \in E_2$$

ii) Procedînd ca la punctul precedent, obţinem că evoluta elipsei este curba

$$\Gamma : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \Gamma(t) =$$
$$= \left(\frac{c^2}{a} \cos^3 t, -\frac{c^2}{b} \sin^3 t\right) \in E_2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$



iii) Din calcul obţinem că evoluta astroidei este curba :

$$\Gamma : t \in I \longrightarrow \Gamma(t) = (a \cos^3 t + 3a \sin^2 t \cos t, a \sin^3 t + 3a \cos^2 t \sin t) \in E_2$$

CAPITOLUL II

ELEMENTE DE TEORIA GLOBALA A CURBELOR

§ 1. Curbe simple. Curbe închise. Inegalitatea izoperimetrică.

1.1. DEFINITIE. O curbă $c : [a,b] \longrightarrow E_2$ se numeşte curbă simplă dacă pentru orice $t_1, t_2 \in [a,b)$ cu $t_1 \neq t_2$ avem $c(t_1) \neq c(t_2)$.

1.2. EXEMPLE. 1.2.1. Elipsa $c : [0, 2\pi] \longrightarrow E_2$, $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a > b > 0$ este o curbă simplă(Fig 1).

1.2.2. Astroida $c : [0, 2\pi] \longrightarrow E_2$, $c(t) = (r \cos^3 t, r \sin^3 t), r > 0$ este o curbă simplă(Fig. 2).

1.2.3. Foliul lui Descartes

$$c : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow E_2$$

$$c(t) = \left(\frac{3\,at}{1+t^3}, \frac{3\,at^2}{1+t^3}\right), \quad a > 0$$

este o curbă simplă(Fig. 3).

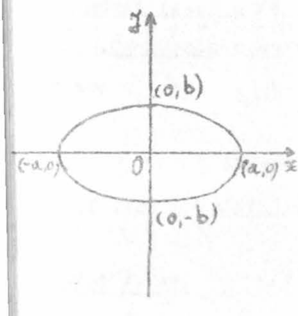


Fig. 1

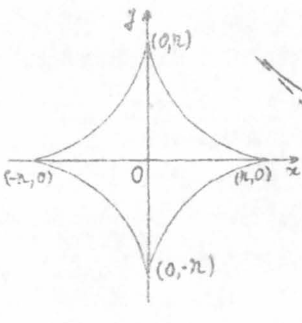


Fig. 2

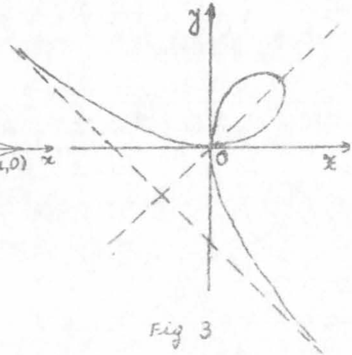


Fig 3

1.2.4. Spirala lui Arhimede

$c : [0, 2\pi] \longrightarrow E_2$, $c(t) = (at \cos t, at \sin t)$, $(a = \text{const} > 0)$

este o curbă simplă.

1.2.5. Strofoida

$$c : \mathbb{R} \to E_2,\ c(t) = \left(a\frac{t^2-1}{t^2+1},\ at\frac{t^2-1}{t^2+1}\right),\ a = \text{const.} > 0$$

nu este curbă simplă. In adevăr, avem $c(1) = c(-1) = (0,0)$.

1.2.6. Melcul lui Pascal.

$c : [0,2\pi] \to E_2$, $c(t) = ((1 + 2\cos t)\cos t,$ $(1 + 2\cos t)\sin t)$, nu este curbă simplă. In adevăr, avem $c\left(\frac{2\pi}{3}\right) = c\left(\frac{5\pi}{3}\right) = (0,0)$.

1.3. DEFINITIE. O curbă $c : [a,b] \to E_2$ se numeste curbă închisă dacă există o curbă $\bar{c} : \mathbb{R} \to E_2$ cu următoarele proprietăți:

$$\bar{c}\big|_{[a,b]} = c \quad \text{și} \quad \bar{c}(t + T) = \bar{c}(t),\ (\forall)t \in \mathbb{R},$$

unde $T = b-a$. Numărul T este perioada lui $\bar{c}$. Curba $\bar{c}$ se numește periodică cu perioada T. Dîndu-se o curbă închisă c i se poate asocia o curbă periodică $\bar{c}$ în mod unic.

O definiţie echivalentă a curbelor închise este următoarea

1.3'. DEFINITIE. O curbă $c : [a,b] \to E_2$ se numeste curbă închisă dacă $c(a) = c(b)$ și $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)$ pentru orice $i > 0$.

1.4. EXEMPLE. 1.4.1. Cercul $c : [0, 2\pi] \to E_2$ $c(t) = (r\cos t,$ $r\sin t)$ $(r > 0)$ este o curbă închisă.

1.4.2. Elipsa (ex. 1.2.2) este o curbă închisă.

1.4.3. Foliul lui Descartes și spirala lui Arhimede (ex. 1.2.3. și ex. 1.2.4) nu sînt curbe închise.

1.5. LEMA. Considerăm o curbă plană regulată, simplă și închisă

$$c : [a,b] \to E_2,\ c(s) = (x(s),y(s))$$

și fie S aria domeniului D mărginit de imaginea aplicației c. Atunci avem formulele:

$$(1.1) \qquad S = \int_a^b x(s)\dot{y}(s)ds = -\int_a^b \dot{x}(s)y(s)ds$$

<u>Demonstrație</u>. A doua egalitate din (1.1) se obține ușor folosind formula de integrare prin părți și faptul că c este curbă închisă. In adevăr, avem

$$\int_a^b x(s)\dot{y}(s)ds = x(s)y(s)\Big|_a^b - \int_a^b \dot{x}(s)y(s)ds = ,$$

$$= x(b)y(b) - x(a)y(a) - \int_a^b \dot{x}(s)y(s)ds =$$

$$= - \int_a^b \dot{x}(s)y(s)ds$$

Pentru a stabili prima egalitate din (1.1) vom folosi formula lui Green

$$\int_{\operatorname{Im} c} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\, dy$$

unde P și Q sînt două funcții diferențiabile definite pe D.

Dacă în formula lui Green luăm $Q(x,y) = x$ și $P(x,y) = -y$ atunci obținem

$$S = \iint_D dx\, dy = \frac{1}{2}\int_a^b \left[x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)\right] ds =$$

$$= \int_a^b x(s)\dot{y}(s)ds = - \int_a^b \dot{x}(s)y(s)ds .$$

<u>Observație</u>. Teorema ce urmează își propune să dea răspuns la următoarea întrebare: Dintre toate curbele plane regulate, simple și închise, avînd aceeași lungime L, care mărginește domeniul cu aria maximă?

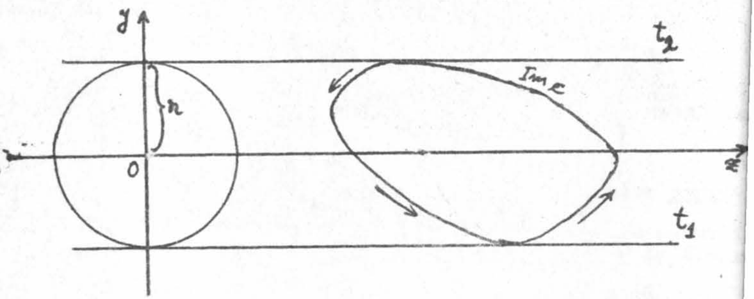
1.6. <u>TEOREMA. Considerăm o curbă plană regulată, simplă și închisă, avînd lungimea L și fie S aria domeniului D mărginit de curba c. Atunci avem</u>

(1.2) $$4\pi S \leq L^2 ,$$

<u>semnul egal are loc dacă şi numai dacă curba c este un cerc. Inegalitatea (1.2) poartă numele de inegalitatea izoperimetrică.</u>

<u>Demonstraţie</u>. Fie t_1 şi t_2 două drepte paralele, tangente la curba dată astfel încît toate punctele curbei să se găsească în regiunea cuprinsă între t_1 şi t_2. Fie 2 r distanţa între cele două drepte şi $\mathscr{C}(0, r)$ un cerc tangent dreptelor t_1 şi t_2.

Alegem sistemul de axe carteziene ortogonale cu originea în O, şi axă a absciselor paralela la t_1 dusă prin O



Curba considerată este

$$c : [0, L] \longrightarrow E_2 ,\ c(s) = (x(s), y(s)),\ \| \dot{c}(s) \| = 1,\ \forall\, s \in [0, L]$$

Pe cercul $\mathscr{C}(0, r)$ alegem ca parametru pe s. Deci $\mathscr{C}(0, r)$ este imaginea aplicaţiei diferenţiabile

$$c_1 : [0, L] \longrightarrow E_2 ,\ c_1(s) = (X(s), y(s))$$

Folosind formula (1.1) din lema anterioară, obţinem că aria cercului este dată de

$$\pi r^2 = \int_0^L X(s)\dot{y}(s)ds$$

Aria S a domeniului D mărginit de imaginea aplicaţiei c este

$$S = - \int_0^L \dot{x}(s)y(s)ds$$

Din ultimele două egalităţi, rezultă

$$\pi r^2 + S = \int_0^L \left[x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)\right]ds \leqslant \int_0^L \sqrt{\left[x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s)\right]^2} ds =$$

$$= \int_0^L \sqrt{\left[x^2(s) + y^2(s)\right]\left[\dot{y}^2(s) + \dot{x}^2(s)\right] - \left[x(s)\dot{x}(s) + y(s)\dot{y}(s)\right]^2} ds =$$

$$= \int_0^L \sqrt{r^2 - \left[x(s)\dot{x}(s) + y(s)\dot{y}(s)\right]^2}\, ds \leqslant \int_0^L \sqrt{r^2}\, ds = r\,L\ ,$$

unde am folosit egalităţile

$$x^2(s) + y^2(s) = r^2 \quad , \quad \dot{y}^2(s) + \dot{x}^2(s) = 1$$

şi identitatea lui Lagrange

$$(ad - bc)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2, \ (\forall) a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Am obţinut inegalitatea

$$(1.3) \qquad \pi r^2 + S \leqslant r\,L$$

Pe de altă parte folosind inegalitatea mediilor

$$\sqrt{a^2 b^2} \leqslant \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad , \qquad (\forall) a,b \in \mathbb{R}$$

obţinem

$$(1.3') \qquad \sqrt{\pi r^2\, S} \leqslant \frac{\pi r^2 + S}{2}$$

Inmulţind (1.3) şi (1.3') obţinem

$$\sqrt{\pi r^2\, S} \leqslant \frac{r\,L}{2} \quad ,$$

adică tocmai inegalitatea ce trebuie stabilită.

Singurul lucru pe care-l mai avem de arătat este acela că în (1.2) avem egalitate dacă şi numai dacă curba c este un cerc.

Presupunem că curba c este un cerc de rază r. Atunci avem

$$4\pi S = 4\pi \cdot \pi\, r^2 = (2\pi r)^2 = L^2$$

şi deci egalitatea dorită este evidentă.

Reciproc, să presupunem că avem egalitatea $4\pi S = L^2$ şi să demonstrăm că curba c este un cerc. Ultima egalitate poate fi scrisă sub forma

(1.2') $$2\sqrt{\pi r^2 S} = r L$$

Din (1.3) şi (1.3') avem

(1.3'') $$2\sqrt{\pi r^2 S} < \pi r^2 + S \leqslant r L$$

Tinînd seama de (1.2') şi (1.3'') rezultă că trebuie să avem

(1.4) $$\pi r^2 + S = r L$$

Tinînd seama de drumul parcurs pentru stabilirea inegalităţii (1.3), egalitatea (1.4) ne arată că trebuie să avem:

(1.5) $$x(s)\dot{x}(s) + y(s)\dot{y}(s) = 0 \quad , \quad (\forall) s \in [0, L]$$

(1.6) $$x(s)\dot{y}(s) - y(s)\dot{x}(s) > 0 \quad , \quad (\forall) s \in [0, L]$$

Deoarece curba c este regulată, egalitatea (1.5) poate fi scrisă sub forma

(1.5') $$\frac{x(s)}{\dot{y}(s)} = \frac{-y(s)}{\dot{x}(s)} = \lambda(s) \quad ,$$

unde $\lambda : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă. Din (1.5') rezultă

$$\lambda^2(s) = \frac{x^2(s)}{\dot{y}^2(s)} = \frac{y^2(s)}{\dot{x}^2(s)} = \frac{x^2(s) + y^2(s)}{\dot{y}^2(s) + \dot{x}^2(s)} = r^2$$

De aici rezultă $\lambda(s) = \varepsilon r$, unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$. Din (1.5') obţinem

(1.7) $$x(s) = \varepsilon r\dot{y}(s) \quad , \quad y(s) = -\varepsilon r\dot{x}(s)$$

Tinînd seama de (1.7), condiţia (1.6) implică $\varepsilon = 1$. Avem deci $y(s) = -r\dot{x}(s)$

Din ultima egalitate şi din relaţia $\dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s) = 1$, rezultă:

$\dfrac{\dot{y}(s)}{\sqrt{r^2-y^2(s)}} = \pm\dfrac{1}{r}$. De aici obţinem $y(s) = r \sin\left(\pm\frac{s}{r} + s_0\right)$, s_0 = const. De aici şi din egalitatea $y(s) = -r\,\dot{x}(s)$, rezultă $\dot{x}(s) = -\sin\left(\pm\frac{s}{r} + s_0\right)$. Obţinem $x(s) = \pm r \cos\left(\pm\frac{s}{r} + s_0\right) + a$, a = const. Rezultă că avem $[x(s) - a]^2 + y^2(s) = r^2$

Pe de altă parte folosind egalitatea $4\pi S = L^2$, relaţia (1.4) se scrie $(L - 2\pi r)^2 = 0$, adică $L = 2\pi r$. Rezultă că curba căutată $c : [0,L] \longrightarrow E_2$, $c(s) = \left(\pm r\cos\left(\frac{\pm s}{r} + s_0\right)+a, r\sin\left(\frac{\pm s}{r} + s_0\right)\right)$, $r = \frac{L}{2\pi}$ este un cerc cu centrul în punctul (a,0) şi raza r.

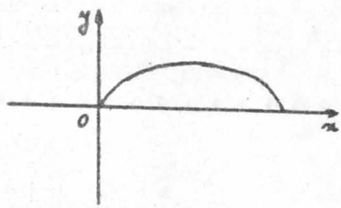
<u>Observaţie</u>. Este evident că aria domeniului plan mărginit de o curbă (închise şi

convexă având lungimea L, este mai mare decât aria domeniului plan mărginit de o curbă închisă neconvexă având lungimea L. Din această cauză în demonstrația teoremei 1.6. curba c am considerat-o convexă.

§ 2. Curbe ovale. Teorema lui Herglotz.

2.1. DEFINITIE. O curbă $c : I \to E_2$ se numeste curbă convexă dacă orice punct $c(t)$ al curbei are următoarea proprietate: toate punctele curbei (exceptînd punctul $c(t)$) se află în unul din cele două semiplane determinate de tangenta la curbă în punctul $c(t)$.

2.2. EXEMPLE. 2.2.1. Cicloida

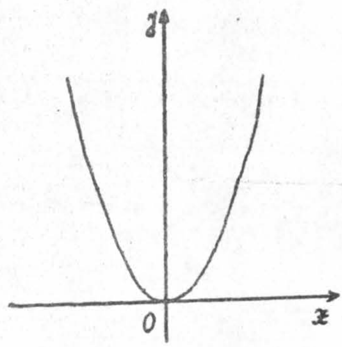


$c : [0, 2\pi] \to E_2$

$c(t) = (r(t-\sin t), r(1 - \cos t))$,

$r > 0$ este o curbă convexă.

2.2.2. Parabola



$c : \mathbb{R} \to E_2$

$c(t) = (t, t^2)$

este o curbă convexă.

2.2.3. Spirala lui Arhimede (ex. 1.2.4) nu este curbă convexă.

2.2.4. Astroida (ex. 1.2.2) nu este curbă convexă.

2.2.5. Elipsa (ex. 1.2.1) este curbă convexă.

2.2.6. Foliul lui Descartes (ex. 1.2.3) nu este curbă convexă.

2.2.7. Cercul este curbă convexă.

2.3. DEFINITIE. Fie $c : I \to E_2$ o curbă regulată si $t_0 \in \mathring{I} \subset I$ un punct interior intervalului I. Spunem că $c(t_0)$ este vîrf al curbei c dacă $\dot{K}_1(t_0) = 0$.

2.4. <u>**EXEMPLE**</u>. 2.4.1. Fie dreapta

$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2,\ c(t) = (t, at + b),\ a,b \in \mathbb{R},$$

Avem $K_1(t) = 0$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Rezultă $\dot{K}_1(t) = 0$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$, deci orice punct al dreptei este vîrf.

2.4.2. Curbura cercului $c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$, $c(t) = (r \cos t, r \sin t)$, $r > 0$ este $K_1(t) = \frac{1}{r}$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Rezultă $\dot{K}_1(t) = 0$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$, deci toate punctele cercului sînt vîrfuri.

2.4.3. Am văzut în ex. 6.1.1 că curbura elipsei $c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$, $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$, $a > 0$, $b > 0$ este

$$K_1(t) = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Avem

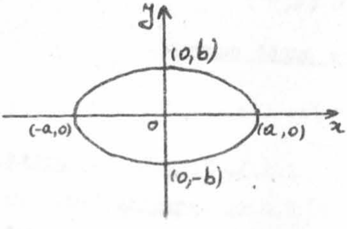
$$\dot{K}_1(t) = \frac{3ab(b^2 - a^2) \sin t \cos t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

Avem $\dot{K}_1(t) = 0 \iff t \in \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Deoarece avem $c(t + 2\pi) = c(t)$, rezultă că <u>curba c este periodică cu perioada 2π</u>. Obținem că elipsa are patru vîrfuri și anume punctele

$c(0) = (a, 0)$, $c(\pi) = (-a, 0)$

$c(\frac{\pi}{2}) = (0, b)$, $c(\frac{3\pi}{2}) = (0, -b)$



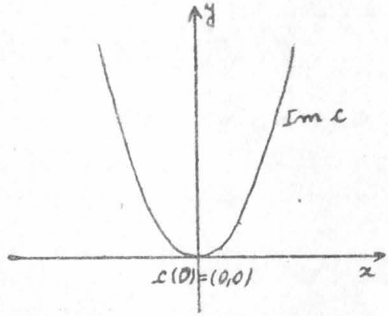
2.4.4. Curbura parabolei $c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2$, $c(t) = (t, t^2)$ este

$$K_1(t) = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Avem

$$\dot{K}_1(t) = \frac{-24t}{(1 + 4t^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Rezultă $\dot{K}_1(t) = 0 \Longleftrightarrow t = 0$. Prin urmare <u>parabola are un singur</u> vîrf $c(0) = (0, 0)$.



2.4.5. Considerăm curba

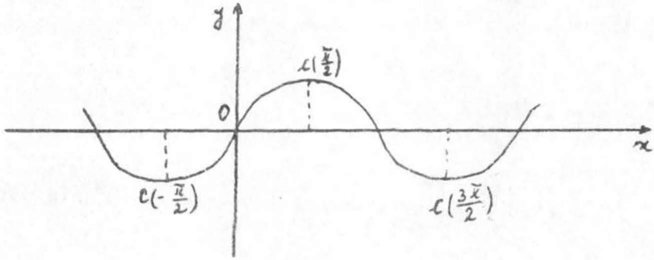
$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_2 \quad , \quad c(t) = (t, \sin t)$$

Avem

$$K_1(t) = \frac{-\sin t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\dot{K}_1(t) = \frac{-2(1 + \sin^2 t)\cos t}{(1 + \cos^2 t)^{\frac{5}{2}}}$$

Rezultă $\dot{K}_1(t) = 0 \Longleftrightarrow t \in \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Prin urmare curba c are o infinitate de vîrfuri. Figurăm cîteva dintre acestea



2.5. <u>DEFINITIE. Fie c o curbă regulată cu curbura pozitivă în fiecare punct. Se spune că c este curbă ovală dacă ea este simplă, închisă şi convexă</u>.

2.6. <u>EXEMPLE</u>. 2.6.1. Cercul

$$c : [0, 2\pi] \to E_2, \ c(t) = (r \cos t, r \sin t), \ r > 0$$

este o curbă ovală.

2.6.2. Elipsa

$$c : [0, 2\pi] \to E_2, \ c(t) = (a \cos t, b \sin t), \ a > 0, \ b > 0$$

este o curbă ovală.

2.6.3. Fie $a > 0$, $b > 0$ şi aplicaţia

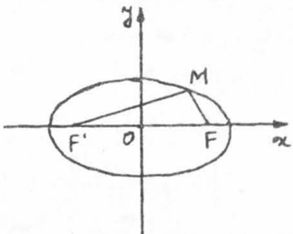
$$c : [0, 2\pi] \to E_2, \ c(t) = (\rho(t) \cos t, \ \rho(t) \sin t),$$

unde am folosit notaţia

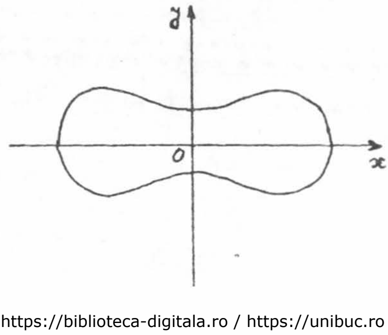
$$\rho^2(t) = b^2 \cos 2t \pm \sqrt{b^4 \cos^2 2t + a^4 - b^4}$$

Imaginea aplicaţiei c se numeşte <u>ovalul lui Cassini</u>. Ovalul lui Cassini este locul geometric al punctelor M din plan pentru care produsul distanţelor lor la două puncte fixe $F(b, 0)$, $F'(-b, 0)$ (focare) este constant şi egal cu a^2. Distingem mai multe cazuri

i) pentru $a \geq b\sqrt{2}$ ovalul lui Cassini este o curbă ovală



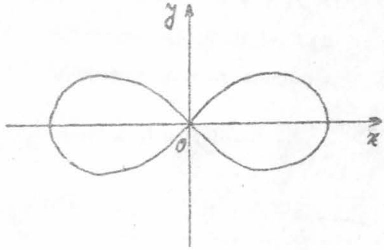
ii) pentru $b < a < b\sqrt{2}$ ovalul lui Cassini nu este curbă ovală (nu este convexă)



iii) pentru b = a se obţine <u>lemniscata lui Bernoulli</u>

$$c : [0, 2\pi] \to E_2,\ c(t) = (\rho(t)\cos t,\ \rho(t)\sin t)\ ,$$

unde $\rho^2(t) = 2a^2\cos 2t$.



Lemniscata lui Bernoulli nu este curbă ovală (nu este simplă, nu este convexă).

2.7. <u>TEOREMA (HERGLOTZ). O curbă ovală are cel puţin patru vîrfuri</u>.

<u>Demonstraţie</u>. Considerăm o curbă ovală de lungime L

$$c : [0, L] \to E_2\ ,\ c(s) = (x(s),\ y(s)),\ \|\dot{c}(s)\| = 1,\ (\forall)s\in[0, L]$$

Notăm cu $K_1(s)$ curbura curbei într-un punct $c(s)$. Vom considera două cazuri

<u>Cazul I</u>. Există un interval cu interiorul nevid $[s,b]\subset[0, L]$ astfel încît $K_1(s)$ = const, $(\forall)s\in[a, b]$, deci $\dot{K}_1(s) = 0$, $(\forall)s\in[a, b]$, adică curba c are o infinitate de vîrfuri.

<u>Cazul II</u>. Funcţia $K_1 : [0, L] \to R$ nu este constantă pe nici un interval $[a, b]\subset[0, L]$. Stim că funcţia $s \to K_1(s)$ este diferenţiabilă, deci $s \to K_1(s)$ este funcţie continuă. Dar o funcţie continuă pe un interval compact este mărginită şi îşi atinge marginile. Fie s_m, respectiv s_M punctele în care funcţia K_1 ia valoarea minimă, respectiv maximă. Fără a micşora generalitatea putem presupune că $s_m = 0$. Prin urmare avem

$$\dot{K}_1(0) = 0\quad ,\quad \dot{K}_1(s_M) = 0,\ \text{unde } s_M\in(0, L)$$

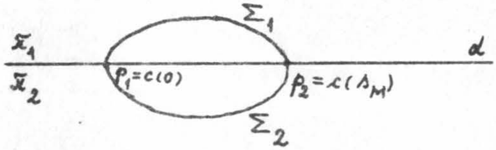
şi deci curba c are două vîrfuri.

Presupunem prin absurd că curba c nu mai are alte vîrfuri, deci că funcţia $\dot{K}_1 : [0, L] \to R$ nu se mai anulează în alte puncte.

Dreapta d determinată de punctele $c(0) = p_1$ şi $c(s_M) = p_2$ împarte planul în două semiplane deschise $\mathcal{F}_1$ şi $\mathcal{F}_2$. Notăm

$$\Sigma_1 = \mathcal{F}_1 \cap c([0, L]) = \mathrm{Im} c|_{(0, s_M)}$$

$$\Sigma_2 = \mathcal{F}_2 \cap c([0, L]) = \mathrm{Im} c|_{(s_M, L)}$$



Fie N un vector nenul perpendicular pe d. Considerăm funcţia liniară

$$f : E_2 \to R \ , \ f(p) = \langle p - p_1 \ , N \rangle$$

Este evident că $f(p) = 0 \iff p \in d$. Funcţia f fiind liniară rezultă că vom avea de studiat două situaţii:

(α) $f(p) > 0$ dacă $p \in \mathcal{F}_1$ şi $f(p) < 0$ dacă $p \in \mathcal{F}_2$

(β) $f(p) < 0$ dacă $p \in \mathcal{F}_1$ şi $f(p) > 0$ dacă $p \in \mathcal{F}_2$

Vom studia în continuare doar situaţia (α), deoarece (β) se tratează analog.

Deoarece funcţia $\dot{K}_1 : [0, L] \to R$ nu se mai anulează în alte puncte rezultă că avem

$$\dot{K}_1(s) > 0 \text{ pentru } s \in (0, s_M) \quad \text{şi}$$

$$\dot{K}_1(s) < 0 \text{ pentru } s \in (s_M, L)$$

In subcazul (α) obţinem

$$\dot{K}_1(s) f \circ c(s) > 0 \quad , \quad (\forall) s \in (0, L) - \{s_M\}$$

Avem şi

$$\dot{K}_1(0) f(p_1) = \dot{K}_1(s_M) f(p_2) = \dot{K}_1(L) f \circ c(L) = 0$$

Rezultă

$$\int_0^L \dot{K}_1(s) f \cdot c(s) ds > 0$$

Aplicînd formula de integrare prin părţi obţinem

$$K_1(s) f \cdot c(s) \Big|_0^L - \int_0^L K_1(s) \dot{\widehat{f \cdot c}}(s) ds > 0$$

sau

$$K_1(L) < c(L) - c(0), N > - K_1(0) < c(0) - c(0), N > -$$

$$- \int_0^L K_1(s) < \dot{c}(s), N > ds > 0$$

Deoarece curba c este închisă avem $c(0) = c(L)$, deci inegalitatea precedentă devine

$$\int_0^L < - K_1(s) e_1(s), N > ds > 0 \quad ,$$

unde $\{e_1, e_2\}$ este reperul Frenet asociat curbei c.

Folosind a doua formulă Frenet, rezultă

$$\int_0^L < \dot{e}_2(s), N > ds > 0$$

Prin integrare obţinem

$$< e_2(s), N > \Big|_0^L > 0 \ ,$$

ceea ce implică

$$< e_2(L) - e_2(0), N > \ > 0 \ ,$$

Conform formulei (6.2') (§ 6, cap. II) avem $e_2(s) = (- \dot{y}(s), \dot{x}(s)$.

Curba c fiind închisă avem

$$\dot{x}(0) = \dot{x}(L) \ , \ \dot{y}(0) = \dot{y}(L). \quad \text{Rezultă}$$

$$e_2(L) = (- \dot{y}(L), \dot{x}(L)) = (- \dot{y}(0), \dot{x}(0)) = e_2(0)$$

Acum ultima inegalitate se scrie

$$< 0 \ , N > \ > 0$$

ceea ce este absurd. Prin urmare există cel puţin un punct $s' \in (0, L) - \{s_M\}$ astfel încît $\dot{K}_1(s') = 0$. Numărul de vîrfuri trebuie să fie par, deoarece funcţia

$$\dot{K}_1 : [0, L] \to \mathbb{R}$$

îşi schimbă semnul cînd trece printr-un vîrf.
Rezultă că mai există un punct $s'' \in [0, L]$ astfel încît $\dot{K}_1(s'') = 0$.

CAPITOLUL III

TEORIA HIPERSUPRAFEȚELOR

§1. HIPERSUPRAFEȚE ÎN E_{n+1}. HIPERPLAN TANGENT, NORMALA LA O HIPERSUPRAFAȚĂ

1.1. DEFINIȚIE. Fie U o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Prin hipersuprafața parametrizată sau pe scurt hipersuprafață în E_{n+1} înțelegem o aplicație diferențiabilă

$$f : U \longrightarrow E_{n+1}$$

astfel încît aplicația liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$$

este injectivă, oricare ar fi punctul $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n) \in U$.

Se spune că $x^1, x^2, \ldots, x^n$ sînt parametrii hipersuprafeței. Hipersuprafețele din E_3 se numesc suprafețe.

1.2. DEFINIȚIE. Fie U și $\overline{U}$ două mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$ și fie

$$f : U \longrightarrow E_{n+1} \quad , \quad \overline{f} : \overline{U} \longrightarrow E_{n+1}$$

două hipersuprafețe parametrizate. Spunem că f și $\overline{f}$ diferă printr-o schimbare de parametri dacă există un difeomorfism

$$\varphi : \overline{U} \longrightarrow U$$

astfel încît $\overline{f} = f \circ \varphi$.

Este evident că dacă hipersuprafețele f și $\overline{f}$ diferă printr-o schimbare de parametri, atunci imaginile aplicațiilor f și $\overline{f}$ coincid, deci :

$$f(U) = \bar{f}(\bar{U})$$

Este uşor de văzut că hipersuprafeţele care diferă una de alta printr-o schimbare de parametri formează o clasă de echivalenţă. O astfel de clasă de echivalenţă se numeşte <u>hipersuprafaţă neparametrizată.</u>

Se spune că schimbarea de parametri păstrează orientarea dacă determinantul funcţional

$$\left| \frac{\partial \varphi^i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^j} \right|_{1 \le i,j \le n} , \quad \varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^n)$$

este pozitiv .

1.3. <u>OBSERVATIE</u>

1.3.1. Considerăm o hipersuprafaţă

$$f : U \longrightarrow E_{n+1} ,$$

$$x \longrightarrow f(x) = (f^1(x), f^2(x), \ldots, f^{n+1}(x))$$

şi fie $v = (v^1, v^2, \ldots, v^n) \in \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Notăm

$$v' = df_x(v) = (v'^1, \ldots\ldots\ldots, v'^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$$

Este cunoscută de la cursul de analiză următoarea formulă :

$$(1.1) \qquad v'^i = \sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \quad , \quad i \in \{1,2,\ldots,n+1\}$$

Fie $\bar{v} = (\bar{v}^1, \bar{v}^2, \ldots, \bar{v}^n)$ un alt vector din $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Folosind relaţiile (1.1), egalitatea

$$df_x(v) = df_x(\bar{v})$$

se scrie sub forma

$$\sum_{j=1}^{n} v^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) = \sum_{j=1}^{n} \bar{v}^j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) \quad , \quad i \in \{1,2,\dots,n+1\} ,$$

sau

$$(1.2) \qquad \sum_{j=1}^{n} (v^j - \bar{v}^j) \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x) = 0 \quad , \quad i \in \{1,2,\dots,n+1\}$$

Folosind (1.2) obţinem că aplicaţia

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)} \mathbb{R}^{n+1}$$

este injectivă dacă şi numai dacă matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x) & \dots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x) & \dots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

are rangul n , oricare ar fi $x \in U$, deci dacă şi numai dacă aplicaţia este imersie.

1.3.2. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Un punct din $n+1$ care aparţine imaginii aplicaţiei f va fi numit punct al hipersuprafeţei. Fie

$$\{e_1 = (1,0,0,\dots,0),\ e_2 = (0,1,0,\dots0),\dots,\ e_n = (0,0,0,\dots,0,1)\}$$

baza canonică a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Deoarece aplicaţia liniară df_x este injectivă pentru orice $x \in U$, rezultă că vectorii $df_x(e_1),\dots,\ df_x(e_n)$ sînt liniar independenţi. Folosind formulele (1.1) obţinem :

$$df_x(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = f_{x^i}(x)$$

pentru orice $i \in \{1,2,\dots,n\}$

Prin hiperplan tangent la hipersuprafaţa $f : U \to E_{n+1}$ în punctul $f(x) = (f^1(x), f^2(x), \dots, f^{n+1}(x))$ înţelegem hiperplanul care trece prin punctul $f(x)$ şi este paralel cu vectorii $f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x)$.

Hiperplanul tangent hipersuprafeţei $f : U \to E_{n+1}$ în punctul $f(x) = (f^1(x), \dots, f^{n+1}(x))$ are ecuaţia :

$$(1.3) \qquad \begin{vmatrix} X^1 - f^1(x) & \dots & X^{n+1} - f^{n+1}(x) \\ f^1_{x^1}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^1_{x^n}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{vmatrix} = 0$$

Fie $D_i(x)$ minorul de ordinul n obţinut după ştergerea coloanei i $(1 \leq i \leq n+1)$ din matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} f^1_{x^1}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^1_{x^n}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{pmatrix}$$

Dacă notăm $A_i(x) = (-1)^{i-1} D_i(x)$, atunci ecuaţia hiperplanului tangent hipersuprafeţei $f : U \to E_{n+1}$ în punctul $f(x) = (f^1(x), \dots, f^{n+1}(x))$ se scrie

$$(1.3') \quad \left[X^1 - f^1(x)\right] A_1(x) + \dots + \left[X^{n+1} - f^{n+1}(x)\right] A_{n+1}(x) = 0$$

Dreapta care trece prin punctul $f(x)$ şi este perpendiculară pe hiperplanul tangent hipersuprafeţei în punctul $f(x)$ se numeşte normala la hipersuprafaţă.

Ţinînd seama de (1.3') obţinem ecuaţiile normalei la hipersuprafaţa $f : U \to \mathcal{E}_{n+1}$ în punctul $f(x)$:

$$(1.4) \qquad \frac{X^1 - f^1(x)}{A_1(x)} = \dots = \frac{X^{n+1} - f^{n+1}(x)}{A_{n+1}(x)}$$

1.4. EXEMPLE

1.4.1. Considerăm aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}_{n+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n, a_1x^1+\dots+a_nx^n+b)$$

unde $a_1,\dots,a_n$ şi b sînt constante reale. Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

are rangul n , rezultă că f este imersie. Prin urmare $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}_{n+1}$ este o hipersuprafaţă. Aplicaţia $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{E}_{n+1}$ este o parametrizare a hiperplanului.

1.4.2. Considerăm mulţimea

$$U = \left\{(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 < 1\right\}$$

şi aplicaţia

$$f : U \to \mathcal{E}_{n+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n, \sqrt{1-(x^1)^2 - \dots - (x^n)^2} \ )$$

Este evident că aplicaţia f este diferenţiabilă.

Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{-x^1}{\sqrt{1-(x^1)^2-\dots-(x^n)^2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dfrac{-x^n}{\sqrt{1-(x^1)^2-\dots-(x^n)^2}} \end{pmatrix}$$

are rangul n, rezultă că $f : U \to E_{n+1}$ este o hipersuprafaţă. Aplicaţia f este o parametrizare a emihipersferei nordice.

1.4.3. Considerăm mulţimea

$$U = \left\{ (x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \dots x^n \neq 0 \right\}$$

şi aplicaţia

$$f : U \to E_{n+1}$$

definită prin :

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n, \frac{1}{x^1 \dots x^n} \ )$$

Este uşor de văzut că aplicaţia f este diferenţiabilă în orice punct $x \in U$. Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{-1}{(x^1)^2 x^2 \dots x^n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dfrac{-1}{x^1 (x^2)^2 x^3 \dots x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dfrac{-1}{(x^1) \dots x^{n-1} (x^n)^2} \end{pmatrix}$$

are rangul n , $(\forall)$ $x \in U$, rezultă că $f : U \to E_{n+1}$ este o hipersuprafaţă parametrizată în E_{n+1}.

Hiperplanul tangent hipersuprafeţei în punctul $f(x)$ are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} X^1-x^1 & X^2-x^2 & \ldots & X^n-x^n & X^{n+1}-\frac{1}{x^1\ldots x^n} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \frac{-1}{(x^1)^2x^2\ldots x^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{-1}{x^1\ldots x^{n-1}(x^n)^2} \end{vmatrix} = 0$$

Dacă dezvoltăm determinantul după prima linie, ecuaţia hiperplanului tangent se scrie :

$$(1.5)\qquad A_1(x)\,(X^1-x^1)+\ldots+A_n(x)(X^n-x^n)+$$
$$+A_{n+1}(x)\,\Big(X^{n+1}-\frac{1}{x^1\ldots x^n}\Big)=0\,,$$

unde am folosit notaţiile

$$(1.5')\qquad A_1(x)=\frac{(-1)^n}{(x^1)^2x^2\ldots x^n}\;,\ldots,\;A_n(x)=\frac{(-1)^n}{x^1\ldots x^{n-1}(x^n)^2}\,,$$
$$A_{n+1}(n)=(-1)^n$$

Dacă înmulţim (1.5) cu $x^1\ldots x^n$, ecuaţia hiperplanului tangent devine

$$(1.6)\qquad \frac{1}{x^1}(X^1-x^1)+\ldots+\frac{1}{x^n}(X^n-x^n)+x^1\ldots x^n\Big(X^{n+1}-\frac{1}{x^1\ldots x^n}\Big)=0$$

Ecuaţiile normalei la hipersuprafaţă în punctul $f(x)$ sînt

$$x^1(X^1-x^1)=\ldots=x^n(X^n-x^n)=\frac{X^{n+1}-\frac{1}{x^1\ldots x^n}}{x^1\ldots x^n}$$

<u>Observaţie.</u> Dacă $n=2$, atunci planul tangent în punctul $f(x)$ la suprafaţa f (considerată la 1.4.3) determină împreună cu planele de coordonate un tetraedru al cărui volum V este constant, oricare ar fi $x=(x^1,x^2)\in U$.

In adevăr, dacă se notează cu $p_1(x) = (3x^1,0,0)$, $p_2(x) = (0,3x^2,0)$ şi $p_3(x) = (0,0,\frac{3}{x^1x^2})$ punctele de intersecţie ale planului tangent în punctul $f(x)$ la suprafaţa f cu axele de coordonate, atunci avem

$$V = \frac{1}{6}\,|3x^1|\cdot|3x^2|\cdot\frac{3}{|x^1x^2|} = \frac{9}{2}$$

1.4.4. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval deschis. Considerăm aplicaţia

$$f : I\times\mathbb{R} \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$(1.7)\qquad f(x^1,x^2) = (X_o(x^1)+x^2\ell(x^1),\ Y_o(x^1)+x^2m(x^1), Z_o(x^1)+x^2n(x^1)),$$

unde funcţiile X_o, Y_o, Z_o, ℓ, m, n depind diferenţiabil de $x^1\in I$ şi

$$\ell^2(x^1) + m^2(x^1) + n^2(x^1) > 0$$

Este uşor de văzut că imaginea aplicaţiei f este generată de o dreaptă care trece printr-un punct oarecare al curbei strîmbe

$$c : x^1\in I \longrightarrow c(x^1) = (X_o(x^1),\ Y_o(x^1),\ Z_o(x^1))\in E_3$$

şi are parametrii directori $\ell(x^1)$, $m(x^1)$, $n(x^1)$.

Ecuaţiile acestei drepte sînt

$$d_{x^1} : \frac{X - X_o(x^1)}{\ell(x^1)} = \frac{Y - Y_o(x^1)}{m(x^1)} = \frac{Z - Z_o(x^1)}{n(x^1)}$$

Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$ cu proprietăţile

$$U\subset I\times\mathbb{R}\quad \text{şi}\quad \text{rang } J_f(x) = 2\quad (\forall)\ x = (x^1,x^2)\in U,$$

unde

$$J_f(x)=\begin{pmatrix} X_0'(x^1)+x^2\ell'(x^1) & Y_0'(x^1)+x^2m'(x^1) & Z_0'(x^1)+x^2n'(x^1) \\ \ell(x^1) & m(x^1) & n(x^1) \end{pmatrix}.$$

Aplicaţia $f : U \longrightarrow E_3$ definită prin (1.7) este o imersie, deci o suprafaţă parametrizată în E_3. Această suprafaţă se numeşte <u>suprafaţă riglată</u>. Dreapta variabilă d_{x^1} se numeşte <u>generatoarea suprafeţei</u>, iar curba c se numeşte <u>curbă directoare</u>.

<u>Exemplu</u>. Este uşor de verificat că aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin

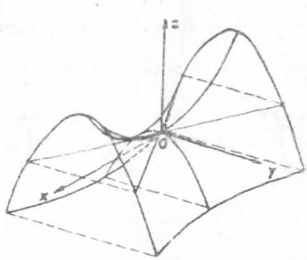
$$f(x^1,x^2) = (a(x^1+x^2),\ b(x^2-x^1),\ 2x^1x^2), \quad a > 0,\ b > 0$$

este o imersie.

Imaginea aplicaţiei f este paraboloidul hiperbolic de ecuaţie

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 2Z$$

Paraboloidul hiperbolic este o suprafaţă dublu riglată



Alt exemplu de suprafaţă dublu riglată este hiperboloidul cu o pînză.

1.4.5. <u>O suprafaţă riglată se numeşte suprafaţă desfăşurabilă dacă planul tangent la suprafaţă în punctele unei generatoare este acelaşi.</u>

Planul tangent într-un punct f(x) la suprafaţa riglată considerată la punctul 1.4.4. are ecuaţia

$$\begin{vmatrix} X-X_0(x^1)-x^2\ell(x^1) & Y-Y_0(x^1)-x^2m(x^1) & Z-Z_0(x^1)-x^2n(x^1) \\ X_0'(x^1)+x^2\ell'(x^1) & Y_0'(x^1)+x^2m'(x^1) & Z_0'(x^1)+x^2n'(x^1) \\ \ell(x^1) & m(x^1) & n(x^1) \end{vmatrix} = 0$$

Dacă adunăm la prima linie elementele liniei a treia înmulţite cu x^2, ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul f(x) devine :

$$\begin{vmatrix} X-X_0(x^1) & Y-Y_0(x^1) & Z-Z_0(x^1) \\ X_0'(x^1)+x^2\ell'(x^1) & Y_0'(x^1)+x^2m'(x^1) & Z_0'(x^1)+x^2n'(x^1) \\ \ell(x^1) & m(x^1) & n(x^1) \end{vmatrix} = 0 \tag{1.8}$$

Suprafaţa riglată considerată este desfăşurabilă dacă planul tangent nu depinde de x^2. Analizăm pe rînd cazurile ce se pot prezenta.

i) Un prim caz în care ecuaţia (1.8) nu depinde de x^2 este acela în care $X_0'(x^1) = 0$, $Y_0'(x^1) = 0$, $Z_0'(x^1) = 0$, adică $X_0 = \text{const.}$, $Y_0 = \text{const.}$, $Z_0 = \text{const.}$

Deoarece generatoarele suprafeţei trec printr-un punct fix (X_0, Y_0, Z_0), rezultă că imaginea aplicaţiei f este un con .

ii) Un al doilea caz în care ecuația (1.8) nu depinde de x^2 este $\ell'(x^1) = 0$, $m'(x^1) = 0$, $n'(x^1) = 0$ adică ℓ = const., m = const. n = const. In acest caz generatoarea suprafeței este paralelă cu o direcție fixă și deci imaginea aplicației f este un cilindru.

iii) Alt caz în care ecuația (1.8) nu depinde de x^2 este

$$\frac{\ell'(x^1)}{\ell(x^1)} = \frac{m'(x^1)}{m(x^1)} = \frac{n'(x^1)}{n(x^1)} = q(x^1)$$

De aici obținem

$$\ell(x^1) = a_1 w(x^1),\ m(x^1) = a_2 w(x^1)\ ,\ n(x^1) = a_3 w(x^1) \tag{1.9}$$

unde a_1, a_2, a_3 sînt constante și unde am folosit notația

$w(x^1) = e^{\int q(x^1)dx^1}$.

Din (1.9) vedem că generatoarele suprafeței sînt paralele cu direcția fixă de parametrii directori a_1, a_2, a_3. Prin urmare imaginea aplicației f este un cilindru.

iv) Un alt caz în care suprafața riglată este desfășurabilă este acela în care

$$X_0'(x^1) = a\,\ell'(x^1)\ ,\ Y_0'(x^1) = am'(x^1)\ ,\ Z_0'(x^1) = an'(x^1)\ , \tag{1.10}$$

unde a = const. Din (1.10) rezultă :

$$\begin{aligned} X_0(x^1) &= a\,\ell(x^1) + b^1 \\ Y_0(x^1) &= am(x^1) + b^2 \\ Z_0(x^1) &= an(x^1) + b^3 \end{aligned} \tag{1.11}$$

unde b^1, b^2, b^3 sînt constante. Din (1.11) și (1.7) rezultă

$$f(x^1,x^2)=(b^1+(a+x^2)\,\ell(x^1), b^2+(a+x^2)m(x^1), b^3+(a+x^2)n(x^1))$$

Prin urmare generatoarele suprafeței trec prin punctul fix $B(b^1, b^2, b^3)$ şi deci imaginea aplicației f este un con.

v) Un ultim caz în care ecuația (1.8) nu depinde de x^2 este acela în care avem

(1.12) $\quad \ell(x^1)=h(x^1)X'_o(x^1),\ m(x^1)=h(x^1)Y'_o(x^1),\ n(x^1)=h(x^1)Z'_o(x^1)$

Din (1.12) şi (1.7) obținem

$$f(x^1,x^2)=(X_o(x^1)+x^2h(x^1)X'_o(x^1), Y_o(x^1)+x^2h(x^1)Y'_o(x^1), Z_o(x^1)+x^2h(x^1)Z'_o(x^1))$$

Generatoarea suprafeței are ecuațiile

$$d_{x^1}:\ \frac{X-X_o(x^1)}{X'_o(x^1)}=\frac{Y-Y_o(x^1)}{Y'_o(x^1)}=\frac{Z-Z_o(x^1)}{Z'_o(x^1)}$$

Prin urmare imaginea aplicației f este generată de tangentele la curba directoare.

Rezultă că suprafețele desfăşurabile sînt cilindri, conuri sau suprafețe generate de tangentele la o curbă strîmbă.

Acestea sînt singurele suprafețe desfăşurabile (vezi [25] p.53).

§2. CIMPURI DE VECTORI TANGENTI UNEI HIPERSUPRAFETE. REPER GAUSS.

2.1. Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă, deci aplicaţia liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$$

este injectivă, oricare ar fi $x \in U$.

Notăm $T_{f(x)}f = df_x(T_x \mathbb{R}^n)$. Deoarece aplicaţia df_x este injectivă rezultă că $T_{f(x)}f$ este subspaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1}$. Spaţiul vectorial $T_{f(x)}f$ are dimensiunea n .

DEFINITIE. Spaţiul vectorial $T_{f(x)}f$ se numeşte spaţiul tangent la hipersuprafaţa f în punctul $f(x)$. Elementele spaţiului tangent $T_{f(x)}f$ se numesc vectori tangenţi în punctul $f(x)$ la hipersuprafaţa f.

OBSERVATIE. Prin aplicarea injecţiei liniare df_x , baza canonică $\left\{e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,1)\right\}$ a spaţiului $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$ merge în baza $\left\{f_{x^1}(x) ,\ldots, f_{x^n}(x) \right\}$ a spaţiului vectorial $T_{f(x)}f$.

2.2. DEFINITIE. Prin cîmp de vectori de-a lungul hipersuprafeţei $f : U \to E_{n+1}$ înţelegem o aplicaţie diferenţiabilă $X : U \to E_{n+1}$ astfel încît

$$X(x) \cong (f(x),X(x)) \in T_{f(x)} E_{n+1} \cong E_{n+1}, \ (\forall)\ x \in U .$$

2.3. DEFINITIE. Fie $X : U \to E_{n+1}$ un cîmp de vectori de-a lungul hipersuprafeţei $f : U \to E_{n+1}$. X se numeşte cîmp de vectori tangenţi hipersuprafeţei f dacă $X(x) \in T_{f(x)}f$, $(\forall)\ x \in U$.

<u>EXEMPLU</u>. Cîmpurile vectoriale $x \in U \to f_{x^i}(x) \in T_{f(x)}f$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ sînt cîmpuri de vectori tangenţi hipersuprafeţei f.

<u>PROPOZIŢIE. Fie</u> $X : U \to E_{n+1}$ <u>un cîmp de vectori tangenţi hipersuprafeţei</u> $f : U \to E_{n+1}$. <u>Atunci există şi sînt unice aplicaţiile diferenţiabile</u> $X^i : U \to R$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ <u>astfel încît să avem</u>

$$X(x) = X^i(x) f_{x^i}(x) \quad , \quad (\forall)\ x \in U \tag{2.1}$$

<u>Demonstraţie</u>. Existenţa şi unicitatea funcţiilor X^i cu proprietatea (2.1) rezultă din faptul că $\{f_{x^i}(x)\}_{1 \le i \le n}$ este bază în $T_{f(x)}f$ şi $X(x) \in T_{f(x)}f$. Rămîne să demonstrăm că funcţiile $x \to X^i(x)$ sînt diferenţiabile. Dacă înmulţim scalar relaţia (2.1) cu $f_{x^k}(x)$, rezultă

$$\langle f_{x^i}(x) , f_{x^k}(x) \rangle X^i(x) = \langle X(x), f_{x^k}(x) \rangle \tag{2.2}$$

Fie $f^1, f^2, \ldots, f^{n+1}$ componentele aplicaţiei f. Notăm cu ${}^tJ_f(x)$ transpusa matricei :

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} f^1_{x^1}(x) & \ldots & f^{n+1}_{x^1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f^1_{x^n}(x) & \ldots & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{pmatrix}$$

Ştim că rangul lui $J_f(x) = n$ pentru orice $x \in U$ (din definiţia hipersuprafeţei parametrizate). Avem :

$$J_f(x)\ {}^tJ_f(x) = \begin{pmatrix} f^1_{x^1}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^1_{x^n}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^1_{x^1}(x) & \dots & f^1_{x^n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{n+1}_{x^1}(x) & \dots & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \langle f_{x^1}(x), f_{x^1}(x)\rangle & \dots & \langle f_{x^1}(x), f_{x^n}(x)\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle f_{x^n}(x), f_{x^1}(x)\rangle & \dots & \langle f_{x^n}(x), f_{x^n}(x)\rangle \end{pmatrix} =$$

$$= (\langle f_{x^i}(x), f_{x^j}(x)\rangle)_{1 \le i,j \le n}.$$

Deoarece rang $J_f(x)$ = rang ${}^tJ_f(x) = n$, rezultă că rang $J_f(x)\ {}^tJ_f(x) = n$.

Prin urmare sistemul liniar şi neomogen (2.2) are soluţie unică. Rezolvăm sistemul (2.2) folosind regula lui Cramer şi obţinem :

$$X^1(x) = \frac{\Delta^1(x)}{\Delta(x)}\ ,\dots,\ X^n(x) = \frac{\Delta^n(x)}{\Delta(x)}$$

unde $\Delta(x) = \det(\langle f_{x^i}(x), f_{x^j}(x)\rangle)$ şi unde determinantul $\Delta^s(x)$ $(s \in \{1,2,\dots,n\})$ se obţine înlocuind coloana s din determinantul $\Delta(x)$ cu coloana termenilor liberi din sistemul (2.2).

Deoarece funcţiile

$$x \to \Delta(x)\ ,\quad x \to \Delta^s(x)\ ,\quad s \in \{1,2,\dots,n\}$$

sînt diferenţiabile şi $\Delta(x) \ne 0$ pentru orice $x \in U$, rezultă că funcţiile

$$X^i : x \in U \to X^i(x) = \frac{\Delta^i(x)}{\Delta(x)} \in \mathbb{R}$$

sînt diferenţiabile pentru orice $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

2.4. DEFINITIE. Fie $X : U \to E_{n+1}$ un cîmp de vectori tangenţi hipersuprafeţei $f : U \longrightarrow E_{n+1}$. X se numeşte cîmp vectorial normal hipersuprafeţei, dacă oricare ar fi $x \in U$, vectorul $X(x)$ este ortogonal spaţiului $T_{f(x)}f$, adică

$$\langle X(x), f_{x^i}(x) \rangle = 0 \ , \ (\forall)\ x \in U \ , \ (\forall)\ i \in \{1,\dots,n\}$$

EXEMPLU. Fie $\{f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x)\}$ baza canonică a spaţiului tangent $T_{f(x)}f$. Este uşor de văzut că funcţia

$$x \longrightarrow f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x)$$

este diferenţiabilă. In plus avem :

$$\langle f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x) \ , \ f_{x^i}(x) \rangle = 0$$

pentru orice $i \in \{1,\dots,n\}$. Rezultă că vectorul $f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x)$ este ortogonal spaţiului $T_{f(x)}f$ pentru orice $x \in U$. Prin urmare $x \to f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x)$ este un cîmp vectorial normal hipersuprafeţei.

2.5. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă parametrizată şi fie $\{f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x)\}$ baza canonică a spaţiului tangent $T_{f(x)}f$. Notăm

$$(2.3) \qquad N(x) = \frac{f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x)}{\| f_{x^1}(x) \times \dots \times f_{x^n}(x) \|}$$

Este evident că $x \longrightarrow N(x)$ este cîmp vectorial unitar normal hipersuprafeţei f. Reperul

$$\{f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x), N(x)\}$$

se numeşte reper Gauss în punctul $f(x)$.

Aplicaţia

$$N : U \longrightarrow E_{n+1},$$
$$x \longrightarrow N(x),$$

unde $N(x)$ este dat de (2.3), se numește <u>aplicația Gauss</u>. Este ușor de văzut că imaginea aplicației Gauss este inclusă în sfera unitate

$$S^n = \{ v \in E_{n+1} \mid \|v\| = 1 \}$$

2.6. <u>EXEMPLE</u> (sfera, elicoidul drept, suprafețele de rotație, torul, pseudosfera, catenoidul).

2.6.1. Considerăm mulțimea $U = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$ și aplicația

$$f : U \longrightarrow E_3$$

definită prin

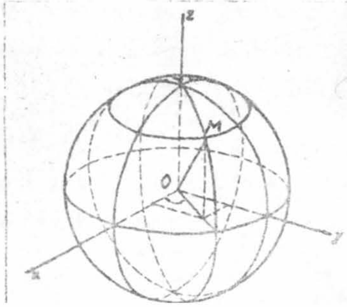
$$f(x^1,x^2) = (r \cos x^1 \cos x^2, r \cos x^1 \sin x^2, r \sin x^1),$$

unde r este o constantă reală strict pozitivă.

Este ușor de văzut că imaginea aplicației f este sfera S^2 din care scoatem polul nord $N_1 = (0, 0, r)$ și polul sud $S_1 = (0, 0, -r)$. Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} -r \sin x^1 \cos x^2 & -r \sin x^1 \sin x^2 & r \cos x^1 \\ -r \cos x^1 \sin x^2 & r \cos x^1 \cos x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

are rangul doi, rezultă că f este o suprafață.



Baza canonică a spațiului tangent $T_{f(x)}f$ este constituită din vectorii

(2.4) $$f_{x^1}(x) = (-r \sin x^1 \cos x^2, -r \sin x^1 \sin x^2, r \cos x^1)$$

(2.5) $$f_{x^2}(x) = (-r \cos x^1 \sin x^2, r \cos x^1 \cos x^2, 0)$$

Avem

$$f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x) = (-r^2 \cos^2 x^1 \cos x^2, -r^2 \cos^2 x^1 \sin x^2, -r^2 \sin x^1 \cos x^1) ,$$

$$\| f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x) \| = r^2 \cos x^1$$

Rezultă

(2.6) $$N(x) = (- \cos x^1 \cos x^2, - \cos x^1 \sin x^2, - \sin x^1)$$

Prin urmare reperul Gauss în punctul $f(x)$ este

$\left\{ f_{x^1}(x) , f_{x^2}(x), N(x) \right\}$ unde vectorii $f_{x^1}(x)$, $f_{x^2}(x)$ și $N(x)$ sînt dați prin (2.4), (2.5) și (2.6).

Observăm că avem

(2.7) $$N(x) = - \frac{1}{r} f(x)$$

Observație. i) Dacă x^1 = const, atunci punctul M descrie pe sferă un cerc situat într-un plan paralel cu planul XOY . Un astfel de cerc va fi numit pe scurt paralel.

ii) Dacă x^2 = const, atunci punctul M descrie pe sferă un cerc mare situat într-un plan ce conține axa OZ și din care scoatem punctele N_1 și S_1. Un astfel de cerc va fi numit meridian.

2.6.2. Considerăm aplicația

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$f(x^1,x^2) = (x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ b\,x^2)\ ,$$

unde b = const. $\neq 0$. Este evident că aplicația f este diferențiabilă. Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} \cos x^2 & \sin x^2 & 0 \\ -x^1\sin x^2 & x^1\cos x^2 & b \end{pmatrix}$$

are rangul doi oricare ar fi $x = (x^1,\ x^2) \in \mathbb{R}^2$, rezultă că f este suprafață parametrizată. Baza canonică a spațiului tangent $T_{f(x)}f$ este constituită din vectorii

(2.8) $\qquad f_{x^1}(x) = (\cos x^2,\ \sin x^2,\ 0)$

și

(2.9) $\qquad f_{x^2}(x) = (-x^1\sin x^2,\ x^1\cos x^2, b)$

Avem

$$f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x) = (b\sin x^2,\ -b\cos x^2, x^1)\ ,$$

$$\| f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x) \| = \sqrt{b^2 + (x^1)^2}$$

Rezultă

(2.10) $\qquad N(x) = \left(\dfrac{b\sin x^2}{\sqrt{b^2+(x^1)^2}}\ ,\ \dfrac{-b\cos x^2}{\sqrt{b^2+(x^1)^2}}\ ,\ \dfrac{x^1}{\sqrt{b^2+(x^1)^2}} \right)$

Prin urmare reperul Gauss în punctul $f(x)$ este $\left\{ f_{x^1}(x),\ f_{x^2}(x)\ ,\ N(x) \right\}$, unde vectorii $f_{x^1}(x)$, $f_{x^2}(x)$ și $N(x)$ sînt dați prin (2.8), (2.9) și (2.10).

<u>Observatie</u>. Imaginea aplicației f este generată de normala principală la elicea circulară

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow E_3 ,$$

(2.11) $$e(t) = (a \cos t,\ a \sin t,\ bt)$$

unde $a>0$, $b \neq 0$.

In adevăr, ecuațiile normalei principale la elicea circulară (2.11) sînt

(2.12) $$\frac{X - a \cos t}{\cos t} = \frac{Y - a \sin t}{\sin t} = \frac{Z - bt}{0}$$

Ecuațiile (2.12) pot fi scrise sub forma

(2.12') $$\frac{X}{\cos t} = \frac{Y}{\sin t} = \frac{Z - bt}{0}$$

Fie x^1 valoarea comună a acestor rapoarte și fie $x^2 = t$. Atunci din (2.12'), obținem ecuațiile parametrice ale suprafeței generate de normala principală la elicea circulară

$$\begin{cases} X = x^1 \cos x^2 \\ Y = x^1 \sin x^2 \\ Z = b\, x^2 \end{cases}$$

unde $b \neq 0$. Suprafața astfel obținută se numește <u>elicoid drept</u>.

2.6.3. Ne propunem să scriem reperul Gauss într-un punct oarecare al unei <u>suprafețe de rotație.</u> Fie $e : I \to E_3$ o curbă regulată. Presupunem că imaginea aplicației e se află într-un plan. In acest plan considerăm o dreaptă care nu intersectează curba. Rotind $e(I)$ în jurul dreptei se obține o suprafață numită <u>suprafață de rotație</u>. Să considerăm în E_3 un sistem de axe carteziene ortogonale OXYZ astfel încît $e(I)$ să fie în planul XOZ, iar axa de rotație să fie OZ. Aplicația

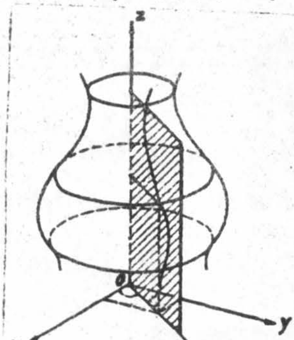
$$e : I \longrightarrow E_3$$

este definită prin

$$e(t) = (\varphi(t)\ ,\ 0,\ \psi(t))\ ,$$

unde

$$\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) > 0\ ,\quad \varphi(t) \neq 0\ ,\quad (\forall)\ t \in I\ .$$



Fie $C = (0,0,\ \psi(t))$ centrul cercului descris de un punct oarecare $(\varphi(t),0,\ \psi(t))$ al curbei date.

Fie $M = (X,Y,Z)$ un punct oarecare pe acest cerc. Notăm $x^1 = t$ și fie x^2 unghiul de rotație pe care-l face raza CM cu axa OX. Atunci avem :

$$X = \varphi(x^1) \cos x^2\ ,\quad Y = \psi(x^1) \sin x^2\ ,$$

$$Z = \psi(x^1)$$

Notăm $U = \left\{(x^1,x^2)\in \mathbb{R}^2 \mid \dot\varphi^2(x^1) + \dot\psi^2(x^1) > 0 ,\quad \varphi(x^1)\neq 0\right\}$. Să arătăm că aplicația :

$$f : (x^1,x^2)\in U \longrightarrow f(x^1,x^2) = (\varphi(x^1)\cos x^2, \varphi(x^1)\sin x^2, \psi(x^1))\in E_3$$

este o suprafață parametrizată.

Pentru orice $x = (x^1,x^2)\in U$ avem :

(2.13) $\quad f_{x^1}(x) = (\dot\varphi(x^1)\cos x^2, \dot\varphi(x^1)\sin x^2, \dot\psi(x^1))$

(2.14) $\quad f_{x^2}(x) = (-\varphi(x^1)\sin x^2, \varphi(x^1)\cos x^2, 0)$

Deoarece rangul matricei

$$J_f(x)=\begin{pmatrix} \dot\varphi(x^1)\cos x^2 & \dot\varphi(x^1)\sin x^2 & \dot\psi(x^1) \\ -\varphi(x^1)\sin x^2 & \varphi(x^1)\cos x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

este doi, rezultă că f este imersie și deci f este o suprafață parametrizată în spațiul E_3. Avem

$$f_{x^1}(x)\times f_{x^2}(x) = (-\varphi(x^1)\dot\psi(x^1)\cos x^2, -\varphi(x^1)\dot\psi(x^1)\sin x^2, \varphi(x^1)\dot\varphi(x^1))$$

Deoarece

$$\| f_{x^1}(x)\times f_{x^2}(x)\| = |\varphi(x^1)|\sqrt{\dot\varphi^2(x^1) + \dot\psi^2(x^1)}$$

rezultă că vectorul unitar normal suprafeței într-un punct oarecare $f(x)$ este

(2.15) $\quad N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\dot\varphi^2(x^1) + \dot\psi^2(x^1)}}(-\dot\psi(x^1)\cos x^2, -\dot\psi(x^1)\sin x^2, \dot\varphi(x^1))$

Prin urmare reperul Gauss într-un punct oarecare al suprafeței considerate este dat prin (2.13), (2.14) și (2.15) .

Observații.

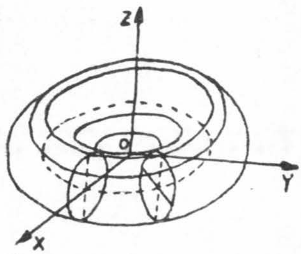
2.6.3.1. Dacă $\varphi(t) = a + b\cos t$, $\psi(t) = b\sin t$, $t \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$, atunci imaginea aplicației

$$c : \mathbb{R} \to E_3 \ , \quad c(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t)) \ ,$$

este un cerc cu centrul pe axa OX și de rază b. Suprafața de rotație obținută este :

$$f : (x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow f(x^1,x^2) = ((a+b\cos x^1)\cos x^2, (a+b\cos x^1)\sin x^2, b\sin x^1) \in E_3 .$$

Imaginea aplicației f se numește <u>tor</u>.



2.6.3.2. Dacă $\varphi(t) = r\sin t$, $\psi(t) = r(\ln|\mathrm{tg}\,\frac{t}{2}| + \cos t)$, $r = \mathrm{const}$, $t \in I$, atunci imaginea aplicației

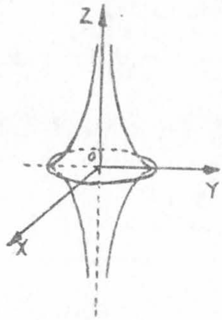
$$c : I \to E_3 \ , \quad c(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t)) \ , \qquad I = (0, \pi)$$

este o tractrice situată în planul XOZ. Se obține suprafața de rotație

$$f : U \to E_3 \ , \qquad U = I \times \mathbb{R}$$

$$f(x^1,x^2) = (r\sin x^1\cos x^2, r\sin x^1\sin x^2, r(\ln|\mathrm{tg}\,\frac{x^1}{2}| + \cos x^1))$$

Imaginea aplicației f se numește <u>pseudosferă</u>.



2.6.3.3. Dacă $\varphi(t) = a \operatorname{ch} \frac{t}{a}$, $\psi(t) = t$, $a>0$, $t \in \mathbb{R}$,

atunci imaginea aplicației

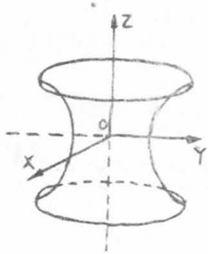
$$c : \mathbb{R} \longrightarrow E_3, \quad c(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t))$$

este un lănțișor situat în planul XOZ. Se obține suprafața de rotație

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3,$$

$$f(x^1, x^2) = (a \operatorname{ch} \frac{x^1}{a} \cos x^2, a \operatorname{ch} \frac{x^1}{a} \sin x^2, x^1)$$

Imaginea aplicației f se numește <u>catenoid</u>.



§ 3. PRIMA FORMA FUNDAMENTALA A UNEI HIPERSUPRAFETE, INVARIANTA PRIMEI FORME FUNDAMENTALE LA SCHIMBARI DE PARAMETRII SI LA IZOMETRII ALE SPATIULUI EUCLIDIAN E_{n+1} .

3.0.a) Fie V un spaţiu vectorial real cu n dimensiuni. Se numeşte formă biliniară simetrică orice aplicaţie

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

care îndeplineşte condiţiile :

$$g(X,Y) = g(Y,X) \qquad g(aX+bY,Z) = ag(X,Z) + bg(Y,Z)$$

pentru orice vectori $X,Y,Z \in V$ şi orice $a,b \in \mathbb{R}$

Spunem că g este pozitiv definită dacă pentru orice $X \in V$, $X \neq 0$ avem $g(X,X) > 0$

Exemplu : Produsul scalar din spaţiul euclidian E_n .

b) Fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ o bază în spaţiul vectorial V. Notăm

$$g_{ij} = g(e_i,e_j)$$

Matricea (g_{ij}) se numeşte matricea formei biliniare simetrice g relativă la baza $\{e_1,\dots,e_n\}$. Dacă $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j \in V$ atunci avem

$$g(X,Y) = g_{ij}\, X^i Y^j$$

Fie $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ o altă bază a spaţiului vectorial V. Dacă punem $e_i = a_i^k e'_k$ atunci avem

$$g_{ij} = a_i^k\, a_j^s\, g'_{ks} ,$$

unde (g'_{ks}) este matricea formei biliniare simetrice g relativă la baza $\{e'_1,\dots,e'_n\}$.

c) Fie V şi $\overline{V}$ două spaţii vectoriale şi fie

$$u : \overline{V} \longrightarrow V$$

o aplicaţie liniară. Considerăm o formă biliniară simetrică

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

Atunci aplicaţia

$$\overline{g} : \overline{V} \times \overline{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$\overline{g}(X,Y) = g(u(X),\ u(Y))$$

este o formă biliniară simetrică.

Presupunem că g este pozitiv definită şi că u este injecţie. Atunci şi $\overline{g}$ este pozitiv definită, deoarece

$$X \in \overline{V} - \{0\} \Longrightarrow u(X) \in V - \{0\} \Longrightarrow \overline{g}(X,X) = g(u(X),\ u(X)) > 0$$

3.1.A. DEFINITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Atunci pentru orice $x \in U$ are loc incluziunea

$$T_{f(x)}f \subset T_{f(x)} E_{n+1} \cong E_{n+1}$$

Prin această incluziune este dată o formă biliniară simetrică

$$g_x : T_{f(x)}f \times T_{f(x)}f \longrightarrow \mathbb{R} \quad ,$$

indusă de produsul scalar din E_{n+1}, deci

$$(3.1) \qquad g_x(X,Y) = \langle X,Y \rangle \ , \ (\forall)\ X,Y \in T_{f(x)}f$$

Aplicaţia $x \longmapsto g_x$ se numeşte prima formă fundamentală a hipersuprafeţei.

B. DEFINITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Prin injecţia liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)}\ \mathbb{R}^{n+1}$$

este dată o formă biliniară simetrică

$$I_x : T_x\mathbb{R}^n \times T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

indusă de produsul scalar din $E_{n+1} \cong T_{f(x)}E_{n+1}$, deci

$$(3.2) \qquad I_x(X,Y) = \langle df_x X , df_x Y \rangle \quad (\forall)\ X,Y \in T_x\mathbb{R}^n$$

Aplicaţia $x \longrightarrow I_x$ se numeşte tot prima formă fundamentală a hipersuprafeţei.

OBSERVATIE. Considerăm bijecţia liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(x)}f \subset T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$$

Pentru $X,Y \in T_x\mathbb{R}^n$ avem :

$$I_x(X,Y) \overset{(3.2)}{=\!=} \langle df_x X , df_x Y\rangle \overset{(3.1)}{=\!=} g_x(df_x X , df_x Y)$$

Avem deci

$$I_x(X,Y) = g_x(df_x X , df_x Y)$$

Dacă identificăm spaţiile vectoriale $T_x\mathbb{R}^n$ şi $T_{f(x)}f$ prin bijecţia liniară df_x, atunci este evident că vom putea renunţa la deosebirea dintre cele două definiţii anterioare.

3.2. PROPOZITIE. Fie $(g_{ij}(x))$ matricea formei biliniare simetrice g_x, relativă la baza canonică $\{f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x)\}$ a spaţiului tangent $T_{f(x)}f$. Atunci :

i) Funcţiile

$$g_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow g_{ij}(x)$$

sînt diferenţiabile. Dacă X şi Y sînt două cîmpuri de vectori tangenţi hipersuprafeţei atunci aplicaţia

$$x \longrightarrow g_x(X(x), Y(x))$$

este diferenţiabilă.

ii) $(g_{ij}(x))$ <u>este şi matricea formei biliniare simetrice</u> I_x <u>relativă la baza canonică</u> $\{e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,0,1)\}$ <u>a spaţiului vectorial</u> $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$

<u>Demonstraţie</u>. i) Pentru orice $x \in U$, avem

$$g_{ij}(x) = g_x(f_{x^i}(x),\ f_{x^j}(x)) = \langle f_{x^i}(x),\ f_{x^j}(x)\rangle$$

Deoarece funcţiile $x \to f_{x^i}(x)$ sînt diferenţiabile, rezultă că şi $x \to g_{ij}(x)$ sînt funcţii diferenţiabile.

Fie X şi Y două cîmpuri de vectori tangenţi hipersuprafeţei f.

Din propoziţia 2.3. rezultă că există şi sînt unice funcţiile diferenţiabile

$$X^i,\ Y^j : U \to \mathbb{R} \quad , \quad i,j \in \{1,\ldots,n\}$$

astfel încît să avem :

$$X(x) = X^i(x)\, f_{x^i}(x) \ , \quad Y(x) = Y^j(x) f_{x^j}(x)) \text{. Rezultă}$$

$$\begin{aligned} g_x(X(x),Y(x)) &= X^i(x)\, Y^j(x)\, g_x(f_{x^i}(x),\ f_{x^j}(x)) = \\ &= g_{ij}(x)\, X^i(x)\, Y^j(x) \end{aligned}$$

Deoarece funcţiile $x \to X^i(x)$, $x \to Y^j(x)$, $x \to g_{ij}(x)$ sînt diferenţiabile, rezultă că şi funcţia $x \to g_{ij}(x)\, X^i(x)\, Y^j(x)$ este diferenţiabilă. Prin urmare funcţia $x \to g_x(X(x),\ Y(x))$ este diferenţiabilă.

ii) Pentru orice $x \in U$, avem :

$$I_x(e_i,e_j) = \langle df_x\, e_i,\ df_x\, e_j\rangle =$$

$$= \langle f_{x^i}(x)\ ,\ f_{x^j}(x)\rangle = g_{ij}(x)$$

3.3. PROPOZITIE. Prima formă fundamentală a unei hipersuprafețe este pozitiv definită.

Demonstrație. Este evident că dacă X este un cîmp de vectori tangenți hipersuprafeței f și $X(x) \neq 0$, $x \in U$, atunci

$$g_x(X(x), X(x)) = \langle X(x), X(x) \rangle > 0$$

3.4. PROPOZITIE. (Invarianța primei forme fundamentale la o schimbare de parametri). Fie U și $\bar{U}$ două mulțimi deschise în $\mathbb{R}^n$, $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață și $\varphi : \bar{U} \to U$ un difeomorfism.

Atunci

$$\bar{f} = f \circ \varphi : \bar{U} \to E_{n+1}$$

este hipersuprafață și avem :

$$\bar{I}_{\bar{x}}(\bar{X},\bar{Y}) = I_x(d\varphi_{\bar{x}}\bar{X}, d\varphi_{\bar{x}}\bar{Y}), \ (\forall)\ \bar{X},\bar{Y} \in T_{\bar{x}}\mathbb{R}^n, \ (\forall)\ \bar{x} \in \bar{U},$$

unde $x = \varphi(\bar{x})$.

Demonstrație. Fie $\bar{x} \in \bar{U}$. Notăm $x = \varphi(\bar{x})$. Pentru $\bar{X},\bar{Y} \in T_{\bar{x}}\ \mathbb{R}^n$ avem :

$$\bar{I}_{\bar{x}}(\bar{X},\bar{Y}) \overset{(3.2)}{=} \langle d\bar{f}_{\bar{x}}\bar{X}, d\bar{f}_{\bar{x}}\bar{Y} \rangle =$$

$$= \langle d(f \circ \varphi)_{\bar{x}}\ \bar{X} , \ d(f \circ \varphi)_{\bar{x}}\bar{Y} \rangle =$$

$$= \langle df_{\varphi(\bar{x})} \circ d\varphi_{\bar{x}}\bar{X} , df_{\varphi(\bar{x})} \circ d\varphi_{\bar{x}}\bar{Y} \rangle =$$

$$= \langle df_x(d\varphi_{\bar{x}}\bar{X}), df_x(d\varphi_{\bar{x}}\bar{Y}) \rangle \overset{(3.2)}{=}$$

$$\overset{(3.2)}{=} I_x(d\varphi_{\bar{x}}\bar{X} , d\varphi_{\bar{x}}\bar{Y})$$

OBSERVATIE. Presupunem că schimbarea de parametri

$$\varphi : \bar{U} \to U$$

este dată prin

$$x^i = x^i(\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^n) \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

Din egalitatea $\bar{f} = f \circ \varphi$ obținem :

$$\bar{f}_{\bar{x}^i}(\bar{x}) = f_{x^j}(x) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}, \qquad x = \varphi(\bar{x}).$$

Fie $(\bar{g}_{ij}(\bar{x}))$ matricea formei biliniare simetrice $\bar{g}_{\bar{x}}$ relativă la baza $\left\{\bar{f}_{\bar{x}^1}(\bar{x}), \ldots, \bar{f}_{\bar{x}^n}(\bar{x})\right\}$ a spațiului tangent $T_{\bar{f}(\bar{x})}\bar{f}$.

Avem :

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x}) = \langle \bar{f}_{\bar{x}^i}(\bar{x}), \bar{f}_{\bar{x}^k}(\bar{x}) \rangle =$$

$$= \langle f_{x^s}(x) \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}, f_{x^r}(x) \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \rangle =$$

$$= \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} \langle f_{x^s}(x), f_{x^r}(x) \rangle$$

Am obținut formula

$$\bar{g}_{ik}(\bar{x}) = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^k} g_{sr}(x) \tag{3.3}$$

3.5. <u>PROPOZIȚIE (Invarianța primei forme fundamentale la izometrii). Fie</u> $f : U \to E_{n+1}$ <u>o hipersuprafață și fie</u> $B : E_{n+1} \to E_{n+1}$ <u>o izometrie. Atunci:</u>

i) $\tilde{f} = B \circ f : U \to E_{n+1}$ <u>este o hipersuprafață</u>

ii) <u>pentru orice $x \in U$ și orice</u> $X, Y \in T_{f(x)}f$ <u>avem</u>

$$\tilde{g}_x(dB_{f(x)} X, dB_{f(x)} Y) = g_x(X, Y)$$

<u>Demonstrație</u> i) Pentru orice $x \in U$ avem

$$d\tilde{f}_x = d(B \circ f)_x = dB_{f(x)} \circ df_x$$

Deoarece aplicația df_x este injecție, iar componenta ortogonală $dB_{f(x)}$ a izometriei B este bijecție, rezultă că $d\tilde{f}_x$ este aplicație injectivă, $(\forall) x \in U$, adică $\tilde{f}$ este o hipersuprafață.

ii) Pentru orice $x \in U$ avem

$$T_{\tilde{f}(x)}\tilde{f} = d\tilde{f}_x(T_x \mathbb{R}^n) = d(B \circ f)_x (T_x \mathbb{R}^n) =$$

$$= dB_{f(x)} \circ df_x (T_x \mathbb{R}^n) = dB_{f(x)} (T_{f(x)} f)$$

Pentru orice $X, Y \in T_{f(x)} f$ avem

$$\tilde{g}_x(dB_{f(x)}X, dB_{f(x)}Y) = \langle dB_{f(x)}X, dB_{f(x)}Y \rangle = \langle X, Y \rangle = g_x (X, Y)$$

3.6. NOTAȚII. i) Pe viitor vom nota I_x în loc de g_x. Avem formulele :

$$I_x(X,Y) = \langle X,Y \rangle \quad , \quad (\forall)\ X,Y \in T_{f(x)}f$$

$$I_x(X,Y) = \langle df_x X,\ df_x Y \rangle,\ (\forall)\ X,Y \in T_x R^n$$

ii) In cazul unei suprafețe $f : U \to E_3$ se folosesc notațiile lui Gauss :

$$E = g_{11} \ , \quad F = g_{12} = g_{21} \quad , \quad G = g_{22}$$

3.6. EXEMPLU. Considerăm suprafața

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times R \to E_3$$

definită prin :

$$f(x^1,x^2) = (r \cos x^1 \cos x^2,\ r \cos x^1 \sin x^2, r \sin x^1)$$

Baza canonică a spațiului $T_{f(x)}f$ este $\{f_{x^1}(x),\ f_{x^2}(x)\}$, unde

$$f_{x^1}(x) = (-r \sin x^1 \cos x^2,\ - r \sin x^1 \sin x^2,\ r \cos x^1),$$

$$f_{x^2}(x) = (-r \cos x^1 \sin x^2,\ r \cos x^1 \cos x^2,\ 0).$$

Rezultă

$$g_{11}(x) = r^2,\ g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0,\ g_{22}(x) = r^2 \cos^2 x^1$$

Am obținut deci

$$(g_{ij}(x))_{\substack{1 \le i \le 2 \\ 1 \le j \le 2}} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 x^1 \end{pmatrix}$$

§ 4. PROPRIETATI INTRINSECE ALE UNEI HIPERSUPRAFETE, LUNGIMEA UNUI ARC DE CURBA PE O HIPERSUPRAFATA, UNGHIUL A DOUA CURBE PE O HIPERSUPRAFATA, ARIA UNEI PORTIUNI DE SUPRAFATA.

4.1. **DEFINITIE.** Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață și fie $x : I \to U \subset E_n$ o curbă în E_n $(I \subseteq \mathbb{R})$. Curba $c = f \circ x : I \to E_{n+1}$ se numește curbă pe hipersuprafața f.

4.2. **PROPOZITIE.** Fie $c = f \circ x : I \to E_{n+1}$ o curbă pe hipersuprafața $f : U \to E_{n+1}$. Atunci:

i) $\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t)\, f_{x^i}(x(t)) \in T_{f(x(t))}f$, $(\forall)\ t \in I$,

ii) $\|\dot{c}(t)\|^2 = g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)$, $(\forall)\ t \in I$.

Demonstrație. i) Fie $\{1\}$ baza canonică a spațiului vectorial $\mathbb{R} \cong T_t\mathbb{R}$. Avem:

$$\dot{c}(t) = dc_t(1) = d(f \circ x)_t(1) = df_{x(t)} \circ dx_t(1) =$$

$$= df_{x(t)}\,(dx_t(1)) = df_{x(t)}\,(\dot{x}^i(t)\, e_i) =$$

$$= \dot{x}^i(t)\, df_{x(t)}\,(e_i) = \dot{x}^i(t)\, f_{x^i}(x(t))$$

Deci $\dot{c}(t) \in T_{f \circ x(t)}f$.

ii) Pentru orice $t \in I$ avem:

$$\|\dot{c}(t)\|^2 = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle =$$

$$= \langle \dot{x}^i(t)\, f_{x^i}(x(t)),\ \dot{x}^j(t)\, f_{x^j}(x(t)) \rangle =$$

$$= \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) \langle f_{x^i}(x(t)),\ f_{x^j}(x(t)) \rangle$$

Obținem formula:

$$\|\dot{c}(t)\|^2 = g_{ij}\,(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) \tag{4.1}$$

OBSERVATIE. Fie s parametrul canonic pe curba $c(t) = f \circ x(t)$.
Atunci avem

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \| \dot{c}(t) \|^2 = g_{ij}\,(x(t))\, \frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^j}{dt}$$

4.3. OBSERVATIE. Fie $c = f \circ x : I \to E_{n+1}$ o curbă pe hipersuprafaţa $f : U \to E_{n+1}$ şi fie $a,b \in I$, $a<b$. Stim că arcul de curbă $c|_{[a,b]}$ are lungimea

$$L(c\,|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\|\, dt$$

Folosind formula (4.1) obţinem

$$(4.2) \qquad L(c\,|_{[a,b]}) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)}\,dt$$

4.4. DEFINITIE. Fie $c = f \circ x : I \to E_{n+1}$ şi $\bar{c} = f \circ \bar{x} : \bar{I} \to E_{n+1}$ două curbe pe hipersuprafaţa $f : U \to E_{n+1}$. Presupunem că există $t_o \in I$, $\bar{t}_o \in \bar{I}$ astfel încît $\bar{x}(\bar{t}_o) = x(t_o)$. Se numeşte unghi al celor două curbe în punctul $c(t_o) = \bar{c}(\bar{t}_o)$ unghiul format de tangentele la cele două curbe în punctul lor comun.

OBSERVATIE. Unghiul u al curbelor c şi $\bar{c}$ în punctul comun $c(t_o) = \bar{c}(\bar{t}_o)$, este dat de relaţia

$$\cos u = \frac{\langle \dot{c}(t_o), \dot{\bar{c}}(\bar{t}_o)\rangle}{\|\dot{c}(t_o)\|\ \|\dot{\bar{c}}(\bar{t}_o)\|}$$

Folosind formulele stabilite la 4.1. din ultima egalitate obţinem

$$(4.3) \qquad \cos u = \frac{g_{ij}(x(t_o))\, \dot{x}^i(t_o)\, \dot{\bar{x}}^j(\bar{t}_o)}{\sqrt{g_{rs}(x(t_o))\dot{x}^r(t_o)\dot{x}^s(t_o)}\ \sqrt{g_{pq}(x(t_o))\dot{\bar{x}}^p(\bar{t}_o)\dot{\bar{x}}^q(\bar{t}_o)}}$$

4.5. **EXEMPLU.** Considerăm suprafaţa

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$f(x^1,x^2) = (x^1\cos x^2,\ x^1\sin x^2,\ 2x^2)$$

Imaginea aplicaţiei f este elicoidul drept considerat în exemplul 2.6.2. cu $b = 2$.

Considerăm pe această suprafaţă curbele

$$c = f\circ x \quad , \bar{c} = f\circ \bar{x} \quad , \quad \bar{\bar{c}} = f\circ \bar{\bar{x}}$$

unde $x, \bar{x}, \bar{\bar{x}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sînt definite prin

$$x(t) = (x^1(t),\ x^2(t)) = (t^2,t)$$

$$\bar{x}(\bar{t}) = (\bar{x}^1(\bar{t}),\ \bar{x}^2(\bar{t})) = (-\bar{t}^2,\bar{t})$$

$$\bar{\bar{x}}(\bar{\bar{t}}) = (\bar{\bar{x}}^1(\bar{\bar{t}}),\ \bar{\bar{x}}^2(\bar{\bar{t}})) = (\bar{\bar{t}},1)$$

Ne propunem să determinăm perimetrul şi unghiurile triunghiului curbiliniu determinat pe elicoid de curbele c, $\bar{c}$ şi $\bar{\bar{c}}$. Vom folosi formulele (4.2) şi (4.3) stabilite mai sus.

Avem

$$f_{x^1}(x) = (\cos x^2,\ \sin x^2,\ 0)$$

$$f_{x^2}(x) = (-\,x^1\sin x^2,\ x^1\cos x^2,\ 2)$$

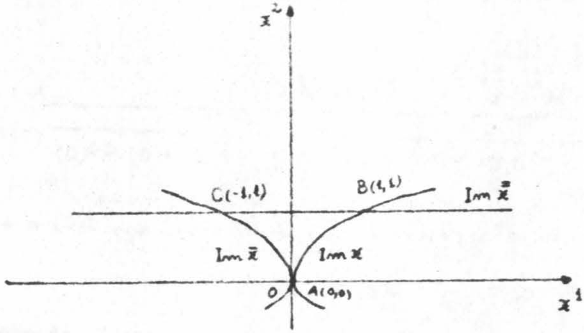
Coeficienţii primei forme fundamentale sînt

$$g_{11}(x) = \langle f_{x^1}(x),\ f_{x^1}(x)\rangle = 1$$

$$g_{12}(x) = g_{21}(x) = \langle f_{x^1}(x),\ f_{x^2}(x)\rangle = 0$$

$$g_{22}(x) = \langle f_{x^2}(x),\ f_{x^2}(x)\rangle = (x^1)^2 + 4$$

Curbele x, $\bar{x}$ şi $\bar{\bar{x}}$ se intersectează în punctele A,B,C.



Avem

$$\dot{x}(t) = (\dot{x}^1(t), \dot{x}^2(t)) = (2t,1)$$

$$\dot{\bar{x}}(\bar{t}) = (\dot{\bar{x}}^1(\bar{t}), \dot{\bar{x}}^2(\bar{t})) = (-2\bar{t},1)$$

$$\dot{\bar{\bar{x}}}(\bar{\bar{t}}) = (\dot{\bar{\bar{x}}}^1(\bar{\bar{t}}), \dot{\bar{\bar{x}}}^2(\bar{\bar{t}})) = (1,0)$$

Deoarece $g_{11}(x(t)) = 1$, $g_{12}(x(t)) = 0$, $g_{22}(x(t)) = t^4+4$,

rezultă

$$L(c|_{[0,1]}) = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}(x(t))\,\dot{x}^i(t)\,\dot{x}^j(t)}dt =$$

$$= \int_0^1 (2+t^2)dt = \frac{7}{3}$$

Analog obţinem

$$L(\bar{c}|_{[0,1]}) = \frac{7}{3}, \quad L(\bar{\bar{c}}|_{[-1,1]}) = 2$$

Rezultă că perimetrul triunghiului curbiliniu determinat pe elicoidul drept de curbele $c, \bar{c}$ şi $\bar{\bar{c}}$ este

$$L(c|_{[0,1]}) + L(\bar{c}|_{[0,1]} + L(\bar{\bar{c}}|_{[-1,1]}) = \frac{20}{3}$$

Să aflăm acum unghiurile triunghiului curbiliniu A'B'C' unde A' = f(A), B' = f(B), C' = f(C) . Fie u_1 unghiul curbelor c şi $\bar{c}$ în punctul lor comun

$$c(0) = \bar{c}(0) = f(0,0) = (0,0,0)$$

Avem

$$\cos u_1 = \frac{g_{ij}(0,0)\ \dot{x}^i(0)\ \dot{\bar{x}}^j(0)}{\sqrt{g_{rs}(0,0)\ \dot{x}^r(0)\ \dot{x}^s(0)}\ \sqrt{g_{pq}(0,0)\dot{\bar{x}}^p(0)\ \dot{\bar{x}}^q(0)}}$$

Deoarece $g_{11}(0,0) = 1,\ g_{12}(0,0) = g_{21}(0,0) = 0,\ \ g_{22}(0,0) = 4$ şi

$$\dot{x}(0) = (0,1) \quad , \quad \dot{\bar{x}}(0) = (0,1) \ ,$$

rezultă $\cos u_1 = 1$, adică $u_1 = 0$, ceea ce ne arată că curbele c şi $\bar{c}$ sînt tangente în punctul A'.

Analog obţinem că unghiul u_2 determinat de curbele c şi $\bar{\bar{c}}$ este dat de $\cos u_2 = \frac{2}{3} = -\cos u_3$, unde u_3 este unghiul determinat de curbele $\bar{c}$ şi $\bar{\bar{c}}$ în punctul lor comun C'.

4.6. <u>OBSERVATIE.</u> Fie $f : U \to E_3$ o suprafaţă şi fie $c = f \circ x,\ \bar{c} = f \circ \bar{x}$ două curbe pe suprafaţă, unde curbele

$$x : I \longrightarrow U \subset E_2 \quad , \quad \bar{x} : \bar{I} \longrightarrow U \subset E_2$$

sînt definite prin

$$x(t) = (x_0^1, t) \quad , \quad \bar{x}(\bar{t}) = (\bar{t},\ \bar{x}_0^2) \quad ,$$

cu $x_0^1 = \text{const.}$, $\bar{x}_0^2 = \text{const.}$ Curbele c şi $\bar{c}$ (numite <u>curbe coordonate</u>) se intersectează în punctul $c(t_0) = \bar{c}(\bar{t}_0)$, unde $t_0 = \bar{x}_0^2$, $\bar{t}_0 = x_0^1$.

Deoarece avem

$$\dot{x}(t) = (0,1) \ , \ \dot{\bar{x}}(\bar{t}) = (1,0) \ , \ (\forall)\ t \in I \ , \ (\forall)\ \bar{t} \in \bar{I} \ ,$$

rezultă că unghiul u al curbelor coordonate c şi $\bar{c}$ în punctul lor comun $c(t_0) = \bar{c}(\bar{t}_0)$ este dat de formula

$$(4.3') \qquad \cos u = \frac{g_{12}(x(t_0))}{\sqrt{g_{11}(x(t_0))\, g_{22}(x(t_0))}}$$

Tinînd seama de formula (4.3') rezultă că curbele coordonate pe o suprafaţă sînt ortogonale dacă şi numai dacă $g_{12} = 0$.

EXEMPLE.

4.6.1. Considerăm aplicaţia

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$f(x^1, x^2) = (r \cos x^1 \cos x^2, r \cos x^1 \sin x^2, r \sin x^1)$$

Este evident că $\operatorname{Im} f = S^2 - \{(0,0,\pm r)\}$

Curba $c = f \circ x$, unde

$$x(t) = (x_0^1, t) \qquad , \quad x_0^1 = \text{const.}$$

este un cerc situat într-un plan paralel cu planul ecuatorial. Deci prima familie de curbe coordonate pe sferă este constituită din paralele.

Este uşor de văzut că curba $c = f \circ x$, unde

$$x(t) = (t, x_0^2) \quad , \quad x_0^2 = \text{const.}$$

este un cerc mare al sferei, situat într-un plan ce conţine axa OZ şi din care scoatem polul nord şi polul sud. Rezultă că a doua familie de curbe coordonate pe sferă este constituită din meridiane.

4.6.2. Considerăm aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$f(x^1, x^2) = (x^1 \cos x^2, x^1 \sin x^2, b x^2), \ b \neq 0$$

Este evident că $\operatorname{Im} f$ este elicoidul drept. Este uşor de văzut că curbele coordonate $c = f \circ x$, unde $x(t) = (x^1, t)$ (x^1 = const), sînt elice circulare. De asemenea, este evident că curbele coordonate $c = f \circ x$, unde $x(t) = (t, x_0^2)$ (x_0^2 = const.) sînt drepte (mai precis sînt exact normalele principale la elicea circulară $c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$).

4.7. Am studiat la 3.4 şi 3.5 invarianţa primei forme fundamentale la schimbări de parametrii şi la izometrii. In conformitate cu semnificaţia geometrică intrinsectă (nelegată de sistemul de coordonate) a primei forme fundamentale, dăm următoarea definiţie:

<u>DEFINITIE.</u> <u>Proprietăţile unei hipersuprafeţe care depind numai de coeficienţii primei forme fundamentale (şi de derivatele parţiale ale acestor coeficienţi) se numesc proprietăţi intrinsece ale hipersuprafeţei.</u>

<u>Observaţie.</u> Pînă acum am întîlnit două proprietăţi intrinsece ale unei hipersuprafeţe şi anume :

i) lungimea unui arc de curbă pe o hipersuprafaţă

ii) unghiul a două curbe pe o hipersuprafaţă.

Un alt exemplu de proprietate intrinsecă a unei suprafeţe ne este furnizat de analiza matematică. Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi $f : U \to E_3$ o suprafaţă. Considerăm un domeniu compact $D \subset U$. Se demonstrează că aria porţiunii de suprafaţă $f(D)$ este dată de formula

$$\text{aria } f(D) = \iint_D \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx^1 dx^2$$

4.8. <u>EXEMPLU</u>. Ne propunem să aflăm aria torului.

Fie aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \to E_3$$

definită prin

$$f(x^1, x^2) = ((a+b \cos x^1)\cos x^2,\ (a+b \cos x^1)\sin x^2,\ b \sin x^1),$$

unde $a > b > 0$.

Imaginea aplicaţiei f este un tor. Avem

$$f_{x^1}(x) = (-b \sin x^1 \cos x^2,\ -b \sin x^1 \sin x^2,\ b \cos x^1)$$

$$f_{x^2}(x) = (-(a+b \cos x^1)\sin x^2,\ (a+b \cos x^1)\cos x^2,\ 0)$$

Rezultă că coeficienţii primei forme fundamentale sînt :

$$g_{11}(x) = b^2\ ,\ g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0\ ,\ g_{22}(x) = (a + b \cos x^1)^2$$

Dacă notăm $D = [-\pi, \pi]\times[-\pi, \pi]$ obţinem că aria torului $f(D)$ este dată de

$$\text{aria } f(D) = \iint_D \sqrt{\det(g_{ij}(x))}dx^1dx^2 =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b(a+b \cos x^1)dx^1dx^2 = 4ab\,\pi^2$$

<u>OBSERVATIE</u>. Alte proprietăţi intrinsece ale unei hipersuprafeţe vor fi prezentate în § 8, § 11, § 13 şi § 14.

§ 5. FORMA A DOUA FUNDAMENTALA A UNEI HIPERSUPRAFETE. INVARIANTA FORMEI A DOUA FUNDAMENTALE LA SCHIMBARI DE PARAMETRII CE PASTREAZA ORIENTAREA SI LA IZOMETRII PROPRII. HIPERSUPRAFETE OMBILICALE. APLICATIA WEINGARTEN.

Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $f : U \mapsto E_{n+1}$ o hipersuprafaţă.

Considerăm reperul Gauss

$$\left\{ f_{x^1}(x), \ldots, f_{x^n}(x), \ N(x) \right\}$$

într-un punct $f(x)$ al hipersuprafeţei.

Ştim că imaginea aplicaţiei Gauss

$$N : U \longrightarrow E_{n+1} \cong T_{f(x)} E_{n+1}$$

este inclusă în sfera unitate $S^n \subset E_{n+1}$.

5.1. PROPOZITIE. Imaginea aplicaţiei liniare

$$dN_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \cong T_{f(x)} \mathbb{R}^{n+1}$$

este inclusă în $T_{f(x)}f$.

Demonstraţie. Pentru orice $x = (x^1, \ldots, x^n) \in U$ avem egalitatea

$$\langle N(x), N(x) \rangle = 1$$

Prin derivare, obţinem

$$\langle N_{x^1}(x), N(x) \rangle = 0,$$

ceea ce ne arată că vectorul $N_{x^1}(x)$ aparţine spaţiului tangent $T_{f(x)}f$. Deoarece spaţiul $dN_x(T_x \mathbb{R}^n)$ este generat de vectorii $N_{x^1}(x), \ldots, N_{x^n}(x)$, obţinem

$$dN_x(T_x\mathbb{R}^n) \subset T_{f(x)}f$$

5.2. PROPOZITIE. Aplicaţia

$$II_x : T_x\mathbb{R}^n \times T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$(5.1) \qquad II_x(X,Y) = - \langle dN_x X \ , \ df_x Y \rangle$$

este o formă biliniară simetrică.

Demonstraţie. Deoarece aplicaţiile dN_x şi df_x sînt liniare rezultă că aplicaţia II_x este biliniară. Derivînd relaţiile

$$\langle N(x) \ , \ f_{x^i}(x) \rangle = 0 \ , \quad i \in \{1,\dots,n\} \ ,$$

obţinem

$$\langle N_{x^j}(x), \ f_{x^i}(x) \rangle = - \langle N(x), \ f_{x^i x^j}(x) \rangle =$$

$$= - \langle N(x), \ f_{x^j x^i}(x) \rangle = \langle N_{x^i}(x), \ f_{x^j}(x) \rangle$$

Avem deci

$$(5.2) \qquad \langle N_{x^j}(x) \ , \ f_{x^i}(x) \rangle = \langle N_{x^i}(x), \ f_{x^j}(x) \rangle$$

Fie $\{e_1,\dots,e_n\}$ baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Pentru orice vectori $X = X^i e_i$, $Y = Y^j e_j \in T_x\mathbb{R}^n$ avem :

$$II_x(X,Y) \overset{(5.1)}{=\!=} - \langle dN_x X^i e_i \ , \ df_x Y^j e_j \rangle =$$

$$= - X^i Y^j \langle dN_x e_i, \ df_x e_j \rangle = - X^i Y^j \langle N_{x^i}(x), \ f_{x^j}(x) \rangle \overset{(5.2)}{=\!=}$$

$$\overset{(5.2)}{=\!=} - X^i Y^j \langle N_{x^j}(x), \ f_{x^i}(x) \rangle = - X^i Y^j \langle dN_x e_j \ , \ df_x e_i \rangle =$$

$$= - \langle dN_x Y^j e_j \ , \ df_x X^i e_i \rangle = - \langle dN_x Y, df_x X \rangle \overset{(5.1)}{=\!=} II_x(Y,X)$$

DEFINITIE. Aplicația $x \to II_x$ se numește forma a doua fundamentală a hipersuprafeței.

5.3. OBSERVATIE. Bijecția liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}f$$

induce o formă biliniară simetrică

$$II'_x : T_{f(x)}f \times T_{f(x)}f \to \mathbb{R}$$

prin

$$(5.3)\qquad II'_x(X,Y) = \langle L_xX, Y\rangle ;$$

unde am folosit notația

$$(5.4)\qquad L_x = - dN_x \circ df_x^{-1}$$

In adevăr, pentru orice $X,Y \in T_{f(x)}f$ avem :

$$II'_x(X,Y) = II_x(df_x^{-1}X,\ df_x^{-1}Y) \overset{(5.1)}{=}$$

$$\overset{(5.1)}{=} - \langle dN_x \circ df_x^{-1}X, Y\rangle = \langle L_xX, Y\rangle,$$

unde L_x este dat prin (5.4) .

Se vede ușor că aplicația

$$L_x : T_{f(x)}f \longrightarrow T_{f(x)}f$$

este liniară. Aplicația liniară L_x se numește aplicația lui Weingarten.

Aplicația $x \to II'_x$ se numește tot forma a doua fundamentală.

5.4. PROPOZITIE. Fie $(h_{ik}(x))_{1\le i,k\le n}$ matricea formei biliniare simetrice II_x relativă la baza canonică

$$\{e_1,\dots,e_n\}$$

a spațiului $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Atunci $(h_{ik}(x))$ este și matricea formei biliniare simetrice II'_x relativă la baza canonică

$$\left\{ f_{x^1}(x) \;,\dots,\; f_{x^n}(x) \right\}$$

a spaţiului tangent $T_{f(x)}f$.

Demonstraţie. Pentru orice $x = (x^1,\dots,x^n) \in U$ avem

$$II'_x(f_{x^i}(x)\;,\; f_{x^k}(x)) \overset{(5.3)}{=\!=} < L_x f_{x^i}(x),\; f_{x^k}(x)> =$$

$$= - <(dN_x \circ df_x^{-1})(df_x e_i)\;,\; f_{x^k}(x) > =$$

$$= - <dN_x e_i,\; df_x e_k> \overset{(5.1)}{=\!=} II_x(e_i,e_k) = h_{ik}(x)$$

Notaţii. i) Pe viitor vom nota II_x în loc de II'_x. Avem formulele

$$II_x(X,Y) = - <dN_x X,\; df_x Y>\;,\; (\forall)\; X,Y \in T_x R^n$$

$$II_x(X,Y) = < L_x X, Y >\;,\quad (\forall)\; X,Y \in T_{f(x)}f$$

ii) In cazul unei suprafeţe $f : U \longrightarrow E_3$ se folosesc notaţiile lui Gauss :

$$L = h_{11}\;,\quad M = h_{12} = h_{21},\quad N = h_{22}$$

5.5. PROPOZITIE. i) Funcţiile

$$h_{ij} : U \longrightarrow R$$

sînt diferenţiabile.

ii) Dacă X şi Y sînt două cîmpuri de vectori tangenţi hipersuprafeţei, atunci funcţia

$$x \longrightarrow II_x(X(x),\; Y(x))$$

este diferenţiabilă.

Demonstraţie. i) Pentru orice $x \in U$ avem

$$h_{ik}(x) = - < N_{x^i}(x)\;\;,\;\; f_{x^k}(x)>$$

Deoarece funcțiile

$$x \to N_{x^i}(x) \quad , \quad x \to f_{x^k}(x)$$

sînt diferențiabile, rezultă că și aplicațiile

$$x \to h_{ij}(x)$$

sînt diferențiabile .

ii) Fie X și Y două cîmpuri de vectori tangenți hipersuprafeței f. Avem :

$$X(x) = X^i(x) f_{x^i}(x) \;, \quad Y(x) = Y^j(x) f_{x^j}(x)$$

Rezultă

$$II_x(X(x), Y(x)) = \langle L_x X(x), Y(x) \rangle =$$

$$= \langle L_x(X^i(x) f_{x^i}(x)) \;, Y^j(x) f_{x^j}(x) \rangle =$$

$$= X^i(x) Y^j(x) \langle L_x f_{x^i}(x) \;, f_{x^j}(x) \rangle =$$

$$= h_{ij}(x) X^i(x) Y^j(x)$$

Deoarece aplicațiile

$$x \to h_{ij}(x) \;, x \to X^i(x) \quad , \quad x \to Y^j(x)$$

sînt diferențiabile, rezultă că și funcția

$$x \to II_x(X(x), Y(x))$$

este diferențiabilă.

5.6. PROPOZITIE. (Invarianța formei a doua fundamentale la izometrii proprii). Fie $f : U \to E_{m+1}$ o hipersuprafață și

$$B : E_{m+1} \to E_{m+1}, \quad Bv = Rv + v_0$$

o izometrie proprie (adică matricea aplicației liniare R are determinantul egal cu unu).

Atunci:

i) $\tilde{f} = B \circ f : U \to \mathcal{E}_{n+1}$ <u>este o hipersuprafață</u>

ii) <u>pentru orice $x \in U$ și orice</u> $X, Y \in T_{f(x)}f$ <u>avem</u>

$$\widetilde{II}_x(dB_{f(x)}X,\ dB_{f(x)}Y) = II_x(X, Y)$$

<u>Demonstrație</u> i) Este ușor de văzut că aplicația liniară

$$d\tilde{f}_x = d(B \circ f)_x : R^n \cong T_x R^n \to R^{n+1} \cong T_{f(x)} R^{n+1}$$

este injectivă, $(\forall) x \in U$.

ii) Fie $\left\{\tilde{f}_{x^1}(x), \dots, \tilde{f}_{x^n}(x),\ \tilde{N}(x)\right\}$ reperul Gauss asociat hipersuprafeței $\tilde{f}$ într-un punct oarecare $\tilde{f}(x)$. Pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ avem:

$$\tilde{f}_{x^i}(x) = d\tilde{f}_x(e_i) = d(B \circ f)_x(e_i) = dB_{f(x)} \circ df_x(e_i) = R \circ f_{x^i}(x)$$

În continuare, avem

$$< R \circ N(x),\ \tilde{f}_{x^i}(x) > = < R \circ N(x),\ R \circ f_{x^i}(x) > = < N(x),\ f_{x^i}(x) > = 0$$

Rezultă că există o funcție diferențiabilă $q : U \to R$ astfel încît să avem

$$R \circ N(x) = q(x)\tilde{N}(x)$$

De aici rezultă

$$q^2(x) = \| R \circ N(x) \|^2 = < R \circ N(x),\ R \circ N(x) > = < N(x),\ N(x) > = 1$$

Prin urmare avem $R \circ N(x) = \varepsilon \tilde{N}(x)$, unde $\varepsilon = 1$ sau $\varepsilon = -1$. Deoarece reperul $\left\{f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x),\ N(x)\right\}$ este pozitiv orientat, iar izometria B este proprie, rezultă că și reperul $\left\{R \circ f_{x^1}(x), \dots, R \circ f_{x^n}(x),\ R \circ N(x)\right\}$ este pozitiv orientat, deci avem

$$R \circ N(x) = \tilde{N}(x) \quad , \quad (\forall) x \in U$$

Rezultă că pentru orice vectori tangenți $X, Y \in T_{f(x)}f$ avem

$$\widetilde{II}_x(dB_{f(x)}X,\ dB_{f(x)}Y) = - < d\tilde{N}_x \circ d\tilde{f}_x^{-1}(dB_{f(x)}X),\ dB_{f(x)}Y > =$$

$$= - < d\tilde{N}_x \circ d\tilde{f}_x^{-1} RX,\ RY > = - < d(R \circ N)_x \circ d(B \circ f)_x^{-1} RX,\ RY > =$$

$$= - < R \circ dN_x \circ df_x^{-1} \circ R^{-1} \circ RX,\ RY > = - < dN_x \circ df_x^{-1} X, Y > = II_x(X,Y),$$

unde am folosit egalitățile:

$$dR_y = R \ , \ (\forall) y \in E_{n+1} \ , \ d(R \circ f)^{-1}_x = df^{-1}_x \circ R^{-1}$$

5.7. <u>PROPOZITIE. (Invarianta formei a doua fundamentale la schimbări de parametri care păstrează orientarea).</u>

<u>Fie</u> $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ <u>o hipersuprafață și fie</u> $\varphi : \overline{U} \longrightarrow U$ <u>o schimbare de parametri care păstrează orientarea (adică determinantul matricei aplicației liniare $d\varphi$ este pozitiv). Atunci</u>

i) $\overline{f} = f \circ \varphi : \overline{U} \longrightarrow E_{n+1}$ <u>este o hipersuprafață.</u>

ii) <u>Pentru orice</u> $X, Y \in T_{\overline{x}} R^n$ <u>avem:</u>

$$II_{\overline{x}}(X,Y) = II_x(d\varphi_{\overline{x}}X, d\varphi_{\overline{x}}Y) \ , \quad \text{unde} \quad x = \varphi(\overline{x}) \ .$$

<u>Demonstrație</u> i) Este evident că $\overline{f} : \overline{U} \longrightarrow E_{n+1}$ este o hipersuprafață

ii) Fie $\left\{ \overline{f}_{\overline{x}^1}(\overline{x}), \ldots, \overline{f}_{\overline{x}^n}(\overline{x}), \overline{N}(\overline{x}) \right\}$ reperul Gauss asociat hipersuprafeței $\overline{f}$ într-un punct oarecare $\overline{f}(\overline{x})$. Presupunem că schimbarea de parametrii $\varphi : \overline{U} \longrightarrow U$ este dată de formulele

$$x^i = x^i(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n) \quad , \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Pentru orice $\overline{x} \in \overline{U}$ avem:

$$\begin{aligned}\overline{f}_{\overline{x}^i}(\overline{x}) &= d\overline{f}_{\overline{x}}(e_i) = d(f \circ \varphi)_{\overline{x}}(e_i) = df_{\varphi(\overline{x})} \circ d\varphi_{\overline{x}}(e_i) = \\ &= df_{\varphi(\overline{x})}\left(\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{x}) e_j\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{x}) df_{\varphi(\overline{x})}(e_j) = \\ &= \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{x}) df_x(e_j) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{x}) f_{x^j}(x) \quad ,\end{aligned}$$

unde $x = \varphi(\overline{x})$. Am obținut egalitățile

$$\overline{f}_{\overline{x}^i}(\overline{x}) = \frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}(\overline{x}) f_{x^j}(x) \ , \quad x = \varphi(\overline{x}) \ , \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Aceste egalități le scriem sub forma

$$\begin{pmatrix} \overline{f}_{\overline{x}^1}(\overline{x}) \\ \vdots \\ \overline{f}_{\overline{x}^n}(\overline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}(\overline{x}) & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^1}(\overline{x}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^n}(\overline{x}) & \ldots & \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^n}(\overline{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{x^1}(x) \\ \vdots \\ f_{x^n}(x) \end{pmatrix}$$

Deoarece schimbarea de parametrii păstrează orientarea rezultă că determinantul

$$\Delta(\bar{x}) = \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}(\bar{x})\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

este pozitiv oricare ar fi $\bar{x} \in \bar{U}$. Deoarece $\Delta(\bar{x}) > 0$, $(\forall)\bar{x} \in \bar{U}$, rezultă că sistemele de vectori $\left\{f_{x^1}(x),\ldots,f_{x^n}(x)\right\}$ şi $\left\{\bar{f}_{\bar{x}^1}(\bar{x}),\ldots,\bar{f}_{\bar{x}^n}(\bar{x})\right\}$ sînt la fel orientate. Oricare ar fi $x = \varphi(\bar{x}) \in U$, avem

$$< N\circ\varphi(\bar{x}),\ \bar{f}_{\bar{x}^i}(\bar{x}) > = < N(x),\ f_{x^j}(x)\ \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}(\bar{x}) > =$$

$$= \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}(\bar{x}) < N(x),\ f_{x^j}(x) > = 0$$

Rezultă că există o funcţie diferenţiabilă $s : \bar{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încît să avem

$$N\circ\varphi(\bar{x}) = s(\bar{x})\bar{N}(\bar{x})$$

De aici rezultă

$$1 = \| N\circ\varphi(\bar{x})\| = |s(\bar{x})|\cdot\|\bar{N}(\bar{x})\| \quad , \quad \text{deci}$$

$$s(\bar{x}) = 1 \quad \text{sau} \quad s(\bar{x}) = -1$$

Deoarece reperele $\left\{f_{x^1}(x),\ldots,f_{x^n}(x),\ N(x)\right\}$ şi $\left\{\bar{f}_{\bar{x}^1}(\bar{x}),\ldots,\bar{f}_{\bar{x}^n}(\bar{x}),\ \bar{N}(\bar{x})\right\}$ sînt pozitiv orientate trebuie să avem $s(\bar{x}) = 1$, $(\forall)\bar{x} \in \bar{U}$. Prin urmare, am obţinut egalitatea

$$\bar{N} = N\circ\varphi$$

Rezultă $\bar{N}(\bar{x}) = N(x)$ cu $x = \varphi(\bar{x})$. Pentru orice $X,Y \in T_{\bar{x}}\mathbb{R}^n$ avem

$$\bar{II}_{\bar{x}}(X,Y) = -< d\bar{N}_{\bar{x}}X\ ,\ d\bar{f}_{\bar{x}}Y > = -< d(N\circ\varphi)_{\bar{x}}X,\ d(f\circ\varphi)_{\bar{x}}Y > =$$

$$= -< dN_x\circ d\varphi_{\bar{x}}X,\ df_x\circ d\varphi_{\bar{x}}Y > = II_x(d\varphi_{\bar{x}}X,\ d\varphi_{\bar{x}}Y)$$

5.8. <u>EXEMPLU</u>. Considerăm suprafaţa

$$f : U \longrightarrow E_3 \quad , \quad U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\times\mathbb{R}$$

definită prin

$$f(x^1,x^2) = (r\cos x^1\cos x^2,\ r\cos x^1\sin x^2,\ r\sin x^1)$$

unde $r = \text{const.} > 0$.

Este uşor de văzut că imaginea aplicaţiei f este sfera S^2 din care scoatem polul nord şi polul sud. Am văzut în exemplul 2.6.1. că avem

$$N(x) = -\frac{1}{r}f(x) \quad , \quad (\forall)\ x \in U$$

Pentru orice $X,Y \in T_x\mathbb{R}^2$ avem

$$II_x(X,Y) = - \langle dN_x X \, , \, df_x Y \rangle =$$

$$= \frac{1}{r} \langle df_x X \, , \, df_x Y \rangle = \frac{1}{r} I_x(X,Y)$$

Am obţinut deci egalitatea

$$(5.5) \qquad II_x = \frac{1}{r} I_x \quad , \quad (\forall)\ x \in U$$

Folosind ultima egalitate şi exemplul 3.6., obţinem coeficienţii formei a doua fundamentale

$$h_{11}(x) = r \ , \quad h_{12}(x) = h_{21}(x) = 0, \quad h_{22}(x) = r \cos^2 x^1$$

5.9. DEFINITIE. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Un punct $f(x_0)$ al hipersuprafeţei se numeşte punct ombilical dacă există un număr real $a(x_0) \in \mathbb{R}$ astfel încît

$$II_{x_0} = a(x_0) I_{x_0}$$

Dacă toate punctele unei hipersuprafeţe sînt puncte ombilicale, atunci f se numeşte hipersuprafaţă ombilicală .

Rezultă că o hipersuprafaţă $f : U \to E_{n+1}$ este hipersuprafaţă ombilicală dacă există o funcţie diferenţiabilă

$$a : U \to \mathbb{R}$$

astfel încît să avem

$$II_x = a(x)\ I_x$$

5.10. EXEMPLE

5.10.1. Folosind relaţia 5.5 , rezultă că sfera este o suprafaţă ombilicală.

5.10.2. Considerăm hiperplanul

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_{n+1}$$

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n,\ a_i x^i + b) \ ,$$

unde $a_1,\dots,a_n$, b sînt constante reale. Pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ avem

$$f_{x^1}(x) = (1,0,\dots,0,0,a_1)$$

$$f_{x^2}(x) = (0,1,0,\dots,0,0,a_2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_{x^n}(x) = (0,\dots,0,1,a_n)$$

Rezultă

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + a_i a_j ,$$

oricare ar fi $x\in\mathbb{R}^n$ şi oricare ar fi $i,j\in\{1,\dots,n\}$.

Deoarece $f_{x^ix^j}(x) = 0$, rezultă că coeficienţii $h_{ij}(x)$ ai formei a doua fundamentale sînt nuli. Rezultă că avem

$$h_{ij}(x) = 0\cdot g_{ij}(x) , \quad (\forall)x\in\mathbb{R}^n$$

şi deci toate punctele hiperplanului sînt puncte ombilicale .

5.1o.3. Considerăm aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^n \to E_{n+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2} ,\dots, \frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}, r\frac{v^2-r^2}{v^2+r^2} \right) ,$$

unde $v^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$, $r = \text{const.} > 0$. Pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ avem :

$$f_{x^1}(x) = \frac{2r^2}{(r^2+v^2)^2}(r^2+v^2-2(x^1)^2 , -2x^1x^2,\dots,-2x^1x^n, 2rx^1)$$

$$f_{x^2}(x) = \frac{2r^2}{(r^2+v^2)^2}(-2x^2x^1, r^2+v^2-2(x^2)^2,\dots,-2x^2x^n, 2rx^2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_{x^n}(x) = \frac{2r^2}{(r^2+v^2)^2}(-2x^nx^1 ,\dots, -2x^nx^{n-1}, r^2+v^2-2(x^n)^2, 2rx^n)$$

Fie $f^1,\dots,f^{n+1}$ componentele aplicației f .

Notăm $J_f(x) = (f^j_{x^i}(x))_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

Pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ avem

$$\operatorname{rang} J_f(x) =$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} r^2+v^2-2(x^1)^2 & -2x^1x^2 & \dots & -2x^1x^n & 2x^1 \\ -2x^2x^1 & r^2+v^2-2(x^2)^2 & \dots & -2x^2x^n & 2x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^nx^1 & -2x^nx^2 & \dots & r^2+v^2-2(x^n)^2 & 2x^n \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} r^2+v^2 & 0 & \dots & 0 & 2x^1 \\ 0 & r^2+v^2 & \dots & 0 & 2x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & r^2+v^2 & 2x^n \end{pmatrix} =$$

$$= n$$

Prin urmare f este hipersuprafață parametrizată . Se poate verifica că imaginea aplicației f este sfera

$$S^n = \left\{ (X^1,\dots,X^{n+1}) \in E_{n+1} \,\middle|\, (X^1)^2+\dots+(X^{n+1})^2 = r^2 \right\}$$

din care, scoatem polul nord (a se vedea [32] .

Coeficienții primei forme fundamentale sînt :

$$g_{ij}(x) = \frac{4\,\delta_{ij}}{(1+\frac{1}{r^2}v^2)^2}\ ,\quad i,j\in\{1,\dots,n\}$$

Calculăm componentele vectorului normal

$$\tilde{N}(x) = f_{x^1}(x)\times\dots\times f_{x^n}(x) = (\tilde{N}^1(x),\dots,\tilde{N}^{n+1}(x))$$

Avem :

$$\tilde{N}^1(x) = \begin{vmatrix} f^2_{x^1}(x) & \dots & f^n_{x^1}(x) & f^{n+1}_{x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^2_{x^n}(x) & \dots & f^n_{x^n}(x) & f^{n+1}_{x^n}(x) \end{vmatrix} (-1)^n =$$

$$\frac{(-1)^n 2^{n+1} r^{2n+1} x^1}{(r^2+v^2)^{2n}} \begin{vmatrix} -2x^2 & -2x^3 & \dots & -2x^n & x^1 \\ r^2+v^2-2(x^2)^2 & -2x^2x^3 & \dots & -2x^2x^n & x^2 \\ -2x^2x^3 & r^2+v^2-2(x^3)^2 & \dots & -2x^3x^n & x^3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^2x^n & -2x^3x^n & \dots & r^2+v^2-2(x^n)^2 & x^n \end{vmatrix}$$

Dacă adunăm la linia i elementele primei linii înmulţite cu x^i , unde $i \in \{1,\dots,n\}$, obţinem

$$\tilde{N}^1(x) = \frac{(-1)^n 2^{n+1} r^{2n+1} x^1}{(r^2+v^2)^{2n}} \begin{vmatrix} -2x^2 & -2x^3 & \dots & -2x^n & 1 \\ r^2+v^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r^2+v^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r^2+v^2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}\, 2^{n+1}\, r^{2n+1} x^1}{(r^2+v^2)^{n+1}} = - \frac{2^{n+1}\, r^{2n+1}\, x^1}{(r^2+v^2)^{n+1}}$$

Analog obţinem $\tilde{N}^2(x), \dots, \tilde{N}^n(x)$. Avem deci :

$$\tilde{N}^i(x) = \frac{(-1)\, 2^{n+1} r^{2n+1}}{(r^2+v^2)^{n+1}}\, x^i \ , \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

Să calculăm acum $\tilde{N}^{n+1}(x)$. Avem :

$$\tilde{N}^{n+1}(x) = \begin{vmatrix} f^1_{x^1}(x) & \dots & f^n_{x^1}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ f^1_{x^n}(x) & \dots & f^n_{x^n}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2^n r^{2n}}{(r^2+v^2)^{2n}} D$$

unde am notat

$$D = \begin{vmatrix} r^2+v^2-2(x^1)^2 & -2x^1x^2 & \dots & -2x^1x^n \\ -2x^1x^2 & r^2+v^2-2(x^2)^2 & \dots & -2x^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^1x^n & -2x^2x^n & \dots & r^2+v^2-2(x^n)^2 \end{vmatrix}$$

Presupunem că $x^1 \neq 0$. Adunăm la elementele primei linii elementele liniei i înmulţite cu $\frac{x^i}{x^1}$ $(i = 2,\dots,n)$. Obţinem

$$D = \begin{vmatrix} r^2-v^2 & \frac{x^2}{x^1}(r^2-v^2) & \frac{x^3}{x^1}(r^2-v^2) & \dots & \frac{x^n}{x^1}(r^2-v^2) \\ -2x^1x^2 & r^2+v^2-2(x^2)^2 & -2x^2x^3 & \dots & -2x^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^1x^n & -2x^2x^n & -2x^3x^n & \dots & r^2+v^2-2(x^n)^2 \end{vmatrix}$$

Inmulţind prima linie cu x^1 şi prima coloană cu $\frac{1}{x^1}$ rezultă :

$$D = (r^2-v^2) \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ -2x^2 & r^2+v^2-2(x^2)^2 & -2x^2x^3 & \dots & -2x^2x^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^n & -2x^2x^n & -2x^3x^n & \dots & r^2+v^2-2(x^n)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (r^2-v^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2x^2 & r^2+v^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2x^n & 0 & 0 & \dots & r^2+v^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (r^2-v^2)(r^2+v^2)^{n-1}$$

Dacă $x^1 = 0$, atunci repetăm raţionamentul pentru x^2. Dacă $x^1 = 0$ şi $x^2 = 0$ atunci repetăm raţionamentul pentru x^3, etc. Dacă $x^1 = x^2 = \dots = x^n = 0$, atunci $v^2 = 0$ şi obţinem $D = r^{2n}$. Din cele de mai sus rezultă că determinantul D este dat de

$$D = (r^2-v^2)(r^2+v^2)^{n-1}$$

Prin urmare avem :

$$\tilde{N}^{n+1}(x) = \frac{-2^n r^{2n}(v^2-r^2)}{(v^2+r^2)^{n+1}}$$

Rezultă :

$$\| \tilde{N}(x) \| = \frac{2^n r^{2n}}{(v^2+r^2)^n}$$

Ţinînd seama de ultimele egalităţi obţinem că componentele vectorului unitar $N(x) = \dfrac{\tilde{N}(x)}{\| \tilde{N}(x)\|}$ normal hipersuprafeţei sînt :

$$N^i(x) = \frac{\tilde{N}^i(x)}{\| \tilde{N}(x)\|} = -\frac{2rx^i}{r^2+v^2} = \frac{-1}{r} f^i(x) \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

$$N^{n+1}(x) = \frac{\tilde{N}^{n+1}(x)}{\| \tilde{N}(x)\|} = -\frac{v^2-r^2}{v^2+r^2} = \frac{-1}{r} f^{n+1}(x)$$

Prin urmare vectorul unitar normal hipersuprafeţei este :

$$N(x) = -\frac{1}{r} f(x)$$

Folosind ultima egalitate obţinem

$$II_x = - < dN_x \, , df_x > = - < -\frac{1}{r} df_x \, , df_x > =$$

$$= \frac{1}{r} < df_x \, , df_x > = \frac{1}{r} I_x$$

Rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ avem

$$II_x = \frac{1}{r} I_x$$

ceea ce ne arată că hipersfera f este o hipersuprafață ombilicală.

<u>Convenție</u>. Fie $f : U \longrightarrow E_{m+1}$ o hipersuprafață.

Dacă imaginea aplicației f se afla într-un hiperplan, atunci se spune că f este <u>hipersuprafață plană</u>.

Dacă imaginea aplicației f se află pe o hipersferă din spațiul euclidian E_{m+1}, atunci se spune că f este o <u>hipersuprafață sferică</u>.

5.11. <u>PROPOZIȚIE. Fie</u> $f : U \longrightarrow E_{m+1}$ <u>o hipersuprafață. Următoarele afirmații sînt echivalente</u> :

(i) <u>f este o hipersuprafață sferică sau o hipersuprafață plană.</u>

(ii) <u>f este o hipersuprafață ombilicală.</u>

<u>Demonstrație.</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii) . A se vedea exemplele 5.10.2. și 5.10.3.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Deoarece hipersuprafața este ombilicală rezultă că există o funcție diferențiabilă

$$a : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît pentru orice $x \in U$ să avem

$$II_x = a(x) \, I_x$$

De aici rezultă

$$II_x(f_{x^i}(x) \, , f_{x^j}(x)) = a(x) \, I_x(f_{x^i}(x), f_{x^j}(x))$$

sau

$$- < N_{x^i}(x) \ , \ f_{x^j}(x) > \ = \ a(x) < f_{x^i}(x) \ , \ f_{x^j}(x) >$$

Ultima egalitate se scrie sub forma

$$< N_{x^i}(x) + a(x) f_{x^i}(x) \ , \ f_{x^j}(x) > \ = 0$$

Ultima egalitate ne arată că există o funcţie diferenţiabilă

$$B : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît să avem

$$N_{x^i}(x) + a(x) f_{x^i}(x) = B(x) N(x)$$

Înmulţind scalar ultima egalitate cu $N(x)$ şi ţinînd seama de faptul că $N_{x^i}(x)$, $f_{x^i}(x) \in T_{f(x)}f$, obţinem $B(x) = 0$. Prin urmare avem

(5.6) $$N_{x^i}(x) + a(x) f_{x^i}(x) = 0$$

<u>Cazul 1</u>. Să presupunem că $a(x) = 0$. Atunci din (5.6) rezultă $N_{x^i}(x) = 0$, ceea ce ne arată că cîmpul normal la hipersuprafaţă este constant, adică $N(x) = N_o$, oricare ar fi $x \in U$. Deoarece N_o este vector constant, din egalităţile

$$< N_o, \ f_{x^i}(x) > \ = 0 \ ,$$

obţinem

(5.7) $$< N_o, \ f(x) > \ = \ k \ , \ (\forall) \ x \in U \ ,$$

unde k este o constantă reală. Dacă notăm cu $A_1, \ldots, A_{n+1}$ componentele vectorului N_o, atunci (5.7) ne arată că coordonatele $f^1(x), \ldots, f^{n+1}(x)$ ale punctului $f(x)$ verifică relaţia

(5.7') $$A_1 f^1(x) + \ldots + A_{n+1} f^{n+1}(x) - k = 0$$

Deoarece $\| N_o \| = 1$, avem $\sum_{i=1}^{n+1} (A_i)^2 > 0$ şi deci $f^1(x), \ldots, f^{n+1}(x)$ verifică ecuaţia unui hiperplan. Prin urmare f este hipersuprafaţă plană.

Cazul 2.

Presupunem că există x astfel încît $a(x) \neq 0$. Derivînd (5.6) obţinem

$$N_{x^i x^j}(x) + a_{x^j}(x)\, f_{x^i}(x) + a(x)\, f_{x^i x^j}(x) = 0$$

Deoarece avem

$$N_{x^i x^j}(x) + a(x)\, f_{x^i x^j}(x) =$$

$$= N_{x^j x^i}(x) + a(x)\, f_{x^j x^i}(x)$$

rezultă

(5.8) $$a_{x^i}(x)\, f_{x^j}(x) = a_{x^j}(x)\, f_{x^i}(x)$$

Inmulţim scalar (5.8) cu $f_{x^k}(x)$ şi obţinem

(5.9) $$a_{x^i}(x)\, g_{jk}(x) = a_{x^j}(x)\, g_{ik}(x)$$

Dacă înmulţim (5.9) cu g^{kr} şi sumăm, rezultă

(5.1o) $$a_{x^i}(x)\, \delta^r_j = a_{x^j}(x)\, \delta^r_i$$

Dacă facem $r = j$ şi sumăm, din (5.1o) se obţine

(5.11) $$n a_{x^i}(x) = a_{x^i}(x)$$

Deoarece $n > 1$, din (5.11) avem $a_{x^i}(x) = 0$, ceea ce ne arată că $a(x) = a_o$, unde a_o este o constantă nenulă. Cu aceasta relaţia (5.6) devine

$$N_{x^i}(x) + a_o f_{x^i}(x) = 0$$

De aici obţinem

(5.12) $$N(x) + a_o\, f(x) = b_o\,,$$

unde b_o este un vector constant. Din (5.12) rezultă

(5.12') $$f(x) - x_o = -\frac{1}{a_o} N(x)\,,$$

unde am folosit notaţia $x_o = \frac{b_o}{a_o}$. Deoarece $\| N(x) \| = 1$, din (5.12') obţinem

$$\| f(x) - x_o \| = \frac{1}{|a_o|}$$

ceea ce ne arată că punctul $f(x)$ se află pe hipersfera de centru x_o şi de rază $\frac{1}{|a_o|}$

§6. LINII ASIMPTOTICE PE O HIPERSUPRAFATA. FORMULA LUI MEUSNIER. CARACTERIZAREA GEOMETRICA A LINIILOR ASIMPTOTICE ALE UNEI SUPRAFETE.

6.0. Fie U o mulţime deschisă în R^n şi $f : U \to E_{m+1}$ o hipersuprafaţă. Vom nota cu $\{f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x), N(x)\}$ reperul Gauss într-un punct $f(x)$.

Considerăm o curbă

$$c = f\circ x : I \to E_{m+1},$$

unde $x : I \to U \subset E_m$ este o curbă în E_m. Presupunem că curba c este în poziţie generală. Fie $\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ reperul lui Frenet asociat curbei c. Avem

$$\dot{e}_1(t) = \| \dot{c}(t) \| \, K_1(t)\, e_2(t), \tag{6.0}$$

unde $K_1(t)$ este prima curbură a curbei c în punctul $c(t)$.

6.1. PROPOZITIE. In ipotezele de la 6.0 are loc formula

$$II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \| \dot{c}(t) \|^2 \, K_1(t) < e_2(t), N(x(t))> \tag{6.1}$$

Demonstraţie. Din propoziţia 4.2. avem :

$$\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t)\, f_{x^i}(x(t)) \tag{6.2}$$

Prin derivare, din (6.2) obţinem :

$$c^{(2)}(t) = \ddot{x}^i(t) f_{x^i}(x(t)) + \dot{x}^i(t)\, f_{x^i x^j}(x(t))\, \dot{x}^j(t) \tag{6.2'}$$

Deoarece $<N(x(t)), f_{x^i}(x(t))> = 0$ pentru orice $i \in \{1,\dots,n\}$, din (6.2') rezultă

$$< c^{(2)}(t), N(x(t))> = \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t))\, < f_{x^i x^j}(x(t)), N(x(t))> \tag{6.3}$$

Ţinînd seama de relaţiile (6.2) şi (6.3) , rezultă

$$II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = II_{x(t)}(\dot{x}^i(t) f_{x^i}(x(t)), \dot{x}^j(t) f_{x^j}(x(t)))$$

$$= \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t)\, h_{ij}(x(t)) =$$

$$= \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) < f_{x^i x^j}(x(t)), N(x(t)) >$$

Ţinînd seama de (6.3), obţinem :

(6.4) $$II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = < c^{(2)}(t), N(x(t)) >$$

Pe de altă parte din egalitatea

$$e_1(t) = \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|},$$

rezultă

$$c^{(2)}(t) = (\|\dot{c}(t)\|)' \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} + \|\dot{c}(t)\|\, \dot{e}_1(t)$$

şi folosind formula (6.0) obţinem :

$$c^{(2)}(t) = (\|\dot{c}(t)\|)' \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} + \|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t)\, e_2(t).$$

Deoarece $\dot{c}(t) \in T_{f(x(t))} f$, din (6.4) rezultă

$$II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = \|\dot{c}(t)\|^2 K_1(t) < e_2(t), N(x(t)) >$$

6.3. COROLAR. Fie $\theta(t)$ unghiul dintre vectorii $N(x(t))$ şi $e_2(t)$, ales în intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Deoarece vectorii $e_2(t)$ şi $N(x(t))$ sînt unitari, din (6.1) obţinem formula lui Meusnier

(6.5) $$\frac{|II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))|}{I_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} = K_1(t) \cos \theta(t)$$

6.4. DEFINIŢIE. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Un vector $X \in T_{f(x)} f$ se numeşte direcţie asimptotică dacă

(6.6) $\qquad X \neq 0$ şi $II_x(X, X) = 0$

6.5. DEFINITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_{m+1}$ hipersuprafaţă şi $c = f \circ x : I \longrightarrow E_{m+1}$ o curbă regulată pe f. Curba c se numeşte linie asimptotică dacă vectorul $\dot{c}(t)$ este direcţie asimptotică, oricare ar fi $t \in I$.

OBSERVATIE. Din definiţiile 6.4. şi 6.5. obţinem că o curbă regulată $c = f \circ x : I \to E_{m+1}$ pe hipersuprafaţa $f : U \to E_{m+1}$ este linie asimptotică dacă şi numai dacă

(6.7) $\qquad II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0, \ (\forall)\ t \in I$

Folosind relaţiile (6.7) şi (6.2) obţinem ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice ale hipersuprafeţei

(6.8) $\qquad h_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) = 0$

6.6. OBSERVATIE. Folosind (6.5) rezultă că curba regulată c este linie asimptotică a hipersuprafeţei f dacă şi numai dacă vectorii $e_2(t)$ şi $N(x(t))$ sînt ortogonali, $(\forall)\ t \in I$.

6.7. PROPOZITIE. Fie $f : U \to E_3$ o suprafaţă şi $c = f \circ x : I \to E_3$ o curbă pe suprafaţa f. Presupunem că vectorii $\dot{c}(t)$ şi $c^{(2)}(t)$ sînt liniar independenţi oricare ar fi $t \in I$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) Curba c este linie asimptotică a suprafeţei.

(ii) Planul osculator la curba c în punctul $c(t)$ coincide cu planul tangent la suprafaţă în punctul $c(t) = f(x(t))$.

Demonstraţie. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Deoarece c este linie asimptotică, din formula lui Meusnier rezultă că vectorii $N(x(t))$ şi $e_2(t)$ sînt ortogonali. Prin urmare vectorul $e_2(t)$ este tangent în punctul $f(x(t))$ la hipersuprafaţa f. Este evident că $e_1(t) \in T_{f(x(t))}f$. Deoarece planul osculator este determinat de vectorii $e_1(t)$ şi $e_2(t)$, obţinem că planul osculator curbei în punctul $c(t)$ coincide cu planul tangent la suprafață în punctul $c(t) = f(x(t))$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Deoarece planul osculator la curba c în punctul $c(t) = f \circ x(t)$ este tangent suprafeței rezultă că $e_2(t) \in T_{f(x(t))}f$, $(\forall)\ t \in I$.

Prin urmare avem

$$< e_2(t)\ ,\ N(x(t)) > = 0$$

și folosind formula lui Meusnier obținem

$$II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t)) = 0\ ,\ (\forall)\ t \in I,$$

adică curba c este linie asimptotică a suprafeței.

6.8. OBSERVAȚIE. Dacă $\theta(t) \in [0, \frac{\pi}{2})$, atunci, din formula Meusnier obținem

$$(6.9) \qquad K_1(t) = \frac{|II_{x(t)}(\dot{c}(t), \dot{c}(t))|}{\|\dot{c}(t)\|^2 \cos\theta(t)},$$

unde $\theta(t)$ este unghiul dintre normala la suprafață și planul osculator la curbă în punctul $c(t) = f(x(t))$. Formula (6.9) ne arată că curbura unei curbe pe o suprafață este determinată de vectorul tangent $\dot{c}(t)$ și de planul osculator curbei în punctul $c(t)$. Acest fapt nu se întîmplă pentru o curbă oarecare din spațiul E_3.

6.9. EXEMPLE.

6.9.1. Ne propunem să determinăm liniile asimtotice ale elicoidului drept

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

$$f(x^1, x^2) = (x^1\cos x^2, x^1\sin x^2, bx^2),\ b \neq 0.$$

Am văzut în exemplul 2.6.2 că reperul Gauss în punctul $f(x)$ este constituit din vectorii

$$f_{x^1}(x) = (\cos x^2, \sin x^2, 0),$$

$$f_{x^2}(x) = (-x^1\sin x^2, x^1\cos x^2, b),$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{b^2+(x^1)^2}} \quad (b \sin x^2, - b \cos x^2, x^1).$$

Rezultă

$$f_{x^1x^1}(x) = (0,0,0)$$

$$f_{x^1x^2}(x) = (-\sin x^2, \cos x^2, 0) = f_{x^2x^1}(x)$$

$$f_{x^2x^2}(x) = (-x^1 \cos x^2, - x^1 \sin x^2, 0)$$

Coeficienţii formei a doua fundamentale sînt :

$$h_{11}(x) = \langle N(x), f_{x^1x^1}(x)\rangle = 0$$

$$h_{12}(x) = h_{21}(x) = \langle N(x), f_{x^1x^2}(x)\rangle = - \frac{b}{\sqrt{b^2+(x^1)^2}}$$

$$h_{22}(x) = \langle N(x), f_{x^2x^2}(x)\rangle = 0$$

Ecuaţia diferenţială a liniilor asimptotice

$$h_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) = 0,$$

devine

$$\frac{-2b}{\sqrt{b^2+(x^1(t))^2}}\, \dot{x}^1(t)\, \dot{x}^2(t) = 0$$

Deoarece $b \neq 0$, rezultă că liniile asimptotice ale elicoidului drept sînt curbele coordonate ale suprafeţei.

6.9.2. Ne propunem să determinăm liniile asimptotice ale hiperplanului

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_{n+1}$$

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,x^2,\dots,x^n, a_i x^i + b),$$

unde $a_1,\dots,a_n$ şi b sînt constante reale.

Am văzut în exemplul 5.10.2. că coeficienţii $h_{ij}(x)$ ai formei a doua fundamentale sînt nuli, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^n$. Rezultă că liniile asimptotice ale hiperplanului sînt nedeterminate.

6.10. PROPOZITIE. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) liniile asimptotice ale hipersuprafeţei f sînt nedeterminate

(ii) f este o hipersuprafaţă plană.

Demonstraţie. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Deoarece liniile asimptotice ale lui f sînt nedeterminate rezultă că orice vector $X \in T_{f(x)}f - \{0\}$ este direcţie asimptotică, $(\forall)\ x \in U$, deci

$$II_x(X, X) = 0 \quad , (\forall)\ X \in T_{f(x)} f - \{0\}.$$

De aici obţinem

$$II_x(f_{x^i}(x)\ ,\ f_{x^j}(x)) = 0, (\forall)\ x \in U.$$

Rezultă

$$h_{ij}(x) = 0 \quad , (\forall)\ x \in U.$$

Am obţinut egalităţile :

(6.10) $\quad \langle N_{x^i}(x)\ ,\ f_{x^j}(x)\rangle = 0.$

Din (6.10) rezultă că există o funcţie dif. $a : U \to \mathbb{R}$ a.î.

(6.10') $\quad N_{x^i}(x) = a(x)\, N(x)$

Inmulţind scalar (6.10') cu $N(x)$ şi ţinînd seama de faptul că $N_{x^i}(x) \in T_{f(x)}f$, rezultă $a(x) = 0$.

Cu aceasta (6.10') devine

$$N_{x^i}(x) = 0 ,$$

adică $N(x) = N_0 =$ vector constant, oricare ar fi $x \in U$. Deoarece

$$\langle N_0\ ,\ f_{x^i}(x) \rangle = 0\ , (\forall)\ x \in U$$

rezultă

$$(6.11) \qquad \langle N_0, f(x) \rangle = b ,$$

unde b este o constantă reală.

Dacă notăm $A_1,\dots,A_{n+1}$ componentele vectorului N_0 atunci (6.11) ne arată că avem

$$(6.11') \qquad A_1 f^1(x) + \dots + A_{n+1} f^{n+1}(x) - b = 0 ,$$

unde $f(x) = (f^1(x),\dots,f^{n+1}(x))$. Deoarece $\|N_0\| = 1$, rezultă $A_1^2 + \dots + A_{n+1}^2 > 0$, deci $f(x)$ se află într-un hiperplan. Prin urmare f este hipersuprafaţă plană .

(ii) $\Rightarrow$ (i) A se vedea exemplul 6.9.2.

§7. CURBURILE PRINCIPALE ALE UNEI HIPERSUPRAFEŢE. CURBURA MEDIE. CURBURA TOTALA (GAUSS).

7.1. Considerăm o hipersuprafaţă $f : U \to E_{n+1}$ şi fie $\{f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x), N(x)\}$ reperul Gauss într-un punct $f(x)$.

Notăm cu $g_{ij}(x)$ coeficienţii primei forme fundamentale a hipersuprafeţei şi cu $h_{ij}(x)$ coeficienţii formei a doua fundamentale deci

$$g_{ij}(x) = \langle f_{x^i}(x), f_{x^j}(x) \rangle \quad , \quad h_{ij}(x) = \langle N(x), f_{x^i x^j}(x) \rangle$$

Am văzut că aplicaţia Weingarten

$$L_x = - dN_x \circ df_x^{-1} : T_{f(x)}f \longrightarrow T_{f(x)}f$$

este liniară. Fie $(h^i_j(x))_{1 \le i,j \le n}$ matricea aplicaţiei Weingarten, deci

$$(7.1) \qquad L_x(f_{x^i}(x)) = h^k_i(x)\, f_{x^k}(x)$$

Pentru orice $x \in U$ avem :

$$L_x(f_{x^i}(x)) = - dN_x \circ df_x^{-1} \circ df_x(e_i) =$$
$$= - dN_x(e_i) = - N_{x^i}(x)$$

Egalitatea (7.1) se scrie

(7.1') $- N_{x^i}(x) = h_i^k(x)\, f_{x^k}(x)$

Inmulţim scalar (7.1') cu $f_{x^j}(x)$ şi obţinem

(7.2) $\qquad h_{ij}(x) = h_i^k(x)\, g_{kj}(x).$

Definim funcţiile

$$g^{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

prin

$$g^{ij}(x)\, g_{jk}(x) = \delta_k^i$$

Dacă înmulţim relaţiile (7.2) cu g^{jr} şi sumăm obţinem

(7.3) $\qquad h_i^r(x) = g^{rj}(x)\, h_{ji}(x)$

7.2. PROPOZITIE. i) Operatorul liniar al lui Weingarten

$$L_x : T_{f(x)} f \longrightarrow T_{f(x)} f$$

este autoadjunct.

ii) Rădăcinile ecuaţiei $\det (h_j^i(x) - \rho(x)\, \delta_j^i) = 0$ sînt reale.

Demonstraţie. i) Pentru orice $x \in U$ şi orice $X, Y \in T_{f(x)} f$ avem

$$\langle L_x X, Y\rangle = II_x(X,Y) = II_x(Y,X) = \langle L_x Y, X\rangle = \langle X, L_x Y\rangle$$

ii) Se foloseşte faptul că $(h_j^i(x))_{1 \le i,j \le n}$ este matricea operatorului autoadjunct L_x (vezi [52], p. 100, teorema 27).

7.3. DEFINITIE. Valorile proprii ale aplicației liniare Weingarten se numesc curburile principale ale hipersuprafeței.

OBSERVATIE. Fie $(h^i_j(x))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ matricea aplicației liniare a lui Waingarten. Rezultă că curburile principale sînt rădăcinile $\rho_1(x),\dots,\rho_n(x)$ ale cuației

$$\det(h^i_j(x) - \rho(x)\delta^i_j) = 0 \tag{7.4}$$

7.4. DEFINITIE. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață și fie $\rho_1(x),\dots,\rho_n(x)$ curburile principale ale hipersuprafeței într-un punct oarecare $f(x)$. Un punct $f(x_o)$ al hipersuprafeței se numește

i) punct eliptic, dacă $\rho_i(x_o) \neq 0$, $(\forall)\ i\in\{1,\dots,n\}$ și $\rho_1(x_o),\dots,\rho_n(x_o)$ au același semn.

ii) punct hiperbolic, dacă $\rho_k(x_o) \neq 0$ $(\forall)$ $k\in\{1,\dots,n\}$ și dacă există doi indici $i_o, j_o\in\{1,\dots,n\}$ astfel încît

$$\rho_{i_o}(x_o)\ \rho_{j_o}(x_o) < 0,$$

iii) punct parabolic dacă există doi indici $i_o, j_o\in\{1,\dots,n\}$ astfel încît

$$\rho_{i_o}(x_o) = 0\ ,\ \rho_{j_o}(x_o) \neq 0\ ,$$

iv) punct planar dacă

$$\rho_1(x_o) = \dots = \rho_n(x_o) = 0$$

7.5. EXEMPLE

7.5.1. Ne propunem să determinăm curburile principale ale hiperplanului

$$f : \mathbb{R}^n \to E_{n+1}$$
$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n,\ a_i x^i + b)\ ,$$

unde $a_1,\dots,a_n$, b sînt constante reale.

Deoarece $h_{ij}(x) = 0$, rezultă $h^i_j(x) = 0$ şi ecuaţia (7.4) devine

$$\rho^n(x) = 0 \quad ,$$

ceea ce ne arată că avem

$$\rho_1(x) = \dots = \rho_n(x) = 0 \ , \ (\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$$

Prin urmare curburile principale ale unui hiperplan sînt toate nule. Deoarece curburile principale ale hiperplanului sînt toate nule rezultă că toate punctele unui hiperplan sînt puncte planare.

7.5.2. Ne propunem să determinăm curburile principale ale hipersferei

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_{m+1} \ ,$$

$$f(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2},\dots,\frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}\ ,\ r\,\frac{v^2-r^2}{v^2+r^2} \right) \ ,$$

unde $v^2 = \sum_{i=1}^{n}(x^i)^2$, $r = \text{const} > 0$,

Am văzut în exemplul 5.1o.3, că pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ avem

$$II_x = \frac{1}{r}\, I_x$$

Rezultă

$$h_{ij}(x) = \frac{1}{r}\, g_{ij}(x)$$

De aici obţinem

$$h^k_i(x) = g^{kj}(x)\, h_{ij}(x) = \frac{1}{r}\,\delta^k_i$$

Ecuaţia (7.4) devine

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{r} - \rho(x) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} - \rho(x) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{r} - \rho(x) \end{vmatrix} = 0$$

obținem curburile principale ale hipersferei:

$$\rho_1(x) = \ldots = \rho_n(x) = \frac{1}{r}$$

Folosind definiția 7.4 rezultă că toate punctele hipersferei sînt puncte eliptice.

7.6. <u>OBSERVATIE.</u> In cazul unei suprafețe, ecuația (7.4) se scrie

$$\begin{vmatrix} h_1^1(x) - \rho(x) & h_2^1(x) \\ h_1^2(x) & h_2^2(x) - \rho(x) \end{vmatrix} = 0$$

sau

(7.4')
$$\rho^2(x) - (h^1_1(x) + h_2^2(x))\ \rho(x) + h_1^1(x)h_2^2(x) - h_2^1(x)h_1^2(x) = 0$$

Folosind formula (7.3) avem

$$h_1^1(x) = g^{1i}(x)\ h_{i1}(x) = g^{11}(x)\ h_{11}(x) + g^{12}(x)\ h_{12}(x) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))}(g_{22}(x)\ h_{11}(x) - g_{12}(x)\ h_{12}(x))$$

$$h_2^1(x) = g^{1i}(x)\ h_{i2}(x) = g^{11}(x)\ h_{12}(x) + g^{12}(x)\ h_{22}(x) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))}(g_{22}(x)\ h_{12}(x) - g_{12}(x)\ h_{22}(x))$$

$$h_1^2(x) = g^{2i}(x)\ h_{1i}(x) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))}(g_{11}(x)\ h_{12}(x) - g_{12}(x)\ h_{11}(x))$$

$$h_2^2(x) = g^{2i}(x)\ h_{2i}(x) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))}(g_{11}(x)\ h_{22}(x) - g_{12}(x)\ h_{12}(x))$$

Ecuația (7.4') devine :

$$(7.4") \quad \rho^2(x)\det(g_{ij}(x)) - (g_{11}(x)\, h_{22}(x) + g_{22}(x)\, h_{11}(x) -$$

$$- 2\, g_{12}(x)\, h_{12}(x))\, \rho(x) + \det(h_{ij}(x)) = 0$$

<u>Exemplu</u>. Ne propunem să determinăm curburile principale ale elicoidului drept

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{E}_3,$$

$$f(x^1, x^2) = (x^1 \cos x^2,\ x^1 \sin x^2, bx^2),$$

unde $b \neq 0$.

Folosind exemplul 6.9. avem :

$$g_{11}(x) = \langle f_{x^1}(x),\ f_{x^1}(x)\rangle = 1$$

$$g_{12}(x) = g_{21}(x) = \langle f_{x^1}(x),\ f_{x^2}(x)\rangle = 0$$

$$g_{22}(x) = \langle f_{x^2}(x),\ f_{x^2}(x)\rangle = (x^1)^2 + b^2$$

$$h_{11}(x) = 0 = h_{22}(x),$$

$$h_{12}(x) = h_{21}(x) = \frac{-b}{b^2+(x^1)^2}$$

In cazul de față, ecuația (7.4") se scrie

$$((x^1)^2 + b^2)\ \rho^2(x) - \frac{b^2}{(x^1)^2+b^2} = 0$$

Rezultă că curburile principale ale elicoidului drept sînt :

$$(7.5) \qquad \rho_1(x) = -\rho_2(x) = \frac{b}{(x^1)^2 + b^2}$$

Ținînd seama de definiția 7.4, rezultă că toate punctele elicoidului drept sînt hiperbolice.

7.7. <u>OBSERVATIE</u>. Ecuația (7.4) se poate scrie sub forma

$$\det\left(g^{ik}(x)h_{kj}(x) - \rho(x)g^{ik}(x)\, g_{kj}(x)\right) = 0$$

sau

$$\det\left(g^{ik}(x)\left(h_{kj}(x) - \rho(x)g_{kj}(x)\right)\right) = 0$$

De aici rezultă

(7.4''') $\quad \det(h_{kj}(x) - \rho(x)\, g_{kj}(x)) = 0$

Prin urmare obținerea curburilor principale ale unei hipersuprafețe revine la rezolvarea ecuației (7.4''').

7.8. <u>DEFINITIE. Fie</u> $f : U \to E_{n+1}$ <u>o hipersuprafață. Considerăm funcțiile</u>

$$H, K : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

<u>definite prin</u> :

(7.6) $\quad H(x) = \frac{1}{n}(\rho_1(x) + \dots + \rho_n(x))$,

(7.7) $\quad K(x) = \rho_1(x) \dots \rho_n(x)$

<u>unde</u> $\rho_1(x), \dots, \rho_n(x)$ <u>sînt curburile principale ale hipersuprafeței. H(x) se numește curbura medie, iar K(x) se numește curbura totală sau curbura Gauss a hipersuprafeței în punctul f(x)</u>.

<u>OBSERVATIE</u>. Știm că curburile principale $\rho_1(x), \dots, \rho_n(x)$ sînt rădăcinile ecuației (7.4). Ecuația (7.4) se scrie

(7.8) $\quad (-1)^n \rho^n(x) + (-1)^{n-1} \rho^{n-1}(x) \sum_{i=1}^{n} h_i^i(x) +$

$$+ \dots + \det(h_j^i(x)) = 0$$

Ținînd seama de (7.6) și (7.8) obținem

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i^i(x)$$

$$K(x) = \det(h_j^i(x))$$

De aici rezultă

$$(7.9) \qquad H(x) = \frac{1}{n} g^{ij}(x)\, h_{ij}(x),$$

$$(7.10) \qquad K(x) = \frac{\det(h_{ij}(x))}{\det(g_{ij}(x))}$$

7.9. <u>**EXEMPLE**</u>. Folosind rezultatele de la 7.5 şi 7.7 rezultă următoarele concluzii :

7.9.1. Curbura medie şi curbura Gauss ale unui hiperplan sînt nule,

$$H = K = 0$$

7.9.2. Curbura medie şi curbura Gauss a hipersferei sînt date de

$$H(x) = \frac{1}{r} \quad , \quad K(x) = \frac{1}{r^n}$$

în orice punct fix $f(x)$ al hipersferei (r este raza hipersferei).

7.9.3. Curbura medie şi curbura totală ale elicoidului drept sînt

$$(7.11) \qquad H(x) = 0 \quad , \quad K(x) = \frac{-b}{((x^1)^2+b^2)^2} \, , \, (\forall)\ x \in \mathbb{R}^2$$

<u>Hipersuprafeţele a căror curbură medie este nulă se numesc hipersuprafeţe minimale.</u> Din (7.11) rezultă că elicoidul drept este o suprafaţă minimală.

7.10. OBSERVATIE.

7.10.1. Folosind definiţia 7.4 rezultă că <u>un punct</u> $f(x_0)$ <u>al unei suprafeţe este</u>

i) <u>punct eliptic dacă</u> $K(x_0) > 0$,

ii) <u>punct hiperbolic dacă</u> $K(x_0) < 0$,

iii) <u>punct parabolic dacă</u> $K(x_0) = 0$ <u>şi</u> $H(x_0) \neq 0$,

iv) <u>punct planar dacă</u> $K(x_0) = 0$ <u>şi</u> $H(x_0) = 0$.

.10.2. Ţinînd seama de (7.4''), (6.8) şi (7.1o) rezultă că dacă avem $K(x_0) < 0$, atunci prin punctul $f(x_0)$ al unei suprafeţe trec două linii asimptotice. Dacă $K(x_0) = 0$ şi $H(x_0) \neq 0$,

atunci prin punctul $f(x_0)$ trece o singură linie asimptotică a suprafeţei. In cazul în care $K(x_0) > 0$, atunci prin punctul $f(x_0)$ al suprafeţei nu trece nici o linie asimptotică. Dacă $K(x_0) = 0$ şi $H(x_0) = 0$, atunci orice curbă ce trece prin punctul $f(x_0)$ este linie asimptotică a suprafeţei.

§8. SIMBOLURILE LUI CHRISTOFFEL ALE UNEI HIPERSUPRAFEŢE. FORMULELE LUI GAUSS ŞI WEINGARTEN.

8.1. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă şi fie

$$\left\{ f_{x^1}(x), \ldots, f_{x^n}(x), N(x) \right\}$$

reperul Gauss într-un punct oarecare $f(x)$. Coeficienţii primei forme fundamentale sînt daţi de formulele

$$g_{ij}(x) = \langle f_{x^i}(x), f_{x^j}(x) \rangle$$

Considerăm funcţiile

$$|ij,k| : U \to \mathbb{R} \quad \text{şi} \quad \left| {k \atop ij} \right| : U \to \mathbb{R}$$

definite prin

$$(8.1) \qquad |ij,k| = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

$$(8.2) \qquad \left| {k \atop ij} \right| = g^{ks} \, |ij,s|$$

DEFINIŢIE. Funcţiile $|ij,k|$ (resp. $\left| {k \atop ij} \right|$) se numesc simbolurile lui Christoffel de prima (resp. a doua) speţă ale hipersuprafeţei.

8.2. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafață și $\varphi : \overline{U} \longrightarrow U$ o schimbare de parametri. Presupunem că schimbarea de parametri este dată prin

$$(8.3) \qquad x^i = x^i(\overline{x}^1,\dots,\overline{x}^n) \quad , \quad i \in \{1,\dots,n\}$$

Folosind observația 3.4. obținem formulele

$$(8.4) \qquad \overline{g}_{jk}(\overline{x}) = g_{rs}(x) \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} \ ,$$

unde $x = \varphi(\overline{x})$.

<u>PROPOZITIE</u>. (<u>legea de transformare a simbolurilor lui Christoffel</u>) . <u>La o schimbare de parametri, simbolurile lui Cristoffel de speța a doua ale unei hipersuprafețe se transformă după legea următoare</u> :

$$(8.5) \qquad \frac{\partial^2 x^k}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j} = - \left|\begin{matrix} k \\ rs \end{matrix}\right| \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} + \left|\begin{matrix} \overline{r} \\ ij \end{matrix}\right| \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^r}$$

<u>Demonstrație</u>. Derivăm formulele (8.4) în raport cu $\overline{x}^i$ și avem

$$(8.6) \qquad \frac{\partial \overline{g}_{jk}}{\partial \overline{x}^i} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} + g_{rs} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j \partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k} + g_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^i}$$

Permutînd circular indicii i,j,k obținem alte două relații analoage :

$$(8.6') \qquad \frac{\partial \overline{g}_{ki}}{\partial \overline{x}^j} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} + g_{rs} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^k \partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^i} + g_{rs} \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \overline{x}^i \partial \overline{x}^j}$$

(8.6") $$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^p}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} + g_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} + g_{rs}\frac{x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

Scăzînd relaţia (8.6) din suma relaţiilor (8.6') şi (8.6") obţinem

(8.7) $$|\overline{ij,k}| = |rs,p|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} + g_{rs}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k},$$

unde $|\overline{ij,k}|$ sînt simbolurile lui Christoffel de primă speţă ale hipersuprafeţei $\bar{f} = f \circ \varphi$.

Am obţinut legea după care se transformă simbolurile lui Christoffel de primă speţă la o schimbare de parametri.

Ţinînd seama de (8.4) formulele

$$\bar{g}^{ij}\bar{g}_{jk} = \delta^i_k,$$

devin

(8.8) $$\bar{g}^{ij} g_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k} = \delta^i_k$$

Dacă înmulţim relaţiile (8.8) cu $g^{pq}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^p}$ şi sumăm obţinem

(8.9) $$\bar{g}^{ij}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j} = g^{pq}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}$$

Dacă înmulţim relaţiile (8.7) cu $\bar{g}^{km}$ şi ţinem seama de (8.9). obţinem

$$\left|\overline{\begin{matrix} m \\ ij \end{matrix}}\right| = |r,s,p|\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} g^{qp}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^q} + g_{rs} g^{qs}\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^q}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$$

Inmulţind ultimele egalităţi cu $\dfrac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m}$ şi sumînd rezultă

$$\begin{vmatrix} \overline{m} \\ ij \end{vmatrix} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^m} = \begin{vmatrix} k \\ rs \end{vmatrix} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}$$

adică tocmai legea (8.5).

8.3. PROPOZITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă şi fie $\left\{ f_{x^1}(x), \dots, f_{x^n}(x), N(x) \right\}$ reperul Gauss într-un punct oarecare $f(x)$ al hipersuprafeţei. Fie h_{ij} coeficienţii formei a doua fundamentale şi fie h^i_j elementele matricei aplicaţiei liniare a lui Weingarten. Avem formulele

(F.G) $$f_{x^i x^k} = \begin{vmatrix} s \\ ik \end{vmatrix} f_{x^s} + N h_{ik}$$

şi

(F.W) $$N_{x^i} = - h^k_i f_{x^k}$$

Formulele (F.G) se numesc formulele lui Gauss, iar formulele (F.W) se numesc formulele lui Weingarten.

Demonstraţie. Vectorul $f_{x^i x^k}(x)$ se poate exprima în fiecare punct $x \in U$ ca o combinaţie liniară de vectorii reperului Gauss, deci avem :

(8.1o) $$f_{x^i x^k} = A^s_{ik} f_{x^s} + a_{ik} N$$

unde A^s_{ik} şi a_{ik} sînt funcţii diferenţiabile de $x^1, \dots, x^n$. Inmulţind scalar relaţia (8.1o) cu N rezultă :

$$a_{ik} = \langle N, f_{x^i x^k} \rangle = h_{ik}$$

Cu aceasta relaţia (8.1o) se scrie :

(8.1o') $$f_{x^i x^k} = A^s_{ik} f_{x^s} + h_{ik} N \quad ,$$

Inmulţim scalar relaţia (8.1o') cu f_{x^j} şi obţinem :

(8.11) $$\langle f_{x^i x^k}, f_{x^j}\rangle = A^s_{ik}\, g_{sj} \quad , \quad A^s_{ik} = A^s_{ki}$$

Pe de altă parte derivînd în raport cu x^k relaţia :

$$g_{ij} = \langle f_{x^i}, f_{x^j}\rangle$$

obţinem :

(8.12) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \langle f_{x^i x^k}, f_{x^j}\rangle + \langle f_{x^i}, f_{x^j x^k}\rangle$$

Din relaţiile (8.11) şi (8.12), rezultă :

(8.13) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = A^s_{ik}\, g_{sj} + A^s_{jk}\, g_{si}$$

Permutînd circular indicii i,j şi k obţinem alte două relaţii analoage

(8.13') $$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = A^s_{ji}\, g_{sk} + A^s_{ki} g_{sj}$$

(8.13") $$\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} = A^s_{kj}\, g_{si} + A^s_{ij} g_{sk}$$

Din relaţiile (8.13), (8.13') şi (8.13") obţinem :

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2\, A^s_{ij} g_{sk}$$

sau

(8.13"') $$2\, |ij,k| = 2A^s_{ij} g_{sk}$$

Dacă înmulţim (8.13"') cu g^{kr} şi sumăm, rezultă :

$$A^r_{ij} = \left|\begin{matrix} r \\ ij \end{matrix}\right|$$

şi înlocuind în (8.1o') obţinem formulele (F.G) ale lui Gauss .

Să stabilim acum formulele (F.W) ale lui Weingarten. Deoarece vectorul $N_{x^i}(x) \in T_{f(x)}f$ oricare ar fi $x \in U$, rezultă că avem:

(8.14) $$N_{x^i} = B_i^k f_{x^k}$$

Inmulţim scalar cu f_{x^j} şi obţinem: $\langle N_{x^i}, f_{x^j} \rangle = B_i^k g_{kj}$ sau $-h_{ij} = B_i^k g_{kj}$. Inmulţind cu g^{jr} şi sumînd, obţinem $B_i^r = -g^{jr}h_{ji}$ adică $-B_i^r = h_i^r$ sînt tocmai elementele matricei aplicaţiei Weingarten. Acum din (8.14) se obţin formulele (F.W).

<u>Observaţii</u>. i) Simbolurile lui Christofel de prima şi a doua speţă ai unei hipersuprafeţe sînt <u>invarianţi intrinseci</u>.

ii) Prin calcul direct se constată că simbolurile lui Christofel de speţa a doua satisfac identităţile lui Ricci

(8.15) $$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \left| \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right| g_{rj} + \left| \begin{matrix} r \\ jk \end{matrix} \right| g_{ri}$$

8.5. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafaţă şi fie $\{ f_{x^1}(x), \ldots, \ldots, f_{x^n}(x), N(x) \}$ reperul Gauss al hipersuprafeţei într-un punct oarecare $f(x)$. Stim că aplicaţia lui Gauss

$$N : U \to E_{n+1} \ , \ x \to N(x)$$

are imaginea pe sfera unitate $S^n \subset E_{n+1}$.

<u>PROPOZITIE. Fie</u> $f : U \to E_{n+1}$ <u>o hipersuprafaţă. Următoarele afirmaţii sînt echivalente</u>:

(i) <u>hipersuprafaţa</u> $f : U \to E_{n+1}$ <u>nu are puncte parabolice</u>

(ii) <u>aplicaţia Gauss</u> $N : U \to E_{n+1}$ <u>este o hipersuprafaţă parametrizată în</u> E_{n+1}.

<u>Demonstraţie</u>. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza canonică a spaţiului R^n. Vom arăta că vectorii $N_{x^1}(x) = dN_x(e_1), \ldots, N_{x^n}(x) = dN_x(e_n)$ sînt liniar independenţi. Presupunem că există numerele reale $a^1, \ldots, a^n \in R$ astfel încît să avem

(8.16) $$a^i N_{x^i}(x) = 0$$

Ținînd seama de formulele lui Weingarten, din (8.16) rezultă

(8.16') $\qquad a^i h_i^k(x)\, f_{x^k}(x) = 0$

Deoarece vectorii $f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x)$ sînt liniar independenți, $(\forall)x\in U$, din (8.16') obținem

(8.17) $\qquad a^i h_i^k(x) = 0$

Știm că hipersuprafața f nu are puncte parabolice, deci

(8.18) $\qquad K(x) = \det(h_k^i(x)) \neq 0\ ,\ (\forall)x\in U$

Folosind (8.18) și (8.17) rezultă că trebuie să avem $a^1=a^2=\dots=a^n=0$, adică vectorii $N_{x^1}(x),\dots,N_{x^n}(x)$ sînt liniar independenți. Deoarece aplicația

$$dN_x : R^n \longrightarrow R^{n+1}$$

duce vectori liniar independenți în vectori liniar independenți, rezultă că ea este injectivă. Prin urmare aplicația Gauss $N : U \longrightarrow E_{n+1}$ este o hipersuprafață parametrizată în E_{n+1}.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Deoarece aplicația Gauss $N : U \longrightarrow E_{n+1}$ este hipersuprafață parametrizată, rezultă că aplicația $dN_x : R^n \longrightarrow R^{n+1}$ este injecție, $(\forall)x\in U$. Prin urmare vectorii $N_{x^1}(x),\dots,N_{x^n}(x)$ sînt liniar independenți $(\forall)x\in U$. Ținînd seama de formulele Weingarten

$$N_{x^i}(x) = -\,h_i^k(x)\, f_{x^k}(x)$$

și de faptul că vectorii $f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x)$ sînt liniar independenți, rezultă că $\det(h_j^i(x)) \neq 0$, adică hipersuprafața $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ nu are puncte parabolice.

§ 9. A TREIA FORMA FUNDAMENTALA A UNEI HIPERSUPRAFETE. INTERPRETAREA GEOMETRICA A CURBURII TOTALE A UNEI SUPRAFETE. FORMULA LUI BELTRAMI-ENNEPER. FORMULA LUI ENNEPER.

9.1. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafață și $\{f_{x^1}(x),\dots,f_{x^n}(x),\ N(x)\}$ reperul Gauss într-un punct oarecare $f(x)$ al hipersuprafeței.

Considerăm forma biliniară simetrică

$$III_x : T_x R^n \times T_x R^n \longrightarrow R$$

definită prin

$$(9.1)\qquad III_x(X,Y) = \langle dN_xX\ ,\ dN_xY\rangle$$

DEFINITIE. Aplicaţia $x \longrightarrow III_x$ <u>se numeşte forma a treia fundamentală</u> şi se notează cu III.

<u>Observaţie.</u> Bijecţia liniară

$$df_x : \mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n \longrightarrow T_{f(x)}f$$

induce o formă biliniară simetrică

$$III'_x : T_{f(x)}f \times T_{f(x)}f \longrightarrow \mathbb{R}$$

prin

$$(9.2)\qquad III'_x(X,Y) = \langle L_xX,\ L_xY\rangle,$$

unde

$$L_x = -\, dN_x \circ df_x^{-1} : T_{f(x)}f \longrightarrow T_{f(x)}f$$

este aplicaţia liniară a lui Weingarten.

In adevăr, pentru orice $X,Y \in T_{f(x)}f$ avem :

$$III'_x(X,Y) = III_x(df_x^{-1}X\ ,\ df_x^{-1}Y) \overset{(9.1)}{=\!=\!=}$$

$$\overset{(9.1)}{=\!=\!=} \langle dN_x \circ df_x^{-1}X,\ dN_x \circ df_x^{-1}Y\rangle =$$

$$= \langle L_xX,\ L_xY\rangle$$

Aplicaţia $x \longrightarrow III'_x$ o numim tot <u>forma a treia fundamentală</u>. Pe viitor vom nota III_x în loc de III'_x .

<u>OBSERVATII</u>. 1) Fie $e_{ij}(x)$ elementele matricei formei biliniare simetrice III_x relativă la baza canonică $\{e_1,\dots,e_n\}$ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^n \cong T_x\mathbb{R}^n$. Folosind formulele lui Weingarten avem :

$$e_{ij}(x) = III_x(e_i,e_j) = \langle dN_x\ e_i,\ dN_x\ e_j\rangle =$$

$$= \langle N_{x^i}(x)\ ,\ N_{x^j}(x)\rangle = \langle h_i^s(x)\ f_{x^s}(x), h_j^r(x) f_{x^r}(x)\rangle =$$

$$= g_{sr}(x)\, h_i^s(x)\, h_j^r(x)\ .$$

Rezultă formulele

(9.3) $$e_{ij}(x) = g^{rs}(x)\, h_{ri}(x)\, h_{sj}(x)$$

ii) Ştim că determinantul produsului a două matrice pătratice este egal cu produsul determinanţilor matricelor respective. Folosind egalitatea

$$\det(g^{ij}(x)) = \frac{1}{\det(g_{rs}(x))}\ ,$$

din formulele (9.3) rezultă

$$\det(e_{ij}(x)) = \det(g^{rs}(x))(\det(h_{ij}(x)))^2 =$$

$$= \frac{(\det(h_{ij}(x)))^2}{\det(g_{ij}(x))} = K(x)\det(h_{ij}(x))\ ,$$

unde $K(x)$ este curbura totală a hipersuprafeţei în punctul $f(x)$. Am obţinut egalitatea

(9.3') $$\det(e_{ij}(x)) = K(x)\det(h_{kr}(x))$$

iii) Fie $f : U \longrightarrow E_{M+1}$ o hipersuprafaţă care nu are puncte parabolice. Conform propoziţiei 8.5 rezultă că aplicaţia Gauss $N : U \longrightarrow E_{M+1}$ este o hipersuprafaţă parametrizată. Este uşor de văzut că prima formă fundamentală a hipersuprafeţei $N : U \longrightarrow E_{M+1}$ este forma a treia fundamentală a hipersuprafeţei $f : U \longrightarrow E_{M+1}$.

9.2. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafaţă care nu are puncte parabolice. Prin aplicaţia Gauss $N : U \longrightarrow E_3$, porţiuni de pe suprafaţă, au corespondente anumite porţiuni pe sfera unitate $S^2 \subset E_3$.

Fie $x_0 \in U$ şi fie V_{x_0} o vecinătate suficient de mică a lui x_0. Vrem să calculăm următoarea limită

$$\lim_{V_{x_0} \to x_0} \frac{\text{aria } N(V_{x_0})}{\text{aria } f(V_{x_0})}$$

Pentru a calcula această limită vom folosi formula de la 4.7 precum şi relaţiile stabilite la 9.1. Avem

$$\text{aria } f(V_{x_0}) = \iint_{V_{x_0}} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx^1 dx^2$$

$$\text{aria } N(V_{x_0}) = \iint_{V_{x_0}} \sqrt{\det(e_{ij}(x))}\, dx^1 dx^2$$

Folosind formula de medie pentru integrale duble, rezultă:

$$\lim_{V_{x_0} \to x_0} \frac{\text{aria } N(V_{x_0})}{\text{aria } f(V_{x_0})} = \frac{\sqrt{\det(e_{ij}(x_0))}}{\sqrt{\det(g_{ij}(x_0))}} = \sqrt{\frac{\det(h_{ij}(x_0))}{\det(g_{kr}(x_0))}\, K(x_0)} =$$

$$= \sqrt{(K(x_0))^2} = |K(x_0)|$$

Am obţinut astfel interpretarea geometrică a curburii totale a unei suprafeţe.

9.3. PROPOZITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafaţă, $K(x)$ şi $H(x)$ curbura Gauss şi curbura medie într-un punct $f(x)$ al suprafeţei. Dacă I_x, II_x şi III_x sînt cele trei forme fundamentale ale suprafeţei atunci are loc formula Beltrami-Enneper

$$III_x - 2H(x)II_x + K(x)I_x = 0 \tag{9.4}$$

Demonstratie. Folosind formulele (9.3) obţinem

$$\begin{aligned} e_{11}(x) &= g^{rs}(x)\, h_{r1}(x)\, h_{s1}(x) = \\ &= g^{11}(x)\, h_{11}^2(x) + 2g^{12}(x)\, h_{11}(x)\, h_{12}(x) + \\ &+ g^{22}(x)\, h_{12}^2(x) = \\ &= \frac{h_{11}(x)}{\det(g_{ij}(x))}\,(g_{11}(x)\, h_{22}(x) + \\ &+ g_{22}(x)\, h_{11}(x) - 2g_{12}(x)\, h_{12}(x)) - \\ &- \frac{g_{11}(x)}{\det(g_{ij}(x))}\,(h_{11}(x)\, h_{22}(x) - h_{12}^2(x)) = \\ &= 2H(x)\, h_{11}(x) - K(x)\, g_{11}(x) \end{aligned}$$

Am obţinut formula:

$$e_{11}(x) = 2H(x)\, h_{11}(x) - K(x)\, g_{11}(x) \tag{9.5}$$

Analog obţinem

$$e_{12}(x) = e_{21}(x) = 2H(x)\, h_{12}(x) - K(x)\, g_{12}(x) \tag{9.6}$$

şi

(9.7) $\quad e_{22}(x) = 2H(x)\, h_{22}(x) - K(x)\, g_{22}(x)$

Formulele (9.5), (9.6) şi (9.7) ne arată că pentru orice indici $i,j \in \{1,2\}$ avem

$$III_x(e_i,e_j) = 2H(x)\, II_x(e_i,e_j) - K(x)\, I_x(e_i,e_j)\ ,$$

sau

$$(III_x - 2H(x)\, II_x + K(x)\, I_x)(e_i,e_j) = 0$$

Formula (9.4) fiind adevărată pentru vectorii bazei canonice $\{e_1,e_2\}$ este adevărată pentru orice vectori $X,Y \in T_x\ \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$.
Formula (9.4) a lui Beltrami-Enneper ne arată că forma a treia fundamentală a unei suprafeţe depinde de primele două forme fundamentale.

9.4. PROPOZITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafaţă. Presupunem că curbura totală $K(x)$ este negativă, oricare ar fi $x \in U$. Fie

$$c = f \circ x : I \longmapsto E_3$$

o curbă (în poziţie generală) pe suprafaţa f. Dacă c este linie asimptotică a suprafeţei atunci avem formula Enneper

(9.8) $\quad K_2^2(t) = -K(x(t)) \quad , \quad (\forall)\, t \in I\ ,$

unde $K_2(t)$ este torsiunea curbei c în punctul $c(t)$.

Demonstraţie. Deoarece curba $c = f \circ x$ este linie asimptotică a suprafeţei, din formula Beltrami-Enneper, rezultă

(9.9) $\quad III_{x(t)}(\dot{c}(t),\ \dot{c}(t)) + K(x(t))\ I_{x(t)}(\dot{c}(t),\ \dot{c}(t)) = 0$

Relaţia (9.9) ne arată că avem

(9.9') $\quad \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)e_{ij}(x(t)) = -K(x(t))g_{ij}(x(t))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)$

Fie $\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ reperul Frenet asociat curbei c.

Deoarece planul osculator în punctul $c(t)$ al liniei asimptotice este tangent la suprafață (a se vedea propoziția 6.7), rezultă că avem

(9.10) $$e_3(t) = \varepsilon N(x(t)),$$

unde $\varepsilon = +1$ sau $\varepsilon = -1$. Din (9.10) rezultă

(9.11) $$\dot{e}_3(t) = \varepsilon N_{x^i}(x(t))\,\dot{x}^i(t)$$

Folosind formula a treia a lui Frenet din (9.11) rezultă

(9.12) $$-K_2(t)\,\|\dot{c}(t)\|\,e_2(t) = \varepsilon N_{x^i}(x(t))\,\dot{x}^i(t)\ ,$$

Din (9.12) avem :

$$K_2^2(t)\cdot\|\dot{c}(t)\|^2 = \langle N_{x^i}(x(t)),\ N_{x^j}(x(t))\rangle\,\dot{x}^i(t)\,\dot{x}^j(t)$$

sau

(9.13) $$K_2^2(t)\ \|\dot{c}(t)\|^2 = e_{ij}(x(t))\,\dot{x}^i(t)\,\dot{x}^j(t)$$

Ţinînd seama de (9.9'), din egalitatea (9.13) rezultă

$$K_2^2(t)\ \|\dot{c}(t)\|^2 = -K(x(t))\,g_{ij}(x(t))\,\dot{x}^i(t)\,\dot{x}^j(t),$$

adică tocmai formula (9.8) a lui Enneper.

§10. HIPERSUPRAFEȚE ȚIȚEICA

10.1. DEFINIȚIE Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață parametrizată. Presupunem că curbura Gauss a hipersuprafeței nu se anulează în nici un punct. Spunem că f este hipersuprafață Țițeica dacă

$$\frac{K(x)}{d^{n+2}(x)} = \text{const.}, \quad (\forall)\ x \in U,$$

unde $K(x)$ este curbura Gauss într-un punct $f(x)$, iar $d(x)$ este distanța de la un punct fix la hiperplanul tangent în punctul $f(x)$ la hipersuprafață.

10.2. EXEMPLE.

10.2.1. Considerăm aplicația

$$f : \mathbb{R}^n \to E_{n+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2}, \dots, \frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}, r\frac{v^2-r^2}{v^2+r^2} \right),$$

unde $v^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$, $r = \text{const.}, > 0$. Este ușor de verificat că imaginea aplicației f este hipersfera din E_{n+1} de rază r și cu centrul în origine, din care se scoate polul nord. Am văzut în exemplul 7.9.2. că curbura Gauss a hipersferei este

$$K(x) = \frac{1}{r^n}, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$$

Deoarece distanța de la origine la hiperplanul tangent este egală cu r, rezultă

$$\frac{K(x)}{d^{n+2}(x)} = \frac{1}{r^n} \cdot \frac{1}{r^{n+2}} = \frac{1}{r^{2(n+1)}} = \text{const.}$$

Prin urmare, sfera de dimensiune n din E_{n+1} este o hipersuprafaţă Ţiţeica.

10.2.2. Considerăm mulţimea

$$U = \left\{ (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^1x^2x^3 > 0 \right\}$$

şi aplicaţia

$$f : U \to E_4$$

definită prin

$$f(x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, x^3, \frac{1}{x^1x^2x^3})$$

Am văzut în exemplul 1.4.3. că f este o hipersuprafaţă parametrizată. Vom arăta că f este o hipersuprafaţă Ţiţeica. Avem :

$$f_{x^1}(x) = (1, 0, 0, \frac{-1}{(x^1)^2x^2x^3})$$

$$f_{x^2}(x) = (0, 1, 0, \frac{-1}{x^1(x^2)^2x^3}$$

$$f_{x^3}(x) = (0, 0, 1, \frac{-1}{x^1x^2(x^3)^2})$$

$$N(x) = \frac{1}{B(x)} (x^2x^3, x^1x^3, x^1x^2, (x^1x^2x^3)^2),$$

unde am folosit notaţia

$$B(x) = \sqrt{(x^1x^2x^3)^4 + (x^1x^2)^2 + (x^1x^3)^2 + (x^2x^3)^2}$$

Coeficienţii primei forme fundamentale sînt :

$$g_{ii}(x) = \frac{1}{(x^1x^2x^3)^2} \frac{1}{(x^i)^2}\left[1 + (x^1x^2x^3)^2(x^i)^2 \right], i\in\{1,2,3\}$$

$$g_{ij}(x) = \frac{1}{(x^1x^2x^3)^2} \frac{1}{x^i} \frac{1}{x^j}, \quad i,j\in\{1,2,3\} \text{ şi } i \neq j$$

Rezultă

$$\det(g_{ij}(x)) = \frac{B^2(x)}{(x^1x^2x^3)^4}$$

În continuare avem :

$$f_{x^i x^j}(x) = \left(0,0,0, \frac{1}{x^1x^2x^3}\cdot\frac{1}{x^ix^j}\right) = f_{x^jx^i}(x)$$

pentru orice indici $i,j\in\{1,2,3\}$, $i \neq j$

și

$$f_{x^i x^i}(x) = \left(0,0,0, \frac{2}{x^1x^2x^3}\cdot\frac{1}{x^ix^i}\right)$$

Coeficienții formei a doua fundamentale sînt dați de formulele

$$h_{ij}(x) = \langle N(x)\ ,\ f_{x^ix^j}(x)\rangle$$

Rezultă :

$$h_{ii}(x) = \frac{2x^1x^2x^3}{B(x)x^ix^i}\ ,\ i\in\{1,2,3\}$$

$$h_{ij}(x) = \frac{x^1x^2x^3}{B(x)x^ix^j}\ ,\ i,j\in\{1,2,3\}\ \text{și}\ \ i \neq j$$

In continuare obținem

$$\det(h_{ij}(x)) = \frac{4x^1x^2x^3}{B^3(x)}$$

Rezultă că curbura Gauss a hipersuprafeței este dată de

$$K(x) = \frac{\det(h_{ij}(x))}{\det(g_{ij}(x))} = \frac{4(x^1x^2x^3)^5}{B^5(x)}$$

Ecuația hiperplanului tangent hipersuprafeței în punctul $f(x)$ este (a se vedea exemplul 1.4.3)

$$\frac{1}{x^1}(X^1 - x^1) + \frac{1}{x^2}(X^2 - x^2) + \frac{1}{x^3}(X^3 - x^3) +$$
$$+ x^1x^2x^3\left(X^4 - \frac{1}{x^1x^2x^3}\right) = 0 .$$

Distanța de la origine la hiperplanul tangent este

$$d(x) = \frac{4x^1x^2x^3}{B(x)}$$

Rezultă

$$\frac{K(x)}{d^5(x)} = \frac{4(x^1x^2x^3)^5}{B^5(x)} \cdot \frac{B^5(x)}{4^5(x^1x^2x^3)^5} = \frac{1}{4^4} ,$$

ceea ce ne arată că hipersuprafaţa considerată este hipersuprafaţă Ţiţeica.

1o.3. PROPOZITIE. Liniile asimptotice ale unei suprafeţe Ţiţeica cu curbură Gauss negativă sînt curbe Ţiţeica.

Demonstraţie. Fie $f : U \to E_3$ o suprafaţă Ţiţeica a cărei curbură Gauss este negativă în fiecare punct. Fie $c = f \circ x : I \to E_3$ o linie asimptotică a suprafeţei . Deoarece c este linie asimptotică planul tangent la suprafaţă în punctul $c(t) = f \circ x(t)$, coincide cu planul osculator la curbă în punctul $c(t)$. Torsiunea curbei c este dată de formula Enneper

$$K_2^2(t) = -K(x(t)) \quad , \quad t \in I$$

Deoarece f este suprafaţă Titeica avem

$$\frac{K(x)}{d^4(x)} = \text{const.}, \quad (\forall) \quad x \in U ,$$

unde $d(x)$ este distanţa de la un punct fix C la planul tangent la suprafaţă în punctul $f(x)$. Rezultă

$$\frac{K(x(t))}{d^4(x(t))} = \text{const.}, \ (\forall) \ x \in U$$

Din ultima egalitate şi din formula Enneper se obţine

$$\frac{K_2(t)}{d^2(t)} = \text{const.}, \quad (\forall) \quad t \in I \quad ,$$

adică curba c este curbă Ţiţeica.

1o.4. Gheorghe Tiţeica (1873-1939) a introdus suprafeţele ale în anul 1907, iar curbele sale în anul 1911. Este interesant că ceste suprafeţe, precum şi curbele Tiţeica, deşi au fost introduse u ajutorul elementelor metrice au totuşi un caracter centro-afin 19]. In anul 1923 W.Blaschke [5] a arătat că suprafeţele Tiţeica joacă rol de sfere afine, prin faptul că normalele lor afine trec rintr-un punct fix. In anul 1914 E.S.Wilczynski [49] a demonstrat că uprafeţele Tiţeica sînt suprafeţele de-a lungul cărora prima normală roiectivă trece printr-un punct fix, în timp ce a doua normală proectivă rămîne într-un plan fix. In felul acesta, suprafeţele Tiţeica ot fi considerate în cele trei geometrii clasice cu grup fundamental.

Deoarece curbele Tiţeica sînt linii asimptotice ale suprafeţelor Tiţeica şi deoarece aceste curbe pot fi considerate ca legate centro-afin, afin sau proiectiv de o suprafaţă, este natural ca şi aceste curbe să apară în aceste geometrii.

Definiţia curbelor Tiţeica, deşi este exprimată cu elemente metrice, are un caracter centro-afin.

In anul 1929, O.Mayer [19] a arătat că curbele Tiţeica se bucură de proprietatea afină de a avea planul rectificant afin trecînd printr-un punct fix. In anul 1956 Gh.Th.Gheorghiu [19] a demonstrat că curbele Tiţeica sînt caracterizate proiectiv prin proprietatea de a avea torsiunea proiectivă nulă.

§11. SIMBOLURILE LUI RIEMANN. ECUATIILE LUI GAUSS SI CODAZZI-MAINARDI. TEOREMA EGREGIUM (GAUSS).

11.1. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă. Notăm cu g_{ij} coeficienţii primei forme fundamentale şi cu $\left|{k \atop ij}\right|$ simbolurile lui Christoffel de speţa a doua.

Considerăm funcţiile

$$R^i_{jk\ell} : U \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad R_{ijk\ell} : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

definite prin :

$$(11.1) \qquad R^i_{jk\ell} = \frac{\partial\left|{i \atop j\ell}\right|}{\partial x^k} - \frac{\partial\left|{i \atop jk}\right|}{\partial x^\ell} + \left|{i \atop sk}\right|\left|{s \atop j\ell}\right| - \left|{i \atop s\ell}\right|\left|{s \atop jk}\right| ,$$

$$(11.2) \qquad R_{ijk\ell} = g_{is} R^s_{jk\ell}$$

DEFINITIE. Funcţiile $R_{ijk\ell}$ (resp. $R^i_{jk\ell}$) se numesc simbolurile lui Riemann de prima (resp. de a doua) speţă ale hipersuprafeţei .

11.2. Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ o hipersuprafaţă şi $\varphi : \overline{U} \longrightarrow U$ o schimbare de parametri. Vom nota cu g_{ij} , $\left|{k \atop ij}\right|$, $R_{ijk\ell}$ şi $R^i_{jk\ell}$ (resp $\overline{g}_{ij}$, $\overline{\left|{k \atop ij}\right|}$, $\overline{R}_{ijk\ell}$ şi $\overline{R}^i_{jk\ell}$) coeficienţii primei forme fundamentale, simbolurile lui Christoffel de speţa a doua, simbolurile lui Riemann de prima şi a doua speţă ale hipersuprafeţei f (respectiv $\overline{f} = f \circ \varphi$).

Presupunem că schimbarea de parametri este dată prin

$$(11.3) \qquad x^i = x^i(\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n) \ , \quad i \in \{1, \ldots, n\}$$

Folosind propoziţia 8.2 avem următoarea lege de transformare a simbolurilor lui Christoffel de speţă a doua :

$$(11.4) \qquad \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j} = - \left|\begin{smallmatrix} k \\ rs \end{smallmatrix}\right| \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} + \overline{\left|\begin{smallmatrix} r \\ ij \end{smallmatrix}\right|} \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^r}$$

PROPOZITIE. (legea de transformare a simbolurilor lui Riemann). La o schimbare de parametri, simbolurile lui Riemann de speţa a doua ale unei hipersuprafeţe se transformă după legea

$$(11.5) \qquad \bar R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial x^i}{\partial \bar x^\alpha} = R^i_{jk\ell} \frac{\partial x^j}{\partial \bar x_\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^\gamma} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar x^\delta} ,$$

iar cele de prima speţă se transformă după legea

$$(11.6) \qquad \bar R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{ijk\ell} \frac{\partial x^i}{\partial \bar x^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar x^\beta} \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^\gamma} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar x^\delta}$$

Demonstraţie. Derivînd în raport cu $\bar x^\ell$, din (11.4) rezultă

$$\frac{\partial^3 x^k}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j \partial \bar x^\ell} = - \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix} k \\ rs \end{smallmatrix}\right|}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar x^\ell} \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} -$$

$$- \left|\begin{smallmatrix} k \\ rs \end{smallmatrix}\right| \left(\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar x^i \partial \bar x^\ell} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} + \frac{\partial x^r}{\partial \bar x^i} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \bar x^j \partial \bar x^\ell} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \overline{\left|\begin{smallmatrix} r \\ ij \end{smallmatrix}\right|}}{\partial \bar x^\ell} \frac{\partial x^k}{\partial \bar x^r} + \overline{\left|\begin{smallmatrix} r \\ ij \end{smallmatrix}\right|} \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar x^r \partial \bar x^\ell}$$

Condiţia de simetrie

$$\frac{\partial^3 x^k}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j \partial \bar x^\ell} = \frac{\partial^3 x^k}{\partial \bar x^i \partial \bar x^\ell \partial \bar x^j}$$

ne conduce la

$$\left(\frac{\partial \left|\begin{smallmatrix} k \\ pq \end{smallmatrix}\right|}{\partial x^s} - \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix} k \\ ps \end{smallmatrix}\right|}{\partial x^q} \right) \frac{\partial x^p}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar x^\ell} +$$

$$+ \left|\begin{smallmatrix} k \\ rs \end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix} r \\ pq \end{smallmatrix}\right| \frac{\partial x^p}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar x} - \left|\begin{smallmatrix} k \\ rq \end{smallmatrix}\right| \left|\begin{smallmatrix} r \\ ps \end{smallmatrix}\right| \frac{\partial x^p}{\partial \bar x^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar x^j} \frac{\partial x^q}{\partial \bar x^\ell} +$$

$$+\left(\frac{\partial \overline{\begin{vmatrix} r \\ ij \end{vmatrix}}}{\partial \bar{x}^{\ell}} - \frac{\partial \overline{\begin{vmatrix} r \\ i\ell \end{vmatrix}}}{\partial \bar{x}^{j}}\right)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - \overline{\begin{vmatrix} p \\ ij \end{vmatrix}}\,\overline{\begin{vmatrix} r \\ p\ell \end{vmatrix}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} -$$

$$-\overline{\begin{vmatrix} p \\ i\ell \end{vmatrix}}\,\overline{\begin{vmatrix} r \\ pj \end{vmatrix}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^r} - \begin{vmatrix} k \\ rs \end{vmatrix}\overline{\begin{vmatrix} p \\ i\ell \end{vmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j} +$$

$$+\begin{vmatrix} k \\ rs \end{vmatrix}\overline{\begin{vmatrix} p \\ ij \end{vmatrix}}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{\ell}} - \overline{\begin{vmatrix} p \\ ij \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} k \\ rq \end{vmatrix}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^{\ell}} +$$

$$+\overline{\begin{vmatrix} r \\ i\ell \end{vmatrix}}\begin{vmatrix} k \\ pq \end{vmatrix}\frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^r}\frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^j}$$

După reducerea termenilor asemenea se obţine (11.5)

Inmulţind (11.5) cu $\dfrac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{i}}\bar{g}_{\sigma\varepsilon}$ şi sumînd, rezultă

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{\varepsilon\beta\gamma\delta} &= R^{i}_{jk\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{\delta}}\frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{i}}\bar{g}_{\sigma\varepsilon} = \\
&= R^{i}_{jk\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{\delta}}\frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{i}}g_{rs}\frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^{\sigma}}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}} = \\
&= R^{i}_{jk\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{\delta}}\frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}g_{is} = \\
&= R_{sjk\ell}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^{\varepsilon}}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\beta}}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}}\frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{\delta}}
\end{aligned}$$

11.3. Fie $f : U \longrightarrow E_{m+1}$ o hipersuprafaţă şi fie $\left\{f_{x^1}(x),\dots, f_{x^n}(x), N(x)\right\}$ reperul Gauss într-un punct oarecare $f(x)$ al hipersuprafeţei. Am stabilit la §8 formulele lui Gauss

(F.G) $$f_{x^i x^k} = \begin{vmatrix} s \\ ik \end{vmatrix} f_{x^s} + N\,h_{ik}$$

şi formulele lui Weingarten

(F.W) $$N_{x^i} = -\,h_i^k\, f_{x^k}$$

Coeficienţii care apar în formulele lui Gauss şi Weingarten nu sînt independenţi, deoarece avem

$$f_{x^i x^j x^k} = f_{x^i x^k x^j} \quad , \quad i,j,k \in \{1,\dots,n\}$$

$$N_{x^i x^j} = N_{x^j x^i} \quad , \quad i,j \in \{1,\dots,n\}$$

<u>PROPOZITIE</u>. i) <u>Următoarele afirmaţii sînt echivalente</u> :

(i_1) $\quad f_{x^i x^j x^k} = f_{x^i x^k x^j}$

(i_2) <u>Au loc ecuaţiile Gauss</u> :

(E.G) $$R_{ijk\ell} = h_{ik} h_{j\ell} - h_{i\ell} h_{jk}$$

<u>şi ecuaţiile Codazzi-Mainardi</u>

(E.C) $$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \left|\begin{matrix} s \\ ij \end{matrix}\right| h_{sk} = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \left|\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right| h_{sj} \ ,$$

<u>unde</u> $R_{ijk\ell}$ <u>sînt simbolurile lui Riemann de prima speţă ale hipersuprafeţei</u> f.

ii) Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(ii_1) $\quad N_{x^i x^j} = N_{x^j x^i}$

(ii_2) au loc ecuaţiile Codazzi-Mainardi.

<u>Demonstraţie.</u> i) Derivăm formulele (F.G) în raport cu x^j şi obţinem

$$f_{x^i x^k x^j} = \frac{\partial \left|\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right|}{\partial x^j} f_{x^s} + \left|\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right| f_{x^s x^j} +$$

$$+ \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} N + h_{ik} N_{x^j}$$

Dacă în ultimele egalităţi ţinem seama de formulele Gauss şi Weingarten, rezultă

(11.7) $$f_{x^i x^k x^j} = \left(\frac{\partial \left|\begin{matrix} s \\ ik \end{matrix}\right|}{\partial x^j} + \left|\begin{matrix} r \\ ik \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ rj \end{matrix}\right| - h_{ik} h_{jr} g^{rs} \right) f_{x^s} +$$

$$+ \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \left| \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right| h_{rj} \right) N$$

$(i_1) \longrightarrow (i_2)$ Scriem condiţia de simetrie

$$f_{x^i x^k x^j} = f_{x^i x^j x^k}$$

şi egalînd coeficienţii lui f_{x^s} rezultă

$$(11.8) \qquad R^s_{ijk} = (h_{ik}\, h_{jr} - h_{ij}\, h_{kr})\, g^{rs} ,$$

unde R^s_{ijk} sînt simbolurile lui Riemann de speţa a doua. Dacă înmulţim (11.8) cu $g_{s\ell}$ şi sumăm rezultă :

$$R_{\ell ijk} = h_{ik} h_{j\ell} - h_{ij} h_{k\ell}$$

adică tocmai ecuaţiile Gauss

Dacă egalăm acum coeficienţii lui N din condiţia

$f_{x^i x^j x^k} = f_{x^i x^k x^j}$, obţinem ecuaţiile Codazzi-Mainardi.

$(i_2) \Longrightarrow (i_1)$. Din ecuaţiile lui Gauss

$$R_{rijk} = h_{ik}\, h_{jr} - h_{ij}\, h_{kr}$$

obţinem

$$R^s_{ijk} = (h_{ik}\, h_{jr} - h_{ij} h_{kr})\, g^{rs}$$

Inmulţind aceste egalităţi cu f_{x^s} , sumînd şi folosind formulele (11.1) obţinem

$$(11.9) \qquad \left(\frac{\partial \left| \begin{matrix} s \\ ik \end{matrix} \right|}{\partial x^j} + \left| \begin{matrix} r \\ ik \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} s \\ rj \end{matrix} \right| - h_{ik} h_{jr}\, g^{rs} \right) f_{x^s} =$$

$$= \left(\frac{\partial \left| \begin{matrix} s \\ ij \end{matrix} \right|}{\partial x^k} + \left| \begin{matrix} r \\ ij \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} s \\ rk \end{matrix} \right| - h_{ij} h_{kr}\, g^{rs} \right) f_{x^s}$$

Din ecuaţiile Codazzi-Mainardi obţinem :

(11.10) $$\left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \left|{r \atop ik}\right| h_{rj} \right) N =$$

$$= \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \left|{r \atop ij}\right| h_{rk} \right) N$$

Din relaţiile (11.9) şi (11.10) se obţine

$$f_{x^i x^k x^j} = f_{x^i x^j x^k}$$

$ii_1) \Longrightarrow (ii_2)$ Din formulele Weingarten rezultă :

$$- N_{x^i} = h_{ik} g^{ks} f_{x^s}$$

şi derivînd în raport cu x^j obţinem :

$$- N_{x^i x^j} = \left(\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} g^{ks} + h_{ik} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} + h_{ik} g^{kr} \left|{s \atop rj}\right| \right) f_{x^s} +$$

$$+ h_{ik} g^{kr} h_{rj} N \quad ,$$

unde am ţinut seama de formulele (F.G). Scriem condiţiile de simetrie:

(11.11) $$N_{x^i x^j} = N_{x^j x^i}$$

Deoarece avem

$$h_{ik} g^{kr} h_{rj} = h_{jk} g^{kr} h_{ri} \ ,$$

din (11.11) rezultă :

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} g^{ks} + h_{ik} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} + h_{ik} g^{kr} \left|{s \atop rj}\right| =$$

$$= \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} g^{ks} + h_{jk} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x^i} + h_{jk} g^{kr} \left|{s \atop ri}\right|$$

Inmulţind aceste relaţii cu g_{sp} şi sumînd obţinem :

$$\frac{\partial h_{ip}}{\partial x^j} + h_{ik}g_{sp}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x^i} + \frac{1}{2}h_{ik}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{jr}}{\partial x^p}\right) =$$

$$= \frac{\partial h_{jp}}{\partial x^i} + h_{jk}g_{sp}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} + \frac{1}{2}h_{jk}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{ir}}{\partial x^p}\right)$$

sau

(11.11')
$$\frac{\partial h_{ip}}{\partial x^j} + h_{ik}\left(g_{sp}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} + g^{ks}\frac{\partial g_{sp}}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{2}h_{ik}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^r}\right) = \frac{\partial h_{jp}}{\partial x^i} + h_{jk}\left(g_{sp}\frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} + g^{ks}\frac{\partial g_{ps}}{\partial x^j}\right) - \frac{1}{2}h_{jk}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{rp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ip}}{\partial x^r}\right)$$

Derivînd relațiile $g_{sp}g^{sk} = \delta_p^k$, obținem :

(11.12) $$g_{sp}\frac{\partial g^{sk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{sp}}{\partial x^i}g^{sk} = 0$$

Ținînd seama de (11.12), ecuațiile (11.11') devin :

$$\frac{\partial h_{ip}}{\partial x^j} - h_{ik}g^{kr}\,|jp,r| = \frac{\partial h_{jp}}{\partial x^i} - h_{jk}g^{kr}\,|ip,r|$$

sau

$$\frac{\partial h_{ip}}{\partial x^j} - \left|\begin{matrix}k\\ jp\end{matrix}\right| h_{ik} = \frac{\partial h_{jp}}{\partial x^i} - \left|\begin{matrix}k\\ ip\end{matrix}\right| h_{jk} ,$$

adică tocmai ecuațiile lui Codazzi-Mainardi .

$(ii_2) \Longrightarrow (ii_1)$ Din (ii_2) avem

$$\frac{\partial h_{ir}}{\partial x^j} - h_{is} \left|\begin{matrix} s \\ jr \end{matrix}\right| = \frac{\partial h_{jr}}{\partial x^i} - h_{js} \left|\begin{matrix} s \\ ir \end{matrix}\right|$$

sau

$$\frac{\partial h_{ir}}{\partial x^j} - h_{is} g^{sk} \,|jr, k| = \frac{\partial h_{jr}}{\partial x^i} - h_{js} g^{sk} \,|ir, k|$$

Ţinînd seama de relaţiile (8.1), de aici obţinem

$$\frac{\partial h_{ir}}{\partial x^j} + g_{kr} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x^j} h_{is} + g^{ps} h_{is} \,|pj, r| =$$

$$= \frac{\partial h_{jr}}{\partial x^i} + g_{kr} \frac{\partial g^{ks}}{\partial x^i} h_{js} + g^{ps} h_{js} \,|pi, r|$$

Inmulţim această egalitate ci $g^{rq} f_{x^q}$ şi obţinem

$$\left(g^{rq} \frac{\partial h_{ir}}{\partial x^j} + \frac{\partial g^{qs}}{\partial x^j} h_{is} + h_{is} \left|\begin{matrix} q \\ pj \end{matrix}\right| g^{ps} \right) f_{x^q} =$$

$$= \left(g^{rq} \frac{\partial h_{jr}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{qs}}{\partial x^i} h_{js} + h_{js} \left|\begin{matrix} q \\ pi \end{matrix}\right| g^{ps} \right) f_{x^q}$$

Adunînd această egalitate cu egalitatea

$$g^{ps} h_{is} h_{jp} N = g^{ps} h_{js} h_{ip} N$$

obţinem

$$- N_{x^i x^j} = - N_{x^j x^i}$$

adică tocmai (ii_1).

11.4. <u>PROPOZITIE. Simbolurile lui Riemann de prima speţă au următoarele proprietăţi:</u>

i) $\quad R_{ijk\ell} + R_{ij\ell k} = 0$

ii) $\quad R_{ijk\ell} + R_{jik\ell} = 0$

iii) $R_{ijk\ell} - R_{k\ell ij} = 0$

iv) $R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} = 0$

Demonstratie. Se folosesc ecuațiile lui Gauss stabilite în propoziția anterioară.

11.5. OBSERVATIE. Folosind propoziția 11.4 se constată cu ușurință că simbolurile Riemann de primă speță ale unei suprafețe sînt toate nule în afară de

$$R_{1212} = - R_{2112} = - R_{1221} = R_{2121}$$

11.6. TEOREMA EGREGIUM (GAUSS) Curbura totală a unei suprafețe depinde numai de coeficienții primei forme fundamentale și de derivatele acestora.

Demonstratie. Stim că curbura totală $K(x)$ este dată de formula

$$K(x) = \frac{\det(h_{ij}(x))}{\det(g_{ij}(x))} \tag{11.13}$$

Tinînd seama de ecuațiile lui Gauss avem :

$$\begin{aligned} R_{1212}(x) &= h_{11}(x)h_{22}(x) - h_{12}^2(x) = \\ &= \det(h_{ij}(x)) \end{aligned} \tag{11.14}$$

Din (11.13) și (11.14) obținem

$$K(x) = \frac{R_{1212}(x)}{\det(g_{ij}(x))} \tag{11.15}$$

OBSERVATIE. Din (11.1) și (11.2) se vede ușor că simbolurile lui Riemann de prima și a doua speță sînt invarianți intrinseci ai hipersuprafeței. Teorema egregium ne arată că curbura totală a unei suprafețe este un element care aparține geometriei intrinseci a suprafeței.

11.7. Ca aplicație să determinăm curbura Gauss a torului

$$f : \mathbb{R}^2 \longmapsto E_3 ,$$

$$f(x^1,x^2) = ((a+b \cos x^1)\cos x^2, (a+b \cos x^1)\sin x^2, b \sin x^1),$$

unde $a > b > 0$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$ avem

$$g_{11}(x) = b^2 \ , \ g_{12}(x) = g_{21}(x) = 0 \ ,$$

$$g_{22}(x) = (a+b \cos x^1)^2$$

Folosind formula

$$|ij,k| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \ ,$$

rezultă

$$|11,1| = |22,2| = |11,2| = |12,1| = |21,1| = 0$$

$$|21,2| = |12,2| = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} = -(a+b \cos x^1) b \sin x^1$$

Deoarece avem

$$g^{11} = \frac{1}{b^2} \ , \ g^{12} = g^{21} = 0 \ ,$$

$$g^{22} = \frac{1}{(a+b \cos x^1)^2} \ ,$$

din formulele $\left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right| = g^{is} \, |jk,s|$, obținem :

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix}\right| = g^{11} |22,1| = \frac{\sin x^1}{b} (a+b \cos x^1)$$

$$\left|\begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix}\right| = g^{22} |12,2| = \frac{-b \sin x^1}{a+b \cos x^1}$$

Ținînd seama de formulele :

$$R^i_{jk\ell} = \frac{\partial \left|\begin{matrix} i \\ j\ell \end{matrix}\right|}{\partial x^k} - \frac{\partial \left|\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix}\right|}{\partial x^\ell} + \left|\begin{matrix} i \\ sk \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ j\ell \end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix} i \\ s\ell \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} s \\ jk \end{matrix}\right| ,$$

rezultă;

$$R^1_{212} = \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^1} - \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}1\\21\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^2} + \left|\begin{smallmatrix}1\\11\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}1\\21\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}2\\22\end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix}1\\12\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}1\\21\end{smallmatrix}\right| -$$

$$- \left|\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}2\\21\end{smallmatrix}\right| = \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^1} - \left|\begin{smallmatrix}1\\22\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right| = \frac{a}{b}\cos x^1 + \cos^2 x^1$$

$$R^2_{121} = \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}2\\11\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^2} - \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^1} + \left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}1\\11\end{smallmatrix}\right| + \left|\begin{smallmatrix}2\\22\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}2\\11\end{smallmatrix}\right| - \left|\begin{smallmatrix}2\\11\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}1\\12\end{smallmatrix}\right| -$$

$$- \left|\begin{smallmatrix}2\\21\end{smallmatrix}\right|\left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right| = \frac{\partial \left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right|}{\partial x^1} - \left|\begin{smallmatrix}2\\12\end{smallmatrix}\right|^2 = \frac{b\cos x^1}{a+b\cos x^1},$$

componentele nescrise fiind nule. Ţinînd seama de formulele

$$R_{ijk\ell} = g_{is}R^s_{jk\ell},$$

obţinem:

$$R_{1212} = g_{11}R^1_{212} = b(a+b\cos x^1)\cos x^1 = R_{2121} = -R_{1221} =$$

$$= -R_{2112},$$

componentele nescrise fiind nule.

Avem

$$\det(g_{ij}(x)) = b^2(a+b\cos x^1)^2$$

Folosind formula (11.15), rezultă:

$$K(x) = \frac{R_{1212}(x)}{\det(g_{ij}(x))} = \frac{\cos x^1}{b(a+b\cos x^1)}.$$

Pentru orice $x \in R^2$ avem

$$K_{x^1}(x) = \frac{-a\sin x^1}{b(a+b\cos x^1)^2}$$

Rezultă că curbura Gauss a torului este maximă în punctele cercului ecuatorial $x^1 = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$ şi minimă în punctele cercului ecuatorial $x^1 = (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$

Curbura Gauss a torului este negativă pe semiinelul interior (regiunea hiperbolică), deci pentru

$$(x^1,x^2) \in (\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{3\pi}{2} + 2m\pi), \ m \in \mathbb{Z}$$

Curbura Gauss a torului este pozitivă pe semiinelul exterior (regiunea eliptică), deci pentru

$$(x^1,x^2) \in (-\frac{\pi}{2} + 2m\pi, \frac{\pi}{2} + 2m\pi) \ , \ m \in \mathbb{Z}$$

Curbura Gauss a torului se anulează în punctele cercurilor $x^1 = m\pi + \frac{\pi}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$. Avem deci două cercuri parabolice.

§12. HIPERSUPRAFEȚE EINSTEIN

12.1. Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață. Notăm cu g_{ij}, $R_{ijk\ell}$ și $R^i_{jk\ell}$ coeficienții primei forme fundamentale, simbolurile lui Riemann de prima și a doua speță. Considerăm funcțiile

$$R_{j\ell} : U \to \mathbb{R}$$

definite prin

$$R_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n} R^i_{ji\ell} \tag{12.1}$$

DEFINIȚIE. Funcțiile $R_{j\ell}$ se numesc componentele tensorului Ricci.

12.2. **PROPOZIȚIE**. Tensorul lui Ricci este simetric, adică

$$R_{j\ell} = R_{\ell j} \tag{12.2}$$

Demonstrație

$$R_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n} R^i_{ji\ell} = g^{is}R_{sji\ell} = g^{is}R_{i\ell sj} = \sum_{s=1}^{n} R^s_{\ell sj} = R_{\ell j}$$

12.3. **DEFINIȚIE**. O hipersuprafață

$$f : U \to E_{n+1}$$

se numește hipersuprafață Einstein dacă există o funcție diferențiabilă

$$\lambda : U \to \mathbb{R}$$

astfel încît :

$$R_{j\ell} = \lambda g_{j\ell} \tag{12.3}$$

12.4. **PROPOZIȚIE**. Orice suprafață $f : U \to E_3$ este suprafață Einstein.

Demonstrație.

$$R_{11} = R^1_{111} + R^2_{121} = R^2_{121} = g^{22}R_{2121} =$$

$$= \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})} g_{11} = Kg_{11}$$

$$R_{12} = R_{21} = R^1_{112} = g^{12}R_{2112} =$$

$$= \frac{-g_{12}}{\det(g_{ij})} R_{2112} = Kg_{12}$$

$$R_{22} = R^1_{212} = g^{11}R_{1212} = \frac{g_{22}}{\det(g_{ij})} R_{1212} = Kg_{22}$$

11.5. EXEMPLE

11.5.1. Considerăm aplicația

$$f : R^n \to E_{m+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n,\ a_ix^i + b) ,$$

unde $a_1,\dots,a_n$, b sînt constante reale .

Este evident că imaginea aplicației f este un hiperplan. Pentru orice indici $i,j \in \{1,\dots,n\}$ avem :

$$g_{ij} = \delta_{ij} + a_ia_j$$

Deoarece coeficienții primei forme fundamentale sînt constanți, rezultă că simbolurile lui Christoffel de prima și a doua speță sînt nule. Aceasta implică

$$R^i_{jk\ell} = 0$$

Rezultă

$$R_{j\ell} = \sum_{i=1}^{n} R^i_{ji\ell} = 0$$

Am obţinut deci $R_{j\ell} = \lambda g_{j\ell}$, unde $\lambda = 0$. Rezultă că hiperplanul este o hipersuprafaţă Einstein.

11.5.2. Ne propunem să arătăm că hipersferele din spaţiul euclidian (n+1)-dimensional sînt hipersuprafeţe Einstein.

Fie aplicaţia

$$f : R^n \longrightarrow E_{n+1}$$

definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{r^2+v^2}, \dots, \frac{2r^2x^n}{r^2+v^2}, r\frac{v^2-r^2}{v^2+r^2} \right),$$

unde $v^2 = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2$, $r = \text{const} > 0$. Stim că imaginea aplicaţiei f este sfera S^n(de rază r) din care scoatem polul nord. Am văzut în exemplul 5.10.3 că coeficienţii primei forme fundamentale sînt

$$g_{ij}(x) = \frac{4\,\delta_{ij}}{\left(1 + \frac{1}{r^2}v^2\right)^2}, \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}$$

Simbolurile lui Christoffel de speţa a doua sînt date de

$$\left|{s \atop ij}\right| = -\frac{2K}{1 + Kv^2}\left(\delta_i^s x^j + \delta_j^s x^i - \delta_{ij}x^s\right),$$

unde $K = \frac{1}{r^2}$. Avem:

$$\frac{\partial\left|{i \atop j\ell}\right|}{\partial x^k} - \frac{\partial\left|{i \atop jk}\right|}{\partial x^\ell} = \frac{4K^2}{(1+Kv^2)^2}\left(\delta_\ell^i x^j x^k - \delta_k^i x^j x^\ell - \right.$$

$$\left. - \delta_{j\ell}x^i x^k + \delta_{jk}x^i x^\ell\right) -$$

$$- \frac{4K}{1+Kv^2}\left(\delta_\ell^i \delta_{jk} - \delta_k^i \delta_{j\ell}\right),$$

$$\left|{}^{i}_{sk}\right| \left|{}^{s}_{j\ell}\right| - \left|{}^{i}_{s\ell}\right|\left|{}^{s}_{jk}\right| =$$

$$= \frac{4K}{(1+Kv^2)^2}\left(\delta^i_\ell\, \delta_{jk} v^2 + \delta_{j\ell}\, x^i x^k - \delta^i_k\, \delta_{j\ell}\, v^2 - \delta_{jk} x^i x^\ell\right)$$

Rezultă

$$R^i_{jk\ell} = K\left(\delta^i_k \frac{4\,\delta_{j\ell}}{(1+Kv^2)^2} - \delta^i_\ell \frac{4\,\delta_{jk}}{(1+Kv^2)^2}\right)$$

sau

$$R^i_{jk\ell} = K(\delta^i_k g_{j\ell} - \delta^i_\ell g_{jk})$$

De aici obținem

$$R_{j\ell} = K(n-1) g_{j\ell}$$

ceea ce ne arată că hipersfera este o hipersuprafață Einstein.

§13. DERIVARE COVARIANTA. TRANSPORT PARALEL. GEODEZICE.

13.1. Fie $f : U \to E_{m+1}$ o hipersuprafață și $c = f \circ x : I \to E_{m+1}$ o curbă pe hipersuprafața f.

Fie X un cîmp de vectori tangenți hipersuprafeței f în punctele curbei $c = f \circ x : I \to E_{m+1}$, adică $X : I \to E_{m+1}$ este o aplicație diferențiabilă astfel încît $X(t) \in T_{c(t)} f$, $(\forall)$ $t \in I$. Prin derivarea obișnuită a acestui cîmp de vectori, obținem un cîmp de vectori $\frac{dX(t)}{dt}$, de-a lungul curbei $c(t) = f \circ x(t)$, care, în general, nu mai este tangent la hipersuprafața f. Pentru a obține un cîmp de vectori tangenți considerăm proiecția acestui cîmp de vectori în fiecare punct al curbei pe hiperplanul tangent la hipersuprafață în acel punct.

Notăm

$$\frac{\nabla X(t)}{dt} = pr_t \circ \frac{dX(t)}{dt} ,$$

unde

$$pr_t : T_{c(t)} R^{n+1} \longrightarrow T_{c(t)} f$$

este proiecţia ortogonală de-a lungul normalei $N \circ x(t)$.

DEFINITIE. Cîmpul de vectori tangenţi $\frac{\nabla X(t)}{dt}$ se numeşte derivata covariantă a cîmpului $X(t)$.

13.2. PROPOZITIE. Fie $X : I \longrightarrow E_{n+1}$ un cîmp de vectori tangenţi hipersuprafeţei $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ în punctele curbei $c = f \circ x$, deci $X(t) = X^k(t) f_{x^k} (x(t)) \in T_{f(x(t))} f$,

unde $X^k : I \longrightarrow R$ sînt funcţii diferenţiabile pentru orice $k \in \{1,\dots,n\}$.

Derivata covariantă a cîmpului X este dată de formula

$$(13.1) \qquad \frac{\nabla X(t)}{dt} = (\dot{X}^k(t) + \left|{k \atop ij}\right| (x(t))X^i(t)\ \dot{x}^j(t))f_{x^k}(x(t)) ,$$

unde $\left|{k \atop ij}\right|$ sînt simbolurile lui Christoffel de speţa a doua ale hipersuprafeţei.

Demonstraţie. Derivînd în raport cu t, din egalitatea

$$X(t) = X^k(t)f_{x^k}(x(t))$$

obţinem :

$$(13.2) \qquad \frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}^k(t)f_{x^k}(x(t)) + X^k(t)f_{x^k x^j} (x(t))\dot{x}^j(t)$$

Folosind formulele lui Gauss

$$f_{x^k x^j} = \left|{i \atop kj}\right| f_{x^i} + h_{kj} N ,$$

din (13.2) obţinem :

$$(13.3)\qquad \frac{dX(t)}{dt} = (\dot{X}^k(t) + \left|{k \atop ij}\right| (x(t))X^i(t)\ \dot{x}^j(t))f_{x^k}(x(t)) + $$
$$+ X^k(t)\dot{x}^j(t)\ h_{kj}(x(t))\ N(x(t))$$

Proiectăm această egalitate pe hiperplanul tangent şi obţinem

$$pr_t \circ \frac{dX(t)}{dt} = \frac{\nabla X(t)}{dt} = (\dot{X}^k(t) +$$
$$+ \left|{k \atop ij}\right| (x(t))\ X^i(t)\ \dot{x}^j(t))\ f_{x^k}(x(t))$$

13.3. <u>PROPOZITIE. Fie</u> $X,Y : I \to E_{n+1}$ <u>două cîmpuri de vectori tangenţi hipersuprafeţei</u> $f : U \to E_{n+1}$ <u>în punctele curbei</u> $c = f\circ x : I \to E_{n+1}$ <u>şi fie</u> $x \to g_x$ <u>prima formă fundamentală a hipersuprafeţei. Atunci avem :</u>

$$(13.4)\qquad \frac{d}{dt} g_{x(t)}(X(t), Y(t)) = g_{x(t)}\left(\frac{\nabla X(t)}{dt}, Y(t)\right) +$$
$$+ g_{x(t)}\left(X(t), \frac{\nabla Y(t)}{dt}\right)$$

<u>Demonstraţie.</u>

$$\frac{d}{dt} g_{x(t)}(X(t), Y(t)) = \frac{d}{dt} \langle X(t), Y(t)\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{dX(t)}{dt}, Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{dY(t)}{dt}\right\rangle =$$

$$= \left\langle pr_t \circ \frac{dX(t)}{dt}, Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), pr_t \circ \frac{dY(t)}{dt}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{\nabla X(t)}{dt}, Y(t)\right\rangle + \left\langle X(t), \frac{\nabla Y(t)}{dt}\right\rangle =$$

$$= g_{x(t)}\left(\frac{\nabla X(t)}{dt}, Y(t)\right) + g_{x(t)}\left(X(t), \frac{\nabla Y(t)}{dt}\right)$$

13.4. DEFINITIE. Fie $X : I \to E_{n+1}$ un cîmp de vectori tangenți hipersuprafeței $f : U \to E_{n+1}$ în punctele curbei $c = f \circ x : I \to E_{n+1}$. X se numește cîmp de vectori paraleli de-a lungul curbei c dacă

$$(13.5) \qquad \frac{\nabla X(t)}{dt} = 0$$

Se mai spune că vectorul $X(t)$ se transportă prin paralelism (Levi - Civita) pe curba $c(t) = f \circ x(t)$.

OBSERVATIE. Folosind (13.1) și (13.5) rezultă că cîmpul $X : I \to E_{n+1}$ este un cîmp de vectori paraleli de-a lungul curbei $c = f \circ x$ dacă

$$(13.6) \qquad \dot{X}^k(t) + \left|{k \atop ij}\right|(x(t))\, X^i(t)\, \dot{x}^j(t) = 0$$

Ecuațiile (13.6) se numesc ecuațiile transportului paralel.

13.5. PROPOZITIE Fie $f : U \to E_{n+1}$ o hipersuprafață și fie $X, Y : I \to E_{n+1}$ două cîmpuri de vectori paraleli de-a lungul curbei $c = f \circ x$. Atunci

$$(13.7) \qquad g_{x(t)}(X(t), Y(t)) = \text{const}, \qquad (\forall)\, t \in I.$$

Demonstrație. Deoarece X și Y sînt cîmpuri de vectori paraleli de-a lungul curbei $c = f \circ x$, avem

$$(13.8) \qquad \frac{\nabla X(t)}{dt} = \frac{\nabla Y(t)}{dt} = 0$$

Din (13.4) și (13.8) obținem

$$\frac{d}{dt}\, g_{x(t)}(X(t), Y(t)) = 0 ,$$

adică $g_{x(t)}(X(t), Y(t)) = \text{const}.$

OBSERVATIE. Formula (13.7) ne arată că dacă X, Y sînt două cîmpuri de vectori paraleli de-a lungul curbei $c = f \circ x$ atunci;

i) $\langle X(t), Y(t)\rangle$ = constant , $(\forall)\ t\in I$

ii) $\|X(t)\|$ = constant , $\|Y(t)\|$ = constant , $(\forall) t\in I$

Din această observaţie rezultă că <u>într-un transport paralel lungimea unui vector se păstrează</u>. De asemenea, rezultă că <u>unghiul a doi vectori se păstrează prin transportul paralel al vectorilor</u>.

13.6. <u>TEOREMA (teorema transportului paralel). Fie</u> $f : U \to E_{m+1}$ <u>o hipersuprafaţă şi</u> $c(t) = f\circ x(t)$, $t\in[t_0, t_1]$ <u>o curbă pe f. Atunci:</u>

i) <u>pentru orice</u> $X_0\in T_{c(t_0)}f$ <u>există un singur cîmp de vectori paraleli</u> $X(t, X_0)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ <u>de-a lungul curbei c cu</u> $X(t_0, X_0) = X_0$

ii) <u>aplicaţia</u>

$$\|_c : T_{c(t_0)}f \longrightarrow T_{c(t_1)}f$$

<u>definită prin</u>

$$\|_c(X_0) = X(t_1, X_0)$$

<u>este un izomorfism liniar şi o izometrie în raport cu produsul scalar introdus de prima formă fundamentală.</u>

<u>Demonstraţie</u> i) Cîmpul de vectori $X(t) = X^i(t)f_{x^i}(x(t))$ de-a lungul curbei $c(t) = f\circ x(t)$ este un cîmp paralel dacă

$$(\ast)\quad \dot{X}^k(t) + \left|{k \atop ij}\right|(x(t))\, X^i(t)\dot{x}^j(t) = 0\ ,\ k\in\{1,\dots,n\}$$

Pentru obţinerea afirmaţiei i) este suficient să aplicăm teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei sistemului liniar de ecuaţii diferenţiale $(\ast)$. Soluţia sistemului $(\ast)$ determinată prin condiţia iniţială $X(t_0) = X_0$ va fi notată prin $X(t, X_0)$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

ii) Deoarece sistemul de ecuaţii diferenţiale $(\ast)$ este liniar şi la condiţii iniţiale date, soluţia este unică, obţinem

$$X(t, aX_0 + bY_0) = aX(t, X_0) + bX(t, Y_0)\ (\forall)a,b\in\mathbb{R}\ ,\ t\in[t_0, t_1]\ ,$$

Rezultă

$$\|_c(aX_0 + bY_0) = a\,\|_c(X_0) + b\,\|_c(Y_0),\ \forall\ a,b\in\mathbb{R}$$

adică aplicaţia $\|_c$ este liniară.

Ţinînd seama de rezultatul de la 13.5, avem

$$g_{x(t)}(X(t, X_0), X(t, X_0)) = g_{x(t_0)}(X_0, X_0)$$

pentru orice $t\in[t_0, t_1]$. In particular, pentru $t = t_1$, obţinem

$$g_{x(t_1)}(\|_c(X_o), \|_c(X_o)) = g_{x(t_o)}(X_o, X_o) ,$$

ceea ce ne arată că $\|_c$ este o izometrie în raport cu produsul scalar introdus de prima formă fundamentală g a hipersuprafeței.

In plus, din ultima egalitate obținem $\|_c(X_o) = 0 \Leftrightarrow X_o = 0$, adică aplicația $\|_c$ este injectivă. In definitiv avem o injecție liniară

$$\|_c : T_{c(t_o)}f \longrightarrow T_{c(t_1)}f$$

între două spații vectoriale de aceeași dimensiune n. Rezultă că $\|_c$ este izomorfism de spații vectoriale.

13.7. EXEMPLE. Fie G_1 și G_2 cele două familii de generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic de ecuație

$$\frac{(u^1)^2}{a^2} - \frac{(u^2)^2}{b^2} = 2u^3$$

Ne propunem să determinăm dreptele din G_i ($i\in\{1,2\}$) cu proprietatea că de-a lungul lor versorii dreptelor din G_j($j\in\{1,2\}$, $j\neq i$) se transportă prin paralelism Levi - Civita.

Stim că paraboloidul hiperbolic este o suprafață riglată. Dacă notăm $\frac{u^1}{a} - \frac{u^2}{b} = 2x^1$, $\frac{u^1}{a} + \frac{u^2}{b} = 2x^2$, atunci avem:

$$u^1 = a(x^1 + x^2) \quad , \quad u^2 = b(x^2 - x^1) \ , \ u^3 = 2x^1x^2$$

Prin urmare, paraboloidul apare ca imaginea aplicației

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin:

(13.9) $$f(x^1,x^2) = (a(x^1+x^2),\ b(x^2-x^1),\ 2x^1x^2)$$

Deoarece parametrii x^1 și x^2 apar liniar, dreptele ce generează suprafața sînt:

$$G_1 = \left\{ \frac{u^1-ax^1}{a} = \frac{u^2+bx^1}{b} = \frac{u^3}{2x^1} \right\}$$

$$G_2 = \left\{ \frac{u^1-ax^2}{a} = \frac{u^2-bx^2}{-b} = \frac{u^3}{2x^2} \right\}$$

Fie $d_{x^i} \in G_i$ ($i\in\{1,2\}$). Avem:

$$d_{x^1}(t) = (ax^1 + at, -bx^1+bt,\ 2x^1t)\ ,\ d_{x^1} = f\circ x_1,\ x_1(t) = (x^1, t)$$

$$d_{x^2}(t) = (ax^2 + at,\ bx^2-bt,\ 2x^2t)\ ,\ d_{x^2} = f\circ x_2\ ,\ x_2(t) = (t, x^2)$$

Calculăm coeficienţii primei forme fundamentale. Pentru orice $x = (x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2$ avem :

$$f_{x^1}(x) = (a,-b,2x^2)\ ,\ f_{x^2}(x) = (a,b,2x^1)$$

$$g_{11}(x) = a^2 + b^2 + 4(x^2)^2\ ,\ g_{12}(x) = g_{21}(x) = a^2-b^2+4x^1x^2$$

$$g_{22}(x) = a^2 + b^2 + 4(x^1)^2$$

$$g^{11}(x) = \frac{a^2+b^2+4(x^1)^2}{\det(g_{ij}(x))}\ ,\ g^{12}(x) = g^{21}(x) = \frac{b^2-a^2-4x^1x^2}{\det(g_{ij}(x))}\ ,$$

$$g^{22}(x) = \frac{a^2 + b^2 + 4(x^2)^2}{\det(g_{ij}(x))}$$

Fie x^1 fixat, deci am fixat o dreaptă $d_{x^1} \in G_1$. Stim că $d_{x^1} \cap d_{x^2} \neq \emptyset$, oricare ar fi $d_{x^2} \in G_2$.

$$d_{x^1} \cap d_{x^2} = (ax^1+ax^2,\ -bx^1+bx^2,\ 2x^1x^2)$$

Cîmpul de versori ai dreptelor din G_2 este

$$X(x^2) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+4(x^2)^2}}\ ,\ \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2+4(x^2)^2}}, \frac{2x^2}{\sqrt{a^2+b^2+4(x^2)^2}} \right)$$

Observăm că avem :

$$X(x^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+4(x^2)^2}}\ f_{x^1}(x)$$

Dacă punem $X(x^2) = X^i(x^2)f_{x^i}(x)$, atunci

$$X^1(x^2) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2+4(x^2)^2}} \quad , \quad X^2(x^2) = 0$$

Pe dreapta d_{x^1} luăm ca parametru pe x^2. Ţinînd seama de ecuaţiile transportului paralel rezultă că cîmpul X se transportă prin paralelism de-a lungul curbei d_{x^1} dacă şi numai dacă oricare ar fi $x^2 \in \mathbb{R}$, avem :

$$(13.10) \qquad \dot{X}^k(x^2) + \left|{k \atop ij}\right| (x_1(x^2))X^i\dot{x}_1^j(x^2) = 0 \quad , \quad k\in\{1,2\}$$

unde $\left|{k \atop ij}\right|$ sînt simbolurile lui Christoffel de speţa a doua ale suprafeţei (13.9). Deoarece

$$\dot{x}_1^1(x^2) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1^2(x^2) = 1 \quad , \quad X^1(x^2) \neq 0, \; X^2(x^2) = 0$$

din (13.10) obţinem :

$$(13.11) \qquad \begin{cases} \dot{X}^1(x^2) + \left|{1 \atop 12}\right| (x_1(x^2))X^1(x^2) = 0 \\ \left|{2 \atop 12}\right| (x_1(x^2)) = 0 \quad , (\forall)\; x^2 \in R \end{cases}$$

Calculăm simbolurile lui Christoffel de speţa a doua $\left|{1 \atop 12}\right|$ şi $\left|{2 \atop 12}\right|$

Avem :

$$\left|{1 \atop 12}\right| (x^1,x^2) = \frac{1}{\det(g_{ij}(x))} \Big[4\, x^2 \;(a^2+b^2) - - 4x^1(a^2-b^2)\Big] ,$$

$$\left|{2 \atop 12}\right| (x^1,x^2) = \frac{4}{\det(g_{ij}(x))} \Big[x^1(a^2+b^2)-x^2(a^2-b^2)\Big]$$

Rezultă că cîmpul X este un cîmp paralel de-a lungul curbei d_{x^1} dacă şi numai dacă pentru orice $x^2 \in \mathbb{R}$ avem :

$$\begin{cases} \dfrac{-x^2}{a^2+b^2+4(x^2)^2} + \dfrac{x^2(a^2+b^2) - x^1(a^2-b^2)}{\det(g_{ij}(x))} = 0 \\ x^1(a^2+b^2) - x^2(a^2-b^2) = 0 \end{cases}$$

De aici obţinem $a = b$, $x^1 = 0$. Rezultă că paraboloidul hiperbolic este echilater. Mai rezultă că dreapta căutată este prima bisectoare a planului $u^1 O u^2$:

$$u^1 = u^2 \ , \ u^3 = 0$$

Analog obţinem a doua bisectoare a planului $u^1 O u^2$:

$$u^1 = -u^2 \ , \ u^3 = 0$$

13.8. DEFINITIE. Fie $c = f \circ x \ : I \longrightarrow E_{m+1}$ o cubă regulată pe hipersuprafaţa $f : U \longrightarrow E_{m+1}$. Presupunem că curba c este canonic parametrizată. Curba c se numeşte geodezică a hipersuprafeţei dacă cîmpul vectorial tangent $\dot{c}(s)$ este paralel, deci dacă

$$\frac{\nabla \dot{c}(s)}{ds} = 0$$

13.9. OBSERVATIE. Deoarece avem $\dot{c}(s) = \dot{x}^i(s)\, f_{x^i}(x(s))$, ecuaţia precedentă se scrie :

$$\ddot{x}^k(s) + \left|\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right| (x(s))\, \dot{x}^i(s)\, \dot{x}^j(s) = 0 \tag{13.12}$$

Ecuaţiile (13.12) se numesc ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor hipersuprafeţei.

Deoarece simbolurile lui Christoffel de speţa a doua sînt invarianţi intrinseci, rezultă că geodezicele unei hipersuprafeţe aparţin geometriei intrinseci a hipersuprafeţei.

13.10. EXEMPLE. 13.10.1. Geodezicele hiperplanului. Ne propunem să determinăm geodezicele hipersuprafeţei

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_{m+1}$, $\quad f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n,\ a_i x^i + b)$, unde $a_1,\dots,a_n$, b sînt constante reale. Deoarece g_{ij} = constant $(\forall)$ $i,j\in\{1,\dots,n\}$, rezultă $\left|{i \atop jk}\right| = 0$. Folosind aceasta, ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor devin

(13.12') $$\ddot{x}^k(s) = 0$$

Obţinem $x^k(s) = A^k s + B^k$, $k\in\{1,\dots,n\}$.

Rezultă că geodezicele hiperplanului sînt curbele $c = f\circ x$ definite prin

$$c(s) = f\circ x(s) = (A^1 s + B^1,\dots,A^n s+B^n, sa_iA^i+a_iB^i+b)$$

şi deci geodezicele hiperplanului sînt drepte.

13.1o.2. Considerăm aplicaţia

$$f : R^2 \to E_3$$

definită prin

(13.13) $$f(x^1,x^2) = (a\cos x^1, a\sin x^1, x^2),\quad a>0.$$

Deoarece matricea

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} -a\sin x^1 & a\cos x^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

are rangul doi, rezultă că f este suprafaţă. Se observă cu uşurinţă că imaginea aplicaţiei f este cilindrul de ecuaţie

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

avînd curba directoare un cerc situat în planul XOY şi generatoarele paralele cu axa OZ.

Avem

$$f_{x^1}(x) = (-a\sin x^1,\ a\cos x^1,\ 0)$$

$$f_{x^2}(x) = (0,\ 0,\ 1)$$

Rezultă $g_{11}(x) = a^2$, $g_{12}(x) = 0$, $g_{22}(x) = 1$.

Simbolurile lui Christoffel de speţa a doua sînt date de $\left|{i \atop jk}\right| = 0$. Folosind aceasta, ecuaţiile diferenţiale ale geodezicelor devin

$$\ddot{x}^k(s) = 0$$

De aici obţinem $x^k(s) = a^k s + b^k$, unde $k \in \{1,2\}$, $(a^1)^2 + (a^2)^2 > 0$. Rezultă că geodezicele cilindrului sînt curbele $c = f \circ x$, definite prin

$$c(s) = (a\cos(a^1 s + b^1) , a\sin(a^1 s + b^1), a^2 s + b^2).$$

Este uşor de văzut că aceste curbe sînt elice (dacă $a^1 \neq 0$ şi $a^2 \neq 0$), cercuri (dacă $a^1 \neq 0$ şi $a^2 = 0$) sau drepte (dacă $a^1 = 0$ şi $a^2 \neq 0$).

13.11. OBSERVATIE. Forma (3.12) a ecuaţiilor geodezicelor nu se păstrează la o schimbare de parametru. In adevăr, efectuînd schimbarea de parametru $s = \varphi(t)$, cu $\varphi' \neq 0$, avem :

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{ds}\varphi' \quad , \frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2x^i}{ds^2}\varphi'^2 + \frac{dx^i}{ds}\varphi''$$

Rezultă

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\varphi'}\frac{dx^i}{dt} , \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{1}{\varphi'^2}\frac{d^2x^i}{dt^2} - \frac{\varphi''}{\varphi'^3}\frac{dx^i}{dt} \tag{13.13}$$

Tinînd seama de (13.13), ecuaţiile (13.12) devin

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + \left|{i \atop jk}\right| \circ x \ \frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \frac{\varphi''}{\varphi'}\frac{dx^i}{dt} \tag{13.14}$$

Este uşor de văzut că forma ecuaţiile geodezicelor se păstrează dacă şi numai dacă $\varphi'' = 0$, deci dacă şi numai dacă se efectuează schimbări afine de parametru , adică de forma

$$s = at + b ,$$

unde a şi b sînt constante şi $a \neq 0$.

13.12. OBSERVATIE. Fie $c = f \circ x : I \to E_{M+1}$ o curbă regulată pe hipersuprafaţa $f : U \to E_{M+1}$. Presupunem că curba c nu este canonic parametrizată. Atunci se spune că curba c este geodezică a hipersuprafeţei dacă vectorii $\frac{\nabla \dot{c}(t)}{dt}$ şi $\dot{c}(t)$ sînt coliniari , $(\forall)\ t \in I$.

Prin urmare c este geodezică dacă şi numai dacă există o funcţie diferenţiabilă

$$\lambda : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît

$$(13.15) \qquad \frac{\nabla \dot{c}(t)}{dt} = \lambda(t)\, \dot{c}(t)$$

Ţinînd seama de egalitatea $\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t)\, f_{x^i}(x(t))$,

din (13.15) obţinem

$$(13.16) \qquad \ddot{x}^k(t) + \left|{k \atop ij}\right| (x(t))\, \dot{x}^i(t)\, \dot{x}^j(t) = \lambda\, \dot{x}^k(t)$$

Vom arăta că printr-o schimbare convenabilă de parametru pe curbă, ecuaţiile (13.16) capătă forma (13.12). In adevăr, prin schimbarea de parametru $s = \varphi(t)$, $\varphi' \neq 0$, ecuaţiile (13.16) se transformă î

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \left|{i \atop jk}\right| \circ x\ \frac{dx^j}{ds}\ \frac{dx^k}{ds} = \frac{\lambda\varphi' - \varphi''}{\varphi'^2}\ \frac{dx^i}{ds}$$

Deci pentru a obţine rezultatul dorit ajunge să luăm $\lambda\varphi' - \varphi'' = 0$
De aici rezultă

$$\varphi(t) = C \int e^{\int\lambda(t)dt}dt + C_1 \quad ,$$

unde C şi C_1 sînt constante de integrare. Prin urmare ecuaţiil (13.16) capătă forma (13.12) dacă facem schimbarea de parametru

$$s = C \int e^{\int\lambda(t)dt}\, dt + C_1$$

De aici se vede că parametrul s este definit pînă la o transforma afină şi el se numeşte <u>arcul afin al geodezicei.</u>

<u>Exerciţiu</u>. Să se determine geodezicele unei suprafeţe de rot ţie (a se vedea [14] p. 276).

13.13. <u>PROPOZITIE.</u> Fie $f : U \to E_{n+1}$ <u>o hipersuprafaţă,</u> <u>$x_0 \in U$ şi $X_0 \in T_{f(x_0)}f$. Pentru ε suficient de mic, există o sin</u> <u>geodezică</u>

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} ,$$

$$c(s) = f \circ x(s) \quad , \quad |s| < \varepsilon$$

cu

$$x(0) = x_0 \quad \text{şi} \quad \dot{c}(0) = X_0$$

Demonstraţie. Se aplică teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei unui sistem de ecuaţii diferenţiale, la sistemul de ecuaţii diferenţiale (13.12) ale geodezicelor hipersuprafeţei, cu condiţiile iniţiale

$$x^i(0) = x_0^i \quad , \quad \dot{x}^i(0) = X_0^i$$

unde

$$X_0 = X_0^i \, f_{x^i}(x_0)$$

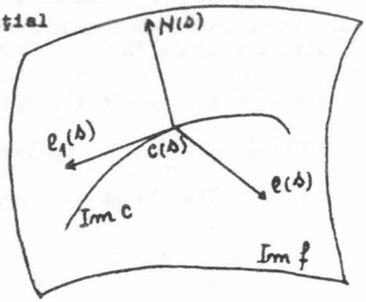
§ 14. SUPRAFETE IN SPATIUL EUCLIDIAN TRIDIMENSIONAL E_3

14.1. Reperul lui Darboux. Fie U o mulţime deschisă în E_2 şi $x : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow U$ o curbă plană. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafaţă şi

$$c = f \circ x : s \in I \subset \mathbb{R} \longrightarrow c(s) \in E_3, \quad \|\dot{c}(s)\| = 1, \ (\forall) s \in I$$

o curbă trasată pe suprafaţă. Intr-un punct oarecare c(s) al curbei considerăm trei vectori unitari şi anume:

- vectorul unitar tangent $e_1(s) = \dot{c}(s)$,
- vectorul unitar $N(s) = N \circ x(s)$ normal la suprafaţă
- vectorul unitar normal tangenţial
  $e(s) = N(s) \times e_1(s)$



DEFINITIE. Reperul $\{e_1(s), e(s), N(s)\}$ **se numeste reper Darboux.**

14.2. Formulele lui Darboux.

PROPOZITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ **o suprafată si fie**

$$c = f \circ x : s \in I \longrightarrow c(s) = f(x^1(s), x^2(s)) \in E_3$$

o curbă parametrizată canonic trasată pe suprafata f . Fie $\{e_1(s), e(s), N(s)\}$ **reperul Darboux într-un punct oarecare c(s) al curbei. Atunci avem formulele lui Darboux**

$$\dot{e}_1(s) = K_g(s)e(s) + K_N(s)N(s) \tag{14.1}$$

$$\dot{e}(s) = -K_g(s)e_1(s) + T_g(s)N(s) \tag{14.2}$$

$$\dot{N}(s) = -K_N(s)e_1(s) - T_g(s)e(s) \tag{14.3}$$

unde :

$$K_g(s) = \langle e(s), (\ddot{x}^k(s) + \left|\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right|(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s))f_{x^k}(x(s))\rangle \tag{14.4}$$

$$T_g(s) = \frac{1}{\sqrt{\det \|g_{ij}(x(s))\|}} \begin{vmatrix} g_{1i}(x(s))\dot{x}^i(s) & g_{2i}(x(s))\dot{x}^i(s) \\ h_{1k}(x(s))\dot{x}^k(s) & h_{2k}(x(s))\dot{x}^k(s) \end{vmatrix} \tag{14.5}$$

$$K_N(s) = h_{ij}(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s) \tag{14.6}$$

Demonstratie. Deoarece vectorii $N(s)$, $e_1(s)$ şi $e(s)$ sînt unitari şi ortogonali doi cîte doi, avem :

$$e(s) = N(s) \times e_1(s) \quad , \quad N(s) = e_1(s) \times e(s) \quad , \quad e_1(s) =$$
$$= e(s) \times N(s) \quad , \langle N(s), N(s)\rangle = \langle e_1(s), e_1(s)\rangle =$$
$$= \langle e(s), e(s)\rangle = 1 \ , \ \langle N(s), e_1(s)\rangle = \langle e_1(s), e(s)\rangle =$$
$$= \langle e(s), N(s)\rangle = 0$$

$$<e_1(s),\ \dot e_1(s)> = <N(s),\dot N(s)> = <e(s),\dot e(s)> = 0$$

$$<N(s),\ \dot e_1(s)> + <\dot N(s),\ e_1(s)> = 0\ ,\ <e_1(s),\ \dot e(s)> +$$

$$+ <\dot e_1(s),\ e(s)> = 0\ ,\ <e(s),\ \dot N(s)> + <\dot e(s),\ N(s)> = 0$$

Exprimăm vectorii $\dot e_1(s)$, $\dot e(s)$ şi $\dot N(s)$ în baza $\{e_1(s),e(s),N(s)\}$:

$$\dot e_1(s) = a_1(s)e_1(s) + b_1(s)e(s) + c_1(s)N(s)$$

(14.7) $$\dot e(s) = a_2(s)e_1(s) + b_2(s)e(s) + c_2(s)N(s)$$

$$\dot N(s) = a_3(s)e_1(s) + b_3(s)e(s) + c_3(s)N(s)$$

Din (14.7) obţinem

$$a_1(s) = <e_1(s),\ \dot e_1(s)>\ ,\quad a_2(s) = <e_1(s),\dot e(s)>\ ,$$

$$a_3(s) = <e_1(s),\ \dot N(s)>\ ,$$

$$b_1(s) = <e(s),\dot e_1(s)>\ ,\quad b_2(s) = <e(s),\dot e(s)>\ ,$$

$$b_3(s) = <e(s),\ \dot N(s)>$$

$$c_1(s) = <N(s),\ \dot e_1(s)>\ ,\quad c_2(s) = <N(s),\ \dot e(s)>\ ,$$

$$c_3(s) = <N(s),\ \dot N(s)>$$

Evident avem $a_1 = b_2 = c_3 = 0$, $b_1 + a_2 = 0$, $c_1 + a_3 = 0$, $c_2 + b_3 = 0$. Dacă notăm $K_g = b_1 = -a_2$, $K_N = c_1 = -a_3$, $T_g = c_2 = - b_3$, atunci din formulele (14.7) obţinem formulele (14.1), (14.2) şi (14.3). Să stabilim în continuare relaţiile (14.4), (14.5) şi (14.6). Din (14.1) rezultă

$$K_g(s) = <e(s),\ \dot e_1(s)> = <e(s),\ \frac{d}{ds}(\dot c(s))> =$$

$$= <e(s)\ ,\ \frac{d}{ds}(\dot x^i(s)f_{x^i}(x(s)))> =$$

$$= <e(s),\ \ddot x^i(s)f_{x^i}(x(s)) + \dot x^i(s)f_{x^ix^j}(x(s))\dot x^j(s)>$$

şi folosind formulele lui Gauss

$$f_{x^i x^j} = \left|{k \atop ij}\right| f_{x^k} + h_{ij} N ,$$

obţinem (14.4).

Din relaţia (14.3) rezultă :

(14.3') $$T_g(s) = -\langle e(s), \dot N(s)\rangle = \langle e_1(s) \times N(s), \dot N(s)\rangle$$

In plus avem :

(14.8) $$1 = \langle N(s), N(s)\rangle = \left\langle \frac{f_{x^1}(x(s)) \times f_{x^2}(x(s))}{\| f_{x^1}(x(s)) \times f_{x^2}(x(s))\|}, N(s)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det \| g_{ij}(x(s))\|}} \langle f_{x^1}(x(s)) \times f_{x^2}(x(s)), N(s)\rangle$$

Dacă notăm $D(s) = \det \| g_{ij}(x(s))\|$, din (14.3') şi (14.8) rezultă :

$$T_g(s) = \frac{1}{\sqrt{D(s)}} \langle e_1(s) \times N(s), \dot N(s)\rangle \langle f_{x^1}(x(s)) \times f_{x^2}(x(s)), N(s)\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(s)}} \begin{vmatrix} e_1^1(s) & e_1^2(s) & e_1^3(s) \\ N^1(s) & N^2(s) & N^3(s) \\ \dot N^1(s) & \dot N^2(s) & \dot N^3(s) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f^1_{x^1}(x(s)) & f^1_{x^2}(x(s)) & N^1(s) \\ f^2_{x^1}(x(s)) & f^2_{x^2}(x(s)) & N^2(s) \\ f^3_{x^1}(x(s)) & f^3_{x^2}(x(s)) & N^3(s) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(s)}} \begin{vmatrix} \langle e_1(s), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle e_1(s), f_{x^2}(x(s))\rangle & \langle e_1(s), N(s)\rangle \\ \langle N(s), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle N(s), f_{x^2}(x(s))\rangle & \langle N(s), N(s)\rangle \\ \langle N(s), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle N(s), f_{x^2}(x(s))\rangle & \langle N(s), N(s)\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(s)}} \begin{vmatrix} \langle \dot c(s), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle \dot c(s), f_{x^2}(x(s))\rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \langle \dot N(s), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle \dot N(s), f_{x^2}(x(s))\rangle & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{D(s)}} \begin{vmatrix} \langle \dot{x}^i(s) f_{x^i}(x(s)), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle \dot{x}^i(s) f_{x^i}(x(s)), f_{x^2}(x(s))\rangle \\ \langle \dot{x}^j(s) N_{x^j}(x(s)), f_{x^1}(x(s))\rangle & \langle \dot{x}^j(s) N_{x^j}(x(s)), f(x(s))\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(s)}} \begin{vmatrix} g_{1i}(x(s))\dot{x}^i(s) & g_{2i}(x(s))\dot{x}^i(s) \\ h_{1j}(x(s))\dot{x}^j(s) & h_{2j}(x(s))\dot{x}^j(s) \end{vmatrix}$$

Am obţinut deci formula (14.5). Să stabilim acum formula (14.6). Din (14.1) obţinem :

$$K_N(s) = \langle N(s), \dot{e}_1(s)\rangle = \langle N(s), \frac{d}{ds}(\dot{x}^k(s) f_{x^k}(x(s)))\rangle =$$

$$= \langle N(s), \ddot{x}^k(s) f_{x^k}(x(s)) + \dot{x}^i(s))\dot{x}^j(s)(\left|{k \atop ij}\right|(x(s)) f_{x^k}(x(s)) +$$

$$+ h_{ij}(x(s))N(s))\rangle = h_{ij}(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)$$

14.3. <u>DEFINITIE. Considerám funcţiile</u> K_g, T_g, $K_N : I \to R$ <u>definite prin formulele (14.4), (14.5) şi (14.6).</u> $K_g(s)$, $T_g(s)$ <u>şi</u> $K_N(s)$ <u>se numesc respectiv, curbura geodezică, torsiunea geodezică şi curbura normală</u> ale curbei c în <u>punctul</u> $c(s)$.

14.4. <u>DEFINITIE. Se numesc linii de curbură ale suprafeţei curbele de pe suprafaţă cu proprietatea că în orice punct al lor torsiunea geodezică este nulă.</u>

<u>OBSERVATIE</u>. Tinînd seama de (14.5) obţinem ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură

$$(14.5') \qquad \begin{vmatrix} g_{1i}(x(s))\dot{x}^i(s) & g_{2i}(x(s))\dot{x}^i(s)) \\ h_{1k}(x(s))\dot{x}^k(s) & h_{2k}(x(s))\dot{x}^k(s) \end{vmatrix} = 0$$

14.5. PROPOZITIE. Considerăm o suprafață de rotație :

$$f:(x^1,x^2)\in U \to f(x^1,x^2)=(\varphi(x^1)\cos x^2,\ \varphi(x^1)\sin x^2,\ \psi(x^1)) \in E_3$$

Dacă f nu are puncte ombilicale, atunci liniile de curbură sînt curbele coordonate ale suprafeței.

Demonstrație. Vom folosi ecuația diferențială (14.5') a liniilor de curbură ale unei suprafețe. In cazul nostru ecuația (14.5') devine

$$(14.5'')\qquad \begin{vmatrix} g_{11}(x(s)) & g_{22}(x(s)) \\ h_{11}(x(s)) & h_{22}(x(s)) \end{vmatrix} \dot{x}^1(s)\dot{x}^2(s) = 0$$

Deoarece suprafața dată nu are puncte ombilicale, din (14.5") obținem curbele $x^1 = k^1$ (=const.), $x^2 = k^2$ (=const). Prin urmare liniile de curbură sînt curbele coordonate ale suprafeței.

14.6. PROPOZITIE. Fie $f : U \to E_3$ o suprafață și fie $c = f\circ x : I \to E_3$ o curbă trasată pe suprafața f. Presupunem că curba c este în poziție generală. Următoarele afirmații sînt echivalente :

(i) c este geodezică.

(ii) Curbura geodezică în fiecare punct al curbei este nulă.

(iii) Normala principală în orice punct al curbei c coincide cu normala la suprafață în acel punct.

(iv) Planul osculator într-un punct oarecare al curbei este perpendicular pe planul tangent la suprafață în acel punct.

Demonstrație. (i) $\to$ (ii) Stim că :

$$K_g(s) = \left\langle e(s), \left(\ddot{x}^k(s) + \left|{k \atop ij}\right| (x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)\right) f_{x^k}(x(s))\right\rangle$$

şi este evident că dacă curba c este geodezică atunci $K_g(s) = 0$, oricare ar fi $s\in I$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Deoarece $\langle e(s), N(s)\rangle = 0$, rezultă că $e(s) \in T_{f(x(s))}f$.

Din egalitățile :

$$\langle e(s), e_1(s)\rangle = 0 \ , \langle e(s), (\ddot{x}^k(s) + \left|{k \atop ij}\right|(x(s))\dot{x}^i(x)\dot{x}^j(s))f_{x^k}(x(s))\rangle = 0$$

Rezultă că există o funcție $q : I \longrightarrow R$ astfel încît :

$$(\ddot{x}^k(s) + \left|{k \atop ij}\right|(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s))f_{x^k}(x(s)) = q(s)e_1(s)$$

Din egalitatea $\|e_1(s)\| = 1$, $(\forall)$ $s \in I$, obținem :

(14.9) $\quad \langle e_1(s), \dot{e}_1(s)\rangle = 0 \quad , \ (\forall)\ s \in I.$

Avem : $\langle e_1(s), \dot{e}_1(s)\rangle = \langle e_1(s), \ddot{c}(s)\rangle = \langle e_1(s), \ddot{x}^k(s)f_{x^k}(x(s)) +$

$+ \dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)\left|{k \atop ij}\right|(x(s))f_{x^k}(x(s)) + \dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s)h_{ij}(x(s))N(s)\rangle =$

$= \langle e_1(s), (\ddot{x}^k(s) + \left|{k \atop ij}\right|(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s))f_{x^k}(x(s))\rangle =$

$= \langle e_1(s), q(s)e_1(s)\rangle = q(s)$

Am obținut $\langle e_1(s), \dot{e}_1(s)\rangle = q(s)$ oricare ar fi $s \in I$.

Folosind formula (14.9) rezultă $q(s) = 0$, oricare ar fi $s \in I$, adică

$$\ddot{x}^k(s) + \left|{k \atop ij}\right|(x(s))\dot{x}^i(s)\dot{x}^j(s) = 0,$$

ceea ce ne arată că curba c este geodezică.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Din $K_g(s) = 0$ pentru orice $s \in I$ obținem

$$\dot{e}_1(s) = K_N(s)N(s)$$

și folosind prima formulă Frenet, rezultă $K_1(s)e_2(s) = K_N(s)N(s)$, adică (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Deoarece normala principală în orice punct al curbei c coincide cu normala la suprafață, rezultă că există o funcție $a : I \longrightarrow R$ astfel încît $e_2(s) = a(s)N(s)$ și folosind prima formulă a lui Frenet obținem

$$\dot{e}_1(s) = K_1(s)a(s)N(s),$$

unde $K_1(s)$ este curbura curbei c. Inmulţind scalar ultima egalitate cu $e(s)$ obţinem $< \dot{e}_1(s), e(s) > = 0$, adică $K_g(s) = 0$ oricare ar fi $s \in I$ şi deci curba c este geodezică.

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Evident .

14.7. EXEMPLE.

14.7.1. Ne propunem să determinăm geodezicele suprafeţei :

$$f : (x^1, x^2) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R} \longrightarrow f(x^1, x^2) = (\cos x^1 \cos x^2, \cos x^1 \sin x^2, \sin x^1) \in E_3$$

Este uşor de văzut că imaginea aplicaţiei f este sfera unitate S^2 din E_3 din care scoatem polul nord şi polul sud. Vrem să determinăm curbele

$$c = f \circ x : s \in I \longrightarrow c(s) = f(x(s)) \in E_3$$

care au proprietatea că normala principală coincide cu normala la suprafaţă. Avem :

$$N(x) = \frac{f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x)}{\| f_{x^1}(x) \times f_{x^2}(x) \|} = - f(x)$$

Rezultă $N(s) = N \circ x(s) = -f \circ x(s) = -c(s)$. Notăm $e_1(s) = \dot{c}(s)$. Din prima formulă Frenet rezultă că vectorul normal principal este coliniar cu vectorul $\dot{e}_1(s)$. In definitiv vrem să determinăm curbele $c(s) = f \circ x(s)$ care au proprietatea că vectorii $\dot{e}_1(s)$ şi $c(s)$ sînt coliniari oricare ar fi $s \in I$, adică există o funcţie diferenţiabilă

$$q : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

astfel încît :

$$\dot{e}_1(s) = q(s)c(s)$$

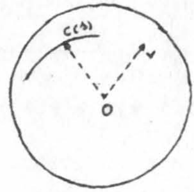
Inmulţind vectorial cu $c(s)$, obţinem :

$$c(s) \times \dot{e}_1(s) = 0 \quad ,$$

sau

$$c(s) \times \ddot{c}(s) = 0$$

Ultima egalitate se scrie $\frac{d}{ds}(c(s) \times \dot{c}(s)) = 0$ sau $c(s) \times \dot{c}(s) = v$, unde v este un vector constant. Rezultă că vectorul $c(s)$ (cu originea în O) este perpendicular pe un vector constant v oricare ar fi $s \in I$. Aceasta ne arată că extremitatea vectorului $c(s)$ descrie un cerc mare sau un arc de cerc mare. Prin urmare, <u>geodezicele sferei sînt cercuri mari.</u>



14.7.2. Pe sfera unitate S^2 din $\mathcal{E}_3$ se consideră un triunghi curbiliniu ABC, ale cărui laturi sînt arce de cercuri mari. Vom arăta că prin transport paralel de-a lungul laturilor triunghiului geodezic ABC, orice vector tangent la S^2 se rotește cu un unghi egal cu $A + B + C - \pi$ = aria triunghiului ABC , unde A,B,C sînt unghiurile triunghiului sferic ABC.

Fie v un vector tangent în punctul A la sfera unitate S^2 din $\mathcal{E}_3$.

Transportăm prin paralelism vectorul v de-a lungul arcului de cerc mare AC, și obținem în C un vector pe care-l notăm v_C.

Transportăm prin paralelism vectorul v_C de-a lungul arcului de cerc mare CB și obținem în B un vector pe care-l notăm v_B.

Transportăm prin paralelism vectorul v_B de-a lungul arcului de cerc mare BA și obținem în A un vector pe care-l notăm v_A.

Fie $t_1 \in T_A S^2$ vectorul tangent în A la geodezica AC. Transportăm vectorul t_1 prin paralelism de-a lungul arcului de geodesică AC și obținem vectorul $t_1' \in T_C S^2$ tangent în punctul C la geodezica

AC. Fie $t_2 \in T_C S^2$ (resp. $t_3 \in T_B S^2$) vectorul tangent la geodezica CB (resp. BA). Transportăm prin paralelism vectorul t_2 (resp. t_3) de-a lungul arcului de geodezică CB (resp.BA) şi obţinem vectorul $t_2' \in T_B S^2$ (resp. $t_3' \in T_A S^2$) tangent în punctul B (resp. A) la geodezica CB (resp. CA) .

Dacă notăm $u = \sphericalangle(t_1, v) = \sphericalangle(t_1', v_C)$, atunci avem :

$$\sphericalangle(t_2, v_C) = \sphericalangle(t_2, t_1') + \sphericalangle(t_1', v_C) = -(\pi - C) + u =$$

$$= u + C - \pi = \sphericalangle(t_2', v_B) ,$$

$$\sphericalangle(v_B, t_3) = \sphericalangle(v_B, t_2') + \sphericalangle(t_2', t_3) = (\pi - u - C) + (\pi - B) =$$

$$= 2\pi - B - C - u = \sphericalangle(v_A, t_3') ,$$

$$\sphericalangle(v_A, t_1) = \sphericalangle(v_A, t_3') + \sphericalangle(t_3', t_1) = (2\pi - B - C - u) +$$

$$+ (\pi - A) = 3\pi - A - B - C - u$$

Deoarece avem

$$\sphericalangle(v, v_A) + \sphericalangle(v_A, t_1) + \sphericalangle(t_1, v) = 2\pi ,$$

rezultă

$$\sphericalangle(v, v_A) + (3\pi - A - B - C - u) + u = 2\pi$$

şi deci

$$\sphericalangle(v, v_A) = A + B + C - \pi .$$

Să demonstrăm acum că aria tr ABC = $A + B + C - \pi$.

Fie A' simetricul lui A faţă de centrul sferei. Notăm S_A = aria ABA'CA. Analog notăm S_B şi S_C. Este clar că $S_A = 2A$ (deoarece sfera unitate are aria 4π şi poate fi considerată corespunzînd unghiului 2π între două cercuri mari).

Avem

$$S_A + S_B + S_C = 2(A + B + C)$$

$$4\pi + 4 \text{ aria tr ABC} = 4(A + B + C)$$

Rezultă :

$$\text{aria tr.}ABC = A + B + C - \pi$$

14.8. PROPOZIȚIE. Fie $f : U \to E_3$ o suprafață și fie

$$c = f\circ x : s\in I \to c(s) \in E_3 \quad , \quad \|\dot c(s)\| = 1,\ (\forall)s\in I$$

o curbă pe f. Curba c este linie asimptotică a suprafeței dacă și numai dacă curbura normală a curbei c se anulează în fiecare punct al curbei.

Demonstrație. Se folosesc relațiile (14.6) și (6.8)

14.9. PROPOZIȚIE. Fie $f : U \to E_3$ o suprafață

i) Dacă o geodezică este linie de curbură, atunci ea este curbă plană.

ii) Dacă o geodezică este linie asimptotică, atunci ea este dreaptă.

Demonstrație. Fie $\{e_1(s), e(s), N(s)\}$ reperul lui Darboux. Vom folosi formulele lui Darboux :

$$\dot e_1(s) = K_g(s)\, e(s) + K_N(s) N(s)$$
$$\dot e(s) = - K_g(s) e_1(s) + T_g(s) N(s)$$
$$\dot N(s) = - K_N(s) e_1(s) - T_g(s) e(s)$$

i) Deoarece

$$K_g(s) = 0 \quad \text{și} \quad T_g(s) = 0 \quad ,$$

din a doua formulă a lui Darboux rezultă

$$e(s) = (e_0^1, e_0^2, e_0^3) = \text{const.}$$

Deoarece $\langle e(s), e_1(s)\rangle = 0$ și $e_1(s) = \dot c(s) = (\dot x(s), \dot y(s), \dot z(s))$, obținem :

$$e_0^1 \dot x(s) + e_0^2 \dot y(s) + e_0^3 \dot z(s) = 0$$

sau

$$e_0^1 x(s) + e_0^2 y(s) + e_0^3 z(s) = k \ (= \text{const.}),$$

ceea ce ne arată că curba c este curbă plană.

ii) Din prima formulă a lui Darboux rezultă $e_1(s) = a$ ($=$const.), deci $c(s) = as + b$ ($b =$ const.), ceea ce ne arată că curba c este o dreaptă .

14.1o. Am definit mai înainte curbura normală $K_N(s)$ a unei curbe parametrizate canonic $c(s) = f \circ x(s)$ prin formula

$$K_N(s) = h_{ij}(x(s))\, \dot{x}^i(s)\, \dot{x}^j(s)$$

Dacă considerăm curba c parametrizată arbitrar, atunci avem

$$K_N(t) = \frac{h_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}{g_{ij}(x(t))\, \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)}$$

Ultima egalitate mai poate fi scrisă sub forma

$$K_N(t) = \frac{II_{x(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))}{I_{x(t)}(\dot{c}(t),\dot{c}(t))} ,$$

unde $\dot{c}(t) = \dot{x}^i(t) f_{x^i}(x(t)) \in T_{f \circ x(t)} f$.

Fiind dat un punct pe suprafaţă, prin acest punct trec o infinitate de curbe situate pe suprafaţă. Fiecărei astfel de curbe i se ataşează o curbură normală, deci unui punct de pe suprafaţă i se ataşează o infinitate de curburi normale. Vom arăta că mulţimea acestor numere este mărginită superior şi inferior.

Mai intîi amintim faptul că fiind dat un vector nenul $X \in T_{f(x)} f$, exista o curbă trasată pe suprafaţă care trece prin punctul $f(x)$ şi care este tangentă vectorului X .

DEFINITIE. Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafață. Un vector nenul $X \in T_{f(x)}f$ se numește vector principal al suprafeței în punctul $f(x)$ dacă reprezintă o valoare staționară a funcției

$$\rho : T_{f(x)} f \longrightarrow \mathbb{R}$$

definită prin

$$\rho(Y) = \frac{II_x(Y,Y)}{I_x(Y,Y)}$$

Numărul real $\rho(Y)$ se numește curbura normală a suprafeței în punctul $f(x)$ după direcția vectorului Y.

14.11. PROPOZITIE(RODRIGUEZ). Fie $f : U \longrightarrow E_3$ o suprafață și fie $X \in T_{f(x)}f$, $X \neq 0$.

Următoarele afirmații sînt echivalente :

(i) X este vector principal al suprafeței în punctul $f(x)$.

(ii) X este vector propriu al aplicației liniare L_x a lui Weingarten.

Demonstrație. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fie Y^1 și Y^2 componentele unui vector $Y \in T_{f(x)}f$ relative la baza canonică $\left\{ f_{x^1}(x), f_{x^2}(x) \right\}$ a spațiului tangent $T_{f(x)}f$.

Avem

$$(14.10) \qquad \rho(Y^i f_{x^i}(x)) = \frac{h_{11}(x)(Y^1)^2+2h_{12}(x)Y^1Y^2+h_{22}(x)(Y^2)^2}{g_{11}(x)(Y^1)^2+2g_{12}(x)Y^1Y^2+g_{22}(x)(Y^2)^2}$$

Condițiile de staționaritate care definesc un vector principal X se scriu

$$(14.11) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial Y^1}(X) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial Y^2}(X) = 0$$

Ținînd seama de (14.10) condițiile (14.11) se scriu

$$(h_{11}(x)X^1 + h_{12}(x)X^2)\, I_x(X,X) =$$
$$= (g_{11}(x)X^1 + g_{12}(x)X^2)II_x(X,X)$$

$$(h_{21}(x)X^1 + h_{22}(x)X^2)\, I_x(X,X) =$$
$$= (g_{21}(x)X^1 + g_{22}(x)X^2)II_x(X,X)$$

Ultimele egalități pot fi scrise sub forma

(14.12) $h_{ki}(x)X^i\, I_x(X,X) = g_{ki}(x)X^i II_x(X,X)$,

unde $k \in \{1,2\}$.

Deoarece avem

$$h_{ki}(x)X^i = II_x(f_{x^k}(x),\, f_{x^i}(x))X^i = II_x(f_{x^k}(x),\, X),$$

$$g_{ki}(x)X^i = I_x\,(f_{x^k}(x),\, f_{x^i}(x))X^i = I_x(f_{x^k}(x),\, X) ,$$

ecuațiile (14.12) devin

(14.12') $II_x(f_{x^k}(x),\, X)\, I_x(X,X) = I_x(f_{x^k}(x),X)\, II_x(X,X), \quad k\in\{1,2\}$

și ținînd seama de faptul că X este vector principal, obținem

$$II_x(f_{x^k}(x),X) = I_x(f_{x^k}(x),\, X)\ \rho(X), \quad k\in\{1,2\}$$

sau

(14.13) $\quad h_{ki}(x)X^i = g_{ki}(x)\, X^i\, \rho(X) \quad , \quad k \in \{1,2\}$

Dacă înmulțim (14.13) cu $g^{kj}(x)f_{x^j}(x)$ și sumăm, obținem :

$$h_i^j(x)\, f_{x^j}(x)X^i = \rho(X)X$$

sau

(14.14) $\quad L_x(X) = \rho(X)X$

Din (14.14) vedem că X este vector propriu al aplicației Weingarten L_x.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Din (14.14) se obține ușor (14.13). Din (14.13) rezultă

$$(14.15) \qquad II_x(Y,X) = I_x(Y,X)\ \rho(X), \quad (\forall)\ Y \in T_{f(x)}f$$

In particular, pentru $Y = X$, din (14.15) rezultă

$$(14.16) \qquad \rho(X) = \frac{II_x(X,X)}{I_x(X,X)}$$

Din (14.15) și (14.16) obținem

$$(14.17) \qquad II_x(Y,X)\ I_x(X,X) = I_x(Y,X)\ II_x(X,X), (\forall)\ Y \in T_{f(x)}f.$$

In particular, pentru $Y = f_{x^k}(x)$, unde $k \in \{1,2\}$, din (14.17) se obține (14.12'), ceea ce reprezintă tocmai (14.11). Prin urmare X este vector principal al suprafeței în punctul $f(x)$.

14.12. <u>OBSERVATIE.</u> Este ușor de văzut că curburile normale corespunzătoare vectorilor principali sînt curburi principale ale suprafeței.

14.13. <u>OBSERVATIE</u>. Din (14.4) vedem că curbura geodezică a unei curbe pe o suprafață face parte din geometria intrinsecă a suprafeței. Din (14.6) vedem că curbura normală a unei curbe pe o suprafață nu face parte din geometria intrinsecă a suprafeței.

14.14. <u>EXERCIȚIU</u>. Să se demonstreze că dacă o linie asimptotică a unei suprafețe este linie de curbură atunci ea este dreaptă.

<u>INDICATIE</u>. Se folosește a treia formulă a lui Darboux.

§ 15. TEOREMA FUNDAMENTALA A TEORIEI HIPERSUPRAFETELOR (BONNET)

15.0. Am văzut că fiind dată o hipersuprafaţă $f : U \to E_{m+1}$, putem asocia acestei hipersuprafeţe funcţiile diferenţiabile

$g_{ij} : U \to \mathbb{R}$ (g_{ij} = coeficienţii primei forme fundamentale),

$h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ (h_{ij} = coeficienţii celei de-a doua forme fundamentale)

şi că aceste funcţii verifică ecuaţiile Gauss

$$R_{ijk\ell} = h_{ik}h_{j\ell} - h_{i\ell}h_{jk}$$

şi ecuaţiile Codazzi-Mainardi

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^k} + \left|\begin{matrix} r \\ ij \end{matrix}\right| h_{rk} = \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} + \left|\begin{matrix} r \\ ik \end{matrix}\right| h_{rj} \quad ,$$

unde $\left|\begin{matrix} r \\ ij \end{matrix}\right|$ (respectiv $R_{ijk\ell}$) sînt simbolurile lui Christoffel de speţa a doua (respectiv simbolurile lui Riemann de prima speţă) construite cu ajutorul lui g_{ij}.

15.1. Am văzut că ecuaţiile lui Gauss şi ecuaţiile Codazzi-Mainardi sînt echivalente cu condiţiile de integrabilitate pentru sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} f_{x^i x^j} = \left|\begin{matrix} k \\ ij \end{matrix}\right| f_{x^k} + h_{ij} N \\ \\ N_{x^i} = - h_i^k f_{x^k} \end{cases}$$

Apare naturală problema lui Bonnet: Dîndu-se g_{ij} şi h_{ij} putem să determinăm o hipersuprafaţă f care să admită pe g_{ij} şi h_{ij} drept coeficienţii primei forme fundamentale şi respectiv ai celei de-a doua forme fundamentale? Dacă există o astfel de hipersuprafaţă, în ce condiţii ea este unică? Răspunsul la această problemă este dat de teorema de mai jos.

15.2. TEOREMA LUI BONNET (teorema fundamentală a teoriei hipersuprafeţelor). Fie $U \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, stelată în raport cu originea. Presupunem date funcţiile diferenţiabile

$$g_{ij} : U \to \mathbb{R} \ , \ h_{ij} : U \to \mathbb{R} \ , \ i,j \in \{1,\dots,n\}$$

cu proprietățile $g_{ij} = g_{ji}$, $h_{ij} = h_{ji}$, matricea $(g_{ij}(x))_{1 \le i,j \le n}$ este pozitiv definită, $(\forall) x \in U$. In plus, mai presupunem că g_{ij} și h_{ij} verifică ecuațiile Gauss și ecuațiile Codazzi-Mainardi, unde $\left|{k \atop ij}\right|$, R_{ijkl} sînt construite cu ajutorul lui g_{ij}. Atunci:

i) există o hipersuprafață parametrizată $f : U \to E_{n+1}$ astfel încît g_{ij} sînt coeficienții primei forme fundamentale, iar h_{ij} sînt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale.

ii) două hipersuprafețe $f : U \to E_{n+1}$ și $\tilde{f} : U \to E_{n+1}$ care au pe g_{ij} (respectiv h_{ij}) drept coeficienți ai primei (respectiv ai celei de-a doua) forme fundamentale diferă printr-o izometrie proprie a spațiului euclidian E_{n+1} , adică există o izometrie proprie

$$B : E_{n+1} \to E_{n+1}$$

astfel încît $\tilde{f} = B \circ f$.

Demonstrație i) Cu ajutorul funcțiilor date g_{ij}, h_{ij} construim funcțiile diferențiabile h_i^k , $\left|{r \atop ij}\right|$: $U \to \mathbb{R}$, prin

$$h_i^k = g^{kj} h_{ji} \ , \quad \left|{r \atop ij}\right| = \frac{1}{2} g^{rk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) ,$$

unde $g^{kj} g_{ji} = \delta_i^k$.

Vom considera sistemul de ecuații cu derivate parțiale constituit din formulele Gauss și formulele Weingarten

$$f_{x^i x^j} = \left|{k \atop ij}\right| f_{x^k} + h_{ij} N$$

$$N_{x^i} = - h_i^k f_{x^k}$$

Acest sistem este de ordinul al doilea în raport cu f și de ordinul întîi în raport cu N. Punînd $f_{x^i} = f_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$, acest sistem devine un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul întîi

$$(15.1) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \left|{k \atop ij}\right| f_k + h_{ij} N ,$$

$$(15.2) \qquad \frac{\partial N}{\partial x^i} = - h_i^k f_k ,$$

unde $f_1,\dots,f_n$, $N : U \longrightarrow E_{n+1}$ sînt funcţii vectoriale necunoscute, $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Condiţiile de integrabilitate pentru sistemul (15.1), (15.2)

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^k \partial x^j} , \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^j \partial x^i}$$

sînt echivalente cu ecuaţiile Gauss şi Codazzi-Mainardi, care sînt satisfăcute datorită ipotezei. Conform teoremei lui Frobenius (vezi [30], 2, p 4) există o unică soluţie $(f_1,\dots,f_n, N)$ a sistemului (15.1), (15.2), satisfăcînd anumite condiţii iniţiale date

$$(15.3) \qquad f_i(x_o) = X_i,\ i \in \{1,\dots,n\},\ N(x_o) = N_o \ (x_o \text{ fixat în } U) ,$$

unde valorile iniţiale $X_1,\dots,X_n$, N_o au fost alese astfel încît să avem

$$(15.3') \qquad \langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}(x_o),\ \langle X_i, N_o \rangle = 0 ,\ i,j \in \{1,\dots,n\},\ \|N_o\| = 1,$$

iar reperul $\{X_1,\dots,X_n, N_o\}$ să fie pozitiv orientat. Observăm că condiţia $\langle X_i, X_j \rangle = g_{ij}(x_o)$ poate fi scrisă, deoarece matricea $(g_{ij}(x_o))_{1 \leq i,j \leq n}$ este pozitiv definită datorită ipotezei.

Deoarece $g_{ij} = g_{ji}$, rezultă $\left|{k \atop ij}\right| = \left|{k \atop ji}\right|$ şi folosind egalităţile $h_{ij} = h_{ji}$, din (15.1) obţinem

$$\frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} , \qquad i,j \in \{1,\dots,n\} ,$$

ceea ce ne arată că forma diferenţială $f_i\, dx^i$ este închisă.

(Fie $X_o \in E_{n+1}$

Definim aplicaţia $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ prin

$$f(x) = \int_{x_o}^{x} f_i(x)dx^i + X_o$$

tim că U este deschisă, stelată în raport cu originea. Deoarece forma iferențială $f_i dx^i$ este închisă, rezultă că integrala de mai sus este ndependentă de drum (vezi [10] p. 394), deci f(x) este bine definită.

Vom demonstra că aplicația $f : U \longmapsto \mathcal{E}_{n+1}$ este hipersuprafață arametrizată și că g_{ij} (respectiv h_{ij}) sînt coeficienții primei (respectiv celei de-a doua) forme fundamentale a lui f. Pentru aceasta ntroducem funcțiile diferențiabile

$$A_{ij}\ ,\ A_i\ ,\ A : U \longrightarrow R\ , \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}$$

rin

15.4) $$A_{ij} = \langle f_i, f_j \rangle\ ,\ A_i = \langle f_i, N \rangle\ ,\ A = \langle N, N \rangle$$

ținînd seama de (15.3) și (15.3') avem

15.4') $$A_{ij}(x_o) = g_{ij}(x_o)\ ,\ A_i(x_o) = 0\ ,\ A(x_o) = 1$$

ținînd seama de (15.1) și (15.2), din (15.4) obținem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} = \left|{r \atop ik}\right| A_{rj} + h_{ik}A_j + \left|{r \atop jk}\right| A_{ir} + h_{jk}A_i \\[2ex] \dfrac{\partial A_i}{\partial x^k} = \left|{r \atop ik}\right| A_r + h_{ik}A - h^r_k A_{ir} \\[2ex] \dfrac{\partial A}{\partial x^k} = -\ 2h^r_k A_r \end{cases}$$

olosind identitățile lui Ricci (8.15) constatăm că acest sistem admite oluția

$$A_{ij} = g_{ij}\ ,\ A_i = 0\ ,\ A = 1$$

ceastă soluție verifică și condițiile inițiale (15.4'). Din unicitate oluției obținem

15.5) $$\langle f_i\ ,\ f_j \rangle = g_{ij}$$

$$(15.6) \qquad \langle f_i \,,\, N \rangle = 0$$

$$(15.7) \qquad \langle N \,,\, N \rangle = 1$$

Stim că matricea $(g_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ este nedegenerată, $(\forall) x \in U$. Rezultă că $\mathrm{rang}(g_{ij}(x)) = n$, $(\forall) x \in U$. Fie $f = (f^1, \ldots, f^{n+1})$ şi fie ${}^T J_f(x)$ transpusa matricei

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} f_1^1(x) & \ldots & f_1^{n+1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n^1(x) & \ldots & f_n^{n+1}(x) \end{pmatrix}$$

Am văzut la 2.3 că avem

$$J_f(x)\, {}^T J_f(x) = (\langle f_i(x), f_j(x) \rangle) = (g_{ij}(x))$$

Rezultă rang $J_f(x)\, {}^T J_f(x) = n$. De aici obţinem rang $J_f(x) = n$, adică aplicaţia f este o imersie. Prin urmare $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ este hipersuprafaţă parametrizată. Rezultă că vectorii $f_1, \ldots, f_n$ sînt liniar independenţi. Din (15.6) şi (15.7) rezultă că N este cîmp vectorial unitar, normal hipersuprafeţei. Rezultă că vectorii $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $N(x)$ sînt liniar independenţi $(\forall) x \in U$. Folosind aceasta obţinem $\Delta(x) \neq 0, (\forall) x \in U$, unde am folosit notaţia

$$\Delta = \det(f_1, \ldots, f_n, N)$$

Deoarece reperul $\{X_1, \ldots, X_n, N_o\}$ este pozitiv orientat avem $\Delta(x_o) > 0$. U fiind stelată în raport cu originea, rezultă că U este conexă. Stim că funcţia $x \longrightarrow \Delta(x)$ este diferenţiabilă. Rezultă că funcţia $x \longrightarrow \Delta(x)$ este continuă. Prin urmare avem $\Delta(x) > 0$, $(\forall) x \in U$. Rezultă că reperul $\{f_1, \ldots, f_n, N\}$ este pozitiv orientat. Deci $\{f_1, \ldots, f_n, N\}$ este reperul Gauss asociat hipersuprafeţei f.

Din (15.5) avem că g_{ij} sînt coeficienţii primei forme fundamentale. Din (15.1), unde $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, obţinem $h_{ij} = \left\langle \dfrac{\partial f_i}{\partial x^j}, N \right\rangle$, deci h_{ij} sînt coeficienţii formei a doua fundamentale.

ii) Fie $f : U \longrightarrow E_{n+1}$ hipersuprafaţa obţinută la punctul i), determinată prin condiţiile iniţiale $X_0, X_1, \ldots, X_n, N_0$ şi fie $\tilde{f} : U \longrightarrow E_{n+1}$ o altă soluţie obţinută ca mai sus, determinată prin condiţiile iniţiale $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{N}_0$. Avem

$$\langle X_i, X_j\rangle = \langle\tilde{X}_i, \tilde{X}_j\rangle = g_{ij}(x_0) ,$$

$$\langle X_i, N_0\rangle = \langle\tilde{X}_i, \tilde{N}_0\rangle = 0 , \quad \|N_0\| = \|\tilde{N}_0\| = 1$$

Deoarece $\{X_1, \ldots, X_n, N_0\}$ şi $\{\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{N}_0\}$ sînt repere ale spaţiului E_{n+1} în punctul $X_0 = f(x_0)$ şi respectiv $\tilde{X}_0 = \tilde{f}(x_0)$, rezultă că există o izometrie $B : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$ astfel încît să avem

(15.8) $\quad B(X_0) = \tilde{X}_0, \; RX_i = \tilde{X}_i \; , \; RN_0 = \tilde{N}_0 \; , \quad i \in \{1, \ldots, n\}$,

unde $R = dB_{X_0}$ este componenta ortogonală a izometriei B.

Deoarece reperele $\{X_1, \ldots, X_n, N_0\}$ şi $\{\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n, \tilde{N}_0\}$ sînt pozitiv orientate, rezultă că izometria B este proprie. Fie $\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n, \tilde{N}\}$ reperul Gauss asociat hipersuprafeţei $\tilde{f}$. Funcţiile $\tilde{f}_i$ şi $\tilde{N}$ verifică sistemul de ecuaţii cu derivate parţiale

$$(15.9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x^j} = \left| {k \atop ij} \right| \tilde{f}_k + h_{ij}\, \tilde{N} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{N}}{\partial x^i} = - h_i^k\, \tilde{f}_k \end{cases}$$

Observăm că avem egalităţile

$$\frac{\partial Rf_i}{\partial x^j} = R\,\frac{\partial f_i}{\partial x^j} \quad , \quad \frac{\partial RN}{\partial x^i} = R\,\frac{\partial N}{\partial x^i}$$

In adevăr, pentru orice $x \in U$ avem

$$\frac{\partial (R \circ f_i)}{\partial x^j}(x) = d(R \circ f_i)_x(e_j) = dR_{f_i(x)} \circ (df_i)_x(e_j) =$$

$$= R \circ (df_i)_x(e_j) = R\,\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x) \quad ,$$

$$\frac{\partial(R\circ N)}{\partial x^i}(x) = d(R\circ N)_x(e_i) = dR_{N(x)}\circ dN_x(e_i) =$$

$$= R\circ dN_x(e_i) = R\,\frac{\partial N}{\partial x^i}(x)$$

Aplicînd R, din (15.1) şi (15.2), se obţine

$$(15.10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Rf_i}{\partial x^j} = \left|{k \atop ij}\right| Rf_k + h_{ij}\,RN \\[2ex] \dfrac{\partial RN}{\partial x^i} = -\,h_i^k\,Rf_k \end{cases}$$

Din (15.9), (15.10) şi (15.8) vedem că funcţiile $\tilde{f}_1,\dots,\tilde{f}_n$, $\tilde{N}$, respectiv $Rf_1,\dots,Rf_n$, RN verifică acelaşi sistem de ecuaţii cu derivate parţiale cu exact aceleaşi condiţii iniţiale în punctul $x_o \in U$. Din unicitatea soluţiei avem

$$Rf_i = \tilde{f}_i \quad , \quad RN = \tilde{N} \quad , \quad i\in\{1,\dots,n\}$$

Pentru orice $x\in U$ avem

$$\tilde{f}(x) = \int_{x_o}^{x} \tilde{f}_i(x)dx^i + \tilde{X}_o = \int_{x_o}^{x} Rf_i(x)dx^i + \tilde{X}_o =$$

$$= \int_{x_o}^{x} dB\circ f_i(x)dx^i + \tilde{X}_o =$$

$$= (B\circ f)(x) - (B\circ f)(x_o) + \tilde{X}_o = B\circ f(x)$$

Rezultă $\tilde{f} = B\circ f$.

Q.E.D.

<u>Observaţie</u>. Teorema lui Bonnet rămîne adevărată într-un cadru mai general şi anume luînd mulţimea U simplu conexă în loc de stelată în raport cu originea. Demonstraţia teoremei în acest caz necesită unele cunoştinţe noi de analiză şi topologie care nu au fost învăţate în anul I.

CAPITOLUL IV

VARIETATI DIFERENTIABILE

§ 1. Definiția varietății diferențiabile.

1.1. DEFINITIE. Fie M o mulțime nevidă. Prin C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M înțelegem o familie

$$\mathcal{A} = \left\{ (U_a, h_a) \mid a \in A \right\} ,$$

unde A este o mulțime arbitrară de indici, $U_a \subset M$, $(\forall) a \in A$, iar

$$h_a : U_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

este aplicație injectivă, $(\forall) a \in A$, astfel încît

(A_1) $\quad \bigcup\limits_{a \in A} U_a = M$,

(A_2) $\quad h_a (U_a \cap U_b)$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a, b \in A$,

(A_3) $\quad$ pentru orice $a, b \in A$ cu $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, aplicația

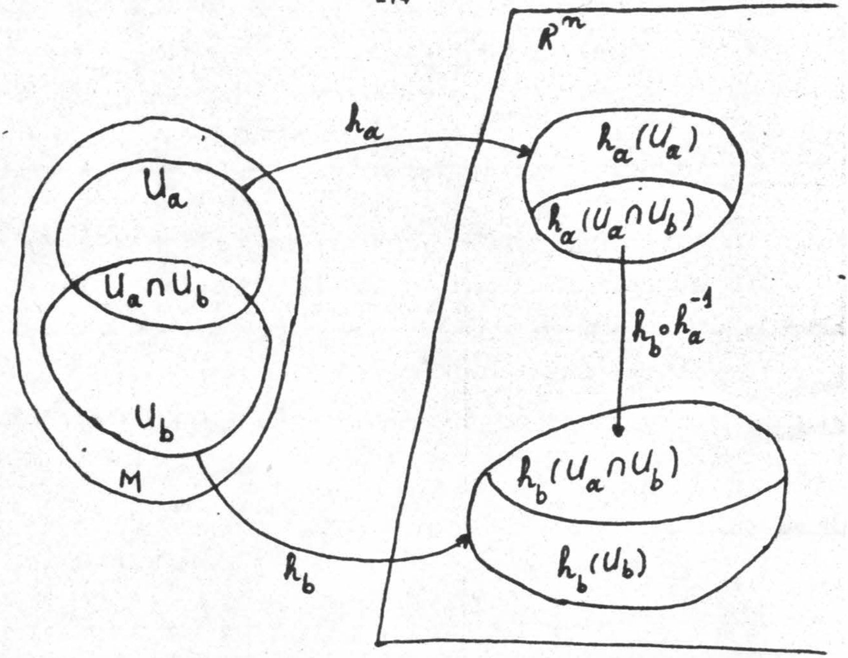
$$h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \longmapsto \mathbb{R}^n$$

este diferențiabilă de clasă C^k.

1.2. OBSERVATIE i) Elementele lui $\mathcal{A}$ se numesc hărți (de dimensiune n pe M).

ii) Aplicația $h_b \circ h_a^{-1}$ se numește aplicația de identificare pentru U_a și U_b (sau schimbare de hartă).

iii) O reprezentare intuitivă a definiției C^k-atlasului de tip $\mathbb{R}^n$ pe M este dată de figura de mai jos:



1.3. <u>PROPOZIȚIE. Fie</u> $\mathcal{A} = \left\{ (U_a, h_a) \mid a \in A \right\}$ <u>un</u> C^k-<u>atlas de tip</u> $\mathbb{R}^n$ <u>pe</u> M. <u>Atunci</u>

i) $h_a(U_a)$ <u>este mulțime deschisă în</u> $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a \in A$

ii) <u>aplicația</u>

$$h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \longrightarrow h_b(U_a \cap U_b)$$

<u>este difeomorfism de clasă</u> C^k, $(\forall) a, b \in A$.

<u>Demonstrație</u>. i) Știm că $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a, b \in A$. In particular, pentru a = b obținem că $h_a(U_a)$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

ii) Este evident că $h_b(U_a \cap U_b)$ este mulțime deschisă în $\mathbb{R}^n$ și că aplicația

$$h_a \circ h_b^{-1} : h_b(U_a \cap U_b) \longrightarrow h_a(U_a \cap U_b)$$

este diferenţiabilă de clasă C^k. Compunînd funcţiile $h_b \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h_b^{-1}$ obţinem transformarea identică, deci aplicaţiile $h_b \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h_b^{-1}$ sînt inverse una alteia. Cum ambele aplicaţii sînt diferenţiabile de clasă C^k, rezultă că $h_b \circ h_a^{-1}$ este difeomorfism de clasă C^k.

1.4. PROPOZITIE. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \mid a \in A\}$ un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Există $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{P}(M)$ (cu $\mathcal{P}(M)$ am notat familia părţilor lui M) cu următoarele proprietăţi:

i) $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M

ii) $U_a \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, $(\forall) a \in A$

iii) aplicaţia

$$h_a : (U_a, \mathcal{T}(\mathcal{A})|_{U_a}) \longrightarrow (h_a(U_a), \mathcal{T})$$

este un homeomorfism (cu $\mathcal{T}$ am notat topologia spaţiului $\mathbb{R}^n$)

iv) $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este unică cu proprietăţile i), ii) şi iii).

Demonstraţie. Luăm prin definiţie

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{V \in \mathcal{P}(M) \mid h_a(V \cap U_a) \in \mathcal{T} , (\forall) a \in A\}$$

i) Arătăm că $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M.

Fie $(V_i)_{i \in I}$ o familie de elemente din $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci

$$h_a(V_i \cap U_a) \in \mathcal{T} , (\forall) a \in A , (\forall) i \in I$$

Deoarece avem

$$h_a((\bigcup_{i \in I} V_i) \cap U_a) = h_a(\bigcup_{i \in I} (V_i \cap U_a)) = \bigcup_{i \in I} h_a(V_i \cap U_a) \in \mathcal{T} ,$$

rezultă $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci $h_a(V_1 \cap U_a), h_a(V_2 \cap U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall) a \in A$.

Deoarece h_a este injectivă, avem:

$$h_a((V_1 \cap V_2) \cap U_a) = h_a(V_1 \cap U_a) \cap h_a(V_2 \cap U_a) \in \mathcal{T} .$$

Rezultă că $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Din $h_a(\emptyset \cap U_a) = h_a(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T}$, $(\forall) a \in A$ rezultă că $\emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Din $h_a(M \cap U_a) = h_a(U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall) a \in A$, rezultă că $M \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Prin urmare $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ este topologie pe M.

ii) Deoarece $h_a(U_b \cap U_a) \in \mathcal{T}$, $(\forall) a,b \in A$, rezultă că $U_b \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, $(\forall) b \in A$.

iii) Este evident că aplicaţia $h_a : U_a \longrightarrow h_a(U_a)$ este bijectivă. Rămîne să arătăm că

$$h_a : (U_a, \mathcal{T}(\mathcal{A})|_{U_a}) \longmapsto (h_a(U_a), \mathcal{T})$$

este aplicaţie continuă şi deschisă, $(\forall) a \in A$.

Fie U o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$ şi $b \in A$. Pentru orice $a \in A$, avem

$$h_a(h_b^{-1}(U) \cap U_a) = h_a \circ h_b^{-1}(U) \cap h_a(U_a) = \text{mulţime deschisă în } \mathbb{R}^n$$

(am folosit faptul că $h_a \circ h_b^{-1}$ este difeomorfism, deci $h_a \circ h_b^{-1}$ este aplicaţie deschisă, prin urmare $h_a \circ h_b^{-1}(U)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$). Deoarece $h_a(h_b^{-1}(U) \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, rezultă că $h_b^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$, deci h_b este aplicaţie continuă.

Să arătăm că h_a este aplicaţie deschisă, $(\forall) a \in A$. Fie $a \in A$. Pentru orice $W \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ cu $W \subset U_a$ avem $h_a(W) = h_a(W \cap U_a) =$ mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, deci h_a este aplicaţie deschisă. In concluzie, h_a este homeomorfism, $(\forall) a \in A$.

iv) Fie $\mathcal{T}'$ o topologie pe M cu proprietăţile i), ii) şi iii). Vom arăta (prin dublă incluziune) că $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $U' \in \mathcal{T}'$. Atunci $U' \cap U_a \in \mathcal{T}'$, $(\forall) a \in A$. Rezultă că $h_a(U' \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a \in A$ adică $U' \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Am obţinut $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Fie $U \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Atunci $h_a(U \cap U_a)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Deoarece aplicaţia

$$h_a : (U_a, \mathcal{T}'|_{U_a}) \longrightarrow (h_a(U_a), \mathcal{T})$$

este un homeomorfism, rezultă $h_a^{-1}(h_a(U \cap U_a)) = U \cap U_a \in \mathcal{T}'$, $(\forall) a \in A$. Deci avem $U = U \cap (\bigcup_{a \in A} U_a) = \bigcup_{a \in A} (U \cap U_a) \in \mathcal{T}'$. Am obţinut $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{T}'$.

In concluzie avem $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Q.E.D.

1.5. <u>TEOREMA. Fie M o mulţime nevidă. Următoarele afirmaţii sînt echivalente</u>:

(i) <u>există un C^k-atlas de tip R^n pe M</u>

(ii) <u>M este spaţiu topologic verificînd următoarele condiţii</u>:

(ii_1) <u>există o familie</u> $\{U_a \mid a\in A\}$ <u>de deschisi din M astfel încît</u>

$$\bigcup_{a\in A} U_a = M$$

(ii_2) <u>pentru orice $a\in A$ există un homeomorfism</u>

$$h_a : U_a \longmapsto h_a(U_a) \subset R^n$$

(ii_3) <u>pentru orice $a,b\in A$ cu</u> $U_a \cap U_b \neq \emptyset$, <u>aplicaţia</u>

$$h_b \circ h_a^{-1} : h_a(U_a \cap U_b) \longmapsto R^n$$

<u>este diferenţiabilă de clasă</u> C^k.

<u>Demonstraţie</u> (i) $\Longrightarrow$ (ii). A se vedea propoziţia precedentă

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Din (ii_1) avem $U_a \subset M$, $(\forall) a\in A$, iar din (ii_2) obţinem că h_a este injectivă şi că $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în R^n. Folosind (ii_3) obţinem că

$$\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \mid a\in A\}$$

este C^k-atlas de tip R^n pe M.

Q.E.D.

1.6. <u>OBSERVAŢIE</u>. Unii autori definesc C^k-atlasul de tip R^n prin condiţiile (ii) din teorema 1.5. In aplicaţii însă este mai uşor de folosit definiţia 1.1.

1.7. <u>DEFINIŢIE</u>. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \mid a\in A\}$ <u>un C^k-atlas de tip R^n pe</u> M. $\mathcal{A}$ <u>se numeşte</u> C^k-<u>atlas maximal dacă este îndeplinită condiţia (de maximalitate)</u>:

"<u>Dacă</u> (U, h) <u>este o pereche formată dintr-o mulţime</u> $U \subset M$ <u>şi o aplicaţie injectivă</u> $h : U \longrightarrow R^n$ <u>astfel încît</u> $\mathcal{A} \cup \{(U, h)\}$ <u>să verifice condiţiile</u> (A_1), (A_2) <u>şi</u> (A_3) <u>din definiţia atlasului, atunci</u> $(U, h) \in \mathcal{A}$"

(altfel spus, <u>familia</u> $\mathcal{A}$ <u>nu poate fi lărgită</u>).

1.8. PROPOZITIE. Orice C^k-atlas $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) | a \in A\}$ de tip $\mathbb{R}^n$ pe mulţimea M poate fi completat în mod unic la un C^k-atlas maximal $\mathcal{A}'$.

Demonstraţie. Existenţa. Definim familia $\mathcal{A}'$ ca fiind formată din toate perechile (U, h), unde $U \subset M$, iar $h : U \longmapsto \mathbb{R}^n$ este aplicaţie injectivă, astfel încît să fie îndeplinite condiţiile:

- pentru orice $a \in A$ mulţimile $h(U_a \cap U)$, $h_a(U_a \cap U)$ sînt deschise în $\mathbb{R}^n$

- aplicaţiile $h \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h^{-1}$ sînt diferenţiabile de clasă C^k, $(\forall) a \in A$.

Să arătăm că

I) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$

II) $\mathcal{A}'$ verifică condiţiile (A_1), (A_2) şi (A_3) din definiţia C^k-atlasului

III) $\mathcal{A}'$ este maximal.

I) Fie $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$. Rezultă imediat din definiţia atlasului că $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}'$ deci $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

II) Să arătăm că $\mathcal{A}'$ este C^k-atlas. Fie (U, h), $(U', h') \in \mathcal{A}'$. Avem $U \subset M$, $U' \subset M$, iar aplicaţiile $h : U \longmapsto \mathbb{R}^n$, $h' : U' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sînt injecţii.

Trecem să verificăm axiomele (A_1), (A_2), (A_3) pentru familia $\mathcal{A}'$

(A_1) Deoarece $\bigcup_{a \in A} U_a = M$ şi $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$, rezultă că $\mathcal{A}'$ verifică (A_1)

(A_2) Fie (U, h), $(U', h') \in \mathcal{A}'$. Vrem să arătăm că $h(U \cap U')$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Stim că $h(U_a \cap U)$, $h_a(U_a \cap U)$, $h'(U_a \cap U')$, $h_a(U_a \cap U')$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a \in A$.

Fie $x \in h(U \cap U')$. Există $y \in U \cap U'$ cu $x = h(y)$. Există $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$ cu $y \in U_a$. Rezultă că $y \in U \cap U' \cap U_a$ şi folosind faptul că aplicaţia h_a este injectivă avem

$$x = h(y) \in h(U \cap U' \cap U_a) = h(h_a^{-1}(h_a(U \cap U' \cap U_a)) =$$

$$= (h \circ h_a^{-1})(h_a(U \cap U_a) \cap h_a(U' \cap U_a)) = V_x$$

Deoarece $h \circ h_a^{-1}$ este difeomorfism, $(\forall) a \in A$, iar $h_a(U \cap U_a)$ şi $h_a(U' \cap U_a)$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, rezultă că V_x este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Dar $V_x \subset h(U \cap U')$. Deci pentru orice $x \in h(U \cap U')$ există o mulţime deschisă $V_x \subset h(U \cap U')$. Rezultă că $h(U \cap U')$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

(A_3) Fie (U, h), $(U', h') \in \mathcal{A}'$ cu $U \cap U' \neq \emptyset$. Să arătăm că aplicaţia $h' \circ h^{-1} : h(U \cap U') \longrightarrow h'(U \cap U')$ este diferenţiabilă de clasă C^k. Fie $p \in U \cap U'$. Există $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$ cu $p \in U_a$. Dacă punem $x = h(p)$, rezultă

$$h' \circ h^{-1}(x) = (h' \circ h_a^{-1}) \circ (h_a \circ h^{-1})\ (x)$$

Cum aplicaţiile $h' \circ h_a^{-1}$, $h_a \circ h^{-1}$ sînt diferenţiabile de clasă C^k, rezultă că $h' \circ h^{-1}$ este diferenţiabilă de clasă C^k.

III) Fie (U, h) o pereche formată dintr-o mulţime $U \subset M$ şi o aplicaţie injectivă $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ astfel încît $\mathcal{A}' \cup \{(U, h)\}$ să fie C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Observăm că $h(U_a \cap U)$, $h_a(U_a \cap U)$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, $(\forall) a \in A$ şi că aplicaţiile $h \circ h_a^{-1}$, $h_a \circ h^{-1}$ sînt diferenţiabile de clasă C^k. Rezultă că $(U, h) \in \mathcal{A}'$. Prin urmare C^k-atlasul $\mathcal{A}'$ este maximal.

<u>Unicitatea</u>. Fie $\mathcal{A}''$ un C^k-atlas maximal pe M, verificînd condiţia $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}''$. Să arătăm că $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$.

Fie $(U'', h'') \in \mathcal{A}''$. Ştim că $U'' \subset M$, iar $h'' : U'' \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este aplicaţie injectivă. Pentru orice $(U_a, h_a) \in \mathcal{A}$ mulţimile $h_a(U_a \cap U'')$ şi $h''(U'' \cap U_a)$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, iar aplicaţiile $h'' \circ h_a^{-1}$ şi $h_a \circ h''^{-1}$ sînt diferenţiabile de clasă C^k. Rezultă $(U'', h'') \in \mathcal{A}'$. Prin urmare $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$.

Presupunem acum că există $(U', h') \in \mathcal{A}'$, dar $(U', h') \notin \mathcal{A}''$. Rezultă că atlasul $\mathcal{A}''$ nu este maximal (pentru că la $\mathcal{A}''$ am adăugat (U', h') astfel încît $\mathcal{A}'' \cup \{(U', h')\}$ să fie atlas). Aceasta contrazice presupunerea că atlasul $\mathcal{A}''$ este maximal. Rezultă $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$. In concluzie $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}'$.

1.9. <u>OBSERVATIE</u>. 1.9.1. Orice C^k-atlas maximal pe M este C^k-atlas pe M.

1.9.2. Nu orice C^k-atlas pe M este C^k-atlas maximal pe M.

1.9.3. Orice C^k-atlas pe M poate fi completat pînă la un atlas maximal.

1.9.4. Un C^k-atlas maximal de tip $\mathbb{R}^n$ pe M se mai numeşte structură diferenţiabilă de clasă C^k pe M.

1.10. <u>DEFINITIE</u>. Prin varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n înţelegem o mulţime nevidă M înzestrată cu un C^k-atlas maximal de tip $\mathbb{R}^n$.

1.11. <u>OBSERVATIE</u> i) Pentru k=o se obţine definiţia varietăţii topologice.

ii) Pentru $k=\infty$, se obţine definiţia varietăţii de clasă C^∞.

iii) Pentru $k=\omega$ se obţine definiţia varietăţii analitice sau de clasă C^ω.

iv) Spaţiul $\mathbb{R}^n$ intervine în mod esenţial în definiţia varietăţii diferenţiabile şi se numeşte spaţiul de modelare.

v) Propoziţia 1.8 ne arată că pentru a avea o structură de varietate diferenţiabilă de clasă C^k şi de dimensiune n pe o mulţime M este suficient să indicăm un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M.

vi) In continuare, dacă nu specificăm ordinul de diferenţiabilitate al varietăţii, vom presupune că toate varietăţile sînt de clasă C^∞.

§ 2. <u>Exemple de varietăţi diferenţiabile</u>.

<u>Exemplul 1</u>. Pe mulţimea $\mathbb{R}^n$ se poate defini o structură de varietate analitică reală cu ajutorul unui C^ω-atlas

$$\mathcal{A} = \left\{ (\mathbb{R}^n , Id_{\mathbb{R}^n}) \right\}$$

de tip $\mathbb{R}^n$, format dintr-o singură hartă $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$. Verificarea condiţiilor (A_1), (A_2) şi (A_3) din definiţia 1.1 este trivială. Deci $\mathbb{R}^n$ este varietate analitică reală de dimensiune n.

<u>Observaţie</u> i) Atlasul $\mathcal{A}$ nu este maximal. In adevăr, dacă (U, h) este o pereche formată dintr-o mulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^n$ şi un difeomorfism analitic

$$h : U \longmapsto h(U) \subset \mathbb{R}^n ,$$

cu $(U, h) \neq (\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$, atunci se constată uşor că familia

$$\left\{(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n}) , (U, h)\right\}$$

este C^{ω}-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe $\mathbb{R}^n$. Cum $(U, h) \notin \mathcal{A}$, rezultă că $\mathcal{A}$ nu este atlas maximal.

ii) Din propoziţia 1.8 ştim că atlasul $\mathcal{A}$ poate fi completat în mod unic pînă la un atlas maximal $\mathcal{A}'$. Atlasul $\mathcal{A}'$ este format din toate perechile (U, h), unde $U \subset \mathbb{R}^n$, iar $h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este aplicaţie injectivă astfel încît:

$$h(U \cap \mathbb{R}^n) = h(U) \quad \text{şi} \quad Id_{\mathbb{R}^n}(U) = U$$

să fie mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, iar aplicaţiile:

$$h \circ Id_{\mathbb{R}^n}^{-1} = h : U \longrightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{şi}$$

$$Id_{\mathbb{R}^n} \circ h^{-1} = h^{-1} : h(U) \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n$$

să fie aplicaţii analitice.

In concluzie, atlasul $\mathcal{A}'$ este format din toate perechile (U, h), unde U este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, iar

$$h : U \longrightarrow h(U) \subset \mathbb{R}^n$$

este un difeomorfism analitic.

iii) Varietatea analitică $\mathbb{R}^n$ este evident separată.

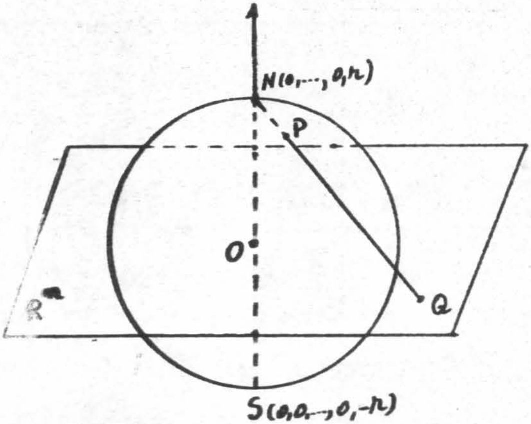
<u>Exemplul 2</u>. Fie sfera

$$S^n = \left\{(u^1,\dots,u^{n+1}) \in E_{n+1} \mid (u^1)^2 + \dots + (u^{n+1})^2 = r^2,\ r>0\right\}$$

Pe S^n se poate defini o structură de varietate analitică reală cu ajutorul unui atlas

$$\mathcal{A} = \left\{(U_N, h_N) , (U_S, h_S)\right\}$$

construit după cum urmează. Fie $N = (0,\ldots,0, r)$ polul nord al sferei S^n. Notăm $U_N = S^n - \{N\}$. Mai considerăm hiperplanul ecuatorial al sferei S^n dat de ecuaţia $u^{n+1} = 0$, pe care îl identificăm cu R^n.



Pentru un punct arbitrar $P \in U_N$ dreapta NP intersectează hiperplanul ecuatorial într-un punct Q. Dreapta determinată de punctele $N = (0,\ldots,0, r)$ şi $P = (u^1,\ldots,u^{n+1})$ are ecuaţiile

$$NP : \frac{x^1}{u^1} = \ldots = \frac{x^n}{u^n} = \frac{x^{n+1} - r}{u^{n+1} - r}$$

Intersectînd dreapta NP cu hiperplanul ecuatorial definit prin $x^{n+1} = 0$ obţinem coordonatele punctului Q

$$x^1 = \frac{ru^1}{r - u^{n+1}} , \ldots, x^n = \frac{ru^n}{r - u^{n+1}}$$

În definitiv am definit aplicaţia:

$$h_N : U_N = S^n - \{N\} \longrightarrow R^n ,$$

(numită <u>proiecţia stereografică</u> din polul nord) prin:

$$h_N(u^1,\ldots,u^{n+1}) = (\frac{ru^1}{r - u^{n+1}} , \ldots, \frac{ru^n}{r - u^{n+1}})$$

Aplicaţia h_N este injectivă. In adevăr, din

$$h_N(u^1,\dots,u^{n+1}) = h_N(u'^1,\dots,u'^{n+1})$$

rezultă

$$(*) \qquad \frac{ru^1}{r-u^{n+1}} = \frac{ru'^1}{r-u'^{n+1}},\dots,\frac{ru^n}{r-u^{n+1}} = \frac{ru'^n}{r-u'^{n+1}},$$

sau

$$u^1 = \frac{r-u^{n+1}}{r-u'^{n+1}}\,u'^1,\dots,u^n = \frac{r-u^{n+1}}{r-u'^{n+1}}\,u'^n$$

De aici rezultă

$$(u^1)^2+\dots+(u^n)^2 = \frac{(r-u^{n+1})^2}{(r-u'^{n+1})^2}\left((u'^1)^2+\dots+(u'^n)^2\right)$$

Deoarece $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(u^i)^2 = r^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1}(u'^i)^2 = r^2$, obţinem

$$r+u^{n+1} = \frac{r-u^{n+1}}{r-u'^{n+1}}\,(r+u'^{n+1})$$

Din ultima egalitate rezultă $u'^{n+1} = u^{n+1}$ şi ţinînd seama de egalităţile $(*)$ obţinem $u'^1 = u^1,\dots,u'^n = u^n$. Prin urmare h_N este aplicaţie injectivă. Avem $h_N(U_N) = \mathbb{R}^n$. Inversa aplicaţiei h_N este dată prin:

$$h_N^{-1}(x^1,\dots,x^n) = \left(\frac{2r^2x^1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2+r^2},\dots,\frac{2r^2x^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2+r^2},\frac{r\left(\sum\limits_{s=1}^{n}(x^s)^2-r^2\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2+r^2}\right)$$

Analog, prin proiecţia stereografică din polul sud, obţinem perechea (U_S,h_S) unde $S = (0,\dots,0,-r)$ este polul sud al sferei S^n, $U_S = S^n - \{S\}$, iar $h_S : U_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este definita prin

$$h_S(Y^1,\dots,Y^{n+1}) = \left(\frac{rY^1}{r+Y^{n+1}},\dots,\frac{rY^n}{r+Y^{n+1}}\right)$$

Aplicaţia h_S este injectivă. Avem $h_S(U_S) = \mathbb{R}^n$. Inversa aplicaţiei h_S este dată prin

$$h_S^{-1}(y^1,\dots,y^n) = \left(\frac{2r^2y^1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2+r^2},\dots,\frac{2r^2y^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2+r^2},\ \frac{r(r^2-\sum\limits_{s=1}^{n}(y^s)^2)}{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2+r^2}\right)$$

Aplicaţiile $h_S \circ h_N^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $h_N \circ h_S^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sînt date prin formulele:

$$h_S \circ h_N^{-1}(x^1,\dots,x^n) = \left(r^2\frac{x^1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2},\dots,r^2\frac{x^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(x^k)^2}\right),$$

$$h_N \circ h_S^{-1}(y^1,\dots,y^n) = \left(r^2\frac{y^1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2},\dots,r^2\frac{y^n}{\sum\limits_{k=1}^{n}(y^k)^2}\right)$$

Familia $\mathcal{A} = \{(U_N,h_N),\ (U_S,h_S)\}$ formează un atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe S^n, deoarece

i) $U_N \cup U_S = S^n$,

ii) $h_N(U_N) = \mathbb{R}^n$, $h_N(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n - \{0\}$,
$h_S(U_S) = \mathbb{R}^n$ şi $h_S(U_S \cap U_N) = \mathbb{R}^n - \{0\}$
sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$

iii) Aplicaţiile $h_N \circ h_S^{-1}$ şi $h_S \circ h_N^{-1}$ sînt analitice.

Să arătăm că topologia de varietate $\mathcal{T}$ a sferei S^n este separată. Fie $p,q \in S^n$, $p \neq q$.

Presupunem că $p,q \in U_N$. Notăm $h_N(p) = x \in \mathbb{R}^n$, $h_N(q) = y \in \mathbb{R}^n$ Deoarece $\mathbb{R}^n$ este separat, rezultă că există vecinătăţile deschise U_x , U_y , $x \in U_x$, $y \in U_y$, astfel încît $U_x \cap U_y = \emptyset$. Atunci $h_N^{-1}(U_x)$ şi $h_N^{-1}(U_y)$ sînt mulţimi deschise în S^n, deci $h_N^{-1}(U_x), h_N^{-1}(U_y) \in \mathcal{T}_{U_N}$. In plus avem $p \in h_N^{-1}(U_x)$ şi $q \in h_N^{-1}(U_y)$. Rezultă:

$$h_N^{-1}(U_x) \cap h_N^{-1}(U_y) = h_N^{-1}(U_x \cap U_y) = h_N^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

şi deci punctele p şi q se separă.

Analog procedăm în cazul în care $p,q \in U_S$.

Singura situaţie care rămîne să o discutăm este aceea în care $p = N$ şi $q = S$. Fie S^n_+ şi S^n_- emisfera nordică şi respectiv emisfera sudică, deci:

$$S^n_+ = \left\{(u^1,\ldots,u^{n+1}) \in S^n \mid u^{n+1} > 0\right\} ,$$

$$S^n_- = \left\{(u^1,\ldots,u^{n+1}) \in S^n \mid u^{n+1} < 0\right\} .$$

Este evident că $N \in S^n_+$, $S \in S^n_-$ şi $S^n_+ \cap S^n_- = \emptyset$.

Să arătăm că S^n_+ şi S^n_- sînt mulţimi deschise. Vom folosi faptul că h_N şi h_S sînt homeomorfisme. Să arătăm mai întîi că $h_S(S^n_+)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Pentru $(u^1,\ldots,u^{n+1}) \in S^n_+$ avem:

$$h_S(u^1,\ldots,u^{n+1}) = (y^1,\ldots,y^n) ,$$

unde
$$y^i = \frac{ru^i}{r + u^{n+1}} , \quad i=1,\ldots,n$$

Rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} (y^i)^2 = \frac{r^2 \sum\limits_{i=1}^{n} (u^i)^2}{(r+u^{n+1})^2} = \frac{r^2(r^2-(u^{n+1})^2)}{(r+u^{n+1})^2} = \frac{r^2(r-u^{n+1})}{r + u^{n+1}}$$

şi deoarece $u^{n+1} > 0$, obţinem $\frac{r-u^{n+1}}{r+u^{n+1}} < 1$. Deci $\sum\limits_{i=1}^{n} (y^i)^2 < r^2$, ceea ce ne arată că $h_S(S^n_+) \subset D$, unde

$$D = \left\{(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n : (y^1)^2 + \ldots + (y^n)^2 < r^2\right\}$$

este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Dacă $y \in D$, atunci se arată uşor că $h_S^{-1}(y) \in S^n_+$. Rezultă $y \in h_S(S^n_+)$, deci $D \subset h_S(S^n_+)$. Am obţinut că $h_S(S^n_+) = D$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$. Cum h_S este homeomorfism, rezultă că S^n_+ este mulţime deschisă în S^n. Analog arătăm că S^n_- este mulţime deschisă în S^n şi deci topologia de varietate a sferei S^n este separată.

Exemplul 3. Considerăm aplicația $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$ definită prin

$$f(x^1,x^2) = ((a+b\cos x^1)\cos x^2,(a+b\cos x^1)\sin x^2, b\sin x^1),$$

unde a,b = const, și $a>b>0$. Notăm $T^2 = \mathrm{Im} f$.

Vom arăta că T^2 (torul) este o varietate analitică reală, separată, de dimensiune doi. Introducem notațiile:

$$C^1 = \left\{(u^1,0,u^3)\in T^2 : (u^1-a)^2+(u^3)^2 = b^2\right\}$$

$$C^2 = \left\{(u^1,0,u^3)\in T^2 : (u^1+a)^2+(u^3)^2 = b^2\right\}$$

$$C^3 = \left\{(u^1,u^2,0)\in T^2 : (u^1)^2+(u^2)^2 = (a+b)^2\right\}$$

$$C^4 = \left\{(u^1,u^2,0)\in T^2 : (u^1)^2+(u^2)^2 = (a-b)^2\right\}$$

$$U_1 = T^2 - \left\{C^1\cup C^3\right\}, \quad U_2 = T^2 - \left\{C^1\cup C^4\right\},$$

$$U_3 = T^2 - \left\{C^2\cup C^3\right\}, \quad U_4 = T^2 - \left\{C^2\cup C^4\right\},$$

$$V_1 = (0,2\pi)\times(0,2\pi), \quad V_2 = (\pi,3\pi)\times(0,2\pi),$$

$$V_3 = (0,2\pi)\times(\pi,3\pi), \quad V_4 = (\pi,3\pi)\times(\pi,3\pi).$$

Observăm că aplicația $f\big|_{V_i} : V_i \longrightarrow U_i = \mathrm{Im}\, f\big|_{V_i}$

este bijectivă pentru orice $i\in\left\{1,2,3,4\right\}$. Efectuăm următoarele schimbări de parametri:

$$\varphi_1 : V_1 \longrightarrow V_1, \quad \varphi_1(x^1,x^2) = (x^1,x^2)$$

$$\varphi_2 : V_1 \longrightarrow V_2, \quad \varphi_2(x^1,x^2) = (x^1+\pi,x^2)$$

$$\varphi_3 : V_1 \longrightarrow V_3, \quad \varphi_3(x^1,x^2) = (x^1,x^2+\pi)$$

$$\varphi_4 : V_1 \longrightarrow V_4, \quad \varphi_4(x^1,x^2) = (x^1+\pi,x^2+\pi)$$

Notăm $f_i = f\big|_{V_i}\circ\varphi_i$, $i\in A = \left\{1,2,3,4\right\}$. Observăm că avem $\mathrm{Im}\, f_i =$ $= \mathrm{Im}\, f\big|_{V_i}$. Este evident că aplicația $f_i : V_1 \longrightarrow U_i$

este bijectivă oricare ar fi $i\in A$. Notăm $h_i = f_i^{-1}$, $i\in A$. Vom arăta că familia $\mathcal{A} = \left\{(U_i,h_i) : i\in A\right\}$

este atlas pe T^2. Este evident că $U_i \subset T^2$ oricare ar fi $i \in A$ şi că $h_i : U_i \longrightarrow R^2$ este injectivă oricare ar fi $i \in A$. De asemenea, este evident că $\bigcup_{i \in A} U_i = T^2$.

Pentru orice $i, j \in A$, avem $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Vom arăta că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în R^2 şi că aplicaţia $h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow R^2$ este analitică.

Presupunem că $i=1$ şi $j=2$. Avem $U_1 \cap U_2 = T^2 - \{C^1 \cup C^3 \cup C^4\}$.
Rezultă $h_1(U_1 \cap U_2) = f_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = (f|_{V_1} \circ \varphi_1)^{-1}(U_1 \cap U_2) =$

$$= \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2) = V_1 \cap V_2 \ .$$

Prin urmare $h_1(U_1 \cap U_2) = V_1 \cap V_2$ este mulţime deschisă în R^2. Pentru orice $(x^1, x^2) \in V_1 \cap V_2$ avem:

$$h_2 \circ h_1^{-1}(x^1, x^2) = f_2^{-1} \circ (f_1^{-1})^{-1}(x^1, x^2) = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(x^1, x^2) \ ,$$

unde am folosit egalitatea $f_2 \big|_{V_1 \cap V_2} = f_1 \big|_{V_1 \cap V_2}$.

Prin urmare aplicaţia $h_2 \circ h_1^{-1}$ este analitică.

Analog se arată că celelalte schimbări de hărţi sînt analitice. Deci T^2 este o varietate analitică reală de dimensiune doi.

In continuare vom arăta că varietatea T^2 este separată.

Stim că există pe T^2 o unică topologie $\mathcal{T}$ astfel încît $U_i \in \mathcal{T}$ şi $h_i : U_i \longrightarrow h_i(U_i) \subset R^2$ sînt homeomorfisme. Să arătăm că topologia $\mathcal{T}$ este separată. Fie $p_1, p_2 \in T^2$ cu $p_1 \neq p_2$. Avem $p_1 = f(q_1)$, $p_2 = f(q_2)$, unde $q_1 = (x_1^1, x_1^2)$, $q_2 = (x_2^1, x_2^2)$ şi se poate totdeauna presupune că $0 < x_i^1 \leqslant 2\pi$, $0 < x_i^2 \leqslant 2\pi$, $i = 1,2$. Deoarece $p_1 \neq p_2$ şi aplicaţia $f : (0, 2\pi] \times (0, 2\pi] \longrightarrow T^2$ este bijectivă, rezultă că $q_1 \neq q_2$. Avem de considerat cazurile:

(i) $\quad x_1^1 \neq x_2^1 \ , \quad x_1^2 \neq x_2^2$

(ii) $\quad x_1^1 = x_2^1 \quad , \quad x_1^2 \neq x_2^2$

(iii) $\quad x_1^1 \neq x_2^1 \quad , \quad x_1^2 = x_2^2$

Deoarece cazul (iii) se tratează la fel ca (ii) vom studia pe rînd cazurile (i) şi (ii).

<u>Cazul (i)</u>. $x_1^1 \neq x_2^1 \quad , \quad x_1^2 \neq x_2^2$. Presupunem că

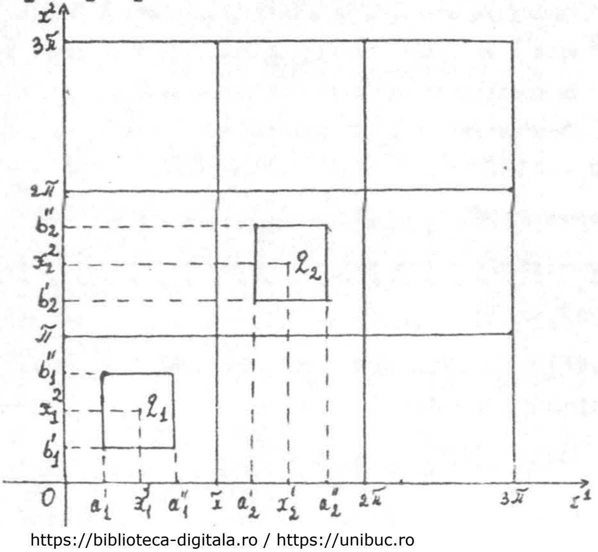
(i.) $\quad x_1^1 < x_2^1 \quad , \quad x_1^2 < x_2^2$

Alegem pe axa Ox^1 două intervale $I_1 = (a_1', a_1'')$ (centrat în x_1^1) şi $I_2 = (a_2', a_2'')$ (centrat în x_2^1) astfel încît $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ şi distanţa euclidiană între a_1' şi a_2'' să fie strict mai mică decît 2π .

Analog alegem pe axa Ox^2 două intervale $J_1 = (b_1', b_1'')$ (centrat în x_1^2) şi $J_2 = (b_2', b_2'')$ (centrat în x_2^2) astfel încît $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ şi distanţa euclidiană între b_1' şi b_2'' să fie strict mai mică decît 2π . Ducînd paralele la axe, obţinem două mulţimi deschise:

$$W_1 = I_1 \times J_1 \quad , \quad W_2 = I_2 \times J_2 \subset \mathbb{R}^2$$

astfel încît $q_1 \in W_1$, $q_2 \in W_2$.



Vom arăta că $f(W_1)\cap f(W_2) = \emptyset$. Presupunem că $f(W_1)\cap f(W_2) \neq \emptyset$ şi fie $x\in f(W_1)\cap f(W_2)$, deci $x\in f(W_1)$ şi $x\in f(W_2)$. Rezultă că există $y_1\in W_1$ şi $y_2\in W_2$ astfel încît $x = f(y_1)$ şi $x = f(y_2)$. Deoarece f este bijectivă pe mulţimi de forma $I\times J$ unde I şi J sînt intervale de lungimi strict mai mici decît 2π, rezultă că $y_1 = y_2$, deci $W_1\cap W_2 \neq \emptyset$ şi deci am ajuns la o contradicţie. Prin urmare avem:

$$f(W_1)\cap f(W_2) = \emptyset$$

Rezultă $p_1\in f(W_1)$ şi $p_2\in f(W_2)$. Mai rămîne să arătăm că $f(W_1)$ şi $f(W_2)$ sînt mulţimi deschise în T^2. Avem:

$$W_1 = \bigcup_{i=1}^{4} (W_1\cap V_i)$$

unde $W_1\cap V_i$ este mulţime deschisă în V_i $(i=1,2,3,4)$. Rezultă:

$$f\,\big|_{V_i}(W_1) = \bigcup_{i=1}^{4} f\,\big|_{V_i}(W_1\cap V_i) = \bigcup_{i=1}^{4} (f_i\circ \varphi_i^{-1})(W_1\cap V_i)$$

şi deci $f(W_1)$ este mulţime deschisă în T^2. Analog arătăm că $f(W_2)$ este mulţime deschisă în T^2. Pe aceeaşi cale tratăm subcazurile:

(i_2) $x_1^1 > x_2^1$, $x_1^2 < x_2^2$

(i_3) $x_1^1 > x_2^1$, $x_1^2 > x_2^2$

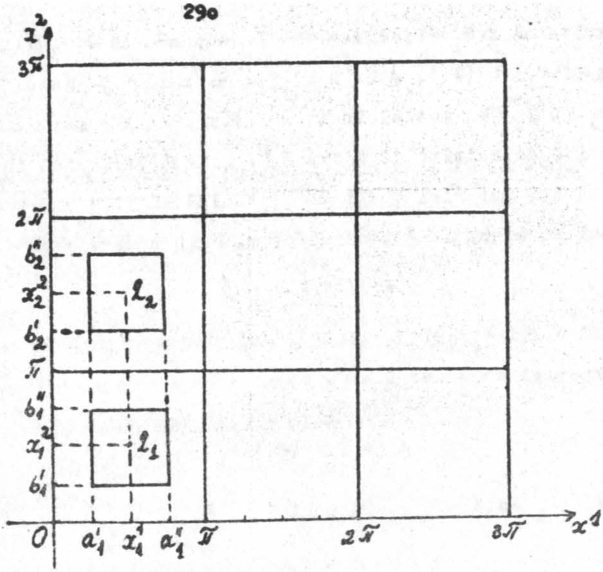
(i_4) $x_1^1 < x_2^1$, $x_1^2 > x_2^2$

Cazul (ii) $x_1^1 = x_2^1$, $x_1^2 \neq x_2^2$. Presupunem că $x_1^2 < x_2^2$. Facem aceeaşi construcţie de mai înainte, deci $J_1\cap J_2 = \emptyset$ şi distanţa euclidiană între b_1' şi b_2'' să fie strict mai mică decît 2π.

Notăm

$$W_1 = I\times J_1 \quad , \quad W_2 = I\times J_2 \quad , \quad I = (a_1', a_1'')$$

Avem $W_1\cap W_2 = \emptyset$, $q_1\in W_1$, $q_2\in W_2$. Rezultă $p_1\in f(W_1)$ şi $f(W_1)\cap f(W_2) = \emptyset$. La fel ca înainte arătăm că $f(W_1)$ şi $f(W_2)$ sînt mulţimi deschise în T^2.



Prin urmare T^2 este varietate separată.

<u>Exemplul 4</u>. Vom arăta că spaţiul proiectiv real de dimensiune n este o varietate diferenţiabilă (separată), cu n dimensiuni.

Notăm cu $P_n(R)$, spaţiul proiectiv real de dimensiune n. $P_n(R)$ este mulţimea dreptelor din R^{n+1} ce trec prin origine. O dreaptă d din R^{n+1} ce trece prin origine este determinată de parametrii ei directori $(a^1,\dots,a^{n+1})$, unde $(a^1)^2+\dots+(a^{n+1})^2>0$. Aceşti parametri directori sînt daţi pînă la un factor nenul de proporţionalitate, deoarece $(\lambda a^1,\dots,\lambda a^{n+1})$, unde $\lambda \neq 0$, reprezintă aceeaşi dreaptă d trecînd prin origine. Prin urmare spaţiul proiectiv $P_n(R)$ poate fi obţinut ca un spaţiu cît din $R^{n+1} - \{0\} = R^{n+1}_*$ prin relaţia de echivalenţă $\sim$ dată de:

$$(x^1,\dots,x^{n+1}) \sim (y^1,\dots,y^{n+1}) \Longleftrightarrow \text{există } \lambda \in R - \{0\} \text{ astfel}$$

încît $x^i = \lambda y^i$, $i = 1,\dots,n+1$. Deci

$$P_n(R) = R^{n+1}_* \,/\, (x^1,\dots,x^{n+1}) \sim (\lambda x^1,\dots,\lambda x^{n+1}),\quad \lambda \neq 0$$

Vom nota prin $[x^1,\dots,x^{n+1}]$ clasa de echivalenţă a lui $x = (x^1,\dots,x^{n+1}) \in R^{n+1}_*$. Notăm

$$U_i = \left\{[x^1,\dots,x^{n+1}]\in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})\ :\ x^i \neq 0\right\}\subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R}),\ i\in\left\{1,\dots,n+1\right\}$$

Pentru $i\in\{1,\dots,n+1\}$ definim aplicaţia $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$, prin

$$h_i([x^1,\dots,x^{n+1}]) = (y^1,\dots,y^n)\in\mathbb{R}^n ,$$

unde: $y^1 = \dfrac{x^1}{x^i},\dots, y^{i-1} = \dfrac{x^{i-1}}{x^i},\ y^i = \dfrac{x^{i+1}}{x^i},\dots, y^n = \dfrac{x^{n+1}}{x^i}$

Din $h_i([x^1,\dots,x^{n+1}]) = h_i([z^1,\dots,z^{n+1}])$, rezultă

$$\left(\frac{x^1}{x^i},\dots,\frac{x^{i-1}}{x^i},\ \frac{x^{i+1}}{x^i},\dots,\frac{x^{n+1}}{x^i}\right) = \left(\frac{z^1}{z^i},\dots,\frac{z^{i-1}}{z^i},\ \frac{z^{i+1}}{z^i},\dots,\frac{z^{n+1}}{z^i}\right)$$

Din ultima egalitate avem:

$$\frac{x^1}{x^i} = \frac{z^1}{z^i},\dots,\frac{x^{i-1}}{x^i} = \frac{z^{i-1}}{z^i},\ \frac{x^{i+1}}{x^i} = \frac{z^{i+1}}{z^i},\dots,\frac{x^{n+1}}{x^i} = \frac{z^{n+1}}{z^i}$$

sau

$$x^1 = \frac{x^i}{z^i} z^1 ,\dots,\ x^{i-1} = \frac{x^i}{z^i} z^{i-1} ,\ x^i = \frac{x^i}{z^i} z^i ,$$

$$x^{i+1} = \frac{x^i}{z^i} z^{i+1} ,\dots,\ x^{n+1} = \frac{x^i}{z^i} z^{n+1} ,$$

adică $[x^1,\dots,x^{n+1}] = [z^1,\dots,z^{n+1}]$. Deci h_i este o aplicaţie injectivă. Să verificăm condiţiile din definiţia varietăţii.

Din $U_i\subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, rezultă $\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} U_i \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$. Deoarece avem şi $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} U_i$ rezultă $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} U_i$.

Fie $i,j\in\{1,\dots,n+1\}$ astfel încît $U_i\cap U_j \neq \emptyset$. Avem:

$$U_i\cap U_j = \left\{[x^1,\dots,x^{n+1}]\in\mathbb{P}_n(\mathbb{R})\ :\ x^i \neq 0 ,\ x^j \neq 0\right\}$$

Să arătăm că $h_i(U_i\cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

<u>Cazul $j < i$</u>. Fie $[x^1,\dots,x^{n+1}] \in U_i\cap U_j$. Avem:

$$h_i([x^1,\ldots,x^{n+1}]) = (\frac{x^1}{x^i},\ldots,\frac{x^j}{x^i},\ldots,\frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i},\ldots,\frac{x^{n+1}}{x^i}) \in \mathbb{R}^n ,$$

deci $\quad h_i(U_i \cap U_j) = \{(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n : y^j \neq 0\} =$

$$= \mathbb{R}^n - \{(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n : y^j = 0\}$$

şi este clar că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

<u>Cazul $j > i$</u>. Fie $[x^1,\ldots,x^{n+1}] \in U_i \cap U_j$. Avem:

$$h_i([x^1,\ldots,x^{n+1}]) = (\frac{x^1}{x^i},\ldots,\frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i},\ldots,\frac{x^j}{x^i},\ldots,\frac{x^{n+1}}{x^i}) \in \mathbb{R}^n ,$$

deci $\quad h_i(U_i \cap U_j) = \{(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n : y^{j-1} \neq 0\} =$

$$= \mathbb{R}^n - \{(y^1,\ldots,y^n) \in \mathbb{R}^n : y^{j-1} = 0\}$$

şi este evident că $h_i(U_i \cap U_j)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Să verificăm acum că aplicaţia:

$$h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow h_j(U_i \cap U_j)$$

este diferenţiabilă. Mai întîi observăm că $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ este bijecţie oricare ar fi $i \in \{1,\ldots,n+1\}$. Să scriem inversa aplicaţiei h_i. Din ecuaţiile aplicaţiei h_i :

$$y^1 = \frac{x^1}{x^i},\ldots,y^{i-1} = \frac{x^{i-1}}{x^i} , y^i = \frac{x^{i+1}}{x^i},\ldots,y^n = \frac{x^{n+1}}{x^i} ,$$

obţinem:

$$x^1 = y^1x^i,\ldots,x^{i-1} = y^{i-1}x^i , x^{i+1} = y^ix^i,\ldots,x^{n+1} = y^nx^i$$

şi adăugînd relaţia $x^i = x^i$, obţinem ecuaţiile aplicaţiei h_i^{-1} :

$$h_i^{-1} : x^1 = y^1,\ldots,x^{i-1} = y^{i-1}, x^i = 1 , x^{i+1} = y^i,\ldots,x^{n+1} = y^n$$

Fie $(y^1,\ldots,y^n) \in h_i(U_i \quad U_j)$. Avem:

$$h_j \circ h_i^{-1}(y^1,\ldots,y^n) = h_j(h_i^{-1}(y^1,\ldots,y^n)) =$$

$$= h_j([y^1,\ldots,y^{i-1},1,y^i,\ldots,y^n])$$

Dacă $j < i$, avem:

$$h_j([y^1,\dots,y^j,\dots,y^{i-1},1,y^i,\dots,y^n]) =$$

$$= h_j\left(\left[\frac{y^1}{y^j},\dots,\frac{y^{j-1}}{y^j},1,\frac{y^{j+1}}{y^j},\dots,\frac{y^{i-1}}{y^j},\frac{1}{y^j},\frac{y^i}{y^j},\dots,\frac{y^n}{y^j}\right]\right) =$$

$$= \left(\frac{y^1}{y^j},\dots,\frac{y^{j-1}}{y^j},\frac{y^{j+1}}{y^j},\dots,\frac{y^{i-1}}{y^j},\frac{1}{y^j},\frac{y^i}{y^j},\dots,\frac{y^n}{y^j}\right)$$

şi cum componentele sînt diferenţiabile (pentru $y^j \neq 0$), rezultă că aplicaţia $h_j \circ h_i^{-1}$ este diferenţiabilă.

Dacă $i = j$, compunînd h_i cu h_i^{-1} obţinem aplicaţia identică care este diferenţiabilă.

Dacă $j > i$, avem:

$$h_j([y^1,\dots,y^{i-1},1,y^i,\dots,y^j,\dots,y^n]) =$$

$$= h_j\left(\left[\frac{y^1}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^{i-1}}{y^{j-1}},\frac{1}{y^{j-1}},\frac{y^i}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^{j-2}}{y^{j-1}},1,\frac{y^j}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^n}{y^{j-1}}\right]\right) =$$

$$= \left(\frac{y^1}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^{i-1}}{y^{j-1}},\frac{1}{y^{j-1}},\frac{y^i}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^{j-2}}{y^{j-1}},\frac{y^j}{y^{j-1}},\dots,\frac{y^n}{y^{j-1}}\right)$$

şi este evident că pentru $y^{j-1} \neq 0$, componentele aplicaţiei $h_j \circ h_i^{-1}$ sînt diferenţiabile.

Rezultă că $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ este o varietate diferenţiabilă reală, cu n dimensiuni.

Vom arăta în continuare că topologia de varietate a spaţiului proiectiv real $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ este separată. Fie $x,y \in U_i$. Atunci $h_i(x),h_i(y) \in \mathbb{R}^n$, deci există două mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$, notate $U_{h_i(x)}$, $U_{h_i(y)}$ astfel încît:

$$h_i(x) \in U_{h_i(x)} \text{ , } h_i(y) \in U_{h_i(y)} \text{ şi } U_{h_i(x)} \cap U_{h_i(y)} = \phi$$

Rezultă că $h_i^{-1}(U_{h_i(x)}$ şi $h_i^{-1}(U_{h_i(y)}$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$

verificînd condiţiile: $x \in h_i^{-1}(U_{h_i(x)})$, $y \in h_i^{-1}(U_{h_i(y)})$ şi

$$h_i^{-1}(U_{h_i(x)}) \cap h_i^{-1}(U_{h_i(y)}) = h_i^{-1}(U_{h_i(x)} \cap U_{h_i(y)}) = h_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad ,$$

deci în cazul în care punctele x şi y se află în domeniul aceleiaşi hărţi, le putem separa.

Singurul caz pe care trebuie să-l discutăm este acela în care avem două puncte $a,b \in P_n(R)$ cu proprietăţile:

$$a \in U_i \text{ dar } a \notin U_j \quad \text{şi} \quad b \in U_j \text{ dar } b \notin U_i$$

Fără a restrînge generalitatea putem presupune că $i < j$. Deoarece $a \in U_i$, dar $a \notin U_j$, rezultă că:

$$a = [a^1,\dots,a^{i-1},1,a^{i+1},\dots,a^{j-1},0,a^{j+1},\dots,a^{n+1}]$$

Deoarece $b \in U_j$, dar $b \notin U_i$, rezultă că

$$b = [b^1,\dots,b^{i-1},0,b^{i+1},\dots,b^{j-1},1,b^{j+1},\dots,b^{n+1}]$$

Avem: $$h_i(a) = (a^1,\dots,a^{i-1},a^{i+1},\dots,a^{j-1},0,a^{j+1},\dots,a^{n+1}) \ ,$$

$$h_j(b) = (b^1,\dots,b^{i-1},0,b^{i+1},\dots,b^{j-1},b^{j+1},\dots,b^{n+1})$$

Pentru punctul $h_i(a)$ luăm o vecinătate V_i de forma:

$$V_i = (a^1-\varepsilon,a^1+\varepsilon)\times\dots\times(a^{i-1}-\varepsilon,a^{i-1}+\varepsilon)\times(a^{i+1}-\varepsilon,a^{i+1}+\varepsilon)\times\dots\times$$
$$\times(a^{j-1}-\varepsilon,a^{j-1}+\varepsilon)\times(-\varepsilon,\varepsilon)\times(a^{j+1}-\varepsilon,a^{j+1}+\varepsilon)\times\dots\times$$
$$\times(a^{n+1}-\varepsilon,a^{n+1}+\varepsilon)$$

Pentru punctul $h_j(b)$ luăm o vecinătate V_j de forma:

$$V_j = (b^1-\eta,b^1+\eta)\times\dots\times(b^{i-1}-\eta,b^{i-1}+\eta)\times(-\eta,\eta)\times$$
$$\times(b^{i+1}-\eta,b^{i+1}+\eta)\times\dots\times(b^{j-1}-\eta,b^{j-1}+\eta)\times(b^{j+1}-\eta,b^{j+1}+\eta)\times$$
$$\times\dots\times(b^{n+1}-\eta,b^{n+1}+\eta)$$

Avem:

$$h_i^{-1}(V_i) = \Big\{ [z^1,\dots,z^{i-1},1,z^{i+1},\dots,z^{n+1}] \in U_i :$$
$$z^1 \in (a^1-\varepsilon, a^1+\varepsilon),\dots,z^{i-1} \in (a^{i-1}-\varepsilon, a^{i-1}+\varepsilon), z^{i+1} \in$$
$$\in (a^{i+1}-\varepsilon, a^{i+1}+\varepsilon),\dots,z^{j-1} \in (a^{j-1}-\varepsilon, a^{j-1}+\varepsilon), z^j \in (-\varepsilon,\varepsilon),$$
$$z^{j+1} \in (a^{j+1}-\varepsilon, a^{j+1}+\varepsilon),\dots,z^{n+1} \in (a^{n+1}-\varepsilon, a^{n+1}+\varepsilon)\Big\} .$$

$$h_j^{-1}(V_j) = \Big\{ [u^1,\dots,u^{j-1},1,u^{j+1},\dots,u^{n+1}] \in U_j :$$
$$u^1 \in (b^1-\eta, b^1+\eta),\dots,u^{i-1} \in (b^{i-1}-\eta, b^{i-1}+\eta), u^i \in (-\eta,\eta),$$
$$u^{i+1} \in (b^{i+1}-\eta, b^{i+1}+\eta),\dots,u^{j-1} \in (b^{j-1}-\eta, b^{j-1}+\eta),$$
$$u^{j+1} \in (b^{j+1}-\eta, b^{j+1}+\eta),\dots,u^{n+1} \in (b^{n+1}-\eta, b^{n+1}+\eta)\Big\}$$

i) Dacă $u^i = 0$, atunci este evident că elementele de pe locul i din $h_j^{-1}(V_j)$ şi $h_i^{-1}(V_i)$ nu coincid niciodată.

ii) Dacă $u^i \neq 0$, atunci un element oarecare din mulţimea $h_j^{-1}(V_j)$ se scrie:

$$\left[\frac{u^1}{u^i},\dots,\frac{u^{i-1}}{u^i},1,\frac{u^{i+1}}{u^i},\dots,\frac{u^{j-1}}{u^i},\frac{1}{u^i},\frac{u^{j+1}}{u^i},\dots,\frac{u^{n+1}}{u^i}\right]$$

Dacă luăm $\varepsilon = \eta = 1$, obţinem $z^j \in (-1,1)$, $\left|\frac{1}{u^i}\right| > 1$.

Prin urmare, elementele de pe locul j din $h_i^{-1}(V_i)$ şi $h_j^{-1}(V_j)$ nu coincid niciodată. Rezultă că $h_i^{-1}(V_i) \cap h_j^{-1}(V_j) = \emptyset$ şi deci $P_n(R)$ este varietate separată.

<u>Exemplul 5</u>. Vom arăta că mulţimea:

$$M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = 1\}$$

poate fi organizată ca varietate diferenţiabilă neseparată de clasă C^∞ şi de dimensiune unu.

Considerăm mulţimile $U_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$,

$$U_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x < 0 , y = 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y = 1\}$$

şi aplicaţiile:

$$h_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ h_1(x,0) = x$$

$$h_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ h_2(x,0) = x \text{ dacă } x<0 \text{ şi } h_2(x,1) = x \text{ dacă } x>0.$$

Este evident că $U_1 \subset M$, $U_2 \subset M$ şi că h_1 şi h_2 sînt injective. In plus, avem:

i) $U_1 \cup U_2 = M$

ii) $h_1(U_1 \cap U_2) = h_1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x<0, y=0\}) = (-\infty,0)$, deci $h_1(U_1 \cap U_2)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}$. De asemenea şi mulţimile $h_2(U_1 \cap U_2) = (-\infty,0)$, $h_1(U_1) = \mathbb{R}$, $h_2(U_2) = \mathbb{R}$ sînt mulţimi deschise în $\mathbb{R}$.

iii) Pentru orice $x \in (-\infty,0) = I$, avem $h_2 \circ h_1^{-1}(x) = h_2(x,0) = x$, deci aplicaţia $h_2 \circ h_1^{-1} = Id_I$ este C^{∞}-diferenţiabilă. De asemenea şi aplicaţia $h_1 \circ h_2^{-1}$ este diferenţiabilă. Deci familia $\mathcal{A} = \{(U_1,h_1),(U_2,h_2)\}$ este un atlas pe M. Rezultă că M este varietate C^{∞}-diferenţiabilă de dimensiune unu.

Observăm că punctele $(0,0) \in U_1$ şi $(0,1) \in U_2$ nu se pot separa. In adevăr, fie V_1 o vecinătate deschisă a lui $0 \in \mathbb{R}$. Atunci $h_1^{-1}(V_1)$ este o vecinătate deschisă a lui $(0,0) \in U_1$. Fie V_2 o vecinătate deschisă a lui $0 \in \mathbb{R}$. Atunci $h_2^{-1}(V_2)$ este o vecinătate deschisă a punctului $(0,1) \in U_2$. Este evident că $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. Este uşor de văzut că $h_2^{-1}(V_2) \cap h_1^{-1}(V_1)$ este diferită de mulţimea vidă.

<u>Exemplul 6</u>. Fie M o varietate diferenţiabilă separată de clasă C^k şi de dimensiune n şi fie U o mulţime deschisă în M. Vom arăta că U poate fi organizată ca varietate diferenţiabilă separată de clasă C^k şi de dimensiune n.

Fie $\mathcal{A} = \{(U_a,h_a) \mid a \in A\}$ un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M. Notăm $U'_a = U_a \cap U$, $h'_a = h_a|_{U'_a}$. Este evident că $U'_a \subset U$ şi că aplicaţia

$$h'_a : U'_a \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

este injectivă, $(\forall) a \in A$.

Familia $\mathcal{A}' = \left\{(U'_a, h'_a) \mid a \in A\right\}$ este un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M deoarece sînt verificate condiţiile:

i) $\bigcup\limits_{a\in A} U'_a = \bigcup\limits_{a\in A}(U_a \cap U) = (\bigcup\limits_{a\in A} U_a)\cap U = M \cap U = U$

ii) pentru orice $a,b \in A$ avem $h'_a(U'_a \cap U'_b) = h_a(U_a \cap U_b \cap U)$ şi deoarece $U_a \cap U_b \cap U$ este deschis iar h_a este homeomorfism, rezultă că $h'_a(U'_a \cap U'_b)$ este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

iii) pentru orice $a,b \in A$ cu $U'_a \cap U'_b \neq \emptyset$, aplicaţia

$$h'_b \circ h'^{-1}_a : h'_a(U'_a \cap U'_b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

este diferenţiabilă de clasă C^k. In adevăr, avem

$$h'_b \circ h'^{-1}_a = h_b \circ h_a^{-1} \Big|_{h'_a(U'_a \cap U'_b)}$$

şi cum restricţia unei aplicaţii diferenţiabile de clasă C^k la o mulţime deschisă este diferenţiabilă de clasă C^k, rezultă că $h'_b \circ h'^{-1}_a$ este diferenţiabilă de clasă C^k. Deoarece varietatea M este separată rezultă că şi varietatea U este separată. Prin urmare U este varietate diferenţiabilă separată de clasă C^k şi de dimensiune $n = \dim M$.

<u>Exemplul 7</u>. Fie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente în $\mathbb{R}$. Vom arăta că mulţimea

$$GL(n,\mathbb{R}) = \left\{ a = \| a^i_j \| \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det \| a^i_j \| \neq 0 \ , \ i,j=1,2,\dots,n \right\}$$

poate fi structurată ca varietate analitică reală de dimensiune n^2.

Numerotăm elementele matricei $a = \| a^i_j \| \in GL(n,\mathbb{R})$ în modul următor:

$$a = \begin{Vmatrix} x^1 & x^2 & \dots\ x^n \\ x^{n+1} & x^{n+2} & \dots\ x^{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ x^{n^2-n+1} & x^{n^2-n+2} & \dots\ x^{n^2} \end{Vmatrix}$$

In acest fel fiecărei matrice $a = \| a^i_j \| \in GL(n,\mathbb{R})$ îi asociem punctul

$(x^1,\dots,x^{n^2}) \in R^{n^2}$. Este ușor de văzut că $GL(n,R)$ se identifică cu o mulțime deschisă în R^{n^2}. Deci $GL(n,R)$ este varietate analitică reală de dimensiune n^2.

<u>Exemplul 8</u>. Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) | a \in A\}$ un C^k-atlas de tip R^n pe M și fie M' o mulțime arbitrară. Presupunem că avem o aplicație bijectivă $h : M' \longrightarrow M$. Notăm

$$U'_a = h^{-1}(U_a) \quad , \quad h'_a = h_a \circ h$$

Vom arăta că $\mathcal{A}' = \{(U'_a, h'_a) | a \in A\}$ este un C^k-atlas de tip R^n pe M'.

In adevăr, avem $U'_a \subset M'$, $(\forall) a \in A$, iar aplicația

$$h'_a : U'_a \longrightarrow R^n$$

este injectivă, $(\forall) a \in A$. In plus avem:

i) $\bigcup_{a\in A} U'_a = \bigcup_{a\in A} h^{-1}(U_a) = h^{-1}(\bigcup_{a\in A} U_a) = h^{-1}(M) = M'$

ii) Pentru orice $a, b \in A$ avem:

$$h'_a(U'_a \cap U'_b) = h_a \circ h(h^{-1}(U_a) \cap h^{-1}(U_b)) = h_a \circ h(h^{-1}(U_a \cap U_b)) =$$
$$= h_a(U_a \cap U_b) \quad ,$$

deci $h'_a(U'_a \cap U'_b)$ este mulțime deschisă în R^n.

iii) Fie $a, b \in A$ cu $U'_a \cap U'_b \neq \emptyset$ și fie aplicația

$$h'_b \circ h'^{-1}_a : h'_a(U'_a \cap U'_b) \longrightarrow R^n \quad . \qquad \text{Avem:}$$

$$h'_b \circ h'^{-1}_a = (h_b \circ h) \circ (h_a \circ h)^{-1} = (h_b \circ h) \circ (h^{-1} \circ h_a^{-1}) =$$
$$= h_b \circ h_a^{-1} \quad ,$$

și deci aplicația $h'_b \circ h'^{-1}_a$ este diferențiabilă de clasă C^k. Prin urmare M' este varietate diferențiabilă de clasă C^k și de dimensiune $n = \dim M$.

Presupunem că M este varietate separată. Vom arăta că M' este separată. Pe M' avem topologia de varietate. O mulțime U' din M' este mulțime deschisă dacă mulțimea $h(U')$ este deschisă în M. Fie $p, q \in M'$, $p \neq q$. Notăm $x = h(p)$, $y = h(q)$. Deoarece h este bijecție rezultă

$x \neq y$. Cum M este varietate separată rezultă că există două mulţimi deschise $U_x, U_y \subset M$ astfel încît $x \in U_x$, $y \in U_y$ şi $U_x \cap U_y = \emptyset$. Rezultă $h^{-1}(U_x \cap U_y) = h^{-1}(U_x) \cap h^{-1}(U_y) = \emptyset$, deci punctele $p \in h^{-1}(U_x)$ şi $q \in h^{-1}(U_y)$ se pot separa. Rezultă că M' este varietate diferenţiabilă separată.

Exemplul 9. Considerăm aplicaţia

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$$

definită prin

$$f(x^1, x^2) = (x^1 \cos x^2 \ , \ x^1 \sin x^2, \ bx^2) \quad , \quad b = \text{const.} \neq 0$$

Vom arăta că $M = \mathrm{Im} f$ este varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune 2 (elicoidul drept).

Este evident că f este injecţie. Atunci aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ este bijecţie şi conform exemplului anterior M este o varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune 2.

Exemplul 10. Considerăm un interval deschis $I \subseteq \mathbb{R}$ şi fie $C : I \longrightarrow E_n$ o aplicaţie diferenţiabilă (curbă parametrizată în E_n). Dacă C este injecţie atunci $M = \mathrm{Im}\, C$ este varietate diferenţiabilă de dimensiune $n = 1$.

Este evident că I este o varietate diferenţiabilă de dimensiune $n = 1$. Aplicaţia $C : I \longmapsto M$ este bijecţie şi conform exemplului 8 rezultă că M este varietate diferenţiabilă de dimensiune $n = 1$.

Exemplul 11. Considerăm aplicaţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow E_3$ definită prin

$$f(x^1, x^2) = (a(x^1 + x^2), b(x^2 - x^1), 2x^1x^2) \ , \quad a > 0 \ , \ b > 0$$

Vom arăta că $M = \mathrm{Im} f$ este varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune doi (paraboloidul hiperbolic).

Este evident că aplicaţia f este injectivă. Atunci $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ este bijecţie şi conform exemplului 8, M este varietate C^∞-diferenţiabilă de dimensiune doi.

<u>Exemplul 12</u>. Considerăm mulţimea $U=\{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n : x^1\dots x^n\neq 0\}$ şi aplicaţia $f: U \longrightarrow E_{n+1}$ definită prin

$$f(x^1,\dots,x^n) = (x^1,\dots,x^n,\frac{1}{x^1\dots x^n})$$

Vom arăta că $M = \operatorname{Im} f$ este varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune n (varietate Ţiţeica).

Este evident că f este injectivă. Rezultă că

$$f: U \longrightarrow M$$

este bijecţie. Deoarece U este mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$, rezultă că U este varietate diferenţiabilă reală de clasă C^∞ şi de dimensiune n. Folosind exemplul 8, rezultă că M este varietate diferenţiabilă de clasă C^∞ şi de dimensiune n.

<u>Exemplul 13</u>. Considerăm o mulţime deschisă $U\subset\mathbb{R}^n$ şi fie $f: U \longrightarrow E_{n+1}$ o imersie (hipersuprafaţă parametrizată în E_{n+1}). Presupunem că f este injecţie. Atunci $M = \operatorname{Im} f$ este varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

In adevăr, deoarece $f: U \longrightarrow M$ este bijecţie iar U este varietate diferenţiabilă de dimensiune n, rezultă că M este varietate diferenţiabilă cu n dimensiuni.

<u>Exemplul 14</u>. Orice spaţiu vectorial real de dimensiune finită n poate fi organizat ca o varietate diferenţiabilă separată cu n dimensiuni.

<u>Exercitiul 15</u>. Fie M şi M' două mulţimi nevide.
Fie $\mathcal{A} = \{(U_a, h_a) \mid a\in A\}$, respectiv $\mathcal{A}' = \{(U'_{a'}, h'_{a'}) \mid a'\in A'\}$, un C^k-atlas de tip $\mathbb{R}^n$ pe M, respectiv un $C^{k'}$-atlas de tip $\mathbb{R}^{n'}$ pe M'. Vom arăta că familia

$$\mathcal{A}'' = \left\{(U''_{(a,a')}, h''_{(a,a')}) \;\middle|\; (a,a')\in A\times A'\right\}$$

este $C^{k''}$-atlas de tip $\mathbb{R}^{n+n'}$ pe $M\times M'$, unde $k'' \leqslant \min(k,k')$ şi unde am notat

$$U''_{(a,a')} = U_a\times U'_{a'} \quad , \quad h''_{(a,a')} = h_a\times h'_{a'}$$

rezultă

Este evident că $U''_{(a,a')} \subset M \times M'$. Din $h''_{(a,a')}(x,x') = h''_{(a,a')}(y,y')$ rezultă $h_a(x) = h_a(y)$ şi $h'_{a'}(x') = h'_{a'}(y')$. Cum h_a şi $h'_{a'}$ sînt injective oricare ar fi $a \in A$, $a' \in A'$, rezultă $(x,x') = (y,y')$ şi deci aplicaţia

$$h''_{(a,a')} : U''_{(a,a')} \longrightarrow R^{n+n'}$$

este injectivă, $(\forall)\ (a,a') \in A'' = A \times A'$.

Vom arăta în continuare că familia A'' verifică condiţiile (A_1), (A_2), (A_3) din definiţia 1.1. Avem:

$$\bigcup_{(a,a')\in A''} U''_{(a,a')} = \bigcup_{(a,a')\in A''} (U_a \times U'_{a'}) = (\bigcup_{a\in A} U_a) \times (\bigcup_{a'\in A'} U'_{a'}) =$$

$$= M \times M'$$

Fie (a,a'), $(b,b') \in A''$. Avem:

$$h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) = (h_a \times h'_{a'})((U_a \times U'_{a'}) \cap (U_b \times U'_{b'})) =$$

$$= (h_a \times h'_{a'})((U_a \cap U_b) \times (U'_{a'} \cap U'_{b'})) =$$

$$= h_a(U_a \cap U_b) \times h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'})$$

Deoarece $h_a(U_a \cap U_b)$ este mulţime deschisă în R^n şi $h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'})$ este mulţime deschisă în $R^{n'}$ rezultă că $h''_{aa'}(U''_{aa'} \cap U''_{bb'})$ este mulţime deschisă în $R^{n+n'}$.

Fie (a,a'), $(b,b') \in A''$ cu $U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')} \neq \emptyset$. Să arătăm acum că aplicaţia

$$h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')} : h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) \longrightarrow R^{n+n'}$$

este diferenţiabilă de clasă $C^{k''}$, unde $k'' \leq \min(k, k')$. Pentru orice punct $(p,p') \in h''_{(a,a')}(U''_{(a,a')} \cap U''_{(b,b')}) = h_a(U_a \cap U_b) \times h'_{a'}(U'_{a'} \cap U'_{b'})$ avem:

$$h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')}(p,p') = h''_{(b,b')}(h_a^{-1}(p), h'^{-1}_{a'}(p')) =$$

$$= (h_b \times h'_{b'})(h_a^{-1}(p), h'^{-1}_{a'}(p')) = (h_b \circ h_a^{-1}(p), h'_{b'} \circ h'^{-1}_{a'}(p'))$$

Deoarece aplicaţia $h_b \circ h_a^{-1}$ (resp. $h'_{b'} \circ h'^{-1}_{a'}$) este diferenţiabilă de clasă C^k (resp. $C^{k'}$), rezultă că aplicaţia $h''_{(b,b')} \circ h''^{-1}_{(a,a')}$ este diferenţiabilă de clasă $C^{k''}$, unde $k'' \leqslant \min(k,k')$.

Exemplul 16. Folosind exemplul precedent obţinem că torul real cu n dimensiuni $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{\text{de n ori}}$, unde S^1 este un cerc, este o varietate analitică reală cu n dimensiuni.

Exemplul 17. Folosind exemplul 15 obţinem că cilindrul real $R \times S^1$ este o varietate analitică reală de dimensiune doi.

BIBLIOGRAFIE

1. Andreian C. - Sisteme de ecuaţii liniare. Litografia Universităţii Bucureşti (1951).
2. Armstrong M.A. - Basic Topology. Springer-Verlag, N.Y. (1983).
3. Bakelman I.I., Verner A.L., Kantor B.E. - Introducere în geometria diferenţială globală, Nauka, Moscova (1973).
4. Beju I., Soós E., Teodorescu P.P. - Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicaţii, Ed. Tehnică, Bucureşti (1977).
5. Blaschke W. - Vorlesungen über Differentialgeometrie. Band 1. Elementare Differentialgeometrie, 4. Aufl.Berlin: Springer (1945).
6. Boboc N. - Curs de analiză reală şi complexă (8 fascicole), Tip. Univ. Bucureşti (1974).
7. Boboc N. - Analiză matematică. Note de curs (1986-1987).
8. Boju V. - Geometrie diferenţială. Tipografia Universităţii din Craiova (1975).
9. Chern S.S. - Studies in global geometry and analysis. The Math. Association of America, Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall (1967).
10. Colojoară I. - Analiză matematică, E.D.P. Bucureşti (1983).
11. Cristescu R. - Analiză funcţională, E.D.P., Bucureşti (1979).
12. Cruceanu V. - Elemente de algebră liniară şi geometrie, E.D.P., Bucureşti (1973).
13. do Carmo M. - Differential Geometry of Curves and Surfaces. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1976.
14. Dobrescu A. - Geometrie diferenţială. E.D.P., Bucureşti (1963).
15. Galbură G. - Curs de geometrie, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1973).
16. Galbură G., Martin M. - Complemente la cursul de geometrie, Tipografia Universităţii din Bucureşti (1979).
17. Gheorghiev G., Miron R., Papuc D. - Geometrie analitică şi diferenţială, Vol.I,II, E.D.P., Bucureşti (1968, 1969).
18. Gheorghiev G., Oproiu V. - Geometrie diferenţială E.D.P., Bucureşti (1977).
19. Gheorghiu G.T. - Geometrie diferenţială E.D.P., Bucureşti (1964).
20. Halanay A. - Ecuaţii diferenţiale. E.D.P., Bucureşti (1972).

21. Hlavaty V. - Les courbes de la variété générale à n dimensions (1934).

22. Ianus S. - Curs de geometrie diferențială. Tipografia Universității din București (1981).

23. Ion D.I., Radu N. - Algebra, E.D.P., București (197o).

24. Jurchescu M. - Analiză reală pe varietăți. Tip.Univ.București (198o).

25. Klingenberg W. - Eine Vorlesung über Differentialgeometrie, Springer Verlag, Berlin (1973).

26. Marinescu Gh. - Analiză Matematică, II Ed.Acad.R.S.R., București (1984).

27. Martin M. - Introducere în geometria diferențială a curbelor și suprafețelor. Tipografia Universității din București (1976).

28. Mihăileanu N.N. - Geometrie analitică, proiectivă și diferențială. E.D.P., București (1971).

29. Mihăileanu N.N. - Geometrie analitică, proiectivă și diferențială. Complemente. E.D.P., București (1972).

3o. Mirică St. - Ecuații diferențiale. Tip.Univ.București, Fasc.I (1978), Fasc. II (1979).

31. Miron R. - Introducere în geometria diferențială. Vol.I, Tipografia Universității "Al.I.Cuza", Iași (1971).

32. Nicolescu L. - Geometrie diferențială. Culegere de probleme. Tipografia Universității din București (1982).

33. Nicolescu L., Pripoae G. - Culegere de probleme de geometrie diferențială. Tip.Univ.București (1988).

34. Nicolescu M. - Analiză matematică. Vol.I, Ed. Academiei, București (1958).

35. Obădeanu V. - Introducere în analiza pe varietăți. Tip.Univ. Timișoara (1985).

36. Obădeanu V. - Elemente de algebră liniară și geometrie analitică. Ed.Facla, Timișoara (1981).

37. O'Neill B. - Elementary differential geometry. Academic Press New-York and London (197o).

38. Papuc D. - Geometrie diferențială. E.D.P., București (1982).

39. Pop I. - Varietăți diferențiabile. Culegere de probleme. Tipografia Universității "Al.I.Cuza", Iași (1975).

4o. Pripoae G. - Sur les courbes de Tzitzeica. Rev.Roum.Math. Pures et Appl., XXIX no. 7(1984) 589-591.

41. Rosculeț M. - Algebră liniară, geometrie analitică și geometrie diferențială. Ed.Tehnică, București (1987).

42. Smaranda D. - Elemente de teoria locală a curbelor și suprafețelor. Tipografia Universității București (1984).

3. Stănăşilă O. - Analiză matematică. E.D.P., Bucureşti (1981).
4. Teleman K. - Introducere în geometria diferenţială. Tip.Univ. Bucureşti (1986).
5. Teleman K. - Metode şi rezultate în geometria diferenţială modernă, Ed.şt. şi encicl., Bucureşti (1979).
6. Teleman K. - Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiabile. E.D.P., Bucureşti (1964).
7. Teleman K. - Geometrie diferenţială locală şi globală. Ed.Tehnică, Bucureşti (1974).
8. Teleman K. - Curs de geometrie pentru anul III. Tipografia Universităţii Bucureşti (1969).
9. Teodorescu I. - Geometrie superioară. E.D.P., Bucureşti (197o).
o. Teodorescu I. şi Teodorescu St. - Culegere de probleme de geometrie superioară. E.D.P., Bucureşti (1975).
51. Teodorescu I. - Curs de geometrie. Tipografia Universităţii din Bucureşti (1983).
52. Turtoi A. - Geometrie. Tipografia Universităţii din Bucureşti (1982).
53. Tarină M., Sandovici P. - Curs de geometrie diferenţială. Tipografia Universităţii "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca (1974).
54. Tiţeica G. - Oeuvres. Bucarest (1941).
55. Udrişte C. - Curbe şi suprafeţe. Tipografia Institutului Politehnic Bucureşti (1974).
56. Udrişte C. - Probleme de algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială. E.D.P., Bucureşti (1976).
57. Vrănceanu G. - Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială, E.D.P., Bucureşti (1961).
58. Vrănceanu G. - Lecţii de geometrie diferenţială. E.D.P., Bucureşti (1963).
59. Yau S.T. - Seminar on Differential Geometry, Princeton Univ. Press, N.J. (1982).

Tiparul s-a efectuat sub c-da nr. 174/1995
la Tipografia Editurii Universității București

ISBN 975-575-030-9

Lei 4680