BALEA PARASCHIV

CURS SCURT DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(PENTRU CHIMIȘTI)

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1997

BALEA PARASCHIV

CURS SCURT DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (PENTRU CHIMIȘTI)

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
- 1997 -

Referenţi ştiinţifici : Conf. dr. **A. COLOJOARĂ**
Lect. dr. **GH. POTCOVARU**

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN 973 - 575 - 071 - 6

Capitolul I

ELEMENTE DE TOPOLOGIE GENERALĂ

1.Mulţimi

Cantor, în 1872, definea mulţimea ca reuniunea într-un tot a unor obiecte ale intuiţiei sau ale gîndirii noastre, bine determinate şi care se pot deosebi între ele. Obiectele din care este formată mulţimea se numesc elementele sale.

$a\in A$ este notaţia pentru "a aparţine lui A", iar neapartenenţa unui element b la o mulţime A se notează: $b\notin A$.

Mulţimile se pot nota în mai multe moduri. De exemplu:

$A = \{a$ / a are proprietatea P$\}$

$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$

Exemple de mulţimi uzuale:

$N = \{1,2,3,...\}$ mulţimea numerelor naturale

$N^* = \{0,1,2,3,...\}$

$Z = \{x/x\in N$ sau $-x\in n$ sau $x=0\}$ mulţimea numerelor întregi

$Q = \{\frac{a}{b} \ / \ a,b\in Z, b\neq 0\}$ mulţimea numerelor raţionale

$R = \{a_0, a_1a_2...a_n... \ / \ a_0\in Z$ iar a_i $(i=1,2,...)$ este unul dintre numerele 0,1,...,9, fără ca 9 să se repete de o infinitate de ori$\}$ este mulţimea numerelor reale

Φ = mulţimea vidă (mulţimea care nu conţine nici un element),

$I = (a,b) = \{x \ / \ a<x<b; a,b\in R\}$ interval deschis

$I = [a,b] = \{x \ / \ a\leq x\leq b; a,b\in R\}$ interval închis

$[a,b) = \{x \ / \ a\leq x<b; a,b\in R\}$

$(a,b] = \{x \ / \ a<x\leq b; a,b\in R\}$

Relaţia dintre mulţimi este incluziunea, care se notează $A\subset B$ dacă "A este inclusă în B" şi $A\not\subset B$ dacă "A nu este inclusă în B".

Definiţia 1.1. Mulţimea A este inclusă în mulţimea B (A este o submulţime sau o parte a mulţimii B) dacă orice element care aparţine mulţimii A, aparţine şi mulţimii B.

Proprietăţi ale incluziunii:

1. $\Phi\subset E$ oricare ar fi mulţimea E

2.$A\subset B$ şi $B\subset A \Rightarrow A = B$
3.$A\subset B$ şi $B\subset C \Rightarrow A\subset C$

Definiţia 1.2. Mulţimile A şi B sunt egale dacă sunt formate din aceleaşi elemente. Se notează: $A = B$.

Definiţia 1.3. Reuniunea a doua mulţimi A şi B este mulţimea:

$$A\cup B = \{x \mid x\in A \text{ sau } x\in b\}$$

Definiţia 1.4. Intersecţia mulţimilor A şi B este mulţimea:

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ şi } x\in B\}$$

Definiţia 1.5. Diferenţa dintre mulţimea A şi mulţimea B este:

$$A - B = \{x \mid x\in A \text{ şi } x\notin B\}$$

Definiţia 1.6. Dacă $B\subset A$ atunci $C_A B = A - B$ se numeşte complementara mulţimii B în raport cu mulţimea A.

Definiţia 1.7. Dacă E este mulţimea totală, atunci mulţimea:

$CA = E - A = \{x \mid x\notin A\}$ e complementara lui A.

Definiţia 1.8. Diferenţa simetrică a mulţimilor A şi B este mulţimea: $A\Delta B = (A - B)\cup(B - A)$

Considerăm o familie de mulţimi $\{a_i\}_{i\in I}$ unde I este o mulţime arbitrară de indici.

Definiţia 1.9. Reuniunea mulţimilor familiei $\{A_i\}_{i\in I}$ este mulţimea:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists)\, i\in I \text{ astfel incit } x\in A_i\}$$

Definiţia 1.10. Intersecţia mulţimilor familiei $\{A_i\}_{i\in I}$ este mulţimea:

$$\bigcap_{I\in i} A_i = \{\, x \mid x\in A_i \text{ pentru}(\forall)\ i\in I \,\}$$

Proprietaţi ale operaţiilor cu mulţimi:

1°. Comutativitatea: $A\cup B = B\cup A$
$A\cap B = B\cap A$

2°. Asociativitatea: $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$
$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$

3°. Distributivitatea:

$$A\bigcap(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i)$$
$$A\bigcup(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A\bigcup A_i)$$

4°. Formulele lui De Morgan:

$$C(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} CA_i$$
$$C(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} CA_i$$

Demonstraţia primelor două proprietaţi este evidentă.

Să demonstrăm prima relaţie de la distributivitate, cea de a doua demonstrîndu-se analog.

$$x\in A\bigcap(\bigcup_{i\in I}A_i)\Rightarrow x\in A \quad \text{şi} \quad x\in\bigcup_{i\in I}A_i\Rightarrow x\in A$$

$$si\ (\exists)\, i_0\in I\ astfel\ ca\ x\in A_{i_0}\Rightarrow x\in A\bigcap A_{i_0}\Rightarrow x\in\bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i)\ deci\ A\bigcap(\bigcup_{i\in I}A1)$$

$$\subset\bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i).\ x\in\bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i)\Rightarrow(\exists)\, i_0\in I\ astfel\ ca\ x\in A\bigcap A_{i_0}\Rightarrow x\in A$$

$$si\ x\in A_{i_0}\Rightarrow x\in A\ si\ x\in\bigcup_{i\in I}A_i\Rightarrow x\in A\bigcap(\bigcup_{i\in I}A_i)\ deci\ si\ \bigcup_{i\in I}(A\bigcap A_i)$$

$$\subset A\bigcap(\bigcup_{i\in I}A_i)$$

astfel egalitatea celor două mulţimi este dovedită.

Demonstrăm prima dintre relaţiile lui De Morgan, cea de a doua demonstrîndu-se la fel.

$$x\in C(\bigcup_{i\in I}A_1)\Rightarrow x\notin\bigcup_{i\in I}A_1\Rightarrow x\notin A_i\ pentru\ (\forall)\, i\in I\Rightarrow x\in CA_i\ pentru\ (\forall)\, i\in I\Rightarrow$$

$$x\in\bigcap_{i\in I}CA_i\ deci\ C(\bigcup_{i\in I}A_i)\subset\bigcap_{i\in I}CA_i.$$

$$x\in\bigcap_{i\in I}CA_i\Rightarrow x\in CA_i(\forall)\ i\in I\Rightarrow x\notin A_i(\forall)\, i\in I\Rightarrow x\notin\bigcup_{i\in I}A_i\Rightarrow x\in C(\bigcup_{i\in I}A_i)$$

$$deci\ si\ \bigcap_{i\in I}CA_i\subset C(\bigcup_{i\in I}A_i)\ adica\ C(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}CA_i.$$

<u>Definiţia 1.11.</u> Produsul cartezian al mulţimilor **A** şi **B** este mulţimea:

$$A\times B=\{(a,b)\ /\ a\in A, b\in B\}$$

adică este mulţimea tuturor perechilor ordonate (a,b) cu $a\in A$ şi $b\in B\}$.

În general, produsul cartezian al mulţimilor $X_1, X_2, \ldots, X_n$ este mulţimea:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = X_1 x X_2 x\ldots x X_n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\ /x_i\in X_i\ ,i=1,\ldots,n\}$$

Dacă $X_1=X_2=\ldots=X_n=X$, atunci se notează:

$$X^n=\{(x_1,x_2,\ldots,x_n)/x_i\in X, i=1,\ldots,n\}$$

Considerăm un şir de mulţimi $\{A_n\}_{n\in N}$.

<u>Definiţia 1.12.</u> Se numeşte limita superioara a şirului, mulţimea lim sup A_n, formată din elementele ce aparţin la o infinitate de termeni ai şirului şi se numeşte limita inferioară a şirului, mulţimea lim inf A_n, formată din elementele ce aparţin tuturor

$y\le y')$) şi $(x'\le x''$ sau $(x'=x''$ şi $y'\le y''))$ $\Rightarrow(x\le x'$ şi $x'\le x'')$ sau $(x\le x'$ şi $(x'=x''$ şi $y'\le y''))$ sau $((x=x'$ şi $y\le y')$ şi $x'\le x'')$ sau $((x=x'$ si $y\le y')$ şi $(x'=x''$ si $y'\le y''))\Rightarrow x\le x''$ sau $(x=x''$ şi $y\le y'')\Rightarrow$

$\Re$ $((x,y),(x'',y''))\in \Re$.

3. Spaţii liniare (vectoriale).

Definiţia 1.29. O mulţime X pentru care este dată o operaţie internă care asociază fiecărei perechi $(x,y)\in X\times X$ elementul notat $x+y\in X$ şi o operaţie externă faţa de corpul K care asociază fiecărei perechi $(a,x)\in K\times X$ elementul notat $ax\in X$ se numeşte spaţiu vectorial (sau liniar) peste corpul K, daca verifică următoarele proprietaţi:

1°. $x+y = y+x$ pentru $(\forall)x,y\in X$,
2°. $(x+y)+z = x+(y+z)$ pentru $(\forall)x,y,z\in X$,
3°. $(\exists)0\in X$ astfel ca $x+0=x$ pentru $(\forall)x\in X$,
4°. Pentru $(\forall)x\in X$, $(\exists)-x\in X$ astfel ca $x+(-x)=0$,
5°. $a(x+y) = ax+ay$ pentru $(\forall)a\in K$ şi $(\forall)x,y\in X$,
6°. $(a+b)x = ax+bx$ pentru $(\forall)a,b\in K$ şi $(\forall)x\in X$,
7°. $a(bx) = (ab)x$ pentru $(\forall)a,b$ K şi $(\forall)x\in X$,
8°. $(\exists)1\in K$ astfel ca $1x = x$ pentru $(\forall)x\in X$.

Elementele spaţiului vectorial X se numesc vectori iar elementele corpului K se numesc scalari.

De exemplu, fie M o mulţime nevidă şi $F_M = \{f\ /\ f : M \to R\}$ Mulţimea F_M este spaţiu vectorial peste corpul R faţa de operaţia internă de adunare a funcţiilor:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \text{ pentru } (\forall)f,g\in F_M,\ x\in M,$$

şi de operaţtia externă de înmulţire a funcţiilor cu scalari:

$$(af)(x) = af(x) \text{ pentru } (\forall)a\in R,\ (\forall)f\in F_M,\ x\in M.$$

Se verifică uşor cele opt proprietaţi.

Definiţia 1.30. Se numeşte spaţiu vectorial normat, un spaţiu vectorial X peste corpul K pe care se defineşte o aplicaţie care asociază fiecărui element $x\in X$ un număr real numit norma lui x şi notat $||x||$ cu următoarele proprietaţi:

1. $||x||\ge 0$ pentru $(\forall)x\in X$; $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $||x+y||\le||x||+||y||$ pentru $(\forall)x,y\in X$

3. $||ax|| = |a|\ ||x||$ pentru $(\forall)a\in K$ şi $x\in X$.

Exemple de spaţii vectoriale normate: R cu norma $||x|| = |x|$ şi C cu norma $||x|| = |x|$.

Fie X un spaţiu vectorial normat şi $x_0\in X$.

Definiţia 1.31. Sfera deschisă cu centrul x_0 şi de raza r este mulţimea:

$$S_r(x_0) = \{x\ /\ x\in X \text{ astfel ca } ||x-x_0||\le r\}$$

Definiţia 1.32. $V\subset X$ este o vecinătate a lui x_0 dacă există o sferă deschisă $S_r(x_0)\subset V$.

Definiţia 1.33. Fie $G\subset X$ şi $x_0\in G$. Spunem că x_0 este punct interior al lui G dacă există o vecinătate V a lui x_0 conţinută în G. x_0 este punct exterior al lui G dacă este punct interior al mulţimii X-G.

Definiţia 1.34. O mulţime $G \subset X$ se numeşte mulţime deschisă dacă orice punct al ei este punct interior. Mulţimea $F \subset X$ se numeşte mulţime închisă dacă CF este deschisă.

Definiţia 1.35. Fie $G \subset X$. Un punct $x_0 \in X$ se numeşte punct de acumulare al lui G dacă, oricare ar fi vecinatatea V a lui x_0, rezultă:

$$V \cap (G - \{x_0\}) \neq \Phi$$

$G' = \{x \ / \ x$ punct de acumulare al lui $G\}$ se numeşte mulţimea derivată a lui G iar mulţimea $\overline{G} = G' \cup G$ se numeşte închiderea lui G.

Definiţia 1.36. Fie $G \subset X$. Un punct $x_0 \in X$ se numeşte punct frontieră al lui G dacă orice vecinătate a lui x_0 conţine atît puncte din G cît şi puncte din CG. Mulţimea punctelor frontieră se numeşte frontiera lui G si se notează ∂G.

Propoziţia 1.1. $\overline{G} = \overline{G \bigcup \partial G}.$

Definiţia 1.37. Un punct $x_0 \in G, G \subset X$, se numeşte punct izolat al mulţimii G dacă există o vecinatate V a lui x_0 astfel ca $V \cap G = \{x_0\}$. O mulţime închisă G care nu are puncte izolate se numeşte mulţime perfectă.

Definiţia 1.38. Fie X o mulţime oarecare. Spunem că pe X s-a definit o topologie dacă se da o familie τ de părţi ale lui X cu proprietaţile:

1. X si $\Phi \in \tau$

2. Pentru orice $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i \in \tau,$

3. Pentru orice $G_1, G_2, \ldots, G_n \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \tau.$

Cuplul (X, τ) se numeşte spaţiu topologic iar mulţimile care aparţin lui τ sunt mulţimi deschise.

Definiţia 1.39. Fie X un spatiu vectorial peste corpul K. Se numeşte produs scalar pe X o aplicaţie care asociază perechii $(x,y) \in X x X$ un element notat $<x,y> \in K$ şi are urmatoarele proprietaţi:

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $<x_1 \oplus x_2, y> = <x_1, y> + <x_2, y>$
3. $<ax, y> = a<x, y>$, $a \in K$
4. $<x, x> > 0$ pentru $(\forall) x \neq 0$

Propoziţia 1.2. Dacă pe X este definit un produs scalar, atunci X este un spaţiu normat cu norma $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Definiţia 1.40. Fie X o mulţime oarecare. Se numeşte distanţa pe X o aplicaţie $\rho : X x X \to R$ cu proprietaţile:

1. $\rho(x,y) \geq 0 \ (\forall) x, y \in X;\ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

termenilor şirului cu excepţia unui număr finit de termeni.

Definiţia 1.13. Şirul de mulţimi $\{A_n\}_{n\in N}$. se numeşte convergent dacă lim sup A_n = lim inf A_n.

Deşi toate ştiinţele operează cu mulţimi, nu este înca unanim acceptată o definiţie riguroasă a noţiunii de mulţime. Se fac însă permanent încercari atît pentru definirea conceptului de mulţime, cît şi pentru extinderea acestei noţiuni. Astfel, in statistica matematica se utilizează conceptul de populaţie ([ ]).

O populaţie se defineşte:

$$A=\{x_1^{n_i}\in A \ / \ i=1,\ldots,p; n_i, p\in N\}$$

şi reprezintă o grupare formată din unul sau mai multe tipuri distincte de elemente, elementele fiecărui tip fiind identice din punctul de vedere care caracterizează populaţia respectivă.

2. Relaţii si funcţii

Definiţia 1.14. O relaţie între mulţimile X şi Y este o submulţime a produsului cartezian X x Y.

Vom nota faptul ca $x\in X$ este în relaţia $\Re$ cu $y\in Y$ astfel: $(x,y)\in\Re$ sau $x\Re y$.

Definiţia 1.15. Mulţimea de definiţie (domeniul) a relaţiei $\Re$ este:

$$\text{dom } \Re = \{x \ / \ x\in X \text{ şi } (\exists)y\in Y \text{ astfel ca } x\Re y\}$$

Definiţia 1.16. Mulţimea valorilor (codomeniul) relaţiei $\Re$ este:

$$\text{codom } \Re = \{y \ / \ y\in Y \text{ şi } (\exists)x\in X \text{ astfel ca } x\Re y\}$$

Considerăm relaţia $\Re$ între mulţimile X şi Y şi mulţimile $A\subset X$ şi $B\subset Y$. Imaginea mulţimii A prin $\Re$ este mulţimea:

$$\Re(A) = \{y \ / \ y\in Y \text{ şi } (\exists)x\in A \text{ astfel ca } x\Re y\}$$

iar imaginea inversă a mulţimii B prin $\Re$ este mulţimea:

$$\Re^{-1}(B) = \{x \ / \ x\in X \text{ şi } (\exists)y\in B \text{ astfel ca } x\Re y\}$$

Definiţia 1.17. Inversa relaţiei $\Re$, între X şi Y, este relaţia $\Re^{-1}$ între Y şi X definită astfel:

$$\Re^{-1} = \{(y,x) \ / \ (x,y)\in\Re\}$$

O relaţie între X si X se numeşte relaţie în X.

Relaţia identică pe X este: $\Delta = i_X = \{(x,x) \ / \ x\in X\}$

Definiţia 1.18. O relaţie $\Re$ in X se numeşte relaţie de echivalentă dacă are proprietaţile:

1°. $(x,x)\in\Re$ $(\forall)x\in X$ (reflexivitate)
2°. $(x,y)\in\Re \rightarrow (y,x)\in\Re$ (simetrie)
3°. $(x,y)\in\Re$ şi $(y,z)\in\Re \rightarrow (x,z)\in\Re$ (tranzitivitate)

Definiţia 1.19. Clasa de echivalenţa în raport cu $\Re$ a unui element $x\in X$ este mulţimea:

$$[x] = \{y \ / \ y\in X, x\Re y\}$$

Definiţia 1.20. Mulţimea claselor de echivalenţă in raport cu $\Re$

ale mulţimii X se numeşte cît (mulţime factor) şi se notează:

$$X/\Re$$

Definiţia 1.21. O relaţie $\prec$ in mulţimea X este o relaţie de ordine (sau o ordine) dacă este tranzitivă. Cuplul $(X,\prec)$ se numeşte mulţime ordonată.

Definiţia 1.22. Fie $A\subset(X,\prec)$. Un element $x\in X$ se numeşte majorant al mulţimii A, dacă pentru orice $y\in A$ rezultă $y\prec x$ sau $y=x$. Notînd cu A_d mulţimea majoranţilor mulţimii A, spunem ca A este majoranta dacă $A_d \neq \Phi$.

Analog, un element $x\in X$ se numeşte minorant al mulţimii $A\subset X$, dacă pentru orice $y\in A$ avem $x\prec y$ sau $y=x$. Notînd cu A_s mulţimea minoranţilor, spunem că A este minorantă în $(X,\prec)$ dacă $A_s \neq \Phi$.

Definiţia 1.23. Dacă mulţimea A este majorată în $(X,\prec)$ şi A_d admite un minorant d_A astfel ca $d_A\in A_d$, atunci elementul d_A se numeşte un supremum al mulţimii A în $(X,\prec)$. Dacă mulţimea A este minorată în $(X,\prec)$ şi A_s admite un majorant s_A astfel ca $s_A\in A_s$, atunci elementul s_A se numeşte un infimum al mulţimii A în $(X,\prec)$.

Definiţia 1.24. O relaţie f între X şi Y este o funcţie (sau aplicattie) definită pe X cu valori în Y dacă:

1°. dom f = X

2°. $(x,y)\in f$ şi $(x,z)\in f \Rightarrow y=z$

Notăm: $f : X \rightarrow Y$

Elementul $y\in Y$ care se află în relaţia f cu $x\in X$ se numeşte valoarea funcţiei f în x şi se notează $y=f(x)$.

Definiţia 1.25. O funcţie $f : X \rightarrow Y$ este injecţie (aplicaţie injectivă) dacă pentru $(\forall) x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2$ rezultă $f(x_1)\neq f(x_2)$

Definiţia 1.26. Pentru orice $y\in Y$, există $x\in X$ astfel ca $f(x)=y$.

Definiţia 1.27. Funcţia $f : X \rightarrow Y$ este bijecţie dacă este injecţie si surjecţie.

Definiţia 1.28. O mulţime A se numeşte numărabila dacă există o bijecţie a lui A pe N.

Exemple de mulţimi numărabile: N, Z, Q; R nu este numărabilă.

Exerciţii.

1. Să se spună dacă relaţia $\Re$ definită pe R astfel:

$$(x,y)\in\Re \Leftrightarrow \sin^2x + \cos^2y = 1,$$

este o relaţie de echivalenţă.

Se verifică proprietaţile care definesc relaţia de echivalenţa:

1°. $(x,x)\in\Re \Rightarrow \sin^2x + \cos^2x = 1$, formula adevarată pentru orice $x\in R$ deci relaţia $\Re$ este reflexivă.

2°. $(x,y)\in\Re \Rightarrow \sin^2x + \cos^2y = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2x + 1 - \sin^2y = 1 \Rightarrow \sin^2y + \cos^2x = 1 \Rightarrow (y,x)\in\Re$ deci relaţia $\Re$ este simetrică.

3°. $(x,y)\in\Re$ şi $(y,z)\in\Re \Rightarrow \sin^2x+\cos^2y=1$ şi $\sin^2y+\cos^2z=1 \Rightarrow$
$\sin^2x+\cos^2y+\sin^2y+\cos^2z=2 \Rightarrow \sin^2x+\cos^2z=1$ deci relaţia $\Re$ este si tranzitivă, adică $\Re$(relaţia) este o relaţie de echivalenţă.

2. Să se arate că relaţia $\Re$ în R^2 definită:

$$((x,y),(x',y'))\in \Re \Leftrightarrow x \leq x' \text{ sau } (x=x' \text{ şi } y\leq y')$$

numită ordinea lexicografică, este o relaţie de ordine.

Se verifică tranzitivitatea relaţiei $\Re$:

$((x,y),(x',y'))\in \Re$ şi $((x',y'),(x'',y''))\in \Re \Rightarrow$ ($x\leq x'$ sau ($x=x'$ şi

2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ $(\forall)x,y\in X$
3. $\rho(x,y) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ $(\forall)x,y,z\in X$ (inegalitatea triunghiului)

Cuplul (x,ρ) se numeşte spaţiu metric.

Propoziţia 1.3. Orice spaţiu normat este spaţiu metric cu distanţa $\rho(x,y) = ||x-y||$.

Definiţia 1.41. Spaţiul aritmetic n-dimensional real R^n se defineşte:

$$R^n = \{x \;/\; x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}$$

şi este spaţiu vectorial peste R faţă de operaţiile:

$$x + y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) \quad (\forall)x=(x_1, \ldots, x_n), y=(y_1, \ldots, y_n)\in R^n$$

$$ax = (ax_1, \ldots, ax_n) \quad (\forall)a\in R, x = (x_1, \ldots, x_n)\in R^n$$

Produsul scalar pe R^n se defineşte:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

R^n este spaţiu normat cu norma:

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

R^n este spaţiu metric cu distanţa:

$$\rho(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i-1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Cazurile particulare R^2 şi R^3 ale lui R^n sunt cunoscute şi se folosesc frecvent în analiză, geometrie analitică, astronomie, mecanică.

$R^2 = \{(x,y) \;/\; x,y\in R\}$ reprezintă mulţimea vectorilor de poziţie ai punctelor din plan (Fig.1.1.). Pentru a studia vectorii de poziţie ai punctelor din plan, este suficient să cunoaştem numerele reale x,y care determină poziţia punctului M în plan şi care se

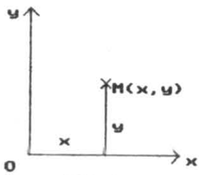


FIG 1.1

definesc în raport cu un sistem de referinţă şi se numesc coordonatele punctului M (dealtfel x,y se numesc şi coordonatele vectorului de poziţie $\overline{OM}$).

Coordonatele carteziene ale punctului M în plan sunt abscisa (x) şi ordonata (y) care se definesc faţa de sistemul de referinţă x0y (Fig, 1.1.) format din axele de coordonate 0x, 0y şi originea 0.

Reprezentarea curbelor plane în coordonate carteziene şi proprietaţile lor sunt cunoscute.

Se pot însa defini şi alte sisteme de coordonate în plan.

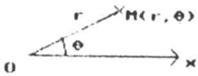


FIG 1.2

Astfel, sistemul de coordonate în plan (Fig.1.2.) numite coordonate polare are ca sistem de referinta axa polara (ox) si polul (o). Coordonatele polare ale punctului M sunt: unghiul polar (θ) şi raza polara (r). Reprezentarea curbelor plane în coordonate polare şi studiul proprietaţilor lor se face ca si la cele în coordonate carteziene, ţinînd cont însă de semnificaţia deosebită a coordonatelor. De exemplu, pentru reprezentarea curbei în coordonatele polare:

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$

observăm că variaţia funcţiei este:

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
r	$4 \searrow$	$2 \searrow$	$0 \nearrow$	$2 \nearrow$	4

Graficul funcţiei este reprezentat în Fig.1.3.

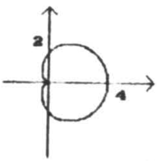


FIG 1.3

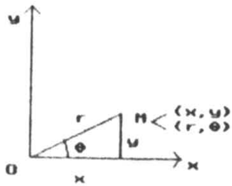


FIG 1.4

Legatura dintre coordonatele polare în plan şi coordonatele carteziene ortogonale în plan este dată de formulele:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

care se deduc imediat din Fig.1.4.

$R^3 = \{(x,y,z) \ / \ x,y,z\in R\}$ reprezintă mulţimea vectorilor de poziţie ai punctelor din spaţiu. Este suficient însă să cunoastem poziţia punctelor în spaţiu, care este determinată de trei coordonate ce se definesc în raport cu un sistem de referinţă.

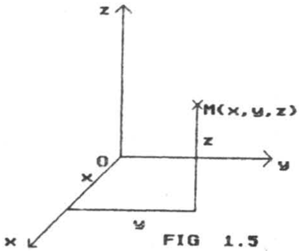


FIG 1.5

Sistemul de coordonate carteziene (ortogonale) în spaţiu (Fig. 1.5.) are sistemul de referinţă format din axele Ox, Oy Oz şi originea O.

Coordonatele carteziene ale punctului M în spaţiu sunt: abscisa (x), ordonata (y) şi cota (z).

Asemanător, se pot defini şi alte sisteme de coordonare în spaţiu.

Sistemul de coordonate polare în spaţiu (sferice) are ca sistem de referinţa polul O, axa Oz şi planul xOz. Coordonatele polare ale lui M sunt: raza polară (r) şi două unghiuri, respectiv unghiul θ (latitudinea) dintre OM şi Oz şi unghiul ϕ (longitudinea) dintre planul MOz şi planul xOz (Fig.1.6.).

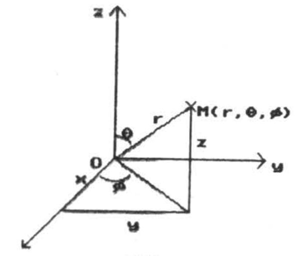


FIG 1.6

Legatura dintre coordonatele polare în spaţiu şi cele carteziene (ortogonale) în spaţiu se stabileşte prin relaţiile:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

care se deduc uşor (Fig. 1.6.).

Sistemul de coordonate cilindrice în spaţiu (Fig.1.7.) are ca sistem de referinţa : polul O, axaOx şi planul xOy. Coordonatele cilindrice ale punctului M sunt: raza polara (r), unghiul polar (θ) şi cota (h). Legatura dintre coordonatele cilindrice şi coordonatele carteziene ortogonale în spaţiu este data de următoarele relaţii:

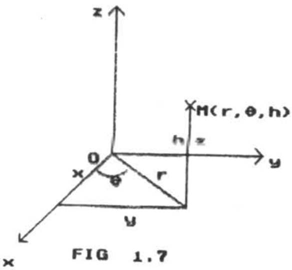


FIG 1.7

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \\ z = h \end{cases}$$

care se stabilesc uşor din Fig. 1.7.

<u>Definiţia 1.42.</u> Fie X un spaţiu vectorial peste corpul K. Vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ se numesc liniar independenţi (iar mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se numeşte liniat independentă) dacă relaţia:

este adevarată numai dacă: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

În caz contrar, vectorii $x_1, x_2, \ldots x_n$ se numesc liniar dependenţi iar mulţimea $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ liniar dependentă.

Exemplu. Considerăm vectorii: $x_1 = (1,0,0), x_2 = (1,1,0), x_3 = (1,1,1)$ din R^3. Să vedem dacă ei sunt liniar independenţi.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$
$$a_1(1,0,0)+a_2(1,1,0)+a_3(1,1,1) = (0,0,0)$$
$$(a_1+a_2+a_3, a_2+a_3, a_3) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3 = 0 \\ a_2+a_3 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ deci sistemul admite numai soluţia banală: $a_1=a_2=a_3=0$ şi prin urmare vectorii x_1, x_2, x_3 sunt liniar independenţi.

Definiţia 1.43. Spaţiul vectorial X are dimensiunea n dacă el conţine o mulţime liniar independentă formată din n elemente, dar nu conţine nici o mulţime liniar independentă formată din n+1 elemente.

Spaţiul vectorial X este infinit dimensional dacă el conţine submulţimi infinite liniar independente.

Definiţia 1.44. Submultimea liniar independentă $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a lui X se numeşte bază dacă orice vector $x \in X$ se poate scrie ca o combinaţie liniară a elementelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adică există $a_1, a_2, \ldots, a_n$ din corpul K astfel încît:

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Exemplu. Considerăm vectorii: $e_1=(1,0,\ldots,0), e_2=(0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n=(0,0,\ldots,0,I)$ din R^n. Stabilim ca mulţimea $e_1, e_2, \ldots, e_n$ este bază în R^n.

$$a_1e_1+ a_2e_2+ \ldots + a_ne_n = 0$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (0,0,\ldots,0)$$ relaţie adevărată numai dacă: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ deci vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sunt liniar independenţi.

Orice vector $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se poate scrie:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \ , \ x_1, \ldots, x_n \in R$$

deci ca o combinaţie liniară de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Mulţimea $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ formează deci o bază a spaţiului vectorial R^n şi se numeşte baza canonică a lui R^n.

Definiţia 1.45. Fie X un spaţiu vectorial pe care este definit un produs scalar. O bază $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ a lui X se numeşte ortonormată dacă:

$$\langle x_i, y_j \rangle = \begin{cases} 1 \ daca \ i = j \\ 0 \ daca \ i \neq j \end{cases}$$

Exemplu. Baza canonică a spaţiului vectorial R^n este ortonormată deoarece:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 \; daca \; i = j \\ 0 \; daca \; i \neq j \end{cases}$$

Definiţia 1.46. Se numeşte acoperire liniara a unei mulţimi $A \subset X$ (sau spaţiul generat de A), X fiind spaţiu vectorial peste corpul K, mulţimea tuturor elementelor de forma:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

cu $x_i \in A$, $a_i \in K$ şi $n \in N$.

Capitolul II

ŞIRURI ŞI SERII

1. Mulţimi liniare

Def.2.1. Mulţimea liniara este o mulţime de numere reale, adică o mulţime care se poate reprezenta prin puncte pe o dreapta.
Def.2.2. Vom numi vecinatate a unui punct x_0 orice interval deschis (a,b) care-l conţine pe x_0.
Def.2.3. Se numeşte margine superioara a unei mulţimi liniare A cel mai mic majorant, adică un numar M cu următoarele proprietaţi:

1) $a \le M$ pentru orice $a \in A$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$, există un numar $b \in A$ astfel ca $b > M-\epsilon$, numarul b putînd fi chiar M, dacă $M \in A$ (orice vecinatate a lui M conţine puncte ale mulţimii A).

Def.2.4. Se numeşte margine inferioară a unei mulţimi liniare A cel mai mare minorant, adică un număr m cu proprietaţile:

1) $a \ge m$ pentru orice $a \in A$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$, există un număr $b \in A$ astfel ca $b < m+\epsilon$, numărul b putînd fi chiar m, daca $m \in A$ (în orice vecinatate a lui m există puncte ale mulţimii A).

Def.2.5. Se numeşte limita superioara a mulţimii A şi se notează:

$L = \overline{\lim}\, A$ = lim sup A, marginea superioară a mulţimii derivate A'.

Def.2.6. Se numeşte limita inferioară a mulţimii A şi se notează:

$l = \underline{\lim}\, A$ = lim inf A, marginea inferioară a mulţimii derivate A'.

Def.2.7. O mulţime majorată şi minorată se numeşte mulţime mărginită.
Def.2.8. Se numeşte punct aderent al mulţimii A punctul $x_0 \in R$ pentru care orice vecinătate a sa conţine cel puţin un punct din A (dacă $x_0 \in A$, acel punct poate fi numai x_0).
Def.2.9. Se numeşte mulţime închisă o mulţime A care îşi conţine toate punctele aderente.
Def.2.10. O mulţime A de numere reale se numeşte mulţime compactă dacă este închisă şi mărginită.

O mulţime A care nu este mărginită inferior, spunem că este mărginită inferior de $-\infty$.

O mulţime A care nu este mărginită superior, spunem că este mărginită superior de $+\infty$.

$-\infty$ şi $+\infty$ sunt simboluri, nu sunt numere reale.

Def.2.11. Se numeşte dreaptă reala închisă mulţimea:

$$\overline{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$$

iar $-\infty$ si $+\infty$ sunt punctele ei de la infinit.

Def.2.12. Se numeşte şir de numere reale o funcţie definită pe **N** cu valori în **R** şi se notează: $(a_n)n\in N$ sau (a_n).
$(a_n)\in N$ sau (a_n).
Def.2.13. Un şir de numere reale (a_n) este mărginit dacă este mărginit superior şi inferior, deci dacă există două numere m şi M, $m\le a_n\le M$, pentru orice $n\in N$.
Def.2.14. Un şir de numere reale (a_n) este nemărginit dacă oricare ar fi numarul $B>0$, există astfel încît $|an|>B$.
Def.2.15. Un şir se numeşte monoton dacă este crescător $(a_n\le a_{n+1})$, strict crescător $(a_n<a_{n+1})$, descrescător $(a_n\ge a_{n+1})$ sau strict descrescător $(a_n>a_{n+1})$.
Def.2.16.1 Şirul $(a_n)_{n\in N}$ se numeşte convergent către a dacă pentru $(\forall)\epsilon>0$, $(\exists)$ un rang $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $(\forall)$ $n\ge N(\epsilon)$ să avem $|a_n-a|<\epsilon$.

Notăm : $a_n\to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$

Def.2.16.2 Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent către a dacă în afara oricarei vecinataţi a lui a se află cel mult un număr finit de termeni ai şirului.
Def.2.16.3 Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent către a dacă l = L=a.
Def.2.17. Se numeşte şir divergent un şir care nu este convergent.
Lema1.(Lema lui Cezaro). Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un şir mărginit de numere reale, atunci $(a_n)_{n\in N}$ conţine un subşir convergent.
Dem : $(a_n)_{n\in N}$ mărginit, deci $(\exists)\alpha,\beta\in R$ astfel ca $\alpha\le a_n\le\beta$ oricare ar fi $n\in N$. Luam $c=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ si fie $[\alpha_1,\beta_1]$ acela dintre intervalele $[\alpha,c]$ sau $[c,\beta]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului (a_n). Avem:

$\alpha\le\alpha_1\le\beta_1\le\beta$; $\beta_1-\alpha_1=\dfrac{l}{2}$ unde $l=\beta-\alpha$. Luăm $c_1=\dfrac{\alpha_1+\beta_1}{2}$ şi fie $[\alpha_2,\beta_2]$ acela dintre intervalele $[\alpha_1,c_1]$ sau $[c_1,\beta_1]$ care conţine o infinitate de termeni. Se continuă acest procedeu şi să presupunem că am găsit un interval $[\alpha_n,\beta_n]$ care conţine o infinitate de termeni ai şirului (a_n) şi astfel ca $\beta_n-\alpha_n=\dfrac{l}{2^n}$.

În acest fel se obţin două şiruri (α_n) şi (β_n) cu proprietaţile:
1. $\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha_3\le\ldots\le\alpha_n\le\ldots\le\beta_n\le\ldots\le\beta_1$

2. $\beta_n-\alpha_n=\dfrac{l}{2^n}$

3. Fiecare interval $[\alpha_n,\beta_n]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului (a_n).

Şirurile (α_n) si (β_n) sunt convergente către aceeaşi limită. Într-adevăr, dacă a şi a' sunt limitele celor două şiruri, atunci:

$\alpha_n \le a \le a' \le \beta_n$

deci: $0 \le a'-a \le \beta_n-\alpha_n=\frac{1}{2^n}$ şi pentru n suficient de mare,

$|a'-a| \le \frac{1}{2^n} < \epsilon$ cu ϵ arbitrar deci a=a'. Să construim subşirul convergent către a.

Alegem: $a_{n_1} \in [\alpha_1, \beta_1]$ (acesta există deoarece $[\alpha_1, \beta_1]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului). Deoarece $[\alpha_2, \beta_2]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului şi $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$, $(\exists)\, a_{n_2}$, cu $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ şi $n_1 < n_2$ ş.a.m.d. Să presupunem că am ales un termen a_{n_p} al şirului (a_n) astfel ca $a_{n_p} \in [\alpha_p, \beta_p]$. Atunci există $a_{n_{p+1}}$ cu $n_p < n_{p+1}$ astfel ca $a_{n_{p+1}} \in [\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}]$.

Din construcţia şirului (a_{n_p}) rezultă că:

$$|a_{n_p}-a| < \beta_p-\alpha_p=\frac{1}{2p} \to 0 \text{ deci } a_{n_p} \to a.$$

<u>Def.2.18.</u> Şirul $(a_n)_{n\in N}$ de numere reale se numeşte <u>şir Gauchy</u> (sau şir fundamental) dacă pentru $(\forall)\, \epsilon>0$, $(\exists) N(\epsilon)$ astfel încît pentru orice $n,m \ge N(\epsilon)$ să avem:

$$|a_n-a_m| < \epsilon.$$

<u>Lema 2.2.</u> Orice şir Cauchy de numere reale este mărginit.

<u>Dem:</u> Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este şir Cauchy, $(\exists)\, n_0 \in N$ astfel ca pentru $n \ge n_0$ să avem $|a_n-a_{n_0}|<1$ şi deci : $|a_n| < 1+|a_{n_0}|, n \ge n_0$

Atunci: $|a_n| \le 1+\max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_{0-1}}|, |a_{n_0}|\}$

<u>Lema 2.3.</u> **Dacă $(a_n)n\in N$ este un şir Cauchy de numere reale şi dacă** un subşir (a_{n_p}) al sau converge către a, atunci (a_n) converge către a.

(a_n) şir Cauchy deci pentru $(\forall)\, \epsilon>0$ există $N_1(\epsilon)$ astfel ca pentru $(\forall)$ $n,m \ge N_1(\epsilon)$ rezultă $|a_n-a_m| < \frac{\epsilon}{2}$.

Subşirul (a_{n_p}) converge către a, deci pentru $(\forall)\, \epsilon>0$ există

$N_2(\epsilon)$ astfel ca pentru $(\forall)$ $p \geq N_2(E)$ să avem $|a_{n_p}-a|<\frac{\epsilon}{2}$.

Fie $\epsilon>0$ arbitrar şi $N(\epsilon)=\max\{N_1(\epsilon),N_2(\epsilon)\}$ şi să luăm p astfel ca $p\geq N(\epsilon)$ şi $n_p \geq N(\epsilon)$.Atunci:

$$|a_n-a|\leq|a_n-a_{n_p}|+|a_{n_p}-a|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon \text{ pentru } n\geq N(\epsilon)$$

deci $a_n \to a$.

<u>Teorema 2.2 (Criteriul lui Cauchy).</u> Şirul de numere reale $(a_n)n\in N$ este convergent dacă şi numai dacă este şir Cauchy.

<u>Dem</u> :<u>Necesitatea.</u> $(a_n)_{n\in N}$ şir convergent deci pentru $(\forall)\epsilon>0$, $(\exists)N(\epsilon)$, astfel ca pentru $(\forall)n,m\geq N(\epsilon)$ să avem $|a_n-a|<\frac{\epsilon}{2}$ *si* $|a_m-a|<\frac{\epsilon}{2}$.

Deci pentru $\epsilon>0$ arbitrar, $(\exists)$ $N(\epsilon)$ astfel ca pentru $(\forall)n,m\geq N(\epsilon)$ să avem $|a_n-a_m|\leq|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$ adică şirul (a_n) este Cauchy.

<u>Suficienţa.</u> Dacă şirul (a_n) este şir Cauchy,rezultă din Lema 2.2 că este mărginit;din Lema lui Cezaro rezultă că (a_n) conţine un subşir convergent iar din Lema 2.3 rezultă că şi şirul (a_n) este convergent.

<u>Criteriul lui Cauchy</u> poate fi enunţat şi astfel:Condiţia necesară şi suficienţa ca şirul $(a_n)_{n\in N}$ să fie convergent este ca pentru $(\forall)\epsilon>0$,să existe $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $(\forall)n\geq N(\epsilon)$ şi orice $p\in N$ să avem $|a_{n+p}-a_n|<\epsilon$.

<u>Exemple</u> :

1. Să arătam că şirul cu termenul general:

$$a_n=\frac{\sin x}{5}+\frac{\sin 2x}{5^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{5^n}$$

este convergent.

Fie

$$\epsilon>0;\ |a_{n+p}-a_n|=\left|\frac{\sin(n+1)x}{5^{n+1}}+\ldots+\frac{\sin(n+p)x}{5^{n+p}}\right|\leq\left|\frac{\sin(n+1)x}{5^{n+1}}\right|+\ldots$$

$$\ldots+\left|\frac{\sin(n+p)x}{5^{n+p}}\right|\leq\frac{1}{5^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{5^{n+1}}=\frac{1}{5^{n+1}}\left(1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^{p-1}}\right)=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{5^{n+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^p}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1-\frac{1}{5^p}}{4.5^n}<\frac{1}{4.5^n}$$

deci: $\frac{1}{4.5^n} < \epsilon \to 5^n > \frac{1}{4\epsilon}; n\lg 5 > \lg\frac{1}{4\epsilon}; n > \frac{\lg\frac{1}{4\epsilon}}{\lg 5}$

şi fie $N(\epsilon) = \left[\frac{\lg\frac{1}{4\epsilon}}{\lg 5}\right]$

2. Să arătam că şirul cu termenul general:

$$a_n = \frac{7}{5} + \frac{8}{7} + \frac{9}{9} + \frac{10}{11} + \ldots + \frac{7+n}{2n+5}$$

este divergent.

Fie

$$\epsilon = \frac{1}{2} \text{ si } p = n$$

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{8+n}{2n+7} + \ldots + \frac{7+2n}{4n+5} > \frac{7+2n}{4n+5} > \frac{1}{2} \text{ pentru orice } n \in N,$$

3. Să arătam că şirul cu termenul general

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

este convergent.

Fie $\epsilon > 0; |a_{n+p} - a_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{1}{n+p}\right| < \frac{1}{n+1}$

deoarece $-\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} < 0; -\frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} < 0, \ldots; \frac{1}{n+1} < \epsilon; n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}; N(\epsilon) = \left[\frac{1-\epsilon}{\epsilon}\right]$

4. Să arătam că şirul cu termenul general

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

este divergent

Fie $\epsilon = \frac{1}{2}; p = n$

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \text{ pentruoricen} \in N$$

Considerăm şirul de numere reale: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$

Def.2.19. Se numeşte serie suma cu o infinitate de termeni $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ care se notează $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Şirul cu termenul general $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ se numeşte şirul sumelor parţiale.

Def.2.20. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă şirul (s_n) este convergent. Dacă şirul (s_n) este divergent, seria este divergentă.

Dacă şirul (s_n) converge către s atunci vom pune, prin definiţie, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$, s numindu-se suma seriei.

Exemple : 1) Seria $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ (numită seria armonică) este divergentă deoarece şirul sumelor parţiale este divergent.

2) Seria $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ (numită seria armonică alternată) este convergentă deoarece şirul sumelor parţiale este convergent.

Teorema 2.3. (Criteriul general al lui Cauchy). Condiţia necesară şi suficienţa ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ să fie convergentă este ca pentru $(\forall)\ \epsilon>0$, să existe un rang $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $(\forall)\ n \geq N(\epsilon)$ şi $(\forall)\ p \geq 1$, $p \in N$ să avem:

$$|u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}|<\epsilon$$

Demonstratia este imediată observînd că:

$$u_{n+1}+\ldots+u_{n+p}=s_{n+p}-s_n$$

adică şirul (s_n) este şir Cauchy.

Teorema 2.4. Condiţia necesară (dar nu şi suficientă) ca seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ să fie convergentă este ca $\lim_{n\to\infty} u_n=0$.

Demonstrație. Se pune p=1 în criteriul general al lui Cauchy.

Exemplu : Seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă dacă $|q|<1$ și divergentă dacă $|q|\geq 1$. Dacă $|q|\geq 1$, termenul general nu tinde la zero, deci seria e divergentă. Dacă $|q|<1$. $s_n=1+q+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$;

$s=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$ deci seria e convergentă

și are suma $\frac{1}{1-q}$.

3.1. Serii cu termeni pozitivi

Def.2.21. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ se numește serie cu termeni pozitivi dacă, începînd de la un rang $N_1\in N$, toți termenii u_n, $n\geq N_1$, sunt strict pozitivi.

Vom da în continuare criterii de convergentă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 2.5 (Criteriul monotoniei). Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale (s_n) este mărginit.

Demonstrația se bazează pe teorema : orice șir monoton și mărginit este convergent.

Teorema 2.6 (Primul criteriu al comparației). Fie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există un rang $N_0\in N$ astfel încît pentru orice $n\geq N_0$, $u_n\leq v_n$ atunci:

a) - dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă

b) - dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, și seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă

Demonstrație. a) Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci conform criteriului monotoniei, șirul sumelor parțiale $V_n=v_1+\ldots+v_n$ este mărginit adică $V_n \le M$ pentru orice $n\in N$. Dar:
$U_n= u_1+\ldots+u_n \le v_1+\ldots+v_n \le M$ pentru orice $n \ge N_0=1$ deci și șirul sumelor parțial U_n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este mărginit și conform criteriului monotoniei și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va fi convergentă.

b) Presupunem că seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă; atunci conform afirmației de la punctul a) și seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, ceeace contrazice ipoteza; deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ nu este convergentă, adică este divergentă.

Exemplu : Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ (se numește seria armonică generalizată sau seria lui Riemann) este convergentă pentru $\alpha>1$ și divergentă pentru $\alpha\le 1$.

Într-adevăr, dacă $\alpha<1$, rezultă: $\frac{1}{n^{\alpha}}>\frac{1}{n}$ și deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ pentru $\alpha\le 1$ este divergentă deoarece știm că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Teorema 2.7 (Al doilea criteriu al comparației)

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ astfel ca $u_n\ge 0$ și $v_n>0$ pentru $(\forall)n\in N$.

a) Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,\ l\neq 0,+\infty$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ si $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ au aceeași natură (sunt ambele convergente sau ambele divergente)

b) Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$ şi dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

c) Dacă $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$ şi dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentăa iar dacă $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstraţie. a) $(\forall)\epsilon>0, (\exists)N(\epsilon)$ astfel ca pentru $(\forall)n\geq N(\epsilon)$ să avem $\left|\frac{u_n}{v_n}-1\right|<\epsilon$, *adica* : $-\epsilon<\frac{u_n}{v_n}-1<\epsilon$, *sau* $(1-\epsilon)v_n<u_n<(1+\epsilon)v_n$

Luăm $\epsilon<1$. Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă (rezultă din prima inegalitate, conform primului criteriu al comparaţiei); dacă $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă (a doua inegalitate). Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă (a doua inegalitate); dacă a $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, atunci şi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă (prima inegalitate).

b) $(\forall)\epsilon>0, (\exists)N(\epsilon)$, astfel ca pentru $(\forall)$ $n\geq N(\epsilon)$, să avem $\frac{u_n}{v_n}<\epsilon$ sau $u_n<\epsilon v_n$; aplicînd primul criteriu al comparaţiei rezultă afirmaţiile respective.

c) $(\forall)\epsilon>0$, $(\exists)N(\epsilon)$, astfel ca pentru $(\forall)n\geq N(\epsilon)$, să avem $\frac{u_n}{v_n}>\epsilon$ sau $u_n>\epsilon v_n$ ş.a.m.d.

Teorema 2.8 (Criteriul raportului sau al lui d'Alembert)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cu termeni pozitivi; dacă există un rang N_0 astfel încît pentru $(\forall)n\geq N_0$ să avem $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q<1$, seria este convergentă, iar dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq q>1$, seria este divergentă.

Demonstraţie. Presupunem inegalităţile adevărate pentru $n\geq 1$; dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q<1$ rezultă:

$$
\begin{aligned}
&u_2 \leq q\, u_1\\
&u_3 \leq q\, u_2 \leq q^2 u_1\\
&- - - - - - - - - -\\
&u_n \leq q\, u_{n-1} \leq q^{n-1} u_1\\
&- - - - - - - - - -
\end{aligned}
$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă deoarece seria $u_1\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ este convergentă (seria geometrică cu raţia $q < 1$) şi $u_n \leq u_1 q^{n-1}$.

Dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq q>1$ rezultă:

$$
\begin{aligned}
&u_2\geq q u_1\\
&u_3\geq q u_2\geq q^2 u_1\\
&- - - - - - - - - -\\
&u_n\geq q u_{n-1}\geq q^{n-1} u_1\\
&- - - - - - - - - -
\end{aligned}
$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă deoarece seria $u_1\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ este divergentă (seria geometrică cu raţia $q>1$) şi $u_n\geq u_1 q^{n-1}$

Observaţie. Criteriul raportului se aplică în practică calculînd $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$; dacă $l < 1$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dacă $l > 1$ seria este divergentă iar dacă l = 1 nu ne putem pronunţa asupra naturii seriei cu acest criteriu.

Teorema 2.9 (Criteriul rădăcinii sau al lui Cauchy)

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; dacă exista un rang N_0 astfel încît pentru orice $n>N_0$ să avem $\sqrt[n]{u_n}\leq q<1$,seria este convergentă,iar dacă $\sqrt[n]{u_n}\geq q>1$,seria este divergentă.

Demonstraţie. Din $\sqrt[n]{u_n}\leq q<1$ rezultă $u_n \leq q^n$ şi deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este convergentă (seria geometrica cu raţia q < 1).

Dacă $\sqrt[n]{u_n}\geq q>1$ atunci $u_n \geq q^n$ şi deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ este divergentă (seria geometrică cu raţia q > 1).

Observaţie. Practic,criteriul rădăcinii se aplica calculîndu-se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}=l$;dacă l < 1 seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă,dacă l > 1 seria este divergentă iar dacă l = 1 acest criteriu nu ne spune numic despre natura seriei.

Teorema 2.10 (Criteriul lui Kummer). Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .Dacă există un şir de numere pozitive $(a_n)_{n\in N}$ şi un rang N_0 astfel încît $a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\geq\lambda>0$ pentru orice $n \geq N_0$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Dacă $a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\leq\lambda<0$ pentru orice $n \geq N_0$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă, şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Demonstrație. Din $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \geq \lambda > 0$, deoarece $u_n > 0$, rezultă $a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \geq \lambda u_{n+1} > 0$ deci şirul $(a_n u_n)$ este monoton descrescător şi mărginit inferior deci convergent $(l = \lim_{n\to\infty} a_n u_n)$.
Seria cu termenul general $v_n + a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1}$ este convergentă avînd suma $v = a_1 u_1 - l$.

Dar $u_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda}(a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1})$ şi deci, conform primului criteriu al comparației, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

Dacă $a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1} \leq \lambda < 0$ atunci $a_n u_n - a_{n+1} u_{n+1} \leq \lambda u_{n+1} < 0$ deci şirul $(a_n u_n)$ este monoton crescător; în acest caz există un rang N_0 astfel ca pentru orice $n \geq N_0$ să avem $a_n u_n > M$ de unde $u_n > \frac{M}{a_n}$ adică seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă.

Observație. În practică, criteriul lui Kummer se aplică calculîndu-se $\lim_{n\to\infty}\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) = l$; dacă $l > 0$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, dacă $l < 0$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ este divergentă atunci $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Teorema 2.11 (Criteriul lui Raabe şi Duhamel)

Fie seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Dacă există un număr N_0

astfel încît $n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\geq\lambda>1\ pentru(\forall)\,n\geq N_0$,seria $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este convergentă iar dacă $n(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1)\leq\lambda<1$,seria este divergentă.

Demonstrație. Acest criteriu se obține din criteriul lui Kummer luînd $a_n=n$.

3.2.Serii cu termeni oarecare

Def.2.22.O serie cu termeni oarecare are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

Def.2.23. Seria cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ se numeşte absolut convergentă dacă seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ este convergentă.

Def.2.24. Seria cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ se numeşte semiconvergentă dacă ea este convergentă dar seria modulelor este divergentă.

Exemplu:Seria armonică alternată $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ este semiconvergentă.

Teorema 2.12 Dacă o serie cu termeni oarecare este absolut convergentă,atunci ea este convvergentă.

Demonstrație. Seria $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ este convergentă deci pentru $(\forall)$ $\epsilon>0,(\exists)N(\epsilon)$ astfel încît pentru orice $n\geq N(\epsilon)$ si $p\geq1,p\in N$,să avem $|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\epsilon$ (criteriul general al lui Cauchy).

Dar $|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+p}|\leq|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\ldots+|u_{n+p}|<\epsilon$ deci,conform criteriului lui Cauchy,seria $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ este convergentă.

Teorema 2.13 (Criteriul lui Abel). Fie seria cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cu şirul sumelor parţiale (s_n) mărginit. Dacă $(a_n)_{n\in N}$ este un şir de numere pozitive, monoton descrescător şi convergent către zero, atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ este convergentă.

Demonstraţie. Notăm cu (σ_n) şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ .Avem:

$$\sigma_{n+p}-\sigma_n=a_{n+1}u_{n+1}+\ldots+a_{n+p}u_{n+p}=a_{n+1}(s_{n+1}-s_n)+\ldots$$
$$+a_{n+2}(s_{n+2}-s_{n+1})+\ldots+a_{n+p}(s_{n+p}-s_{n+p-1})=a_{n+p}s_{n+p}-a_{n+1}s_n+$$
$$+(a_{n+1}-a_{n+2})s_{n+1}+\ldots+(a_{n+p-1}-a_{n+p})s_{n+p-1}$$

Dar $|s_n|\le M$ pentru orice $n\in N$ (sirul (s_n) mărginit prin ipoteză) şi $a_{n+k}-a_{n+k+1}>0$ (şirul (a_n) descrescător prin ipoteză) şi deci

$$|\sigma_{n+p}-\sigma_n|\le a_{n+p}|s_{n+p}|+a_{n+1}|s_n|+(a_{n+1}-a_{n+2})|s_{n+1}|+\ldots$$
$$+(a_{n+p-1}-a_{n+p})|s_{n+p-1}|\le M\,(a_{n+p}+a_{n+1}+a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+2}-$$
$$-a_{n+3}+\ldots+a_{n+p-1}-a_{n+p})=2a_{n+1}M<2M.\frac{\epsilon}{2M}=\epsilon$$

deoarece $a_{n+1}<\frac{\epsilon}{2M}$ (*sirul* $a_n \to 0$).

Conform criteriului general al lui Cauchy, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ este convergentă.

3.3. Serii alternate.

Def. 2.25. Seria $u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$ unde $u_k>0\,(\forall)\,k\in N$, se numeşte serie alternată.

Teorema 2.14. (Criteriul lui Leibnitz). Seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$, $u_n>0$, este convergentă dacă şirul (u_n) este monoton, descrescător şi are limita zero.

Demonstraţie. Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ care are şirul sumelor parţiale mărginit deoarece: $s_n=-1+1-1+\ldots+(-1)^{k-1}=\begin{cases}1, n=2k+1\\ 0, n=2k\end{cases}$.

Şirul (u_n) de numere pozitive este descrescător şi convergent către zero.În aceste condiţii,conform teoremei lui Abel,seria

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ este convergentă.

Exemplu :

Seria armonică alternată: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots$ este convergentă deoarece $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ si $(\frac{1}{n})$ este descrescător.

3.4. Exercitii

1. Să se calculeze suma seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right]$

$$u_n=\ln\left[1+\frac{2}{n(n+3)}\right]=\ln\frac{n^2+3n+2}{n(n+3)}=\ln\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n} u_k=\sum_{k=1}^{n} l_n\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}=l_n\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}=$$

$$=\ln\frac{2.3}{1.4}\cdot\frac{3.4}{2.5}\cdot\frac{4.5}{3.6}\cdot\frac{5.6}{4.7}\cdots$$

$$\cdots\frac{(n-2)(n-1)}{(n-3)n}\cdot\frac{(n-1)n}{(n-2)(n+1)}\cdot\frac{n(n+1)}{(n-1)(n+2)}\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}=\ln\frac{3(n+1)}{n+3}$$

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\ln 3$$

2. Să se studieze natura seriilor:

1°. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n+1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e>1$$

deci seria este divergentă.

2°. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}}{\frac{1}{n^\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha(\sqrt{n^2+1}-n)}{n}=$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha(n^2+1-n^2)}{n(\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{2}$ pentru $\alpha=2$, deci seria are aceeaşi natură cu seria Riemann pentru $\alpha=2$, adică este convergentă.

§ 4. Şiruri de funcţii reale

Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ unde $f_n:A\to\mathbb{R}$ şi funcţia $f:A\to\mathbb{R}$.

Definiţia 2.26. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este **(punctual) convergent** pe A către o funcţie f dacă, pentru $(\forall)\epsilon>0$ şi $(\forall)x\in A$, există $N(\epsilon,x)$ astfel încît pentru $(\forall)n\geq N(\epsilon,x)$ să avem $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

Definiţia 2.27. Şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 0}$ este **uniform convergent** pe A către o funcţie f dacă, pentru $(\forall)\epsilon>0$, există $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $(\forall)n>N(\epsilon$ şi $(\forall)x\in A$ să avem $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

Vom da, fără demonstraţie, următoarele proprietăţi ale şirurilor de funcţii:

P1. Dacă $(f_n)_{n\geq 0}$ este un şir uniform convergent de funcţii continue pe [a,b], atunci $f=\lim_{n\to\infty} f_n$ este continuă pe [a,b] şi

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

P2. Dacă $(f_n)_{n\geq 0}$ este un şir de funcţii continue şi cu derivate continue pe [a,b], $(f_n)_{n\geq 0}$ este convergent către f pe [a,b], $(f_n')_{n\geq 0}$ este uniform convergent către g pe [a,b] iar f şi g sunt funcţii mărginite pe [a,b], atunci f este derivabilă pe [a,b] şi $f'=g$.

P3. Orice şir de funcţii uniform convergent pe A este (punctual) convergent pe A. Reciproca nu este adevărată.

§ 5. Serii de funcţii reale

Definiţia 2.28. Prin serie de funcţii se înţelege o serie ai cărei termeni sunt funcţii reale definite pe aceeaşi mulţime. Dacă $f_1, f_2, \ldots f_n, \ldots$ este un şir de funcţii definite pe multimea X, atunci seria:

$f_1+f_2+\ldots+f_n+\ldots$ este o serie de funcţii şi se notează

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \, .$$

Definiţia 2.29. Se spune ca seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă în punctul $x \in X$ dacă seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă. Mulţimea $A \subset X$, a punctelor $x \in X$ în care seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numeşte mulţimea de convergentă a seriei de funcţii iar funcţia $u: A \to R$ astfel că : $u(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ se numeşte suma seriei.

Definiţia 2.30. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, f_n definite pe $X (n \in N)$, este simplu convergentă pe $A \subset X$ către funcţia f, definită pe A, dacă şirul sumelor parţiale converge către funcţia f pe A, adică dacă, pentru orice $x \in A$ şi orice $\epsilon > 0$, există un număr $N(\epsilon, x)$ astfel încît oricare ar fi $n \ge N(\epsilon, x)$ să avem:

$$|f_1(x)+\ldots+f_n(x)-f(x)| < \epsilon$$

Convergenţa simplă a seriilor de funcţii se stabileşte cu ajutorul criteriilor de convergentă de la seriile numerice deoarece, din definiţia 1, rezultă că seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este simplu convergentă pe A către funcţia f dacă, pentru fiecare $x \in A$, seria de numere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă către $f(x)$.

Definiţia 2.31. Seria de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n, f_n (n\in N)$ definite pe X, este absolut convergentă pe mulţimea $A\subset X$, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ este simplu convergentă pe A.

Convergenţa absolută a seriilor de funcţii se studiază cu ajutorul criteriilor de convergenţă de la seriile numerice cu termeni pozitivi.

Exemplu. Să se afle mulţimea de convergentă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$.

Considerăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|^n$ pentru care aplicăm criteriul rădăcinii:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left|\frac{1-x}{1-2x}\right| = \left|\frac{1-x}{1-2x}\right|$$

Seria modulelor este convergentă dacă:

$\left|\frac{1-x}{1-2x}\right| < 1$ *de unde* $x\in(-\infty, 0)\bigcup\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ care este mulţimea de convergenţă seriei date.

Definiţia 2.32. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funcţii definite pe mulţimea X este uniform convergentă pe mulţimea $A\subset X$ către funcţia f definită pe A dacă şirul sumelor parţiale este uniform convergent pe A către f adică dacă oricare ar fi $\epsilon>0$, există un numar $N(\epsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n\geq N(\epsilon)$ şi oricare ar fi $x\in A$ să avem:

$$|f_1(x) + \ldots + f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definiţia 2.33. Seria $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ se numeşte restul de ordinul n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Dacă restul de ordinul n este o serie convergentă pe A, suma sa se notează cu R_n şi se numeşte de asemenea restul de ordinul n al seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$.

Teorema 2.15. (Criteriul general de convergentă uniformă al lui Cauchy). Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de funcţii definite pe X este uniform convergentă pe mulţimea $A \subset X$ dacă şi numai dacă, pentru orice $\epsilon>0$, există un număr $N(\epsilon)$, astfel încît, oricare ar fi $n \geq N(\epsilon)$ şi $p \geq 1$ şi oricare ar fi $x \in A$, să avem:

$$|f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)|<\epsilon$$

Demonstraţia este evidentă, acest criteriu exprimînd condiţia necesară şi suficientă ca şirul sumelor parţiale (s_n) al seriei de funcţii $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergent.

Exemplu. Să se studieze convergenţa uniformă a seriei de funcţii:

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} (x^n-x^{n-1}) \ pentru \ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Aplicăm criteriul lui Cauchy:

Fie $\epsilon>0$, $|f_{n+1}(x)+\ldots+f_{n+p}(x)|=|x^{n+1}-x^n+x^{n+2}-x^{n+1}+\ldots$

$$\ldots+x^{n+p}-x^{n+p-1}|=|x^{n+p}-x^n|=|x^n(x^p-1)|=|x^n|.|x^p-1|\leq$$

$$\leq\frac{1}{2^n}.\left|\frac{1}{2p}-1\right|\leq\frac{1}{2^n}<\epsilon \to 2^n>\frac{1}{\epsilon}, n \ lg \ 2>lg\frac{1}{\epsilon}$$

$$n>\frac{lg\frac{1}{\epsilon}}{lg2} \ ; \ N(\epsilon)=\left[\frac{lg\frac{1}{\epsilon}}{lg2}\right]$$ deci seria dată este uniform convergentă pentru $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Teorema 2.16. (transfer de continuuitate)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie uniform convergentă de funcţii reale f_n definite şi continue pe [a,b] şi s suma acestei serii. Atunci s este o funcţie continuă pe [a,b] şi rezultă:

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

Demonstraţie: Din P.1. rezultă că s este continuă pe [a,b] şi

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \int_a^b s(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_1(x)\, dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)\, dx\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Teorema 2.17. (transfer de derivabilitate)

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ o serie convergentă de funcţii reale f_n definite şi continue pe [a,b], cu suma s şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ uniform convergentă. Atunci s este derivabilă pe [a,b] şi $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

Demonstraţie: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ are şirul sumelor parţiale s_n' care este uniform convergent către o funcţie g. Din P2. rezultă că funcţia s este derivabilă şi s'=g.

§ 6. Seria Taylor

Definiţia 2.34. Fie $f:X\to R$ o funcţie derivabilă de o infinitate de ori în $x_0 \in X$, x_0 punct interior al mulţimii X. Seria:

$$f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

se numeşte seria Taylor a funcţiei f în punctul x_0.

Fie $A\subset X$ mulţimea de convergenţă a acestei serii.

Definiţia 2.35. Spunem că funcţia f este dezvoltabilă în seria Taylor pe mulţimea A dacă ea este suma seriei respective pe A adică, pentru $x \in A$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots$$

Teorema 2.18. Funcţia $f:X\to R$ este dezvoltabilă în serie Taylor pe mulţimea $A\subset X$, dacă şi numai dacă ea este derivabilă de o infinitate de ori pe A şi restul ei de ordinul n din formula lui Taylor tinde către zero cînd $n\to\infty$, oricare ar fi $x\in A$.

Demonstraţia este evidentă şi decurge din definiţia seriei Taylor ataşata funcţiei f.

Teorema 2.19. Fie $f:X\to R$ o funcţie indefinit derivabilă pe $A\subset X$ şi x_0 un punct interior lui X. Dacă există un număr $M>0$, astfel încît $|f^{(n)}(x)|\le M$ pentru orice $n\in N_0$ şi orice $x\in A$, atunci funcţia f este dezvoltabilă în serie Taylor pe mulţimea A.

Demonstraţie. Restul R_n, sub forma lui Lagrange, este:

$$R_n(x)=\frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\ ,\ \xi\in(x_0,x)\subset A$$

$$|R_n(x)|\le\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)|\le\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!}.M=0$$ deoarece seria

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}M$$ este convergentă:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_o|}{n+1}=0$$

$$u_{n+1}=\frac{|x-x_0|}{n+1}.u_n$$

Cînd $n\to\infty \to l=0.l\to l=0$ adică $\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_o|^{n+1}}{(n+1)!}.M=0$

Dacă $x_0=0$, seria corespunzătoare :

$$f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots$$

se numeşte seria Mac Laurin a funcţiei f iar dacă f este suma acestei serii pe mulţimea A, se spune că funcţia f este dezvoltabilă în serie Mac Laurin pe A.

Exemple de dezvoltări în serie Mac-Laurin :

1. Funcţia $f(x)=e^x, x\in R$ este indefinit derivabilă pe R, $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1, x\in R$ şi pentru orice $x\in(-\infty,\infty)$, $e^{-\infty}<e^x<e^{\infty}$ deci f este dezvoltabilă în serie Mac Laurin:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$ conv. pentru orice $x\in R$

Dacă înlocuim pe x cu -x obţinem :

$$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

În general :

$$e^{\alpha x}=1+\frac{\alpha x}{1!}+\frac{\alpha^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^n x^n}{n!}+\ldots$$

2. Funcţia $f(x)=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,definită pe R,are dezvoltarea:

$$shx=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2_{n+1})!}+\ldots$$ convergentă pentru orice x∈R

3. Funcţia $f(x)=chx=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ convergentă pentru orice x∈R

4. Funcţia f(x)=sinx,definită pe R,este indefinit derivabilă pe R şi $f^{(n)}(x)=\sin(x+n\frac{\pi}{2})$ .Deci $|f^{(n)}(x)|\le 1$ pentru orice x∈R şi avem : $f^{(4k)}(0)=0, f^{(4k+1)}(0)=1, f^{(4k+2)}(0)=0, f^{(4k+3)}=-1$ deci,pentru orice x∈R:

$$sinx=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2_{n+1})!}+\ldots$$

5. Funcţia f(x)=cosx,definită pe R,este indefinit derivabilă pe R şi $f^{(n)}(x)=\cos(x+n\frac{\pi}{2})$; deci $|f^{(n)}(x)|\le 1$ pentru orice x∈R şi avem

$$f^{(4k)}(0)=1, f^{(4k+1)}(0)=0. f^{(4k+2)}(0)=-1, f^{(4k+3)}(0)=0.$$

Pentru orice x∈R avem :

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

6. <u>Formulele lui Euler</u>

Considerăm numărul complex:

$$cosx+isinx=1-\frac{x^2}{2!}=\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

$$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}+\frac{i^2x^2}{2!}+\frac{i^3x^3}{3!}+\frac{i^4x^4}{4!}+\frac{i^5x^5}{5!}+\frac{i^6x^6}{6!}+\ldots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+i\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots\right)$$

deci : cosx + isinx = e^{ix}

Similar:

$$\cos x - i\sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$e^{-ix} = 1 + \frac{-ix}{1!} + \frac{(-i)^2 x^2}{2!} + \frac{(-i)^3 x3}{3!} + \frac{(-i)^4 x^4}{4!} + \frac{(-i)^5 x^5}{5!} + \frac{(-i)^6 x^6}{6!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots - i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)$$

deci : $\cos x - i\sin x = e^{-ix}$

Rezultă formulele lui Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Observație : Numarul complex a+bi care se scrie sub forma trigonometrică: $a+bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ se va scrie sub forma exponentială astfel : $a+bi = re^{i\theta}$.

7. Seria binomiala

Considerăm funcția :

$f(x) = (1+x)^{\alpha}, x \in R, \alpha \in R$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$

$$R_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1} . x^{n+1}(1-\theta)^n, \; 0<\theta<1$$

$$R_n = u_n . v_n$$

unde:

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^{n+1}$$ este termenul general al unei serii absolut convergente pentru $|x|<1$ deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n+1|}{|u_n|} = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n+1}{n+1}\right| = |x|$$

şi deci $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

$$v_n = (1+\theta x)^{\alpha-n-1} . (1-\theta)^n$$

$$v_n = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n . (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ *pentru* $|x|<1$ *deoarece* $\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1$ *pentru* $|x|<1$

Deci, pentru $|x|<1$, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ şi seria este convergentă. Pentru

$|x|<1$ şi $\alpha \in R$ avem urmatoarea dezvoltare în serie Mac-Laurin:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1).(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

<u>Exemplu</u>: Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcţia $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$;se aplică dezvoltarea în serie binominală cu $\alpha=-\frac{1}{2}$,deci pentru $|x|<1$ vom avea:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{2.3}x^3+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\ldots$$

§7. <u>Serii de puteri</u>

<u>Definiţia 2.36.</u> Se numeşte <u>serie de puteri</u> o serie de funcţii de forma : $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$

sau

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

unde $a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots$ sunt numere.

Seriile Taylor şi Mac-Laurin sunt deci serii de puteri.

Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri conţine cel puţin un punct ($x=0$ sau $x=x_0$).

<u>Teorema 2.20.(Abel)</u> Mulţimea de convergentă a unei serii de puteri este totdeauna un interval adică există un numar $R \geq 0$ finit sau infinit astfel încît seria este absolut convergentă pe intervalul deschis $(-R,R)$ şi divergentă pentru orice x pentru care $|x|>R$.

<u>Demonstraţie.</u> Dacă seria de puteri este convergentă numai în $x=0$,atunci $R=0$ şi teorema este demonstrată.Să presupunem că $x_0 \neq 0$ este un punct în care seria de puteri este convergentă.Să arătam că seria este absolut convergentă,pentru orice x pentru care $|x| < |x_0|$.Într-adevăr, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ fiind convergentă rezultă că $a_n x_0^n \to 0$ cînd $n \to \infty$ şi deci există un număr $M>0$ astfel încît

$|a_n x_0^n| < M$ pentru orice n.

$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M.\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă pentru $|x|<|x_0|$, termenul ei general fiind majorat de termenul general al unei serii geometrice cu raţia $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ care este convergentă.

Dacă x_1 este un punct de divergenţă al seriei, atunci seria este divergentă pentru orice x pentru care $|x| > |x_1|$. Într-adevăr, dacă ar exista un punct x_2 astfel ca $|x_2| > |x_1|$ pentru care seria e convergentă, ar rezulta că seria e convergentă şi în x_1 ($|x_1|<|x_2|$) ceeace contrazice ipoteza.

Să notăm cu A mulţimea de convergenţă a seriei şi fie R marginea superioară a acestei mulţimi ; R>0 deoarece $0 \in A$. Rezultă că seria este convergentă pentru orice x pentru care $|x|<R$ adică pentru $x \in (-R,R)$.

Seria este divergentă pentru orice x pentru care $|x|>R$. Într-adevăr, să presupunem că seria ar fi convergentă în punctul $x_1>R$, ceeace nu este posibil deoarece $x_1 \notin A$.

Numarul R se numeşte <u>raza de convergenţă</u> a seriei de puteri, iar intervalul (-R,R) se numeşte <u>intervalul de convergentă</u> al seriei de puteri.

Determinarea razei de convergentă a unei serii de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se face folosind criteriile de convergentă de la seriile cu termeni pozitivi pentru seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Aplicînd criteriul raportului pentru seria modulelor obţinem:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x| = l$$

şi deci seria e convergentă pentru l<1, $|x| < \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ adică

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

Aplicînd criteriul rădăcinii obţinem:

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

<u>Teorema 2.21.</u> Fie seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convergentă în intervalul (-R,R).Seria derivatelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ are acelaşi interval de convergentă ca şi seria dată.

<u>Demonstraţie.</u> Să calculăm raza R_1 a seriei derivatelor:

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\left|\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_{n+2}|}=R.$$

Consecinţă:

În intervalul de convergenţă,suma seriei derivatelor este egală cu derivata sumei seriei de puteri.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\ ;\ \phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$S'(x) = \phi(x)$ pentru orice $x\in(-R,R)$

<u>Exerciţii</u>

1. Să se studieze convergenţa seriei: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\cdot\left|\frac{n+1}{(-1)^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

Deci intervalul de convergenţă este (-1,1).

Pentru x=1 seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ şi este convergentă.

Pentru x=-1 seria devine $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ şi este divergentă.

Deci seria este convergentă pentru $x\in(-1,1]=A$ (mulţimea de convergenţă) şi divergentă pentru $x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$.

2. Să se dezvolte în serie Mac-Laurin funcţiile:

   1°. $f(x)=\cos^3 x$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

$$f(x) = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{3}{4}\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right] =$$

$$= = 1 - \frac{3^2-3}{4.2!}x^2 + \frac{3^4-3}{4.4!}x^4 - \frac{3^6-3}{4.6!}x^6 + \ldots + (-1)^n \frac{3^{2n}-3}{4.(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

dezvoltarea fiind valabilă pentru $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

2°. $f(x) = \text{arctg}x$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

dezvoltarea fiind adevărată pentru $x \in (-1,1)$

$$f(x) = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots)\,dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)\frac{x^{2n+1}}{2_{n+1}} + \ldots + C$$

Pentru $x=0$ rezultă $C=0$ deci dezvoltarea, valabilă pentru $x \in (-1,1)$ va fi:

$$\text{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{x_{n+1}} + \ldots$$

§8. Serii Fourier

Unele probleme au condus la reprezentarea unei funcţii periodice f(x) de perioada 2π printr-o serie de forma:

$$(1)\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots$$

$$\ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots$$

numită serie trigonometrică.

Să vedem cum putem exprima coeficienţii seriei cu ajutorul funcţiei f(x).

Admitem că seria e uniform convergentă în intervalul $[-\pi, \pi]$;

termenii seriei sunt funcţii continue deci f(x) este continuă.
Integrăm termen cu termen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_1 \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} a_2 \sin x dx + \ldots$$

$$\ldots + \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos x dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin x dx + \ldots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0 \Rightarrow (2) \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Valoarea coeficienţilor depinde de funcţie în ansamblul ei în intervalul în care facem dezvoltarea.
Se înmulţesc ambele părţi în (1)cu cos kx;

$$f(x)\cos kx = \frac{a_0}{2}\cos kx + a_1 \cos x \cos kx + b_1 \cos kx \sin x + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos nx \cos kx + b_n \cos kx \sin nx + \ldots$$

Se face din nou integrarea:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos kx dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos kx + \ldots$$

$$+ \ldots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx + \ldots$$

Dar: $\cos nx \cos kx = \frac{1}{2}[\cos(n+k)x + \cos(n-k)x]$ şi deci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k) xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k) xdx =$$

$$= \begin{cases} 0 \; pentru \; n \neq k \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \; pentru \; n = k \end{cases}$$

$$\cos kx \sin x = \frac{1}{2}[\sin(n+k)x + \sin(n-k)x]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin x dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+k) xdx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-k) xdx = 0$$

Deci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k . \pi \quad \text{adică:}$$

(3) $\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx$

Înmulţim ambele părţi cu sin`kx:

$$f(x)\sin kx=\frac{a_0}{2}\sin kx+a_1\cos x\sin kx+b_1\sin x\sin kx+$$

$$....+a_n\cos nx\sin kx+b_n\sin x\sin kx+...$$

Integrăm:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx+a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\sin kxdx+b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin kxdx+...$$

$$...+a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\sin kxdx+...$$

$$\cos nx\sin kx=\frac{1}{2}[\sin(k+n)x+\sin(k-n)x]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\sin kxdx=0$$

$$\sin nx\sin kx=\frac{1}{2}[\cos(n-k)x-\cos(n+k)x]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-k)xdx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+k)xdx=\begin{cases}0 & daca\ n\neq k\\ \pi & daca\ n=k\end{cases}$$

Deci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin xdx=b_k.\pi$$

(4) $\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx$

Succesul calculelor a fost garantat de proprietatea de ortogonalitate a şirului (ortogonal) de funcţii:
(5) 1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, ..., cosnx, sinnx, ...

Funcţiile $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...$ formează un şir ortogonal dacă:

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\phi_i(x)\,\phi_j(x)\,dx=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & pentru\ i\neq j\\ 1 & pentru\ i=j\end{cases}$$

Reprezentarea unei funcţii f(x) printr-o serie trigonometrică revine la scrierea funcţiei sub forma unei combinaţii liniare infinite de termeni din şirul (5)'.

Fiind dată o funcţie integrabilă f(x) oarecare putem calcula după formulele (2), (3) şi (4) coeficienţii a_0, a_k, b_k cu ajutorul cărora putem forma o serie trigonometrică care se numeşte seria Fourier a funcţiei f(x).

Coeficienţii a_k şi b_k se numesc coeficienţi Fourier ai funcţiei f(x).

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Problemele care se pun:

1. Ce condiţii trebuie să îndeplinească funcţia f(x) pentru ca seria F. ataşata să fie convergentă?
2. Dacă seria F. ataşată funcţiei f(x) converge, ce legatură există între suma seriei F. şi f(x)?
3. Chiar dacă seria F. ataşată funcţiei f(x) nu este convergentă, în ce fel poate fi utilizată ea în studiul sau aproximarea funcţiei f(x).

1. Condiţiile de convergenţă a seriei F. ataşată funcţiei f(x) sunt cunoscute sub denumirea de condiţiile lui Dirichlet şi se definesc:

Vom spune că functia f(x) îndeplineşte condiţiile lui Dirichlet în intervalul $(-\pi, \pi)$ dacă:

1°) în intervalul $(-\pi, \pi)$ f(x) are un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speţa (dacă x_0 e un punct de discontinuitate, el se numeşte punct de discontinuitate de prima speţa dacă $f(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ si $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0+0}$ f(x) există)

2°) în intervalul $(-\pi, \pi)$ există derivata f'(x) cu excepţia unui număr finit de puncte şi are un număr finit de puncte de discontinuitate de I speţă.

Dacă sunt îndeplinite condiţiile lui Dirichlet pentru funcţia f(x) atunci seria Fourier a funcţiei f(x) converge şi în punctul în care funcţia f(x) este continuă suma seriei F. coincide cu f(x) iar în punctul x_0 în care f(x) e discontinuă suma seriei F. este egală cu $\dfrac{f(x_0-0) + f(x_0+0)}{2}$.

Teorema de unicitate a seriilor Fourier : Fiind dată o serie trigonometrică, există o singură funcţie continuă care să o admită drept serie Fourier.

Demonstraţie. Considerăm funcţia f(x) definită în $[-\pi, \pi]$ şi seria F. asociată ei:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_x \cos kx + b_k \sin kx)$$

Să presupunem că seria F. converge uniform către funcţia g(x); g(x) e continuă deci trebuie sa presupunem că f(x) e continuă.

Să arătam că f(x) şi g(x) sunt identice.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos kx dx \ ; \ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin kx dx$$

şi deasemeni:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx \ ; \ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

Dacă f şi g ar fi distincte atunci ar însemna că două funcţii continue diferite au aceiaşi coeficienţi F.Dar atunci F(x)=f(x)-g(x) ar fi o funcţie continuă cu toţi coeficienţii F. nuli,ceeace nu se poate,deoarece F(x)≠0.
Deci : f ≡ g.

Concluzia : Dacă seria F. a unei funcţii continue f(x) converge uniform către f(x) atunci suma seriei F. coincide cu f(x).

$$Daca \begin{cases} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos kx dx = 0 \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{pu} F(x)\sin kx dx = 0 \end{cases} \qquad atunci F(x) \equiv 0$$

adică F(x) este ortogonală pe toate funcţiile din sistemul trigonometric.

Sistemul trigonometric : 1,sinx,cosx,sin2x,... este complet în mulţimea funcţiilor continue adică are proprietatea ca orice funcţie continuă ortogonală pe toate funcţiile sistemului trigonometric este identic nulă.

Inegalitatea lui Bessel

Considerăm funcţia f(x) integrabilă în [-π,π] şi polinoamele trigonometrice de forma:

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

Integrala: $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx$ va fi minimă atunci cînd coeficienţii α_k şi β_k vor fi chiar coeficienţii F. ai funcţiei f(x).

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,T_n(x)\,dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx +$$

$$+ \beta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx) = \frac{\alpha_0}{2}.\pi a_o + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \pi a_k + \beta_k . \pi b_k)$$

$$=\pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\,dx=\frac{\alpha_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2kx\,dx+\beta_k^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2kx\,dx\right)$$

deoarece : $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx=0$; $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\,dx=0$;

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin lx\,dx=0\ ;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos lx\,dx=0\ \textit{pentru}\ l\neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin lx\,dx=0\ \textit{pentru}\ l\neq k$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos^2 kx}{2}\,dx=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\,dx=\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)\,dx=\frac{\alpha_0^2}{4}.2\pi+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2.\pi+\beta_k^2.\pi)=$$

$$=\pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-2\pi\left[\frac{\alpha_0 a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k a_k+\beta_k b_k)\right]$$

$$+\pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2\right]$$

Această expresie este minimă cînd $\alpha_k=a_k$, $\beta_k=b_k$, $\alpha_0=a_0$ deci:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)^2]\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2\right]\geq 0$$

(deoarece în prima parte e integrala unui pătrat) deci:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\geq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx$$ ineg. lui Bessel

Proprietăți:

1. Dacă funcţiei f(x) îi corespunde seria Fourier:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

atunci funcţiei c f(x) îi corespunde seria F.

$$cf(x) \sim \frac{ca_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ca_k \cos kx + cb_k \sin kx$$

2. Seria F. a sumei a 2 funcţii e egala cu suma seriilor F. a celor 2 funcţii.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$$

$$f(x) + g(x) \sim \frac{a_0+\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k+\alpha_k) \cos kx + (b_k+\beta_k) \sin kx$$

3. Dacă f(x) are seria F.:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

atunci seria F. a integralei:

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

va avea coeficienţii: $\alpha_k = -\frac{1}{k} b_k$ *si* $\beta_k = \frac{1}{k} a_k$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left[F(x)\ \frac{\sin kx}{k}\int_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx\right]$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[-F(x)\ \frac{\cos kx}{k}\int_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx\right]$$

4. Dacă f(x) are seria F.:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

şi dacă f(x) are derivata f'(x) continuă, atunci

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx$$

5. Dacă f(x) este funcţie pară atunci $b_k=0$ iar dacă f(x) este

funcţie impară, $a_0=0, a_k=0$.

În general, pentru o funcţie f(x) periodică cu perioada T, integrabilă pe $[\alpha,\alpha+T]$ seria Fourier ataşată este:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k.\frac{2\pi}{T}x+b_k\sin k.\frac{2\pi}{T}x\right)$$

unde:

$$a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)\,dx$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)\cos k.\frac{2\pi}{T}x\,dx$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}f(x)\sin k.\frac{2\pi}{T}x\,dx$$

<u>Exemplu</u>: Să se dezvolte în serie Fourier funcţia $f(x)=x^2$ pentru $x\in[-\pi,\pi)$ cu perioada $T = 2\pi$.

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\left(\frac{1}{k}\sin kx\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}.x^2.\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin kx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\left(-\frac{1}{k}\cos kx\right)'dx=\frac{2}{k\pi}\left(\frac{1}{k}.x.\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,dx\right)=$$

$$=(-1)^k.\frac{4}{k^2}+\frac{2}{k^2\pi}.\frac{1}{k}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi}=(-1)^k.\frac{4}{k^2}$$

$$b_k=0$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{6}+4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k.\frac{1}{k^2}\cos kx$$

Capitolul III

FUNCŢII REALE DE O VARIABILĂ REALĂ

Definiţia 3.1. O funcţie reală de o variabilă reală este o corespondenţă care ataşează fiecarui element $x \in X$ un element $y \in Y$ şi numai unul. Se notează: $f: X \to Y$ X este domeniul de definiţie al funcţiei ($X \subset R$) Y este mulţimea valorilor funcţiei ($Y \subset R$)

Definiţia 3.2. Se numeşte graficul funcţiei $f: X \to Y$, mulţimea:

$$G_f = \{(x, f(x)) / x \in X\}$$

şi are proprietaţile:

1) fiecare element $x \in X$ face parte dintr-o **pereche** şi numai una a graficului G_f;

2) în fiecare pereche (x,y) a graficului, **cele doua** coordonate x,y verifică egalitatea $y=f(x)$; pentru orice altă **pereche** (x,y) care nu aparţine graficului avem $y \neq f(x)$.

1. Limite. Continuitate. Continuitate uniformă.

Definiţia 3.3.(I) Fie $f: X \to Y$ si X_0 un punct de acumulare al lui X. Spunem că f are limita $l \in Y$ în punctul x_0 şi scriem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ sau $f(x) \to l$ pentru $x \to x_0$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta(\epsilon) > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \epsilon$ pentru orice $x \in X$ pentru care $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$.

Definiţia 3.4.(II) Fie $f: X \to Y$ şi x_0 un punct de acumulare al lui X. Spunem că f are limita $l \in Y$ în punctul x_0 dacă pentru orice şir (x_u) convergent către x_0 ($x_u \in X, x_u \neq x_0$) şirul valorilor $(f(x_u))$ este convergent către l.

Teorema 3.1. Definiţiile I si II sunt echivalente.

Demonstraţie.

Presupunem că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ deci pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta(\epsilon) > 0$ astfel încît pentru orice $x \in X$, pentru care $|x - x_0| < \delta(\epsilon)$ să avem $|f(x) - l| < \epsilon$.

Fie $\lim\limits_{n \to \infty} x_u = x_0$ deci pentru orice $\epsilon > 0$, există $N(\epsilon)$ astfel încît pentru orice $n \geq N(\epsilon)$ să rezulte $|x_u - x_0| < \delta(\epsilon)$.

Dacă $|x_u - x_0| < \delta(\epsilon)$ rezultă că $|f(x_n) - l| < \epsilon$ deci $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

În ipoteza că pentru orice şir $x_u \to x_0$ ($x_u \in X, x_u \neq x_0$) şirul corespunzător $f(x_u) \to l$, să presupunem, prin absurd, că l nu este limita funcţiei f în x_0 deci există un $\epsilon_0 > 0$ astfel încît pentru orice $\delta > 0$, să existe $x_\delta \in X$ astfel încît $|x_\delta - x_0| < \delta$ si $|f(x) - l| \geq \epsilon_0$

ceea ce contrazice ipoteza:deci f are limita l în x_0.

Corolar. Dacă f are limita în x_0, atunci această limită este unică.

Demonstraţia rezultă din unicitatea limitei pentru şiruri.

Teorema 3.2. (Criteriul lui Cauchy-Bolzano)

Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $f:X\to Y$ să aibă limita pentru $x\to x_0$ este ca pentru orice $\epsilon>0$, să existe $\delta(\epsilon)>0$ cu proprietatea că dacă $|x'-x_0|<\delta(\epsilon)$ şi $|x''-x_0|<\delta(\epsilon)$ să rezulte $|f(x')-f(x''))<\epsilon$.

Demonstraţie

Presupunem că f are limita l deci pentru orice $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)>0$, astfel încît pentru $|x'-x_0|<\delta(\epsilon)$ să avem $|f(x')-l|<\frac{\epsilon}{2}$ şi pentru $|x''-x_0|<\delta(\epsilon)$ să avem $|f(x'')-l<\frac{\epsilon}{2}$.

Dar $|f(x')-f(x'')|=|f(x')-l+l-f(x'')|\le|f(x')-l|+|f(x'')-l|\le\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$

Presupunem că pentru orice $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît pentru $|x'-x_0|<\delta(\epsilon)$ şi $|x''-x_0|<\delta(\epsilon)$ să avem $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$. Fie şirul $x_u\to x_0$; rezultă că pentru $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)>0$ şi $N(\epsilon)$ astfel încît pentru $n>N(\epsilon)$ şi $n>N(\epsilon)$ să avem $|x_u-x_0|<\delta(\epsilon)$ şi $|x_m-x_0|<\delta(\epsilon)$ ceea ce implică $|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$ adică şirul $(f(x_n))$ este fundamental şi deci are limită.

Definiţia 3.5. Se spune că funcţia $f:X\to Y$ are în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare al mulţimii X) limita la stînga l_s, dacă pentru orice $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît $|f(x)-l_s|<\epsilon$ pentru orice $x\in X, x\neq x_0$ astfel că $x_0-x<\delta(\epsilon)$. Se notează: $l_s=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$

Definiţia 3.6. Se spune că funcţia $f:X\to Y$ are în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare al mulţimii X) limita la stînga l_s, dacă pentru orice şir crescător (x_n), convergent către x_0 ($x_n\in X, x_n\neq x_0$), şirul corespunzător al valorilor $(f(x_n))$ este convergent către l_s.

Cele două definiţii (5 si 6) sunt echivalente.

Definiţia 3.7. Se spune că funcţia $f:X\to Y$ are în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare al mulţimii X) limita la dreapta l_d, daca pentru orice $\epsilon>0$ există $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît $|f(x)-l_d|<\epsilon$ pentru orice $x\in X, x\neq x_0$ pentru care $x-x_0<\delta(\epsilon)$. Se notează $l_d=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$.

Definiţia 3.8. Se spune că funcţia $f:X\to Y$ are în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare al mulţimii x) limita la dreapta l_d, dacă pentru orice şir descrescător (x_n) convergent către x_0, ($x_u\in X, x_n\neq x_0$), şirul corespunzător al valorilor $(f(x_n))$ este convergent către l_d.

Definiţiile 7 si 8 sunt echivalente.

Definiţia 3.9. Funcţia $f:X\to Y$ are limita în punctul x_0 (x_0 punct de acumulare a mulţimii X) dacă:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\ (finita)$$

Definiţia 3.10.(III). Fie $f:X\to Y$ şi $x_0\in X$.Spunem că funcţia f este continuă în punctul x_0 dacă pentru orice $\epsilon>0$,există $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$ pentru orice $x\in X$ pentru care $|x-x_0|<\delta(\epsilon)$.
Definiţia 3.11.(IV). Fie $f:X\to Y$ şi $x_0\in X$.Spunem că f este continuă în x_0 dacă pentru orice şir (x_n) astfel că $x_n\to x_0 (x_n\in X)$ şirul corespunzător $f(x_n)\to f(x_0)$.
Teorema 3.3. Definiţiile III şi IV sunt echivalente.Demonstraţia este la fel ca la teorema 1,fară a mai pune condiţia $x_n\neq x_0$.
Definiţia 3.12. Fie $f:X\to Y$ şi $x_0\in X$.f este continuă în x_0

dacă: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)=f(x_0)\ (finita)$

Definiţia 3.13. O funcţie $f:X\to Y$ este continuă pe o mulţime $A\subset X$ dacă este continuă în fiecare punct al mulţimii A.
Definiţia 3.14. Fie $f:X\to Y$.Un punct $x_0\in X$ în care funcţia f nu este continuă,se numeşte punct de discontinuitate al lui f.
Definiţia 3.15. Punctul de discontinuitate $x_0\in X$ se numeşte punct de discontinuitate de prima speţa dacă limitele laterale în punctul x_0 există si sunt finite.În alte cazuri(cel puţin una dintre limitele laterale nu există sau este infinită) discontinuitatea se numeşte de speţa doua.
Teorema 3.4. Fie funcţiile:$f:X\to Y$,$g:f(x)\to Z$ şi funcţia compusa $h=g_0f:X\to Z$ $(h(x)=g(f(x))$ pentru orice x X.Daca f este continua în x_0 X şi g este continu în $f(x_0)$ $f(x)$,atunci h este continu în x_0
Demonstraţie
Deoarece f este continu în x_0 rezult c pentru orice şir $x_n\to x_0 (x_n\ X)$,şirul valorilor $f(x)=f_n\to f(x_0)=f_0$.Funcţia g este continu în f_0 deci pentru orice şir $f_n\to f_0$ rezult $g(f_n)\to g(f_0)$ adic $g(f(x_n))\to g(f(x_0))$, $(x_n\in X)$,adică funcţia compusă g este continuă în x_0.
Teorema 3.5. Funcţia inversă a unei funcţii continue este o funcţie continuă.
Demonstraţie Fie $f:X\to Y$ o funcţie strict crescatoare,continuă pe X şi f^{-1} funcţie inversă.
f continuă în $x_0\in X$ deci pentru orice şir $x_n\to x_0 (x_n\in X)$,şirul valorilor $f(x_n)=y_n$ converge către $f(x_0)=y_0$.
Considerăm şirul (y_n) strict crescător,convergent către $y_0=f(x_0)$.Funcţia f fiind biunivocă,şirului (y_n) îi corespunde şirul unic $(x_n')\ (x_n'\in X)$.

Să arătam că şirul (x_n') este convergent către x_0.Şirul (x_n') este strict crescător,deci are o limită $x'\in X$.
f este continuă pe X deci:

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\lim_{n\to\infty} f(x_n') = y_0 = f(x_0),$$

deci $f(x_0)=f(x')$ şi cum f este biunivocă rezultă $x_0=x'$. La fel se demonstrează pentru şirul (y_n) strict descrescător, convergent către y_0.

Fie $f:X\to Y$ şi x_0 un punct de acumulare al lui $X(x_0\notin X)$ în care funcţia are o limită finită y_0.

Definiţia 3.16. Funcţia $\overline{f}:X\cup\{x_0\}\to Y$ definită astfel:

$$\overline{f}(x)=\begin{cases} f(x), \; daca \; x\neq x_0, x\in X, \\ y_0, \; daca \; x=x_0 \end{cases}$$

se numeşte prelungirea funcţiei f prin continuitate în punctul x_0.

Teorema 3.6. O funcţie continuă pe un interval compact (închis şi mărginit) este mărginită pe acest interval.

Demonstraţie. Fie X o mulţime compactă de numere reale şi $f:X\to Y$ o funcţie continuă pe această mulţime.

Să presupunem că f nu este mărginită pe X, deci pentru orice număr $M>0$ există un punct $x_M\in X$ astfel ca $|f(x_M)|>M$. În particular, există $x_n\in X$ cu $|f(x_n)|>n$ pentru orice număr natural n. Înseamnă că putem considera şirul (x_n), $(x_n\in X)$ care este mărginit (deoarece X este compactă). În baza lemei lui Cezaro, (x_n) conţine un subşir (x_{n_p}) convergent către $x_0\in X$ (deoarece X este compactă este şi închisă deci odată cu termenii lui (x_{n_p}) conţine şi limita sa x_0). Rezultă că f este continuă în x_0, iar din convergenţa lui (x_{n_p}) către x_0 deducem $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p})=f(x_0)$ şi de aici $\lim_{p\to\infty}|f(x_{n_p})|=|f(x_0)|$.

Pe de altă parte, trecînd la limită, cînd $p\to\infty$, în inegalitaţile $|f(x_{n_p})|>n_p$, avem $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p})=\infty$ ceea ce este în contradicţie cu rezultatul precedent. Deci f este mărginită pe X.

Teorema 3.7. O funcţie continuă pe un interval compact îşi atinge marginile pe intervalul respectiv (T.Weierstrass).

Demonstraţie

Din teorema precedentă rezultă că dacă $f:X\to Y$ este continuă pe intervalul compact X, ea este mărginită deci există două numere m (marginea inferioară) şi M (marginea superioară) astfel încît $m\le f(x)\le M$.

Să arătam că există cel puţin un punct $\zeta\in X$ astfel ca $f(\zeta)=m$ şi cel puţin un punct $\zeta'\in X$ astfel ca $f(\zeta')=M$.

Presupunem că nu există nici un punct $\zeta\in X$ pentru care $f(\zeta)=m$ deci $f(x)>m$ pentru orice $x\in X$.

Funcţia $g(x)=\dfrac{1}{f(x)-m}$ este continuă şi strict pozitivă pe X deci este marginită (conform teoremei precedente) adică: $\frac{1}{f(x)-m} \le M_1$. Dar de aici rezultă:

$$f(x) \ge m+\frac{1}{M_1}$$

ceea ce contrazice definiţia marginii inferioare m a funcţiei f. Deci există un punct $\zeta \in X$ astfel ca $f(\zeta)=m$. La fel se demonstrează existenţa lui ζ'.

<u>Definiţia 3.17.</u> Fie $f:X\to Y$. Spunem că f este <u>uniform continuă</u> pe X dacă pentru orice $\epsilon>0$ exista un număr $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$ pentru orice pereche $x',x''\in X$ care satisface inegalitatea $|x'-x''|<\delta(\epsilon)$.

Continuitatea uniformă se defineşte pe o mulţime deci are un caracter global, în timp ce continuitatea se defineşte într-un punct adică are un caracter local.

Continuitatea uniforma implică continuitatea.

Exemple de funcţii uniform continue:

1. Funcţia constantă $f(x)=c$, definită pe R, este uniform continuă pe R, deoarece oricare ar fi $x',x''\in R$ avem $|f(x')-f(x'')|=0$ şi deci pentru orice $\epsilon>0$, putem lua $\delta(\epsilon)=1$ astfel încît, dacă $|x'-x''|<\delta(\epsilon)$ să avem $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.
2. Funcţia identică $f(x)=x$, definită pe R, este uniform continuă pe R. $|f(x')-f(x'')|=|x'-x''|$ deci pentru orice $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)=\epsilon>0$, astfel încît dacă $|x'-x''|<\delta(\epsilon)$ rezultă $|f(x')-f(x'')|<\epsilon$.
3. Funcţiile care satisfac condiţia lui Lipschitz pe o mulţime X sunt uniform continue pe X.

Funcţia $f:X\to Y$ satisface condiţia lui Lipschitz dacă pentru orice $x',x''\in X$, corespunde $L>0$, astfel încît : $|f(x')-f(x'')|\le L|x'-x''|$.

Pentru orice $\epsilon>0$, luăm $\delta(\epsilon)=\frac{\epsilon}{L}$ şi deci pentru orice pereche $x',x''\in X$ pentru care $|x'-x''|<\delta(\epsilon)$ rezultă $|f(x')-f(x'')| \le L.\frac{\epsilon}{L}=\epsilon$.

<u>Teorema 3.8.</u> O funcţie continuă pe un compact X este uniform continuă pe X.

<u>Demonstraţie</u>

Fie $f:X\to Y$. Presupunem, prin absurd, că funcţia f continuă pe mulţimea compactă X, nu este uniform continuă pe X deci există $\epsilon_0>0$, astfel încît pentru fiecare $\delta>0$, corespund $x'_\delta, x'_\delta \in X$ cu

$$|x'_\delta-x''_\delta|<\delta \ si \ |f(x'_\delta)-f(x''_\delta)|>\epsilon.$$

În particular, luînd $\delta=\frac{1}{n}, n=1,2,...$ putem considera şirurile (x'_n) si (x''_n) din X, astfel încît pentru orice număr natural n, să fie satisfăcute inegalitaţile $|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}$ şi $|f(x_n')-f(x_n'')|>\epsilon_0$.

Şirul (x_n') este mărginit, fiind conţinut în mulţimea compactă X; conform lemei lui Cezaro din (x_n') se poate extrage un subşir (x_{n_p}') convergent către x_0 din X. Deoarece putem scrie $x_{n_p}''=x_{n_p}'-(x_{n_p}'-x_{n_p}'')$ şi ţinînd seama că $|x_{n_p}'-x_{n_p}''|<\frac{1}{n_p}\to 0$ cînd $p\to\infty$, rezultă $x_{n_p}''\to x_0$.

Conform ipotezei, f este continuă pe X, deci şi în $x_0\in X$, iar din $x_{n_p}'\to x_0$ *si* $x_{n_p}''\to x_0$ cînd $p\to\infty$ urmează $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}')=f(x_0)$, $\lim_{p\to\infty} f(x_{n_p}'')=f(x_0)$

şi deci şi $\lim_{p\to\infty}|f(x_{n_p}')-f(x_{n_p}'')|=0$ ceea ce este în contradicţie cu relaţia $|f(x_{n_p}')-f(x_{n_p}'')|>\epsilon_0$. Din contradicţie rezultă că f este uniform continuă pe X.

§ 2. Derivate si diferenţiale.

Definiţia 3.18. Fie $f:X\to R$ şi $x_0\in X$. Funcţia f este derivabilă în punctul x_0 dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

Definiţia 3.19. Funcţia $f:X\to R$ este derivabilă pe X dacă este derivabilă în fiecare punct $x\in X$.

Teorema 3.9. (Teorema lui Cauchy). Fie f şi g două funcţii definite pe un interval X cu valori reale şi $a,b\in X$, $a<b$. Dacă f şi g sunt continue pe intervalul închis $[a,b]$ şi derivabile pe intervalul deschis (a,b) şi $g'(x)\neq 0$ pentru orice $x\in(a,b)$, atunci există un punct $c\in(a,b)$ $a<c<b$, astfel încît:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Demonstraţie

Funcţia $F(x)=A\,f(x)+Bg(x)$ cu A, B constante este continuă pe $[a,b]$ şi derivabilă pe (a,b). Să determinăm pe A, B astfel încît

$F(a)=F(b)=0$:

$$\begin{cases} A\,f(a)+Bg(a)=0 \\ A\,f(b)+Bg(b)=0 \end{cases}$$

Scăzînd, obţinem:

$$A(f(b)-f(a))+B(g(b)-g(a))=0$$

şi putem lua:

$$A=g(b)-g(a)\ ;\ B=f(a)-f(b)$$

Nu putem avea $g(b)=g(a)$, deoarece, conform teoremei lui Rolle, ar exista $c\in(a,b)$ astfel încît $g'(c)=0$ ceea ce nu se poate deoarece am presupus $g'(x)\neq 0$.

$$F(x)=(f(a)-f(b))g(x)+(g(b)-g(a))f(x)$$

Funcţia $F(x)$ îndeplineşte condiţiile teoremei lui Rolle, deci există un punct $c\in(a,b)$, $a<c<b$ în care $F'(c)=0$.

$$F'(x)=(f(a)-f(b))g'(x)+(g(b)-g(a))f'(x)$$

$$(f(a)-f(b))g'(c)+(g(b)-g(a))f'(c)=0$$

şi cum $g'(c)\neq 0$, $g(b)-g(a)\neq 0$ se obţine ,,formula generală a mediei'':

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\ ,\ a<c<b.$$

<u>Definiţia 3.20.</u> O funcţie $f(x)$ se numeşte <u>diferenţiabilă</u> în punctul x_0 daca există o constantă A independentă de x (depinzînd numai de x_0) astfel că:

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\epsilon(x,x_0)\,.\,|x-x_0|$$

unde $\lim\limits_{x\to x0}\epsilon(x,x_0)=0$.

<u>Teorema 3.10.</u> Dacă funcţia $f(x)$ este diferenţiabilă în x_0, atunci ea este derivabilă în x_0 şi derivata sa este $f'(x_0)=A$.

<u>Demonstraţie</u>

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_o}=A+\frac{\epsilon(x,x_0)\,.\,|x-x_0|}{x-x_0}$$

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A.$$

<u>Teorema 3.11.</u> Dacă funcţia $f(x)$ este derivabilă în punctul x_0, atunci ea este diferenţiabilă în x_0.

<u>Demonstraţie</u>

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ deci$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=\epsilon(x,x_0)\ unde\ \epsilon(x,x_0)\to 0$$

cînd $x\to x_0$.

$$f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+\epsilon(x.x_0.(x,x_0)$$

<u>Definiţia 3.21.</u> Expresia $f'(x_0)(x-x_0)$ se numeşte diferenţiala

funcţiei f în punctul x_0 şi se notează d $f(x_0)$.

Deci: d $f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

Dacă $f(x)=x$, atunci d $x=x-x_0$ (deoarece $f'(x_0)=1$) şi deci d $f(x)=f'(x)dx$ de unde:

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

adică derivata $f'(x)$ în punctul x este raportul dintre diferenţiala funcţiei $f(x)$ şi diferenţiala funcţiei x.

<u>Definiţia 3.22.</u> Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie derivabilă pe (a,b) cu derivata $f'(x), x\in(a,b)$. Dacă $f'(x)$ este derivabilă în punctul $x_0\in(a,b)$, se spune că $f(x)$ este de două ori derivabilă în x_0; derivata lui f' în punctul x_0 se numeşte derivata de ordinul doi a funcţiei f în punctul x0 şi se notează $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Prin recurenţă se poate defini derivata de un ordin oarecare $n\in N$.

<u>Definiţia 3.23.</u> Fie $f:[a,b]\to R$ o funcţie derivabilă de n-1 ori pe (a,b). Dacă $f^{(n-1)}(x)$ este derivabilă în punctul $x\in(a,b)$, se spune că f este de n ori derivabilă în punctul x_0. Derivata lui $f^{(-1)}$ în punctul x_0 se numeşte derivata de ordinul n a funcţiei f în punctul x_0 şi se notează $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^nf(x_0)}{dx^n}$.

<u>Teorema 3.12.</u> Dacă u(x) si v(x) sunt două funcţii derivabile de n ori pe un interval (a,b) atunci produsul u(x).v(x) este de n ori derivabilă pe (a,b) şi derivata lui este:

$$(u.v)^{(n)}=u^{(n)}.v+C_n^1\ u^{(n-1)}.v'+...+C_n^n\ uv^{(n)}$$

relaţie care se numeşte <u>formula lui Leibniz</u>.

<u>Demonstraţie</u>

Vom demonstra formula prin inducţie.

Pentru n=1, avem:

$(u.v)'=u'v+v'u$ adevarată.

Pentru n-1, presupunem formula adevarată, deci:

$$(u.v)^{(n-1)}=u^{(n-1)}.v+C_{n-1}^1u^{(n-2)}.v'+...+C_{n-1}^{n-1}uv^{(n-1)}$$

Vom avea:

$$(u.v)^{(n)}=((u.v)^{n-1})'=(u^{(n-1)}.v)'+C_{n-1}^1(u^{(n-2)}v')'+...+C_{n-1}^{n-1}(u.v^{(n-1)})'$$

$$=u^{(n)}.v+u^{(n-1)}v'+C_{n-1}^1(u^{(n-1)}.v'+u^{(n-2)}.v'')+...+C_{n-1}^{n-1}(u'.v^{(n-1)}+$$

$$+u.v^{(n)})=u^{(n)}.v+(1+C_{n-1}^1)u^{(n-1)}v'+(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2)u^{(n-2)}v''+$$

$$...+(C_{n-1}^{n-2}+C_{n-1}^{n-1})u'.v^{(n-1)}+u.v^{(n)}=u^{(n)}.v+C_n{}^1u^{(n-1)}v'+...$$

$\ldots + C_n^n u . v^{(n)}$ deoarece $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k+1} = C_n^{k+1}$.

Definiţia 3.24. Fie $f:[a,b]\to R$ si $x\in(a,b)$. Se spune ca funcţia f este diferenţiabilă de doua ori în punctul x_0 dacă f este derivabilă în x_0 şi dacă $f'(x)$ este diferenţiabilă în x_0. Diferenţiala de ordinul doi în x_0 se notează cu $d^2f(x_0)$ şi este egală cu:

$$d^2f(x_0) = f''(x_0)dx^2.$$

Definiţia 3.25. Fie $f:[a,b]\to R$ şi $x\in(a,b)$. Se spune că funcţia f este de n ori diferenţiabilă în punctul x_0 dacă f este derivabilă de n-1 ori în x_0 şi dacă $f^{(n-1)}(x)$ este diferenţiabilă în x_0.

Diferenţiala de ordinul n în x_0 se notează $d^nf(x_0)$ şi se defineşte prin egalitatea $d^nf(x_0)=f^{(n)}(x_0)dx^n$.

§ 3. Formula lui Taylor

Considerăm funcţia $f:[a,b]\to R$ continuă şi cu derivatele pîna la ordinul n inclusiv continue pe [a,b] şi avînd derivata de ordinul n+1 în fiecare punct din (a,b).

Definiţia 3.26. Definim, pentru orice $x\in[a,b]$, polinomul:

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)$$

unde $x_0\in[a,b]$ $(x_0<x)$ numit <u>polinomul lui Taylor</u> asociat funcţiei f în punctul x_0.

Notăm: $R_n(x)=f(x)-T_n(x)$

şi observăm că : $\lim\limits_{x\to x_0} R_n(x)=R_n(x_0)=f(x_0)-T_n(x_0)=0$.

Formula:

$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ se numeşte <u>formula lui Taylor</u> iar R_n se numeşte <u>restul</u> formulei lui Taylor.

Formula lui Taylor, aproximează, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, funcţia $f(x)$ prin polinomul lui Taylor $T_n(x)$.

Vom căuta restul $R_n(x)$ al formulei lui Taylor sub forma:

$$R_n(x) = (x-x_0)^p.A, p\in N.$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+(x-x_0)^p.A$$

Introducem funcţia:

$$g(t)=f(t)+\frac{x-t}{1!}f'(t)+\ldots+\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)+(x-x_0)^p.A$$

definită pentru $t\in[a,b]$ şi derivabilă pentru $t\in(a,b)$

Se vede că: $g(x)=f(x)$ şi $g(x_0)=f(x)$ deci $g(x)=g(x_0)$ şi se poate aplica teorema lui Rolle funcţiei g pe intervalul $[x_0,x]$. Deci există un punct $\xi\in(x_0,x)$ $x_0<\xi<x$, în care $g'(\xi)=0$.

$$g'(t)=f'(t)-f'(t)+\frac{x-t}{1!}f''(t)-\frac{x-t}{1!}f''(t)+\ldots$$

$$\ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1} . A$$

$$g'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1} . A$$

$g'(\xi)=0$ înseamnă: $\frac{(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi) - p(x-\xi)^{p-1} . A = 0$

de unde:

$$A = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi)$$

Restul de ordinul n al formulei lui Taylor este deci:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-\xi)^{n-p+!}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi), \; x_0 < \xi < x.$$

Pentru p=1 se obţine restul lui Cauchy:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Pentru p=n+1 se obţine restul lui Lagrange:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Dacă în formula lui Taylor se pune $x_0=0$ se obţine formula lui Mac-Laurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

unde restul $R_n(x)$ are una din formele:

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\theta x),$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) \; (Cauchy)$$

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x) \; (Lagrange)$$

Exemple:

1. Formula Mac-Laurin pentru funcţia $f(x)=e^x$ va fi:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

iar restul în forma lui Lagrange este:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},\ 0<\theta<1.$$

2. Să se calculeze valoarea aproximativă pentru $\sqrt[3]{30}$ şi să se evalueze eroarea comisă.

Scriem formula lui Taylor pentru funcţia $f(x)=\sqrt[3]{x}$ luînd x=30 şi $x_0=27$.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+R_2(\xi);27<\xi<30$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x};f(x_0)=\sqrt[3]{27}=3$$

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ ;\ f'(x_0)=\frac{1}{3^3}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\ ;\ f''(x_0)=-\frac{2}{3^7}$$

$$f'''(x)=\frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}};$$

$$\sqrt[3]{30}=3+\frac{3}{3^3}-\frac{3^2.2}{2.3^7}+R_2(\xi)\approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{343}\approx 3+0,1111-0,0029$$

$$\sqrt[3]{30}\approx 3,098$$

Eroarea comisă este mai mică decît:

$$R_2(\xi)=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(\xi)=\frac{3^3}{3!}\cdot\frac{10}{3^3.\sqrt[3]{\xi^8}}<\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3^8}=\frac{5}{3^9}$$

$=\frac{5}{2187}<\frac{5}{2180}=\frac{1}{1090}<\frac{1}{1000}$ deci primele 3 zecimale sunt bune.

Capitolul IV

FUNCTII REALE DE MAI MULTE VARIABILE

Definiția 4.1. Spunem că $f:E\to R$ este o funcție reală de n variabile reale $x_1,x_2,\dots,x_n$ definită pe $E\subset R^n$ dacă la orice vector $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E$ corespunde o valoare determinată $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R$.

În particular, funcția reală de două variabile reale $f:E\to R$ face să corespundă la orice pereche $(x,y)\in E\subset R^2$ o valoare $f(x,y)\in R$ și numai una.

Exemplu:

Să se afle domeniul de definiție al funcției:

$$z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-y^2}$$

$$\begin{cases}1-x^2\geq 0\\ 4-y^2\geq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x^2\leq 1\\ y^2\leq 4\end{cases} \quad \begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ -2\leq 4\leq 2\end{cases}$$

Fie $f:E\to R, E\subset R^2$ și (x_0,y_0) un punct de acumulare pentru E.

Definiția 4.2. Spunem că $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l$ dacă pentru orice $\epsilon>0$ există $\delta(\epsilon)>0$ cu proprietatea că dacă $|x-x_0|<\delta(\epsilon)$ și $|y-y_0|<\delta(\epsilon)$ să rezulte $|f(x,y)-l|<\epsilon$ pentru orice $(x,y)\neq(x_0,y_0)$.

Exemplu:

Să se arate că $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+y)=5$

$$|3x+y-5|=|3x-3+y-2|\leq 3|x-1|+|y-2|$$

Fie $\epsilon>0$; luăm $\delta(e)=\frac{e}{6}$ și atunci pentru orice x și y pentru care $|x-1|<\frac{e}{6}$ *si* $|y-2|<\frac{e}{6}$ rezultă:

$$|3x+y-5|\leq 3|x-1|+|y-2|<3.\frac{e}{6}+\frac{e}{6}=\frac{2e}{3}<e.$$

Definiția 4.3. Spunem că $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to y_0}} f(x,y)=l$ dacă pentru orice șir de puncte $P_n(x_n,y_n)\to P_0(x_0,y_0), P_n(x_n,y_n)\neq P_0(x_n,y_n)$, șirul $f(x_n,y_n)\to l$.

Aceste definiții se pot generaliza pentru funcții de n variabile reale.

Fie mulţimea $E\subset R^n$, $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ un punct de acumulare pentru E şi funcţia reală $f:E\to R$.

<u>Definiţia 4.4.</u> Spunem că $\lim_{x\to x^0} f(x)=l$ dacă şi numai dacă pentru orice $\epsilon>0$ există un număr $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi vectorul $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in E, x\neq x^0$ astfel că $|x_i-x_i^0|<\delta(\epsilon)$ pentru orice $i=1,2,\dots,n$, să rezulte $|f(x)-l|<\epsilon$.

<u>Definiţia 4.5.</u> Spunem că $\lim_{x\to x^0} f(x)=l$ dacă pentru orice şir $x^k(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k)\in E, x^k\neq x^0, x^k\to x^0$, avem $f(x^k)\to l$.

Fie funcţia $f:E\to R, E\subset R^n$ şi $x^0\in E$.

<u>Definiţia 4.6.</u> Funcţia f este continuă în punctul x^0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $x^k\to x^0, x^k\in E$, avem $f(x^k)\to f(x^0)$.

<u>Definiţia 4.7.</u> Funcţia f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice număr $\epsilon>0$ există un număr $\delta(\epsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi punctul $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$ cu $|x_i-x_i^0|<\delta(\epsilon)$ pentru orice $i=1,2,\dots,n$ să avem:

$$|f(x_1,x_2,\dots,x_n)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)|<\epsilon.$$

<u>Definiţia 4.8.</u> Funcţia $f:E\to R, E\subset R^n$, este continuă pe E dacă este continuă în orice punct $x\in E$.

<u>Exemplu</u>:

Să se arate că funcţia :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & daca\ x^2+y^2\neq 0\\ 0, & daca\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

este continuă în tot planul.

Observăm că : $\left|\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{|x|.|y|}{x^2+y^2}.|x|.y^2\le\dfrac{1}{2}|x|.y^2$

deoarece:

$$(|x|-|y|)^2\ge 0\to x^2+y^2-2|x|.|y|\ge 0\to\frac{|x|.|y|}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$$

Deci pentru orice $\epsilon>0$, există $\delta(\epsilon)=\sqrt[3]{\epsilon}$ astfel încît pentru $|x|<\delta(\epsilon)$ şi $|y|<\delta(\epsilon)$ rezultă:

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|.y^2<\frac{1}{2}.\sqrt[3]{\epsilon}.\sqrt[3]{\epsilon^2}=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.$$

§1. Derivate parțiale

Fie funcția reală de n variabile reale $f:E\to R, E\subset R^n$ și $x^0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ un punct interior al lui E.

Definiția 4.9. Funcția $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ este derivabilă parțial în punctul $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ în raport cu variabila $x_k (1\le k\le n)$ dacă:

$$\lim_{x_k\to x_k^0}\frac{f(x_1^0,\dots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\dots,x_n^0)-f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)}{x_k-x_k^0}$$

există și este finită. Limita respectivă se numește derivată parțială în punctul x^0 a funcției $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ în raport cu variabila x_k și se notează:

$$f_{x_k}(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0) \text{ sau } \frac{\partial f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)}{\partial x_k}$$

În particular pentru funcția de două variabile vor fi două derivate parțiale. Fie $f:E\to R, E\in R^2$ și $(x_0,y_0)\in E$.

Dacă există și este finită limita:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

ea se numește derivata parțială a funcției $f(x,y)$ în punctul (x_0,y_0) în raport cu x și se notează

$$f_x'(x_0,y_0) \text{ sau } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}.$$

Dacă există și este finită limita:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

ea se numește derivata partială a funcției $f(x,y)$ în punctul (x_0,y_0) în raport cu y și se notează:

$$f_y'(x_0,y_0) \text{ sau } \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

Exemplu:

Să se afle derivatele parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ si $\frac{\partial z}{\partial y}$ pentru funcția

: $z=(x^2+y^2)\sin\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\frac{y}{x}-(x^2+y^2)\cdot\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x};\ \frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin\frac{y}{x}+(x^2+y^2)\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}$$

Fie $f:E\to R, E\in R^2$ o funcţie reală de două variabile reale, derivabilă parţial în raport cu x şi cu y în fiecare punct interior (x,y) al lui E. Dacă derivatele parţiale $f'_x(x,y)$ si $f'_y(x,y)$ definite pe $E\subset R^2$ sunt derivabile parţial în raport cu x şi y, derivatele lor parţiale se numesc derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f şi se notează:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f''_{x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f''_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f''_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f''_{y^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Deci o funcţie de doua variabile are patru derivate parţiale de ordinul doi.

În general, o funcţie reală de n variabile $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ are n^2 derivate parţiale de ordinul doi.

Spunem că funcţia $f:X\to R, x\subset R^n$, este de clasa C^k dacă este continuă şi are derivate parţiale continue pîna la ordinul K (inclusiv).

<u>Teorema 4.1. (Schwartz)</u> Fie $f:E\to R, E\in R^2$. Dacă funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale mixte de ordinul doi într-o vecinatate V a unui punct $(x_0,y_0)\in E$, şi dacă $f''_{xy}(x,y)$ si $f''_{yx}(x,y)$ sunt continue în (x_0,y_0) atunci $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

<u>Demonstraţie.</u>

Considerăm funcţia:

$F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y)-f(x,y_0)+f(x_0,y_0)$

$\phi(y)=f(x,y)-f(x_0,y)$

$F(x,y)=\phi(y)-\phi(y_0)=(y-y_0)\phi'(\eta)$ (t.creşterilor finite)

Dar : $\phi'(y)=f'_y(x,y)-f'_y(x_0,y)=(x-x_0)f''_{yx}(\xi,y)$

deci: $F(x,y)=(x-x_0)(y-y_0)f''_{yx}(\xi,\eta)$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{F(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}=f''_{yx}(x_0,y_0)\qquad (f''_{yx}\text{ continuă în }(x_0,y_0))$$

$$\psi(x)=f(x,y)-f(x,y_0)$$

$$F(x,y)=\psi(x)-\psi(x_0)=(x-x_0)\psi'(\xi^*)$$

$$\psi'(x)=f'_x(x,y)-f'_x(x,y_0)=(y-y_0)f''_{xy}(x,\eta^*)$$

$$F(x,y)=(x-x_0)(y-y_0)f''_{xy}(\xi^*,\eta^*)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{F(x,y)}{(x-x_0)(y-y_0)}=f''_{xy}(x_0,y_0).$$

deci: $f''_{x,y}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Consecinţa: $f'''_{x^2y}=f'''_{yx^2}$,etc.

<u>Formula criteriilor finite</u> pentru funcţii de 2 variabile. Considerăm funcţia $f:E\to R, E\subset R^2$, f derivabilă parţial în raport cu x şi cu y în $(x_0,y_0)\in E$.
Fie funcţia $:F(t)=f[x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0)]$
$F(1)=f(x,y)$; $F(0)=f(x_0,y_0)$
$F(1)-F(0)=(1-0)\ F'\ (\theta)$, $0<\theta<1$

$$F'(t)=f'_x[x_0+t(x-x_0),y_0+t(y-y_0)](x-x_0)+$$

$$+f'_y[x_0+t(x-x_0).y_0+t(y-y_0)](y-y_0)$$

$$F'(\theta)=f'_x[x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)](x-x_0)+$$

$$+f'_y[x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)](y-y_0)$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=(x-x_0)f'_x[x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)]+$$

$$+(y-y_0)f'_y[x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)]$$ f.creşterilor finite

§2. <u>Diferenţiabilitate</u>

<u>Definiţia 10.</u> Funcţia f(x,y) este diferenţiabilă în (x_0,y_0) dacă există constantele A şi B astfel încît:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+\varepsilon(x,x_0,y,y_0)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

unde: $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x,x_0,y,y_0)=0$ *si* $\lim\limits_{y\to y_0}\varepsilon(x,x_0,y,y_0)=0$.

Dacă funcţia f(x,y) este derivabilă în (x_0,y_0) în raport cu x şi cu y respectiv, atunci ea este diferenţiabilă în (x_0,y_0).

Dacă funcţia f(x,y) este diferenţiabilă în (x_0,y_0) ea este derivabilă parţial în (x_0,y_0) în raport cu x şi cu y şi avem:

$$A=f'_x(x_0,y_0) \text{ si } B=f'_y(x_0,y_0).$$

Expresia $(x-x_0)\,f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\,f'_y(x_0,y_0)$ se numeşte diferenţiala funcţiei f(x,y) în (x_0,y_0) şi se notează:

$$df(x_0,y_0)=(x-x_0)\,f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)\,f'_y(x_0,y_0).$$

Dacă f(x,y)=x atunci $f'_x=1,\ f'_y=0$ şi $dx=x-x_0$

Dacă f(x,y)=y atunci $f'_x=0,\ f'_y=1$ şi $dy=y-y_0$

Deci: $df=f'_x dx+f'_y dy$

sau: $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$

În general, pentru o funcţie reală de n variabile reale, diferenţiala va fi:

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial X^2}dx_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Diferenţiala a doua a funcţiei f(x,y) continuă şi cu derivate parţiale de ordinul I şi II continue va fi:

$$d^2f=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dy\right)dx+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy=$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

$$d^2f=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(2)}f$$

unde $\left[\dfrac{\partial}{\partial x}dx+\dfrac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(2)}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2+2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2$

este operatorul de diferenţiere de ordinul doi.

Dacă funcţia $f(x,y):E\to R, E\subset R^2$ este continuă şi are în E toate derivatele parţiale de ordinul n continue, atunci diferenţiala de ordin n a funcţiei f(x,y) este:

$$d^n f = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(n)} f$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}dx^n + C_n^1\frac{\partial^n}{\partial n^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy + \ldots$$

$$\ldots + C_n^k\frac{\partial^n}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k + \ldots + C_n^n\frac{\partial^n}{\partial y^n}dy^n$$

este operatorul de diferenţiere de ordinul n.

Pentru funcţii reale de n variabile reale $x_1, x_2, \ldots x_n$ diferenţiala de ordinul p va fi:

$$d^p f = \left[\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right]^{(p)} f$$

unde:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right]^{(p)} = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ (\alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p)}} \frac{p!}{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_n!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^p}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\ldots dx_n^{\alpha_n}$$

este operatorul de diferenţiere de ordinul p al unei funcţii de n variabile.

Derivatele şi diferenţialele funcţiilor compuse

Teorema 4.2. Fie funcţiile $u:X \to R$, $v:X \to R$, $X \subset R$ cu derivate continue pe X. Dacă funcţia $f(u,v):E \to R$, $E \subset R^2$, are derivate parţiale continue pe E, atunci funcţia $F(x) = f(u(x), v(x))$ are derivata continuă pe X, dată de:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{\partial x}$$

Demonstraţie.

$$F(x) - F(x_0) = f(u, v) - f(u_0, v_0) = f'_u(u_0, v_0)\,(u-u_0) + f'_v(u_0, v_0)\,(v-v_0)$$

$$+ \varepsilon(u, u_0, v, v_0)\,\rho \text{ unde } \rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

$$\lim_{x \to x_0}\frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} = f'_u(u_0 v_0)\lim_{x \to x_0}\frac{u-u_0}{x-x_0} + f'_v(u_0, v_0)\lim_{x \to x_0}\frac{v-v_0}{x-x_0}$$

$$\frac{dF(x_0)}{dx} = f'_u(u_0, v_0) \cdot u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0) \cdot v'(x_0)$$

sau:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Derivata funcţiei:

$F(x)=f(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$

va fi:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{du_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dx}$$

iar diferenţiala ei va fi:

$$dF(x) = F'(x)\,dx = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dx} dx + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} \cdot \frac{du_n}{dx} dx$$

$$dF(x) = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n} du_n$$

<u>Aplicaţie</u>

Funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ se numeşte omogenă de grad m dacă:

$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_p) = t^m f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$

Dacă derivăm relaţia în raport cu t şi apoi facem $t=1$, obţinem relaţia lui Euler pentru funcţii omogene:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + x_p \frac{\partial f}{\partial x_p} = m f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

<u>Teorema 4.3.</u> Dacă funcţiile $u(x,y):X \to R$ şi $v(x,y):X \to R$, $X \subset R^2$, au derivate parţiale continue pe X şi dacă funcţia $f(u,v):E \to R$, $E \subset R^2$, are derivate parţiale continue pe E, atunci funcţia $F(x,y)=f(u(x,y), v(x,y))$ are derivate parţiale continue pe $X \subset R^2$ date de:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Demonstraţia este similară cu cea a teoremei 4.2. deoarece la derivarea în raport cu x, y este constant deci F este considerată funcţie de o variabilă.

Diferenţiala funcţiei $F(x,y)$ este:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv$$

adică diferenţiala este invariantă faţă de operaţia de compunere a funcţiilor.

§3. Formula lui Taylor pentru funcţii de 2 variabile.

Considerăm funcţia $f(x,y);E\to R, E\subset R^2$, derivabilă parţial de $n+1$ ori şi cu derivate parţiale continue, deci toate derivatele mixte sunt egale şi fie (x_0,y_0) un punct interior al lui E. Rezultă că şi funcţia de t:

$$F(t)=f(x_0+(x-x_0)t,\, y_0+(y-y_0)t)$$

are derivate pîna la ordinul $n+1$ pentru $t\in[0,1]$ şi i se poate aplica formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă:

$$F(1)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)+\frac{1}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)+R_t$$

unde

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta),\qquad 0<\theta<1.$$

$$F(1)=f(x,y)\ ;\ F(0)=f(x_0,y_0)$$

$$F(t)=f(x(t),y(t))\ \ unde\ :x(t)=x_0+(x-x_0)t,\ y(t)=y_0+(y-y_0)t$$

$$F'(t)=\frac{\partial x}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)$$

$$F'(0)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]f(x_0,y_0)$$

În general

$$F^{(m)}(t)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(m)}f(x(t),y(t))$$

şi deci:

$$F^{(m)}(0)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(m)}f(x_0,y_0)$$

Formula lui Taylor pentru funcţia $f(x,y)$ în punctul (x_0,y_0) se scrie:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]f(x_0,y_0)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(2)}f(x_0,y_0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(n)} f(x_0,y_0)+R_n$$

unde

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(n+1)} f(x_0+\theta(x-x_0),\, y_0+\theta(y-y_0))$$

cu $0<\theta<1$ şi $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{|R_n|}{\rho^n}=0$, $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Formula lui Taylor pentru funcţii de p-variabile.

Fie $f(x_1,x_0,\ldots,x_p):E\to R$, $E\subset R^p$, derivabilă parţial de n+1 ori şi cu derivate continue (deci toate derivatele mixte sunt egale) şi $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)$ un punct interior al lui E.Generalizînd rezultatul obţinut pentru funcţia de doua variabile avem:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_p)=f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)+$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\left[x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_p-x_p^0)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(m)} f(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_p^0)+R_n$$

cu

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left[(x_1-x_1^0)\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+(x_p-x_p^0)\frac{\partial}{\partial x_p}\right]^{(n+1)} f(x_1^0+\theta(x_1-x_1^0),$$

$$,\ldots,x_p+\theta(x_p-x_p^0))$$

care este formula lui Taylor pentru funcţii de p variabile.

§4. Maxime si minime pentru funcţii reale de două variabile reale.

Definiţie. Fie $f(x,y):X\to R$, $X\subset R^2$.

Un punct $(x_0,y_0)\in X$ se numeşte punct de minim (relativ) al funcţiei $f(x,y)$ dacă există o vecinatate V a lui (x_0,y_0) astfel încît pentru orice punct $(x,y)\in V\cap X$ să avem $f(x,y)\geq f(x_0,y_0)$.

Un punct $(x_0,y_0)\in X$ se numeşte punct de maxim (relativ) al funcţiei $f(x,y)$ dacă există o vecinatate V a lui (x_0,y_0) astfel încît pentru orice $(x,y)\in V\cap X$ să avem $f(x,y)\leq f(x_0,y_0)$.

Teorema 3. Fie $f(x,y):X\in R$, $X\subset R^2$ şi (x_0,y_0) un punct interior al lui X.Dacă funcţia $f(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul întîi în (x_0,y_0) şi dacă (x_0,y_0) este un extremum (maxim sau minim) atunci

$f'_x(x_0,y_0)=0$ și $f'_y(x_0,y_0)=0$ (condiții necesare de extrem) (x_0,y_0) se numește punct staționar.

Demonstrație

Funcția $f(x_0,y)$ de o variabilă este derivabilă în punctul $y=y_0$ și are în acest punct un extremum deoarece $f(x_0,y)\le f(x,y)$ sau $f(x_0,y)\ge f(x,y)$ pentru $y\in V$. Conform teoremei lui Fermat $f'_y(x_0,y_0)=0$.

Funcția $f(x,y_0)$ este derivabilă în x_0 și are în acest punct un extremum, deci $f'_x(x_0,y_0)=0$.

Teorema 4. Fie $f:X\to R, X\subset R^2$, derivabilă parțial de trei ori pe X și (x_0,y_0) o soluție a sistemului $f'_x(x,y)=0$ $f'_y(x,y)=0$.

Dacă în punctul (x_0,y_0), $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ atunci punctul (x_0,y_0) este un punct de minim al funcției $f(x,y)$.

Dacă în punctul (x_0,y_0) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ atunci (x_0,y_0) este un punct de maxim al funcției $f(x,y)$.

Dacă în punctul (x_0,y_0) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2<0$ atunci punctul (x_0,y_0) nu este punct de extrem al funcției $f(x,y)$.

Dacă în punctul (x_0,y_0) avem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=0$ nu putem afirma despre punctul (x_0,y_0) dacă este sau nu punct de extrem pentru funcția $f(x,y)$.

Demonstrație

Aplicăm funcției $f(x,y)$ formula lui Taylor:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+$$

$$+(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{1}{2}(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+R_2.$$

Dar $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0$ și $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0$ și $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{R_2}{\rho^2}=0$.

Deci pentru (x,y) suficient de aproape de (x_0,y_0) rezultă:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(x-x_0)^2 r+(x-x_0)(y-y_0)s+\frac{1}{2}(y-y_0)^2 t$$

unde am folosit notaţiile lui Monge:

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(y-y_0)^2\left[r\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2+2s\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)+t\right]$$

Dacă (x_0,y_0) este un punct de minim al funcţiei f(x,y) atunci: $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$
Rezultă:

$$r\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2+2s\left(\frac{x-x_0}{y-y_0}\right)+t>0$$

pentru orice valoare a raportului $\frac{x-x_0}{y-y_0}$, ceeace se întîmplă dacă:

$$\begin{cases} s^2-rt<0 \\ r>0 \end{cases}$$

adică: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ în punctul (x_0,y_0) dacă acesta este un punct minim al funcţiei f(x,y) (Fig.4.1).

Dacă (x_0,y_0) este un punct de maxim al funcţiei f(x,y) atunci rezultă condiţiile: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ şi $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$

Dacă $s_2-rt>0$ atunci $f(x,y)-f(x_0,y_0)$ nu păstrează un semn constant în vecinatatea punctului (x_0,y_0) deci (x_0,y_0) nu este punct de extrem pentru funcţia f(x,y) şi el se numeşte punct sa (Fig.4.3).

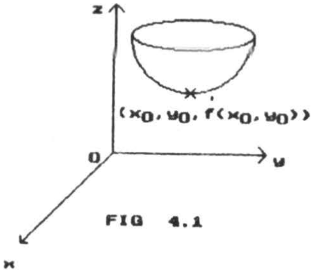


FIG 4.1

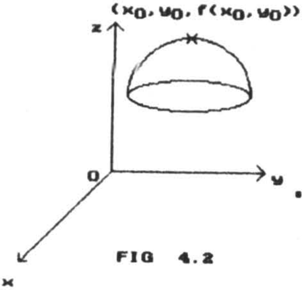


FIG 4.2

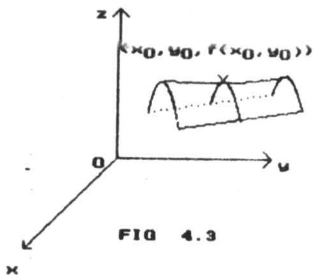


FIG 4.3

Exercitii

1. Să se calculeze derivatele parțiale ale funcțiilor:

$1^\circ.\ f(x,y,z)=x^2y^3z^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy^3z^4\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=3x^2y^2z^4\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z}=4x^2y^3z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2y^3z^4\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x^2yz^4\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=12x^2y^3z^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6xy^2z^4,\ etc.$$

$2^\circ.\ f(x,y,z)=\phi(x-y,x-z)$, ϕ este o funcție arbitrară de clasa C^2

$u=x-y\ ;\ v=y-z$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial u}+\frac{\partial \phi}{\partial v}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial \phi}{\partial u}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{\partial \phi}{\partial v}$$

$$\frac{{}^2 f}{x^2}=\frac{2}{u^2}+\frac{2}{u\ v}+\frac{}{v^2}\ ;\ \frac{2}{y^2}=\frac{2}{u^2}\ ;\ \frac{{}^2 f}{z^2}=\frac{2}{v}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 \phi}{\partial u\partial v}\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=-\frac{\partial^2 \phi}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial u\partial v}$$

2. Să se afle extremele funcției:

$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$$

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x$$

$$s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3$$

$$t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y$$

Punctele staționare sunt : $O(0,0)$; $M_1(1,1)$

$rt-s^2=-9$ deci funcția nu are extrem în O.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 t_1 - s_1^2 = 27 \\ r_1 = 6 \end{array}\right\}$$ deci funcţia are în $M_1(1,1)$ 0

valoare minimă $f_{min} = -1$.

Capitolul V

FUNCTII IMPLICITE

§ 1. Functii implicite si sisteme de functii implicite

Definiţia 5.1. Fie ecuaţia $F(x,y)=0$, unde $F(x,y)$ este o funcţie reală de două variabile reale definită pe o mulţime $X\subset R^2$. O funcţie $y=f(x)$ definită pe mulţimea $E\subset R$, astfel încît pentru orice $x\in E$, $(x,f(x))\in X$ se numeşte soluţie în raport cu y a ecuaţiei $F(x,y)=0$ pe mulţimea E dacă $F(x,f(x))=0$ pentru $x\in E$.

Exemple:

1. Ecuaţia $2x-3y+5=0$ are o infinitate de soluţii reale în raport cu y date de : $f(x)=\frac{2x+5}{3}$ pentru $x\in R$.

2. Ecuaţia $x^2+y^2-3=0$ are, în raport cu y, o infinitate de soluţii definite pentru $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ date de:

$$f(x)=\pm\sqrt{3-x^2}$$

3. Ecuaţia $3x^2+2y^2+1=0$ nu are nici o soluţie reală.

Găsirea soluţiilor unei ecuaţii $F(x,y)=0$ este în general dificilă. Se pot însă studia proprietăţile acestor soluţii direct pe ecuaţia $F(x,y)=0$ fără să fie nevoie de explicitarea lor. Teoremele care stabilesc aceste proprietăţi poartă numele de teoreme de existenţă.

Teorema I de existenţă. Fie $F(x,y)$ o funcţie reală definită pe $X\times Y$, $X\subset R$, $Y\subset R$ şi (x_0,y_0) un punct interior al lui $X\times Y$ (deci x_0 interior lui X şi y_0 interior lui Y). Dacă $F(x_0,y_0)=0$, dacă $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ sînt continue pe o vecinătate a lui (x_0,y_0) şi dacă $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, atunci există o funcţie unică $y=f(x)$ astfel încît $f(x_0)=y_0$ şi $F(x,f(x))=0$ într-o vecinătate a lui x_0, care are derivata continuă într-o vecinătate a lui x_0 dată de : $f'(x)=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$. Dacă $F(x,y)$ are derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a lui x_0, atunci $f(x)$ are derivata de ordinul p continuă într-o vecinătate a lui x_0.

Demonstraţia existenţei funcţiei $y=f(x)$ este mai dificilă dar expresia derivatei y' se află derivînd funcţia compusă:

$$F(x,y(x))=0\,,\ F'_x\cdot 1+F'_y\cdot y'=0\,,\ y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

Pentru aflarea derivatelor de ordin superior ale unei funcţii implicite procedăm la fel:

$$F''_{x^2} + F''_{xy} \cdot y' + \left(F''_{yx} + F''_{y^2} \cdot y'\right) y' + F'_y \cdot y'' = 0$$

$$y'' = -\frac{F'^2_y F''_{x^2} - 3F'_x F'_y F''_{xy} + F'^2_x F''_{yy}}{F'^3_y}$$

Exemple:

1. $x^3y^2 - x^2y^3 + 2x - 3y + 1 = 0$
   $3x^2y^2 + 2x^3yy' - 2xy^3 - 3x^2y^2y' + 2 - 3y' = 0, y' = \ldots$
   $6xy^2 + 6x^2yy' + 6x^2yy' + 2x^3y'^2 + 2x^3yy'' - 2y^3 - 6xy^2y' - 6xy^2y'$
   $-6x^2yy'^2 - 3x^2y^2y'' - 3y'' = 0, y'' = \ldots$
2. $f(x^3+2y, y^2-3x) = 0$ unde y este funcţie implicită de x
   $x^3 + 2y = u$; $y^2 - 3x = v$;

$$f'_u \cdot (3x^2 + 2y') + f'_v \cdot (2yy' - 3) = 0, \ldots y' = \ldots$$

$$\left[f''_{u^2}(3x^2+2y') + f''_{uv}(2yy'-3)\right](3x^2+2y') + f'_u(6x+2y'') +$$

$$+\left[f''_{vu} \cdot (\ x + \ y') + f''_{v^2} \cdot (\ yy' - \ )\right] \cdot (\ yy' - \ ) + f'_v(\ y' + \ yy'') = 0 \ldots y'' = \ldots$$

Definiţia 5.2. Fie ecuaţia $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0$ unde $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ este o funcţie reală de n+1 variabile reale definită pe o mulţime $X \subset R^{n+1}$. O funcţie $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ definită pe $E \subset R^n$ este soluţie în raport cu y a acestei ecuaţii pe mulţimea E dacă pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$ rezultă $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$

Teorema II de existenţă. Fie $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ o funcţie reală definită pe $X \times Y, X \subset R^n, Y \subset R$, $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un punct interior al mulţimii X şi y_0 un punct interior lui Y. Dacă $F(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0) = 0$, dacă funcţia $F(x_1, \ldots, x_n, y)$ şi derivatele sale parţiale $F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_n}, F'_y$ sînt continue pe o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ şi dacă $F'_y(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0) \neq 0$ atunci există o funcţie unică $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ astfel încît $f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = y_0$ şi $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, funcţia y avînd derivate parţiale continue în raport cu x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ într-o vecinătate a lui x^0 date de :

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, y)}{F'_y(x_1, \ldots, x_n, y)}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Dacă $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ are derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a lui $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_0)$ atunci funcţia implicită $f(x_1, \ldots, x_n)$ are derivate parţiale continue într-o vecinătate a lui $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Demonstraţia existenţei funcţiei $y=f(x_1, \ldots, x_n)$ este dificilă dar expresia derivatelor parţiale se pot afla derivînd funcţia compusă:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y(x_1, x_2, \ldots, x_n))=0$$

$$F'_{x_i} \cdot 1 + F'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y}$$

Derivatele parţiale de ordin superior se obţin la fel:

$$F''_{x_i x_j} + F''_{x_i y} \frac{\partial y}{\partial x_j} + \left(F''_{y x_j} + \frac{\partial y}{\partial x_j} F''_{y^2}\right) \frac{\partial y}{\partial x_i} + F'_y \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

Exemple :

1. $x^2+y^3+z^2-2x+z-1=0$ unde $z=z(x,y)$

$$2x+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2 + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial z}{\partial x} = \ldots$$

$$3y^2+2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots$$

3. $F(2x+y, 3y+2z, z-x)=0$ unde $z=z(x,y)$
$u=2x+y$, $v=3y+2z$, $w+z-x$

$$F'_u \cdot 2 + F'_v \cdot 2\frac{\partial z}{\partial x} + F'_w\left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \ldots$$

$$F'_u \cdot 1 + F'_v\left(3 + 2\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F'_w \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \ldots$$

Sisteme de funcții implicite

Definiția 5.3. Un sistem de m ecuații:

$$(1)\qquad \begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)=0\\ F_2(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)=0\end{cases}$$

unde $F_k(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)$, $(1\le k\le m)$, sunt m funcții reale de $n+m$ variabile reale $x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m$ definite pe XxY unde $X\subset R^n$, $Y\subset R^m$, se numește sistem de m funcții implicite.

Definiția 4. Un sistem de m funcții reale

$$\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ y_2&=f_2(x_1,\ldots,x_n)\\ &\ldots\ldots\ldots\\ y_m&=f_m(x_1,\ldots,x_n)\end{aligned}$$

de n variabile reale $x_1,\ldots,x_n$, definite pe o mulțime $A\subset X\subset R^n$, este o soluție a sistemului (1) în raport cu variabilele $y_1,y_2,\ldots,y_m$ pe mulțimea A dacă înlocuind în sistem pe $y_i(i=1,\ldots,m)$ îl verifică identic:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n;f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))=0\\ F_2(x_1,\ldots,x_n;f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m(x_1,\ldots,x_n;f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))=0\end{cases}$$

Exemplu:

Funcțiile: $x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2=z$, definesc pe y și z ca funcții de x

și formează un sistem care are pentru $x\in\left[-\frac{\pm}{\sqrt{2}},\frac{\pm}{\sqrt{2}}\right]$ o infinitate de

soluții date de:

$$\begin{cases} y=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}-x^2}\\ z=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\end{cases}$$

Teorema III de existență. Fie sistemul de m funcții reale de n+m variabile:

$$\begin{cases} F_1(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)=0\end{cases}$$

definit pe XxY, $X\subset R^n$, $Y\subset R^m$ și $(x_1^0,\ldots,x_n^0;y_1^0,\ldots,y_m^0)$ un punct interior lui XxY.

Dacă:

1) $F_i(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)=0,\ i=1,2,\ldots,m;$

2) funcţiile reale F_i, $(i=1,2,\ldots,m)$, au derivate parţiale $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$, $(k=1,2,\ldots,n)$; $\frac{\partial F_i}{\partial y_h}$, $(h=1,2,\ldots,m)$ continue într-o vecinătate UxV a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$;

3) determinantul:

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

numit determinantul funcţional sau iacobianul funcţiilor $F_1, F_2, \ldots, F_m$ în raport cu variabilele $y_1, y_2, \ldots, y_m$, este diferit de zero în punctul $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$.

Atunci:

1') există un sistem de m funcţii reale de n variabile reale $x_1, \ldots, x_n$,

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

astfel încît

$$y_i^0 = f_i(x_1^0, \ldots, x_n^0),\ i=1,2,\ldots,m$$

şi care verifică identic sistemul (1):

$$F_i(x_1, \ldots, x_n; f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) = 0,\ i=1,2,\ldots,m$$

2') funcţiile reale $f_1, \ldots, f_m$ au derivate parţiale continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \subset X$ date de:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}},\ \ldots,\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}}$$

3') dacă funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_m$ au derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_n^0)$ atunci şi funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ au derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Demonstraţia existenţei funcţiilor $f_1, \ldots, f_m$ este mai dificilă, dar expresiile derivatelor parţiale se pot afla destul de uşor.

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n; f_1, \ldots, f_m)=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ F_m(x_1, \ldots, x_n; f_1, \ldots, f_m)=0\end{cases}$$

Derivăm în raport cu x_i :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_1}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial f_i}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F_m}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0\end{cases}$$

Acesta este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ care se rezolvă cu regula lui Cramer:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\ldots,F_m)}{D(x_i,y_2,\ldots,y_m)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}};\ \ldots;\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}=-\frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_{m-1},x_i)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}}$$

Exemplu:

$$\begin{cases} x+y+u^2-v^2=1 \\ x^2+y^2+u+v=2 \end{cases}$$,u și v funcții de x și y

Derivăm în raport cu x:

$$\begin{cases} 1+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2x+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial x}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 2x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-1-2xv}{2u+2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-4ux+1}{2u+2v}$$

Derivăm în raport cu y:

$$\begin{cases} 1+2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ 2y+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-1-2yv}{2u+2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-4uy+1}{2u+2v}$$

§ 2. Dependența funcțională.

Definiție. Funcția $F(x_1,x_2,\dots,x_n):X\to R, X\subset R^n$ depinde de funcțiile reale $y_1=f_1(x_1,\dots,x_n), y_2=f_2(x_1,\dots,x_n),\dots,y_m=f_m(x_1,\dots,x_n)$ definite pe $X\subset R^n$, dacă există o funcție reală de m variabile $\Phi(y_1,y_2,\dots,y_m)$ definită pe o mulțime $Y\subset R^m$ astfel încît pentru $x\in X$ să avem:

$$F(x_1,\dots,x_n)=\Phi(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$$

Exemplu:
Funcția $f(x,y)=x^3+y^3$ depinde de funcțiile $g(x,y)=x+y$ și $h(x,y)=x^2-xy+y^2$ deoarece $f=g.h$.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_i} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x_i} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}}\ ,\ \ldots,\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}=\frac{-\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_{m-1}} & \frac{\partial F_m}{\partial x_i}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}}$$

3') dacă funcţiile $F_1, F_2, \ldots, F_m$ au derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_n^0)$ atunci şi funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_m$ au derivate parţiale de ordinul p continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Demonstraţia existenţei funcţiilor $f_1, \ldots, f_m$ este mai dificilă, dar expresiile derivatelor parţiale se pot afla destul de uşor.

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n; f_1, \ldots, f_m) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n; f_1, \ldots, f_m) = 0 \end{cases}$$

Derivăm în raport cu x_i :

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_1}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i} + \frac{\partial F_m}{\partial f_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_m}{\partial f_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i} = 0 \end{cases}$$

Acesta este un sistem liniar neomogen în necunoscutele $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\ldots,m)$ care se rezolvă cu regula lui Cramer:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_i, y_2, \ldots, y_m)}}{\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}} ; \ldots ; \frac{\partial f_m}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_{m-1}, x_i)}}{\frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}}$$

Exemplu:

$$\begin{cases} x+y+u^2-v^2=1 \\ x^2+y^2+u+v=2 \end{cases}$$,u şi v funcţii de x şi y

Derivăm în raport cu x:

$$\begin{cases} 1+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}-2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ 2x+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial x}{\partial x}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 2x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-1-2xv}{2u+2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-4ux+1}{2u+2v}$$

Derivăm în raport cu y:

$$\begin{cases} 1+2u\dfrac{\partial u}{\partial y}-2v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \\ 2y+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2v \\ 2y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-1-2yv}{2u+2v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\begin{vmatrix} 2u & 1 \\ 1 & 2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & -2v \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{-4uy+1}{2u+2v}$$

§ 2. Dependenţa funcţională.

Definiţie. Funcţia $F(x_1,x_2,\ldots,x_n):X\to R$, $X\subset R^n$ depinde de funcţiile reale $y_1=f_1(x_1,\ldots,x_n)$, $y_2=f_2(x_1,\ldots,x_n)$, ..., $y_m=f_m(x_1,\ldots,x_n)$ definite pe $X\subset R^n$, dacă există o funcţie reală de m variabile $\Phi(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ definită pe o mulţime $Y\subset R^m$ astfel încît pentru $x\in X$ să avem:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\Phi(f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n))$$

Exemplu:

Funcţia $f(x,y)=x^3+y^3$ depinde de funcţiile $g(x,y)=x+y$ şi $h(x,y)=x^2-xy+y^2$ deoarece $f=g.h$.

Definiție. Funcțiile reale $y_1=f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n=f_n(x_1,\dots,x_n)$ definite pe $X\subset R^n$ sunt în dependență funcțională pe o mulțime $A\subset X$ dacă cel puțin una dintre ele depinde de celelalte pe mulțimea A.

Teoremă. Condiția necesară și suficientă ca n funcții reale de n variabile independente $y_1=f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n=f_n(x_1,\dots,x_n)$ definite pe $X\subset R^n$, cu derivate parțiale continue pe X, să fie în dependență funcțională pe mulțimea $A\subset X$ este ca determinantul funcțional:

$$\frac{D(y_1,\dots,y_n)}{D(x_1,\dots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}$$

să fie identic nul pe A.
(fară demonstrație)

Exemplu:

Funcțiile: $y_1=x+y+z$; $y_2=x^2+y^2+z^2$ și $y^3=xy+xz+yz$ sunt în dependența funcțională pe R^3 deoarece:

$$\frac{D(y_1,y_2,y_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2x & 2y & 2z\\ y+z & x+z & x+y\end{vmatrix}=0$$

Definiție. Funcțiile $f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_n(x_1,\dots,x_n)$ definite pe $X\subset R^n$ sînt independente într-un punct $(x_1^0,\dots,x_n^0)\in X$ dacă nici una dintre funcții nu depinde de celelalte într-o vecinătate a lui $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$.

Funcțiile $f_1,\dots,f_n$ sunt independente pe X dacă sunt independente în orice punct interior al lui X.

Teoremă. Funcțiile $f_1,f_2,\dots,f_n$ definite pe $X\subset R^n$ sunt independente în punctul $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)$ dacă determinantul funcțional

$$\frac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)}$$

este diferit de zero în acest punct.
(fară demonstrație; această teoremă este de fapt o consecință a teoremei precedente).

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

este diferit de zero în acest punct.
(fară demonstrație; această teoremă este de fapt o consecință a teoremei precedente).

§3. Extreme condiționate (legate) pentru funcții de 2 variabile

Definiție. Fie funcția $f(x,y): X \to R, X \subset R^2$ și relația $\phi(x,y)=0$. Un punct $(x_0, y_0) \subset X$ este punct de extrem al funcției $f(x,y)$ condiționat de relația $\phi(x,y)=0$ dacă $\phi(x_0,y_0)=0$ și $f(x_0,y_0)$ este un extrem al funcției $f(x,y)$.

Teoremă : Extremele funcției $f(x,y)$ pentru x și y legate prin relația $\phi(x,y)=0$ sunt extremele funcției

$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$

Punctele staționare și constanta ϕ se determină din sistemul:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=0\ ,\ \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0\ ,\ \phi(x,y)=0$$

Se cercetează apoi care dintre punctele găsite sunt puncte de extrem ale funcției $F(x,y)$.

Exemplu:

Să se afla extremele funcției $f(x,y)=x^2+y^2$ cu condiția $x+2y=5$.

$$F(x,y)=x^2+y^2+\lambda(x+2y-5)$$

$$\begin{matrix} F'_x=2x+\lambda \\ F'_y=2y+2\lambda \end{matrix} \qquad \begin{cases} 2x+\lambda=0 \\ 2y+2\lambda=0 \\ x+2y=5 \end{cases} \to \quad \begin{matrix} \lambda=-2 \\ \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} r=F''_{x^2}=2 \\ s=F''_{xy}=0 \\ t=F''_{y^2}=2 \end{matrix} \qquad \begin{cases} rt-s^2=4>0 \\ r=2>0 \end{cases}$$

Deci funcția $f(x,y)=x^2+y^2$ are pentru $x=1$ și $y=2$ o valoare minimă $f_{min}(1,2)=5$ cu condiția $x+2y=5$.

§4. Transformări punctuale

Fie funcțiile:
(1) $y_1=f_1(x_1,x_2,\dots,x_n), y_2=f_2(x_1,x_2,\dots,x_n), \dots, y_n=f_n(x_1,x_2,\dots,x_n)$ definite pe mulțimea $X \subset R^n$. Cînd punctul $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ parcurge mulțimea X, punctul $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ parcurge o mulțime $Y \subset R^n$. Mulțimea Y este transformată mulțimii X prin transformarea dată de sistemul

(1) numită transformarea punctuală în R^n.

Exemple: schimbările de coordonate în plan şi în spaţiu.

Dacă determinantul funcţional $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0$ în punctul $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ atunci transformarea (1) se numeşte transformare reversibilă (proprie) în acest punct.

Dacă transformarea este proprie în fiecare punct al mulţimii X, ea este proprie pe X.

Pentru transformarea (1) proprie în $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ există transformarea inversă în $(y_1^0, \ldots, y_n^0)$:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = \phi_1(y_1, \ldots, y_n) \\ x_2 = \phi_2(y_1, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n + \phi_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases}$$

şi: $$\left.\frac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{(x_1^0, \ldots, x_n^0)} \cdot \left.\frac{D(x_1, \ldots, x_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right|_{(y_1^0, \ldots, y_n^0)} = 1$$

Fie transformarea:

$$(T_1) \quad \begin{cases} u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ u_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

a mulţimii $X \subset R^n$ în mulţimea $U \subset R^n$ şi transformarea:

$$(T_2) \quad \begin{cases} y_1 = \phi_1(u_1, \ldots, u_n) \\ y_2 = \phi_2(u_1, \ldots, u_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y_n = \phi_n(u_1, \ldots, u_n) \end{cases}$$

a mulţimii $U \subset R^n$ în mulţimea $Y \subset R^n$.

Transformarea:

$$(T) \quad \begin{cases} y_1 = \phi_1(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \\ y_2 = \phi_2(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \phi_n(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{cases}$$

care transformă pe X în Y se numeşte transformarea compusă a transformărilor T_1 şi T_2: $T = T_2(T_1)$

Exemplu:

$$(T_1) \begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 \\ u_2 = x_1 - x_2 \end{cases} ; \ (T_2) \begin{cases} y_1 = u_1^2 + u_2^2 \\ y_2 = u_1 u_2 \end{cases} \rightarrow T_2(T_1) \begin{cases} y_1 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 \\ y_2 = x_1^2 - x_2^2 \end{cases}$$

§ 5. Schimbări de variabile şi de funcţii

1. Schimbarea variabilei independente la funcţii de o variabilă

Fie funcţia $y=f(x), f:X\to Y, X,Y\subset R$ şi funcţia $x=\phi(t), \phi:T\to X, T\subset R$. Transformarea $y=f(\phi(t))$ realizează o corespondenţă între T şi Y. Să vedem cum se calculează derivatele $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},\ldots$ cu ajutorul derivatelor $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2},\ldots$. Aplicăm regula de derivare a funcţiilor compuse:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\phi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}$$

deci: $$\frac{d}{dx}=\frac{1}{\phi'(t)}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{\phi'(t)}\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{1}{\phi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}\right)=$$

$$=\frac{1}{\phi'(t)}\left[\frac{1}{\phi'(t)}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{\phi''(t)}{\phi'^2(t)}\right]=\frac{1}{\phi'^3(t)}\left[\phi'(t)\frac{d^2y}{dt^2}-\phi''(t)\frac{dy}{dt}\right]$$

Exemplu:

În ecuaţia diferenţială $x^2y''-5xy'+5y=0$ să se facă schimbarea de variabilă $x=e^t$.

$$y'=\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt};\ y''=\frac{1}{e^t}\left(-\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{e^t}\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$e^{2t}\cdot\frac{1}{e^{2t}}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)-5e^t\cdot\frac{1}{e^t}\frac{dy}{dt}+5y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}+5y=0$$

2. Schimbarea variabilelor independente la funcţiile de 2 variabile

Fie funcţia $z=f(x,y), f:Z, X\subset R^2, Z\subset R$ şi funcţiile $x=\phi(u,v), y=\psi(u,v)$ definite pe $U\subset R^2$ astfel ca $(x,y)\in X\subset R^2$. Transformarea $z=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$ realizează o corespondenţă între mulţimea U şi mulţimea Z. Dacă f este derivabilă parţial de n ori pe X şi ϕ,ψ sunt derivabile parţial de n ori pe U, să vedem cum se exprimă derivatele parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots$ cu ajutorul derivatelor parţiale $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2}{\partial v^2}, \ldots$

Dacă diferenţiem pe $z=z(x,y)$ sau $z=z(u,v)$ avem:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$dx = \frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}du + \frac{\partial \phi}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv\right) = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$$

Dacă $\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0$ obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}} \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Observăm că se introduc operatorii:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}}\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial \phi}{\partial v}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

cu ajutorul cărora putem calcula derivatele parţiale de ordinul doi. De exemplu: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

<u>Exemplu</u>:

În ecuația cu derivate parțiale $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ să se facă schimbarea de variabile: $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$.

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{2}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}}{-\frac{1}{2}}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{deci:} \quad \frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{1}{2} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}{-\frac{1}{2}}=\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{deci:} \quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$$

3. Schimbări de variabile și de funcții.

Considerăm transformarea punctuală plană:

$$\begin{cases} X = f(x,y) \\ Y = g(x,y) \end{cases}$$

unde f și g sunt definite și derivabile parțial de n ori pe $A \subset R^2$. Să calculăm derivatele $\frac{dY}{dX}, \frac{d^2Y}{dX^2}, \ldots$ cu ajutorul derivatelor $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx} : \frac{dX}{dx} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}} \quad \text{cu condiția} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \neq 0$$

Pentru calculul derivatelor de ordin superior folosim operatorul:

$$\frac{d}{dX} = \frac{1}{X'_x} \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2Y}{dx} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}}\right)$$

Exemplu:

Să se scrie ecuația: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$ în coordonatele polarei

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{dr}{d\theta}}{\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial x}{\partial dr} \cdot \frac{dr}{d\theta}} = \frac{r\cos\theta + \sin\theta \cdot \frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta \cdot \frac{dr}{d\theta}}$$

$$\frac{r\cos\theta + \sin\theta \cdot \frac{dr}{d\theta}}{-r\sin\theta + \cos\theta \cdot \frac{dr}{d\theta}} = \frac{r(\cos\theta + \sin\theta)}{r(\cos\theta - \sin\theta)}, \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = r$$

Considerăm transformarea punctuală în spaţiu:

$$\begin{cases} X = f(x, y, z) \\ Y = g(x, y, z) \\ Z = h(x, y, z) \end{cases}$$

unde f,g,h sunt definite şi derivabile parţial de n ori pe $A \subset R^3$. Să calculăm derivatele parţiale $\frac{\partial Z}{\partial X}, \frac{\partial Z}{\partial Y}, \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}, \ldots$ cu ajutorul derivatelor parţiale $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots$.

$$dX = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$dY = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

$$dZ = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz$$

z=z(x,y) deci $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$Z=Z(X,Y)$ deci ; $dZ = \frac{\partial Z}{\partial X} \cdot dX + \frac{\partial Z}{\partial Y} \cdot dY$

$$\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial Z}{\partial X}\left[\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)\right] + \frac{\partial Z}{\partial Y}\left[\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)\right]$$

Egalînd coeficienţii lui dx şi dy obţinem:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial Z}{\partial Y}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial Z}{\partial X}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial Z}{\partial Y}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

care rezolvat în raport cu $\frac{\partial Z}{\partial X}$ *si* $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ dă:

$$\frac{\partial Z}{\partial X}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y}=\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}}$$

Exemplu:

Fie transformarea punctuală: $u=\frac{x}{y}$; $v=x$; $w=xz$;

$(x,y,z)\in R^3$, $w=w(u,v)$ iar $z=z(x,y)$. Să se determine $\frac{\partial w}{\partial u}$ și $\frac{\partial w}{\partial v}$.

$$dw=\frac{\partial w}{\partial u}du+\frac{\partial w}{\partial v}dv=\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy\right)+\frac{\partial w}{\partial v}(dx)$$

dar $w=xz-y$ deci $dw=zdx+xdz-dy=zdx-dy+x\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)$

$$\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\left(-1+x\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\left(\frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)dx+\left(\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial u}\right)dy$$

$$\begin{cases} \frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=z+x\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{x}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial u}=-1+x\frac{\partial z}{\partial y} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u}&=\frac{y^2}{x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial v}&=z-\frac{y}{x}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

PARTEA II : CALCUL INTEGRAL

CAPITOLUL 1

INTEGRALE PE INTERVAL NECOMPACT
(INTEGRALE IMPROPRII)

Integrala Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ se defineşte în condiţiile:

1°. Intervalul $[a,b]$ pe care este definită funcţia $f(x)$ este compact (închis şi mărginit)

2°. Funcţia $f(x)$ este mărginită în $[a,b]$

Vom studia integrale fără una sau amîndouă dintre aceste restricţii deci integrale (numite şi improprii) pe intervale necompacte de una din formele:

$[a,b)$; $(a,b]$; (a,b); $(-\infty,b]$; $(-\infty,b)$; $[a,+\infty)$; $(a,+\infty)$; $(-\infty,+\infty)$

1. Integrale cu limitele de integrare infinite

Pot fi de forma:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^b f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$$

dar este suficient să studiem integrale de forma

$$I=\int_a^\infty f(x)\,dx$$

celelalte forme reducîndu-se uşor la acest tip.

Definiţie. Fie o funcţie $f:[a,+\infty)\to R$, integrabilă pe $[a,u]$ pentru orice $u>0$; dacă $\lim\limits_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$ există şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă (are sens) şi notăm:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx=\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx$$

O integrală care nu este convergentă se spune că este divergentă (nu are sens).

Exemple:

1. $I_1=\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{u\to\infty}\int_0^u\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{u\to\infty}arctgu=\frac{\pi}{2}$ deci I_1 = conv.

2. $I_2=\int_0^{\infty}sinxdx=\lim_{u\to\infty}\int_0^u sinxdx=\lim_{u\to\infty}(-cosu)$ nu există deci I_2=div.

3. $I_3=\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}\ (a>0)$; $\int_a^u\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\ln u-\ln a & \text{pentru } \alpha=1\\ \frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pentru } \alpha\neq 1\end{cases}$

$$\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\int_a^u\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\text{convergentă pentru } \alpha>1\\ \text{divergentă pentru } \alpha\le 1\end{cases}$$

O integrală cu limite infinite se poate transforma într-o serie numerică astfel:

$$\int_a^{\infty}f(x)\,dx=\int_a^{a+1}f(x)\,dx+\int_{a+1}^{a+2}f(x)\,dx+\ldots+\int_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx+\ldots$$

$$=u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots$$

unde $U_n=\int_{a+n}^{a+n+1}f(x)\,dx.$

Să presupunem că funcţia f(x) păstrează un semn constant pe [a,+∞] de exemplu $f(x)>0$ pentru $x\in[a,+\infty)$.Rezultă că $u_n>0$ şi deci rezultă următoarele proprietaţi:

1. Dacă $f(x)\ge g(x)>0$ pentru $x\in[a,+\infty)$ şi dacă integrala $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ este convergentă,atunci şi integrala $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ este convergentă

2. Dacă $g(x)\ge f(x)>0$ pentru $x\in[a,+\infty)$ şi dacă integrala $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ este divergentă,atunci şi integrala $\int_a^{\infty}g(x)\,dx$ este divergentă.

3. O condiţie necesară ca $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ să fie convergentă este ca $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

O condiţie suficientă de convergenţă este dată de:

Teorema 1. Fie $f(x):[a,+\infty)\to R$, $a>0$, $f(x)>0$ pentru $x\in[a,+\infty)$ Dacă

$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)=K$ (finit) pentru $\alpha>1$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă. Dacă $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x)=K$ (finit și $\neq 0$) pentru $\alpha\leq 1$, atunci $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă.

Demonstrație. Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x)=K$ pentru $\alpha>1$, există un număr M>0 astfel încît $f(x).x^{\alpha}<M$ pentru orice $x\in[a,+\infty)$ și deci:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx<M\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$ care este convergentă pentru $\alpha>1$ deci și $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă în aceste condiții.

Dacă $\alpha\leq 1$ și $K\neq 0$, există un număr $M'>0$ astfel încît $x^{\alpha}f(x)>M'$ deci:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx>M'\int_a^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$$ care este divergentă deci și $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ este divergentă pentru $\alpha\leq 1$.

Exemple: Să se studieze convergența integralelor:

1. $I_1=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}.\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}=1$$ pentru $\alpha=\frac{3}{2}>1$ deci I_1 este convergentă

2. $I_2=\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=1$$ pentru $\alpha=1$ deci I_2 este divergentă.

Criteriul integral al lui Cauchy. Fie f(x) o funcție continuă, pozitivă, descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$. integrala $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă sau divergentă după cum seria: $f(1)+f(2)+...+f(n)+...$ este convergentă sau divergentă și reciproc.

Demonstrație.

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\int_1^{2} f(x)\,dx+\int_2^{3} f(x)\,dx+...+\int_n^{n+1} f(x)\,dx+...$$

$$=u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

unde $u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx.$

Funcţia f(x) este continuă deci se poate aplica formula mediei:

$$u_n=\int_n^{n+1} f(x)\,dx=f(\xi_n)\,,\ n\le\xi_n\le n+1$$

Funcţia f(x) este descrescătoare deci: $f(n)\ge f(\xi_n)\ge f(n+1)$

1. Dacă seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n=\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ este convergentă, din $u_n=f(\xi_n)\le f(n)=v_n$, rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă, din $u_n=f(\xi_n)\ge f(n+1)=v_{n+1}$ rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă.

3. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, din $v_{n+1}=f(n+1)\le f(\xi_n)=u_n$ rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este convergentă.

4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, din $v_n=f(n)\ge f(\xi_n)=u_n$ rezultă că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă.

<u>Exemplu</u>: Seria $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$ are aceeaşi natură ca integrala $I=\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln(\ln x)\Big|_2^{\infty}=\infty$ deci este divergentă.

Să studiem cazul cînd funcţia f(x) schimbă semnul de o infinitate de ori pe intervalul $[a,+\infty)$.

__Definiţie.__ Fie $f(x):[a,\infty)\to R$ care schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a,+\infty)$. Dacă integrala $\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ este convergentă spunem că integrala $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ este absolut convergentă; dacă integrala $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ este convergentă, însă integrala $\int_a^{\infty}|f(x)|\,dx$ este divergentă, spunem că integrala $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ este simplu convergentă.

2. __Integrale definite de funcţii nemărginite în intervalul de integrare.__

Vom studia integrale de forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ cu } \lim_{x\to c}|f(x)|=+\infty,\ a\le c\le b$$

care, datorită descompunerii:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$$

ne permit să ne ocupăm de integralele pentru care funcţia este nemărginită pentru una sau ambele limite de integrare.

__Definiţie.__ Fie $f:[a,b)\to R$ cu $\lim_{x\nearrow b}f(x)=+\infty$, integrabilă pe $[a,\beta]$ pentru orice $\beta<b$; dacă limita $\lim_{\beta\nearrow b}\int_a^{\beta}f(x)\,dx$ există şi este finită, spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este __convergentă__ (are sens) şi notăm:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\beta\nearrow b}\int_a^{\beta}f(x)\,dx$$

Dacă $\lim_{x\searrow a}f(x)=+\infty$, atunci notăm $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\searrow a}\int_{\alpha}^b f(x)\,dx$

O integrală care nu este convergentă, este __divergentă__.

__Exemplu__: $I=\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$

$$\int_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\lambda}=\begin{cases} \ln(b-a)-\ln(b-\beta) & \text{pentru } \lambda=1 \\ \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{(b-\beta)^{1-\lambda}}{1-\lambda} & \text{pentru } \lambda\neq 1 \end{cases}$$

$$I=\lim_{\beta\to b}\int_a^\beta \frac{dx}{(b-x)^\lambda}=\begin{cases} \text{convergentă pentru } \lambda<1 \\ \text{divergentă pentru } \lambda\geq 1 \end{cases}$$

Integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ cu $\lim_{x\to b}|f(x)|=+\infty$, se transformă într-o serie numerică în felul următor:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{b-1} f(x)\,dx+\int_{b-1}^{b-\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_{b-\frac{1}{2}}^{b-\frac{1}{3}} f(x)\,dx+\ldots+\int_{b-\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx+\ldots$$

$$=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

unde $u_n=\int_{b-\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n+1}} f(x)\,dx,\ u_0=\int_a^{b-1} f(x)\,dx.$.

Să presupunem că funcţia f(x) păstrează un semn constant de exemplu $f(x)\geq 0$ pentru $x\in[a,b)$ şi $\lim_{x\to b}|f(x)|=+\infty$.

Deci $u_n\geq 0$ şi rezultă urmatoarele proprietaţi:

1. Dacă $f(x)\geq g(x)>0$ pentru $x\in[a,b)$, $\lim_{x\to b} g(x)=+\infty$ şi integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă.

2. Dacă $g(x)\geq f(x)$ pentru $x\in[a,b)$, $\lim_{x\to b} g(x)=+\infty$ şi dacă integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă, atunci şi integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este divergentă.

<u>Teoremă.</u> Fie funcţia f(x) pozitivă, definită pe intervalul [a,b), cu $\lim_{x\to b} f(x)=+\infty$.

Dacă $\lim_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x)=A$ (finit) pentru $\alpha<1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă; dacă $\lim_{x\to b}(b-x)^\alpha f(x)=A$ (finit si $\neq 0$)

pentru $\alpha\geq 1$, atunci integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

<u>Demonstrație</u>. Dacă $\lim\limits_{x\nearrow b}(b-x)^{\alpha} f(x)=A$ (finit) pentru $\alpha<1$ rezultă că există un număr $M>0$ astfel încît pentru orice $x\in[a,b)$ să avem $(b-x)^{\alpha}f(x)<M$ deci $f(x)<\dfrac{M}{(b-x)^{\alpha}}$ și cum $M\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ este convergentă pentru $\alpha<1$ rezultă că și integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă $\lim\limits_{x\nearrow b}(b-x)^{\alpha} f(x)=A$ (finit și $\neq 0$) pentru $\alpha\geq 1$ atunci există un număr $M'>0$ astfel încît să avem $f(x)(b-x)^{\alpha}>M'$ deci $f(x)>\dfrac{M'}{(b-x)^{\alpha}}$ și cum integrala $M\int_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$ este divergentă pentru $\alpha\geq 1$ rezultă ca și $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

<u>Exemplu.</u> Să studiem convergența integralei $I=\int_{-2}^{2}\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\lim_{x\nearrow 2}(2-x)^{\alpha}\frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\ \textit{pentru}\ \alpha=\frac{1}{2}<1$$

$$\lim_{x\searrow -2}(x+2)^{\alpha}\frac{1}{(2-x)^{\frac{1}{2}}(2+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\ \textit{pentru}\ \alpha=\frac{1}{2}<1$$

deci integrala I este convergentă.

Să consideram cazul cînd funcția $f(x)$ schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a,b)$.

<u>Definiție.</u> Fie $f(x)$ o funcție definită pe $[a,b)$ care schimbă semnul de o infinitate de ori pe $[a,b)$ și $\lim\limits_{x\nearrow b}|f(x)|=+\infty$. Dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\,dx$ este convergentă, spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este absolut convergentă (și se arată că este și convergentă).

Exercitii

Să se studieze convergenţa integrelelor următoare şi dacă sunt convergente să se calculeze valoarea lor:

1. $I_1=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=1$ pentru $\alpha=2>1$ deci I_1 este convergentă

$$I_1=\lim_{u\to\infty}\int_1^{u}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Primitiva $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ se află cu schimbarea de variabilă

$$\sqrt{1+x^2}=t$$
$$1+x^2=t^2$$
$$2xdx=2tdt \to xdx=tdt$$

$$I=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{tdt}{(t^2-1)\,t}=\int\frac{dt}{t^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$$

$$I_1=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{\sqrt{1+u^2}+1}\right|-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

2. $I_2=\int_0^{1}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to1}(1-x)^{\lambda}\frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}=1$ pentru $\lambda=\frac{1}{2}<1$ deci I_2 este convergentă

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

Primitiva $I=\int\frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$ se află cu schimbarea de variabilă

$$\sqrt{1-x}=t$$

$$1-x=t^2 \to \;;\; dx=-2tdt$$

$$I=\int\frac{-2tdt}{(1+t^2)\,t}=-2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2\,arctgt+C=-2\,arctg\sqrt{1-x}+C$$

$$I_2=\lim_{\varepsilon\to 0}(-2arctg\sqrt{\varepsilon}+2arctg1)=2\,.\,\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Capitolul 2

INTEGRALE CARE DEPIND DE UN PARAMETRU

Integralele care depind de un parametru sunt de forma:

$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ sau, mai general, de forma $J(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$

unde funcţia $f(x,y)$ este definită şi integrabilă pentru orice $(x,y)\in[a,b]XY$.

Definiţie. Fie funcţia $f(x,y)$ definită pe XxY şi y_0 un punct de acumulare al lui Y, deci pentru orice $x\in X$, $g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. Spunem că $f(x,y)$ tinde uniform pe mulţimea X către $g(x)$ dacă pentru orice număr $\epsilon>0$ există un număr $\eta(\epsilon)>0$ astfel încît pentru orice $x\in X$, dacă $|y-y_0|<\eta(\epsilon)$ să avem $|f(x,y)-g(x)|<\epsilon$.

Teoremă. Fie funcţia $f(x,y)$ definită pe $[a,b]XY$ continuă pe $[a,b]$ oricare ar fi $y\in Y$. Dacă există $g(x)=\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, unde y_0 este un punct de acumulare al lui Y şi dacă $f(x,y)$ tinde uniform către $g(x)$ pe $[a,b]$ în punctul y_0, atunci

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]dx=\int_a^b g(x)\,dx$$

Demonstraţie. Funcţia $g(x)$ este continuă pe $[a,b]$ deci şi integrabilă şi avem:

$$\left|\int_a^b f(x,y)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x,y)-g(x)|\,dx<\epsilon \quad \text{(f unif. cont.)}$$

dacă $|y-y_0|<\eta(\epsilon)$, deci:

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\left[\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right]dx.$$

Teoremă. Fie funcţia $f(x,y)$ continuă şi cu derivata parţială $f'_y(x,y)$ continuă pe intervalul $I=[a,b]x[c,d]$. Dacă funcţiile $a(y)$ şi $b(y)$ definite pe $[c,d]$ au derivate continue pe $[c,d]$, iar curbele $x=a(y)$, $x=b(y)$ se află în I, atunci funcţia $F(y)$, dată de $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$ este derivabilă pe $[c,d]$ şi

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}\,dx+b'(y)\,f[b(y),y]-a'(y)\,f[a(y),y].$$

Demonstratie. $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx \quad ; \quad F(y_0)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y_0)\,dx$

$$F(y)=\int_{a(y)}^{a(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

$$F(y)=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)} f(x,y)\,dx+\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx-\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx$$

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,dx+\frac{1}{y-y_0}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx-$$

$$-\frac{1}{y-y_0}\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx$$

Facem limita pentru $y\to y_0$ deci:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0}=F'(y_0)$$

$$\lim_{y\to y_0}\int_{a(y_0}^{b(y_0)}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\,dx=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\left[\lim_{y\to y_0}\frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}\right]dx=$$

$$=\int_{a(y_0)}^{b(y_0)}\frac{\delta f(x,y_0)}{\delta y}\,dx$$

$$\lim_{y\to y_0}\left[\frac{1}{y-y_0}\int_{b(y_0)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right]=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{1}{y-y_0}\,(b(y)-b(y_0)\;f(b(\xi),y)\right]=$$

$$=b'(y_0)\,f(b(y_0),y_0)$$

formula mediei $\qquad (b(y_0)\le b(\xi)\le b(y))$

$$\lim_{y\to y_0}\left[\frac{1}{y-y_0}\int_{a(y_0)}^{a(y)} f(x,y)\,dx\right]=\lim_{y\to y_0}\left[\frac{1}{y-y_0}\,(a(y)-a(y_0))\;f(a(\xi_1),y)\right]=$$

$$=a'(y_0)\,f(a(y_0),y_0)$$

formula mediei $\qquad a(y_0)\le(\xi_1)\le a(y)$

Rezultă

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\delta f(x,y)}{\delta y}\,dx+b'(y)\,.\,f(b(y),y)-a'(y)\,.\,f(a(y),y)\;.$$

Pentru integrala : $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ rezultă:

$$I'(y)=\int_a^b \frac{\delta f(x,y)}{\delta y}\,dx\ .$$

Exemplu: Să se calculeze: $I(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^\alpha-1}{\ln x}\,dx$ folosind derivarea în raport cu parametrul sub semnul integralei

$$I'(\alpha)=\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln x}{\ln x}\,dx=\int_0^1 x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\bigg|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}$$

$$I(\alpha)=\int \frac{d\alpha}{\alpha+1}+C=\ln|\alpha+1|+C$$

$$\alpha=0\to C=0 \qquad I(\alpha)=\ln|\alpha+1|$$

Integrale euleriene

Funcţia lui Euler de speţa a doua sau funcţia $\Gamma(x)$ este definită de integrala:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\ x>0$$

Considerăm funcţia:

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}dt$$

pe care o integrăm prin părţi:

$u=t^x$; $du=x.t^{x-1}\,dt$

$dv=e^{-t}dt$; $v=-e^{-t}$

$$\int_0^\infty t^x e^{-t}dt=-t^x e^{-t}\bigg|_0^\infty+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt=x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

Deci:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-t}dt=-e^{-t}\bigg|_0^\infty=1$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

$$\Gamma(x)\ .\ \Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin x\pi}\ (0<x<1)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

Funcţia lui Euler de speţa întîi sau funcţia B(m,n) este definită de integrala:

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx,\ m>0,n>0$$

care prin schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$ devine:

$$B(m,n)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,dx$$

$$\int_0^a x^{m-1}(a-x)^{n-1}dx=a^{m+n-1}B(m,n)$$

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Exercitii

1. $$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt[3]{tg^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{3}}x\cos^{-\frac{2}{3}}x dx=\frac{1}{2}B\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{6}}=\pi$$

2. $$I_2=\int_0^1\sqrt[3]{\frac{x^5}{1-x^2}}dx$$

Se face schimbarea de variabilă

$$x^2=t\to x=\sqrt{t}\to dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

$$I_2=\int_0^1 t^{\frac{5}{6}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\cdot$$

$$=\frac{1}{6}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Observaţie : Se poate face şi substituţia x=sint

3. $$I_3=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^4}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}x^\alpha\frac{1}{1+x^4}=1$ pentru $\alpha=4>1$ deci I_3 este convergentă

$$1+x^4=\frac{1}{t}\to x^4=\frac{1}{t}-1\to x=\left(\frac{1}{t}-1\right)^{\frac{1}{4}}\to dx=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-\frac{3}{4}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$I_3=-\frac{1}{4}\int_1^0 t\cdot\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-\frac{3}{4}}\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{4}\int_0^1 t^{-\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{3}{4}}dt=$$

$$= \frac{1}{4} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Observaţie : Se poate face şi substituţia $x^2=\operatorname{tg}t$

Capitolul 3

INTEGRALE CURBILINII

§1. Noţiunile (intuitive) de integrală curbilinie în raport cu coordonatele şi în raport cu elementul de arc în plan.

Considerăm arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei :

(C) $y=f(x)$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]\subset\mathbb{R}$, f continuă pe $[a,b]$ şi funcţia $g:D\to\mathbb{R}$, $D\subset\mathbb{R}^2$, $C\subset D$, g continuă pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

Dacă facem o diviziune:

$\Delta:\ a\equiv x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n\equiv b$

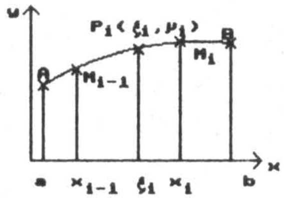


FIG 3.1

a intervalului $[a,b]$ de normă $\nu(\Delta)=\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i-x_{i-1}\}$,aceasta determină o diviziune corespunzătoare pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ Fig.):

$\Delta_c: A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n\equiv B$

de normă $\nu(\Delta_c)=\max\limits_{1\le i\le n}\{s_i\}$

unde s_i este mărimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.

Se pot forma următoarele sume integrale:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$S_2=\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$S_3=\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\,s_i$$

Dacă se consideră toate diviziunile Δ ale intervalului [a,b], deci şi diviziunile corespunzătoare ale arcului $\overset{\frown}{AB}$, şi dacă la limită cînd normele acestor diviziuni tind la zero pentru $n\to\infty$, sumele S_1, S_2, S_3 au valori finite, acestea vor fi:

1. Limita sumei riemanniene S_1 este integrala Riemann a funcţiei f(x) [e intervalul [a,b] şi se notează : $\int_a^b f(x)\,dx$.

2. Limita sumei neriemanniene S_2 este integrala curbilinie în raport cu coordonatele a funcţiei g(x,y) pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi se notează: $\int_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)\,dx$. Analog se poate defini şi $\int_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)\,dy$.

3. Limita sumei neriemanniene S_3 este integrala curbilinie în raport cu elementul de arc a funcţiei g(x,y) pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi se notează: $\int_{\overset{\frown}{AB}} g(x,y)\,ds$.

Dacă se consideră o funcţie mărginită $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi o funcţie monoton crescătoare $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ iar Δ este o diviziune a intervalului [a,b], se poate forma suma integrală:

$$S_4=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[h(x_i)-h(x_{i-1})]$$

numită suma Riemann-Stieltjes a funcţiilor f şi h.

Spunem că f(x) este integrabilă Stieltjes în raport cu h(x) pe intervalul [a,b] dacă pentru orice diviziune Δ de normă $\nu(\Delta)\to 0$ pentru $n\to\infty$, suma S_4 are o limită unică finită şi aceasta este integrala Stieltjes a funcţiei f(x) în raport cu h(x) pe [a,b] şi se notează: $\int_a^b f(x)\,dh(x)$.

§2. Integrala curbilinie în raport cu coordonatele.

Considerăm arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei plane C şi funcţiile

$X, Y: D\to\mathbb{R}, D\subset\mathbb{R}^2, \overset{\frown}{AB}\subset D$,X şi Y fiind funcţii continue pe D.

Se face o diviziune:
Δ_c : $A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n\equiv B$

a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi se formează suma integrală:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+Y(\xi_i,\eta_i)(y_i-y_{i-1})$$

Definiţie Considerăm un şir de diviziuni (Δ_n) ale curbei C(arcul $\overset{\frown}{AB}$) de normă $\nu(\Delta_n)\to 0$ pentru $n\to\infty$.Dacă $\lim_{n\to\infty} S_n$ există şi este finită şi unică,oricare ar fi punctele $(\xi_i,\eta_i)\in \overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$,această limită se numeşte integrala curbilinie în plan,în raport cu coordonatele,a funcţiilor X(x,y) şi Y(x,y) pe curba C şi se notează:

$$I=\int_C X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy$$

Calculul integralei I se face prin reprezentarea parametrică a curbei C şi reducerea integralei curbilinii la o integrală Riemann în raport cu parametrul,conform teoremei următoare.

Teorema 1. Dacă C este o curbă netedă,adică are ecuaţiile parametrice : x=f(t),y=g(t) (t luând valori de la a_1 la b_1) cu f şi g funcţii de clasă C^1 pe [a,b],iar X şi Y sunt funcţii continue într-un domeniu $D\subset\mathbb{R}^2$ care conţine curba C,atunci are loc egalitatea:

$$\int_C X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=\int_{a_1}^{b_1}[X(f(t),g(t))\cdot f'(t)+Y(f(t),g(t))\cdot g'(t)]dt$$

Demonstraţie. Diviziunii Δ_c a arcului $\overset{\frown}{AB}$ al curbei C îi corespunde o diviziune: Δ' : $a_1\equiv t_0<t_1<\ldots<t_{i-1}<t_i<\ldots<t_n\equiv b_1$ a intervalului $[a_1,b_1]$ astfel ca :$x_i=f(t_i)$,$y_i=g(t_i)$ pentru i=1,...,n.

Suma integrală care conduce la integrala curbilinie va fi:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+Y(\xi_i,\eta_i)(y_i-y_{i-1})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} X(f(\delta_i),g(\delta_i))[f(t_i)-f(t_{i-1})]+Y(f(\delta_i),g(\delta_i))[g(t_i)-g(t_{i-1})]+$$

$$=\sum_{i=1}^{n} X(f(\delta_i),g(\delta_i))(t_i-t_{i-1})\cdot f'(\theta_i)+Y(f(\delta_i),g(\delta_i))(t_i-t_{i-1})\cdot g'(\theta_i')$$

unde $t_{i-1}<\theta_i,\theta_i'<t_i$ .Deci suma S_n se transformă într-o sumă riemanniană care la limită, cînd norma oricărei diviziuni $\nu(\Delta_n')\to 0$ pentru $n\to\infty$, se poate scrie:

$$\lim_{\nu(\Delta_n')\to 0}\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})+Y(\xi_i,\eta_i)(y_i-y_{i-1})=$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}[X(f(t),g(t))\cdot f'(t)+Y(f(t),g(t))\cdot g'(t)]dt$$

Proprietățile integralei I sunt:

1°. Oricare ar fi reprezentarea parametrică a curbei C, valoarea integralei I este aceeași.

2°. $\int_{AB}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=-\int_{BA}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy$

3°. $\int_{AB}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy=\int_{AP}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy+$

$+\int_{PB}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy$, oricare ar fi punctul P pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

4°. $\int_{AB}kX(x,y)\,dx+kY(x,y)\,dy=k\int_{AB}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy$

5°. $\int_{AB}(X_1(x,y)+X_2(x,y))\,dx+(Y_1(x,y)+Y_2(x,y))\,dy=$

$=\int_{AB}X_1(x,y)\,dx+Y_1(x,y)\,dy+\int_{AB}X_2(x,y)\,dx+Y_2(x,y)\,dy$

6°. Dacă C este o curbă închisă, atunci valoarea integralei I nu depinde de punctul de plecare de pe curba C.

Demonstrația acestor proprietăți se face scriind sumele integrale care conduc la integralele respective.

7°. Fie D un domeniu plan în care funcțiile X(x,y) și Y(x,y) sunt continue. Condiția necesară și suficientă ca integrala curbilinie:

$$\int_{AB} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy$$

să nu depindă de drum în D este ca expresia X(x,y)dx+Y(x,y)dy să fie diferenţiala totală exactă a unei funcţii F:D→R, adică

$$\frac{\delta X}{\delta y} = \frac{\delta Y}{\delta x}\ .$$

Demonstraţie. Condiţia este suficientă deoarece, dacă dF=X(x,y)dx+Y(x,y)dy atunci:

$$\int_{AB} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \int_{AB} dF = F(x_B, y_B) - F(x_A, y_A)$$

Condiţia este necesară. Dacă integrala nu depinde de drum şi o calculăm de la punctul A(α,β) fix la punctul B(x,y) arbitrar, atunci integrala depinde numai de coordonatele punctului B deci:

$$\int_{AB} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = F(x,y)$$

Dacă dăm lui B o creştere infinitizimală BB' , B'(x+dx,y+dy), atunci la integrală se adaugă termenul X(x,y)dx+Y(x,y)dy iar funcţiei F(x,y) i se adaugă termenul $dF = \frac{\delta F}{\delta x}dx + \frac{\delta F}{\delta y}dy$. Din egalitatea celor două creşteri rezultă:

$$X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = \frac{\delta F}{\delta x}dx + \frac{\delta F}{\delta y}dy$$

adică

$$X(x,y) = \frac{\delta F}{\delta x},\ Y(x,y) = \frac{\delta F}{\delta y} \quad \text{deci} \quad \frac{\delta X}{\delta y} = \frac{\delta Y}{\delta x}\ .$$

8°. Dacă $\frac{\delta Y}{\delta x} = \frac{\delta X}{\delta y}$ şi C este o curbă închisă atunci:

$$\int_{C} X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$$

Integrala curbilinie în raport cu coordonatele în spaţiu se defineşte asemănător cu cea în plan.

Considerăm o diviziune:

$$\Delta_c : A \equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n \equiv B$$

a arcului $\overset{\frown}{AB}$ al curbei C din spaţiu şi funcţiile

$X, Y, Z : D \to \mathbf{R},\ D \subset \mathbf{R}^3,\ \overset{\frown}{AB} \subset D,\ X, Y, Z$ fiind funcţii continue pe D.

Se formează suma integrală:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} X(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(x_i-x_{i-1})+Y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(y_i-y_{i-1})+Z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(z_i-z_{i-1})$$

<u>Definiţie.</u> Dacă, pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) ale arcului $\overset{\frown}{AB}$ de normă $\nu(\Delta_n)\to 0$ pentru $n\to\infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n$ există şi este finită, atunci aceasta se numeşte integrala curbilinie în spaţiu, în raport cu coordonatele, pe curba C pentru funcţiile X, Y, Z şi se notează:

$$I=\int_C X(x,y,z)\,dx+Y(x,y,z)\,dy+Z(x,y,z)\,dz$$

Calculul acestei integrale se face prin reprezentarea parametrică a curbei C şi reducerea integralei curbilinii la o integrală Riemann în raport cu parametrul.

<u>Teorema 2.</u> Dacă C are ecuaţiile parametrice $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$, $a_1\le t\le b_1$, cu f, g, h de clasă C^1 pe $[a_1,b_1]$ (C este curbă netedă), iar X, Y, Z sunt funcţii continue pe C atunci are loc egalitatea:

$$\int_C X(x,y,z)\,dx+Y(x,y,z)\,dy+Z(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}[X(f(t),g(t),h(t))f'(t)+Y(f(t),g(t),h(t))g'(t)+$$

$$+Z(f(t).g(t).h(t))h'(t)]dt$$

Demonstraţia este analoagă celei de la Teorema 1.

Proprietăţile integralelor curbilinii în spaţiu sunt asemănătoare celor de la integrale curbilinii în plan. La proprietatea 7°, condiţiile ca integrala

$$\int_C X(x,y,z)\,dx+Y(x,y,z)\,dy+Z(x,y,z)\,dz$$

să nu depindă de drumul de integrare sunt:

$$\frac{\delta Y}{\delta x}=\frac{\delta X}{\delta y},\ \frac{\delta Z}{\delta y}=\frac{\delta Y}{\delta z},\ \frac{\delta X}{\delta z}=\frac{\delta Z}{\delta x}.$$

Aplicaţii ale integralelor curbilinii în raport cu coordonatele:

1. Aria plană mărginită de curba închisă C (Fig...   )

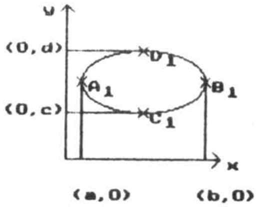


FIG 3.2

$(A_1D_1B)\ y=\phi_2(x)$

$(A_1C_1B)\ y=\phi_1(x)$

$$A=\int_a^b[\phi_2(x)-\phi_1(x)]dx=\int_a^b\phi_2(x)\,dx-\int_a^b\phi_1(x)\,dx=$$

$$-\int_b^a\phi_2(x)\,dx-\int_a^b\phi_1(x)\,dx=-\int_C ydx$$

Deci :

(1) $A=-\int_C ydx$

$(C_1A_1D_1)\ x=\psi_1(y)$

$(C_1BD_1)\ x=\psi_2(y)$

$$A=\int_c^d[\psi_2(y)-\psi_1(y)]dy=\int_c^d\psi_2(y)\,dy+\int_d^c\psi_1(y)\,dy=\int_C xdy$$

Deci :

(2) $A=\int_C xdy$

Dacă se adună (1) şi (2) se obţine:

(3) $A=\frac{1}{2}\int_C xdy-ydx$

2. Dacă se consideră câmpul de forţe în plan $\mathbf{F}(X(x,y),Y(x,y)),X,Y:D\to\mathbb{R},D\subset\mathbb{R}^2,X,Y$ funcţii continue pe arcul AB al curbei netede C, atunci lucrul mecanic efectuat cînd punctul de aplicaţie a forţei $\mathbf{F}$ descrie arcul $\overset{\frown}{AB}$ este:

$$L=\int_{AB}X(x,y)\,dx+Y(x,y)\,dy$$

<u>Demonstraţie.</u> Se face o diviziune Δ_n a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi se formează suma:

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} X(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) + Y(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1})$$

care reprezintă suma lucrului mecanic efectuat de forţele $\overline{F}(X(\xi_i, \eta_i), Y(\xi_i, \eta_i))$ pe arcele $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, i=1, . . . ,n.

Considerînd un şir de diviziuni (Δ_n) ale arcului $\overset{\frown}{AB}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ pentru $n \to \infty$, dacă $\lim_{n\to\infty} L_n$ există atunci această limită este

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy$$

şi reprezintă lucrul mecanic efectuat cînd forţa $\overline{F}(X, Y)$ se deplasează având punctul de aplicaţie pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

3. Dacă se consideră câmpul de forţe în spaţiu $\overline{F}(X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$, $X, Y, Z: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$, $\overset{\frown}{AB} \subset D$, X, Y, Z continue pe $\overset{\frown}{AB}$,atunci lucrul mecanic efectuat cînd punctul de aplicaţie a forţei $\overline{F}$ descrie arcul $\overset{\frown}{AB}$ este:

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} X(x, y, z)\, dx + Y(x, y, z)\, dy + Z(x, y, z)\, dz$$

Demonstraţia este asemănătoare celei de la punctul 2.

4. Dacă $\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ este vectorul de poziţie al punctului curent $M(x, y, z)$ iar $\overline{F}(x, y, z) = X(x, y, z)\overline{i} + Y(x, y, z)\overline{j} + Z(x, y, z)\overline{k}$ atunci lucrul mecanic efectuat când punctul de aplicaţie a forţei $\overline{F}$ se deplasează pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ are formula vectorială:

$$L = \int_{\overset{\frown}{AB}} \overline{F} \cdot d\overline{r}$$

Exerciţii

1. Să se calculeze $I=\int_{0ABCDE0} y\,dx+dy$, OABCDEO fiind curba din Fig...

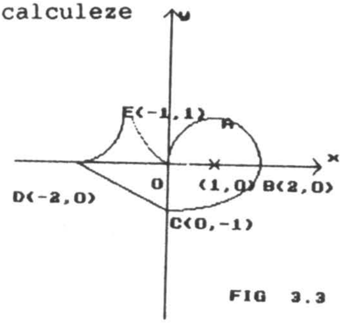


FIG 3.3

$I=I_{0AB}+I_{BC}+I_{CD}+I_{DE}+I_{E0}$

(0AB) este un semicerc cu centrul în (1,0) şi raza 1 deci are reprezentarea parametrică: (AB0) $\begin{cases} x=1+\cos t\ , & dx=-\sin t\,dt \\ y=\sin t\ , & dy=\cos t\,dt \end{cases}$

$$I_{0AB}=\int_{\pi}^{0}(-\sin^2 t+\cos t)\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt+\sin t\Big|_{\pi}^{0}=2\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$$

(BC) este un arc din elipsa de semiaxe 2 şi 1 deci are reprezentarea parametrică:

$$(BC)\quad \begin{cases} x=2\cos t\ , dx=-2\sin t\,dt \\ y=\sin t\ , dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$I_{BC}=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}(-2\sin^2 t+\cos t)\,dt=2\int_o^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt+\sin t\Big|_0^{-\frac{\pi}{2}}=2\,.\,\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{1}{2}-1=\frac{\pi}{2}-1$$

(CD) este un segment din dreapta de ecuaţie: $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-1}-1=0$

deci are reprezentarea parametrică:

$$(CD)\quad \begin{cases} x=-2y-2\ , & dx=-2\,dy \\ y=y\ , & dy=dy \end{cases}$$

$$I_{CD}=\int_{-1}^{0}(-2y+1)\,dy=-y^2\Big|_{-1}^{0}+y\Big|_{-1}^{0}=1+1=2$$

(DE) este un sfert din cercul cu centrul în (-2,1) şi raza 1 deci are reprezentarea parametrică:

$$(DE)\quad \begin{cases} x=-2+\cos t\ , & dx=-\sin t\,dt \\ y=1+\sin t\ , & dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$I_{DE}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin t-\sin^2 t+\cos t)\,dt=\cos t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}-\frac{\pi}{4}+\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=1-\frac{\pi}{4}+1=2-\frac{\pi}{4}$$

Parabola (E0) are reprezentarea parametrică:

$$(E0)\quad \begin{cases} x=x & ,\ dx=dx \\ y=x^2 & ,\ dy=2xdx \end{cases}$$

$$I_{E0}=\int_{-1}^{0}(x^2+2x)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}+x^2\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

Deci $I=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-1+2+2-\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}=\frac{3\pi}{4}+\frac{7}{3}$

2. Să se calculeze $I=\int_{0ABCDE0} xdy+ydx$,0ABCDE0 fiind conturul din Fig....

Expresia xdx+ydy este o diferențială totală exactă $\left(\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{\delta y}{\delta x}=0\right)$ și deci I=0.

3. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat când punctul de aplicație a forței de componente : $X=xy$, $Y=x^2+y^2$ descrie în sens direct cercul (C) $x^2+y^2-2x=0$

$$L=\int_C xydx+(x^2+y^2)dy$$

$$(C)\quad \begin{cases} x=1+\cos t & ,\ dx=-\sin t\,dt \\ y=\sin t & ,\ dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$L=\int_0^{2\pi}[-\sin^2 t\,(1+\cos t)+2\,(1+\cos t)\cos t]\,dt=$$

$$=-4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}+2\sin t\Big|_0^{2\pi}+2\cdot 4\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

4. Să se calculeze $I=\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)} xdx+y^2dy-zdz$

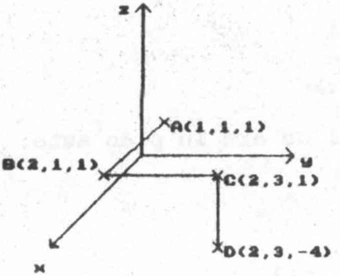


FIG 3.4

Expresia $xdx+y^2dy-zdz$ este o diferențială totală exactă deci I se calculează pe curba ABCD din Fig....

$$I=I_{AB}+I_{BC}+I_{CD}=\int_1^2 xdx+\int_1^3 y^2dy-$$

$$-\int_1^{-4} zdz=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+\frac{y^3}{3}\Big|_1^3-\frac{z^2}{2}\Big|_1^{-4}=\frac{8}{3}$$

§ 3. Integrala curbilinie în raport cu elementul de arc.

Considerăm arcul $\overset{\frown}{AB}$ al unei curbe netede (C) din planul x0y şi o funcţie F(x,y) definită şi continuă într-un domeniu $D\subset\mathbf{R}^2, \overset{\frown}{AB}\subset D$.

Se face o diviziune a arcului $\overset{\frown}{AB}$:

Δ_C : $A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n\equiv B$
şi se formează suma:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) s_i$$

unde s_i este lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ iar $(\xi_i, \eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.

Definiţie. Dacă, pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) de normă $\nu(\Delta_n)\to 0$ când $n\to\infty$, sumele S_n au o limită comună, finită, această limită este integrala curbilinie a funcţiei F(x,y) în raport cu elementul de arc pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi se notează:

$$I=\int_{AB} F(x,y)\, ds$$

Calculul integralei I se face prin transformarea ei într-o integrală Riemann conform teoremelor următoare.

Teorema 3. Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ are o ecuaţie carteziană:

(AB) $y=f(x)$, $a\le x\le b$, atunci:

$$\int_{AB} F(x,y)\, ds=\int_a^b F(x, f(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

Demonstraţie. Ştiind că elementul de arc în plan este:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$$

suma integrală S_n devine:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) s_i=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, f(\xi_i))\sqrt{d\xi_i^2+f'^2(\xi_i)d\xi_i^2}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, f(\xi_i))\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\, d\xi_i$$

adică o sumă riemanniană care, la limită, tinde la integrala Riemann:

$$\int_a^b F(x, f(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx$$

Teorema 4. Dacă arcul (AB) este dat parametric: (AB) $x=f(t), y=g(t)$, f şi g de clasă C^1 pentru $a_1 \le t \le b_1$, atunci:

$$\int_{\widehat{AB}} F(x,y)\, ds = \int_{a_1}^{b_1} F(f(t), g(t))\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\, dt$$

Demonstratie.

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) s_i = \sum_{i=1}^{n} F(f(\delta_i), g(\delta_i))\sqrt{f'^2(\delta_i)\, d\delta_i^2 + g'^2(\delta_i)\, d\delta_i^2} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} F(f(\delta_i), g(\delta_i))\sqrt{f'^2(\delta_i)+g'^2(\delta_i)}\, d\delta_i$$

care este o sumă riemanniana care, la limită, tinde la integrala Riemann:

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f(t), g(t))\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)}\, dt$$

Proprietăţi ale integralelor curbilinii în raport cu elementul de arc :

1. $\int_{AB} \lambda F(x,y)\, ds = \lambda \int_{AB} F(x,y)\, ds$

2. $\int_{AB} (F_1(x,y)+F_2(x,y))\, ds = \int_{AB} F_1(x,y)\, ds + \int_{AB} F_2(x,y)\, ds$

3. $\int_{AB} F(x,y)\, ds = \int_{AP} F(x,y)\, ds + \int_{PB} F(x,y)\, ds$, oricare ar fi punctul $P \subset \widehat{AB}$.

Aplicaţii ale integralelor curbilinii în raport cu elementul de arc în plan :

1°. Lungimea arcului $\widehat{AB}$ este $l=\int_{AB} ds$

Demonstratie. Se face o diviziune a arcului $\widehat{AB}$:

$\Delta : A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_m\equiv B$

şi se formează suma:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} s_i$$

unde s_i este lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.

Dacă, pentru orice şir de diviziuni Δ_n ale arcului $\overset{\frown}{AB}$ de normă $\nu(\Delta_n)\to 0$ când $n\to\infty$, sumele S_n au o limită comună, finită, aceasta este lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$ deci $l=\int_{AB} ds$.

2°. Masa unui corp filiform AB neomogen, de densitate $\rho(x,y)$ este:

$$M=\int_{AB}\rho\,(x,y)\,ds$$

<u>Demonstraţie.</u> Se consideră o diviziune Δ a arcului $\overset{\frown}{AB}$ şi se formează suma

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)s_i$$

care reprezintă suma maselor relative ale arcelor $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}\,(i=1,\ldots,n)$, $(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$.

Masa totală se obţine când, pentru orice şir de diviziuni de normă tinzând la zero când $n\to\infty$, sumele S_n au aceeaşi limită, finită, care este:

$$M=\int_{AB}\rho\,(x,y)\,ds$$

3°. Aria unui domeniu plan mărginit de curba în coordonate polare : $(AB)\, r=f^2(\theta), \theta_1\le\theta\le\theta_b$ este:

$$A=\frac{1}{2}\int_{AB}f^2\,(\theta)\,d\theta$$

<u>Demonstraţie.</u> Considerăm diviziunea arcului $\overset{\frown}{AB}$:

Δc ; $A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n\equiv B$
căreia îi corespunde diviziunea:

$\Delta : \theta_a = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{i-1} < \theta_i < \ldots < \theta_n = \theta_b$

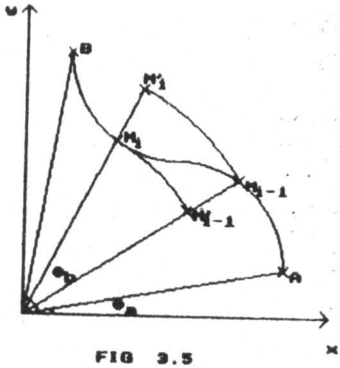


FIG 3.5

Aria ω_i a sectorului $OM_{i-1}M_i$ este cuprinsă între ariile sectoarelor de cerc $OM_{i-1}'M_i$ și $OM_{i-1}M_i'$ deci:

$$\frac{1}{2} m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \le \omega_i \le \frac{1}{2} M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1})$$ unde

m_i și M_i sunt marginile inferioară și superioară ale funcției $f(\theta)$ pe intervalul $[\theta_{i-1}, \theta_i]$.

Însumînd, se obține:

$$s_\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) = S_\Delta$$

Dacă, pentru orice șir de diviziuni, de normă tinzând la zero pentru $n\to\infty$, șirurile sumelor Darboux (s_Δ) și (S_Δ) au o limită comună, finită, aceasta este tocmai aria domeniului mărginit de arcul $\overset{\frown}{AB}$ și razele 0A și 0B deci:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_a}^{\theta_b} f^2(\theta)\, d\theta$$

4°. Coordonatele centrului de greutate al arcului neomogen $\overset{\frown}{AB}$, de densitate $\rho(x,y)$, sunt:

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\rho(x,y)\, ds}{\int_{AB} \rho(x,y)\, ds}, \quad y_G = \frac{\int_{AB} y\rho(x,y)\, ds}{\int_{AB} \rho(x,y)\, ds}$$

<u>Demonstrație.</u> Se consideră o diviziune a arcului $\overset{\frown}{AB}$. Coordonatele centrului de greutate al liniei poligonale obținute unind punctele diviziunii, sunt:

$$X_G=\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i\cdot\rho(\xi_i,\eta_i)s_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)s_i}\quad,\quad Y_G=\frac{\sum_{i=1}\eta_i\cdot\rho(\xi_i,\eta_i)s_i}{\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)s_i}$$

La limită, când norma oricărei diviziuni tinde la zero pentru $n\to\infty$, sumele integrale respective tind la integralele curbilinii din formulele centrului de greutate.

Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ este omogen, coordonatele centrului de greutate devin:

$$X_G=\frac{\int_{AB}x\,ds}{\int_{AB}ds}\quad,\quad Y_G=\frac{\int_{AB}y\,ds}{\int_{AB}ds}.$$

Analog se definesc integralele curbilinii în raport cu elementul de arc in spaţiu.

Considerăm arcul $\overset{\frown}{AB}$ al curbei netede în spaţiu (C) şi o funcţie F(x,y,z) definită şi continuă într-un domeniu $D\subset\mathbb{R}^3$, $\overset{\frown}{AB}\subset D$.

Pentru diviziunea:

$$\Delta: A\equiv M_0, M_1, \ldots, M_{i-1}, M_i, \ldots, M_n\equiv B$$

a arcului $\overset{\frown}{AB}$, se formează suma integrală:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)s_i$$

unde s_i este lungimea arcului $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ şi $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$

<u>Definiţie.</u> Dacă, pentru orice şir de diviziuni de normă $\nu(\Delta)\to 0$ cînd $n\to\infty$, sumele S_n corespunzătoare au o limită comună, finită, aceasta este integrala curbilinie a funcţiei F(x,y,z) în raport cu elementul de arc pe curba $\overset{\frown}{AB}$ şi se notează:

$$\int_{AB}F(x,y,z)\,ds$$

Calculul inetgralei curbilinii în raport cu elementul de arc în spaţiu se face prin reprezentarea parametrică a arcului $\widehat{AB}$ şi transformarea integralei curbilinii într-o integrală Riemann în raport cu parametrul.

<u>Teoremă.</u> Dacă $\widehat{AB}$ este reprezentată prin ecuaţiile parametrice:
(AB) $x=f(t), y=g(t), z=h(t)$
unde f, g şi h sunt funcţii de clasă C^1 pentru $a_1 \le t \le b_1$, atunci:

$$\int_{AB} F(x,y,z)\, ds = \int_{a_1}^{b_1} F(f(t), g(t), h(t)) \cdot \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt$$

<u>Demonstraţie.</u> Elementul de arc în spaţiu este :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

şi deci:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) s_i = \sum_{i=1}^{n} F(f(\delta_i), g(\delta_i), h(\delta_i))$$

$$\sqrt{f'^2(\delta_i) + g'^2(\delta_i) + h'^2(\delta_i)}\, d\delta_i$$

Aceasta este o sumă riemanniană care, la limită, tinde la:

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f(t), g(t), h(t)) \cdot \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt$$

Integralele curbilinii în raport cu elementul de arc în spaţiu au proprietăţi şi aplicaţii asemănătoare celor de la integralele curbilinii în raport cu elementul de arc în plan.

Coordonatele centrului de greutate al arcului neomogen $\widehat{AB}$, de densitate $\rho(x,y,z)$, sunt:

$$X_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} x\rho(x,y,z)\, ds}{\int_{\widehat{AB}} \rho(x,y,z)\, ds}, \quad Y_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} y\rho(x,y,z)\, ds}{\int_{\widehat{AB}} \rho(x,y,z)\, ds}, \quad Z_G = \frac{\int_{\widehat{AB}} z\rho(x,y,z)\, ds}{\int_{\widehat{AB}} \rho(x,y,z)\, ds}$$

iar pentru arcul $\widehat{AB}$ omogen, acestea vor fi:

$$x_G = \frac{\int_{AB} x\,ds}{\int_{AB} ds}, \quad y_G = \frac{\int_{AB} y\,ds}{\int_{AB} ds}, \quad z_G = \frac{\int_{AB} z\,ds}{\int_{AB} ds}.$$

Exerciţii.

1. Să se calculeze $I = \int_{0AB0} (x+y)\,ds$, 0AB0 fiind conturul triunghiului cu vârfurile 0(0,0), A(1,0), B(0,1).

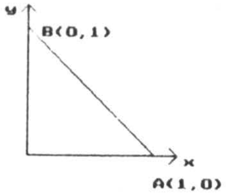


FIG 3.6

$$I = I_{0A} + I_{AB} + I_{B0}$$

(0A) $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx$

$$I_{0A} = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(AB) $\begin{cases} x = x \\ y = 1 - x \end{cases}$ $ds = \sqrt{2}\,dx$

$$I_{AB} = \int_1^0 \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}\,x\Big|_1^0 = -\sqrt{2}$$

(B0) $\begin{cases} x = 0 \\ y = y \end{cases}$ $ds = dy$ $\qquad I_{B0} = \int_1^0 y\,dy = \left.\frac{y^2}{2}\right|_1^0 = -\frac{1}{2}$

Deci $\qquad I = -\sqrt{2}$

2. Să se afle lungimea curbei în spaţiu :

(C) $\begin{cases} y = x^2 \\ z = \frac{2}{3} x^3 \end{cases}$

de la punctul 0(0,0,0) la punctul A(3,9,18).

$$L = \int_C ds = \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2 + 4x^4}\,dx =$$

$$= \int_0^3 (1+2x^2)\,dx = x\Big|_0^3 + \frac{2}{3}x^3\Big|_0^3 = 21$$

3. Să se afle coordonatele centrului de greutate al arcului omogen al curbei:

$$(C) \quad \begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (0 \le t \le \pi)$$

$$x_G = \frac{\int_C x\,ds}{\int_C ds} \;:\; y_G = \frac{\int_C y\,ds}{\int_C ds}$$

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$\int_C ds = 2a\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Big/_0^\pi = 4a$$

$$\int_C x\,ds = \int_0^\pi a(t-\sin t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\,dt -$$

$$-2a^2\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\int_0^\pi t\,.\,(-2\cos\frac{t}{2})'dt -$$

$$-4a^2\int_0^\pi \sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,dt = 2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi + 2\int_0^\pi \cos\frac{t}{2}\,dt\right) -$$

$$-8a^2\,.\,\frac{1}{3}\,.\,\sin^3\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = 8a^2\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi - \frac{8a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}$$

$$\int_C y\,ds = \int_0^\pi a(1-\cos t)\,2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^\pi \sin^3\frac{t}{2}\,dt$$

Se face schimbarea de variabilă : $\frac{t}{2} = u;\, dt = 2du$

$$\int_C y\,ds = 8a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u\,du = 8a^2\,.\,\frac{2}{3} = \frac{16a^2}{3}$$

Deci : $x_G = \frac{4a}{3}$, $y_G = \frac{4a}{3}$

Capitolul 4

INTEGRALE DUBLE

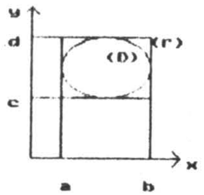


FIG 4.1

Fie $f(x,y)$ o funcţie definită şi mărginită pe un domeniu plan D, $m \le f(x,y) \le M$ pt. $(\forall)$ $(x,y) \in D$. Dacă presupunem $f(x,y) \ge 0$ pentru orice $(x,y) \in D$, atunci $z=f(x,y)$ pentru $(x,y) \in D$ reprezintă o suprafaţă S situată deasupra planul x0y şi avînd ca proiecţie pe planul x0y domeniul D.

Să găsim volumul V al corpului mărginit de suprafaţa S, domeniul D şi cilindrul cu generatoarele paralele cu axa 0z care se deplasează de-a lungul curbei Γ.

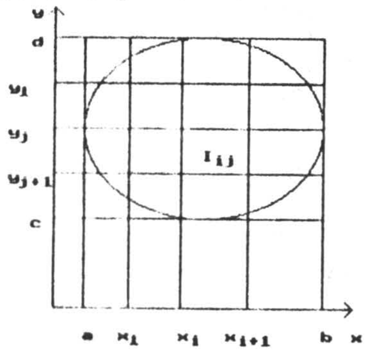


FIG 4.2

Considerăm diviziunile:

$\delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

$\bar{\delta}$; $c=y_0<y_1<\ldots<y_{m-1}<y_m=d$

Paralelele la axa 0y prin punctele diviziunii δ şi la axa 0x prin punctele diviziunii $\bar{\delta}$ determină o diviziune Δ a domeniului D formată din subintervalele bidimensionale I_{ij} care sunt conţinute în intregime sau parţial în domeniul D. Notăm:

$$\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$$

ordinea de numerotare a subintervalelor δ_k fiind indiferentă. Numim norma unei diviziuni Δ numărul pozitiv.

$$\nu(\Delta) = \max_{\substack{0 \le i \le n-1 \\ 0 \le j \le m-1}} \{x_{i+1}-x_i, y_{j+1}-y_j\} = \max(\nu(\delta), \nu(\bar{\delta}))$$

Intervalele bidimensionale $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ ale diviziunii Δ au ariile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ iar marginile inferioară şi superioară ale funcţiei $f(x,y)$ în sunt:

$m_k \le f(x,y) \le M_k$ pentru $(\forall)(x,y) \in \delta_k \subset \Delta$

Formăm sumele Darboux:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{p} m_i \omega_i \quad \text{(suma Darboux inferioară)}$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{p} M_i \omega_i \quad \text{(suma Darboux superioară)}$$

şi suma Riemann :

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i, \eta_i)\omega_i$$

Proprietăţi:

1. Dacă Δ' este o diviziune a domeniului D mai fină decît Δ (adică $\nu(\Delta') < \nu(\Delta)$) atunci:

$$s_\Delta \le s_{\Delta'} \le S_{\Delta'} \le S_\Delta$$

2. Oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ'' rezultă: $s_{\Delta'} \le S_{\Delta''}$

3. Dacă Δ^* este mulţimea tuturor diviziunilor domeniului D, atunci mulţimea $s_{\Delta}{}_{\Delta\in\Delta^*}$ este mărginită superior, mulţimea $S_{\Delta}{}_{\Delta\in\Delta^*}$ este mărginită inferior şi avem: $\sup_{\Delta\in\Delta^*} s_\Delta \le \inf_{\Delta\in\Delta^*} S_\Delta$

4. Între sumele Riemann şi sumele Darboux ale unei diviziuni Δ avem următoarele relaţii:

$$s_\Delta \le \sigma_\Delta \le S_\Delta$$

$$s_\Delta = \inf_{(\xi_i,\eta_i)\in\delta_k} \sigma_\Delta \quad , \quad S_\Delta = \sup_{(\xi_k,\eta_k)\in\delta_k} \sigma_\Delta$$

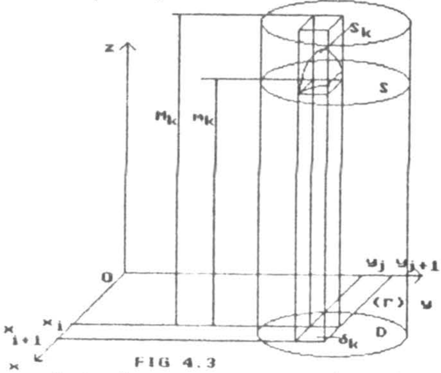


FIG 4.3

Considerăm intervalul δ_k al diviziunii Δ şi S_k partea din suprafaţa S care se proiectează pe planul x0y în δ_k.

$$m_k \le f(\xi_k, \eta_k) \le M_k$$

$$\omega_k \cdot m_k \le \omega_k \cdot f(\xi_k, \eta_k) \le \omega_k \cdot M_k$$

$$\omega_k \cdot m_k \le V_k \le M_k \cdot \omega_k$$

Însumînd în raport cu $k=1,2,\dots,p$ rezultă: $s_\Delta \le \sigma_\Delta \le S_\Delta$ sau

$s_\Delta \leq V \leq S_\Delta$.

Definiție. Fie f o funcție definită și mărginită pe un domeniu închis și mărginit $D \subset R^2$. Se spune că f este integrabilă Riemann pe D dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) ale domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, șirurile sumelor Darboux (s_{Δ_n}) și (S_{Δ_n}) au o limită comună finită V care se numește integrala dublă a funcției f pe domeniul D și se notează $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$

Altă definiție : Spunem că o funcție f(x,y) definită și mărginită pe domeniul închis și mărginit D este integrabilă Riemann pe D, dacă pentru orice șir de diviziuni (Δ_n) cu norma $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$, și pentru orice alegere a punctelor $(\xi_k, \eta_k) \in \delta_k \subset \Delta$, șirurile Riemann corespunzătoare (σ_{Δ_n}) au o limitA comună, finită, V.

Dacă f(x,y) este pozitivă pe D, atunci V reprezintă volumul cilindric care are ca bază domeniul D din planul x0y și este limitat sus de suprafața z=f(x,y).

Criteriul de integrabilitate. Fie f(x,y) o funcție definită și mărginită pe un domeniu închis și mărginit D. Funcția f(x,y) este integrabilă pe D, dacă pentru orice număr $\epsilon>0$, există un număr $\eta(\epsilon)>0$ astfel încît pentru orice diviziune Δ a domeniului D cu $\nu(\Delta)<\eta(\epsilon)$, să avem $S_\Delta - s_\Delta < \epsilon$.

Demonstrație. Necesitatea. Presupunem că f este integrabilă și fie $V = \iint_D f(x,y)\,dxdy$, deci pentru orice $\epsilon>0$, există $N(\epsilon)$ astfel încît pentru orice $n>N(\epsilon)$ avem: $s_{\Delta_n} > V - \frac{\epsilon}{2}$, $S_{\Delta_n} < V + \frac{\epsilon}{2}$ pentru $\lim_{n\to\infty} \nu(\Delta_n) = 0$

$$V - \frac{\epsilon}{2} < s_{\Delta_n} < S_{\Delta_n} < V + \frac{\epsilon}{2}$$

deci: $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} < V + \frac{\epsilon}{2} - V + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

(din : a<b<c<d rezultă : c-b<d-a)

Suficiența. Presupunem că pentru orice $\epsilon>0$, există $N(\epsilon)$ astfel încît pentru orice $n>N(\epsilon)$ avem $S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} < \epsilon$ pentru orice diviziune Δ_n a domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Dacă $\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n} = V'$, $\lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n} = V''$, rezultă: $s_{\Delta_n} \leq V' \leq V'' \leq S_{\Delta_n}$ și deci $V'' - V' \leq S_{\Delta_n} - s_{\Delta_n} < \epsilon$ și cum ϵ este oarecare iar V', V'' fixe rezultă

$V'=V''$ deci f este integrabilă Riemann pe D.

Proprietățile integralelor duble :

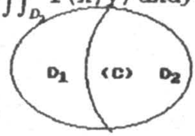
1°. Dacă f este integrabilă pe D și $\lambda\in R$, atunci λf este integrabilă pe D și :

$$\iint_D \lambda f(x,y)\,dxdy=\lambda\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

2°. Dacă f și g sunt integrabile pe D, funcția f+g este integrabilă pe D și :

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy=\iint_D f(x,y)\,dxdy+\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

3°. $$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy+\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$



unde $D=D_1\bigcup D_2$ și $D_1\bigcap D_2=\Phi$

4°. Dacă $f(x,y)\geq 0$, $(x,y)\in D$ este integrabilă pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy\geq 0$$

5°. Dacă $f(x,y)\geq g(x,y)$ pentru orice $(x,y)\in D$ și dacă f și g sunt integrabile pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy\geq\iint_D g(x,y)\,dxdy$$

6°. Dacă f este integrabilă pe D, atunci $|f|$ este integrabilă pe D și

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right|\leq\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$$

Calculul integralelor duble.

Teoremă. Dacă $f(x,y)$ este mărginită și integrabilă pe domeniul limitat de un dreptunghi : $I=\{(x,y)/a\leq x\leq b; c\leq y\leq d\}$ și dacă:

a) pentru orice $x\in[a,b]$ există integrala $F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$,

b) $F(x)$ este integrabilă pe $[a,b]$, atunci:

$$\iint_I f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Demonstrație. Considerăm o diviziune Δa domeniului I.

Notăm: $m_{ij}=\inf\limits_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y)$

$$M_{ij}=\sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y)$$

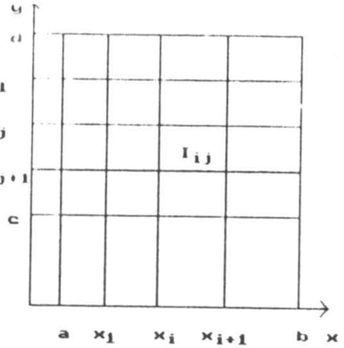


FIG 4.4

Sumele Darboux vor fi:

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} m_{ij}\,\omega_{ij}$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} M_{ij}\,\omega_{ij}$$

unde $\omega_{ij}=(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$ este aria intervalului bidimensional I_{ij}.

$m_{ij} \le f(x,y) \le M_{ij}$ pentru orice $(x,y)\in I_{ij}$

$$m_{ij}(y_{j+1}-y_j) \le \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x,y)\,dy \le M_{ij}(y_{j+1}-y_j)$$

Însumăm în raport cu j şi vom obţine :

$$\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(y_{j+1}-y_j) \le \int_c^d f(x,y)\,dy \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(y_{j+1}-y_j)$$

Funcţia $F(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$ este integrabilă pe $[a,b]$ deci pentru orice interval $[x_i, x_{i+1}]$ putem scrie:

$$\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(y_{j+1}-y_j)(x_{i+1}-x_i) \le \int_{x_i}^{x_{i-1}}\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(y_{j+1}-y_j)(x_{i+1}-x_i)$$

Însumăm în raport cu i şi vom obţine :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_1} m_{ij}\,\omega_{ij} \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}\,\omega_{ij}$$

sau:

$$S_\Delta \le \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx \le S_\Delta$$

Deoarece f(x,y) este integrabilă pe I rezultă:

$$\sup_{\Delta\in\Delta^{\cdot}} s_\Delta \quad = \quad \inf_{\Delta\in\Delta^{\cdot}} S_\Delta \quad = \quad \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

unde $\Delta^{\cdot}$ este mulţimea tuturor diviziunilor lui I.

Deci: $\iint_I f(x,y)\,dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$

De obicei se notează:

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Analog se obţine şi:

$$\iint_I f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

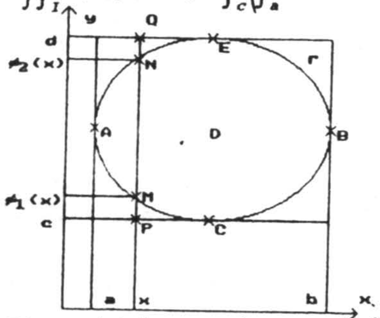


FIG 4.5

Considerăm domeniul D din planul x0y, mărginit de o curbă Γ închisă. Domeniul D este conţinut în domeniul I limitat de un dreptunghi:

$$I=\{(x,y)\,/\,a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

Fie $y=\phi_1(x)$ ecuaţia arcului ACB al curbei Γ şi $y=\phi_2(x)$ ecuaţia arcului AEB al curbei Γ pentru $a\le x\le b$.

Teoremă. Fie funcţia f(x,y) definită pe D, mărginită şi integrabilă pe D; dacă există integrala $F(x)=\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$ pentru **orice $x\in[a,b]$ şi dacă F(x) este integrabilă pe [a,b], atunci:**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Demonstratie. Vom reduce problema integrării pe D la problema integrării pe intervalul I, tratată anterior.

Considerăm funcţia:

$$\overline{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{dacă } (x,y)\in D\\ 0, & \text{dacă } (x,y)\in I-D\end{cases}$$

$$\iint_I \overline{f}(x,y)\,dxdy=\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Dar:

$$\iint_I \overline{f}(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left[\int_0^d \overline{f}(x,y)\,dy\right]dx$$

$$\int_c^d \overline{f}(x,y)\,dy=\int_c^{\phi_1(x)} \overline{f}(x,y)\,dy+\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \overline{f}(x,y)\,dy+\int_{\phi_2(x)}^{d} \overline{f}(x,y)\,dy=$$

$$=\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy$$

deci:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Analog se deduce că:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

unde $x=\psi_1(y)$ este ecuaţia arcului CAE al curbei Γ iar $x=\psi_2(y)$ este ecuaţia arcului CBE al curbei Γ pentru $c\le y\le d$.

Formula lui Green

Fie D un domeniu închis şi mărginit de o curbă închisă Γ şi fie $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ două funcţii continue pe D derivabile parţial şi cu derivatele $\frac{\delta P}{\delta Y}$ şi $\frac{\delta Q}{\delta x}$ continue pe D.

În aceste condiţii are loc egalitatea:

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\iint_D\left(\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y}\right)dxdy$$

numită formula lui Green.

Demonstraţie. Presupunem că orice paralelă la 0x sau la 0y taie curba Γ numai în două puncte (formula lui Green este însă adevărată şi dacă se înlătură această condiţie).

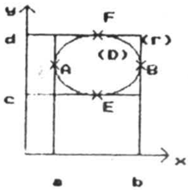


FIG 4.6

Dacă $y=\phi_1(x)$ este ecuaţia arcului AEB şi $y=\phi_2(x)$ este ecuaţia arcului AFB atunci:

$$-\iint_D\frac{\delta P}{\delta y}dxdy=-\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\frac{\delta P}{\delta y}dy=-\int_a^b P(x,y)\Big|_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}dx=-\int_a^b P(x_1\phi_2(x))\,dx$$

$$+\int_a^b P(x_1\phi_1(x))\,dx=\int_{BFA}P(x,y)\,dx+\int_{AEB}P(x,y)\,dx=\int_\Gamma P(x,y)\,dx$$

Dacă $x=\psi_1(y)$ este ecuaţia arcului EAF şi $x=\psi_2(y)$ este ecuaţia arcului EBF atunci:

$$\iint_D\frac{\delta Q}{\delta x}dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\delta Q}{\delta x}dx=\int_c^d Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}dy=\int_c^d Q(\psi_2(y),y)\,dy-$$

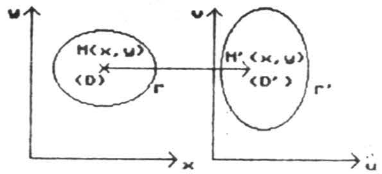
$$-\int_c^d Q(\psi_1(y), y)\,dy = \int_{EBF} Q(x,y)\,dy + \int_{FAE} Q(x,y)\,dy = \int_\Gamma Q(x,y)\,dy$$

Adunînd:

$$\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right) dxdy$$

Schimbarea de variabile în integrale duble

FIG 4.7



Considerăm în planul x0y un domeniu D mărginit de curba închisă Γ și în planul u0v un domeniu D' mărginit de curba închisă Γ'

Fie transformarea punctuală a domeniului D' în D:

$$(1)\quad \begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}$$

cu ϕ și ψ continue, cu derivatele de ordinul întîi continue pe D'. Determinantul funcțional:

$$\frac{D(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\delta\phi}{\delta u} & \frac{\delta\phi}{\delta v} \\ \frac{\delta\psi}{\delta u} & \frac{\delta\psi}{\delta v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } D'.$$

Fie $\Delta' = (\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_p)$ o diviziune a domeniului D' căruia îi corespunde prin transformarea (1) diviziunea $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ a domeniului D. Dacă ω_i și ω'_i sunt ariile subdomeniilor δ_i și δ'_i respectiv, atunci:

$$\omega_i = \left|\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}\right|_{(u_i,v_i)} \cdot \omega'_i\ ,\quad (u_i, v_i) \in \delta'_i.$$

Deci:

$$\sum_{i=1}^{p} f(x_i, y_i) \cdot \omega_i = \sum_{i=1}^{p} f[\phi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)] \cdot \left|\frac{D(\phi, \psi)}{D(u, v)}\right|_{(u_i, v_i)} \cdot \omega'_i$$

de unde rezultă:

$$\iint_D f(x, y)\, dx = \iint_D f[\phi(u, v), \psi(u, v)] \cdot \left|\frac{D(\phi, \psi)}{D(u, v)}\right| \cdot dudv,$$

care este formula schimbării de variabile în integrale duble.

Aplicatii ale integralelor duble

1. Aria unui domeniu plan D este :

$$A = \iint_D dxdy$$

Demonstratie : $A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \iint_D \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dxdy = \iint_D dxdy$

2. Masa domeniului plan neomogen D este : $M = \iint_D \rho(x, y)\, dxdy$

3. Volumul cilindric care are ca baza domeniul D şi este limitat sus de suprafaţa $z=f(x,y)$ este:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

Formula rezultă din definiţia integralei duble.

4. Centrele de greutate ale plăcilor plane.

Considerăm o placă plană D, neomogenă, de densitate $\rho(x,y)$. Fie $D=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ o diviziune a domeniului D şi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ ariile subdomeniilor (plăcuţelor) $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ respectiv. Dacă presupunem că masa unei plăcuţe δ_k este concentrată în punctul $P_k(x_k, y_k)$, atunci masa unei plăcuţe δ_k este $\rho(x_k, y_k) . \omega_k$ iar centrul de greutate al celor p plăcuţe are coordonatele:

$$\overline{x_G} = \frac{\sum_{k=1}^{p} x_k \rho(x_k, y_k)\, \omega_k}{\sum_{k=1}^{p} \rho(x_k, y_k)\, \omega_k}, \quad \overline{y_G} = \frac{\sum_{k=1}^{p} y_k \rho(x_k, y_k)\, \omega_k}{\sum_{k=1}^{p} \rho(x_k, y_k)\, \omega_k}$$

Dacă (Δ_n) este un şir de diviziuni ale domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$, atunci sumele integrale respective conduc la integrale duble relative la domeniul D şi deci:

$$x_G=\frac{\iint_D x\rho(x,y)\,dxdy}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}\ ,\ y_G=\frac{\iint_D y\rho(x,y)\,dxdy}{\iint_D \rho(x,y)\,dxdy}.$$

Dacă placa este omogenă, centrul de greutate are coordonatele:

$$x_G=\frac{\iint_D xdxdy}{A}\ ;\ y_G=\frac{\iint_D ydxdy}{A}$$

Momente de inerție.

Definiție. Dacă $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sînt n puncte materiale de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ respectiv, momentul de inerție I al acestor n puncte materiale față de un punct P(o dreaptă, un plan) este: $I=\sum_{k=1}^{n} m_k d_k^2$

unde d_k este distanța punctului M_k la P.

Considerăm diviziunea $\Delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$ a plăcii D și masa unei plăcuțe δ_k este $\rho(x_k, y_k)\cdot\omega_k$. Momentele de inerție pentru diviziunea Δ vor fi:

$$\overline{I_0}=\sum_{k=1}^{p}(x_k^2+y_k^2)\,\rho(x_k,y_k)\,\omega_k \quad \text{față de origine}$$

$$\overline{I_{0x}}=\sum_{k=1}^{p} y_k^2\,\rho(x_k,y_k)\,\omega_k \quad \text{față de } 0_x$$

$$\overline{I_{0y}}=\sum_{k=1}^{p} x_k^2\,\rho(x_k,y_k)\,\omega_k \quad \text{față de } 0_y$$

Considerăm un șir de diviziuni (Δ_n) de normă $\nu(\Delta_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$ și vom obține momentele de inerție:

$$I_0=\iint_D \rho(x,y)\,(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$I_{0x}=\iint_D \rho(x,y)\,y^2dxdy$$

$$I_{0y}=\iint_D \rho(x,y)\,x^2dxdy$$

Exerciţii.

Să se calculeze integralele duble:

1. $I=\iint_D (x+y)\,dxdy$,D fiind domeniul limitat de curbele:

$(c_1)\ x^2=y,\ (c_2)\ y^2=x$.

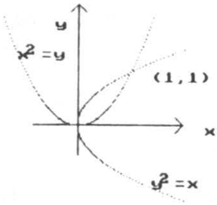


FIG 4.8

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\,dy=\int_0^1\left[x(\sqrt{x}-x^2)+\frac{1}{2}(x-x^4)\right]dx=$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^2}{4}\Big|_0^1-\frac{x^5}{10}\Big|_0^1=\frac{3}{10}$$

2. $I=\iint_D (x+y)^2\,dxdy$ pe domeniul $(D)\ x^2+y^2\le 2x$

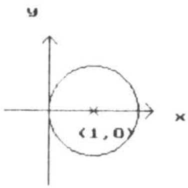


FIG 4.9

Se trece la coordonatele polare:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

$$dxdy=\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\,drd\theta=r\,drd\theta$$

$$I = \iint_{D} r^3 (\cos\theta + \sin\theta)^2 \, dr \, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)^2 \int_0^{2\cos\theta} r^3 \, dr =$$

$$= 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta + \sin\theta)^2 \cos^4\theta \, d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \, d\theta + 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta \sin\theta \, d\theta =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + 8 \left(\frac{-\cos^6\theta}{6} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{3\pi}{2}$$

CAPITOLUL 5

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

§1. Integrale de suprafață în raport cu elementul de suprafață.

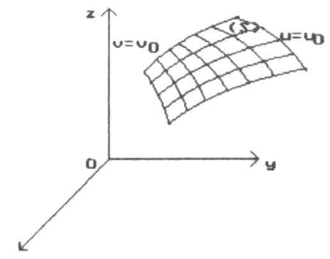


FIG 5.1

Fie în spațiu suprafața:

$$(S)\quad \begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases}, \quad (u,v)\in D$$

funcțiile f,g și h fiind continue și cu derivate parțiale de ordinul întîi continue în domeniul închis și mărginit D.

Considerăm funcția F(x,y,z) definită pe S.

Facem o diviziune δ a suprafeței S în suprafețele $s_1, s_2, \dots, s_p$ de arii respectiv $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p$ și considerăm suma neriemaniană:

$$\Omega_\delta = \sum_{i=1}^{p} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\sigma_1$$

unde (ξ_i, η_i, ζ_i) este un punct oarecare situat pe s_i.

Considerăm un șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $\nu(\delta_n) \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Definiție. Dacă pentru orice șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu $\gamma(\delta_n) \to 0$, șirul sumelor (Ω_{δ_n}) are o limită finită, atunci această limită se numește integrala de suprafață a funcției F pe suprafața S în raport cu elementul de suprafață și se notează:

$$\iint_S (x, y, z)\, d\sigma$$

Pentru calculul integralei de suprafață în raport cu elementul de suprafață, observăm că diviziunii Δ a domeniului D și deci la șirul de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S cu corespunde șirul de diviziuni (Δ_n) ale domeniului D cu $\nu(\Delta_n) \to 0$.

Din geometria diferențială a suprafațelor se știe că elementul de suprafață este:

$$d\sigma = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\, dudv$$

unde: $X = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $Y = \frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ *si* $Z = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}$

sau:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

unde:

$$E = f_u'^2 + g_u'^2 + h_u'^2$$

$$G = f_v'^2 + g_v'^2 + h_v'^2$$

$$F = f_u' . f_v' + g_u' . g_v' + h_u' . h_v'$$

Deci:

$$\iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D F[f(u,v), g(u,v), h(u,v)]\, \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\, dudv$$

Dacă suprafața (S) este dată prin ecuația:

$$(S)\ z = f(x,y) \ , \ (x,y) \in D$$

atunci:

$$\iint_S F(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D F[x,y,f(x,y)] . \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy$$

unde:

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} \ \ si \ \ q = \frac{\delta z}{\delta y} \ .$$

<u>Aplicații ale integralelor de suprafață în raport cu elementul de suprafață.</u>

1. Aria unei suprafețe S în spațiu este:

$$A_S = \iint_S d\sigma$$

Considerăm o diviziune δ a suprafeței S în suprafețele $s_1, s_2, \ldots, s_p$ de arii $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_p$ respctiv și formăm suma integrală:

$$\Omega_\delta = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i$$

Considerînd un șir de diviziuni (δ_n) ale suprafeței S de normă

$\nu(\delta_n)\to 0$, şirul sumelor (Ω_{δ_n}) tinde către aria suprafeţei S.

2. Coordonatele centrului de greutate ale unei plăci curbe S de densitate $\rho(x,y,z)$ sînt:

$$x_G=\frac{\iint_S x\rho(x,y,z)\,d\sigma}{\iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma}\ ;\ y_G=\frac{\iint_S y\rho(x,y,z)\,d\sigma}{\iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma}\ ;\ z_G=\frac{\iint_S z\rho(x,y,z)\,d\sigma}{\iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma}$$

Pentru o diviziune δ a suprafeţei S, coordonatele centrului de greutate al suprafeţelor $s_1, s_2, \ldots, s_p$ vor fi:

$$\overline{x_G}=\frac{\sum_{i=1}^{p} x_i\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}\ ;\ \overline{y_G}=\frac{\sum_{i=1}^{p} y_i\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}\ ;\ \overline{z_G}=\frac{\sum_{i=1}^{p} z_i\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}{\sum_{i=1}^{p}\rho(x_i,y_i,z_i)\sigma_i}$$

Considerînd un şir (δ_n) de diviziuni ale suprafeţei S de normă $\nu(\delta_n)\to 0$, sumele integrale respective vor tinde către integrale de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţă.

Observăm că masa suprafeţei S este:

$$M=\iint_S \rho(x,y,z)\,d\sigma$$

§2. Integrale de suprafaţă în raport cu coordonatele.

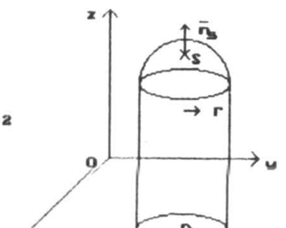


FIG 5.2

Considerăm suprafaţa:

$$(S)\ \begin{cases} x=f(u,v)\\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D$$

f, g şi h fiind funcţii continue cu derivate parţiale de ordinul întîi continue în domeniul închis şi mărginit D din planul uOv; presupunem că determinanţii funcţionali

$X=\dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $Y=\dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, $Z=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$ nu se anulează în D.

Numim faţa superioară pozitivă a suprafeţei S în raport cu planul xOy faţa lui S pentru care vectorul normal $\overline{n}$ face un unghi ascuţit cu axa Oz, cealaltă faţă a lui S o vom numi faţa inferioară (negativă). Dacă suprafaţa S este mărginită de curba Γ, atunci sensul pozitiv pe Γ care este asociat feţei superioare (pozitive) şi corespunde sensului direct pe C. În acest mod definim o suprafaţă orientată S.

Considerăm funcţia P(x,y,z) definită pe suprafaţa orientată S şi fis δ o diviziune a suprafeţei S:

$$\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_p)$$

căreia îi corespunde o diviziune Δ' a domeniului D_1, proiecţia suprafeţei S pe planul xOy:

$$\Delta'=(\delta'_1,\delta'_2,\ldots,\delta'_p)$$

Fie:

$$\omega'_i=\begin{cases} aria\ \delta'_i, daca\ \delta'_i\ este\ orientat\ direct\\ -aria\ \delta'_i, daca\ \delta'_i\ este\ orientat\ invers.\end{cases}$$

Dacă σ_i este aria porţiunii de suprafaţă δ_i şi γ_i este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată δ_i într-un punct al ei cu axa Oz, rezultă:

$$\omega'_i=\gamma_i\cdot\sigma_i$$

Considerăm suma neriemmaniană:

$$\Omega_{\Delta'}=\sum_{i=1}^{p} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\omega'_i$$

unde (ξ_i,η_i,ζ_i) este un punct oarecare de pe δ_i.

Înlocuind valoarea lui ω'_i, suma $\Omega_{\Delta'}$ este egală cu suma:

$$\Omega^*_\delta=\sum_{i=1}^{p} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\gamma_i\sigma_i$$

Considerăm şirul de diviziuni $\delta(n)$ ale suprafeţei S cu $\nu(\delta_n)\to0$ cînd $n\to\infty$, căruia îi corespunde şirul de diviziuni (Δ'_n) a domeniului D_1 cu $\nu(\Delta'_n)\to0$ cînd $n\to\infty$.

<u>Definiţie.</u> Dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ'_n) cu $\nu(\Delta'_n)\to0$ cînd $n\to\infty$, şirul sumelor $(\Omega_{\Delta'_n})$ are o limită finită, această limită se numeşte integrala de suprafaţă a funcţiei

$P(x,y,z)$ în raport cu x şi y şi se notează:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dxdy$$

Şirul sumelor (Ω'_{δ_n}) are aceeaşi limită cu $(\Omega_{\Delta'_n})$ deci:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dxdy = \iint_S P(x,y,z)\,\gamma\,d\sigma$$

formulă care face legătura între cele două tipuri de integrale de suprafaţă şi în care γ este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată S cu axa Oz:

Calculul integralei $\iint_S P(x,y,z)\,dxdy$ se face ţinînd cont de relaţia:

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv$$

şi deci:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dxdy = \iint_D P[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\,.\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,dudv$$

dacă domeniul D are aceeaşi orientare cu domeniul D_1 şi:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dxdy = -\iint_D P[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\,.\,\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,.\,dudv$$

dacă domeniul D are orientare inversă faţă de D_1, (de fapt şi faţă de S).

Similar se defineşte integrala funcţiei $Q(x,y,z)$ pe suprafaţa S orientată în raport cu y şi z:

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dydz = \iint_S Q(x,y,z)\,.\,\alpha\,d\sigma$$

unde α este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată S cu axa Ox.

Calculul acestei integrale se face:

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dydz = \iint_D Q[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\,.\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv$$

dacă S şi D au aceeaşi orientare sau:

$$\iint_S Q(x,y,z)\,dydz = -\iint_D Q[f(u,v),g(u,v),g(u,v)]\,.\,\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,dudv,$$

dacă S şi D au orientări diferite.

Asemănător se defineşte integrala funcţiei $R(x,y,z)$ pe suprafaţa S în raport cu z,x:

$$\iint_S R(x,y,z)\,dzdx = \iint_S R(x,y,z)\,\beta\,d\sigma$$

unde ß este cosinusul unghiului pe care îl face normala la suprafaţa orientată S cu axa Oy.

Calculul se face:

$$\iint_S R(x,y,z)\,dzdx = \iint_D R[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv$$

dacă S şi D sunt orientate la fel şi:

$$\iint_S R(x,y,z)\,dzdx = -\iint_D R[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\,\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,dudv$$

dacă S şi D sunt orientate invers una celeilalte.

Adunînd cele trei relaţii obţinem:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dxdy + Q(x,y,z)\,dydz + R(x,y,z)\,dzdx =$$

$$= \iint_S [\beta R(x,y,z) + \alpha Q(x,y,z) + \gamma P(x,y,z)]\,d\sigma$$

care dă forma generală a integralei de suprafaţă în raport cu coordonatele şi legătura acesteia cu integrala de suprafaţă în raport cu elementul de suprafaţă.

Formula lui Stokes

Fie suprafaţa orientată:

$$(S)\ \begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) \\ z=h(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D$$

mărginită de o curbă închisă Γ; f, g şi h sunt continue şi au derivate parţiale de ordinul întîi şi doi continue pe D.

Dacă P(x,y,z), Q(x,y,z) şi R(x,y,z) sunt trei funcţii continue şi cu derivate parţiale continue pe S, atunci:

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\delta Q}{\delta x} - \frac{\delta P}{\delta y}\right)dxdy + \left(\frac{\delta R}{\delta y} - \frac{\delta Q}{\delta z}\right)dydz + \left(\frac{\delta P}{\delta z} - \frac{\delta R}{\delta x}\right)dzdx$$

egalitate care se numeşte formula lui Stokes.

Demonstraţie.

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,dx = \int_C P[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\left(\frac{\delta f}{\delta u}du + \frac{\delta f}{\delta v}dv\right)$$

unde C este conturul domeniului D din planul xOy.

Notăm:

$$P[f(u,v),g(u,v),h(u,v)] = P^*(u,v)$$

şi deci:

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)\,dx = \int_{c} P^{*}(u,v)\,\frac{\delta f}{\delta u}du + P^{*}(u,v)\,\frac{\delta f}{\delta v}dv +$$

$$+\iint_{D}\left[\frac{\delta}{\delta u}\left(P^{*}\cdot\frac{\delta f}{\delta v}\right)-\frac{\delta}{\delta v}\left(P^{*}\cdot\frac{\delta f}{\delta u}\right)\right]dudv=$$

$$=\iint_{D}\left[\left(\frac{\delta P}{\delta f}\cdot\frac{\delta f}{\delta u}+\frac{\delta P}{\delta g}\cdot\frac{\delta g}{\delta u}+\frac{\delta P}{\delta h}\cdot\frac{\delta h}{\delta u}\right)\frac{\delta f}{\delta v}+P^{*}\frac{\delta^{2} f}{\delta v\delta u}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\delta P}{\delta f}\cdot\frac{\delta f}{\delta v}+\frac{\delta P}{\delta g}\cdot\frac{\delta g}{\delta v}+\frac{\delta P}{\delta h}\cdot\frac{\delta h}{\delta v}\right)\cdot\frac{\delta f}{\delta u}-P^{*}\frac{\delta^{2} f}{\delta u\delta v}\right]dudv=$$

$$=\iint_{D}\left[\frac{\delta P}{\delta z}\left(-\frac{\delta x}{\delta u}\cdot\frac{\delta z}{\delta v}+\frac{\delta x}{\delta v}\cdot\frac{\delta z}{\delta u}\right)-\frac{\delta P}{\delta y}\left(\frac{\delta x}{\delta u}\cdot\frac{\delta y}{\delta v}-\frac{\delta x}{\delta v}\cdot\frac{\delta y}{\delta u}\right)\right]dudv=$$

$$=\iint_{D}\left[\frac{\delta P}{\delta z}\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,v)}-\frac{\delta P}{\delta y}\cdot\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]dudv=\iint_{S}\frac{\delta P}{\delta z}\,dzdx-\frac{\delta P}{\delta y}\,dxdy$$

Analog obţinem:

$$\int_{\Gamma} Q(x,y,z)\,dy=\iint_{S}\frac{\delta Q}{\delta x}\,dxdy-\frac{\delta Q}{\delta z}\,dydz$$

$$\int_{\Gamma} R(x,y,z)\,dz=\iint_{S}\frac{\delta R}{\delta y}\,dydz-\frac{\delta R}{\delta x}\,dzdx$$

Adunînd cele trei relaţii, obţinem:

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\iint_{S}\left(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z}\right)dydz+\left(\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x}\right)dzdx+\left(\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y}\right)dxdy.$$

Exerciții

Să se calculeze integralele de suprafață:

1. $I = \iint_S z d\sigma$ pe (S) $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z \ge 0$.

(S) $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ se proiectează în (D) $x^2+y^2 \le a^2$

$$p = \frac{\delta z}{\delta x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\ ,\quad q = \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$I = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy = a\iint_D dxdy = \Pi a^3$$

2. $I = \iint_S zdxdy + xdydz + ydzdx$ pe suprafața:

$$(S)\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\phi \\ y = a\sin\theta\sin\phi \\ z = a\cos\theta \end{cases} \qquad (\theta,\phi) \in (D)\begin{cases} 0 < \theta \le \pi \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

$$dxdy = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\phi)}\,d\theta d\phi = \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\phi & a\cos\theta\sin\phi \\ -a\sin\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} d\theta d\phi = a^2\sin\theta\cos\theta\, d\theta d\phi$$

$$dydz = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\phi)}\,d\theta d\phi = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\phi & -a\sin\theta \\ a\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} d\theta d\phi = a^2\sin^2\theta\cos\phi\, d\theta d\phi$$

$$dzdx = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\phi)}\,d\theta d\phi = \begin{vmatrix} -a\sin\theta & a\cos\theta\cos\phi \\ 0 & -a\sin\theta\sin\phi \end{vmatrix} d\theta d\phi = a^2\sin^2\theta\sin\phi\, d\theta d\phi$$

$$I = \iint_D a^3\sin\theta\, d\theta d\phi = a^3\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = 4\pi a^3.$$

CAPITOLUL VI

INTEGRALE TRIPLE

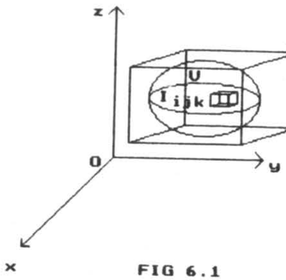


FIG 6.1

Considerăm un corp K de volum V, neomogen, de densitate $f(x,y,z)\geq 0$, variabilă, f fiind definită şi mărginită în V: $m \leq f(x,y,z) \leq M, (x,y,z)\in V$ Ne propunem să determinăm masa totală a corpului K.

Domeniul V închis şi mărginit este interior unui interval tridimensional I:

$I=\{(x,y,z) \;/\; a\leq x\leq b, c\leq y\leq d, e\leq z\leq g\}$

Considerăm diviziunile:

$$\delta: a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$$

$$\delta': c=y_0<y_1<\ldots<y_{m-1}<y_m=d$$

$$\delta'': e=z_0<z_1<\ldots<z_{q-1}<z_q=g$$

respectiv ale intervalelor [a,b], [c,d], [e,g]. Planele paralele cu planul yOz prin punctele diviziunii δ, planele paralele cu zOx prin punctele diviziunii δ' şi planele paralele cu xOy prin punctele diviziunii δ'' împart intervalul I în nmp subintervale:

$$I_{ijg}=\{(x,y,z)\;/\;x_i\leq x\leq x_{i+1}, y_j\leq y\leq y_{j+1}, z_k\leq z\leq z_{k+1}\}$$

Dintre acestea, o parte sunt conţinute în întregime în V (mulţimea acestora o notăm M), o parte conţin şi puncte ale lui V şi ale lui I-V (mulţimea lor o notăm cu M') şi alte subintervale exterioare lui V.

Definiţie. Numim o diviziune Δ a volumului V, mulţimea subintervalelor I_{ijk} din M şi M' şi notăm:

$$\Delta=(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p)$$

ordinea de numerotare a subintervalelor δ_i fiind indiferentă.

Norma unei diviziuni Δ este:

$$\nu(\Delta)=\max\{x_{i+1}-x_i, y_{j+1}-y_j, z_{k+1}-z_k\}=\max\{\nu(\delta), \nu(\delta'), \nu(\delta'')\}$$

Notăm cu m_i, M_i marginile inferioară şi superioară ale funcţiei $f(x,y,z)$ în δ_i:

$$m_i \leq f(x,y,z) \leq M_i \;,\quad (x,y,z)\in\delta_i$$

şi formăm sumele:

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{p} m_i v_i \quad \text{(suma Darboux inferioară)}$$

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{p} M_i v_i \quad \text{(suma Darboux superioară)}$$

$$\Sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{p} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i) v_i \quad \text{(suma Riemman)}$$

unde v_i este volumul subintervalului δ_i iar (ξ_i,η_i,ζ_i) un punct oarecare în δ_i.

Proprietăţi:

1. Dacă Δ' este o diviziune a volumului V mai fină ca Δ rezultă:

$$s_\Delta \leq s_{\Delta'} \leq S_{\Delta'} \leq S_\Delta$$

2. Oricare ar fi diviziunile Δ' şi Δ'' ale volumului V rezultă:

$$s_{\Delta'} \leq S_{\Delta''}$$

3. $s_\Delta \leq \sigma_\Delta \leq S_\Delta$

4. $s_\Delta = \inf\limits_{\Delta\in\Delta^*} \sigma_\Delta \;;\; S_\Delta = \sup\limits_{\Delta\in\Delta^*} \sigma_\Delta$

<u>Definiţia I.</u> Fie f o funcţie definită şi mărginită pe un volum $V\subset R^3$. Se spune că f este integrabilă Riemman pe V dacă pentru orice şir de diviziuni $(\Delta_n)\to 0$ ale volumului V cu $\nu(\Delta_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$, şirurile sumelor Darboux (s_{Δ_n}) şi (S_{Δ_n}) au o limită comună M finită care se numeşte integrala triplă a funcţiei f pe volumul V şi se notează:

$$M = \iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz$$

Dacă $f(x,y,z)\geq 0$ în V, atunci M reprezintă masa corpului K, de volum V, de densitate $f(x,y,z)$.

<u>Definiţia II.</u> O funcţie $f(x,y,z)$ definită şi mărginită pe domeniul închis şi mărginit $V\subset R^3$ este integrabilă Riemman pe V, dacă pentru orice şir de diviziuni (Δ_n) cu norma $\nu(\Delta_n)\to 0$ cînd $n\to\infty$ şi pentru orice alegere a punctelor $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\delta_i\subset\Delta_n$, şirurile Riemman corespunzătoare (σ_{Δ_n}) au o limită comună, finită M.

Criteriul de integrabilitate al lui Darboux. Funcţia f(x,y,z) definită şi mărginită pe un domeniu închis şi mărginit V este integrabilă pe V dacă pentru orice număr $\epsilon>0$ există un număr $\eta(\epsilon)>0$ astfel încît pentru orice diviziune Δ a domeniului V cu $\nu(\Delta)<\eta(\epsilon)$ să avem $S_\Delta - s_\Delta<\epsilon$ .Demonstraţia se face la fel ca la integralele duble.

Se arată că funcţiile continue pe un domeniu închis şi mărginit V sunt integrabile pe V.

Proprietăţile integralelor triple sunt analoage celor de la integrale duble adică:

1°. Dacă f este integrabilă pe V şi $\lambda\in R$, atunci λf este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V \lambda f(x,y,z)\,dxdydz=\lambda\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

2°. Dacă f şi g sînt integrabile pe V, atunci f+g este integrabilă pe V şi

$$\iiint_V [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dxdydz=\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz+$$

$$+\iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

3°. Dacă $f(x,y,z)\geq 0$, $(x,y,z)\in V$, este integrabilă pe V atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\geq 0$$

4°. Dacă $f(x,y,z)\geq g(x,y,z)$, $(x,y,z)\in V$, şi dacă f şi g sunt integrabile pe V atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\geq\iiint_V g(x,y,z)\,dxdydz$$

5°. Dacă f este integrabilă pe V şi $V=V_1\cup V_2$ atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz+\iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz$$

6°. Dacă f este integrabilă pe V atunci şi $|f|$ este integrabilă pe V şi

$$\left|\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz\right|\leq\iiint_V |f(x,y,z)|\,dxdydz$$

7°. Formula de medie. Dacă f este integrabilă şi mărginită pe V:

$$m\leq f(x,y,z)\leq M,\ (x,y,z)\in V\ ,$$

atunci există un număr $m\leq\mu\leq M$ astfel încît:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\mu V_1$$

unde V_1 este volumul domeniului V.

Calculul integralelor triple.

I. Considerăm întîi cazul cînd V este un interval I limitat de un paralelipiped:

$$I=\{(x,y,z)/x\in[a,b],y\in[c,d],z\in[e,g]\}$$

Teoremă. Dacă f(x,y,z) este mărginită şi integrabilă pe I şi dacă:

1°. pentru orice $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ există integrala

$$F(x,y)=\int_e^g f(x,y,z)\,dz\ ,$$

2°. F(x,y) este integrabilă pe $D=[a,b]\times[c,d]$, atunci:

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

Demonstrație. Considerăm diviziunea $\Delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_p)$ a intervalului I formată din subintervalele:

$$I_{ijk}=\{(x,y,z)/x\in[x_i,x_{i+1}],y\in[y_j,y_{j+1}],z\in[z_k,z_{k+1}]\}$$

Fie:

$$m_{ijk}=\inf_{(x,y,z)\in I_{ijk}} f(x,y,z)\ ,\quad M_{ijk}=\sup_{(x,y,z)\in I_{ijk}} f(x,y,z)$$

şi sumele Darboux corespunzătoare:

$$s_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1} m_{ijk}v_{ijk}\ ;\quad S_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{q-1} M_{ijk}V_{ijk},$$

unde v_{ijk} este volumul intervalului I_{ijk}:

$$v_{ijk}=(x_{i+1}-x_i)\cdot(y_{j+1}-y_j)\cdot(z_{k+1}-z_k)$$

$$m_{ijk}\le f(x,y,z)\le M_{ijk},\ (x,y,z)\in I_{ijk}$$

$$m_{ijk}(z_{k+1}-z_k)\le\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x,y,z)\,dz\le M_{ijk}(z_{k+1}-z_k),\ (x,y,z)\in I_{ijk},$$

Însumînd în raport cu k:

$$\sum_{k=0}^{q-1} m_{ijk}(z_{k+1}-z_k)\le\int_e^g f(x,y,z)\,dz\le\sum_{k=0}^{q-1} M_{ijk}(z_{k+1}-z_k)$$

Funcția $F(x,y)=\int_e^g f(x,y,z)\,dz$ este integrabilă pe $D=[a.b]\times[c,d]$

deci şi pe orice domeniu $D_{ij}=[x_i,x_{i+1}]x[y_j,y_{j+1}]$:

$$\sum_{k=0}^{q-1} m_{ijk}(z_{k+1}-z_k)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) \le \iint_{D_{ij}}\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{q-1} M_{ijk}(z_{k+1}-z_k)(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)$$

Însumînd în raport cu i şi j şi ţinînd seamă că $D = \bigcup\limits_{\substack{0\le i\le n-1\\ 0\le j\le m-1}} D_{ij}$:

$$s_\Delta \le \iint_D\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy \le S_\Delta$$

de unde rezultă:

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

deoarece: $\sup s_\Delta = \inf S_\Delta = \iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz$.

Notăm:

$$\iiint_I f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy = \iint_D dxdy\int_e^g f(x,y,z)\,dz =$$

$$=\int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^g f(x,y,z)\,dz$$

(am ţinut seama de notaţia de la integrale duble).
II. Considerăm cazul cînd domeniul de integrare V

este un cilindru T: $T=Dx\,[e,g]=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\, z\in[e,g]\}$

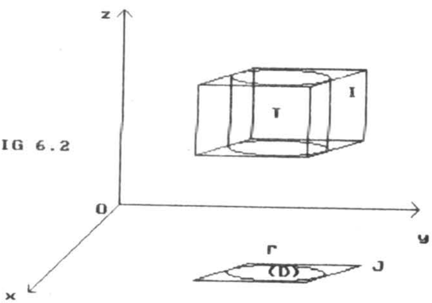


FIG 6.2

unde D este un domeniu închis şi mărginit din planul xOy limitat de curba Γ şi cuprins în dreptunghiul J:

$J=\{(x,y)\,|\,x\in[a,b],\, y\in[c,d]\}$

Cilindrul T este cuprins în paralelipipedul:

$I=\{(x,y,z)\,|\,x\in[a,b],\, y\in[c,d],\, z\in[e,g]\}$

<u>Teoremă.</u> Dacă f(x,y,z) este mărginită şi integrabilă pe T şi dacă:

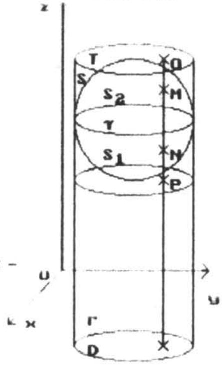
1°. pentru orice $(x,y)\in D$ există integrala: $F(x,y)=\int_e^g f(x,y,z)\,dz$,

2°. F(x,y) este integrabilă pe D, atunci:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left[\int_e^g f(x,y,z)\,dz\right]dxdy=$$

$$=\iint_D dxdy\int_e^g f(x,y,z)\,dz=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}dy\int_e^g f(x,y,z)\,dz\ .$$

FIG 6.3



Demonstrație. Considerăm funcția:

$$\bar f(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z) & daca\,(x,y,z)\in T\\ 0 & daca\,(x,y,z)\in I-T\end{cases}$$

$$\iiint_I \bar f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint_I \bar f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_J dxdy\int_e^g \bar f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\iint_D dxdy\int_e^g \bar f(x,y,z)\,dz+\iint_{J-D} dxdy\int_e^g \bar f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\iint_D dxdy\int_e^g f(x,y,z)\,dz$$

deci:

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D dxdy\int_e^g f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}dy\int_e^g f(x,y,z)\,dz$$

unde am considerat că o paralelă la axa Oy taie curba Γ în două puncte de abscisă:

$$y_1=\phi_1(x)<y_2=\phi_2(x)\quad .$$

III. Considerăm volumul V închis și mărginit de o suprafață S (presupunem că o paralelă la axa Oz taie suprafața S în două puncte). Considerăm cilindrul proiectat al volumului V pe planul xOy, T; cilindrul T conține volumul V fiind tangent după o curbă γ la suprafața S care se proiectează pe planul xOy în domeniul D limitat de curba Γ care este proiecția curbei γ din spațiu.

Cilindrul T este cuprins între planele z=e și z=g, e și g (e<g) fiind cotele extreme ale punctelor de pe suprafața S. Curba γ împarte suprafața S într-o suprafață S_1 de ecuație $z=\Psi_1(x,y)$ și o suprafață S_2 de ecuație $\Psi_2(x,y)$.

Teoremă. Dacă funcţia f(x,y,z) este integrabilă şi mărginită pe V şi dacă:

1°. pentru orice $(x,y)\in D$ există integrala

$$F(x,y)=\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\ ,$$

2°. funcţia F(x,y) este integrabilă pe D, atunci:

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left[\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy=$$

$$=\iint_D dxdy\int_{\phi_1(x,y)}^{\phi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$$

Demonstraţie. Reducem problema integrării pe V la problema integrării pe cilindrul T, considerînd funcţia:

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & daca\,(x,y,z)\in V\\ 0, & daca\,(x,y,z)\in T-V\end{cases}$$

$$\iiint_T f^*(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\iiint_T f^*(x,y,z)\,dxdydz=\iint_D\left[\int_e^g f^*(x,y,z)\,dz\right]dxdy=$$

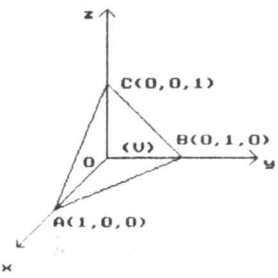
$$=\iint_D\left[\int_{PN} f^*(x,y,z)\,dz+\int_{NM} f^*(x,y,z)\,dz+\int_{MQ} f^*(x,y,z)\,dz\right]dxdy=$$

$$\iint_D\left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy=\iint_D dxdy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_a^b dx\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

presupunînd că o paralelă la axa Oy (în planul xOy) taie curba Γ în două puncte de abscise: $y=\phi_1(x)$ şi $y=\phi_2(x)$.

Exemplu: $\iiint_V x\,dxdydz=\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} dz$



$$V\begin{cases} x+y+z-1\le 0\\ x\le 0\\ y\ge 0\\ z\ge 0\end{cases}$$

FIG 6.4

Schimbarea de variabile în integrale triple.

Considerăm transformarea de coordonate a volumului $V'\subset R^3$ în $V\subset R^3$:
$x=f(u,v,w), y=g(u,v,w), z=h(u,v,w), (u,v,w)\in V'$
funcţiile f,g şi h fiind continue, cu derivatele parţiale de ordinul întîi continue în V' şi cu determinantul funcţional

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \frac{\delta f}{\delta u} & \frac{\delta g}{\delta u} & \frac{\delta h}{\delta u} \\ \frac{\delta f}{\delta v} & \frac{\delta g}{\delta v} & \frac{\delta h}{\delta v} \\ \frac{\delta f}{\delta w} & \frac{\delta g}{\delta w} & \frac{\delta h}{\delta w} \end{vmatrix}$$

diferit de zero în V'.

Formula schimbării de variabile în integrale triple este:

$$\iiint_V F(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{V'} F[f(u,v,w),g(u,v,w),h(u,v,w)].$$

$$\cdot\left|\frac{D(f,g,h)}{D(u,v,w)}\right|.\,dudvdw$$

Exemplu:

$I=\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$,V fiind volumul limitat de sfera cu centrul în O(0,0,0) şi raza R=a

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases} \qquad \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

$$I=\iint_V r^3\sin\theta\,drd\theta d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_)^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^a r^3\,dr=\Pi a^4.$$

Formula lui Gauss-Ostrogradski.

Fie V un volum în spaţiu, mărginit de o suprafaţă S astfel încît orice paralelă la axele de coordonate care intersectează pe V taie suprafaţa S numai în două puncte. Volumul V se proiectează în domeniul D pe planul xOy. Generatoarele cilindrului proiectat al volumului V pe planul xOy întîlnesc suprafaţa S după o curbă γ care împarte suprafaţa S în două suprafeţe : $(S_1)\ z=\psi_1(x,y)$ şi $(S_2)\ z=\psi_2(x,y)$.

Dacă P(x,y,z),Q(x,y,z) şi R(x,y,z) sunt trei funcţii continue cu derivatele $\frac{\delta P}{\delta x}, \frac{\delta Q}{\delta y}, \frac{\delta R}{\delta z}$ continue pe V, atunci are loc egalitatea:

$$\iint_S P(x,y,z)\,dydz+Q(x,y,z)\,dzdx+R(x,y,z)\,dxdy=\iiint_V\left(\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}\right)dxdydz$$

numită formula lui Gauss-Ostrogradski.

Demonstraţie.

$$\iiint_V \frac{\delta R}{\delta z}dxdydz=\iint_D dxdy\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}\frac{\delta R}{\delta z}dz=\iint_D [R(x,y,\psi_2(x,y))-R(x,y,\psi_1(x,y))$$

$$]\,dxdy\equiv\iint_D R(x,y,\psi_2(x,y))\,dxdy-\iint_D R(x,y,\psi_1(x,y))\,dxdy=$$

$$=\iint_{S_2} R(x,y,z)\,dxdy+\iint_{S_1} R(x,y,z)\,dxdy=\iint_S R(x,y,z)\,dxdy$$

Analog obţinem:

$$\iiint_V \frac{\delta P}{\delta x}dxdydz=\iint_S P(x,y,z)\,dydz$$

$$\iiint_V \frac{\delta Q}{\delta y}dxdydz=\iint_S Q(x,y,z)\,dzdx$$

Adunînd obţinem:

$$\iint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_V\left(\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta Q}{\delta y}+\frac{\delta R}{\delta z}\right)dxdydz,$$

integralele de suprafaţă fiind luate pe faţa exterioară (pozitivă) a lui S.

Aplicaţii ale integralelor triple.

1. Volumul unui corp V este:

$$V=\iiint_V dxdydz$$

2. Masa unui corp K de volum V şi densitate ρ(x,y,z) este:

$$M=\iiint_V \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

3. Coordonatele centrului de greutate

$$x_G=\frac{\iiint_V x\rho(x,y,z)\,dxdydz}{M};\quad y_G=\frac{\iiint_V y\rho(x,y,z)\,dxdydz}{M};$$

$$; z_G = \frac{\iiint_V z\rho(x,y,z)\,dxdydz}{M}$$

4. Momente de inerție

$$\mu_0 = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\mu_{0x} = \iiint_V (y^2+z^2)\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

$$\mu_{xOy} = \iiint_V z^2\,\rho(x,y,z)\,dxdydz$$

Exerciţii.

Să se calculeze integralele triple:

1. $I = \iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ pe $(V)\begin{cases} x+y+z-1\le 0 \\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \end{cases}$

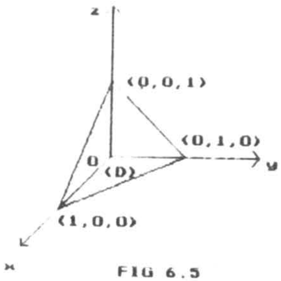


FIG 6.5

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dxdy = -\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} = -\frac{1}{16} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{2}\,dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2$$

2. $I = \iiint_V xyz\,dxdydz$ pe $(V)\begin{cases} x^2+y^2+z^2\le 1 \\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0 \end{cases}$

Se trece la coordonate sferice:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad (\theta,\phi)\in(D)\begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$dxdydz = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)}\,dr\,d\theta\,d\phi = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$I = \iiint_{V'} r^5\sin^3\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi\,dr\,d\theta\,d\phi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi\,d\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos\theta\,d\theta \int_0^1 r^5\,dr =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

3. $I = \iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ pe $(V)\begin{cases} z^2\le x^2+y^2\le 4 \\ 0\le z\le 2 \end{cases}$

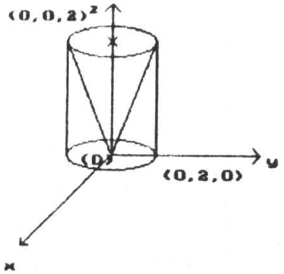


FIG 6.6

$$I=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz=$$

$$=\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\iint_{D'} r^3\,dr\,d\theta$$

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad dxdy=r\,dr\,d\theta$$

$$I=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 r^3\,dr=4\,.\,2\pi=8\pi\,.$$

CUPRINS

PARTEA I-CALCUL DIFERENŢIAL

PARTEA II CALCUL INTEGRAL

Bibliografie

1. BOBOC N.,COLOJOARĂ I.-Elemente de analiză matematică.Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti.1979.
2. COLOJOARĂ I.-Elemente de analiză matematică.Litografia Universităţii Bicureşti,1978.
3. CRAIU M,TĂNASE V.-Analiză matematică.Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1980.
4. GÂndac F.-Curs de matematici superioare,vol.I,II.Litografia IPB,Bucureşti,1976,1977.
5. MARINESCU GH.-Tratat de analiză funcţională,I.Editura Academiei RSR,Bucureşti,1970
6. NICOLESCU M.,MARCUS S.ş.a.-Manual de analiză matematică,vol.I,II.Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1962,1964
7. ROŞCULEŢ M.-Analiză matematică.Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1979.
8. ROŞCULEŢ M.,BALEA P.ş.a.-Manual de matematici superioare (Pentru facultăţile chimice),vol.I,Litografia IPB,Bucureşti,1979.
9. ROŞCULEŢ M.,BALEA P.ş.a.-Matematici superioare (Pentru facultăţile de Chimie),vol.II,III,Litografia IPB,Bucureşti,1979,1980.
10. STĂNĂŞILĂ O.-Analiză matematică.Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1981.
11. UDRIŞTE C.-Analiză matematică.Litografia IPB,Bucureşti,1978
12. * * * -Analiză matematică,vol.I,II,Editura didactică şi pedagogică,Bucureşti,1980.

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 316/1996 la
Tipografia Editurii Universității din București

ISBN 973 – 575 – 071 – 6

Lei 6800