GH. STOICA

CALCULUL MALLIAVIN ȘI TEORIA DEVIAȚIILOR MARI

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1997

GH. STOICA

CALCULUL MALLIAVIN ȘI TEORIA DEVIAȚIILOR MARI

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
- 1997 -

Referenţi ştiinţifici : Prof. dr. **ION CUCULESCU**
Prof. dr. **CONSTANTIN TUDOR**

Şos. Panduri, 90-92, Bucureşti - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN 973 - 575 - 072 - 4

Cuprins

CUVÂNT ÎNAINTE

Cursul se adresează studenţilor din anul 4, precum şi celor ce pregătesc doctoratul şi/sau diploma de studii aprofundate.

Pentru calculul Malliavin am urmat in principal monografia lui D. Nualart: *Malliavin calculus and related topics*, Springer, 1995, iar pentru teoria deviaţiilor mari am folosit monografia lui R. Azencott: *Grandes déviations et applications*, Lect. Notes in Math. vol. 774, Springer, 1980. In afară de acestea, am utilizat idei din cursurile ţinute la Universitatea Paris 6 (Pierre-et-Marie-Curie) in anii 1992-1995 de A. S. Üstünel (pentru calcul Malliavin) şi A. Millet (pentru deviaţii mari).

In primul capitol am reamintit câteva lucruri de calcul stocastic clasic; am pus accent pe integrala stocastică şi ecuaţiile stocastice, deoarece aplicaţia standard (atât a calculului Malliavin cât şi a teoriei deviaţiilor mari) este la ecuaţiile de tip Itô.

Autorul mulţumeşte d-lor profesori I. Cuculescu, C. Tudor şi M. Dumitrescu, care au citit manuscrisul şi mi-au precizat noţiunile, rezultatele şi aplicaţiile importante pe care să pun accent.

Gh. Stoica

Bucureşti, 1997

1

INTRODUCERE

1.1 GENERALITĂŢI

Fie $\Omega \neq \emptyset$ o mulţime şi $\mathcal{K}$ un **corp borelian** (sau $\sigma-$algebră) pe Ω. O **probabilitate** P pe $(\Omega, \mathcal{K})$ este o măsură (pozitivă) cu $P(\Omega) = 1$. Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numeşte **câmp de probabilitate**. Elementele lui $\mathcal{K}$ se numesc **evenimente**. Funcţiile măsurabile de la Ω la $\mathbf{R}$ se numesc **variabile aleatoare** (prescurtat **v.a.**) şi se notează cu $X, Y, \ldots$ sau cu $f, g, \ldots$ Integrala lui X in raport cu P se numeşte **media** lui X şi o notăm $E(X) = \int X(\omega)\, dP(\omega) = \int X dP$. Dacă un eveniment are probabilitatea 1, vom spune ca are loc aproape sigur (prescurtat a.s.) sau aproape peste tot (a.p.t.). Vom nota cu 1_A funcţia indicator a mulţimii A : $1_A = 1$ pe A şi 0 pe A^c (A^c este complementara lui A). Dacă $A_n, n \geq 1$ este un şir de mulţimi, notăm $\limsup_{n\to+\infty} A_n := \bigcap_{m=1}^{+\infty} \bigcup_{k=m}^{+\infty} A_k$.

1.1.1 Lema Borel-Cantelli I: dacă $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$, atunci $P\left(\limsup_{n\to+\infty} A_n\right) = 0$.

1.1.2 Inegalitatea Cebâşev: dacă $X \geq 0$ a.s., atunci $P(X \geq a) \leq \frac{1}{a} E(X)$.

1.1.3 Inegalitatea Jensen: dacă g este convexă, X şi $g(X)$ sunt integrabile, atunci $E[g(X)] \geq g[E(X)]$.

Legea (sau **distribuţia, repartiţia**) lui X este probabilitatea $P \circ X^{-1}$ pe $\mathbf{R}$ definită prin $P \circ X^{-1}(A) := P(X \in A)$

1.1.4 Formula de transport (schimbare de variabilă): dacă f este $P-$integrabilă, atunci $E[f(X)] = \int f(x) dP \circ X^{-1}(x)$ (integralele există simultan şi au aceeaşi valoare).

Definiţia legii şi afirmaţia 1.1.4 se extind in cazul unui **vector aleator** (i.e. la o aplicaţie măsurabilă de la Ω la $\mathbf{R}^d$).

Două evenimente A, B sunt **independente** dacă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Definiţia se extinde la o familie arbitrară de indici: evenimentele $A_i, i \in I$ sunt independente dacă $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_{i_k})$ pentru orice $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I, n \in \mathbf{N}$. Corpul borelian $\mathcal{F}$ este independent de corpul borelian $\mathcal{G}$ dacă orice $A \in \mathcal{F}$ este independent de orice $B \in \mathcal{G}$. Corpul borelian generat de v.a. X, notat $\sigma(X)$, este familia $\{(X \in A), A$ boreliană$\}$; două v.a. sunt independente dacă corpurile boreliene generate de ele sunt independente. Similar se definesc independenţa: unui eveniment şi a unei v.a., ca şi a unei v.a. cu un corp borelian.

1.1.5 Dacă X, Y, XY sunt integrabile, iar X, Y sunt independente, atunci $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Funcţia caracteristică a v.a. X este transformarea Fourier a legii ei: $\int e^{itx} dP \circ X^{-1}(x) = E\left(e^{itX}\right)$.

1.1.6 Criteriu de independenţă: X, Y sunt v.a. independente dacă şi numai dacă $Ee^{i(tX+sY)} = E\left(e^{itX}\right)E\left(e^{isY}\right)$ pentru orice t, s reali.

1.1.7 Lema Borel-Cantelli II: fie $A_n, n \geq 1$ evenimente independente. Dacă $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$, atunci $P\left(\limsup_{n \to +\infty} A_n\right) = 1$.

Tipuri de convergenţă:

1. $X_n \to X$ **a.s.** (sau a.p.t.) dacă $P(X_n \to X) = 1$.

2. $X_n \to X$ **in probabilitate** (sau in măsură) dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, avem $P(|X_n - X| > \epsilon) \to 0$ când $n \to +\infty$.

3. $X_n \to X$ **in** L^p $(p \geq 1)$ dacă $X_n, X \in L^p$ şi $E|X_n - X|^p \to 0$ când $n \to +\infty$.

4. $X_n \to X$ **in lege** (sau in repartiţie) dacă $\int f(X_n)\,dP \to \int f(X)\,dP$ când $n \to +\infty$, pentru orice $f \in C_b(\mathbf{R})$ i.e. continuă şi mărginită pe $\mathbf{R}$. Convergenţa in lege este echivalentă cu convergenţa slabă a măsurilor (repartiţiilor) $P \circ X_n^{-1} \Rightarrow P \circ X^{-1}$.

Au loc urmatoarele implicaţii:

$$\begin{gathered}\text{convergenţa a.s., convergenţa in } L^p \\ \Downarrow \\ \text{convergenţa in probabilitate} \\ \Downarrow \\ \text{convergenţa in lege.}\end{gathered}$$

Definiţiile şi rezultatele de mai sus se extind fără dificultate in cazul vectorilor aleatori.

O familie de v.a. X_n se numeşte **uniform integrabilă** dacă $\int_{(|X_n|\geq c)} |X_n| \, dP \to 0$ când $c \to +\infty$, uniform in raport cu n.

1.1.8 Teorema de convergenţă dominată: fie $X_n \in L^p$ cu $X_n \to X$ in probabilitate. Atunci $X \in L^p$ şi $X_n \to X$ in L^p dacă şi numai dacă familia $(|X_n|^p)_{n\geq 1}$ este uniform integrabilă.

O v.a. X este **gausiană** (sau **normală**), centrată şi de dispersie 1 dacă $P(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A e^{-x^2/2} dx$, A boreliană. Pe scurt vom spune că X are legea $N(0,1)$ i.e. are legea normală de medie 0 şi **dispersie** $E[X - E(X)]^2 = 1$. Funcţia sa caracteristică este $E\left(e^{itX}\right) = e^{-t^2/2}$. Spunem ca v.a. X are legea $N(a, b^2)$ dacă $X = bZ + a$, unde Z are legea $N(0,1)$. Vectorul aleator $X = (X_1, \ldots, X_n)$ se numeşte gausian dacă există un şir $Z_1, \ldots, Z_m$ de v.a. independente cu legea $N(0,1)$ şi numere reale b_{ij}, a_i astfel ca $X_i = \sum_{j=1}^m b_{ij} Z_j + a_i$, pentru $i = 1, \ldots, n$. In notaţie matricială $X = BZ + A$. **Covariaţia** a două v.a. X, Y este $Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$. Dacă v.a. gausiene sunt centrate i.e. $A = O$, matricea de covariaţie este $Cov(X) = E(XX^t) = E\left[(BZ)(BZ)^t\right] = E(BZZ^tB^t) = BB^t$, unde X^t este transpusa vectorului X, iar dacă $Cov(X) = BB^t$ este o matrice diagonală, atunci componentele X_j sunt independente.

1.1.9 Legea numerelor mari: fie $(X_n)_{n\geq 1}$ şir de v.a. independente identic repartizate. Atunci

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to E(X_1) \text{ a.s.}$$

dacă şi numai dacă v.a X_n au medie finită.

1.1.10 Teorema limită centrală: fie $(X_n)_{n\geq 1}$ şir de v.a. independente identic repartizate de medie finită şi presupunem că $\sigma^2 := E[X_1 - E(X_1)]^2 < \infty$. Atunci

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n - nE(X_1)}{\sigma\sqrt{n}} \Rightarrow N(0,1).$$

Dacă $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ sunt corpuri boreliene şi X este v.a. $\mathcal{G}-$măsurabilă şi integrabilă, numim **valoarea medie a lui** X **condiţionată** de $\mathcal{F}$, orice v.a. Y care satisface $\int_A Y dP = \int_A X dP$ pentru orice $A \in \mathcal{F}$.

1.1.11 Valoarea medie condiţionată este unică a.s. Dacă X este integrabilă, atunci valoarea medie condiţionată $E[X \mid \mathcal{F}]$ există. Dacă $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, X, XY sunt integrabile, Y este v.a. $\mathcal{F}-$măsurabilă, atunci $E[E[X \mid \mathcal{F}] \mid \mathcal{E}] = E[E[X \mid \mathcal{E}] \mid \mathcal{F}] = E[X \mid \mathcal{E}]$ şi $E[XY \mid \mathcal{F}] = YE[X \mid \mathcal{F}]$.

Se foloseşte notaţia $E[X|Y]$ pentru $E[X|\sigma(Y)]$.

1.1.12 Convergenţa valorilor medii condiţionate: fie $\mathcal{F}_n$ un şir crescător de corpuri boreliene şi $\mathcal{F}_\infty$:=corpul borelian generat de $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$. Atunci, pentru orice $X \in L^2(P)$, avem

$$E[X \mid \mathcal{F}_n] \to E[X \mid \mathcal{F}_\infty] \text{ in } L^2 \text{şi a.s.}$$

Dacă $X \in L^1(P)$, atunci convergenţa precedentă are loc in L^1 şi a.s. Aceleaşi afirmaţii rămân adevărate in cazul descendent i.e. dacă $\mathcal{F}_n$ este şir descrescător de corpuri boreliene şi inlocuim $\mathcal{F}_\infty$ cu $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$.

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate şi fie $\mathcal{B}$ corpul borelienelor pe $[0, +\infty)$. Un **proces stocastic**, notat $X(t, \omega)$ sau $X_t(\omega)$ sau simplu X_t este o aplicaţie de la $[0, +\infty) \times \Omega$ la $\mathbf{R}$, măsurabilă in raport cu produsul corpurilor boreliene $\mathcal{B} \otimes \mathcal{K}$.

Procesul $X = (X_t)_{t\geq 0}$ de v.a. reale se numeşte **gausian** dacă orice combinaţie liniară reală finită cu elemente din X are legea gausiană. Legea oricărui subsistem finit $(X_1, \ldots, X_n)$ al unui proces gausian are lege gausiană $n-$dimensională. Legea unui proces gausian este complet determinată de mediile sale şi de matricea de covariaţie asociată.

1.1.13 Pentru ca v.a. gausiene X_t , $t \geq 0$ să fie independente, este necesar şi suficient ca, pentru orice $t \neq s$ să avem

$$E\{[X_t - E(X_t)][X_s - E(X_s)]\} = 0.$$

1.1.14 Pentru un proces gausian, convergenţa in probabilitate (deci şi cea a.s.) este echivalentă cu convergenţa in L^2 , iar limita este gausiană.

Trecutul "minimal" al unui proces stocastic $X = \{X_t, t \geq 0\}$ la timpul s este $\sigma-$algebra $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$; indexată după $t \geq 0$, o astfel de familie crescătoare de $\sigma-$algebre se va numi **filtrare**. Intuitiv, procesul X este Markov dacă, vrând să facem predicţia la timpul s la ceea ce se va intâmpla in viitor, aceasta se face cunoscând starea procesului X la timpul s şi nimic altceva. Acest lucru se scrie

$$P\left[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X\right] = P\left[X_t \in A \mid \mathcal{X}_s\right] \text{ a.s.}$$
$$\text{pentru } 0 \leq s \leq t,\ A \subseteq \mathbf{R} \text{ boreliană,}$$

unde $P\left[X_t \in A \mid \mathcal{F}_s^X\right] := E\left[1_{(X_t \in A)} \middle| \mathcal{F}_s^X\right]$. Dacă, pentru orice $s \leq t$,

$$P_{st}(X_s, A) := P\left[X_t \in A \mid X_s\right]$$

sunt **probabilităţi** (numite **de tranziţie**), spunem că procesul X pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este **Markov** in raport cu filtrarea $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ dacă

$$P\left[X_t \in A \mid \mathcal{G}_s\right] = P_{st}\left[X_s, A\right] \ P - a.s.,$$
$$\text{pentru orice } f \text{ boreliană mărginită,}$$
$$0 \leq s \leq t,\ A \subseteq \mathbf{R} \text{ boreliană.}$$

Să observăm că, dacă X este Markov in raport cu $\mathcal{G}_t$, atunci este Markov şi in raport cu $\mathcal{F}_t^X$.

1.1.15 Definiţia procesului Markov este echivalentă cu:

$$E\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^X\right] = P_{st} f(X_s),$$
$$\text{pentru orice } s \leq t,\ f \text{ boreliană mărginită,}$$
$$\text{unde } P_{st} f(x) := \int f(y) P_{st}(x, dy),$$

şi are loc relaţia Chapman-Kolmogorov:

$$P_{su}(x, A) = \int P_{st}(x, dy) P_{tu}(y, A)$$
$$\text{pentru orice } 0 \leq s \leq t \leq u,\ x \in \mathbf{R},\ A \subseteq R \text{ boreliană.}$$

Probabilităţile P_{st} se numesc omogene dacă depind doar de $t-s$ i.e. $P_{st} = P_{t-s}$, caz in care relaţia Chapman-Kolmogorov devine $P_{t+s}(x, A) = \int P_s(x, dy) P_t(y, A)$ pentru orice $t, s \geq 0, A \subseteq \mathbf{R}$ boreliană, adică $\{P_t, t \geq 0\}$ formează semigrup.

1.1.16 Să presupunem că

$$P_{st} f(x) = \int P_{st}(x, dy) f(y) = \int f(y) p(t, s, x, y)\, dy$$

pentru orice f boreliană mărginită (sau continuă care se anulează la ∞), unde $p(t,s,x,y)$ sunt **densităţile de tranziţie** i.e. densităţile Radon-Nicodym ale măsurilor P_{st}. In cazul omogen, o rescriere este $P_{t+s}f(x) = P_t(P_s f)(x)$ sau $P_{t+s} = P_t P_s = P_s P_t$, adică operatorii P_t formează un semigrup care, dacă traiectoriile procesului X sunt continue, este tare continuu pe funcţiile continue (i.e. $P_t f \to P_s f$ uniform dacă f este continuă şi $t \searrow s$).

1.1.17 Generatorul infinitezimal $\mathcal{L}$ al semigrupului P_t (a cărui existenţă este asigurat de teorema Hille-Yosida) conţine in domeniul său $Dom(\mathcal{L})$ funcţiile boreliene mărginite (sau continue care se anulează la ∞) şi, pe aceste funcţii, are loc formula de calcul

$$\mathcal{L}f = \lim_{t\searrow 0} \frac{P_t f - f}{t} \text{ in sens tare.}$$

Derivând ecuaţia semigrupului in $s = 0$, obţinem pentru $f \in Dom(\mathcal{L})$: $\frac{d}{dt}P_t f(x) = P_t(\mathcal{L}f)(x)$ şi $\frac{d}{dt}P_t f(x) = \mathcal{L}(P_t f)(x)$, numite ecuaţia *inainte* (sau Fokker-Planck), respectiv ecuaţia *inapoi*.

1.2 MIŞCARE BROWNIANĂ

Un proces stocastic W_t se numeşte **mişcare browniană** (sau **proces Wiener**) care incepe din 0 dacă

(a) $W_0 = 0$ a.s.,

(b) pentru orice $0 \le s \le t$, $W_t - W_s$ este v.a. gausiană centrată cu dispersia $t - s$,

(c) pentru orice $0 \le s < t$, $W_t - W_s$ este v.a. independentă de $\sigma(W_r, 0 \le r \le s)$, i.e. independentă de cel mai mic corp borelian in raport cu care v.a. $W_r, 0 \le r \le s$ sunt măsurabile,

(d) cu probabilitate 1, traiectoriile (i.e. aplicaţiile $t \longrightarrow W_t(\omega)$) sunt continue.

In particular, covariaţia mişcării browniene $Cov(W_t, W_s) := E[W_t W_s]$ este egală cu $t \wedge s$.

O **mişcare browniană** d**−dimensională** are expresia $W_t = \left(W_t^1, \ldots, W_t^d\right)$, unde $W_t^1, \ldots, W_t^d$ sunt mişcări browniene (de dimensiune 1) independente.

Pentru a defini o mişcare browniană care incepe din $x \in \mathbf{R}^d$, este suficient să considerăm procesul $W_t^x = x + W_t$. In loc să avem o singură probabilitate P şi mai multe procese W_t^x, va fi mai util să avem un singur proces şi mai multe probabilităţi, in sensul următor. Notăm ad-hoc Z_t mişcarea browniană d−dimensională definită anterior. Fie Ω spaţiul funcţiilor continue ω de la $[0, +\infty)$ la $\mathbf{R}^d$, şi definim $W_t(\omega) = \omega(t)$. Considerăm $\mathcal{F} = \sigma(W_t, t < +\infty)$ şi definim probabilităţile P^x pe $(\Omega, \mathcal{F})$ prin

$$P^x(W_. \in A) = P(x + Z_. \in A), \text{ pentru } x \in \mathbf{R}^d \text{şi } A \in \mathcal{F}.$$

Vom numi perechea $(P^x, W_t); x \in \mathbf{R}^d, t \geq 0$ mişcare browniană.

1.2.1 Proprietatea de scaling: dacă (P^x, W_t) este mişcare browniană care incepe din x şi $a > 0$, atunci $\left(P^{x/a}, a^{-1}W_{a^2t}\right)$ este mişcare browniană care incepe din x/a.

1.2.2 Uniform continuitatea şi modulul de continuitate al traiectoriilor browniene: presupunem că $t \in [0,1]$ şi fie $c > 1$ dat. Pentru aproape toţi ω, există $\delta = \delta(\omega) > 0$ astfel că, dacă $| t - s | < \delta$, atunci

$$| W_t(\omega) - W_s(\omega) | \leq c[-2 \,| t - s | \log | t - s |]^{1/2}.$$

Pentru orice $\epsilon > 0$, cu probabilitate 1, traiectoriile mişcării browniene sunt Hölder continue de ordin $1/2 - \epsilon$ şi nu sunt Hölder continue de ordin $\geq 1/2$.

1.2.3 Nederivabilitatea traiectoriilor browniene: aproape toate traiectoriile mişcării browniene nu sunt nicăieri derivabile i.e. cu probabilitate 1, aplicaţiile $t \to W_t(\omega)$ nu au derivată in nici un punct t.

Fie $\pi(t) = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_k\}$ o partiţie a intervalului $[0, t]$ cu norma $\| \pi(t) \| = \max_{0 \leq i \leq k-1} | t_{i+1} - t_i |$ şi $f : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ o funcţie oarecare. Definim $var(f, \pi(t)) = \sum_{i=0}^{k-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|^2$. Fie acum un şir de partiţii $\pi_n(t), n \in \mathbf{N}$ ale lui $[0, t]$ din ce in ce mai fine; reamintim că, dacă f este cu variaţie mărginită pe $[0, t]$ şi $\| \pi_n(t) \| \to 0$ când $n \to +\infty$, atunci $\lim_{n \to +\infty} var(f, \pi_n(t))$ există şi este egală cu 0.

1.2.4 Variaţia traiectoriilor browniene: dacă $\| \pi_n(t) \| \to 0$ atunci, pentru aproape toţi ω, avem

$$\lim_{n\to+\infty} var\left(W_{\cdot}(\omega), \pi_n(t)\right) = t.$$

In particular: pentru aproape toţi ω, traiectoriile mişcării browniene au variaţie nemărginită pe orice interval $[0,t]$.

Avem că $\lim_{t\to+\infty} \frac{W_t(\omega)}{t} = 0$ a.s.; un rezultat mai precis este

1.2.5 Legea logaritmului iterat la ∞: pentru aproape toţi ω, avem

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log\log t)^{1/2}} = 1 \text{ şi } \liminf_{t\to+\infty} \frac{W_t(\omega)}{(2t \log\log t)^{1/2}} = -1$$

sau, echivalent, legea logaritmului iterat in 0 :

$$\limsup_{t\searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\left(2t \log\log \frac{1}{t}\right)^{1/2}} = 1 \text{ şi } \liminf_{t\searrow 0} \frac{W_t(\omega)}{\left(2t \log\log \frac{1}{t}\right)^{1/2}} = -1 \text{ a.s.}$$

Considerăm filtrarea (i.e. familia crescătoare de corpuri boreliene) $\mathcal{F}_t^W := \sigma(W_s, s \le t), t \in [0,+\infty]$. Fie $\mathcal{F}_t^0$ corpul borelian generat de $\mathcal{F}_t^W$ şi de mulţimile P^x−neglijabile pentru orice $x \in \mathbf{R}^d$, iar $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}^0 = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}^0$.

1.2.6 Mişcarea browniană d−dimensională este proces Markov omogen in raport cu filtrările: $\mathcal{F}_t^W$, $\mathcal{F}_t^0 \equiv \mathcal{F}_t$. Densităţile de tranziţie (numite *nuclee gausiene*) sunt date de

$$p(t,x,y) = (2\pi t)^{-d/2} \exp\left(-\frac{\|y-x\|^2}{2t}\right).$$

Generatorul infinitezimal al mişcării browniene d−dimensionale are ca domeniu funcţiile de clasă $C_b^2\left(\mathbf{R}^d\right)$ şi pe aceste funcţii avem $\mathcal{L}f = (1/2)\Delta$.

Fie $t_0 > 0; x, y \in \mathbf{R}$ fixate. Definim *podul brownian* prin: $B_t^{t_0,x,y} := W_t - \frac{t}{t_0} W_{t_0} + \frac{t_0 - t}{t_0} x + \frac{t}{t_0} y, 0 \le t \le t_0$. Acesta este proces Markov, este proces gausian (determinaţi media şi covariaţia), şi procesele $B_t^{t_0,x,y} B_{t_0-t}^{t_0,y,x}$, $0 \le t \le t_0$ au aceeaşi lege.

Fie X_t proces stocastic şi $\mathcal{F}_t, t \ge 0$ o filtrare continuă la dreapta i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$; presupunem că X_t este adaptat la $\mathcal{F}_t$ i.e. X_t este $\mathcal{F}_t$−măsurabilă, pentru orice $t \geq 0$. O aplicaţie $T : \Omega \to [0, +\infty)$ se numeşte **timp de stopare** (sau opţională) dacă $(T < t) \in \mathcal{F}_t$ (sau, echivalent, $(T \leq t) \in \mathcal{F}_t$) pentru orice t. Aplicaţiile $T_A = \inf \{t > 0 : X_t \in A\}$ şi $\tau_A = \inf \{t > 0 : X_t \notin A\}$ le numim **prima intrare (primul timp de intrare)** a procesului X_t in mulţimea A, respectiv **prima ieşire** din A.

1.2.7 Dacă X_t are traiectoriile continue şi dacă A este deschisă (sau inchisă), atunci T_A este timp de stopare.

Fie acum T un timp de stopare; definim corpul borelian al evenimentelor cunoscute până la timpul T prin

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap (T \leq t) \in \mathcal{F}_t \text{ pentru orice } t > 0\}$$
$$\text{şi } X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Dacă $X_t = W_t$ =mişcare browniană, atunci $\mathcal{F}_T$ este corp borelian şi T, B_T sunt $\mathcal{F}_T$−măsurabile.

1.2.8 Proprietatea tare Markov pentru mişcarea browniană: dacă T este $\mathcal{F}_t^W$−timp de stopare, atunci

$$P[W_{T+t} \in A \mid \mathcal{F}_T] = P_t[W_T, A] \;\; P-\text{a.s. pe } (T < \infty)$$
$$\text{pentru orice } t \geq 0,\;\; A \subseteq \mathbf{R} \text{ boreliană}$$

sau, echivalent

$$E[f(W_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T] = (P_t f)(W_T) \;\; P-\text{a.s. pe } (T < \infty)$$
$$\text{pentru orice } t \geq 0,\;\; f \in C_b(\mathbf{R})$$

sau

$$E[f(W_S) \mid \mathcal{F}_T] = (P_{S-T} f)(W_T) \;\; P-\text{a.s. pe } (S < \infty)$$
$$\text{pentru orice timp de stopare } S \geq T,\;\; S = \mathcal{F}_T-\text{măsurabil}$$
$$\text{şi } f \in C_b(\mathbf{R}).$$

1.3 MARTINGALE

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ câmp de probabilitate şi $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbf{N}$ o filtrare i.e. un şir crescător de σ−algebre. Un şir de v.a. (un proces cu timp discret) M_n , $n \in \mathbf{N}$ se numeşte **adaptat** dacă M_n

este $\mathcal{F}_n$−măsurabilă, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Similar se defineşte adaptabilitatea pentru un proces cu timp continuu M_t , $t \geq 0$ in raport cu o filtrare $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$. Spunem că filtrarea $\mathcal{F}_t$ satisface *condiţiile obişnuite* dacă este continuă la dreapta (i.e. $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ pentru orice $t \geq 0$, unde $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$) şi dacă fiecare $\mathcal{F}_t$ este completă (i.e. fiecare $\mathcal{F}_t$ conţine neglijabilele). In contiunare vom lucra cu o singură probabilitate P şi vom presupune că filtrările satisfac condiţiile obişnuite.

Spunem că şirul M_n este **martingal** (cu timp discret) dacă M_n este adaptat la $\mathcal{F}_n$, M_n sunt integrabile pentru orice n şi

$$E\left[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right] = M_{n-1} \text{ a.s., pentru orice } n = 2, 3, \ldots$$

Similar spunem că familia M_t este martingal (cu timp continuu) dacă M_t este adaptat la $\mathcal{F}_t$, M_t sunt integrabile pentru orice t şi

$$E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] = M_s \text{ a.s., pentru orice } s \leq t.$$

Dacă avem $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \geq M_s$ a.s., pentru orice $s \leq t$, spunem că M_t este **submartingal.** Dacă avem $E\left[M_t \mid \mathcal{F}_s\right] \leq M_s$ a.s. pentru orice $s \leq t$, avem un **supermartingal.** Submartingalele au tendinţa să crească; opusul unui submartingal este un supermartingal şi reciproc; un proces care este submartingal şi supermartingal este martingal.

Exemple Dacă W_t este mişcare browniană, atunci ea este martingal. Similar $W_t^2 - t$ este martingal şi, dacă $\left(W^1, \ldots, W^d\right)$ este mişcare browniană d−dimensională, atunci $W_t^i W_t^j$ este martingal pentru orice $i \neq j$. Un alt exemplu de martingal cu timp continuu este $M_t := E\left[Z \mid \mathcal{F}_t\right]$, unde Z este v.a. integrabilă.

1.3.1 Opţionalizare in timp discret: dacă T este timp de stopare mărginit in raport cu $\mathcal{F}_n$ şi M_n este martingal, atunci $EM_T = EM_0$. Dacă T este mărginit de k şi M_n este submartingal, atunci $EM_T \leq EM_k$.

1.3.2 Opţionalizare in timp continuu: dacă M_t este martingal continuu la dreapta (i.e. traiectoriile sunt continue la dreapta) şi T este timp de stopare mărginit de k, atunci $EM_T = EM_k = EM_0$. Dacă M_t este submartingal pozitiv, avem $EM_T \leq EM_k$.

Dacă M_n sau M_t sunt martingale, notăm $M_t^* := \sup_{s\leq t} \mid M_s \mid$ şi similar definim M_n^* .

1.3.3 Inegalităţile lui Doob: dacă M_n este martingal continuu la dreapta, atunci

$$P(M_n^* > a) \leq E \mid M_n \mid /a.$$

Dacă $p > 1$, atunci există c care depinde doar de p astfel ca

$$E(M_n^*)^p \leq cE \mid M_n \mid^p .$$

1.3.4 Convergenţa submartingalelor: dacă X_n este submartingal cu $\sup_n E(X_n^+) < +\infty$, atunci X_n converge a.s. când $n \to +\infty$.

In particular, dacă X_n este supermartingal pozitiv sau martingal mărginit superior sau inferior, atunci X_n converge a.s. Afirmaţia 1.3.4 rămâne adevărată pentru submartingale cu timp continuu şi cu traiectorii continue la dreapta. In particular, dacă X_t este martingal continuu la dreapta cu $\sup_t E|X_t|^p < +\infty$ pentru un $p > 1$, atunci el converge a.s. şi in L^p. Similar pentru X_t submartingal continuu la dreapta. Dacă X_t este martingal uniform integrabil cu traiectorii continue la dreapta, atunci convergenţa este in L^1. Dacă $X_t \to X_\infty$ in L^1, atunci $X_t = E[X_\infty|\mathcal{F}_t]$.

1.3.5 Descompunerea Doob-Meyer in cazul discret: fie Z_k supermartingal. Atunci există un martingal M_k şi un proces crescător A_k, astfel că A_{k+1} este F_k−măsurabilă şi $Z_k = M_k - A_k$.

1.3.6 Descompunerea Doob-Meyer in cazul supermartingalelor cu timp continuu: fie Z_t supermartingal cu traiectorii continue. Atunci există un martingal M_t şi un proces crescător A_t, ambele cu traiectorii continue şi adaptate la filtrarea lui Z_t, astfel ca $Z_t = M_t - A_t$. In plus M_t şi Z_t sunt unic determinate.

1.3.7 Dacă M_t este martingal continuu de pătrat integrabil (i.e. $E(M_\infty^2) < +\infty$), atunci M_t^2 este submartingal şi $-M_t^2$ este supermartingal. Afirmaţia 1.3.6 spune că există un proces continuu şi crescător notat $< M >_t$, numit **procesul de variaţie pătrată** al lui M_t, astfel ca $M_t^2 - < M >_t$ să fie martingal. Mai general, variaţia pătrată $\{< X >_t \ , t \geq 0\}$ a unui proces stocastic $\{X(t), \ t \geq 0\}$ se defineşte ca limita in probabilitate a familiei $\sum_{i=0}^{n-1}\left(X_{t_{i+1}}-X_{t_i}\right)^2$, unde $\pi=(0=t_0<t_1<\ldots<t_n=t)$ parcurge mulţimea partiţiilor lui $[0,t]$, când norma partiţiei $|\pi|=\max_i(t_{i+1}-t_i)$ tinde la 0. In cazul mişcării browniene, avem că $<W>_t=t$ a.s. Pentru două martingale M_t, N_t definim $<M,N>_t$ prin polarizare:

$$2<M,N>_t=<M+N>_t-<M>_t-<N>_t .$$

1.4 INTEGRALA STOCASTICĂ ITÔ

Am văzut că traiectoriile mişcării browniene (deşi continue) nu sunt nicăieri derivabile; aceasta inseamnă că nu putem defini $\int f(s)dW_s$ ca integrală Stieltjes pentru integranzi generali f. Totuşi, este posibil să definim o astfel de integrală stocastică in sens L^2. Vom defini $\int H_s dM_s$, unde $H_s=H_s(\omega)$ este proces adaptat "convenabil" şi M_s este martingal continuu, de cele mai multe ori mişcare browniană. Clasa integranzilor este următoarea: fie $\mathcal{F}_t$ filtrare care satisface condiţiile obişnuite şi $\mathcal{P}=\sigma-$algebra **progresiv măsurabilelor (previzibilelor)**, generată pe $\Omega\times[0,+\infty)$ de procesele Y_t continue la stânga adaptate la $\mathcal{F}_t$. Vom cere ca $H_s(\omega)$ să fie măsurabil in raport cu $\mathcal{P}$; (echivalent, un proces măsurabil este progresiv măsurabil dacă restricţia lui la orice interval $[0,t]\times\Omega$ este $\mathcal{B}([0,t])\otimes\mathcal{F}_t$–măsurabilă). In plus, mai cerem ca $E\int_0^{+\infty}H_s^2d<M>_s<+\infty$ şi apoi vom slăbi această ipoteză la $\int_0^{+\infty}H_s^2d<M>_s<+\infty$ a.s.

Să schiţăm definiţia integralei stocastice in raport cu mişcarea browniană. Să observăm că, dacă H este $\mathcal{F}_a-$măsurabilă şi K este $\mathcal{F}_c-$măsurabilă, W_t este mişcare browniană şi $a\le b\le c\le d$, atunci $E\left[H\left(W_b-W_a\right)K\left(W_d-W_c\right)\right]=0$. Cum W_t^2-t este martingal, avem $E\left[H^2\left(W_b-W_a\right)^2\right]=(b-a)E\left[H^2\right]$. Să definim acum $\int_0^1 H_s dW_s$. Dacă H_s este *elementară* i.e. $H_s(\omega)=H(\omega)1_{[a,b]}(s)$, cu $H=\mathcal{F}_a-$măsurabilă, atunci definim (ca la integrala Stieltjes) $\int_0^1 H_s dW_s=H\left(W_b-W_a\right)$. Dacă H_s este *simplă* i.e. combinaţie liniară finită de integranzi elementari, definim $\int_0^1 H_s dW_s$ prin liniaritate. In fine, dacă H_s satisface $E\int_0^1 H_s^2ds<+\infty$, aproximăm H cu integranzi simpli H^n şi definim integrala stocastică ca limita in L^2 a integralelor stocastice cu integranzii aproximanţi H^n. De unde ştim că limita in L^2 există şi că valoarea ei este independentă de alegerea şirului aproximant H^n? Dacă H este simplă, putem scrie $H = \sum_{j=1}^{n} K_j 1_{[a_j,b_j]}(s)$, unde K_j sunt mărginite, $\mathcal{F}_{a_j}$–măsurabile şi $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq b_n$. Atunci

$$E\left(\int_0^1 H_s dW_s\right)^2 = E\left[\sum_{j=1}^{n} K_j^2 \left(W_{b_j} - W_{a_j}\right)^2\right]$$
$$+E\left[2\sum_{i<j} K_i \left(W_{b_i} - W_{a_i}\right) K_j \left(W_{b_j} - W_{a_j}\right)\right];$$

al doilea sumand este zero şi deci

$$E\left(\int_0^1 H_s dW_s\right)^2 = E\left(\int_0^1 H_s^2 ds\right)^2.$$

Aceasta inseamnă că există o izometrie intre $\int_0^1 H_s dW_s$ cu norma din $L^2(P)$ şi H_s cu norma L^2 : $\left(E\int_0^1 (\cdot)^2 ds\right)^{1/2}$. Aceast fapt ajută la a arăta că limita există şi este independentă de şirul aproximant ales.

Să revenim la cazul general al martingalelor continue şi să dăm detaliile corespunzătoare. Fie M_t martingal continuu de pătrat integrabil i.e. $\sup_t E\left(M_t^2\right) < +\infty$. Din inegalităţile lui Doob şi teorema de convergenţa a martingalelor, $M_\infty = \lim_{t\to+\infty} M_t$ există şi $E\left(M_\infty^2\right) < +\infty$. Considerăm integranzi H previzibili şi a.i. $E\int_0^{+\infty} H_s^2 d < M >_s < +\infty$.

1.4.1 Fie K v.a. mărginită şi $\mathcal{F}_a$–măsurabilă; definim

$$I_t = K\left(M_{t\wedge b} - M_{t\wedge a}\right).$$

Atunci procesul I_t este martingal continuu,

$$E\left(I_\infty^2\right) = E\left[K^2\left(< M >_b - < M >_a\right)\right]$$
$$\text{şi} \quad < I >_t = \int_0^t K^2 1_{[a,b]}(s) d < M >_s.$$

Spunem că un proces H_s este simplu dacă poate fi scris in forma $\sum_{j=1}^{J} H_j 1_{[a_j,b_j]}(s)$, unde H_j este $\mathcal{F}_{s_j}$–măsurabilă şi mărginită, pentru orice j. Pentru un proces simplu H_s, definim

$$I_t = \int_0^t H_s dM_s = \sum_{j=1}^{J} H_j \left(M_{t\wedge b_j} - M_{t\wedge a_j}\right).$$

1.4.2 Dacă H_s^n este şir de procese simple a.i.

$$E\left[\int_0^{+\infty}(H_s^n - H_s^m)^2\,d<M>_s\right] \to 0 \text{ când } m,n \to +\infty,$$
$$\text{atunci } E\left[\sup_{s<+\infty}(I_s^n - I_s^m)^2\right] \to 0 \text{ când } m,n \to +\infty.$$

Observaţie Un proces H_s adaptat, de pătrat integrabil şi cu traiectorii continue se poate aproxima cu procese simple; de exemplu, şirul de procese

$$H_s^n := \sum_{i=1}^{2^n-1} 2^n \left(\int_{(i-1)2^{-n}}^{i2^{-n}} H_s ds\right) 1_{[i2^{-n},(i+1)2^{-n}]}(s)$$

converge către H_s in sensul că $E\left[\int_0^{+\infty}(H_s^n - H_s)^2\,d<M>_s\right] \to 0$ când $n \to +\infty$. Mai mult, orice proces adaptat şi cu traiectorii continue H_s admite o versiune progresiv măsurabilă, cu care vom şi lucra; in particular, obţinem că şirul aproximant H_s^n de mai sus este adaptat.

1.4.3 Fie H_s^n procese simple a.i.

$$E\left[\int_0^{+\infty}(H_s^n - H_s)^2\,d<M>_s\right] \to 0 \text{ când } n \to +\infty.$$

Atunci I_s^n converge in L^2, uniform in raport cu $s \in [0,+\infty)$, către un martingal continuu. Limita, notată $I_s = \int_0^t H_s dM_s$, este independentă de alegerea şirului H^n care aproximează pe H_s. In particular, $<I>_t = \int_0^t H_s^2 d<M>_s$.

Extensii ale definiţiei integralei Itô. Dacă $\int_0^{+\infty} H_s^2 d<M>_s < +\infty$ a.s. dar nu este neapărat integrabil, fie

$$T_k = \inf\left\{t>0 : \int_0^t H_s^2 d<M>_s > k\right\}$$

şi definim $\int_0^t H_s dM_s$ ca fiind $\int_0^t H_s dM_{s\wedge T_k}$ dacă $t \le T_k$. Cum $<M>_{s\wedge T_k}$ nu creşte pe $[T_k,+\infty)$, putem folosi definiţia din cazul integrabil pentru a defini integrala stocastică şi cum $T_k \to +\infty$ când $k \to +\infty$, definiţia este completă pentru orice t. Un proces M_t se numeşte **martingal local** dacă există un şir de timpi de stopare $S_n \to +\infty$ astfel că $M_{t\wedge S_n}$ sunt martingale de pătrat integrabil pentru orice n. Dacă M_t este continuu, timpii de stopare $S_n = \inf\{t > 0 : |M_t| > n\}$ satisfac această condiţie, deoarece $M_{t\wedge S_n}$ este mărginit de n (pentru un exemplu de martingal local care nu este martingal de pătrat integrabil, consideraţi mişcarea browniană). Definim $\int_0^t H_s dM_s$ ca fiind $\int_0^t H_s dM_{s\wedge S_n}$ pentru $t \leq S_n$ şi $< M >_t$ ca fiind $< M >_{t\wedge S_n}$ pentru $t \leq S_n$.

In cazul mişcării browniene, reţinem deci următoarele: dacă H_s este previzibil şi $\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ a.s., atunci $\int_0^t H_s dW_s$ există şi este martingal local şi continuu, iar dacă H_s este de pătrat integrabil şi $E\left[\int_0^t H_s^2 ds\right] < +\infty$, atunci $\int_0^t H_s dW_s$ este martingal de pătrat integrabil. In plus,

$$E\left[\int_0^t H_s dW_s\right] = 0$$

$$E\left[\int_0^t H_r dW_r \int_0^s H_r dW_r\right] = E\left[\int_0^{t\wedge s} H_r^2 dr\right]$$

$$\text{şi } < \int_0^{\cdot} H_s dW_s >_t = \int_0^t H_s^2 ds.$$

Un proces A_t se numeşte **local cu variaţie mărginită** dacă există un şir de timpi de stopare R_n astfel ca $A_{t\wedge R_n}$ să aibă variaţie mărginită pentru orice n (in cazul continuu, se poate considera şirul $R_n = \inf\left\{t > 0 : \int_0^t |dA_s| > n\right\}$). Un **semimartingal** X_t este suma dintre un martingal local M_t şi un proces local cu variaţie mărginită A_t. Dacă $\int_0^t H_s^2 d < M >_s + \int_0^t |M_s|\,|dA_s| < +\infty$ pentru orice t, definim integrala stocastică $\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s$, unde prima integrală este Itô (stocastică), iar a doua este Stieltjes.

Pentru un semimartingal $X_t = M_t + A_t$, definim $< X >_t \equiv < M >_t$. Dacă X, Y sunt semimartingale, definim procesul comun de variaţie pătrată prin polarizare:

$$< X, Y >_t = \frac{1}{2}\left[< X + Y >_t - < X >_t - < Y >_t\right].$$

1.4.4 Formula lui Itô: fie $X_t = M_t + A_t$ semimartingal cu traiectoriile continue şi $f \in C^2(\mathbf{R})$. Atunci, cu probabilitate unu, avem

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, d < X >_s \,, \; t \geq 0.$$

Formula lui Itô $d-$dimensională: fie X_t semimartingal continuu $d-$dimensional şi $f \in C^2\left(\mathbf{R}^d\right)$. Atunci:

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\, dX_s^i$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(X_s)\, d < X^i, X^j >_s \text{ a.s., pentru } t \geq 0.$$

Mai mult, dacă $f \in C^2\left(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d\right)$, formula lui Itô are forma

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \int_0^t \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i}(s, X_s)\, dX_s^i + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l}(s, X_s)\, d < X^i, X^j >_s \text{ a.s, pentru } t \geq 0.$$

1.4.5 In particular, dacă $\{W_t^i,\ t \geq 0,\ i = 1, \ldots, d\}$ este mişcare browniană $d-$dimensională, formula lui Itô devine: fie $X_t^j = X_0^j + \sum_{i=1}^d \int_0^t u_s^{ij} dB_s^{W_i} + \int_0^t v_s^j ds$, $j = 1, \ldots, m$, cu u_s^{ij}, v_s^j procese adaptate şi măsurabile astfel ca $\int_0^{+\infty} \left(u_s^{ij}\right)^2 ds < +\infty$, $\int_0^{+\infty} |v_s^j|\, ds < +\infty$ a.p.t. şi $f \in C^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m)$, atunci

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^j}(s, X_s)\, u_s^{ij} dW_s^i$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^j}(s, X_s)\, v_s^j ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)\, ds$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \sum_{j,l=1}^{m} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l}(s, X_s)\, u_s^{ij} u_s^{il} ds \text{ a.s., pentru } t \geq 0.$$

Observaţie Deosebirea faţă de formula clasică de schimbare de variabilă se explică prin faptul că variaţia pătrată a procesului $X(t)$ este $\int_0^t u^2(s)ds$ şi când scriem formula lui Taylor pentru funcţia $f(t, X_t)$, obţinem o contribuţie de la termenul de ordinul 2 care produce integrala suplimentară în formula lui Itô.

1.4.6 Formula de integrare prin părti: fie X, Y semimartingale continue; atunci

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + < X, Y >_t .$$

1.4.7 Inegalitățile lui Burkholder: fie $p \geq 2$; atunci există $c_p > 0$ astfel ca

$$E\left[|M_t|^p\right] \leq c_p E\left[< M >_t^{p/2}\right], t \in [0, T]$$

pentru orice martingal continuu $M_t; t \in [0, T]$, cu $E\left[|M_T|^p\right] < +\infty$ şi $M_0 = 0$.

In particular: $E\left[\left|\int_0^t H_s dW_s\right|^p\right] \leq c_p t^{p/2-1} E\left[\int_0^t |H_s|^p ds\right]$.

1.4.8 Continuitatea şi derivabilitatea integralei stocastice in raport cu parametrii: fie $H_t(x); t \in [0, T], x \in A \subseteq \mathbf{R}$ previzibil.

(a) Dacă $H_t(x)$ este continuu in (t, x) şi derivabil in x, atunci $\int_0^t H_s(x) dW_s$ are o versiune continuă in (t, x).

(b) Dacă $H_t(x)$ este continuu in (t, x) şi de $m+1$ ori derivabil in x, atunci $\int_0^t H_s(x) dW_s$ are o versiune continuă in (t, x) şi de m ori derivabilă in x. In plus $\frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^t H_s(x) dW_s = \int_0^t \frac{\partial^k}{\partial x^k} H_s(x) dW_s$ pentru $k \leq m$.

1.4.9 Caracterizarea mişcării browniene şi a martingalelor: fie M_t martingal local continuu cu $< M >_t \equiv t$ şi $M_0 \equiv 0$. Atunci M_t este mişcare browniană. In particular, dacă X_t este proces $d-$dimensional cu componentele martingale locale continue, $X_0 \equiv 0$ şi $< X^i, X^j >_t \equiv \delta_{ij} t$, atunci X_t este mişcare browniană $d-$dimensională. Fie M_t martingal continuu cu $< M >_t$ strict crescator şi $< M >_\infty = +\infty$. Atunci M_t este o schimbare de timp a mişcării browniene şi există o mişcare browniană reală W astfel ca $M_t = W_{<M>_t}$ (M_t este o schimbare de timp a lui X_t dacă există un proces crescător $\tau(t)$ astfel ca $M_t = X_{\tau(t)}$). Mai mult, orice martingal continuu este schimbare de timp a unei mişcări browniene, posibil stopată intr-un timp de stopare.

1.4.10 Reprezentarea v.a. de pătrat integrabil şi a martingalelor de pătrat integrabil, adaptate in raport cu mişcarea browniană: dacă $Y \in L^2$ este $\mathcal{F}_t-$măsurabilă, atunci există un proces previzibil H_t cu $E\int_0^t H_s^2 ds < +\infty$ şi $Y = E(Y) +$

$\int_0^t H_s dW_s$. Dacă M_t este martingal cu $M_0 = 0$ şi $E(M_t^2) < +\infty$, atunci există H_t proces previzibil a.i. $M_t = \int_0^t H_s dW_s$ a.s. şi pentru orice t. In particular, dacă W_t este mişcare browniană d–dimensională şi Y este măsurabilă in raport cu filtrarea $\mathcal{F}_t$ a mişcării browniene şi din $L^2(P)$, atunci există $H_t = \left(H_t^1, \ldots, H_t^d\right)$ previzibil cu $E\int_0^t \left(H_s^j\right)^2 ds < +\infty$ pentru orice j şi $Y = E(Y) + \int_0^t H_s \cdot dW_s$. Tinând cont că integralele stocastice in raport cu mişcarea browniană au traiectoriile continue, obţinem că martingalele adaptate in raport cu mişcarea browniană admit versiuni cu traiectorii continue (două procese se numesc versiuni dacă, pentru orice t, sunt egale a.s.).

1.5 ECUAŢII STOCASTICE ITÔ

Fie (Ω, K, P) câmpul de probabilitate canonic asociat unei mişcări browniene d–dimensionale $\{W_t^i\ ,\ t \in [0,T],\ 1 \leq i \leq d\}$ şi $\mathcal{F}_t$ filtrarea mişcării browniene. Se dau $\sigma_j\ ,\ b : [0,T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq j \leq d$ funcţii măsurabile. Coeficientul b se numeşte drift, iar σ coeficient de difuzie.

Prin **soluţie** a ecuaţiei stocastice m–dimensionale cu coeficienţii b, σ, inţelegem un proces $X = \{X_t,\ t \in [0,T]\}$, cu valori in $\mathbf{R}^m$, $\mathcal{F}_t$–adaptat, care să verifice

$$X_t = x + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(s, X_s) dW_s^j + \int_0^t b(s, X_s)\, ds \ , \text{ cu } x \in \mathbf{R}^m \text{ dat.} \tag{1.1}$$

Observaţi că adaptarea soluţiei la $\mathcal{F}_t$ este necesară pentru ca integralele stocastice din ecuaţie să aibă sens. Orice soluţie a ecuaţiei stocastice se numeşte **proces de difuzie** (dacă există, soluţia este semimartingal). Dacă coeficienţii ecuaţiei nu depind de prima variabilă, ecuaţia se numeşte omogenă.

1.5.1 Existenţă şi unicitate globală: dacă coeficienţii $b, \sigma_j; j = 1, \ldots, m$ sunt global Lipschitz i.e.

$$\|\sigma_j(t,x) - \sigma_j(t,y)\|, \|b(t,x) - b(t,y)\| \leq L \|x - y\|$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{R}^m$, $t \in [0,T], j = 1, \ldots, d$, atunci ecuaţia

(1.1) are o soluţie unică a.s. pe $[0,T]$ pentru orice $x \in \mathbf{R}^m$, care este in $L^p, p \geq 2$, este adaptată şi martingal de pătrat integrabil (in raport cu $\mathcal{F}_t$). Dacă lucrăm cu mişcarea browniană pe $[0,+\infty)$, pentru a obţine o soluţie unică pentru orice $t \geq 0$, trebuie să cerem in plus o condiţie de mărginire de tipul

$$\|\sigma_j(t,0)\| \quad , \|b(t,0)\| \leq C \text{ pentru } t \geq 0, j = 1,\ldots,d.$$

Observaţii 1. In cazul 1–dimensional, este suficient ca σ să fie Hölder de indice 1/2.

2. Constanta Lipschitz poate fi funcţie de t, crescătoare şi finită.

3. Soluţia din afirmaţia 1.5.1. se numeşte **tare**; există şi noţiunea de soluţie slabă, ca fiind insăşi legea procesului X. De exemplu, dacă considerăm ecuaţia (1.1) intâi in raport cu mişcarea browniană W_t şi apoi in raport cu altă mişcare browniană B_t (ambele ecuaţii cu aceiaşi coeficienţi şi aceleaşi condiţii iniţiale), avem:

(i) dacă $B = W$, atunci soluţiile coincid,

(ii) dacă B, W sunt independente, soluţiile sunt şi ele independente,

(iii) dacă B, W sunt parţial corelate, cele două soluţii nu sunt nici independente, nici egale.

In toate situaţiile insă, soluţille au *aceeaşi lege*, deci ecuaţia are soluţie slabă unică.

4. Condiţia iniţială este *deterministă* i.e. este adaptată la $\mathcal{F}_0$ (deci trebuie să fie constantă). Putem considera că valoarea iniţială să fie v.a. independentă de mişcarea browniană, caz in care existenţa şi unicitatea (tare) se păstrează, cu condiţia să considerăm soluţia adaptată in raport cu filtrarea generată de *$\mathcal{F}_t$ şi de valoarea iniţială.*

Vom nota prin $X_t(x)$ soluţia ecuaţiei (1.1).

1.5.2 Continuitatea şi derivabilitatea soluţiei in raport cu datele iniţiale: in ipotezele afirmaţiei 1.5.1., există versiuni continue in (t,x) ale integralelor stocastice şi a lui $X_t(x)$. Fie σ_j, b; $j = 1,\ldots,d$ global Lipschitz; dacă derivatele $\partial\sigma_j/\partial x^k$, $\partial b/\partial x^k$, $j = 1,\ldots,d$, $k = 1,\ldots,m$, sunt continue şi mărginite, atunci matricea iacobiană $Y^i_j(t,x) = \partial X^i_t/\partial x^j(x)$ (in sens L^2) există şi satisface ecuaţia

$$Y_j^i(t,x) = \delta_j^i + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial \sigma_l^i}{\partial x^k}(s, X_s(x))\, Y_j^k(s,x)dW_s^l$$

$$+ \sum_{k=1}^{m}\int_0^t \frac{\partial b}{\partial x^k}(s, X_s(x))\, Y_j^k(s,x)ds. \qquad (1.2)$$

Are loc un rezultat similar afirmaţiei 1.5.2., in care derivatele de orice ordin ale coeficienţilor ecuaţiei stocastice sunt continue şi mărginite, iar concluzia este că soluţia este infinit derivabilă in raport cu x. Se poate determina explicit ecuaţia satisfăcută de derivate.

1.5.3 Dependenţa continuă de coeficienţi sau stabilitatea ecuaţiilor stocastice: fie σ_j^N, b^N global Lipschitz şi cu creştere cel mult polinomială cu aceeaşi constantă K, pentru orice $N \geq 0$. Notăm cu X_t^N soluţia ecuaţiei

$$X_t^N = X_0^N + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j^N\left(s, X_s^N\right)dW_s^j + \int_0^t b^N\left(s, X_s^N\right)ds.$$

Dacă $\lim_{N\to\infty} E\left|X_0^N - X_0^0\right|^2 = 0$ şi, pentru orice $a > 0$, $0 \leq t \leq T$, avem $\lim_{N\to\infty}\sup_{|x|\leq a}\left\{\sum_{j=1}^{d}\left|\sigma_j^N(t,x) - \sigma_j^0(t,x)\right| + b^N(t,x) - b^0(t,x)\right\} = 0$, atunci $\lim_{N\to\infty}\sup_{0\leq t\leq T} E\left|X_t^N - X_t^0\right|^2 = 0$ (convergenţa are loc chiar in probabilitate).

Observaţie Să considerăm $X_{s,t}(x); s \leq t$, soluţia ecuaţiei

$$X_{s,t}(x) = x + \sum_{j=1}^{d}\int_s^t \sigma_j(r, X_{s,r}(x))dW_r^j + \int_s^t b(r, X_{s,r}(x))\,dr,$$

cu $x \in \mathbf{R}^m$ dat i.e. la momentul s, soluţia pleacă din x. Dacă coeficienţii sunt global Lipschitz, pentru aproape toţi $\omega \in \Omega$, soluţia este morfism injectiv pe imagine:

$$X_{r,t}(x,\omega) = X_{s,t}(X_{r,s}(x,\omega),\omega) \text{ pentru orice } r < s < t.$$

Dacă coeficienţii sunt de clasă C^∞, atunci $X_{s,t}(\cdot,\omega):\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ este difeomorfism de clasă C^∞ a.s., pentru orice $s<t$.

Presupunem in continuare că σ_j, b satisfac condiţia Lipschitz din afirmaţia 1.5.1. *local* i.e. satisfac condiţia Lipschitz pe domeniile mărginite din $\mathbf{R}^m$. Procesul $X_t(x)$, $x\in\mathbf{R}^m$, $t\in[0,T_x\wedge T]$, cu valori in $\mathbf{R}^d$, se numeşte **soluţie locală** a ecuaţiei (1.1) cu condiţia initială $X_0(x)=x$ dacă

(i) există un timp de stopare T_x şi un şir crescător de timpi de stopare $T_x^n; n=1,2,\ldots$, $\mathcal{F}_t$−măsurabili, cu $T_x^n<T_x$ şi $T_x^n \nearrow T_x$ pentru orice x, a.s.

(ii) $X_t(x)$ este continuă in (t,x), este $\mathcal{F}_t$−semimartingal pentru orice x şi satisface ecuaţia (1.1) pentru orice $t\in[0,T_x]$.

Soluţia $X_t(x)$ se numeşte **maximală** dacă are loc relaţia:

$$\lim_{t\nearrow T_x} X_t(x)=+\infty \text{ pe mulţimea } \{T_x(\omega)<+\infty\},$$

iar $T_x(\omega)$ se numeşte **timpul de explozie** al soluţiei.

1.5.4 Dacă σ_j, b sunt local Lipschitz, atunci ecuaţia (1.1) admite o soluţie maximală unică.

Soluţia maximală $X_t(x)$ se numeşte **conservativă** (sau **neexplozivă**) dacă $P(T_x=+\infty)=1$ pentru orice x; se numeşte **strict conservativă** dacă $P(T_x=+\infty \text{ pentru orice } x)=1$.

1.5.5 Dacă $\|b(x)\|^2+\|\sigma(x)\|^2\le k\left(1+\|x\|^2\right)$, atunci soluţia maximală (dacă există) este conservativă.

Observaţii In general, conservativ nu implică strict conservativ; in dimensiune 1, răspunsul este da. Fie ecuaţia stocastică

$$X_t=x+\sum_{j=1}^{d}\int_0^t\sigma(X_s)dB_s+\int_0^t b(X_s)ds,\ t\in[0,T]$$

Presupunem că $\sigma\neq 0$ şi fie

$$c(x)=\exp\left(2\int_0^x\frac{b(s)}{\sigma^2(s)}ds\right),\ k(x)=\int_0^x\frac{2}{c(r)}\int_0^r\frac{c(s)}{\sigma^2(s)}dsdr.$$

Atunci soluţia X_t este strict conservativă dacă şi numai dacă $k(+\infty)=k(-\infty)=+\infty$.

Exemple de ecuaţii stocastice 1. (Ecuaţii liniare) Soluţia ecuaţiei

$$X_t = X_0 + \int_0^t [\sigma_1(s) + \sigma_2(s)X_s]dW_s + \int_0^t [b_1(s) + b_2(s)X_s]ds$$

se poate pune in forma

$$\begin{aligned} X_t = Y_t \Big\{ X_0 + \textstyle\int_0^t Y_s^{-1}\sigma_1(s)dW_s \\ + \textstyle\int_0^t Y_s^{-1}\left[b_1(s) - \sigma_1(s)\sigma_2(s)\right]ds \Big\}, \\ \text{unde } Y_t = \exp\left\{ \textstyle\int_0^t \sigma_2(s)dW_s + \int_0^t \left[b_2(s) - \frac{1}{2}\sigma_2^2(s)\right] ds \right\}. \end{aligned}$$

În cazul multi–dimensional, se poate scrie o formulă similară in care apare matricea fundamentală de soluţii a ecuaţiei omogene asociată.

De exemplu,

$$X_t := \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \ , \ X_0 = 0,$$

numit *procesul Ornstein-Uhlenbeck* este soluţia unică a ecuaţiei stocastice Langevin

$$X_t = \alpha W_t - \beta \int_0^t X_s ds.$$

2. Fie $\sigma \in C^2(\mathbf{R})$ cu derivatele de ordine 1 şi 2 mărginite, iar b o funcţie lipschitziană. Ecuaţia diferenţială stocastică 1–dimensională

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma(X_s)\, dW_s + \int_0^t \left[b(X_s) + \frac{1}{2}\sigma(X_s)\,\sigma'(X_s) \right] ds$$

are o soluţie care se poate scrie in forma $X_t = u(W_t, Y_t)$, unde $u(x,y)$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(u),\ u(0,y) = y$$

şi, pentru orice $\omega \in \Omega$, $\{Y_t(\omega), t \geq 0\}$ este soluţia ecuaţiei diferenţiale ordinare

$$Y_t'(\omega) = f(W_t(\omega), Y_t(\omega)),\ Y_0(\omega) = x_0 \ ,$$

unde $f(x,y) = b(u(x,y))\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}$.

3. Dacă

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sigma\left\{\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\right\}\right] = 0,$$

atunci soluţia ecuaţiei

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s + \int_0^t b(s, X_s)\, ds$$

se determină prin

$$X_t = k\left(t, h(0, X_0) + \int_0^t \overline{\sigma}(s) dW_s + \int_0^t \overline{b}(s) ds\right),$$

unde $\overline{\sigma}' = \overline{\sigma}\sigma\left\{\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial\sigma}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}\right\}$, $\frac{\partial h}{\partial x}(t,x) = \frac{\overline{\sigma}(t)}{\sigma(t,x)}$, k este inversa lui h (in al doilea argument), iar

$$\overline{b}(t) = \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} b + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\sigma^2\right](t,x).$$

4. Dacă M_t este martingal local continuu, atunci

$$Z_t := \exp\left(M_t - \tfrac{1}{2} < M >_t\right)$$
satisface ecuaţia $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s$.

Martingalul Z_t se numeşte *martingal exponenţial*. In particular, dacă M_t este funcţie deterministă de pătrat integrabil, atunci Z_t este martingal de pătrat integrabil şi $\exp(W_t - t/2)$ joacă in calculul stocastic rolul exponenţialei obişnuite.

5. Ecuaţia $X_t = x + \int_0^t X_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds$ are soluţia $X_s = x\exp(W_t)$, $t \geq 0$.

6. Ecuaţia $X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 dW_s + \int_0^t X_s^3 ds$ are soluţia $X_t = (1 - W_t)^{-1}$. Care este timpul de explozie?

7. Podul brownian X^a i.e. mişcarea browniană B pe $[0,1]$ condiţionată de $W_1 = a$, $a \in \mathbf{R}$ dat, este soluţia ecuaţiei stocastice

$$X_t^a = W_t + \int_0^t \frac{a - X_s^a}{1-s} ds \text{ pentru } 0 \leq t < 1.$$

Integrandul "explodează" când $t \to 1$, deci X^a converge către a la timpul 1.

8. Ecuaţia stocastică

$$X_t = x + c\int_0^t X_s^{1/2} dW_s + \int_0^t (-aX_s + b)\,dt,$$

cu $a \in R, c > 0. b \geq 0$ are soluţie unică.

9. *Procesele Bessel de ordin d* sunt definite prin $X_t := |W_t|$, unde W_t este mişcare browniană $d-$dimensională. Aceste procese satisfac ecuaţia stocastică

$$X_t = |W_0| + B_t + \frac{d-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{X_s},$$

unde B_t este o mişcare browniană $1-$dimensională.

1.5.6 Procesele de difuzie (i.e. soluţia $X_t(x)$ a ecuaţiei (1.1)) sunt Markov.

Fie $P_{s.t}(x, dy), s \leq t$ semigrupul probabilităţilor de tranziţie i.e. $P_{s.t}(x, dy)$ este legea lui X_t cunoscând $X_s = x$. Dacă matricile $c(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$ sunt inversabile, atunci $P_{s,t}(x, dy)$ admit densităţi de probabilitate. Cum $c(t, x)$ este matrice simetrică, deci are valori proprii ≥ 0, condiţia de inversabilitate revine la faptul că valorile proprii sunt > 0.

Sa considerăm in continuare cazul omogen i.e. coeficienţii σ_j , $j = 1, \ldots, d$ şi b nu depind explicit de timp (de primul argument). Fie deci ecuaţia stocastică

$$X_t = x + \sum_{j=1}^{d}\int_0^t \sigma_j(X_s) dW_s^j + \int_0^t b(X_s)\,ds \text{ , cu } X_0 = x \in \mathbf{R}^m. \tag{1.3}$$

cu $\sigma_j, b : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq j \leq d$. Legea condiţionată a lui X_{T+t}, cunoscând că $X_T = x$ este aceeaşi cu a lui X_t, cunoscând că $X_0 = x$ i.e. procesul Markov X este omogen. Acelaşi raţionament cu T =timp de stopare finit, arată că X are proprietatea tare Markov.

1.5.7 Generatorul infinitezimal al proceselor de difuzie: fie X_t soluţia ecuaţiei (1.3), in ipotezele afirmaţiei 1.5.1. Atunci

funcţiile cu suport compact $C_c^2\left(\mathbf{R}^d\right) \subset Dom.(\mathcal{L})$; pentru aceste funcţii avem

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} c^{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i},$$

unde $c(x) = \sigma(x)\sigma^*(x)$, iar

$$M_t := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x^i}(X_s)\,\sigma_j^i(X_s)\,dW_s^j$$

este martingal local. Dacă b, σ_j sunt mărginite, enunţul rămâne adevărat şi pentru funcţiile mărginite $C_b^2\left(\mathbf{R}^d\right)$. De exemplu, in cazul mişcării browniene, avem $\mathcal{L} = \Delta/2$ pe $C_b^2\left(\mathbf{R}^d\right)$.

1.5.8 Legătura cu teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi cu derivate parţiale Fie X_t soluţia ecuaţiei (1.3) şi să notăm $E^{s,x}$ media condiţionată de $X_s = x$. Dacă $f_0 : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ este măsurabilă şi mărginită, atunci

$$f(s,x) = E^{s,x}\left[f_0(X_t)\right] = \int_{\mathbf{R}^m} f_0(y)P(s,t,x,dy)$$

pentru $t \in [0,T]$ fixat şi $s < t$, este continuă şi mărginită împreună cu derivatele $\partial f/\partial x^i$, $\partial^2 f/\partial x^i \partial x^j$; $i,j = 1,\ldots,m$, deci este in domeniul operatorului $\mathcal{L}$.

Totodată, $f(s,x)$ este diferenţiabilă in raport cu s şi satisface ecuaţia *inapoi* $\partial f/\partial s + \mathcal{L}f = 0$ cu condiţia la limită $\lim_{s\to t} f(s,x) = f_0(x)$.

1. In cazul in care $P(s,t,x,\cdot)$ are densitatea $p(s,t,x,y)$ continuă in s şi dacă derivatele $\partial p/\partial x^i$, $\partial^2 p/\partial x^i \partial x^j$ există şi sunt continue in s, atunci p este soluţia fundamentală (in sensul distribuţiilor) a ecuaţiei inapoi i.e. cu condiţia $\lim_{s\to t} p(s,t,x,y) = \delta_{x-y}$.

2. In plus, dacă derivatele urmatoare: $\partial p/\partial t$, $\partial\left(B^k(t,y)p\right)/\partial y^k$ si $\partial^2\left(A^k(t,y)A^l(t,y)p\right)/\partial y^k \partial y^l$ există şi sunt continue, atunci $p(s,t,x,y)$ este soluţia fundamentală a ecuaţiei *inainte* (sau ecuaţia Fokker–Planck) $-\partial p/\partial t + \mathcal{L}^* p = 0$, unde

$$\mathcal{L}^* f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k,l=1}^{m}\frac{\partial^2}{\partial y^k \partial y^l}\left(\sigma_i^k \sigma_i^l f\right) + \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial y^k}\left(b^k f\right)$$

este adjunctul formal al lui $\mathcal{L}$.

3. Fie D domeniu mărginit in $\mathbf{R}^m$, $u \in C^2(D)$, u continuă pe $\bar{D}$ şi $\Delta u = 0$ pe D. Atunci $u(x) = E^x u(W_{\tau_D})$, unde W este mişcare browniană d-dimensională care pleacă din x şi τ_D este prima ieşire a lui W din D. Mai mult, fie $\partial B(x,r)$ frontiera bilei $B(x,r)$ de centru x şi rază r in $\mathbf{R}^m$, f funcţie mărginită pe ∂D şi $u(x) := E^x f(W_{\tau_D})$. Fie $x \in D$ cu $r < dist(x, \partial D)$ şi $\tau_{B(x,r)}$ prima ieşire a lui W din $B(x,r)$. Atunci $u(x) = E^x u\left(W_{\tau_{B(x,r)}}\right)$ şi rezultă că $u(x)$ este media valorilor ei pe suprafeţele bilelor mici centrate in x, deci u este armonică.

4. Să presupunem că următoarele condiţii sunt indeplinite. Fie un domeniu mărginit $D \subset \mathbf{R}^m$ cu frontiera ∂D netedă.

(i) $\sum_{i=1}^{d} \sum_{k,l=1}^{m} \sigma_i^k(x)\sigma_i^l(x)\xi_k\xi_l \geq \mu \|\xi\|^2$ cu $\mu > 0$, pentru orice $x \in D$ şi $\xi \in \mathbf{R}^m$ i.e. $\mathcal{L}$ este uniform eliptic pe D.

(ii) Funcţiile σ_j, B, g sunt uniform Lipschitz continue pe $\overline{D}$ şi f_0 este continuă şi mărginită pe ∂D.

Notăm prin τ_D prima ieşire din D a lui X; in condiţiile de mai sus avem $\tau_D < +\infty$ a.s. şi problema Dirichlet

$$\mathcal{L}f = g\ ,\ x \in D;\ f|_{\partial D} = f_0$$

satisface $f(X_t) \to f_0(X_{\tau_D})$ când $t \nearrow \tau_D$ şi are soluţia dată de

$$f(x) = E^x \left[f_0(X_{\tau_D}) - \int_0^{\tau_D} g(X_s)\, ds \right] \text{ pentru } x \in D,$$

unde $X(t)$ este soluţia ecuaţiei (1.3).

5. Să considerăm problema Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{L}f(t,\cdot) = g \text{ pe } [0,T) \times \mathbf{R}^d\ ,\ f(T,x) = f_0(x),\ x \in \mathbf{R}^d\ .$$

Atunci

$$f(t,x) = E^{t,x} \left[f_0(X_T) - \int_t^T g(s, X_s)\, ds \right] \text{ pe } [0,T) \times \mathbf{R}^d\ .$$

2

CALCUL MALLIAVIN

2.1 HAOS ŞI INTEGRALE WIENER MULTIPLE

Notăm prin H spaţiul Hilbert real şi separabil $L^2(\mathcal{T},\mathcal{B},\mu)$ inzestrat cu produsul scalar $<\cdot\,,\,\cdot>$ şi norma indusă $\|\cdot\|$, unde $\mathcal{T}=[0,T]\times\{1,\ldots,d\}$, $T>0$, sau $\mathcal{T}=\mathbf{R}_+\times\{1,\ldots,d\}$, $\mathcal{B}$ sunt borelienele pe $\mathcal{T}$, iar μ este produsul dintre măsura Lebesgue λ şi măsura uniformă pe $\{1,\ldots,d\}$. Vom folosi identificarea $H\simeq L^2\left([0,T]\,;\,\mathbf{R}^d\right)$, respectiv $H\simeq L^2\left(\mathbf{R}_+\,,\,\mathbf{R}^d\right)$. In aceste condiţii există un câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{F},P)$ şi pe el o familie gausiană de variabile aleatoare $(W(h),h\in H)$ cu proprietăţile :

(a) aplicaţia $h\rightarrow W(h)$ este liniară

(b) pentru orice $h\in H$, $W(h)$ este variabilă aleatoare centrată şi $E\left[W(h)^2\right]=\|h\|^2$.

Intr-adevăr, ştim că pentru orice repartiţie (i.e. probabilitate pe $\mathbf{R}$) există un câmp de probabilitate $(\Omega,\mathcal{F},P)$ şi un şir $(g_n)_{n\geq 1}$ de variabile aleatoare independente pe Ω, toate având legea dată de acea repartiţie. In cazul repartiţiei $N(0,1)$, fie $(e_n\,,\,n\geq 1)$ o bază in H ; seria $\sum_{n=0}^{\infty}<h,e_n>g_n$ este convergentă in $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ către o variabilă aleatoare pe care o notăm $W(h)$. Această serie converge şi a.p.t. pentru că, in cazul gausian, convergenţa a.p.t. şi in L^2 sunt echivalente iar $W(h)$ este de fapt o clasă de echivalenţă de variabile aleatoare. Mai mult, aplicaţia $h\rightarrow W(h)$ este o izometrie liniară a lui H pe un subspaţiu inchis $\mathcal{H}_1$ al lui $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$; elementele lui $\mathcal{H}_1$ sunt variabile aleatoare gausiene centrate. Avem $E\left(W(h)W(k)\right)=<h,k>$ şi cum in spaţii gausiene independenţa este echivalentă cu ortogonalitatea, obţinem că $W(h),W(k)$ sunt independente dacă şi numai dacă $h \perp k$ in H. Aplicaţia W este caracterizată de familia de variabile aleatoare $\{W(A), A \in \mathcal{B},\ \mu(A) < \infty\}$, unde $W(A) = (W \mathbf{1}_A)$. Să remarcăm că legea lui $W(A)$ este $N(0, \mu(A))$ şi că, dacă $A \in \mathcal{B}$ cu $\mu(A) < \infty$ se scrie $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ disjunct, atunci $W(A) = \sum_{n=0}^{\infty} W(A_n)$ a.p.t. şi in $L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$; totuşi, mulţimea de probabilitate 0 depinde de A şi de $(A_n)_{n \geq 0}$ deci nu există o măsură veritabilă $m(\omega, \cdot)$ astfel incât $W(A)(\omega) = m(\omega, A)$ a.p.t. pentru orice $A \in \mathcal{B}$. Totodată, pentru A, B in $\mathcal{B}$ disjuncte şi de μ–măsură finită, avem că $E[W(A)W(B)] = \mu(A \bigcap B)$ şi că $W(A), W(B)$ sunt necorelate, deci independente.

Aplicaţia W se numeşte **zgomot alb** pe (T, B), iar familia $\{W_t^i := W([0,t] \times \{i\}),\ (t,i) \in \mathcal{T}\}$ se numeşte **mişcare browniană d–dimensională sau proces Wiener.**

Fie $H_n(x)$ al n–lea **polinom Hermite** definit prin

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\, e^{x^2/2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right), \quad n \geq 1$$

şi $H_0(x) = 1$. Aceste polinoame sunt coeficienţii dezvoltării in serie de puteri după t a funcţiei $F(x,t) = \exp\left(tx - t^2/2\right)$. Intr-adevăr, avem

$$F(x,t) = \exp\left[\frac{x^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}\right] \tag{2.1}$$

$$= e^{x^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\frac{d^n}{dt^n} e^{-(x-t)^2/2}\right)_{|\, t=0} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n H_n(x).$$

Din această dezvoltare rezultă şi următoarele proprietăţi.

$$H_n'(x) = H_{n-1}(x),\ n \geq 1 \tag{2.2}$$

$$(n+1) H_{n+1}(x) = x H_n(x) - H_{n-1}(x),\ n \geq 1 \tag{2.3}$$

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x),\ n \geq 1 \tag{2.4}$$

Într-adevăr, (2.2.) rezultă din $\frac{\partial F}{\partial x} = tF$, (2.3.) din $\frac{\partial F}{\partial t} = (x-t)F$ şi (2.4.) din $F(-x,t) = F(x,-t)$. Primele polinoame Hermite sunt $H_1(x) = x$ şi $H_2(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Din (2.3.) rezultă că termenul de grad maxim al lui $H_n(x)$ este $x^n/n!$. Din dezvoltarea lui

$F(0,t) = \exp(-t^2/2)$ după puterile lui t, obţinem că $H_n(0) = 0$ dacă n este impar şi $H_{2k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!}$ pentru $k \geq 1$.

LEMA 2.1.1 *Fie X, Y variabile aleatoare gausiene centrate i.e. $E(X) = E(Y) = 0$ şi reduse i.e. $E(X^2) = E(Y^2) = 1$. Atunci, pentru $m, n \geq 0$, avem*

$$E\left(H_n(X)H_m(Y)\right) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq m \\ \frac{1}{n!}\left(E(XY)\right)^n, \text{ dacă } n = m. \end{cases}$$

Demonstraţie. Pentru $s, t \in \mathbb{R}$ avem

$$E\left[\exp\left(sX - \frac{s^2}{2}\right)\exp\left(tY - \frac{t^2}{2}\right)\right] = \exp\left(st\, E(XY)\right).$$

Luăm in ambii membri derivata parţială $\frac{\partial^{n+m}}{\partial s^n \partial t^m}$ calculată in $s = t = 0$ şi obţinem

$$E\left(n!\, m!\, H_n(X)H_m(Y)\right) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq m \\ n!\left(E(XY)\right)^n \text{ dacă } n = m. \end{cases} \qquad \square$$

Pentru $n \geq 1$ notăm $\mathcal{H}_n$ subspaţiul inchis din $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ generat de variabilele aleatoare$\{H_n(W(h))\ ; h \in H, \| h \| = 1\}$. $\mathcal{H}_0$ este mulţimea constantelor, iar $\mathcal{H}_1$ coincide cu mulţimea $\{W(h), h \in H\}$. Din lema 2.1.1 rezultă că subspaţiile $\mathcal{H}_m$ şi $\mathcal{H}_n$ sunt ortogonale pentru $m \neq n$. Spaţiul $\mathcal{H}_n$ se va numi **haosul de ordin n** (in sensul lui Wiener) şi are loc următoarea descompunere ortogonală.

TEOREMA 2.1.2 *Notăm prin $\mathcal{G}$ σ–algebra generată de variabilele aleatoare $W(h), h \in H$. Atunci spaţiul $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ se descompune in suma ortogonală infinită a subspaţiilor $\mathcal{H}_n$ i.e.*

$$L^2(\Omega, \mathcal{G}, P) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n\ .$$

Demonstraţie. Să considerăm $X \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ortogonală pe $\mathcal{H}_n$, pentru orice $n \geq 0$; vrem să arătăm că $X = 0$. Avem $E(XH_n(W(h))) = 0$ pentru orice $h \in H$ cu $\| h \| = 1$. Folosind faptul că x^n se poate scrie ca o combinaţie liniară de polinoame Hermite $H_r(x)$; $0 \leq r \leq n$, obţinem că $E(XW(h)^n) = 0$ pentru orice $n \geq 0$, deci $E(X \exp(t\, W(h))) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$ şi $h \in H$ de normă 1. Liniaritatea aplicaţiei $h \to W(h)$ implică

$$E\left(X \exp \sum_{i=1}^{m} t_i W(h_i)\right) = 0, \tag{2.5}$$

pentru $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}, h_1, \ldots, h_m \in H, m \geq 1$. Dacă $h_1, \ldots, h_m \in H$, $m \geq 1$ sunt fixaţi, relaţia (2.5) spune că transformata Laplace a măsurii (cu semn)

$$\nu(B) = E\left[X \mathbf{1}_B (W(h_1), \ldots, W(h_m))\right],$$

cu B boreliană in $\mathbb{R}^m$, este identic zero pe $\mathbb{R}^m$. Aceasta implică $\nu = 0$ şi deci $E(X\mathbf{1}_G) = 0$ pentru orice $G \in \mathcal{G}$, adică $X = 0$. □

Pentru $n \geq 1$ să considerăm spaţiul $\mathcal{P}_n^0$ format din variabilele aleatoare $p(W(h_1), \ldots, W(h_k))$ cu $k \geq 1$, $h_1, \ldots, h_k \in H$ şi p polinom real in k variabile, de grad cel mult egal cu n. Fie $\mathcal{P}_n$ inchiderea lui $\mathcal{P}_n^0$ in $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Atunci are loc

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_n = \mathcal{P}_n .$$

Într-adevăr, incluziunea " $\subset$ " este imediată. Pentru incluziunea inversă este suficient să arătăm că $\mathcal{P}_n$ este ortogonal pe $\mathcal{H}_m$ pentru $m > n$. Vrem să arătăm că

$$E\left(p(W(h_1), \ldots, W(h_k))\, H_m\left(W(h)\right)\right) = 0,$$

unde $\| h \| = 1$, p este polinom de grad cel mult n şi $m > n$. Dacă $\{e_1, \ldots, e_j, h\}$ este o familie ortonormală, putem inlocui $p(W(h_1), \ldots, W(h_k))$ cu $q\left(W(e_1), \ldots, W(e_j), W(h)\right)$, cu gradul lui q cel mult n. Apoi, din faptul că monomul x^r se poate exprima ca o combinaţie liniară finită de polinoame Hermite $H_q(x)$; $0 \leq q \leq r$, obţinem că $E\left(W(h)^r H_m\left(W(h)\right)\right) = 0$ pentru orice $r \leq n < m$. □

Fie $(e_i, i \geq 1)$ o bază in H şi Λ mulţimea multiindicilor $a = (a_1, a_2 \ldots)$; $a_i \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că toţi termenii sunt nuli cu excepţia unui număr finit dintre ei. Pentru $a \in \Lambda$ notăm $a! = \prod_{i=1}^{\infty} a_i!$, $| a | = \sum_{i=1}^{\infty} | a_i |$ şi definim polinoamele Hermite generalizate $H_a(x)$, $x \in \mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ prin

$$H_a(x) = \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(x_i).$$

Produsul de mai sus este bine definit deoarece $H_0(x) = 1$ şi a_i sunt nuli cu excepţia unui număr finit dintre ei. Familia $\left\{\Phi_a = (a!)^{1/2}\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)),\ a \in \Lambda\right\}$ este sistem ortonormal deoarece, pentru orice $a, b \in \Lambda$ avem

$$\begin{aligned} E\left(\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i))\, H_{b_i}(W(e_i))\right) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} E\left(H_{a_i}(W(e_i))\, H_{b_i}(W(e_i))\right) \qquad (2.6) \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i!}\delta_{a_i,b_i} = \frac{1}{a!}\delta_{a,b}\ . \end{aligned}$$

PROPOZIŢIA 2.1.3 *Pentru $n \geq 1$ fixat, familia de variabile aleatoare*

$$\left\{(a!)^{1/2}\prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}(W(e_i)),\ a \in \Lambda,\quad |\, a \,|= n\right\} \qquad (2.7)$$

este o bază in $\mathcal{H}_n$.

Demonstraţie. Din formula (2.6) rezultă că elementele familiei (2.7) sunt mutual ortogonale când n variază. Pe de altă parte, variabilele aleatoare din (2.7) aparţin lui $\mathcal{P}_n$. Este deci suficient să arătăm că orice variabilă aleatoare polinomială de forma $p(W(h_1), \ldots, W(h_k))$ poate fi aproximată cu polinoame in $W(e_i)$, iar acest lucru este clar deoarece $(e_i\ ,\ i \geq 1)$ este bază a lui H. □

Exerciţii 1. Deduceţi următoarea formulă explicită pentru polinoamele Hermite:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k\, x^{n-2k}}{k!\,(n-2k)!\,2^k}.$$

Ca aplicaţie arătaţi că, dacă Y este variabilă aleatoare cu legea $N(0, \sigma^2)$, atunci

$$E\left(H_n(Y)\right) = \begin{cases} \frac{(2m!)^{1/2}(\sigma^2-1)^m}{2^m m!}, & \text{dacă } n = 2m \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este impar.} \end{cases} \quad \square$$

2. O altă realizare a mişcării browniene este următoarea : $\Omega = C_0\left([0,T] \times \mathbf{R}^d\right)$ sau $C_0\left(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d\right)$, P este măsura Wiener pe Ω , $\mathcal{F}$ este σ-algebra borelienelor lui Ω în raport cu P , iar $W_t(\omega) = \omega(t)$. Să observăm că mişcarea browniană este proces cu creşteri independente (chiar de trecut), gausian centrat cu covariaţia $E[W_t W_s] = t \wedge s$, cu legea lui $W_t^i - W_s^i$ dată de $N(0, t-s)$ şi cu traiectoriile continue a.s. Pentru ultima afirmaţie folosiţi criteriul de continuitate al lui Kolmogorov, folosind exerciţiul precedent şi arătând în prealabil că $E\left(| W_t^i - W_s^i |^{2k}\right) = \frac{(2k)!}{2^k k!}|t-s|^k$ pentru $i = 1, \ldots, d$ şi orice $k \in \mathbf{N}^*$.

Cu notaţiile precedente, fie $m \geq 1$ şi

$$\mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B} : \mu(A) < \infty\}.$$

Vrem să definim integralele stocastice multiple $I_m(f)$ pentru $f \in L^2(\mathcal{T}^m, \mathcal{B}^m, \mu^m)$. Notăm $\mathcal{E}_m$ mulţimea funcţiilor elementare de forma

$$f(t_1, \ldots, t_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_m} \mathbf{1}_{A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}}(t_1, \ldots, t_m). \quad (2.8)$$

unde $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}_0$ sunt mutual disjuncte şi $a_{i_1 \cdots i_m} = 0$ dacă oricare doi indici sunt egali. Observaţi că f se anulează pe dreptunghiurile care intersectează diagonalele $\{t_i = t_j , i \neq j\}$.

Pentru f de forma (2.8) definim

$$I_m(f) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} a_{i_1 \cdots i_m} W(A_{i_1}) \ldots W(A_{i_m}).$$

Definiţia nu depinde de reprezentarea lui f şi au loc următoarele proprietăţi.

(a) I_m este liniară.

(b) $I_m(f) = I_m(\tilde{f})$, unde $\tilde{f}$ reprezintă regularizarea simetrică a lui f i.e.

$$\tilde{f}(t_1, \ldots, t_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} f\left(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(m)}\right),$$

când σ parcurge mulţimea permutărilor lui $\{1,\ldots,m\}$ şi

$$(c)\ E\left(I_m(f)I_q(g)\right)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } m\neq q \\ m! < \tilde{f},\tilde{g}>_{L^2(\mathcal{T}^m)}, & \text{dacă } m=q. \end{cases}$$

Proprietatea (a) este evidentă ; demonstrăm uşor (b) pentru o funcţie de tipul $f(t_1,\ldots,t_m)=\mathbf{1}_{A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m)$ şi apoi folosim liniaritatea. Pentru $m\neq q$, proprietatea (c) rezultă din faptul că $f\in\mathcal{E}_m$ şi $g\in\mathcal{E}_q$ pot fi asociate aceleiaşi partiţii $A_1,\ldots,A_n$. Pentru $m=q$ presupunem f şi g elementare şi simetrice date de (2.8) respectiv

$$g(t_1,\ldots,t_m)=\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} b_{i_1\ldots i_m}\mathbf{1}_{A_{i_1}\times\ldots\times A_{i_m}}(t_1,\ldots,t_m).$$

Obţinem

$$E\left(I_m(f)I_m(g)\right)=E\left\{\left(\sum_{i_1<\cdots<i_m} m!\,a_{i_1\ldots i_m}W(A_{i_1})\ldots W(A_{i_m})\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\sum_{i_1<\cdots<i_m} m!\,b_{i_1\cdots i_m}W(A_{i_1})\ldots W(A_{i_m})\right)\right\}$$

$$=\sum_{i_1<\cdots<i_m}(m!)^2\,a_{i_1\cdots i_m}\,b_{i_1\cdots i_m}\,\mu(A_{i_1})\ldots\mu(A_{i_m})$$

$$=m!<f,g>_{L^2(\mathcal{T}^m)}.$$

Pentru a putea extinde integralele stocastice multiple la spaţiul $L^2(\mathcal{T}^m)$, trebuie să demonstrăm că spaţiul funcţiilor elementare $\mathcal{E}_m$ este dens in $L^2(\mathcal{T}^m)$. Este suficient pentru aceasta să arătăm că funcţiile caracteristice ale oricărei mulţimi de forma $A=A_1\times\ldots\times A_m$, $A_i\in\mathcal{B}_0$, $1\leq i\leq m$ pot fi aproximate cu funcţii elementare din $\mathcal{E}_m$. Întrucât măsura μ nu are atomi, pentru $\epsilon>0$ există $B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{B}_0$ mutual disjuncte şi cu $\mu(B_i)<\epsilon$ pentru $i=1,\ldots,n$, astfel incât fiecare A_i poate fi scrisă ca reuniunea disjunctă a unor B_j . Aceasta este posibil deoarece, pentru orice $A\in\mathcal{B}_0$ de măsură nenulă şi pentru orice

$0 < \gamma < \mu(A)$ există o mulţime măsurabilă $B \subset A$ de măsură γ. Punem $\alpha := \mu(\bigcup_{i=1}^m A_i)$ şi obţinem

$$\mathbf{1}_A = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \epsilon_{i_1\cdots i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\ldots\times B_{i_m}},$$

unde $\epsilon_{i_1\cdots i_m}$ este 0 sau 1. Impărţim acestă sumă in două părţi. Fie I mulţimea m -multiindicilor $(i_1,\ldots,i_m)$ cu toţi indicii diferiţi intre ei şi J complementara lui I. Punem

$$\mathbf{1}_B = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in I} \epsilon_{i_1\cdots i_m} \mathbf{1}_{B_{i_1}\times\ldots\times B_{i_m}}.$$

Atunci $\mathbf{1}_B \in \mathcal{E}_m$, $B \subset A$ şi avem

$$\| \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B \|^2_{L^2(\mathcal{T}^m)} = \sum_{(i_1,\ldots,i_m)\in J} \epsilon_{i_1\cdots i_m} \mu(B_{i_1})\ldots\mu(B_{i_m})$$

$$\leq C_m^2 \sum_{i=1}^n \mu^2(B_i)\left(\sum_{i=1}^n \mu(B_i)\right)^{m-2} \leq C_m^2\, \epsilon\alpha^{m-1}$$

şi astfel obţinem rezultatul de aproximare căutat.

Luăm $f = g$ in proprietatea (c) şi obţinem

$$E\left(I_m(f)^2\right) = m!\, \| \tilde{f} \|^2_{L^2(\mathcal{T}^m)} \leq m!\, \| f \|^2_{L^2(\mathcal{T}^m)},$$

deci operatorul I_m poate fi prelungit la un operator liniar şi continuu de la $L^2(\mathcal{T}^m)$ la $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, care satisface proprietăţile (a), (b), (c). Vom folosi următoarea notaţie pentru **integralele Wiener multiple**:

$$I_m(f) = \int_{\mathcal{T}^m} f(t_1,\ldots,t_m) W(dt_1)\ldots W(dt_m).$$

Are loc următoarea formulă de multiplicare:

PROPOZIŢIA 2.1.4 *Fie $f \in L^2(\mathcal{T}^m)$ şi $g \in L^2(\mathcal{T})$. Pentru $1 \leq k \leq m$, definim*

$$\left(f \times_{(k)} g\right)(t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_m)$$

$$:= \int_{\mathcal{T}} f(t_1,\ldots,t_m) g(t_k)\mu(dt_k).$$

Atunci $f \times_{(k)} g \in L^2(\mathcal{T}^{m-1})$ *şi*

$$I_{m+1}(f \otimes g) = I_m(f) I_1(g) - \sum_{k=1}^{m} I_{m-1}\left(f \times_{(k)} g\right) \tag{2.9}$$

Demonstraţie. Faptul că $f \times_{(k)} g \in L^2(\mathcal{T}^{m-1})$ rezultă din inegalitatea Cauchy–Schwartz. Pentru a demonstra (2.9), din densitatea funcţiilor elementare in $L^2(\mathcal{T}^m)$ şi din liniaritate, putem presupune că $f = \mathbf{1}_{A_1 \times \ldots \times A_m}$, unde $A_j \in \mathcal{B}_0$ sunt mutual disjuncte iar $g = \mathbf{1}_{A_1}$ sau $g = \mathbf{1}_{A_0}$, cu A_0 disjunctă de $A_1, \ldots, A_m$. Cazul $g = \mathbf{1}_{A_0}$ rezultă din faptul că produsul tensorial $f \otimes g \in \mathcal{E}_m$. În cazul $g = \mathbf{1}_{A_1}$, să punem $\beta = \mu(A_1) \ldots \mu(A_m)$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să considerăm o partiţie măsurabilă $A_1 = \bigcup_{i=1}^n B_i$ astfel ca $\mu(B_i) < \epsilon$. Definim funcţia elementară

$$h_\epsilon = \sum_{i \neq j} \mathbf{1}_{B_i \times B_j \times A_2 \times \ldots \times A_m} .$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
I_m(f) I_1(g) &= W^2(A_1) W(A_2) \ldots W(A_m) \\
&= \sum_{i \neq j} W(B_i) W(B_j) W(A_2) \ldots W(A_m) \\
&+ \sum_{i=1}^{n} \left(W^2(B_i) - \mu(B_i)\right) W(A_2) \ldots W(A_m) \qquad (2.10) \\
&+ \mu(A_1) W(A_2) \ldots W(A_m) \\
&= I_{m+1}(h_\epsilon) + R_\epsilon + \sum_{k=1}^{m} I_{m-1}\left(f \times_{(k)} g\right) .
\end{aligned}$$

Avem deci

$$\| h_\epsilon - f \otimes g \|^2_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(B_i) \mu(A_2) \ldots \mu(A_m) \leq \epsilon \beta$$

şi

$$E\left(R_\epsilon^2\right) = 2 \sum_{i=1}^{n} \mu^2(B_i) \mu(A_2) \ldots \mu(A_m) \leq 2 \epsilon \beta ;$$

In final facem $\epsilon \to 0$ in (2.10).□

Observatie Dacă funcţia f este simetrică, atunci formula (2.9) devine

$$I_{m+1}(f \otimes g) = I_m(f)I_1(g) - mI_{m-1}(f \otimes_1 g)\,, \tag{2.11}$$

unde $f \otimes_1 g$ inseamnă contractia (suprimarea) unui singur indice pentru f şi g. In general, dacă $f \in L^2(T^p)$ şi $g \in L^2(T^q)$ sunt simetrice, pentru $1 \leq r \leq \min(p, q)$ notăm prin $f \otimes_r g$ *contracţia a r argumente* pentru f şi g funcţia

$$(f \otimes_r g)(t_1, \ldots, t_{p+q-2r})$$

$$:= \int_{T^r} f(t_1, \ldots, t_{p-r}, s) g(t_{p+1}, \ldots, t_{p+q-r}, s) \mu^r(ds).$$

Observăm că $f \otimes_r g \in L^2(T^{p+q-2r})$ şi că formula (2.11) se generalizează astfel. Fie $f \in L^2(T^p)$ şi $g \in L^2(T^q)$ funcţii simetrice. Atunci

$$I_p(f)I_q(g) = \sum_{r=0}^{p \wedge q} r!\, C_p^r\, C_q^r\, I_{p+q-2r}(f \otimes_r g)\,. \tag{2.12}$$

Demonstraţie. Prin inducţie in raport cu q. Pentru $q = 1$ se reduce la (2.11). Presupunem că este adevărată pentru $q - 1$ şi, printr-un argument de densitate, putem presupune că g este de forma $g = g_1 \tilde{\otimes} g_2$, unde $\tilde{\otimes}$ inseamnă regularizarea simetrică a produsului tensorial, iar g_1, g_2 sunt funcţii simetrice ortogonale de $q - 1$ variabile (resp. o variabilă). Din (2.11) avem că

$$I_q\left(g_1 \tilde{\otimes} g_2\right) = I_{q-1}(g_1) I_1(g_2)\,;$$

apoi folosim ipoteza de inducţie şi din nou (2.11).□

Legătura dintre polinoamele Hermite şi integralele stocastice multiple este dată in rezultatul următor.

TEOREMA 2.1.5 *Fie $H_m(x)$ al m–lea polinom Hermite şi fie $h \in H = L^2(T)$ de normă* 1. *Atunci*

$$m!\, H_m\,(W(h)) = \int_{T^m} h(t_1) \ldots h(t_m) W(dt_1) \ldots W(dt_m). \tag{2.13}$$

În consecinţă, integrala multiplă I_m aplică $L^2(\mathcal{T}^m)$ pe haosul Wiener $\mathcal{H}_m$ şi, conform teoremei 2.1.2, orice funcţională F de mişcarea browniană (i.e. orice variabilă aleatoare de pătrat integrabil $F \in L^2(\Omega, \mathcal{G}, P)$, unde $\mathcal{G}$ este σ–algebra generată de W) se dezvoltă in serie de integrale stocastice multiple :

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)\,.$$

Avem că $f_0 = E(F)$ iar I_0 este aplicaţia identitate pe constante. In plus, funcţiile $f_m \in L^2(\mathcal{T}^m)$ pot fi presupuse simetrice şi, in acest caz, sunt unic determinate de F.

Demonstraţia teoremei 2.1.5 Prin inducţie după m. Pentru $m = 1$ este imediat ; presupunem adevărat pentru $1, 2, \ldots, m$. Din formula de recurenţă pentru polinoamele Hermite (2.3) şi din formula pentru produs (2.11) avem

$$I_{m+1}\left(h^{\otimes(m+1)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= I_m\left(h^{\otimes m}\right) I_1(h) - m I_{m-1}\left(h^{\otimes(m-1)} \int_{\mathcal{T}} h^2(t)\mu(dt)\right) \\
&= m!\, H_m\left(W(h)\right) W(h) - m(m-1)!\, H_{m-1}\left(W(h)\right) \\
&= m!\,(m+1) H_{m+1}\left(W(h)\right) = (m+1)!\, H_{m+1}\left(W(h)\right),
\end{aligned}$$

unde prin $h^{\otimes m}$ am notat $h^{\otimes m}(t_1, \ldots, t_m) = h(t_1) \ldots h(t_m)$.

Fie S_m subspaţiul inchis din $L^2(\mathcal{T}^m)$ format din funcţiile simetrice. Integrala multiplă I_m verifică relaţia $E(I_m(f)^2) = m! \times \| f \|^2_{L^2(\mathcal{T}^m)}$ pe S_m . Imaginea $I_m(S_m)$ este inchisă şi din (2.13) conţine variabilele aleatoare $H_m\left(W(h)\right)$, $h \in H, \| h \| = 1$. În consecinţă $\mathcal{H}_m \subset I_m(S_m)$. Cum integralele multiple de ordine diferite sunt ortogonale, obţinem că $I_m\left(L^2(\mathcal{T}^m)\right) = I_m(S_m)$ este ortogonal pe $\mathcal{H}_n$ pentru $n \neq m$ şi deci $I_m\left(L^2\left(\mathcal{T}^m\right)\right) = \mathcal{H}_m$.□

Aceleaşi argumente ca mai sus arată că elementele bazei lui $\mathcal{H}_m$ (date in propoziţia 2.1.3) verifică

$$(a!)^{1/2} \prod_{i=1}^{\infty} H_{a_i}\left(W(e_i)\right) = \prod_{i=1}^{\infty} (a!)^{-1/2}\, I_{a_i}\left(e_i^{\otimes a_i}\right)$$

$$= I_{|a|}\left((a!)^{-1/2}\, e_1^{\otimes a_1} \otimes e_2^{\otimes a_2} \otimes \ldots \otimes e_m^{\otimes a_m}\right),$$

unde $|a| = a_1 + \cdots + a_m$.

Exerciţii Pentru $n \geq 1$ definim polinoamele $H_n(\lambda, x)$ prin

$$H_n(\lambda, x) = \lambda^{n/2}\, H_n\left(\frac{x}{\lambda^{1/2}}\right), \text{ pentru } x \in \mathbf{R}\,,\ \lambda > 0.$$

Arătaţi că

(a) $\exp(tx - t^2\lambda/2) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, H_n(\lambda, x)$.

(b) Pentru orice $h \in L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$ avem

$$H_m\left(\| h \|^2,\, W(h)\right) = \frac{1}{m!}\, I_m\left(h^{\otimes m}\right).$$

Aplicaţii la integrala Itô şi la ecuaţii stocastice Itô

1. Fie $f_n : \mathcal{T}^n \to R$ funcţie simetrică şi de pătrat integrabil. Pentru aceste funcţii, integrala stocastică multiplă $I_n(f_n)$ in raport cu procesul gausian $\{W(h) = \int_{\mathcal{T}} h(s) dW_s\,,\ h \in L^2(\mathcal{T})\}$ coincide cu o integrală Itô iterată i.e.

$$I_n(f_n)$$

$$= n! \int_0^T \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} f_n(t_1, \ldots, t_n)\, dW_{t_1} \ldots dW_{t_n}\,.$$

Într-adevăr, formula se verifică pentru funcţiile elementare, iar in cazul general folosim un argument de densitate şi ţinem cont că integralele Itô iterate verifică aceeaşi proprietate de izometrie ca şi integralele stocastice multiple.

2. Fie $\{W_t^i\,,\ (t, i) \in \mathcal{T}\}$ o mişcare browniană $d-$dimensională. In acest caz integrala stocastică multiplă $I_n(f_n)$ este bine definită pentru funcţii $f_n((t_1, i_1), \ldots, (t_n, i_n))$ de pătrat integrabil şi simetrice in $(t_j, i_j) \in \mathbf{R}_+ \times \{1, \ldots, d\}$, deci se poate exprima ca sumă de integrale Itô iterate :

$$I_n(f_n) = n! \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{d} \int_0^T \int_0^{t_n} \ldots \int_0^{t_2} f_n((t_1, i_1), \ldots, (t_n, i_n))$$

$$\times W^{i_1}(dt_1) \ldots W^{i_n}(dt_n)\,.$$

În particular reţinem că, pentru orice $h \in H$, $W(h)$ poate fi obţinută ca integrala stocastică $\sum_{i=1}^{d} \int_0^T h^i(t) dW_t^i$ si că orice $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cu $\mathcal{F}$ este generată de W , se scrie ca serie de integrale stocastice multiple ortogonale.

3. Fie $\{W_t \, , \, t \geq 0\}$ o mişcare browniană reală. Am văzut in capitolul 1 că, dacă $h \in L^2[0, \infty)$, atunci

$$M_h(t) = \exp\left(\int_0^t h(s) dW_s - \tfrac{1}{2}\int_0^t h^2(s) ds\right)$$

verifică ecuaţia $M_h(t) = 1 + \int_0^t M_h(s) h(s) dW_s$;

să observăm că avem descompunerea in haos

$$M_h(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_n} \cdots \int_0^{t_2} h(t_1) \ldots h(t_n) dW_{t_1} \ldots dW_{t_n} .$$

4. Ecuaţia $X(t) = x + \int_0^t X(s) dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t X(s) ds$ are soluţia $X(t) = x \exp(W_t)$, $t \geq 0$, iar dezvoltarea ei in serie este $X(t) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (W_t)^n$ (convergenta pentru orice $t \geq 0$).

5. Ecuaţia $X(t) = 1 + \int_0^t X^2(s) dW_s + \int_0^t X^3(s) ds$ are soluţia $X(t) = \frac{1}{1 - W_t}$, iar dezvoltarea ei in serie $X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (W_t)^n$ diverge, cu probabilitate pozitivă şi pentru t fixat, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \|(W_t)^n\|_2$ diverge. Totuşi, dezvoltarea formală converge pentru $t < \inf\{t : | W_t |= 1\}$.

2.2 OPERATORUL DE DERIVARE

Fie $W = \{W(h), \, h \in H := L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)\}$ un zgomot alb. Presupunem că W este definit pe un câmp de probabilitate complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cu $\mathcal{F}$ generat de W. Vrem să definim derivata DF pentru variabile aleatoare $F : \Omega \to \mathbf{R}$ de pătrat integrabil i.e. derivata in raport cu $\omega \in \Omega$. În cazul mişcării browniene d–dimensionale, spaţiul Ω este topologic : $\Omega = C_0\left(\mathbf{R}_+ \, ; \, \mathbf{R}^d\right)$; totuşi, ne va interesa situaţia mai generală când variabilele aleatoare F sunt definite P–a.p.t. şi nu admit versiuni continue, aşa cum arată exerciţiul următor, şi cum vom vedea la soluţiile ecuaţiilor stocastice in sens Itô. Acesta este motivul pentru care vom introduce derivata in sens slab, fără să ţinem cont că Ω are structură topologică.

Exercitiu Fie $W = \{W_t\ ,\ 0 \le t \le 1\}$ o mişcare browniană reală şi $h \in L^2[0,1]$. Atunci integrala $F = \int_0^1 h(t)W(dt)$ admite o versiune continuă in $C_0[0,1]$ dacă şi numai dacă există o măsură cu semn μ pe $[0,1]$ astfel ca $\mu(\{0\}) = 0$ şi $h(t) = \mu((t,1])$ pentru orice $t \in [0,1]$, a.p.t. in raport cu măsura Lebesgue.

Indicaţie Dacă h este dată de o măsură cu semn, rezultatul decurge prin integrare prin părţi. Reciproc, arătaţi că versiunea continuă a lui F trebuie să fie liniară şi apoi folosiţi teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe $C[0,1]$.

Notăm $C_p^\infty\left(\mathbf{R}^{dn}\right)$ mulţimea funcţiilor $f : \mathbf{R}^{dn} \to \mathbf{R}$ de clasă C^∞ astfel incât f şi toate derivatele ei au creştere cel mult polinomială (i.e. rapid descrescătoare pe $\mathbf{R}^{dn}$: $\sup_{x\in\mathbf{R}^{dn}} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty$, pentru orice multiindici α, β). Fie $\mathcal{S}$ clasa variabilelor aleatoare (funcţionalelor) netede i.e. de forma

$$F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \tag{2.14}$$

unde $f \in C_p^\infty\left(\mathbf{R}^{dn}\right)$ şi $h_1\ , \ldots, h_n \in H$. Cu teorema de convergenţă a martingalelor şi teorema clasei monotone, să observăm că $\mathcal{S}$ este subspaţiu dens in $L^2(\Omega)$. Vom nota $\mathcal{S}_b$ respectiv $\mathcal{S}_c$ clasele de variabile aleatoare de forma (2.14) astfel incât $f \in C_b^\infty\left(\mathbf{R}^{dn}\right)$ i.e. f şi toate derivatele ei sunt mărginite, respectiv $f \in C_c^\infty\left(\mathbf{R}^{dn}\right)$ i.e. f are suport compact. Vom nota $\mathcal{P}$ clasa variabilelor aleatoare de forma (2.14) cu f funcţie polinomială de dn variabile.

Derivata unei variabile aleatoare netede F de forma (2.14) este procesul stocastic $\{D_tF\ ,\ t \in [0,T],\ t \in \mathbf{R}_+\}$ definit prin

$$D_tF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(W(h_1), \ldots, W(h_n)\right) h_i(t)\ . \tag{2.15}$$

Expresia derivatei in această definiţie nu depinde de reprezentarea particulară a lui F ca funcţională netedă. In particular : $D_tW(h) = h(t)$. Vom considera DF ca un element in

$L^2([0,T]\times\Omega)\simeq L^2(\Omega\,;H)$ i.e. DF este proces indexat după T. De fapt $DF\in\bigcap_{p\geq 2}L^p(\Omega\,;H)$. Pentru a putea interpreta DF ca derivata după o direcţie, să observăm că pentru $h\in H$ avem

$$< DF,h> = \lim_{\epsilon\searrow 0}\frac{1}{\epsilon}\,[f((W(h_1)+\epsilon<h_1,h>,\ldots,$$

$$W(h_n)+\epsilon<h_n,h>) - fW(h_1),\ldots,W(h_n)]\,.$$

Formal vorbind, produsul scalar $<DF,h>$ este derivata in $\epsilon=0$ a lui F compusă cu zgomotul alb "translatat" $W(A)+\epsilon\int_A h\,d\mu$.

Dacă ne limităm la o mişcare browniană d–dimensională pe spaţiul $\Omega=C_0\left([0,T]\,;\,\mathbf{R}^d\right)$, forma funcţionalelor netede (2.14) poate fi luată

$$F=f(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\,,$$

cu $f\left(x^{11},\ldots,x^{d1};\ldots;x^{1n},\ldots,x^{dn}\right)\in C_b^\infty\left(\mathbf{R}^{dn}\right)$ şi $t_1,\ldots,t_n\in[0,T]$ iar derivata lui F este procesul stocastic d–dimensional

$$(DF)_t^j=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^{ji}}(W_{t_1},\ldots,W_{t_n})\,\mathbf{1}_{[0,t_i]}(t)$$

pentru $t\in[0,T]$ şi $j=1,\ldots,d$. Derivata DF apare ca variabilă aleatoare cu valori in $H=L^2\left([0,T]\,;\,\mathbf{R}^d\right)$.

LEMA 2.2.1 *Fie F funcţională netedă şi $h\in H=L^2(T)$. Atunci avem*

$$E(<DF,h>)=E(FW(h))\,. \tag{2.16}$$

Demonstraţie. Putem presupune că $d=1$ şi că h are norma 1. Există elemente ortonormale $\{e_1,\ldots,e_n\}\subset H$ astfel incât $h=e_1$ şi F este de forma

$$F=f(W(e_1),\ldots,W(e_n))\,,$$

cu $f\in C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$. Fie $\phi(x)$ densitatea legii normale pe $\mathbf{R}^n$ i.e.

$$\phi(x)=(2\pi)^{-n/2}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\,;$$

Atunci avem

$$E(< DF, h >) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\phi(x)dx = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\phi(x)x_1 dx = E(FW(e_1)) = E(FW(h)).\square$$

COROLAR 2.2.2 *Fie F, G funcţionale netede şi $h \in H = L^2(\mathcal{T})$. Atunci avem*

$$E(G < DF, h >) = E(-F < DG, h > + FGW(h)). \quad (2.17)$$

Ca o consecinţă acestui corolar, obţinem că D este operator inchizabil de la $L^r(\Omega)$ la $L^r(\Omega\,;\, L^2(\mathcal{T}))$, pentru orice $r \geq 1$. Într-adevăr, fie $\{F_k\,,\ k \geq 1\}$ un şir de variabile aleatoare netede astfel ca $F_k \to 0$ in $L^r(\Omega)$ şi $DF_k \to \eta$ in $L^r(\Omega\,;\, L^2(\mathcal{T}))$; vrem să arătăm că $\eta = 0$. Pentru $\epsilon > 0$, fie $\varphi_\epsilon(x) = e^{-\epsilon x^2}$. Atun- ci, pentru orice $h \in H$ şi $F \in \mathcal{S}_b$, avem

$$E(< \eta, h > F\varphi_\epsilon(W(h))) = \lim_k E(< DF_k, h > \varphi_\epsilon(W(h))F)$$

$$= \lim_k E(-F_k < D(\varphi_\epsilon(W(h))F), h > + F_k F\varphi_\epsilon(W(h))W(h)) = 0.$$

deoarece $F_k \to 0$ in L^r când $k \to \infty$, iar variabilele aleatoare

$$< D(\varphi_\epsilon(W(h))F), h > \text{ şi } F\varphi_\epsilon(W(h))W(h)$$

sunt mărginite. Facem $\epsilon \searrow 0$ şi obţinem $\eta = 0$.

Vom nota prin $\mathbf{D}^{r,1}$ domeniul operatorului D in $L^r(\Omega)$. Mai precis, $\mathbf{D}^{r,1}$ este inchiderea clasei $\mathcal{S}$ in raport cu norma

$$\| F \|_{r,1} = \left[E(| F |^r) + \| DF \|^r_{L^r(\Omega\,;H)}\right]^{1/r}.$$

Să observăm că $\mathbf{D}^{2,1}$ este spaţiu Hilbert in raport cu produsul scalar

$$< F, G >_{2,1} = E(FG) + E(< DF, DG >).$$

Mai general, se pot defini derivatele iterate pentru variabile aleatoare de p ori slab diferenţiabile. Să notăm

$$D^k_{t_1,\ldots,t_k} F = D_{t_1} D_{t_2} \ldots D_{t_k} F,$$

pentru $k \in \mathbf{N}^*$ şi $F \in \mathcal{S}$. Derivata $D^k F$ este considerată ca funcţie măsurabilă pe spaţiul produs $\mathcal{T}^k \times \Omega$ care este definită $\mu^k \times P$–a.p.t. Pentru $r \geq 1$ şi $p \in \mathbf{N}^*$ vom nota $\mathbf{D}^{r,p}$ completarea clasei $\mathcal{S}$ in raport cu norma

$$\| F \|_{r,p} = \left[E(| F |^r) + \sum_{k=1}^{p} E\left(\| D^k F \|^r_{L^2(\mathcal{T}^k)}\right)\right]^{1/r} .$$

În cazul mişcării browniene d–dimensionale, forma derivatei de ordin k a funcţionalei netede F (ca variabilă aleatoare cu valori in $H^{\otimes k}$) este următoarea

$$\left(D^k F\right)^{j_1,\ldots,j_k}_{s_1,\ldots,s_k} =$$

$$\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x^{j_1 i_1} \ldots \partial x^{j_k i_k}} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n})\, \mathbf{1}_{[0,t_{i_1}]}(s_1) \ldots \mathbf{1}_{[0,t_{i_k}]}(s_k),$$

pentru $s_1, \ldots, s_k \in [0, T]$ şi $j_1, \ldots, j_k = 1, \ldots, d$. Vom scrie $D^j_t F$ pentru $(DF)^j_t$; cu această notaţie, $\left(D^k F\right)^{j_1,\ldots,j_k}_{s_1,\ldots,s_k}$ coincide cu derivata iterată $D^{j_1}_{s_1} D^{j_2}_{s_2} \ldots D^{j_k}_{s_k} F$. Pentru $r \geq 1$ şi $p \in \mathbf{N}^*$, să notăm că

$$\| F \|_{r,p} = \| F \|_r + \| \| D^p F \|_{HS} \|_r \ ,$$

unde $\| \cdot \|_{HS}$ inseamnă norma Hilbert–Schmidt pe $H^{\otimes p}$ i.e.

$$\| D^p F \|^2_{HS} = \sum_{j_1,\ldots,j_p=1}^{d} \int_{[0,T]^p} \left[(D^p F)^{j_1,\ldots,j_p}_{s_1,\ldots,s_p}\right]^2 ds_1 \ldots ds_p \ .$$

Rezultatele următoare arată că normele $\| \cdot \|_{r,p}$ sunt monotone, compatibile şi că spaţiile $\mathbf{D}^{r,p}$ conţin dens clasele $\mathcal{S}_c$ şi $\mathcal{P}$.

(a) $\| F \|_{r,p} \leq \| F \|_{s,q}$ pentru orice $F \in \mathcal{S}$, dacă $p \leq q$ şi $r \leq s$.

(b) Fie $\{F_n \ , \ n \geq 1\}$ un şir de variabile aleatoare netede astfel ca $\| F_n \|_{r,p}$ converge la 0 când $n \to \infty$ şi $\| F_n - F_m \|_{s,q}$ converge la 0 când $m, n \to \infty$. Atunci $\| F_n \|_{s,q}$ converge la 0 când $n \to \infty$.

Intr-adevăr, ştim că

$$\lim_{n,m\to\infty} \left\| \left\| D^i F_n - D^i F_m \right\|_{L^2(T^i)} \right\|_s = 0$$

pentru toţi $0 \le i \le j$. Cum spaţiile $L^s(\Omega, L^2(T^i))$ sunt complete, există $G^i \in L^s(\Omega, , L^2(T^i))$ astfel ca

$$\left\| \left\| D^i F_n - G \right\|^i_{L^2(T^i)} \right\|_{L^s(\Omega)} \to 0 ,$$

când $n \to \infty$. Să arătăm că $G^i = 0$ pentru orice $0 \le i \le j$ prin inducţie după i . Avem $G^0 = 0$ deoarece $F_n \to 0$ in $L^r(\Omega)$ când $n \to \infty$. Să presupunem că $G^0 = G^1 = \ldots = G^{i-1} = 0$. Atunci, pentru orice $F \in \mathcal{S}_b$ şi $e_1, \ldots, e_n \in H$, avem

$$E\left[F\left\langle G^i, e_1 \otimes \ldots \otimes e_i\right\rangle_{L^2(T^i)}\right]$$

$$= \lim_n E\left[F\left\langle D^i F_n , e_1 \otimes \ldots \otimes e_i\right\rangle_{L^2(T^i)}\right]$$

$$= \lim_n E\left[-\langle DF, e_i\rangle \left\langle D^{i-1} F_n , e_1 \otimes \ldots \otimes e_{i-1}\right\rangle_{L^2(T^{i-1})}\right.$$
$$\left. + F\left\langle D^{i-1} F_n , e_1 \otimes \ldots \otimes e_{i-1}\right\rangle_{L^2(T^{i-1})} W(e_i)\right]$$

$$= E\left[-\langle DF, e_i\rangle \left\langle G^{i-1}, e_1 \otimes \ldots \otimes e_{i-1}\right\rangle_{L^2(T^{i-1})}\right.$$
$$\left. + F\left\langle G^{i-1}, e_1 \otimes \ldots \otimes e_{i-1}\right\rangle_{L^2(T^{i-1})} W(e_i)\right] = 0,$$

deci $G^i = 0$.

(c) Clasele $\mathcal{S}_c$ şi $\mathcal{P}$ sunt dense in $\mathbf{D}^{r,p}$ pentru orice $r \ge 1$, $p \in \mathbf{N}^*$.

Reamintim că $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S}_c \subset \mathcal{S}_b \subset \mathcal{S}$. Să considerăm intâi cazul $\mathcal{S}_c$; este suficient să arătăm că $\mathcal{S}_c$ este densă in $\mathcal{S}$ pentru orice normă $\| \cdot \|_{r,p}$. Fie $d = 1$ şi $F \in \mathcal{S}$ de forma $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$, cu $f \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$, $h_1, \ldots, h_n \in H$ şi $c_k(x) \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $k \ge 1$ astfel ca : $0 \le c_k \le 1$,

$$c_k(x) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } |x| \le k \\ 0, \text{ dacă } |x| \ge k+1, \end{cases}$$

iar c_k impreună cu toate derivatele sale sunt mărginite uniform. Definim

$$F_k = c_k f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) .$$

Avem că $F_k \in \mathcal{S}_0$ şi F_k converge către F in $\mathbf{D}^{r,p}$ când $k \to \infty$, pentru orice $r \geq 1$, $p \in \mathbf{N}^*$.

Să arătăm acum că $\mathcal{P}$ este densă in $\mathcal{S}_c$ in raport cu topologia lui $\mathbf{D}^{r,p}$. Fie $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$ o variabilă aleatoare netedă cu $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$; putem presupune că $h_1, \ldots, h_n$ sunt ortonormale. Fie $\hat{f}(y) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{i<y,x>} f(x)dx$ transformata Fourier a lui f. Stim că

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i<y,x>} \hat{f}(y)dy,$$

iar $\hat{f}$ este infinit diferentiabilă pe $\mathbf{R}^n$ şi descreşte rapid (către 0) la infinit. Punem

$$f_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^j} Re \sum_{k=0}^{j} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{(-i<y,x>)^k}{k!} \hat{f}(y)dy.$$

Atunci f_j converge către f in $L^r(\mathbf{R}^n, N(0,1))$, pentru orice $r \geq 1$. Mai mult, derivatele parţiale ale lui f_j converg către derivatele parţiale corespunzătoare ale lui f in $L^r(\mathbf{R}^n, N(0,1))$. De fapt această convergenţă este punctuală şi aplicăm teorema de convergenţă dominată.

Fie F funcţională de mişcarea browniană cu descompunerea ortogonală in haos Wiener

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m) , \tag{2.18}$$

unde f_m sunt funcţii simetrice pe $L^2(\mathcal{T}^m)$. Ne punem problema in ce condiţii asupra lui f_m, variabila aleatoare F se află in domeniul operatorului de derivare şi cum putem calcula derivata lui F folosind dezvoltarea in haos. Are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.2.3 *Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu dezvoltarea in haos (2.18). Atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\, m! \parallel f_m \parallel^2_{L^2(\mathcal{T}^m)} < \infty , \tag{2.19}$$

şi in acest caz avem

$$D_tF = \sum_{m=1}^{\infty} m\, I_{m-1}(f_m(\cdot,t)), \tag{2.20}$$

iar $E\int_T (D_tF)^2\mu(dt)$ *este egală cu suma seriei din (2.19).*

Demonstraţie. Pasul 1: Să presupunem că f_m este funcţie elementară simetrică pe E_m dată de (2.8) şi fie $F = I_m(f_m)$. Vrem să arătăm că

$$D_tF = m\, I_{m-1}(f_m(\cdot,t)) . \tag{2.21}$$

Folosind definiţia lui $I_m(f_m)$ şi simetria lui f_m obţinem

$$\begin{aligned} D_tI_m(f_m) &= \sum_{i_1\dots,i_m=1}^{n} a_{i_1\dots i_m} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{A_{i_k}} W(A_{i_1})\dots W(A_{i_{k-1}}) \\ &\qquad \times W(A_{i_{k+1}})\dots W(A_{i_m}) \\ &= m \sum_{i_1,\dots,i_m} a_{i_1\dots i_m} W(A_{i_1})\dots W(A_{i_{m-1}})\mathbf{1}_{A_{i_m}}(t) \\ &= m\, I_{m-1}(f_m(\cdot,t)) . \end{aligned}$$

Pasul 2: Vom arăta că $H_m \subset \mathbb{D}^{2,1}$ şi că formula (2.21) este adevărată pentru integrale multiple de ordinul m . Variabila aleatoare $F \in H_m$ poate fi aproximată in medie patrata printr-un şir de integrale multiple $G^k = I_m(g^k)$ cu $g^k \in \mathcal{E}_m$. Folosind proprietatea de izometrie a integralelor multiple şi relaţia (2.21) aplicată funcţiilor g^k , obţinem că derivatele DG^k converg in $L^2(T\times\Omega)$. Aceasta implică $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi că (2.21) este satisfăcută.

Pasul 3: Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu dezvoltarea in haos (2.18) şi să presupunem că (2.19) este adevărată. Definim

$$F^k = \sum_{m=0}^{k} I_m(f_m) .$$

Este clar că $F^k \to F$ in $L^2(\Omega)$ iar pasul 2 ne spune că $F^k \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi că $D_tF^k = \sum_{m=1}^{k} mI_{m-1}(f_m(\cdot,t))$. Atunci condiţia (2.19) implică faptul că DF^k converge în $L^2(T \times \Omega)$ către membrul drept din (2.20). Deci $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi (2.20) este satisfăcută.

Pasul 4: Fie $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi G o integrală multiplă de forma $G = I_n(g)$ cu g elementară şi simetrică. Să observăm că formula de integrare prin părţi (2.17) este adevărată pentru F^k şi G. Deci, pentru $h \in H$, avem

$$\lim_{k\to\infty} E\left(< DF^k, h > G\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty} E\left(-F^k < DG, h > + F^k G W(h)\right)$$

$$= E\left(-F < DG, h > + FGW(h)\right) = E\left(< DF, h > G\right)$$

Pentru $k > n$ avem

$$E\left(< DF^k, h > G\right)$$

$$= E\left((n+1) I_n \left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t) h(t) \mu(dt)\right) G\right),$$

Deci proiecţia lui $< DF, h >$ pe $\mathcal{H}_n$ este egală cu

$$(n+1) I_n \left(\int_T f_{n+1}(\cdot, t) h(t) \mu(dt)\right).$$

In fine, dacă $(e_i, i \geq 1)$ este o bază a lui H, obţinem

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\, m! \ \| f_m \|^2_{L^2(T^m)}$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m I_{m-1} \left(\int_T f_m(\cdot, t) e_i(t) \mu(dt)\right)\right)^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} E\left(< DF, e_i >^2\right) = \| DF \|^2_{L^2(T \times \Omega)} . \square$$

Pe scurt, teorema 2.2.3 spune lucrul următor : fie F o integrală multiplă de forma următoare

$$F = I_m(f_m) = \int_T \cdots \int_T f_m(t_1, \ldots, t_m) W(dt_1) \ldots W(dt_m)$$

Atunci F aparţine intotdeauna domeniului operatorului de derivare şi $D_t f$ se obţine suprimând una dintre integralele stocastice, lăsând variabila t liberă şi inmulţind cu factorul m . Să explicităm acest lucru in cazul mişcării browniene d–dimensionale : cum orice variabilă aleatoare din $\mathcal{H}_m$ se exprimă ca integrală multiplă $I_m(f_m)$ cu $f_m \in L^2\left([0,T]^m ; \mathbf{R}^{dm}\right) = H^{\otimes m}$ i.e. $f_m((t_1, j_1) \ldots, (t_m, j_m))$ este simetrică in $(t_1, j_1), \ldots, (t_m, j_m)$, obţinem

$$D_t^j (I_m(f_m)) = m I_{m-1} (f_m ((\cdot, \cdot), (t, j))) ,$$

cu $I_0(f_1(t,j)) = f_1(t,j)$, iar spaţiul $\mathbf{D}^{2,1}$ coincide cu mulţimea variabilelor aleatoare $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ care satisfac

$$E\left(\| DF \|_{HS}^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left(| I_n(f_n)|^2\right) < \infty .$$

Operatorul de derivare D este liniar, inchis, cu domeniul $\mathbf{D}^{2,1}$ şi ia valori in $L^2\left([0,T] \times \Omega ; \mathbf{R}^d\right)$.

Aplicaţie Dacă $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ astfel incât $DF = 0$, atunci din teorema.2 2.3 rezultă că $F = E(F)$.

Fie $h \in H$ fixat. Definim operatorul D^h pe mulţimea $\mathcal{S}$ prin

$$D^h F = < DF, h > . \tag{2.22}$$

Din lema 2.2.1 rezultă că acest operator este inchizabil de la $L^r(\Omega)$ la $L^r(\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$ şi are un domeniu dens in $L^2(\Omega)$. În cazul mişcării browniene d–dimensionale, pentru $F \in \mathcal{S}$ şi $h \in H$, operatorul D^h are forma

$$D^h F = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d} \int_0^T n I_{n-1} (f_n ((\cdot, \cdot), (t, j))) h^j(t) dt$$

(dacă seria converge in $L^2(\Omega)$). Domeniul $\mathbf{D}^h$ al operatorului D^h este spaţiul Hilbert obţinut prin inchiderea lui $\mathcal{S}$ in raport cu norma $\left(\| F \|_2^2 + \left\| D^h F \right\|_2^2\right)^{1/2}$ şi observăm că $\mathbf{D}^{2,1} \subset \mathbf{D}^h$; [illegible] dacă $F \in \mathbf{D}^h$ pentru orice $h \in H$ şi dacă aplicaţia liniară $h \to D^h F$ definește o variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu valori in H, atunci $F \in \mathbb{D}^{2,\cdot}$ şi

$$D^h F = < DF, h > .$$

Putem interpreta operatorul D^h ca derivata după direcţia elementului $\int_0^{\cdot} h(s)ds$, care este absolut continuu şi de pătrat integrabil : dacă

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[F\left(\omega + \epsilon \int_0^{\cdot} h(s)ds\right) - F(\omega)\right]$$

există in $L^2(\Omega)$ (pentru F netedă), atunci $F \in \mathbb{D}^h$ şi limita de mai sus coincide cu $D^h F$. Într–adevăr, (in cazul $d = 1$), avem

$$< DF, h > = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) < \mathbf{1}_{[0,t_i]}, h >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (W_{t_1}, \ldots, W_{t_n}) \int_0^{t_i} h(s)ds$$

$$= \frac{d}{d\epsilon} F\left(\omega + \epsilon \int_0^{\cdot} h(s)ds\right) \Big|_{\epsilon=0} .$$

Pe de altă parte, dacă F este diferenţiabilă Fréchet şi notăm prin λ^F măsura (cu semn) asociată derivatei Fréchet a lui F , atunci $D_t F = \lambda^F((t, 1])$. Mai precis, pentru orice $h \in H$, avem

$$\int_0^1 D_t F h(t)dt = < DF, h >$$

$$= \int_0^1 \lambda^F(dt)\left(\int_0^t h(s)ds\right)dt = \int_0^1 \lambda^F((t, 1])\, h(t)dt .$$

Remarcă Dacă H ar fi finit dimensional (i.e. T ar fi finită) atunci spaţiile $\mathbb{D}^{r,p}$ se identifică cu spaţiile Sobolev uzuale $\mathbb{W}^{r,p}$ de funcţii pe $\mathbb{R}^n$ care au, impreună cu primele lor p derivate parţiale, momente finite de ordinul r in raport cu legea normală standard. Mai precis, fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază in H , $\mathcal{F}_n$ σ–algebra generată de $\{W(e_1), \ldots, W(e_n)\}$ şi F o variabilă aleatoare $\mathcal{F}_n$–măsurabilă. Atunci $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ dacă şi numai dacă există f în spaţiul Sobolev $\mathbf{W}^{2,1}(\mathbf{R}^n, N(0, I_n))$ astfel încât $F = f(W(e_1), \ldots, W(e_n))$. În plus

$$DF = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (W(e_1), \ldots, W(e_n))\, e_i .$$

Următorul rezultat reprezintă *regula lanţului* pentru spaţiile $\mathbf{D}^{r,1}$ şi poate fi demonstrat aproximând pe F cu variabile aleatoare netede.

PROPOZIŢIA 2.2.4 *Fie $r \geq 1$ fixat, $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ diferenţiabilă, cu derivatele parţiale mărginite şi vectorul aleator $F = (F^1, \ldots, F^m)$ cu componentele în $\mathbf{D}^{r,1}$. Atunci $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{r,1}$ şi*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} (F)\, DF^i .$$

În continuare vom determina derivata valorii medii condiţionate de σ-algebra generată de integralele stocastice gausiene. Fie $A \in \mathcal{B}$. Notăm prin $\mathcal{F}_A$ σ-algebra generată de familia $\{W(B), B \subset A, B \in \mathcal{B}\}$ şi completată în raport cu P.

LEMA 2.2.5 *Fie F variabilă aleatoare de pătrat integrabil cu descompunerea în haos (2.18) şi $A \in \mathcal{B}$. Atunci*

$$E[F \mid \mathcal{F}_A] = \sum_{m=0}^{\infty} I_m \left(f_m \mathbf{1}_A^{\otimes m} \right).$$

Demonstraţie. Este suficient să presupunem $F = I_m(f_m)$, cu $f_m \in \mathcal{E}_m$. Din liniaritate, f_m pot fi presupuse de forma $\mathbf{1}_{B_1 \times \ldots \times B_m}$ cu $B_1, \ldots, B_m$ mutual disjuncte şi de măsură finită. În acest caz avem

$$E[F \mid \mathcal{F}_A] = E[W(B_1) \ldots W(B_m) \mid \mathcal{F}_A]$$

$$E[W(B_1 \cap A) + W(B_1 \cap A^c)$$

$$\ldots (W(B_m \cap A) + W(B_m \cap A^c)) \mid \mathcal{F}_A]$$

$$= I_m \left(\mathbf{1}_{(B_1 \cap A) \times \ldots \times (B_m \cap A)} \right). \square$$

De aici obţinem

PROPOZIŢIA 2.2.6 *Fie* $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ *şi* $A \in \mathcal{B}$. *Atunci* $E[F \mid \mathcal{F}_A] \in \mathbb{D}^{2,1}$ *şi*

$$D_t(E[F \mid \mathcal{F}_A]) = E[D_t F \mid \mathcal{F}_A]\, \mathbf{1}_A(t) \ \ a.p.t. \text{ in } \mathcal{T} \times \Omega .$$

Demonstraţie. Conform cu lema 2.2.5 şi propoziţia 2.2.3 avem

$$D_t(E[F \mid \mathcal{F}_A]) = \sum_{m=1}^{\infty} m\, I_{m-1}\left(f_m(\cdot, t)\, \mathbf{1}_A^{\otimes(m-1)}\right) \mathbf{1}_A(t)$$

$$= E[D_t F \mid \mathcal{F}_A]\, \mathbf{1}_A(t) . \square$$

COROLAR 2.2.7 *Dacă* $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ *este* $\mathcal{F}_A$*–măsurabilă, atunci* $D_t F = 0$ *a.p.t. pe* $A^c \times \Omega$.

În cazul mişcării browniene d–dimensionale, σ–algebra utilizată in rezultatele 2.2.5-2.2.7 se defineşte astfel. Fie $A \subset [0, T]$ boreliană şi $\mathcal{F}_A$ σ–algebra generată de vectorii aleatori

$$W(G) = \int_0^T \mathbf{1}_G dW , \ G \subset A , \ G \text{ boreliană} ;$$

In plus faţă de rezultatele demonstrate, se poate arăta că, dacă F este de pătrat integrabil şi $\mathcal{F}_A$ – măsurabilă şi funcţia h din $L^2\left([0, T] ; \mathbb{R}^d\right)$ se anulează pe A, atunci $F \in \mathbb{D}^h$ şi $D^h F = 0$.

Exerciţii 1. Fie $f_m \in L^2([0, 1]^m)$. Atunci

$$D_t F = m! \sum_{i=1}^{m} \int_{\{t_1 < \ldots < t_{i-1} < t < t_i < \ldots < t_m\}} f_m(t_1, \ldots, t_{i-1}, t, \ldots, t_m)$$

$$\times dW_{t_1} \ldots dW_{t_m} .$$

2. Dacă $F \in \mathbb{D}^{2,p}$ şi $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$, atunci

$$D^p_{t_1, \ldots, t_p} F$$

$$= \sum_{m=p}^{\infty} m(m-1) \ldots (m-p+1)\, I_{m-p}(f_m(\cdot, t_1, \ldots, t_p)).$$

3. Dacă $F = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m) \in \mathbb{D}^{2,p}$ **pentru orice** $p \geq 1$ **, atunci** $f_m = \frac{1}{m!} E(D^m F)$ **pentru orice** $m \geq 1$ **.**

4. Fie $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2}\int_T h^2(s)ds\right)$, $h \in L^2(T)$. Calculaţi derivatele iterate ale lui F şi identificaţi coeficienţii f_m din dezvoltarea ei in haos.

5. Arătaţi că, dacă $A \in \mathcal{F}$, atunci $1_A \in \mathbb{D}^{2,1}$ dacă şi numai dacă $P(A) = 0$ sau 1.

Indicaţie. Avem $D1_A = D(1_A)^2 = 2\, 1_A D1_A$, deci $D1_A = 0$ deoarece derivata este 0 pe A^c şi este egală cu de 2 ori valoarea ei pe A . Obţinem $1_A = P(A)$. Observaţi că am aplicat regula lanţului funcţiei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, egală cu x^2 pe $[0,1]$.

6. Folosind propozitia 2.2.4 aratati ca, daca F_1 , $F_2 \in \mathbb{D}^{2,1}$ astfel ca F_1 şi $\|DF_1\|$ sunt mărginite, atunci $F_1F_2 \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi $D(F_1F_2) = F_1DF_2 + F_2DF_1$.

2.3 INTEGRALA SKOROHOD

Am văzut că operatorul de derivare D este inchis şi nemărginit, definit pe subspaţiul $\mathbb{D}^{2,1}$ dens in $L^2(\Omega)$ şi cu valori in $L^2(T \times \Omega)$.

Notăm prin δ adjunctul operatorului D . Acesta este un operator nemărginit pe $L^2(T \times \Omega)$, cu valori in $L^2(\Omega)$ şi cu proprietăţile următoare :

(a) Domeniul operatorului δ , notat *Dom* δ , este dat de mulţimea proceselor $u \in L^2(T \times \Omega)$ care satisfac

$$\left|E\left(\int_T D_tFu(t)\mu(dt)\right)\right| \leq c \parallel F \parallel_2 , \tag{2.23}$$

pentru orice $F \in \mathbb{D}^{2,1}$, iar constanta c depinde de u .

(b) Dacă $u \in$ *Dom* δ , atunci elementul $\delta(u) \in L^2(\Omega)$ este caracterizat prin

$$E(F\delta(u)) = E\left(\int_T D_tFu(t)\mu(dt)\right), \tag{2.24}$$

pentru $F \in \mathbb{D}^{2,1}$.

Operatorul (inchis) δ se va numi **integrala Skorohod** a procesului u . El transformă procese de pătrat integrabil in variabile aleatoare. Vom folosi şi notaţia următoare

$$\delta(u) = \int_T u(t)dW_t .$$

Să vedem cum se calculează explicit acest operator când cunoaştem descompunerea in haos a procesului u , in forma următoare.

LEMA 2.3.1 *Fie $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$. Atunci există o familie de funcţii deterministe $f_m(t_1, \ldots, t_m, t)$, $m \geq 0$, măsurabile, de pătrat integrabil şi simetrice in primele m variabile, astfel incât*

$$u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m\left(f_m(\cdot, t)\right), \tag{2.25}$$

cu seria de mai sus convergentă in $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ şi

$$E\Big(\int_{\mathcal{T}} u^2(t)\mu(dt)\Big) = \sum_{m=0}^{\infty} m! \ \| f_m\|^2_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} .$$

Demonstraţie. Pentru aproape toţi t avem $E\left(u^2(t)\right) < \infty$, deci variabila aleatoare $u(t)$ se dezvoltă ca sumă de integrale stocastice multiple, iar funcţiile f_m sunt simetrice şi depind de parametrul t ; trebuie arătat că aceste funcţii pot fi alese măsurabile in raport cu toate variabilele. Aproximăm procesul u in $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu un şir de forma $u^n(t) = \sum_k F_{k,n}\, g_{k,n}(t)$, cu $g_{k,n} \in L^2(\mathcal{T})$ şi $F_{k,n} \in L^2(\Omega)$. Aceste procese au forma $u^n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m\left(f_m^n(\cdot, t)\right)$, iar funcţiile f_m^n au proprietăţile dorite. In fine observăm că, pentru orice m , şirul $\{f_m^n , n \geq 1\}$ converge in $L^2\left(\mathcal{T}^{m+1}\right)$ şi definim f_m ca limita acestui şir.□

PROPOZIŢIA 2.3.2 *Fie $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu dezvoltarea (2.25). Atunci $u \in Dom\ \delta$ dacă şi numai dacă seria*

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1}\Big(\tilde{f}_m\Big) \tag{2.26}$$

converge in $L^2(\Omega)$.

De aici rezultă că $Dom\ \delta$ coincide cu clasa proceselor $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ care satisfac

$$E\left(\delta^2(u)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)! \ \| \tilde{f}_m\|^2_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} < \infty . \tag{2.27}$$

Remarcă Funcţiile f_m din formula (2.25) nu sunt simetrice decât in primele m variabile ; de aceea trebuie făcută regularizarea lor simetrică i.e.

$$\tilde{f}_m\left(t_1, \ldots, t_m, t\right) = \frac{1}{m+1}\left[f_m\left(t_1, \ldots, t_m, t\right)\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m} f_m\left(t_1,\ldots,t_{i-1},t,t_{i+1},\ldots,t_m,t_i\right)\Big] .$$

Deoarece $I_{m+1}(f_m) = I_{m+1}(\widetilde{f}_m)$ pentru orice m, expresia (2.26) poate fi scrisă fără regularizare simetrică, dar regularizarea simetrică este necesară pentru a calcula norma L^2 a integralelor stocastice (cf. formulei (2.27)). In cazul mişcării browniene d–dimensionale, dacă $u \in L^2\left([0,T]\times\Omega\,;\,\mathbb{R}^d\right)$ este proces stocastic d–dimensional de pătrat integrabil, atunci funcţiile din descompunerea (2.26) sunt de forma $f_m(s_1,\ldots,s_m,t)^{j_1,\ldots,j_m,j} \in L^2\left([0,T]^{m+1}\,;\mathbb{R}^{d(m+1)}\right)$ simetrice in $(s_1,j_1),\ldots,(s_m,j_m)$ pentru orice (t,j) fixat, iar regularizările lor simetrice in cele $m+1$ variabile sunt date de

$$\begin{aligned}
&\widetilde{f}_m\left((s_1,j_1)\ldots,(s_m,j_m),(t,j)\right)\\
&=\frac{1}{m+1}\Big[f_m\left((s_1,j_1)\ldots,(s_m,j_m),(t,j)\right)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m} f_m\left((s_1,j_1),\ldots,(s_{i-1},j_{i-1}),(t,j),\right.\\
&\quad\left.(s_{i+1},j_{i+1}),\ldots,(s_m,j_m),(s_i,j_i)\right)\Big] .
\end{aligned}$$

Cu aceste notaţii, integrala Skorohod a lui u este

$$\delta(u) = \sum_{m=0}^{\infty}\ \sum_{j_1,\ldots,j_m,j=1}^{d} \int_{[0,T]^{m+1}} \widetilde{f}_m\left((s_1,j_1),\ldots,(s_m,j_m),(t,j)\right) \times dW_{s_1}^{j_1}\ldots dW_{s_m}^{j_m} dW_t^{j}$$

(când seria converge in $L^2(\Omega)$. Observaţi că se integrează un proces d–dimensional in raport cu un proces Wiener d–dimensional, iar rezultatul este o variabilă aleatoare reală notată

$$\delta(u) = \int_0^T u(s)dW_s := \sum_{i=1}^{d}\int_0^T u^i(s)dW_s^i .$$

Demonstraţia propoziţiei 2.3.2 Dacă $G = I_n(g)$ este o integrală stocastică multiplă de ordin n cu g simetrică, atunci

$$E\left(\int_T u(t)D_tG\mu(dt)\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_T E(I_m(f_m(\cdot,t))\, n\, I_{n-1}(g(\cdot,t)))\mu(dt)$$

$$= \int_T E(I_{n-1}(f_{n-1}(\cdot,t))\, n\, I_{n-1}(g(\cdot,t)))\mu(dt)$$

$$= n(n-1)! \int_T < f_{n-1}(\cdot,t), g(\cdot,t)>_{L^2(T^{n-1})}\mu(dt)$$

$$= n! < f_{n-1}, g>_{L^2(T^n)} = n! < \widetilde{f}_{n-1}, g>_{L^2(T^n)}$$

$$= E\Big(I_n\big(\widetilde{f}_{n-1}\big) I_n(g)\Big) = E\Big(I_n\big(\widetilde{f}_{n-1}\big) G\Big).$$

Fie acum $u \in Dom\ \delta$. Din formula (2.25) şi din calculele de mai sus obţinem că $E(\delta(u)G) = E\Big(I_n\big(\widetilde{f}_{n-1}\big)G\Big)$. Rezultă că $I_n\big(\widetilde{f}_{n-1}\big)$ coincide cu proiecţia lui $\delta(u)$ pe al n–lea haos, deci seria din (2.26) converge in $L^2(\Omega)$ şi are suma $\delta(u)$. Reciproc, să presupunem că această serie converge şi fie V suma ei. Avem

$$E\left(\int_T u(t) D_t\left(\sum_{n=0}^{k} I_n(g_n)\right)\mu(dt)\right) = E\left(V \sum_{n=0}^{k} I_n(g_n)\right)$$

pentru $k \geq 1$, deci

$$\left|E\left(\int_T u(t) D_t F \mu(dt)\right)\right| \leq \| V\|_2 \, \| F\|_2 ,$$

pentru orice variabilă aleatoare F cu dezvoltare in haos finită. Printr–un argument de densitate, această relaţie este adevărată pentru orice $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ şi (cf. definiţiei), obţinem că $u \in Dom\ \delta$.□

Exerciţii 1. Arătaţi că $Dom\ \delta$ coincide cu acoperirea liniară inchisă a proceselor de forma $u = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{1}_{A_i}$, cu A_i boreliană in $[0,1]$, $F_i \in L^2\big(\Omega, \mathcal{F}_{A_i^c}, P\big)$, in raport cu norma $\| u \|_{L^2(T\times\Omega)} + \| \delta(u)\|_{L^2(\Omega)}$.

2. Dacă $F \in \mathbb{D}^{2,1}$ cu $E(|F|^{-2}) < \infty$, atunci $P(F > 0) = 0$ sau 1.

Indicaţie Folosind formula (2.24) si propozitia 2.2.4, estimaţi $E(\varphi_\epsilon(F)\delta(u))$, unde φ_ϵ este o aproximare a funcţiei sign, iar $u \in Dom\ \delta$ este un proces mărginit.

Să vedem in continuare proprietăţile integralei Skorohod.

(a) **Operatorul δ este liniar pe *Dom* δ şi are media 0 i.e. $E(\delta(u)) = 0$ pentru $u \in$ *Dom* δ .**

(b) ***Integrarea proceselor elementare netede***

Să notăm prin S_H clasa proceselor elementare netede i.e. de forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j\, h_j(t)$$

unde F_j sunt variabile aleatoare netede iar $h_j \in H := L^2(\mathcal{T})$. Din formula de integrare prin părţi din corolarul 2.16 deducem că procesele elementare netede sunt integrabile Shorohod şi

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathcal{T}} D_t F_j h_j(t) \mu(dt) . \qquad (2.28)$$

Să observăm că, dacă h_j sunt de forma $\mathbf{1}_{A_j}$, cu $A_j \in \mathcal{B}_0$ şi dacă F_j sunt $\mathcal{F}_{A_j^c}$ –măsurabile, atunci conform corolarului 2.2.7 rezultă că a doua sumă din (2.28) este 0.

Notăm prin $\mathbb{L}^{2,1}$ clasa proceselor $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$, cu $u(t) \in \mathbb{D}^{2,1}$ pentru aproape toţi t, iar procesul (cu doi indici) $D_s u(t)$ admite o versiune măsurabilă care satisface

$$E\left(\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} |D_s u(t)|^2\, \mu(ds)\mu(dt)\right) < \infty .$$

Dacă procesul u admite descompunerea (2.25), faptul că $u \in \mathbb{L}^{2,1}$ este echivalent cu convergenţa seriei

$$\int_{\mathcal{T}}\int_{\mathcal{T}} E\left(\left|\sum_{m=1}^{\infty} m\, I_{m-1}\left(f_m(\cdot, s, t)\right)\right|^2\right) \mu(ds)\mu(dt)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (m-1)!\ \| f_m \|^2_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} .$$

Observăm că $\mathbb{L}^{2,1}$ este spaţiu Hilbert in raport cu norma

$$\| u \|^2_{2,1} = \| u \|^2_{L^2(\mathcal{T}\times\Omega)} + \| Du \|^2_{L^2(\mathcal{T}^2\times\Omega)}$$

şi este izomorf cu $L^2(T\ ;\ \mathbf{D}^{2,1})$. Din relaţia (2.27) şi din inegalitatea

$$\| \tilde{f}_m \|_{L^2(T^{m+1})} \leq \| f_m \|_{L^2(T^{m+1})}$$

rezultă că $\mathbf{L}^{2,1} \subset Dom\ \delta$. În cazul mişcării browniene d-dimensionale, norma pe spaţiul $\mathbf{L}^{2,1}$ are forma

$$\| u \|_{2,1} = \left(E \int_0^T \ | u(s) |^2 ds \right)^{1/2}$$

$$+ \left(E \int_0^T \int_0^T \| D_s u(t) \|^2 ds dt \right)^{1/2} ,$$

unde $\| D_s u(t) \|$ inseamnă norma matricei $(D_s^i u^j(t))$.

(c) *Relaţia de comutare intre derivată şi integrala Skorohod*

Fie $u \in \mathbf{L}^{2,1}$; presupunem că procesul $\{D_t u(\cdot)\}$ este integrabil Skorohod şi există o versiune in $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ a procesului $\{\int_{\mathcal{T}} D.u(s)dW_s\}$. Atunci $\delta(u) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi

$$D_t (\delta(u)) = u(t) + \int_{\mathcal{T}} D_t u(s) dW_s \tag{2.29}$$

Intr-adevăr, fie $u(t) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m (f_m(\cdot, t))$ ca in lema 2.3.1. Atunci

$$D_t (\delta(u)) = D_t \left(\sum_{m=0}^{\infty} I_{m+1} \left(\tilde{f}_m \right) \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) I_m \left(\tilde{f}_m(\cdot, t) \right) = \sum_{m=0}^{\infty} I_m (f_m(\cdot, t))$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} I_m \left(\sum_{i=1}^{m} f_m \left(t_1, \ldots, \hat{t}_i, \ldots, t_m, t, t_i \right) \right) \tag{2.30}$$

$$= u(t) + \sum_{m=0}^{\infty} m\, I_m (f_m^s(\cdot, t, \cdot))$$

unde $f_m^s(\cdot, t, \cdot)$ inseamnă regularizarea simetrică a funcţiei

$$(t_1, \ldots, t_m) \to f_m (t_1, \ldots, t_{m-1}, t, t_m)$$

Pe de altă parte avem

$$\int_T D_t u(s) dW_s = \int_T \left(\sum_{m=1}^{\infty} m\, I_{m-1}\left(f_m(\cdot, t, s)\right)\right) dW_s ,$$

care coincide cu al doilea sumand in (2.30), conform cu (2.26)

Formula (2.29) este o relaţie de comutare de tip Heisenberg, care poate fi scrisă " $[D, \delta]u = u$ " .

(d) *Covariaţia integralelor Skorohod*

Fie $u, v \in \mathbf{L}^{2,1}$. Atunci

$$E\left(\delta(u)\delta(v)\right) = \int_T E\left(u(t)v(t)\right)\mu(dt) \tag{2.31}$$

$$+ \int_T\int_T E(D_s u(t) D_t v(s))\mu(ds)\mu(dt) .$$

(formula (2.31) poate să nu aibă sens pentru procese in $Dom\ \delta$).

Intr-adevăr, putem presupune că u admite o dezvoltare in haos finită ; atunci $\delta(u) \in \mathbf{D}^{2,1}$ (din proprietatea (c)), iar din (2.24) şi (2.29) obţinem

$$E\left(\delta(u)\delta(v)\right) = E\left(\int_T v(t) D_t\left(\delta(u)\right)\mu(dt)\right)$$

$$= E\left(\int_T v(t)\left(u(t) + \int_T D_t u(s) dW_s\right)\mu(dt)\right)$$

si aplicăm din nou (2.24).

(e) *Integrala Skorohod a produsului dintre un proces şi o variabilă aleatoare*

Fie u proces integrabil Skorohod şi $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ astfel ca

$$E\left(F^2 \int_T u^2(t)\mu(dt)\right) < \infty .$$

Atunci avem

$$\int_T F u(t) dW_t = F\int_T u(t) dW_t - \int_T u(t)(D_t F)\mu(dt) , \tag{2.32}$$

in sensul că $Fu(t)$ este integrabil Skorohod dacă şi numai dacă membrul drept din (2.32) este in $L^2(\Omega)$.

Intr–adevăr, fie $G = g(W(h_1), \ldots, W(h_n))$ o funcţională netedă in care g are suport compact. Din regula lanţului pentru operatorul de derivare (propoziţia 2.18) şi formula (2.24) obţinem

$$E\Big(\int_{\mathcal{T}} (D_tG)Fu(t)\mu(dt)\Big)$$
$$= \int_{\mathcal{T}} E\left(u(t)(D_t(FG) - GD_tF)\right)\mu(dt)$$
$$= E\left(G\left(F\delta(u) - \int_{\mathcal{T}} u(t)D_tF\,\mu(dt)\right)\right)$$

(f) *Procese stocastice care sunt gradienţi*

PROPOZIŢIA 2.3.3 *Fie $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$. Atunci există $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ cu $DF = u$ dacă şi numai dacă funcţiile f_m din descompunerea (2.25) sunt simetrice in raport cu toate variabilele.*

Demonstraţie. Pentru suficienţă, definim

$$F = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} I_{m+1}(f_m)\,;$$

seria converge in $L^2(\Omega)$ (chiar in $\mathbf{D}^{2,1}$) deoarece

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+1)(m+1)!}{(m+1)^2} \parallel f_m \parallel^2_{L^2(\mathcal{T}^{m+1})} = \parallel u \parallel^2_{L^2(\mathcal{T}\times\Omega)} < \infty$$

şi $DF = u$.□

PROPOZIŢIA 2.3.4 *Orice proces $u \in L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ admite o descompunere ortogonală unică $u = DF + u^0$, cu $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi $E(< DG,\, u^0 >) = 0$ pentru orice $G \in \mathbf{D}^{2,1}$. In plus, u^0 este integrabil Skorohod şi $\delta(u^0) = 0$.*

Demonstraţie. Din propoziţia 2.3.3 rezultă că elementele de forma DF cu $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ formează un subspaţiu inchis in $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$, deci orice proces u admite o unică descompunere ca in enunţ cu $u^0 \perp DG$ pentru orice $G \in \mathbf{D}^{2,1}$.□

Rezultatul următor ne arată cum putem construi procese din *Dom* δ care să nu fie in $\mathbf{L}^{2,1}$.

LEMA 2.3.5 *Fie $A \in \mathcal{B}_0$. Dacă F este variabilă aleatoare $\mathcal{F}_{A^c}$–măsurabilă şi de pătrat integrabil, atunci procesul $F\mathbf{1}_A$ este integrabil Skorohod şi*

$$\delta(F\mathbf{1}_A) = FW(A) .$$

Demonstraţie. Dacă $F \in \mathbb{D}^{2,1}$, din formula (2.32) şi corolarul 2.21 rezultă

$$\delta(F\mathbf{1}_A) = FW(A) - \int_{\mathcal{T}} D_t F\mathbf{1}_A(t)\mu(dt) = FW(A) .$$

Cazul general se obţine prin trecere la limită şi din faptul că δ este inchis.□

Aplicaţii la integrala Itô Pentru $t \geq 0$ vom nota prin $\mathcal{F}_t$ σ–algebra generată de $\{W_s , 0 \leq s \leq t\}$ şi de mulţimile de probabilitate nulă din $\mathcal{F}$, unde $W = \{W_t , t \geq 0\}$ este o mişcare browniană reală. Pentru un interval de timp $\mathcal{T}$ care poate fi $[0,T]$ sau $\mathbb{R}_+$, notăm prin $L^2(\mathcal{T} \times \Omega) = L^2(\mathcal{T} \times \Omega, \mathcal{B}(\mathcal{T}) \otimes \mathcal{F}, \lambda \times P)$ mulţimea proceselor de pătrat integrabil şi prin $L^2_a(\mathcal{T} \times \Omega)$ subspaţiul proceselor adaptate.

Sa observam ca, dacă ambele procese din formula (2.31) de calcul a covariatiei integralelor Skorohod sunt adaptate in raport cu filtrarea generată de mişcarea browniană reală, din corolarul 2.2.7 rezultă că $D_s u(t) = 0$ pentru aproape toţi s,t cu $s > t$,deoarece $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t)}$. Deci al doilea termen in formula (2.31) se anulează şi astfel regăsim proprietatea de izometrie a integralei Itô.

Folosind lema 2.3.5 putem să arătăm că operatorul δ este o extensie a integralei Itô. Intuitiv, aceasta se bazează pe faptul că, dacă $u \in L^2_a$, atunci regularizările $\widetilde{f}_m$ din formula (2.26) pot fi alese cu proprietatea : $\widetilde{f}_m(t_1, \ldots, t_m, t) = 0$ pentru $t \geq t_1 \vee \ldots \vee t_m$.

PROPOZIŢIA 2.3.6 *Avem $L^2_a \subset$ Dom δ şi operatorul δ restricţionat la L^2_a coincide cu integrala Itô i.e.*

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 u^i(t)dW^i_t .$$

Demonstraţie. Dacă u este proces elementar adaptat de forma

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} F_j \, \mathbf{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(t) \,,$$

cu $F_j \in L^2\left(\Omega,\ \mathcal{F}_{t_j},\ P\ ;\ \mathbf{R}^d\right)$ şi $0 \leq t_1 < \ldots < t_{n+1} \leq 1$ (reamintim că in acest caz $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{[0,t]}$), din lema 2.3.5 obţinem că $u \in Dom\ \delta$ şi

$$\delta(u) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{n} F_j^i \left(W_{t^i_{j+1}} - W_{t^i_j} \right) . \tag{2.33}$$

Cum orice proces $u \in L_a^2$ poate fi aproximat in sensul normei din $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$ cu un şir de procese elementare adaptate u^n , din formula (2.33) rezultă că $\delta(u^n)$ coincide cu integrala Itô a lui u^n şi converge in $L^2(\Omega)$ către integrala Itô a lui u . Cum δ este operator inchis, deducem că $u \in Dom\ \delta$ şi că $\delta(u)$ coincide cu integrala Itô a lui u .□

Am văzut la afirmatia 1.4.11 că orice variabilă aleatoare F de pătrat integrabil, măsurabilă in raport cu W poate fi scrisă astfel

$$F = E(F) + \int_0^1 u(t) dW_t \,,$$

unde $u \in L_a^2$. Vom vedea in continuare că, dacă F este slab diferenţiabilă, atunci procesul u se poate determina explicit.

PROPOZIŢIA 2.3.7 *Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi W o mişcare browniană reală. Atunci*

$$F = E(F) + \int_0^1 E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] dW_t \,.$$

Demonstraţie. Dacă $F = \sum_{m=0}^{\infty} I_m(f_m)$, din formula 2.20 şi lema 2.2.5 obţinem

$$E[D_t F \mid \mathcal{F}_t] = \sum_{m=1}^{\infty} m E\ \left[I_{m-1} \left(f_m \left(t, \cdot \right) \right) \mid \mathcal{F}_t \right]$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m I_{m-1} \left(f_m \left(t_1, \ldots, t_{m-1}, t \right) \mathbf{1}_{\{t_1 \vee \ldots \vee t_{m-1} \leq t\}} \right)$$

Punem $u(t) = E[D_t F \mid \mathcal{F}_t]$. Calculăm $\delta(u)$ folosind expresia precedentă pentru u şi formula (2.26) ; obţinem

$$\delta(u) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m(f_m) = F - E(F) ,$$

care dă rezultatul căutat, deoarece $\delta(u)$ coincide cu integrala stocastică Itô a lui u .□

Următorul rezultat arată că integrala Itô este diferenţiabilă dacă şi numai dacă integrandul este diferenţiabil. Mai precis, avem

PROPOZIŢIA 2.3.8 *Fie $W = \{W_t \, , \, t \in [0,1]\}$ o mişcare browniană reală, $u = \{u(t), \, t \in [0,1]\}$ un proces adaptat de pătrat integrabil şi notăm $X(t) = \int_0^t u(s)dW_s$. Atunci $u \in \mathbf{L}^{2,1}$ dacă şi numai dacă $X(1) \in \mathbf{D}^{2,1}$. In acest caz procesul $X \in \mathbf{L}^{2,1}$ şi*

$$\int_0^t E\Big(|D_s X(t)|^2\Big) ds$$
$$= \int_0^t E\left(u^2(s)\right) ds + \int_0^t \int_0^s E\Big(|D_r u(s)|^2\Big) dr \, ds \qquad (2.34)$$

pentru orice $t \in [0,1]$.

Demonstraţie. Fie $u \in \mathbf{L}^{2,1}$. Deoarece este adaptat şi de pătrat integrabil, procesul $\{D_t u(s), \, s \in [t,1]\}$ este integrabil Skorohod. In plus, datorită proprietăţii de izometrie a integralei Itô, avem

$$E\left(\int_0^1 \left|\int_t^1 D_t u(s) dW_s\right|^2 dt\right) = \int_0^1 \int_t^1 E\Big(|D_t u(s)|^2\Big) ds \, dt < \infty .$$

Obţinem deci că $X(t) \in \mathbf{D}^{2,1}$ pentru orice t şi

$$D_s X(t) = u(s) \mathbf{1}_{\{s \le t\}} + \int_s^t D_s u(r) dW_r .$$

Luăm media pătratului expresiei precedente şi obţinem formula (2.34) şi că $X \in \mathbf{L}^{2,1}$.

Reciproc, dacă $X(1) \in \mathbf{D}^{2,1}$, pentru orice k notăm u^k proiecţia procesului u pe suma primelor k haosuri şi fie $X^k(t) = \int_0^t u^k(s)dW_s$. Atunci X^k este proiecţia lui X pe suma primelor

k haosuri şi deci $X^k(1)$ converge in topologia lui $\mathbf{L}^{2,1}$ către $X(1)$. Rămâne să observăm că

$$\int_0^1 E\left(|\, D_s X^k(1)\,|^2\right) ds = \int_0^1 E\left(|\, u^k(s)\,|^2\right) ds$$

$$+ \int_0^1 \int_0^s E\left(|\, D_r u^k(s)\,|^2\right) drds \geq \int_0^1 \int_0^s E\left(|\, D_r u^k(s)\,|^2\right) drds. \square$$

Să observăm că integrala Skorohod nedefinită a unui proces $u \in \mathbf{L}^{2,1}$ in raport cu o mişcare browniană d–dimensională :

$$\left\{ \int_0^t u(s) dW_s := \delta\left(u \mathbf{1}_{[0,t)}\right) \ , \ 0 \leq t \leq T \right\}$$

este continuă in medie pătrată , deci măsurabilă. Se poate arăta că, pentru integranzi suficienţi de netezi, integrala Skorohod nedefinită admite o versiune continuă şi că variaţia sa pătratică este integrala Lebesgue a pătratului integrandului. Dar, spre deosebire de integrala Itô, nu are nici o proprietate de martingal din lipsă de adaptare. Totodată, are loc o formulă de tip Itô, mai generală decât afirmatiile 1.4.4-1.4.5.

2.4 SEMIGRUPUL ORNSTEIN–UHLENBECK

Vom considera un zgomot alb $\{W(h), h \in H\}$ asociat spaţiului Hilbert $H = L^2(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \mu)$. Vom nota J_n proiecţia ortogonală pe cel de–al n–lea haos i.e. dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ este o variabilă aleatoare de pătrat integrabil, atunci $J_n(F) = I_n(f_n)$.

Semigrupul de contracţii $\{T_t, t \geq 0\}$ definit prin

$$T_t(F) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} J_n(F) \tag{2.35}$$

pentru $F \in L^2(\Omega)$ se numeşte **semigrupul Ornstein– Uhlenbeck.**

O modalitate probabilistă de a introduce acest semigrup este următoarea. Fie $\{W'(h), h \in H\}$ o copie independentă a lui $\{W(h),\ h \in H\}$. Vom presupune că W şi W' sunt definite pe spaţiul produs $(\Omega \times \Omega', \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}', P \times P')$. Pentru $t > 0$, definim procesul $Z = \{Z(h), h \in H\}$ prin

$$Z(h) = e^{-t}W(h) + \left(1 - e^{-2t}\right)^{1/2} W'(h) .$$

Acest proces este gausian, centrat şi cu aceeaşi covariaţie ca şi W . Mai precis,

$$E((Z(h_1)Z(h_2))$$
$$= e^{-2t} < h_1, h_2 > + (1 - e^{-2t}) < h_1, h_2 > = < h_1, h_2 > .$$

Fie $W.W' : \Omega \to \mathbf{R}^H$ aplicaţiile canonice asociate proceselor $W.W'$. Pentru $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, putem scrie $F = \psi_F \circ W$, unde ψ_F este o funcţie măsurabilă de la $\mathbf{R}^H$ la $\mathbf{R}$ şi este determinată $P \circ W^{-1}$–a.p.t. În consecinţă, variabila aleatoare

$$\psi_F(Z) = \psi_F\left(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W'\right)$$

este bine definită $P \times P'$–a.p.t. Pentru $t > 0$, definim

$$T_t(F) = E'\Big(\psi_F\left(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W'\right)\Big) \tag{2.36}$$

unde E' inseamnă media in raport cu P' . Să arătăm că formulele (2.35) şi (2.36) sunt echivalente. Mai intâi, să observăm că in ambele definiţii, operatorii sunt contracţii liniare pe $L^2(\Omega, \mathcal{F}; P)$: in (2.36) avem

$$E(| T_t(F)|^p)$$
$$\leq E\left(E'\left(| \psi_F(e^{-t}W + (1 - e^{-2t})^{1/2} W'|^p\right)\right) = E(| F|^p).$$

Apoi, este suficient să considerăm $F = H_n(W(h))$ cu $\| h \| = 1$. In relaţia

$$E'\left(\exp\left(-\frac{1}{2}s^2 + se^{-t}W(h) + s(1 - e^{-2t})^{1/2}W'(h)\right)\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{s^2}{2}e^{-2t} + se^{-t}W(h)\right),$$

dezvotăm după puterile lui $s \in \mathbf{R}$. In dreapta, coeficientul lui s^n este $e^{-nt}H_n(W(h))$, iar derivata $\frac{d^n}{ds^n}$ membrului stâng calculată in $s = 0$ este egală cu

$$E'\Big(H_n\left(e^{-t}W(h) + (1-e^{-2t})^{1/2}\,W'(h)\right)\Big).$$

Operatorii T_t au următoarele proprietăţi :

(a) sunt pozitivi i.e. $F \geq 0 \Longrightarrow T_t(F) \geq 0$.

(b) sunt simetrici i.e.

$$E(GT_t(F)) = E(FT_t(G)) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt}E(J_n(F)J_n(G)).$$

Pentru $F \in L^2(\Omega)$, definim operatorul L prin

$$LF = \sum_{n=0}^{\infty} -nJ_n(F),$$

dacă seria din dreapta converge in $L^2(\Omega)$ i.e. domeniul $Dom\ L$ al operatorului L este

$$\left\{F \in L^2(\Omega)\,,\ F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) :\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2\, n!\ \| f_n\|^2_{L^2(T^n)} < \infty\right\}.$$

In particular $Dom\ L \subset \mathbf{D}^{2,1}$. Observăm că L este un operator nemărginit şi simetric pe $L^2(\Omega)$ i.e. $E(FLG) = E(GLF)$ pentru $F, G \in Dom\ L$. Următoarea propoziţie spune că L este generatorul infinitezimal al semigrupului Ornstein–Uhlenbeck; in particular, L este autoadjunct, deci inchis.

PROPOZIŢIA 2.4.1 *Operatorul L coincide cu generatorul infinitezimal al semigrupului Ornstein–Uhlenbeck $\{T_t, t \geq 0\}$.*

Demonstraţie. Avem de arătat că $F \in Dom\ L$ dacă şi numai dacă $\lim_{t\searrow 0} \frac{T_t(F)-F}{t}$ există in $L^2(\Omega)$ şi este egală cu LF . Dacă $F \in Dom\ L$, atunci

$$E\left(\left|\frac{T_t(F)-F}{t} - LF\right|^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{e^{-nt}-1}{t} + n\right]^2 E\left(|\,J_n(F)|^2\right)$$

care converge la 0 când $t \searrow 0$. Reciproc, dacă $\lim_{t\searrow 0} \frac{T_t(F)-F}{t} = G$ in $L^2(\Omega)$, atunci

$$J_n(G) = \lim_{t\searrow 0} \frac{T_t(J_n(F)) - J_n(F)}{t} = -nJ_n(F) ,$$

deci $F \in Dom\ L$ şi $LF = G$.□

Legătura intre operatorii D, δ, L este dată in

PROPOZIŢIA 2.4.2 *Fie $F \in L^2(\Omega)$. Afirmaţia $F \in Dom\ L$ este echivalentă cu $F \in Dom\ \delta D$ (i.e. $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi $DF \in Dom\ \delta$). In acest caz avem $\delta DF = -LF$.*

Demonstraţie. Dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi $DF \in Dom\ \delta$, atunci, pentru $G = I_n(g) \in \mathcal{H}_n$, avem

$$E(G\delta DF) = E(< DG, DF >)$$

$$= n^2(n-1)! < g, f_n >_{L^2(T^n)} = n\, E(GJ_n(F)),$$

deci $J_n(\delta DF) = n\ J_n(F)$, ceea ce implică $F \in Dom\ L$ si $\delta DF = -LF$.

Reciproc, dacă $F \in Dom\ L$ atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi pentru orice $G = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(g_n) \in \mathbf{D}^{2,1}$, avem

$$E(< DG, DF >) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\ (n-1)! < g_n, f_n >_{L^2(T^n)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\ E(J_n(G)J_n(F)) = -E(GLF) ,$$

deci $DF \in Dom\ L$ si $\delta DF = -LF$.□

In rezultatul următor vedem că operatorul L acţionează pe variabilele aleatoare netede ca un operator diferenţial de ordinul doi.

PROPOZIŢIA 2.4.3 *Avem $\mathcal{S} \subset Dom\ L$ şi pentru $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$ in $\mathcal{S}$, $f \in C_p^{\infty}(\mathbf{R}^n)$, avem*

$$LF = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\partial_j f(W(h_1), \ldots, W(h_n)) < h_i, h_j >$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(W(h_1), \ldots, W(h_n))\, W(h_i).$$

In plus, S este densă in Dom L in raport cu norma $\| F \|_L = [E(F^2) + E(| LF |^2)]^{1/2}$.

Demonstraţie. Ştim că $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi că

$$D_t F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} (W(h_1), \ldots, W(h_n))\, h_i(t) .$$

In consecinţă $DF \in S_H \subset Dom\ \delta$ şi din formula (2.28) obţinem

$$\delta DF = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f (W(h_1), \ldots W(h_n))\, W(h_i)$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j f (W(h_1), \ldots, W(h_n)) < h_i, h_j > .$$

Rămâne de aplicat propoziţia 2.4.2. Ultima afirmaţie se obţine aproximând F cu o sumă finită de integrale stocastice multiple, in care f_n sunt funcţii elementare.□

Mai general, se poate arăta că, dacă $F = (F^1, \ldots, F^m)$ are componentele in $Dom\ L$ şi $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^m)$ cu derivatele parţiale de ordin 1 şi 2 mărginite, atunci $\varphi(F) \in Dom\ L$ şi

$$L(\varphi(F))$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} (\partial_i \partial_j \varphi)(F) < DF^i, DF^j > + \sum_{i=1}^{m} (\partial_i \varphi)(F) LF^i .$$

Să observăm că $Dom\ L = \mathbf{D}^{2,2}$ şi că normele $\| \cdot \|_L$ şi $\| \cdot \|_{2,2}$ coincid. De fapt, dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, atunci

$$E(F^2) + E(| LF |^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1)\, n! \ \| f_n \|^2_{L^2(T^n)}$$

$$= E(F^2) + E\left(\| DF \|^2_{L^2(T)}\right) + E\left(\| D^2 F \|^2_{L^2(T^2)}\right) .$$

Exerciţii 1. Pentru $0 < \epsilon < 1$ notăm $F_{1-\epsilon} = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \epsilon)^n J_n(F)$ şi $F^\epsilon = \frac{F_{1-\epsilon} - F}{\epsilon}$. Atunci LF există dacă şi numai dacă F^ϵ converge in $L^2(\Omega)$ când $\epsilon \searrow 0$ şi in acest caz avem $LF = \lim_{\epsilon \searrow 0} F^\epsilon$.

2. Fie $F = \exp\left(W(h) - \frac{1}{2} \| h \|^2\right)$, $h \in H$. Arătaţi că $LF = -(W(h) - \| h \|^2) F$.

Am văzut că T_t sunt contracţii pe $L^r(\Omega)$ pentru orice $r \geq 1$. Aceşti operatori verifică o proprietete mai tare, numită de **hipercontractivitate.**

TEOREMA 2.4.4 *Fie* $r > 1$. *Dacă* $F \in L^{s(t)}(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *unde* $s(t) := e^{2t}(r-1)+1$, *atunci*

$$\| T_t(F) \|_{s(t)} \leq \| F \|_r .$$

Demonstraţie. Notăm $s = s(t)$ şi fie s' conjugatul lui s. Din dualitatea spaţiilor $L^s, L^{s'}$, este suficient să arătăm că

$$|E[(T_t(F))G]| \leq \| F \|_r \| G \|_{s'}$$

pentru orice $F \in L^r$ şi $G \in L^{s'}$. Printr–un argument de aproximare, putem presupune că $0 < a \leq F, G \leq b < \infty$, cu $a \leq b$ şi $F = f(W(h_1), \ldots, W(h_n))$, $G = g(W(h_1), \ldots, W(h_n))$, cu $f, g \in C_p^\infty(\mathbf{R}^n)$. Fie $\{W_t^i \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ , \ i = 1,2\}$ mişcări browniene independente şi $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in L^2[0,1]$ astfel ca $< \Phi_i, \Phi_j >_{L^2[0,1]} = < h_i, h_j >$. Atunci vectorii gausieni

$$(W(h_1), \ldots, W(h_n)) \ , \ \left(\int_0^1 \Phi_1 dW^1, \ldots, \int_0^1 \Phi_n dW^1\right)$$

au aceeaşi lege. Intrucât

$$E[(T_t(F))G] = E\left[f\left(e^{-t}\int_0^1 \Phi_1 dW^1\right.\right.$$

$$+(1-e^{-2t})^{1/2}\int_0^1 \Phi_1 dW^2, \ldots, e^{-t}\int_0^1 \Phi_n dW^1$$

$$\left.\left.+(1-e^{-2t})^{1/2}\int_0^1 \Phi_n dW^2\right) \times g\left(\int_0^1 \Phi_1 dW^1, \ldots, \int_0^1 \Phi_n dW^1\right)\right],$$

problema se reduce la a arăta că

$$E[XY] \leq \| X \|_r \| Y \|_{s'} ,$$

cu $0 < a \le X, Y \le b < \infty$, iar X, Y sunt variabile aleatoare măsurabile in raport cu σ–algebrele generate de mişcările browniene $W^3_\alpha = e^{-t}W^1_\alpha + (1 - e^{-2t})^{1/2} W^2_\alpha$ respectiv W^1_α ; cf. afirmaţiei 1.4.11, aceste variabile aleatoare se scriu

$$X^r = E[X^r] + \int_0^1 u(\alpha)dW^3_\alpha \ , \ Y^{s'} = E\left[Y^{s'}\right] + \int_0^1 v(\alpha)dW^1_\alpha \, .$$

Aplicăm formula lui Itô (afirmaţia 1.4.4) martingalelor mărginite

$$M_\alpha = E[X^r] + \int_0^\alpha udW^3 \ , \ N_\alpha = E\left[Y^{s'}\right] + \int_0^\alpha vdW^1$$

şi funcţiei $f(x,y) = x^{1/r}y^{1/s'}$; obţinem

$$XY = \| X \|_r \| Y \|_{s'} + \int_0^1 \left(\frac{1}{r}M_\alpha^{1/r-1}N_\alpha^{1/s'}dM_\alpha\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s'}M_\alpha^{1/r}N_\alpha^{1/s'-1}dN_\alpha\right) + \frac{1}{2}\int_0^1 M_\alpha^{1/r}N_\alpha^{1/s'}A_\alpha d\alpha \, ,$$

unde

$$A_\alpha = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right) M_\alpha^{-2}u(\alpha)^2 + \frac{1}{s'}\left(\frac{1}{s'} - 1\right) N_\alpha^{-2}v(\alpha)^2$$

$$+ 2\frac{1}{p}\frac{1}{s'}M_\alpha^{-1}N_\alpha^{-1}u(\alpha)v(\alpha)e^{-t} \, .$$

Luăm mediile şi obţinem

$$E[XY] = \| X \|_r \| Y \|_{s'} + \frac{1}{2}\int_0^1 E\left[M_\alpha^{1/r}N_\alpha^{1/s'}A_\alpha\right]d\alpha \, ,$$

deci este suficient să observăm că $A_\alpha \le 0$.□

Ca o consecinţă a teoremei 2.4.4, să arătăm că, pentru orice $r < s$ in $(1, \infty)$, normele $\| \cdot \|_r$ şi $\| \cdot \|_s$ sunt echivalente pe orice haos $\mathcal{H}_n$. Fie $t > 0$ astfel ca $s = 1 + e^{2t}(r - 1)$; pentru orice $F \in \mathcal{H}_n$, avem

$$e^{-nt} \| F \|_s = \| T_t(F)\|_s \le \| F \|_r \, .$$

Pe de altă parte, operatorii J_n sunt mărginiţi in L^r , $r > 1$. Intr–adevăr, fie $r > 2$ şi $t > 0$ astfel ca $r - 1 = e^{2t}$

Din proprietatea de hipercontractivitate cu exponenţii r şi 2, obţinem

$$\| J_n(F)\|_2 = e^{nt} \| T_t(J_n(F)) \|_r$$
$$\leq e^{nt} \| J_n(F)\|_2 \leq e^{nt} \| F \|_2 \leq e^{nt} \| F \|_r .$$

Pentru $r < 2$ folosim un argument de dualitate :

$$\| J_n(F)\|_r = \sup_{\|G\|_s \leq 1} E(J_n(FG))$$

$$\leq \| F\|_r \sup_{\|G\|_s \leq 1} \| J_n(G)\|_s \leq e^{2t} \| F \|_r ,$$

unde s este conjugatul lui r şi $s - 1 = e^{2t}$.□

Să remarcăm că spaţiul $\mathbf{D}^{2,1}$ se poate caracteriza ca domeniul operatorului $C := -(-L)^{1/2}$. Mai precis, dacă $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, atunci operatorul C este definit prin

$$CF = \sum_{n=0}^{\infty} - n^{1/2} J_n(F) ;$$

ca şi in cazul operatorului L , se poate arăta că C este generatorul infinitezimal al semigrupului de operatori (**semigrupul Cauchy**) dat de

$$Q_t F = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(nt)^{1/2}} J_n(F) . \tag{2.37}$$

Observăm că $Dom\ C = \mathbf{D}^{2,1}$ şi că, pentru $F \in Dom\ C$, avem

$$E\left((CF)^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, n! \ \| f_n \|^2_{L^2(T^n)} = E\left(| DF |^2\right) .$$

Fie $\{\phi(n) , n \geq 0\}$ un şir de numere reale cu $\phi(0) = 0$. Acesta determină un operator liniar $T_\phi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ prin

$$T_\phi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(n) J_n(F) , \quad F \in \mathcal{P} . \tag{2.38}$$

Are loc următorul rezultat de mărginire in L^r , $r > 1$, numit **teorema multiplicatorului.**

TEOREMA 2.4.5 *Fie* $\{\phi(n)\ ,\ n \geq 0\}$ *un şir de numere reale astfel încât* $\phi(0) = 0$ *şi* $\phi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k n^{-k}$ *pentru* $n \geq N$ *. Dacă* $\sum_{k=0}^{\infty} \mid a_k \mid N^{-k} < \infty$ *, atunci operatorul (2.38) este mărginit in* L^r *pentru orice* $1 < r < \infty$ *.*

Să observăm că ipotezele acestei teoreme sunt echivalente cu existenţa unei funcţii $h(x)$ analitică in jurul originii şi cu proprietatea $\phi(n) = h(n^{-1})$ pentru $n \geq N$.

Exemple de aplicare :

$$\phi(n) = \left(\frac{1+n^{1/2}}{(1+n)^{1/2}}\right)^s ,\ \text{cu } s \in \mathbf{R},\ \phi(n) = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^{1/2} .$$

De asemenea, observăm că operatorii T_t , Q_t , L , C satisfac aceste ipoteze.

Să considerăm clasa $\mathcal{S}_H$ variabilelor aleatoare netede cu valori in H i.e. de forma

$$F = \sum_{j=1}^{n} F_j v_j\ ,\ v_j \in H\ ,\ F_j \in \mathcal{S}\ .$$

Pentru $p \in \mathbf{N}^*$ şi $r \geq 1$, definim spaţiile $\mathbf{D}^{r,p}(H)$ ca fiind completarea clasei $\mathcal{S}_H$ in raport cu normele

$$\| F \|_{r,p,H} = \left[E(\| F \|_H^r) + \sum_{j=1}^{p} E\left(\| D^j F \|_{L^2(T^j\ ;\ H)}^r\right)\right]^{1/r} .$$

Proprietăţile de monotonie, compatibilitate şi densitatate de la normele $\| \cdot \|_{r,p}$ rămân adevărate pentru variabile aleatoare cu valori in H .

Definim

$$\mathbf{D}^{\infty} = \bigcap_{p \in \mathbf{N}^*\ ,\ r \geq 1} \mathbf{D}^{r,p} .$$

Atunci $\mathbf{D}^{\infty}$ este un spaţiu metric numărabil complet ; similar definim $\mathbf{D}^{\infty}(H)$. Observăm că operatorul D este continuu de la $\mathbf{D}^{r,p}$ la $\mathbf{D}^{r-1,p}(H)$ pentru orice p, r . In consecinţă, D este operator liniar continuu de la $\mathbf{D}^{\infty}$ la $\mathbf{D}^{\infty}(H)$. Mai mult, dacă $F, G \in \mathbf{D}^{\infty}$, atunci $< DF, DG > \in \mathbf{D}^{\infty}$.

Aproximând componentele lui $F = (F^1, \ldots, F^m)$, $F^i \in \mathbf{D}^\infty$, cu variabile aleatoare netede, pentru $\varphi \in C_p^\infty(\mathbf{R}^m)$ obţinem că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^\infty$ şi

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i \varphi)(F) DF^i,$$

$$L(\varphi(F)) = \sum_{i,j=1}^{m} (\partial_i \partial_j \varphi) < DF^i, DF^j > + \sum_{i=1}^{m} (\partial_i \varphi)(F) LF^i .$$

In particular deducem că $\mathbf{D}^\infty$ este o algebră.

Exemplu Fie $\{W_t\ ,\ t \in [0,1]\}$ o mişcare browniană reală. Pentru $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ şi $p > 1$ cu $\gamma < \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$, variabila aleatoare

$$\| W\|_{p,\gamma} = \left(\int_{[0,1]^2} \frac{|W_t - W_s|^{2p}}{|t-s|^{1+2p\gamma}} \, ds dt \right)^{1/2p} \in \mathbf{D}^\infty .$$

În continuare vom vedea că operatorul L este continuu de la $\mathbf{D}^\infty$ la $\mathbf{D}^\infty$ şi că operatorul δ este continuu de la $\mathbf{D}^\infty(H)$ la $\mathbf{D}^\infty$. Aceste rezultate se demonstrează utilizând **inegalităţile lui Meyer**, care arată echivalenţa normelor $\| \cdot \|_r$ ale lui CF şi $| DF |$, pentru $r > 1$. La rândul ei, echivalenţa normelor va rezulta din faptul că operatorul DC^{-1} este mărginit in L^r , $r > 1$. Mai precis, avem

TEOREMA 2.4.6 *Fie* $r > 1$ *şi* $p \in \mathbf{N}^*$. *Atunci există constantele* a_r^p , $b_r^p > 0$ *astfel incât, pentru orice variabilă aleatoare polinomială* F , *avem*

$$a_r^p E\left(\| D^p F\|_{L^2(T^p)}^r\right) \le E\left(| C^p F|^r\right)$$

$$\le b_r^p \left[E\left(\| D^p F\|_{L^2(T^p)}^r\right) + E\left(| F|^r\right)\right] . \tag{2.39}$$

In cazul $p = 1$, aceste inegalităţi se scriu mai simplu in forma

$$a_r \| DF\|_r \le \| CF\|_r \le b_r \| DF\|_r , \tag{2.40}$$

pentru orice $r > 1$. De fapt, formula (2.39) rezultă din (2.40) şi din inegalităţile lui Hincin pentru funcţii Rademacher, cf. P.–A. Meyer, *Lect. Notes in Math.* 1059, 1984, p.179–193.

PROPOZIŢIA 2.4.7 *Operatorul δ este mărginit de la $\mathbf{D}^{r,p}(H)$ la $\mathbf{D}^{r,p-1}$, pentru orice $r > 1$ şi $p \geq 2$, iar operatorul L este mărginit de la $\mathbf{D}^{r,p}(H)$ la $\mathbf{D}^{r,p-2}$ pentru orice $r > 1$ şi $p \geq 3$.*

Demonstraţie. Vom arăta numai că δ este continuu de la $\mathbf{D}^{r,1}(H)$ la L^r. Fie s conjugatul lui r; pentru $u \in \mathbf{D}^{r,1}(H)$ şi variabila aleatoare polinomială G cu $E(G) = 0$, avem

$$E\left(\delta(u)G\right) = E\left(< u, DG >\right)$$

$$= E\left(< \tilde{u}, DG >\right) + E\left(< E(u), DG >\right) .$$

Al doilea sumand in expresia de mai sus este mărginit de o constantă inmulţită cu $\| \mid u \mid \|_r \| G \|_s$. Putem deci presupune $E(u) = E(DG) = 0$ şi obţinem

$$\mid E\left(\delta(u)G\right) \mid \; = \mid E\left(< u, DG >\right) \mid$$

$$= \left| E\left(< Cu, CC^{-2}DG >\right)\right| = \left|E\left(< Du, DC^{-2}DG>_{L^2(T^2)}\right)\right|$$

$$\leq \| Du \|_{L^r(\Omega\,;\,H\otimes H)} \| DC^{-2}DG \|_{L^s(\Omega\,;\,H\otimes H)}$$

$$\leq c_r \| Du \|_{L^r(\Omega\,;\,H)} \| G \|_s ;$$

am folosit inegalităţile lui Meyer pentru a evalua termenul $DC^{-2}DG$. □

În capitolul următor vom avea nevoie de aplicţiile următore ale inegalităţilor lui Meyer. Fie $\mathcal{P}_H$ clasa variabilelor aleatoare polinomiale cu valori in H. Atunci operatorul $L^{-1/2}\delta : \mathcal{P}_H \longrightarrow \mathcal{P}$ este mărginit in $L^r(\Omega\,;H)$ pentru orice $r > 1$. Intr–adevăr, pentru orice $G \in \mathcal{P}$ cu $E(G) = 0$ şi $u \in \mathcal{P}_H$, folosind formula (2.40), avem

$$\mid E\left(L^{-1/2}\delta(u)G\right) \mid = \mid E\left(< u, DL^{-1/2}G >\right) \mid$$

$$\leq \| u \|_{L^r(\Omega\,;\,H)} \| DL^{-1}G \|_{L^s(\Omega\,;\,H)} \leq c_r \| u \|_{L^r(\Omega\,;\,H)} \| G \|_{L^s(\Omega)} ,$$

unde s este conjugatul lui r. Folosind din nou relaţia (2.40), obţinem că $DL^{-1}\delta$ este mărginit de la $L^r(\Omega\,;\,H)$ la $L^r(\Omega\,;\,H)$:

$$E\left(< DL^{-1}\delta u, v >\right) = E\left(L^{-1}\delta(u)\delta(v)\right)$$

$$= E\left(L^{-1/2}\delta(u)L^{-1/2}\delta(v)\right)$$

$$\leq \| L^{-1/2}\delta(u)\|_{L^r(\Omega)} \| L^{-1/2}\delta(v)\|_{L^s(\Omega)}$$

$$\leq c_r \| u \|_{L^r(\Omega\, ;\, H)} ; \| v \|_{L^s(\Omega\, ;\, H)} .$$

PROPOZIŢIA 2.4.8 *Fie $F \in \mathbf{D}^{\alpha,1}$ cu $\alpha > 1$. Dacă $F \in L^r(\Omega)$ şi $DF \in L^r(\Omega\, ;\, H)$ pentru un $r > \alpha$, atunci $F \in \mathbf{D}^{r,1}$.*

Demonstraţie. Presupunem că $E(F) = 0$. Există un şir de variabile aleatoare polinomiale η_n cu valori in H care converge către DF in $L^r(\Omega\, ;\, H)$. Observăm că $-L^{-1}\delta D = (I - J_0)$. Folosind descompunerea $\eta_n = DG_n + u_n$ dată de propoziţia 2.3.4, in care $\delta(u_n) = 0$ şi mărginirea in L^r a operatorului $L^{-1}\delta$, obţinem că $F - G_n = L^{-1}\, \delta(\eta_n - DF)$ converge la 0 in $L^r(\Omega)$ când $n \to \infty$. Pe de altă parte

$$\| DF - DG_n \|_{L^r(\Omega\, ;\, H)} = \| DL^{-1}\delta(\eta_n - DF)\|_{L^r(\Omega\, ;\, H)}$$

$$\leq \| \eta_n - DF \|_{L^r(\Omega\, ;\, H)}$$

deci $| DG_n - DF |$ converge la 0 in $L^r(\Omega)$ când $n \to \infty$. Avem că $G_n \in \mathbf{D}^{r,1}$ deoarece au dezvoltări in haos finite, deci $F \in \mathbf{D}^{r,1}$. □

PROPOZIŢIA 2.4.9 *Fie $F_n \in \mathbf{D}^{r,p}$ cu $p \geq 1$ şi $r \geq 2$. Dacă F_n converge către F in $L^r(\Omega)$ şi $\sup_n \| F_n \|_{r,p} < \infty$, atunci $F \in \mathbf{D}^{r,p}$.*

Demonstraţie. Fie s conjugatul lui r. Există un subşir $\{F_{n_i}, i \geq 1\}$ astfel incât derivatele $D^j F_{n_i}$ converg in topologia slabă $\sigma(L^r(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j)), L^s(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j)))$, către un $\alpha_j \in L^r(\Omega, L^2(\mathcal{T}^j))$, pentru $j = 1, \ldots, p$. Luăm $r = 2$ şi obţinem că, pentru $h_1, \ldots, h_j \in H$, proiecţiile lui $< D(F_{n_i}), h_1 \otimes \ldots \otimes h_j >$ pe orice haos converg in topologia $\sigma(L^2(\mathcal{T} \times \Omega))$, când $i \to \infty$, către proiecţiile corespunzătoare ale lui $< \alpha, h_1 \otimes \ldots \otimes h_j >$. In consecinţă $F \in \mathbf{D}^{2,p}$ şi $\alpha_j = D^j F$ pentru orice $j = 1, \ldots, p$. Concluzionăm ca in propoziţia 2.4.8. □

COROLAR 2.4.10 *Fie $F_n \in \mathbf{D}^{2,1}$, $n \geq 1$ un şir de variabile aleatoare care converge către F in $L^2(\Omega)$ şi astfel ca $\sup_n E(| DF_n |^2) < \infty$, atunci $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi $\{DF_n, n \geq 1\}$ converge către DF in topologia slabă a lui $L^2(\mathcal{T} \times \Omega)$.*

Cu acest ultim rezultat putem extinde regula lanţului (propoziţia 2.2.4) la funcţiile lipschitziene.

PROPOZIŢIA 2.4.11 *Fie* $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ *cu proprietatea*

$$| \varphi(x) - \varphi(y) | \leq K | x - y | ,$$

pentru $x, y \in \mathbf{R}^m$ *şi un* $K > 0$. *Dacă* $F = (F^1, \ldots, F^m)$ *are componentele in* $\mathbf{D}^{2,1}$, *atunci* $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ *şi există un vector* $G = (G^1, \ldots, G^m)$ *mărginit de* K *astfel incât*

$$D(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} G^i DF^i . \tag{2.41}$$

Demonstraţie. Fie $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcţie nenegativă cu suportul in bila unitate şi $\int_{\mathbf{R}^m} \alpha(x)dx = 1$. Definim $\alpha_n(x) = n^m \alpha(nx)$ şi $\varphi_n = \varphi * \alpha_n$. Atunci avem $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi(x)$ uniform in raport cu x , funcţiile φ_n sunt de clasă C^∞ cu $| \nabla\varphi_n | \leq K$ şi, pentru orice n avem

$$D(\varphi_n(F)) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i\varphi_n)(F)DF^i . \tag{2.42}$$

Din corolarul 2.4.10 rezultă că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi că există un subşir $\{(\nabla\varphi_{n_k})(F) , k \geq 1\}$ care converge in topologia slabă a lui $L^2(T \times \Omega)$ către $D(\varphi(F))$. De aici rezultă că există un subşir$\left\{\left(\nabla\varphi_{n_{k_i}}\right)(F) , i \geq 1\right\}$ care converge către un G ca in enunţ, in topologia slabă $\sigma(L^r(\Omega ; \mathbf{R}^m), L^r(\Omega ; \mathbf{R}^m))$, pentru orice $r \geq 2$, unde s este conjugatul lui r . Obţinem că G este mărginit de K şi apoi trecem la limită in relaţia (2.42)□

Cu ajutorul propoziţiei 2.4.8, observăm că propoziţia 2.4.11 rămâne valabilă in spaţiile L^r , $r \geq 2$.

2.5 APLICAŢIE LA STUDIUL LEGILOR

Să considerăm $W = \{W(h), h \in H\}$ un zgomot alb asociat spaţiului Hilbert $H = L^2(T, \mathcal{B}, \mu)$ şi definit pe spaţiul de probabilitate complet $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, cu $\mathcal{F}$ generat de W.

Pentru a ilustra metodologia care va fi utilizată in acest capitol, să considerăm pentru inceput cazul variabilelor aleatoare 1–dimensionale.

PROPOZIŢIA 2.5.1 *Fie* $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ *cu proprietatea că* $\frac{DF}{\|DF\|} \in Dom\ \delta$. *Atunci legea lui* F *admite o densitate continuă dată de*

$$f(x) = E\left[\mathbf{1}_{\{F>x\}}\delta\left(\frac{DF}{\| DF \|}\right)\right]. \tag{2.43}$$

Demonstraţie. Pentru $x \in \mathbf{R}$ fixat şi $\epsilon > 0$, fie funcţiile

$$\psi_\epsilon(y) = \frac{1}{2\epsilon}\mathbf{1}_{[x-\epsilon,x+\epsilon]}(y)$$

şi $\varphi_\epsilon(y) = \int_{-\infty}^{y} \psi_\epsilon(z)dz$. Ştim că $\varphi_\epsilon(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi făcând produsul scalar dintre derivata ei şi DF , obţinem

$$< D\varphi_\epsilon(F), DF > = \psi_\epsilon(F) \| DF \|^2 .$$

Această formulă permite calculul lui $\psi_\epsilon(F)$ şi, folosind formula (2.24), obţinem

$$E[\psi_\epsilon(F)] = E\left[\left\langle D\varphi_\epsilon(F), \frac{DF}{\| DF \|^2}\right\rangle\right] \tag{2.44}$$

$$= E\left[\varphi_\epsilon(F)\delta\left(\frac{DF}{\| DF \|^2}\right)\right].$$

De aici rezultă că legea lui F este absolut continuă, deoarece este dominată de măsura Lebesgue inmulţită cu constanta $E\left[\left|\delta\left(\frac{DF}{\|DF\|^2}\right)\right|\right]$. In fine, facem $\epsilon \searrow 0$ in (2.44) şi obţinem expresia densităţii lui F .□

Exerciţii 1. Fie $F \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi $h \in H$ cu următoarele proprietăţi $< DF, h > \neq 0$ a.p.t. şi $\frac{h}{<DF,h>} \in Dom\ \delta$. Atunci F admite o densitate continuă şi mărginită dată de

$$f(x) = E\left[\mathbf{1}_{\{F>x\}}\ \delta\left(\frac{h}{< DF, h >}\right)\right].$$

2. Fie $F \in \mathbf{D}^{4,2}$ astfel incât $E(\| DF \|^{-4}) < \infty$. Atunci $\frac{DF}{\|DF\|^2} \in Dom\ \delta$.

Fie $F = (F^1, \ldots, F^m)$ un vector aleator cu componentele in $\mathbf{D}^{1,1}$. Următoarea matrice aleatoare simetrică şi pozitiv definită

$$\gamma_F := \left(< DF^i, DF^j > \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

se va numi **matricea Mallivin** asociată lui F. Are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.5.2 *Fie $F = (F^1, \ldots, F^m)$ un vector aleator cu următoarele proprietăţi :*

(a) $F^i \in \mathbf{D}^{2,1}$, $< DF^i, DF^j > \in \mathbf{D}^{2,1}$ *şi* $DF^i \in Dom\ \delta$, *pentru orice* $i, j = 1, \ldots, m$.

(b) *matricea γ_F este inversabilă a.p.t.*

Atunci legea lui F este absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbf{R}^m$.

Pentru demonstraţie vom avea nevoie de următoarea lemă de analiză reală.

LEMA 2.5.3 *Fie μ o măsură finită pe $\mathbf{R}^m$. Dacă*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \varphi \, d\mu \right| \leq c_i \parallel \varphi \parallel_\infty \tag{2.45}$$

pentru $i = 1, \ldots, m$ şi $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$ (unde ∂_i inseamnă $\frac{\partial}{\partial x_i}$), atunci μ este absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue.

Demonstraţie. Dacă $m = 1$, pentru $a < b$ considerăm funcţia

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ , dacă } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} \text{ , dacă } a < x < b \\ 1 \text{ , dacă } x \geq b \end{cases}$$

care, deşi nu este infinit diferenţiabilă, poate fi aproximată cu funcţii din $C_b^\infty(\mathbf{R})$ astfel incât formula (2.45) să aibă loc. Obţinem că $\mu((a,b)) \leq c_1(b-a)$, deci μ este absolut continuă.

Dacă $m > 1$, să considerăm o aproximare a identităţii i.e. funcţiile ψ_ϵ pe $\mathbf{R}^m$ definite prin

$$\psi_\epsilon(x) = (2\pi\epsilon)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2\epsilon} \parallel x \parallel^2 \right)$$

pentru $\epsilon > 0$ şi fie $c_k(x)$, $k \geq 1$ un şir de funcţii din $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ cu proprietăţile

$$c_k(x) = \begin{cases} 1 \text{ , dacă } \mid x \mid \leq k \\ 0 \text{ , dacă } \mid x \mid \geq k+1 \text{ ,} \end{cases}$$

$0 \le c_k \le 1$ şi toate derivatele lui c_k sunt uniform mărginite in raport cu k. Atunci funcţiile

$$c_k(x)\,(\psi_\epsilon * \mu)\,(x) = c_k(x) \int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y)\mu(dy)$$

sunt in $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$. Din inegalităţile Gagliardo-Niremberg (cf. E.M.Stein, *Singular Integrals and Differentiability of Functions, Princeton*, 1970. p.129) aplicate acestor funcţii, obţinem

$$\| c_k\,(\psi_\epsilon * \mu)\,\|_{L^{m/m-1}} \le \prod_{i=1}^{m} \| \partial_i\,(c_k\,(\psi_\epsilon * \mu))\,\|_{L^1}^{1/m}\,. \tag{2.46}$$

Inegalitatea (2.45) implică deci că aplicaţia $\varphi \to \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \varphi d\mu$, definită pe $C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, este o măsură cu semn pe care o vom nota $\nu_i, 1 \le i \le m$. Obţinem

$$\| \partial_i\,(c_k\,(\psi_\epsilon * \mu))\,\|_{L^1} \le c_k(x) \mid \int_{\mathbf{R}^m} \partial_i \psi_\epsilon(x-y)\mu(dy) \mid dx$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^m} \mid \partial_i c_k(x) \mid \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y)\mu(dy) \right) dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^m} c_k(x) \mid \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y)\nu_i(dy) \right) \mid dx$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^m} \mid \partial_i c_k(x) \mid \left(\int_{\mathbf{R}^m} \psi_\epsilon(x-y)\mu(dy) \right) dx \le K,$$

cu K independentă de k si de ϵ. Deci familia de funcţii $\{c_k\,(\psi_\epsilon * \mu),\ k \ge 1, \epsilon > 0\}$ este mărginită in $L^{m/m-1}$. Rămâne de aplicat faptul că bila unitate din $L^{m/m-1}$ este slab compactă.□

Demonstraţia teoremei 2.5.2 Fie $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcţie test fixată. Din propoziţia 2.2.4 rezultă că $\varphi(F) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi

$$D\,(\varphi(F)) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi(F) DF^i\,.$$

Deci

$$< D\,(\varphi(F))\,, DF^i > = \sum_{i=1}^{m} \partial_i \varphi(F) \gamma_F^{ij}\,,$$

adică

$$\partial_i\varphi(F) = \sum_{i=1}^{m} < D\left(\varphi(F)\right), DF^j > (\gamma_F^{-1})^{ji} . \qquad (2.47)$$

Inversa matricei γ_F poate să nu aibă momente şi de aceea vom folosi un argument de localizare. Pentru $k \geq 1$ natural, fie $\Psi_k \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m)$ cu proprietăţile

$$\Psi_k(\sigma) = \begin{cases} 1, \text{dacă } \sigma \in K_k , \\ \Psi_k(\sigma) = 0, \text{ dacă } \sigma \notin K_{k+1} , \end{cases}$$

unde

$$K_k = \Big\{\sigma \in \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m : \mid \sigma^{ij} \mid \leq k \text{ pentru orice } i, j$$

$$\text{şi } \mid \det \sigma \mid \geq 1/k\Big\} .$$

Observăm că K_k este compactă in $GL(m) \subset \mathbf{R}^m \otimes \mathbf{R}^m$. Înmulţim relaţia (2.47) cu $\Psi_k(\gamma_F)$ şi obţinem

$$E[\Psi_k(\gamma_F)\partial_i\varphi(F)]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} E\Big[\Psi_k(\gamma_F) < D\left(\varphi(F)\right), DF^j > (\gamma_F^{-1})^{ji}\Big] . \qquad (2.48)$$

Din condiţia (a) obţinem că $\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji}DF^j \in Dom\ \delta$, deoarece $\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} \in \mathbf{D}^{2,1}$ (este egală cu compunerea dintre o funcţie C_0^{∞} şi variabile aleatoare din $\mathbf{D}^{2,1}$, iar toate sunt mărginite. Folosind relaţia (2.24) obţinem

$$E[\Psi_k(\gamma_F)\partial_i\varphi(F)] = \left| E\left[\varphi(F) \sum_{j=1}^{m} \delta\Big(\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j\Big)\right]\right|$$

$$\leq E\left(\left|\sum_{j=1}^{m} \delta\Big(\Psi_k(\gamma_F)(\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j\Big)\right|\right) \parallel \varphi \parallel_{\infty} .$$

Din lema 2.5.3 rezultă că măsura $[\Psi_k(\gamma_F) \cdot P] \circ F^{-1}$ este absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbf{R}^m$ i.e. pentru orice boreliană $A \subset \mathbf{R}^m$ de măsură Lebesgue nulă, avem

$$\int_{F^{-1}(A)} \Psi_k(\gamma_F)dP = 0 \ .$$

Facem $k \to \infty$ şi folosind ipoteza (b) din enunţ, obţinem $P(F^{-1}(A)) = 0$.□

Remarcă Condiţia (a) din teorema 2.5.2 este satisfăcută dacă, e.g. $F^i \in \mathbf{D}^{4,2}$. Totodată, concluzia teoremei 2.5.2 rămâne adevărată dacă inlocuim condiţia (a) prin

(a') $F^i \in \mathbf{D}^{r,1}$, $r > 1$ pentru toţi $i = 1, \ldots, m$.

In cazul v.a. 1−dimensionale are loc următorul rezultat.

TEOREMA 2.5.4 *Fie $F \in \mathbf{D}^{1,1}$ astfel incât $| DF | > 0$ a.p.t. Atunci legea lui F este absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue pe $\mathbf{R}$.*

Demonstraţie. Putem presupune că F este mărginită e.g. $| F |< 1$. Vrem să arătăm că, pentru orice funcţie măsurabilă $g : (-1,1) \to [0,1]$ cu $\int_{-1}^{1} g(y)dy = 0$, avem $E(g(F)) = 0$. Există un şir $g^n : (-1,1) \to [0,1]$ de funcţii diferenţiabile şi cu derivatele mărginite astfel ca $g^n(y)$ să conveargă către $g(y)$ pentru aproape toţi y in raport cu măsura $P \circ F^{-1} + \lambda$. Punem

$$\psi^n(y) = \int_{-1}^{y} g^n(x)dx$$

şi

$$\psi(y) = \int_{-1}^{y} g(x)dx \ .$$

Din regula lanţului obţinem că $\psi^n(F) \in \mathbf{D}^{1,1}$ şi $D[\psi^n(F)] = g^n(F)DF$. Avem că $\psi^n(F)$ converge către $\psi(F)$ a.p.t. deoarece g^n converge către g a.p.t. in raport cu măsura Lebesgue. Această convergenţă are loc şi in $L^1(\Omega)$, din teorema de convergenţă dominată. Pe de altă parte, $D\psi^n(F)$ converge a.p.t. către $g(F)DF$ deoarece g^n converge către g a.p.t. in raport cu legea lui F . Din nou din teorema de convergenţă dominată obţinem că această din urmă convergenţă are loc şi in $L^1(\Omega ; L^2(\mathcal{T}))$. Să observăm că $\psi(F) = 0$ a.p.t. şi să folosim faptul că operatorul D este inchis pentru a deduce că $g(F)DF = 0$ a.p.t. In consecinţă $g(F) = 0$ a.p.t.□

Exerciţiu Fie $u = \{u(t), t \in [0,1]\} \in \mathbf{L}^{2,1}$ astfel incât există un $\alpha > 0$ cu proprietatea $\int_0^1 \int_0^1 (E \mid D_s u(t)|^2)^\alpha \; dsdt < \infty$. Arătaţi că variabila aleatoare $F = \int_0^1 u(s) dW_s$ are legea absolut continuă.

Criteriul uzual de diferenţiabilitate a densităţilor este dat in rezultatul următor.

TEOREMA 2.5.5 *Fie $F = (F^1, \ldots, F^m)$ un vector aleator cu componentele $F^i \in \mathbf{D}^\infty$. Dacă matricea Mallivin satisface condiţia*

$$(\det \gamma_F)^{-1} \in \bigcap_{p>1} L^p(\Omega), \tag{2.49}$$

atunci densitatea lui F este infinit diferenţiabilă.

Pentru demonstraţie avem nevoie de două leme tehnice.

LEMA 2.5.6 *Fie μ măsură finită pe $\mathbf{R}^m$ astfel incât*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_\alpha \varphi \; d\mu \right| \leq c_\alpha \parallel \varphi \parallel_\infty \tag{2.50}$$

pentru orice $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ cu suport compact, orice multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \{1, \cdots, m\}^k$ şi $k \geq 1$, unde ∂_α inseamnă $\frac{\partial^k}{\partial x_{\alpha_1} \ldots \partial x_{\alpha_k}}$. Atunci μ este absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue şi are o densitate infinit diferenţiabilă.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \mathbf{R}^m$ fixat ; este suficient să arătăm că restricţia lui μ la orice bilă deschisă $B_r(x_0)$ admite o densitate infinit diferenţiabilă. Fie $\beta \in C^\infty$ $(\mathbf{R}^m)$ astfel ca $0 \leq \beta(x) \leq 1$, $\beta(x) = 1$ pe $B_r(x_0)$ şi $\beta(x) = 0$ pe $B_r^c(x_0)$. Definim măsura $\nu(dx) = \beta(x)\mu(dx)$; pentru orice multiindice α ca in enunţ, există o constantă d_α astfel ca, pentru orice $\varphi \in C_b^\infty(\mathbf{R}^m)$ să avem

$$\left| \int_{\mathbf{R}^m} \partial_\alpha \varphi \; d\nu \right| \leq d_\alpha \parallel \varphi \parallel_\infty . \tag{2.51}$$

(din (2.50) şi definiţia lui ν).

Fie $\widehat{\nu}(y) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{i<y,x>} \nu(dx)$ transformarea Fourier a lui ν. Pentru $\varphi(x) = e^{i<y,x>}$, $y \in \mathbf{R}^m$, $\alpha = (1, \ldots, 1)$, din inegalitatea (2.51) obţinem

$$| \, y_1 \ldots y_m \, \widehat{\nu}(y) \, | \leq \; d_\alpha ,$$

deci $\widehat{\nu}(y)$ este de pătrat integrabil şi, ca o consecinţă, are o densitate dată de transformarea Fourier inversă

$$f(x) = (2\pi)^{-m} \int_{\mathbf{R}^m} e^{-i<y,x>} \widehat{\nu}(y)dy . \qquad (2.52)$$

Mai mult, funcţia $|\, y|^n \,|\, \widehat{\nu}(y) \,|$ este integrabilă peutru orice n . deci putem deriva sub semnul integralei in (2.52) de oricâte ori dorim. În consecinţă, f este infinit diferenţiabilă şi deci μ are o densitate infinit diferenţiabilă.□

LEMA 2.5.7 *Fie G o matrice aleatoare de tip $m \times m$, inversabilă a.p.t. astfel incât $(\det G)^{-1} \in L^r$, pentru orice $r \geq 2$. Dacă $G^{ij} \in \mathbf{D}^\infty$, atunci $(G^{-1})^{ij} \in \mathbf{D}^\infty$ şi*

$$D\left((G^{-1})^{ij}\right) = \sum_{k,l=1}^{m} (G^{-1})^{ik}(G^{-1})^{jl} D\left(G^{kl}\right).$$

Demonstraţie. Cum probabilitatea mulţimii $\{\det\ G > 0\}$ este 0 sau 1, putem presupune că $\det\ G > 0$ a.p.t. Pentru $\epsilon > 0$, fie G_ϵ matricea dată de

$$G_\epsilon G = \frac{\det\ G}{\det\ G + \epsilon} .$$

Observăm că $(\det\ G + \epsilon)^{-1} \in \mathbf{D}^\infty$ deoarece este compunerea dintre $\det\ G$ şi o funcţie din $C_p^\infty(\mathbf{R})$. Deci componentele lui $G_\epsilon \in \mathbf{D}^\infty$. In plus, pentru orice i, j, şirul G_ϵ^{ij} converge către $(G^{-1})^{ij}$ in L^r când $\epsilon \searrow 0$. Conform propoziţiei 2.4.9, este suficient să probăm că derivatele iterate ale lui G_ϵ^{ij} sunt mărginite in L^r, uniform in raport cu $r \geq 2$. Intr-adevăr, aceasta rezultă din faptul că $(\det G)G^{-1} \in \mathbf{D}^\infty$ şi din faptul că $(\det\ G + \epsilon)^{-1}$ este mărginit in normele $\|\cdot\|_{r,p}$ pentru orice r, p. Ultima relaţie din lemă se obţine aplicând operatorul D in definiţia lui G_ϵ şi făcând $\epsilon \searrow 0$.□

Demonstraţia teoremei 2.5.5 Fie $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ o funcţie test cu suport compact. Utilizând regula lanţului, obţinem

$$< D(\varphi(F)), DF^j >$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \partial_i\varphi(F) < DF^i, DF^j >= \sum_{i=1}^{m} \partial_i\varphi(F)\gamma_F^{ij} ,$$

deci

$$\partial_i\varphi(F) = \sum_{j=1}^{m} < D(\varphi(F)), DF^j > (\gamma_F^{-1})^{ji} .$$

Fie $R \in \mathbf{D}^\infty$ fixat ; avem că

$$\begin{aligned} E[R(\partial_i\varphi)(F)] &= \sum_{j=1}^{m} E\left[R < D(\varphi(F)), (\gamma_F^{-1})^{ji} DF^j >\right] \\ &= E[\varphi(F)\Phi_i(R)] , \end{aligned}$$

unde

$$\Phi_i(R) = \sum_{j=1}^{m} \delta\left(R\, DF^j (\gamma_F^{-1})^{ji}\right) .$$

Din lema 2.5.7 rezultă că $(\gamma_F^{-1})^{ji} \in \mathbf{D}^\infty$ deci, din ipotezele teoremei, obţinem că $\Phi_i(R) \in \mathbf{D}^\infty$ şi că este liniar in R . Fie α un multiindice ca in enunţ ; aplicăm recursiv ultima relaţie pentru $i = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ şi $R = 1$, $\Phi_{\alpha_1}(1)$, $\Phi_{\alpha_2}(\Phi_{\alpha_1}(1)), \ldots,$ $\Phi_{\alpha_k}\left(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\ldots(1)\ldots)\right)$; obţinem

$$\begin{aligned} |E(\partial_\alpha\varphi(F))| &= \left|E(\varphi(F))\, \Phi_{\alpha_k}\left(\Phi_{\alpha_{k-1}}(\ldots(1)\ldots)\right)\right| \\ &\le c_\alpha \| \varphi \|_\infty . \end{aligned}$$

Rămâne să aplicăm lema 2.5.6.□

Exerciţii 1. In ipotezele teoremei 2.5.5, pentru $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ definim

$$g(x_1, \ldots, x_m) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_m} f(y_1, \ldots, y_m) dy_1 \ldots dy_m .$$

Arătaţi că

$$E[f(F)] = E\left[g(F)\, \delta\left((DF\gamma_F)^{-1}\right)_m \delta\left((DF\gamma_F)^{-1}\right)_{m-1} \cdots \right.$$
$$\left. \delta\left((DF\gamma_F)^{-1}\right)_1\right]$$

şi deduceţi de aici o expresie pentru densitatea lui F similară lui (2.5.1).

2. Fie $W = \{W_t , t \ge 0\}$ o mişcare browniană reală şi $F \in \mathbf{D}^{2,1}$. Arătaţi că pentru toţi $t \ge 0$, cu excepţia unui număr finit de timpi, $F + W_t$ are legea absolut continuă.

2.6 APLICAŢIE LA ECUAŢII ITÔ

In acest capitol vom aplica rezultatele din capitolele precedente pentru a studia regularitatea soluţiilor ecuaţiilor stocastice (vezi 1.5) şi a legilor acestora.

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ câmpul de probabilitate canonic asociat unei mişcări browniene d-dimensionale $\{W_t^i \, , \, t \in [0,T], \, 1 \leq i \leq d\}$. Ne vom limita la un interval de timp finit $[0,T]$, deci lucrăm pe spaţiul Hilbert $H = L^2\left([0,T] \, ; \, \mathbf{R}^d\right)$. Fie σ_j, $b : [0,T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $1 \leq j \leq d$ funcţii măsurabile care suut global Lipschitz, şi să notăm prin $X = \{X(t), \, t \in [0,T]\}$ soluţia următoarei ecuaţii diferenţiale stocastice m-dimensionale:

$$X(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(s, X(s)) dW_s^j + \int_0^t b(s, X(s)) \, ds \, , \tag{2.53}$$

unde $x_0 \in \mathbf{R}^m$ este valoarea iniţială a procesului X (vezi şi 1.5.1). Reţinem că, atunci când există, soluţia ecuaţiei (2.53) admite o versiune continuă, care se află in orice L^r, $r \geq 2$, i.e.

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^r\right) < c_1 \, , \tag{2.54}$$

pentru orice $r \geq 2$, unde c_1 depinde de r, T, x_0 şi de constanta Lipschitz a coeficienţilor.

In continuare vom studia regularitatea soluţiei $X(t)$, absolut continuitatea legii acesteia in raport cu măsura Lebesgue şi regularitatea densităţii asociate.

Să notăm

$$\mathbf{D}^{\infty,1} := \bigcap_{r \geq 1} \mathbf{D}^{r,1}$$

şi $D_t^j(F)$, $t \in [0,T]$, $j = 1, \ldots, d$, derivata unei variabile aleatoare F privită ca element in $L^2\left([0,T] \times \Omega \, ; \, \mathbf{R}^d\right) \simeq L^2(\Omega \, ; \, H)$, unde $H = L^2\left([0,T] \, ; \, \mathbf{R}^d\right)$.

TEOREMA 2.6.1 *In ipotezele afirmatiei 1.5.1 avem că* $X^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ *pentru orice* $t \in [0,T]$ *şi* $i = 1, \ldots, m$. *In plus*

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E\left(\sup_{v \leq s \leq t} |D_v^j X^i(s)|^r\right) < \infty \, ,$$

iar derivatele $D_v^j X^i(t)$ satisfac ecuaţia liniară

$$D_v^j X(t) = \sigma_j(v, X(v)) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha=1}^{d} \int_v^t \bar{A}_{k,\alpha}(s) D_v^j \left(X^k(s)\right) dW_s^\alpha$$

$$+ \sum_{k=1}^{d} \int_v^t \bar{B}_k(s) D_v^j X^k(s) ds \tag{2.55}$$

pentru $v \leq t$ si $D_v^j X(t) = 0$ pentru $v > t$, unde $\bar{A}_{k,\alpha}(s)$ si $\bar{B}_k(s)$ sunt procese adaptate $m-$dimensionale uniform mărginite.

Demonstraţie. Vom folosi convenţia de sumare a indicilor inferiori şi superiori. Să considerăm aproximaţiile Picard : $X_0(t) = x$, şi

$$X_{n+1}(t) = x + \int_0^t \sigma_j(s, X_n(s)) dW_s^j + \int_0^t b(s, X_n(s))\, ds\ ,\ n \geq 0\ .$$

Vom demonstra că $X_n^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru toţi $i = 1, \ldots, m$; $n \geq 0$, $t \in [0, T]$ şi că

$$\sup_{0 \leq v \leq t} E\left(\sum_{v \leq s \leq t} | D_v X_n(s)|^r\right) \leq c(r, T)\,, \tag{2.56}$$

in care constantele $c(r, T)$ nu depind de n .

Fie $n \geq 1$ fixat. Presupunem că $X_n^i(s) \in \mathbf{D}^{1,\infty}$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$ şi $s \in [0, T]$. Aplicăm propoziţia 2.4.11 variabilelor aleatoare $X_n(s)$ şi funcţiilor σ_j^i , b^i ; obţinem că $\sigma_j^i(s, X_n(s)) 0$, $b^i(s, X_n(s)) \in \mathbf{D}^{2,1}$ şi că există procesele adaptate m–dimensionale $\bar{A}_j^{n,i}(s) = \left(\bar{A}_{j,1}^{n,i}(s), \ldots, \bar{A}_{j,m}^{n,i}(s)\right)$ şi $\bar{B}^{n,i}(s) = \left(\bar{B}_1^{n,i}(s), \ldots, \bar{B}_m^{n,i}(s)\right)$ uniform mărginite de K astfel incât

$$D_v\left[\sigma_j^i(s, X_n(s))\right] = \bar{A}_{j,k}^{n,i}(s) D_v\left(X_n^k(s)\right) \mathbf{1}_{\{v \leq s\}} \tag{2.57}$$

şi

$$D_v\left[b^i(s, X_n(s))\right] = \bar{B}_k^{n,i}(s) D_v\left(X_n^k(s)\right) \mathbf{1}_{\{v \leq s\}}\ . \tag{2.58}$$

De fapt aceste procese se obţin ca limite slabe ale şirurilor

$$\left\{\partial_k\left[\sigma_j^i * \alpha_m\right](s, X_n(s))\ ,\ m \geq 1\right\}\,,$$

$$\left\{\partial_k\left[b^i * \alpha_m\right](s, X_n(s)),\ m \geq 1\right\},$$

unde α_m este o aproximare a identităţii ; se verifică uşor că aceste limite slabe sunt măsurabile. Din propoziţia 2.4.8 deducem că procesele $\sigma^i_j(s, X_n(s)), b^i(s, X_n(s)) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$. Deci procesele

$$\left\{D^l_v\left[\sigma^i_j(s, X_n(s))\right],\ s \geq v\right\},$$

$$\left\{D^l_v\left[b^i(s, X_n(s))\right],\ s \geq v\right\}$$

sunt de pătrat integrabil şi adaptate, iar din relaţiile (2.57)-(2.58) rezultă

$$\left.\begin{array}{l}\left|D_v\left[\sigma^i_j(s, X_n(s))\right]\right| \\ \left|D_v\left[b^i(s, X_n(s))\right]\right|\end{array}\right\} \leq K \mid D_v X_n(s) \mid . \tag{2.59}$$

Deducem că $\int_0^t \sigma^i_j(s, X_n(s))dW^j_s$, $\int_0^t b^i(s, X_n(s))ds \in \mathbf{D}^{2,1}$ (din propoziţia 2.3.6) şi că, pentru $v \leq t$, avem

$$D^l_v\left[\int_0^t \sigma^i_j(s, X_n(s))dW^j_s\right] = \sigma^i_l(v, X_n(v))$$

$$+ \int_v^t D^l_v\left[\sigma^i_j(s, X_n(s))\right]dW^j_s \tag{2.60}$$

şi

$$D^l_v\left[\int_0^t b^i(s, X_n(s))ds\right] = \int_v^t D^l_v\left[b^i_j(s, X_n(s))\right]ds. \tag{2.61}$$

Din aceste egalităţi rezultă că $X^i_{n+1} \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ şi că estimarea din enunţ este satisfăcută pentru toţi X_n. Intr-adevăr, fie

$$\gamma_r = \sup_{0\leq t\leq T} \sup_{n,j} E(\mid \sigma_j(t, X_n(t)) \mid^r) .$$

Din (2.60)-(2.61) obţinem

$$E\left(\sup_{v\leq s\leq t} \mid D^j_v X_n(s)|^r\right)$$

$$\leq c(r)\left[\gamma_r + T^{r-1}\int_v^t E\left(\mid D^j_v X_n(s)|^r\right)ds\right]$$

şi apoi aplicăm lema lui Gronwall. Intrucât

$$E\left(\sup_{0\le s\le T} |X_n(s)-X(s)|^r\right) \longrightarrow 0$$

când $n\to\infty$; cum derivatele şirului $X_n^i(t)$ sunt mărginite uniform in $L^r(\Omega\ ;\ H)$ pentru orice $r\ge 2$, folosim argumentele propoziţiilor 2.4.11 şi 2.4.8 pentru a obţine că $X^i(t)\in \mathbf{D}^{\infty,1}$. In fine, aplicăm operatorul D in ecuaţia (2.53) şi deducem forma ecuaţiei diferenţiale stocastice liniare (2.55) satisfăcută de derivatele lui $X^i(t)$. □

Observaţie Dacă coeficienţii ecuaţiei diferenţiale stocastice (2.53) sunt diferenţiabili, atunci procesele adaptate şi mărginite care apar in formula (2.55) sunt date de

$$\bar{A}^i_{k,l}(s)=\frac{\partial\sigma^i_l}{\partial x^k}(s,X(s))\text{şi}$$

$$\bar{B}^i_k(s)=\frac{\partial b^i}{\partial x^k}(s,X(s)).$$

Vom vedea in continuare ce condiţii trebuie să indeplinească coeficienţii ecuaţiei (2.53) pentru ca $X^i(t)\in\mathbf{D}^\infty$. Să considerăm procesele adaptate şi continue $\alpha=\{\alpha(v,t)\ ,\ t\in[v,t]\}$, $V=\{V_j(t)\ ,\ t\in[0,T]\ ,\ j=0,\ldots,d\}$ astfel incât α este m–dimensional iar V_j ia valori in mulţimea matricelor de ordin $m\times m$. Presupunem că $\alpha^i(v,t)$, $V_j^{kl}(t)\in\mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru orice i,j,k,l şi că satisfac următoarele estimări

$$E\left(\sup_{0\le t\le T} |V_j(t)|^r\right) < \infty\ ,$$

$$\sup_{0\le v\le T} E\left(\sup_{v\le t\le T} |\alpha(v,t)|^r\right) < \infty\ ,$$

$$\sup_{0\le s\le t} E\left(\sup_{0\le t\le T} |D_sV_j(t)|^r\right) < \infty\ ,$$

$$\sup_{0\le s\le t}\ \sup_{0\le v\le T} E\left(\sup_{v\le t\le T} |D_s\alpha(v,t)|^r\right) < \infty\ ,$$

pentru orice $r \geq 2$ şi $j = 1, \ldots, d$.

LEMA 2.6.2 *Fie $Y = \{Y(t), v \leq t \leq T\}$ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice liniare*

$$Y(t) = \alpha(v,t) + \sum_{j=1}^{d} \int_v^t V_j(s) Y(s) dW_s^j \tag{2.62}$$

$$+ \int_v^t V_0(s) Y(s) ds .$$

Atunci $Y^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty,1}$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$ şi derivata $D_s Y^i(t)$ satisface, pentru $s \leq t$, următoarea ecuaţie liniară

$$D_s^j Y(t) = D_s \alpha(v,t) + V_j(s) Y(s) \mathbf{1}_{\{v \leq s \leq t\}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_v^t \left[D_s^j V_l(u) Y(u) + V_l(u) D_s^j Y(u) \right] dW_u^l$$

$$+ \int_v^t \left[D_s^j V_0(u) Y(u) + V_0(s) D_s^j Y(u) \right] du .$$

Ideea este de a aplica afirmaţia 1.5.2: prin inducţie, arătăm că aproximaţiile Picard $\in \mathbf{D}^{\infty,1}$ şi că verifică ecuaţia de mai sus. Să remarcăm că, in ipotezele date, soluţia ecuaţiei (2.62) satisface următoarele estimări

$$\sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |Y(t)|^r \right) < \infty ,$$

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \sup_{0 \leq v \leq T} E \left(\sup_{v \leq t \leq T} |D_s Y(t)|^r \right) < \infty ,$$

pentru orice $r \geq 2$.

TEOREMA 2.6.3 *Fie $X(t)$ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice (2.53). Dacă coeficienţii σ_j^i, b^i sunt infinit diferenţiabili cu derivatele de orice ordin mărginite, atunci $X^i(t) \in \mathbf{D}^{\infty}$ pentru orice $t \in [0,T]$ şi $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstraţie. Ştim din teorema 2.6.1 că, pentru $i = 1, \ldots, m$ şi $t \in [0,T]$, avem $X^i(t) \in \mathbf{D}^{r,1}$ pentru orice $r \geq 2$. În plus, derivatele $D_v^j X^i(t)$ satisfac următoarea ecuaţie diferenţială stocastică liniară

$$D_v^j X^i(t) = \sigma_j^i(v, X(v)) + \int_v^t \left(\partial_k \sigma_l^i\right)(s, X(s))\, D_v^j X^k(s) dW_s^l$$

$$+ \int_v^t \left(\partial_k b^i\right)(s, X(s))\, D_v^j X^k(s) ds\ . \tag{2.63}$$

Să notăm prin $D_{v_1,\dots,v_p}^{j_1,\dots,j_p}(X(t))$ derivata iterată de ordinul p a lui $X(t)$. Pentru o submulţime $K = \{\epsilon_1 < \ldots < \epsilon_\eta\} \subset \{1,\ldots,p\}$, notăm $j(K) = j_{\epsilon_1},\ldots,j_{\epsilon_\eta}$ şi $v(K) = v_{\epsilon_1},\ldots,v_{\epsilon_\eta}$. Fie

$$\alpha_{l,j_1,\dots,j_p}^i(s, v_1,\ldots,v_p)$$

$$= \sum \left(\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_\nu}\sigma_l^i\right)(s, X(s))\, D_{v(I_1)}^{j(I_1)}\left[X^{k_1}(s)\right]\ldots D_{v(I_\nu)}^{j(I_\nu)}\left[X^{k_\nu}(s)\right]$$

şi

$$\beta_{j_1,\dots,j_p}^i(s, v_1,\ldots,v_p)$$

$$= \sum \left(\partial_{k_1}\ldots\partial_{k_\nu} b^i\right)(s, X(s))\, D_{v(I_1)}^{j(I_1)}\left[X^{k_1}(s)\right]\ldots D_{v(I_\nu)}^{j(I_\nu)}\left[X^{k_\nu}(s)\right],$$

unde sumele se referă la mulţimea partiţiilor $\{1,\ldots,p\} = I_1 \bigcup \ldots \bigcup I_\nu$. Fie deasemeni $\alpha_j^i(s) = \sigma_j^i(s, X(s))$. Cu aceste notaţii, au loc următoarele proprietăţi pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$:

(a) Pentru orice $t \in [0,T]$, $r \geq 2$, $i = 1,\ldots,m,$ avem $X^i(t) \in \mathbf{D}^{r,p}$ şi

$$\sup_{v_1,\dots,v_p \in [0,T]} E\left(\sup_{r_1\vee\ldots\vee r_p \leq t \leq T} \mid D_{v_1,\dots,v_p}(X(t)) \mid^r\right) < \infty$$

(b) Derivata de ordin p satisface ecuaţia liniară

$$D_{v_1,\dots,v_p}^{j_1,\dots,j_p} = \sum_{\epsilon=1}^{p} \alpha^i{}_{j_\epsilon,j_1,\dots,j_{\epsilon-1},j_{\epsilon+1},\dots,j_p}(v_\epsilon, v_1,\ldots,v_{\epsilon-1},v_{\epsilon+1},\ldots,v_p)$$

$$+ \int_{v_1\vee\ldots\vee v_p}^t \left[\alpha_{l,j_1,\dots,j_p}^i(s, v_1,\ldots,v_p) dW_s^l + \beta_{j_1,\dots,j_p}^i(s, v_1,\ldots,v_p) ds\right]$$

dacă $t \geq v_1 \vee \ldots \vee v_p$ şi $D_{v_1,\dots,v_p}^{j_1,\dots,j_p}(X(t)) = 0$ dacă $t < v_1 \vee \ldots \vee v_p$.

Conform teoremei 2.6.1, aceste proprietăţi aū loc pentru $p = 1$; presupunem că sunt adevărate până la indicele p şi să observăm că $\alpha_{l,j_1,\dots,j_p}^i(s, v_1,\ldots,v_p)$ se compune din

$\left(\partial_k\sigma^i_j\right)(s,X(s))\,D^{j_1,\dots,j_p}_{v_1,\dots,v_p}\left(X^k(s)\right)$ (acest termen corespunde lui $\nu=1$ la care se adaugă un polinom in derivatele $\left(\partial_{k_1}\dots\partial_{k_\nu}\sigma^i_j\right)(s,X(s))$ cu $\nu\geq 2$ aplicate proceselor $D^{j(I)}_{v(I)}\left(X^k(s)\right)$ cu card $(I)\leq p-1$. Aplicăm lema 2.6.3 proceselor

$$Y(t)=D^{j_1,\dots,j_p}_{v_1,\dots,v_p}(X(t))\ ,\ t\geq v$$

$$V^{ik}_j(t)=\left(\partial_k\sigma^i_j\right)(t,X(t))\ ,1\leq i,k\leq m\ ,\ j=1,\dots,d\ ,$$

unde $v=v_1\vee\dots\vee v_p$, $\alpha(v,t)$ reprezintă termenii rămaşi in termenul din dreapta al ecuaţiei din (b) şi ţinem cont că

$$D^j_v\left[\alpha^i_{l,j_1,\dots,j_p}(t,v_1,\dots,v_p)\right]=\alpha^i_{l,j_1,\dots,j_p,j}(t,v_1,\dots,v_p,v)$$

şi că

$$D^j_v\left[\beta^i_{j_1,\dots,j_p}(t,v_1,\dots,v_p)\right]=\beta^i_{j_1,\dots,j_p,j}(t,v_1,\dots,v_p,v).$$

Obţinem că proprietatea (b) este adevărată pentru $p+1$; similar procedăm cu proprietatea (a).□

Exerciţii 1. Fie σ,b funcţii derivabile pe $\mathbf{R}$ şi cu derivatele mărginite. Notăm $\{X(t)\ ,\ t\in[0,T]\}$ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice

$$X(t)=x_0+\int_0^t\sigma\left(X(s)\right)dW_s+\int_0^t b\left(X(s)\right)ds\ .$$

Arătaţi că, pentru $0\leq s\leq t$, avem

$$D_sX(t)=\exp\left(\int_s^t\sigma'\left(X(r)\right)dW_r\right.$$

$$\left.+\int_s^t\left[b'-\frac{1}{2}\left(\sigma'\right)^2\right]\left(X(r)\right)dr\right).$$

2. Fie $\sigma\in C^2(\mathbf{R})$ cu derivatele de ordine 1 şi 2 mărginite, iar b o funcţie lipschitziană. Arătaţi că soluţia ecuaţiei

$$X(t)=x_0+\int_0^t\sigma(X(s))dW_s$$

$$+\int_0^t\left[b(X(s))+\frac{1}{2}\sigma(X(s))\sigma'(X(s))\right]ds$$

satisface $X(t) \in \mathbf{D}^{1,r}$ pentru orice $r \geq 2$ şi determinaţi derivatele $D_s X(t)$.

3. Fie $W = \{(W_t^1, W_t^2),\ t \geq 0\}$ o mişcare browniană 2–dimensională. Arătaţi că " aria lui Lévy " i.e. v.a.

$$F = \int_0^1 \left[W_s^1 dW_s^2 - W_s^2 dW_s^1\right]$$

nu este funcţională continuă de mişcarea browniană.

In continuare vom presupune că σ_j , b : $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ i.e. coeficienţii ecuaţiei (2.53) nu depind explicit de timp. Ne vor interesa condiţiile in care soluţia ecuaţiei

$$X(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(X(s))dW_s^j + \int_0^t b(X(s))ds \qquad (2.64)$$

are densitate regulată. Să observăm că, dacă subspaţiul generat de $\{\sigma_j(y), b(y)\ ;\ 1 \leq j \leq d,\ y \in \mathbf{R}^m\}$ are dimensiunea strict mai mică decât m, atunci legea lui $X(t)$, pentru orice $t \geq 0$, este singulară in raport cu măsura Lebesgue. Vom avea nevoie de următoarea ipoteză de nedegenerare, cunoscută sub numele de **condiţia lui Hörmander**:

(H) Spaţiul vectorial generat in punctul x_0 de câmpurile de vectori

$$\sigma_1\ , \ldots , \sigma_d\ ,$$

$$[\sigma_i, \sigma_j]\ ,\ 0 \leq i, j \leq d,$$

$$[\sigma_i\, [\sigma_j, \sigma_k]],\ 0 \leq i, j, k \leq d, \ldots$$

este $\mathbf{R}^m$.

Exemple Dacă matricea de difuzie

$$a(x) = \sum_{j=1}^{d} \sum_{k,l=1}^{m} \sigma_j^k(x) \sigma_j^l(x)$$

este eliptică in x_0 i.e. $a(x_0) > 0$, atunci condiţia lui Hörmander este satisfăcută pentru orice $t > 0$. Aplicaţiile devin interesante când $a(x_0)$ este degenerată.

1. Fie $m = d = 1$, $\sigma_1^1(x) = \sigma(x)$, $b^1(x) = b(x)$, atunci condiţia lui Hörmander spune ori că $\sigma(x_0) \neq 0$, ori există $n \geq 1$ astfel incât $\sigma^{(n)}(x_0)b(x_0) \neq 0$.

2. Fie $m = d = 2$, $X(0) = 0$, $B = 0$ şi câmpurile de vectori

$$\sigma_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

In acest caz, matricea de difuzie $a(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_1^2 \end{pmatrix}$ este degenerată de–a lungul lui $x_1 = 0$. Cum paranteza Lie $[\sigma_1, \sigma_2] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, câmpurile de vectori σ_1 , $[\sigma_1, \sigma_2]$ generează $\mathbf{R}^2$ şi condiţia lui Hörmander este satisfăcută.

TEOREMA 2.6.4 *Dacă coeficienţii ecuaţiei (2.64) sunt infinit diferenţiabili şi cu derivatele mărginite iar condiţia (H) este indeplinită, atunci soluţia $X(t)$ are legea absolut continuă in raport cu măsura Lebesgue şi, pentru orice $t > 0$, densitatea acestei legi este infinit diferenţiabilă.*

Comentariu Acest rezultat poate fi considerat ca o versiune probabilistă a teoremei de hipoelipticitate a lui L. Hörmander. Mai precis, am văzut la 1.5 că legea lui $X(t)$ satisface ecuaţia Kolmogorov "inainte" in sensul distribuţiilor. In consecinţă, faptul că această lege are o densitate de clasă C^∞ este in legătură cu caracterul hipoeliptic al operatorului $\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}^*$, iar teorema lui Hörmander implică hipoelipticitatea acestui operator sub ipoteza (H).

Demonstraţia teoremei 2.6.4 Fie $Y(t)$ matricea Iacobiană $\frac{\partial X(t)}{\partial x}$ care verifică ecuaţia stocastică

$$Y_j^i(t) = \delta_j^i + \int_0^t \left(\partial_k \sigma_l^i\right)(X(s))\, Y_j^k(s) dW_s^l$$
$$+ \int_0^t \left(\partial_k b^i\right)(X(s))\, Y_j^k(s) ds$$

(cf. afirmaţiei 1.5.2). Aplicând formula lui Itô, obţinem că

$$Y^{-1}(t) = I - \sum_{k=1}^{d} \int_0^t Y^{-1}(s) \partial\sigma_k(X(s)) dW_s^k$$

$$-\int_0^t Y^{-1}(s)\left[\partial b(X(s)) - \sum_{k=1}^{d} \partial\sigma_k(X(s))\,\partial\sigma_k(X(s))\right] ds\,,$$

unde $\partial\sigma_k$, ∂b sunt matricile iacobiene $\left(\frac{\partial\sigma_k^i}{\partial x_j}\right)$, $\left(\frac{\partial b^i}{\partial x_j}\right)$; $i,j = 1,\ldots,m$ De aici rezultă că

$$D_r^j X^i(t) = Y_l^i(t) Y^{-1}(r)_k^l \sigma_j^k(X(r))\,. \tag{2.65}$$

Intr-adevăr,

$$\sigma_j^i(X(r)) + \int_r^t \left(\partial_k\sigma_l^i\right)(X(s))\left\{Y_\alpha^k(s)Y^{-1}(r)_\beta^\alpha\sigma_j^\beta(X(r))\right\}dW_s^l$$

$$+\int_r^t \left(\partial_k b^i\right)(X(s))\left\{Y_\alpha^k(s)Y^{-1}(r)_\beta^\alpha\sigma_j^\beta(X(r))\right\}ds$$

$$= Y_l^i(t)Y^{-1}(r)_k^l\sigma_j^k(X(r)).$$

Să notăm

$$Q^{ij}(t) = < DX^i(t), DX^j(t) > = \sum_{k=1}^{d}\int_0^t D_r^k X^i(t) D_r^k X^j(t) dr$$

matricea Malliavin corespunzătoare lui $X(t)$. Din formula (2.65), rezultă că

$$Q(t) = Y(t)C(t)Y^T(t)\,,$$

unde

$$C^{ij}(t) = \sum_{l=1}^{d}\int_0^t Y^{-1}(s)_k^i\sigma_l^k(X(s))Y^{-1}(s)_j^i\sigma_l^j(X(s))ds\,,$$

Să considerăm un câmp de vectori $V(x) = V^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ de clasă C^∞ pe $\mathbf{R}^m$. Atunci

$$Y^{-1}(t)V(X(t)) = V(x_0) + \int_0^t Y^{-1}(s)[\sigma_k, V](X(s))dW_s^k$$

$$+ \int_0^t Y^{-1}(s)\left\{[\sigma_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}[\sigma_k,[\sigma_k,V]]\right\}(X(s))ds. \tag{2.66}$$

Această formulă rezultă din calculele următoare : din formula lui Itô obţinem

$$
\begin{aligned}
& Y^{-1}(t)V(X(t)) \\
&= V(x_0) + \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial V \sigma_k - \partial \sigma_k V)(X(s))dW_s^k \\
&\quad + \int_0^t Y^{-1}(s)(\partial V b - \partial b V)(X(s))ds \\
&\quad + \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial \sigma_k \partial \sigma_k V)(X(s))ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{i,j=1}^m \partial_i \partial_j V(X(s)) \sum_{k=1}^d \sigma_k^i(X(s))\sigma_k^j(X(s))ds \\
&\quad - \int_0^t Y^{-1}(s) \sum_{k=1}^d (\partial \sigma_k \partial V \sigma_k)(X(s))ds \,.
\end{aligned}
$$

şi apoi

$$
\begin{aligned}
& [\sigma_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \\
&= \left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \sigma_k^\nabla \sigma_k, V\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d [\sigma_k, [\sigma_k, V]] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \Big\{-\left(\sigma_k^\nabla \sigma_k\right)^\nabla + V^\nabla\left(\sigma_k^\nabla \sigma_k\right) + \sigma_k^\nabla\left(\sigma_k^\nabla V\right) \\
&\quad - \sigma_k^\nabla\left(V^\nabla \sigma_k\right) - \left(\sigma_k^\nabla V\right)^\nabla \sigma_k + \left(V^\nabla \sigma_k\right)^\nabla \sigma_k\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \Big\{-\sigma_k^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l V + V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k + V^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l \sigma_k \\
&\quad + \sigma_k^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l V + \sigma_k^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l V - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k \\
&\quad - \sigma_k^i V^l \partial_i \partial_l \sigma_k - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k + V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^d \left\{V^i \partial_i \sigma_k^l \partial_l \sigma_k + \frac{1}{2}\sigma_k^i \sigma_k^l \partial_i \partial_l V - \sigma_k^i \partial_i V^l \partial_l \sigma_k\right\}
\end{aligned}
$$

deoarece

$$\partial V \sigma_k - \partial \sigma_k V = [\sigma_k, V] \text{şi } \partial V b - \partial b V = [b, V].$$

Pentru prima parte a teoremei, conform cu propoziţia 2.5.1 (sau teorema 2.5.2), este suficient să arătăm că matricea $C(t)$ este inversabilă a.p.t. Să presupunem prin reducere la absurd că $P\{\det C(t) = 0\} > 0$. Fie K_s subspatiul liniar generat in $\mathbf{R}^n$ de $\{Y^{-1}(u)\sigma_k(X(u))\ ;\ 0 \le u \le s\ , k = 1, \ldots, d\}$. Familia $\{K_s, s \ge 0\}$ este crescătoare şi, din legea 0-1 , subspaţiul $K_{0+} := \bigcap_{s>0} K_s$ este determinist cu probabilitate 1. Definim timpul de stopare

$$\tau = \inf\ \{s > 0\ :\ \dim K_s\ > \dim K_{0+}\}\,.$$

Observăm că $P(\tau > 0) = 1$ şi, pentru orice $v \in \mathbf{R}^m$ de normă 1 , avem

$$v^T C(t) v = \sum_{k=1}^{d} \int_0^t \left| v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s)) \right|^2 ds$$

In consecinţă, printr–un argument de continuitate, obtinem că

$$v^T C(t) v = 0 \Longrightarrow v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s)) = 0$$

pentru orice $0 \le s \le t$ şi orice $k = 1, \ldots, d$. Deci $K_{0+} \ne \mathbf{R}^m$ pentru că, in caz contrar ar rezulta $K_s = \mathbf{R}^m$ pentru orice $s > 0$ şi orice vector v care satisface $v^T C(t) v = 0$ ar fi egal cu 0 , adică $C(t)$ ar fi inversabilă, deci contradicţie.

Fie acum $v \ne 0$ fixat şi ortogonal pe K_{0+} . Observăm că $v \perp K_s$ pentru $s < \tau$ i.e.

$$v^T Y^{-1}(s)\sigma_k(X(s)) = 0\,,$$

$$\text{pentru } k = 1, \ldots, d \text{ si } s < \tau\,. \tag{2.67}$$

Să introducem următoarele mulţimi de câmpuri de vectori

$\mathcal{S}_0 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$;
$\mathcal{S}_n = \{[\sigma_k, V]\ ,\ k = 1, \ldots, d\ ,\ V \in \mathcal{S}_{n-1}\}$, pentru $n \ge 1$;
$\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$

şi

$\mathcal{S}'_0 = \mathcal{S}_0$;
$\mathcal{S}'_n = \Big\{[\sigma_k, V]$, $k = 1, \ldots, d$, $V \in \mathcal{S}'_{n-1}$;
$[\sigma_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}[\sigma_j, [\sigma_j, V]]$, $V \in \mathcal{S}'_{n-1}, \Big\}$;
$\mathcal{S}' = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{S}'_n$.

Vom nota prin $\mathcal{S}_n(x)$ submulţimea lui $\mathbf{R}^m$ obţinută prin "ingheţarea" lui x in câmpurile de vectori din $\mathcal{S}_n$. Spaţiile vectoriale generate de $\mathcal{S}(x)$ sau de $\mathcal{S}'(x)$ coincid cu $\mathbf{R}^m$. Vom arăta că, pentru orice $n \geq 0$, vectorul v este ortogonal pe $\mathcal{S}'_n(x_0)$, ceea ce este in contradicţie cu condiţia lui Hörmander. Aceasta va rezulta din următoarea proprietate de ortogonalitate

$$v^T Y^{-1}(s) V\left(X(s)\right) = 0, \tag{2.68}$$

$$\text{pentru orice } s < \tau,\ V \in \mathcal{S}'_n\ ,\ n \geq 0.$$

Intr–adevăr, pentru $s = 0$, avem $Y^{-1}(0)V\left(X(0)\right) = V(x_0)$. Formula (2.68) se demonstrează prin inducţie. Pentru $n = 0$, se reduce la (2.67). Să presupunem că are loc pentru $n - 1$ şi fie $V \in \mathcal{S}'_{n-1}$. Folosind formula (2.66) şi ipoteza de inducţie, obţinem

$$\int_0^s v^T Y^{-1}(u)\left\{[\sigma_0, V] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}[\sigma_k, [\sigma_k, V]]\right\}(X(u))\, du$$

$$+ \int_0^s v^T Y^{-1}(u)[\sigma_k, V]\left(X(u)\right) dW_u^k = 0$$

pentru $s < \tau$. De aici rezultă că cei doi integranzi din ultima formulă sunt 0 pentru orice $u < \tau$, deoarece un semimartingal continuu care se anulează pe un interval aleator $[0, \tau)$ are atât partea de variaţie mărginită, cât şi variaţia pătratică a părţii martingal, nule.

Pentru partea a doua a teoremei 2.6.4, vom avea nevoie de următoarele două leme.

LEMA 2.6.5 *Fie $C(\omega)$ o matrice aleatoare $m \times m$, simetrică, pozitiv definită, astfel ca elementele ei C^{ij} să aibă momente de orice ordin şi, pentru orice $p \geq 2$, există $\epsilon_0(p)$ cu proprietatea*

$$\sup_{|v|=1} P\left\{v^T C v \leq \epsilon\right\} \leq \epsilon^p \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon(p).$$

Atunci $(\det C(t))^{-1} \in L^p$ *pentru orice* p.

Demonstraţie. Fie $\lambda = \inf_{|v|=1} v^T C v$ cea mai mică valoare proprie a lui C. Stim că $\lambda^m \leq \det C$, deci este suficient să arătăm ca $E(\lambda^{-p}) < \infty$ pentru orice $p \geq 2$. Notăm $| C | = \left[\sum_{i,j=1}^m (C^{ij})^2\right]^{1/2}$; pentru $\epsilon > 0$ fixat, fie $v_1, \ldots, v_N$ vectori unitari cu proprietatea că bilelele cu centrele in aceste puncte şi de rază $\epsilon^2/2$ acoperă sfera unitate S^{m-1}.Obţinem

$$P\{\lambda < \epsilon\} = P\left\{\inf_{|v|=1} v^T C v < \epsilon\right\}$$

$$\leq P\left\{\inf_{|v|=1} v^T C v < \epsilon, \ | C | \leq \frac{1}{\epsilon}\right\} + P\left\{| C | > \frac{1}{\epsilon}\right\} \tag{2.69}$$

Să presupunem că $| C(\omega) | \leq \frac{1}{\epsilon}$ şi $v_k^T C v_k \geq 2\epsilon$ pentru $k = 1, \ldots, N$. Pentru orice vector unitar v există un v_k astfel ca $| v - v_k | \leq \epsilon^2/2$, şi de aici obtinem

$$v^T C v \geq v_k^T C v_k - | v^T C v - v_k^T C v_k |$$

$$\geq 2\epsilon - \left[| v^T C v - v^T C v_k | + | v^T C v_k - v_k^T C v_k |\right]$$

$$\geq 2\epsilon - 2 | C || v - v_k | \geq \epsilon.$$

In consecinţă, (2.69) este mărginită de

$$P\left(\bigcup_{k=1}^N \left\{v_k^T C v_k < 2\epsilon\right\}\right) + P\left\{| C | > \frac{1}{\epsilon}\right\}$$

$$\leq N(2\epsilon)^{p+2m} + \epsilon^p E\left(| C |^p\right), \text{ daca } \epsilon \leq \frac{1}{2}\epsilon_0(p+2m).$$

Numărul N depinde de ϵ, dar este dominat de o constantă inmulţită cu ϵ^{-2m}. Obţinem $P\{\lambda < \epsilon\} \leq const.\ \epsilon^p$ pentru orice $\epsilon \leq \epsilon_1(p)$ şi orice $p \geq 2$, deci λ^{-1} are momente de orice ordin.□

LEMA 2.6.6 *Fie* $\alpha, y \in \mathbf{R}$ *si* $\beta(t)$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_d(t))$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_d(t))$ *procese adaptate. Punem*

$$a(t) = \alpha + \int_0^t \beta(s)ds + \int_0^t \gamma_i(s)dW_s^i$$

$$Y(t) = y + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t u_i(s)dW_s^i \ ,$$

şi presupunem că există $t_0 > 0$ şi $p \geq 2$ astfel ca

$$c = E\left(\sup_{0\leq t\leq t_0} (\mid\beta(t)\mid + \mid\gamma(t)\mid + \mid a(t)\mid + \mid u(t)\mid)^p\right) < \infty. \tag{2.70}$$

Atunci, pentru orice $q > 8$ şi pentru orice $r, \nu > 0$ cu $18r + 9\nu < q - 8$, există $\epsilon_0 = \epsilon_0(t_0, q, r, \nu)$ astfel ca, pentru orice $\epsilon \leq \epsilon_0$, să avem

$$P\left\{\int_0^{t_0} Y^2(s)dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0}\left(\mid a(t)\mid^2 + \mid u(t)\mid^2\right)dt \geq \epsilon\right\} \tag{2.71}$$

$$\leq c\epsilon^{rp} + e^{-\epsilon^{-\nu}} \ .$$

Interpretarea acestei leme este următoarea. Se ştie că, dacă procesele de variaţie pătratică şi cel cu variaţie mărginită asociate unui semimartingal continuu se anulează intr-un interval, atunci semimartingalul se anulează şi el pe acel interval. Inegalitatea (2.71) furnizează o versiune calitativă a acestui rezultat i.e. dacă procesul de variaţie pătratică sau cel cu variaţie mărginită asociate unui semimartingal continuu sunt mari, atunci semimartingalul este mic cu o probabilitate exponenţială mică.

Demonstraţia lemei 2.6.6 Notam $\theta_t = \mid\beta(t)\mid + \mid\gamma(t)\mid + \mid a(t)\mid + \mid u(t)\mid$, fixăm $q > 8$, r, ν cu $19r + 9\nu < q - 8$ şi definim timpul de stopare

$$T = \inf_{s\geq 0}\left\{\sup_{0\leq u\leq s}\theta_u > \epsilon^{-r}\right\} \wedge t_0.$$

Avem

$$P\left\{\int_0^{t_0} Y^2(s)dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0}\left(\mid a(t)\mid^2 + \mid u(t)\mid^2\right)dt \geq \epsilon\right\} \leq A_1 + A_2,$$

unde $A_1 = P\{T < t_0\}$ şi $A_2 =$

$$P\left\{\int_0^{t_0} Y^2(s)dt < \epsilon^q, \int_0^{t_0}\left(\mid a(t)\mid^2 + \mid u(t)\mid^2\right)dt \geq \epsilon,\ T = t_0\right\}.$$

Din definiţia lui T şi din condiţia (2.70), obţinem

$$A_1 \leq P\left\{\sup_{0\leq s\leq t_0} \theta_s > \epsilon^{-r}\right\} \leq \epsilon^{rp} E\left[\sup_{0\leq s\leq t_0} \theta_s^p\right] \leq c\epsilon^{rp} .$$

Să notăm

$$A_t = \int_0^t a(s)ds,\ M_t = \int_0^t u_i(s)dW_s^i,$$

$$N_t = \int_0^t Y(s)u_i(s)dW_s^i,\ Q_t = \int_0^t A(s)\gamma_i(s)dW_s^i.$$

şi definim pentru orice $\rho_i, \delta_i > 0$, $i = 1, 2, 3$:

$$B_1 = \left\{< N >_T < \rho_1,\ \sup_{0\leq s\leq T} \mid N_s \mid \geq \delta_1\right\},$$

$$B_2 = \left\{< M >_T < \rho_2,\ \sup_{0\leq s\leq T} \mid M_s \mid \geq \delta_2\right\}$$

$$B_3 = \left\{< Q >_T < \rho_3\ ,\ \sup_{0\leq s\leq T} \mid Q_s \mid \geq \delta_3\right\}.$$

Conform inegalităţii exponenţiale pentru martingale, obţinem

$$P\left(B_i\right) \leq 2\exp\left(-\delta_i^2/2\rho_i\right), \tag{2.72}$$

pentru $i = 1, 2, 3$. Să presupunem pentru moment că am demonstrat

$$\left\{\int_0^T Y^2(t)dt < \epsilon^q, \int_0^T \left(\mid a(t) \mid^2 + \mid u(t) \mid^2\right) dt \geq \epsilon,\ T = t_0\right\}$$

$$\subset B_1 \cup B_2 \cup B_3, \tag{2.73}$$

pentru alegerea particulară a lui δ_i si ρ_i :

$$\begin{gathered}\delta_1\ = \epsilon^{q_1},\ q_1 = \tfrac{q}{2} - r - \tfrac{\nu}{2},\ \rho_1 = \epsilon^{-2r+q}\\ \delta_2\ = \epsilon^{q_2},\ q_2 = \tfrac{q}{8} - \tfrac{5r}{4} - \tfrac{5\nu}{8},\ \rho_2 = \left(1 + \epsilon^{-2r}\right)\left(2t_0 + 1\right)^{1/2} \epsilon^{q_1/2}\\ \delta_3\ = \epsilon^{q_3},\ q_3 = \tfrac{q}{8} - \tfrac{9r}{4} - \tfrac{9\nu}{8},\ \rho_3 = 36\epsilon^{-2r+2q_2} t_0.\end{gathered}$$

Din inegalitatea (2.72) şi incluziunea (2.73) obţinem

$$A_2 \leq 2\exp\left(\exp\left(-\delta_1^2/2\rho_1\right) + \exp\left(-\delta_2^2/2\rho_2\right) + \exp\left(-\delta_3^2/2\rho_3\right)\right)$$

$$\leq 2\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\epsilon^{-\nu}\right) + \exp\left(-\frac{1}{4\sqrt{1+2t_0}}\epsilon^{-\nu}\right) + \exp\left(-\frac{1}{72t_0}\epsilon^{-\nu}\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(-\epsilon^{-\nu}\right) \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0,$$

deoarece $2q_1 + 2r - q = 2q_2 + 2r - \frac{q_1}{2} = 2q_3 + 2r - 2q_2 = -\nu$, ceea ce incheie demonstraţia. Rămâne de demonstrat deci formula (2.73). Fie $\omega \notin B_1 \cup B_2 \cup B_3$, $T(\omega) = t_0$ şi $\int_0^T Y^2(t)dt < \epsilon^q$. Atunci

$$< N >_T = \int_0^T Y^2(t) \mid u(t) \mid^2 dt < \epsilon^{-2r+q} = \rho_1.$$

Cum $\omega \notin B_1$, avem $\sup_{0\leq s\leq T} \mid \int_0^T Y(s) \mid u^i(s) \mid dW_s^i \mid < \delta_1 = \epsilon^{q_1}$. De asemenea, avem

$$\sup_{0\leq s\leq T} \mid \int_0^t Y(s)a(s)ds \mid \leq \left(t_0\int_0^T Y^2(t)a(t)^2dt\right)^{1/2} < t_0^{1/2}\epsilon^{-r+q/2},$$

deci

$$\sup_{0\leq s\leq T} \mid \int_0^t Y(s)dY(s) \mid < t_0^{1/2}\epsilon^{-r+q/2} + \epsilon^{q_1}.$$

Din formula lui Ito avem $Y^2(t) = y^2 + 2\int_0^t Y(s)dY(s) + < M >_t$, deci

$$\int_0^T < M >_t dt = \int_0^T Y^2(t)dt - Ty^2 - 2\int_0^T\left(\int_0^t Y(s)dY(s)\right)dt$$

$$< \epsilon^q + 2t_0\left(t_0^{1/2}\epsilon^{-r+q/2} + \epsilon^{q_1}\right) < (2t_0+1)\,\epsilon^{q_1}, \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

Cum $< M >_t$ este proces crescător, pentru orice $0 < \gamma < T$ avem $\gamma < M >_{T-\gamma} < (2t_0+1)\,\epsilon^{q_1}$ şi deci $< M >_T <$ $\gamma^{-1}(2t_0+1)\,\epsilon^{q_1} + \gamma\epsilon^{-2r}$. Alegând $\gamma = \delta_2$, obtinem $< M >_T < \rho_2$.

Cum $\omega \notin B_1$, obţinem $\sup_{0\leq s\leq T} \mid M_t \mid < \delta_2 = \epsilon^{q_2}$. Reamintim că $\int_0^T Y^2(t)dt < \epsilon^q$ deci, din inegalitatea lui Cebişev, obţinem

$$\lambda\left\{t \in [0,T] : \mid Y(t) \mid \geq \epsilon^{q/3}\right\} \leq \epsilon^{q/3},$$

deci

$$\lambda\left\{t \in [0,T] : \mid y + A(t) \mid \geq \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}\right\} \leq \epsilon^{q/3}.$$

Putem presupune că $\epsilon^{q/3} < t_0/2$ dacă $\epsilon < \epsilon_0$ şi deci, pentru orice $t \in [0,T]$, există $s \in [0,T]$ astfel ca $\mid s - t \mid \leq \epsilon^{q/3}$ şi $\mid y + A(s) \mid < \epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}$. In consecinţă,

$$\mid y + A(t) \mid \leq \mid y + A(s) \mid + \mid \int_s^t a(r)dr \mid < \left(1 + \epsilon^{-r}\right)\epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}.$$

In particular, $\mid y \mid < (1 + \epsilon^{-r})\,\epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}$ şi pentru orice $t \in [0,T]$ avem

$$\mid A(t) \mid < 2\left(\left(1 + \epsilon^{-r}\right)\epsilon^{q/3} + \epsilon^{q_2}\right) \leq 6\epsilon^{q_2},$$

deoarece $q_2 < \frac{q}{3} - r$. Aceasta implică

$$< Q >_t = \int_0^T A^2(t) \mid \gamma(t) \mid^2 dt < 36 t_0 \epsilon^{2q_2 - 2r} = \rho_3.$$

Cum $\omega \notin B_3$, avem

$$\mid Q_T \mid = \mid \int_0^T A(t)\gamma_i(t)dW_i(t) \mid < \delta_3 = \epsilon^{q_3}.$$

Din formula lui Itô avem

$$\int_0^T a^2(t)dt = \int_0^T a(t)dA(t)$$

$$= a_T A_T - \int_0^T A(t)\left(\beta(t)dt + \gamma_i(t)dW_i(t)\right),$$

şi obtinem estimarea

$$\int_0^T a^2(t)dt < 6\left(t_0 + 1\right)\epsilon^{q_2 - r} + \epsilon^{q_3} < 2\epsilon^{q_3} \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0.$$

In fine, obţinem

$$\int_0^T \left(a^2(t) + \mid u(t) \mid^2\right) dt$$

$$< 2\epsilon^{q_3} + \left(1 + \epsilon^{-r}\right)(2t_0 + 1)^{1/2}\epsilon^{q_1/2} < \epsilon \text{ pentru } \epsilon \le \epsilon_0. \square$$

Demonstrația părții a doua a teoremei 2.6.4 Fixam $t > 0$ şi vrem să arătăm că $E\left[(\det C(t))^{-p}\right] < \infty$ pentru orice $p \ge 2$. Conform lemei 2.6.5, este suficient să arătăm că, pentru orice $p \ge 2$ avem

$$\sup_{|v|=1} P\left\{v^T C(t) v \le \epsilon\right\} \le \epsilon^p \text{ pentru orice } \epsilon \le \epsilon(p).$$

Reamintim urmatoarea expresie pentru forma pătratică asociată matricei $C(t)$:

$$v^T C(t) v = \sum_{j=1}^{d} \int_0^t | \, v^T Y^{-1}(s)\sigma_j(X(s)) \, |^2 \, ds.$$

Din condiția lui Hörmander, există un intreg $j_0 \ge 0$ astfel ca spaţiul liniar generat de câmpurile de vectori $\bigcup_{j=0}^{j_0} \mathcal{S}_j'(x)$ in punctul x_0 să aibă dimensiunea m. In consecință, există constantele $R, c > 0$ astfel ca

$$\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{V \in \mathcal{S}_j'} \left(v^T V(y)\right)^2 \ge c, \text{ pentru orice } \; | \, v \, | = 1 \text{ si } \; | \, y - x \, | < R.$$

Pentru $j = 0, 1, \ldots, j_0$ punem $m(j) = 2^{-4j}$ şi definim mulţimile

$$E_j = \left\{ \sum_{V \in \mathcal{S}_j'} \int_0^t \left(v^T Y^{-1}(s) V(X(s))\right)^2 ds \le \epsilon^{m(j)} \right\}.$$

Observăm că $\left\{v^T C(t) v \le \epsilon\right\} = E_0$ deoarece $m(0) = 1$. Fie descompunerea

$$E_0 \subset (E_0 \cap E_1^c) \cup (E_1 \cap E_2^c) \cup \ldots \cup \left(E_{j_0-1} \cap E_{j_0}^c\right) \cup F,$$

unde $F = E_0 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{j_0}$. Atunci, pentru orice vector unitar v avem

$$P\left\{v^T C(t) v \le \epsilon\right\} = P(E_0) \le P(F) + \sum_{j=0}^{j_0} P\left(E_{j-1} \cap E_j^c\right)$$

Vom estima acum termenii acestei sume.

Pasul 1. Fie timpul de stopare S definit prin

$$\inf_{\sigma\geq 0}\left\{\sup_{0\leq s\leq\sigma}\mid X(s)-x_0\mid\geq R \text{ sau } \sup_{0\leq s\leq\sigma}\mid Y^{-1}(s)-I\mid\geq\frac{1}{2}\right\}\wedge t.$$

Putem scrie

$$P(F)\leq P\left(F\cap\left\{S\geq\epsilon^\beta\right\}\right)+P\left\{S<\epsilon^\beta\right\},$$

unde $0<\beta<m(j_0)$. Pentru ϵ suficient de mic, intersectia $F\cap\left\{S\geq\epsilon^\beta\right\}$ este vidă. Intr-adevar, dacă $S\geq\epsilon^\beta$, atunci

$$\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in S_j'}\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)V\left(X(s)\right)\right)^2ds \tag{2.74}$$

$$\geq\sum_{j=0}^{j_0}\sum_{V\in S_j'}\int_0^S\left(\frac{v^TY^{-1}(s)V\left(X(s)\right)}{\mid v^TY^{-1}(s)\mid}\right)^2\mid v^TY^{-1}(s)\mid^2ds\geq\frac{c\epsilon^\beta}{4},$$

deoarece $s<S$ implică $\mid v^TY^{-1}(s)\mid\geq 1-\mid I-Y^{-1}(s)\mid\geq\frac{1}{2}$. Pe de altă parte, expresia (2.74) este dominată de $(j_0+1)\,\epsilon^{m(j_0)}$ pe mulţimea F şi deci, pentru ϵ suficient de mic avem $F\cap\left\{S\geq\epsilon^\beta\right\}=\emptyset$. Mai mult, are loc

$$P\left\{S<\epsilon^\beta\right\}$$

$$\leq P\left\{\sup_{0\leq s\leq\epsilon^\beta}\mid X(s)-x_0\mid\geq R\right\}+P\left\{\sup_{0\leq s\leq\epsilon^\beta}\mid Y^{-1}(s)-I\mid\geq\frac{1}{2}\right\}$$

$$\leq R^{-q}E\left[\sup_{0\leq s\leq\epsilon^\beta}\mid X(s)-x_0\mid^q\right]+2^qE\left[\sup_{0\leq s\leq\epsilon^\beta}\mid Y^{-1}(s)-I\mid^q\right],$$

pentru orice $q\geq 2$. Din inegalitatile lui Burkholder si Hölder deducem că $P\left\{S<\epsilon^\beta\right\}\leq C\epsilon^{q\beta/2}$ pentru orice $q\geq 2$, ceea ce dă o estimare pentru $P(F)$.

Pasul 2. Pentru orice $j=0,\ldots,j_0$ definim probabilitatea următoare

$$P\left(E_{j-1}\cap E_j^c\right)=P\left\{\sum_{V\in S_{j-1}'}\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)V\left(X(s)\right)\right)^2ds\leq\epsilon^{m(j-1)}\right.,$$

$$\left.\sum_{V\in\mathcal{S}'_j}\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)V(X(s))\right)^2ds>\epsilon^{m(j)}\right\}$$

$$\leq\sum_{V\in\mathcal{S}'_{j-1}}P\left\{\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)V(X(s))\right)^2ds\leq\epsilon^{m(j-1)}\right.,$$

$$\sum_{k=1}^d\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)[\sigma_k,V](X(s))\right)^2ds+\int_0^t\left(v^TY^{-1}(s)\left([\sigma_0,V]+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d[\sigma_j,[\sigma_j,V]]\right)(X(s))\right)^2ds>\frac{\epsilon^{m(j)}}{2n(j-1)}\right\},$$

unde $n(j)$ inseamnă card $\mathcal{S}'_j$. Fie semimartingalul continuu $\left\{v^TY^{-1}(s)V(X(s)),\ s\geq0\right\}$; procesul de variaţie pătratică asociat lui este

$$\sum_{k=1}^d\int_0^s\left(v^TY^{-1}(\sigma)[\sigma_k,V](X(\sigma))\right)^2d\sigma,$$

iar procesul de variaţie mărginită asociat este dat de

$$\int_0^s v^TY^{-1}(\sigma)\left\{[\sigma_0,V]+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d[\sigma_j,[\sigma_j,V]]\right\}(X(\sigma))\,d\sigma.$$

Tinând cont că $8m(j)<m(j-1)$, obţinem estimarea căutată din lema 2.6.6 aplicată semimartingalului

$$Y(t)=v^TY^{-1}(t)V(X(t))$$

şi demonstraţia se incheie. □

Exemple 1. Fie $W=\{(W_t^1,W_t^2)\ ,\ t\geq0\}$ o mişcare browniană 2–dimensională şi procesul $X=\{X(t),t\geq0\}$ dat de

$$\begin{cases} X^1(t)=W_t^1\\ X^2(t)=\int_0^t W_s^1dW_s^2\ .\end{cases}$$

Determinaţi matricea Malliavin $Q(t)$ corespunzătoare lui $X(t)$ şi arătaţi că

$$\det\ Q(t)\geq t\int_0^t\left(W_s^1\right)^2ds\ .$$

Se poate arăta că $E\left|\int_0^t (W_s^1)^2 ds\right|^{-r} < \infty$ pentru orice $r \geq 2$ şi de aici rezultă că, pentru orice $t > 0$, $X(t)$ are densitatea infinit derivabilă.

2. Fie $f(t,s)$ de pătrat integrabil pe $[0,1]^2$ şi fie $F = I_2(f)$. Arătaţi că

$$\| DF \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \, W(e_n)^2 ,$$

unde λ_n , e_n sunt valorile şi vectorii proprii corespunzători operatorului asociat lui f . In cazul particular $\lambda_n = (\pi n)^{-2}$, se poate arăta că

$$P\left(\| DF \|^2 < \epsilon\right) \leq c \exp\left(-\frac{d}{\epsilon}\right) ,$$

cu $c, d > 0$ şi deci F are densitatea infinit derivabilă.

3

DEVIAŢII MARI

3.1 REZULTATE GENERALE

Pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ vom considera un şir de variabile aleatoare reale $\{X_n, n \geq 1\}$ independente şi identic repartizate, cu repartiţia (legea) μ. Să notăm

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n). \tag{3.1}$$

Comportamentul asimptotic al probabilităţilor

$$P\left(\overline{X}_n \in A\right), A \text{ boreliană din } \mathbf{R}, \text{ când } n \to \infty$$

este descris, in ipoteza $\int | x | d\mu(x) < \infty$, de legea tare a numerelor mari. Mai precis, intrucât $\overline{X}_n \to m := \int x d\mu(x)$ aproape sigur, obţinem că $\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 1$ dacă A conţine o vecinătate a lui m, in timp ce $\lim_{n\to\infty} P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0$ dacă $m \notin \bar{A}$.

Pentru n mare, un eveniment de tipul $\left\{\overline{X}_n \in A\right\}$ cu $m \notin \bar{A}$ reprezintă o situaţie de **deviaţie mare** in raport cu m (sau de la media m). Calificativul "mare" se referă la faptul că $\overline{X}_n$ evită o vecinătate a lui m a cărei mărime nu tinde la 0 când $n \to \infty$.

Mai general, după mărime, deviaţiile corespund evenimentelor de tipul $\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{a_n} \in A\right)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$, astfel

Tip de deviaţii	Definiţie
mari	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in [1, \infty]$
moderate (medii)	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \in [1, \infty]$, si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$
mici	$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \in (0, 1]$.

In particular, legile slabă şi tare a numerelor mari (cu $a_n = n$) se incadrează la deviaţii mari, iar teorema limită centrală (cu $a_n = n^{1/2}$) şi legea logaritmului iterat (cu $a_n = (2n \log\log n)^{1/2}$) se incadrează la deviaţii moderate.

In acest curs vom prezenta teoria deviaţiilor mari clasice (i.e. pentru $a_n = n$), in dimensiune finită şi infinită (i.e când X_n iau valori intr-un spaţiu Banach real şi separabil).

Vom prezenta in continuare deviaţiile mari in cazul in care multimea A de mai sus este o semi-dreaptă reală.

Notăm **transformarea Laplace** a repartiţiei μ aplicaţia $\hat{\mu} : \mathbf{R} \to (0, +\infty]$ dată de

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{R}} e^{tx} d\mu(x) \tag{3.2}$$

şi **transformarea Cramer** $\lambda : \mathbf{R} \to [0, +\infty]$ a lui μ aplicaţia

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)], \; x \in \mathbf{R}. \tag{3.3}$$

Observaţii 1. Ca anvelopă superioară de funcţii liniare, λ este convexă şi inferior semi-continuă.
Dacă are loc $\int | x | d\mu(x) < \infty$, atunci

2. $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0 \iff \lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$.

3. Există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty \iff \lim_{x \to \infty} \lambda(x) = +\infty$.

Intr-adevăr, dacă $\hat{\mu}(t) \equiv +\infty$ pentru orice $t > 0$, din relaţia (3.3) obţinem că $\lambda(x) = \sup_{t \leq 0} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$ şi deci $\lambda(x) \equiv 0$ pentru orice $x \geq 0$. Dacă există $t > 0$ astfel ca $\hat{\mu}(t) < \infty$, relaţia $\lambda(x) \geq tx - \log \hat{\mu}(t)$ arată că $\lim_{x \to \infty} \lambda(x) = +\infty$. Implicaţiile reciproce din (2) şi (3) rezultă din implicaţiile directe din (3) resp. (2).

Rezultatele 1,2 şi 3 rămân adevărate dacă inlocuim $t, x > 0$, $x \to +\infty$ prin $t, x < 0$, $x \to -\infty$

4. Dacă $\hat{\mu}$ este finită intr-o vecinătate a lui 0, atunci funcţia λ işi atinge minimul in punctul $m = \int_{\mathbf{R}} x d\mu(x)$, iar $\lambda''(m) = 1/\sigma^2$, unde σ^2 este dispersia lui μ.

Exemple 1. Dacă $\mu = p\delta_u + (1-p)\delta_v$ cu $u < v$ şi $0 < p < 1$, avem

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{x-u}{v-u}\log\frac{x-u}{1-p} + \frac{v-x}{v-u}\log\frac{v-x}{p} - \log(v-u)\,, \text{dacă } u < x < v \\ +\infty, \text{ dacă } x < u \text{ sau } x > v \\ -\log p \text{ pentru } x = u \\ -\log(1-p) \text{ pentru } x = v. \end{cases}$$

2. Dacă μ este repartiţia exponenţială e_1, atunci

$$\lambda(x) = \begin{cases} x - 1 - \log x, \text{ dacă } x > 0 \\ +\infty, \text{ dacă } x \le 0. \end{cases}$$

3. Dacă μ este repartiţia normală (gausiana) $N(m, \sigma^2)$, atunci $\lambda(x) = \frac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2$, $x \in \mathbf{R}$.

TEOREMA 3.1.1 *Fie $\{X_n, n \ge 1\}$ şir de variabile aleatoare reale independente şi identic repartizate, cu aceeaşi repartiţie μ. Fie $\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ şi λ transformarea Cramer a lui μ. Atunci, pentru orice $a \in \mathbf{R}$, avem*

$$-\lambda(a) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \le a\right) \tag{3.4}$$

$$-\lambda(a) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \ge a\right).$$

Dacă $\int |x| d\mu(x) < \infty$, atunci au loc şi inegalităţile următoare, valabile pentru orice $n \ge 1$:

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \le a\right) \le -\lambda(a), \text{ pentru } a \le \int x d\mu(x) \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \ge a\right) \le -\lambda(a), \text{ pentru } a \ge \int x d\mu(x).$$

Demonstraţie. Legile variabilelor aleatoare $Y_n := X_n - a$ şi $Z_n := -X_n$ au ca transformate Cramer funcţiile $x \to \lambda(x+a)$ resp. $x \to \lambda(-x)$. Este suficient deci de tratat cazul $\{a = 0\}$ şi de demonstrat numai inegalităţile privind $P\left(\overline{X}_n \ge 0\right)$.

Să arătăm formulele (3.5). Presupunem că $\int x d\mu(x) \le 0$; definiţia lui λ devine

$$\lambda(0) = \sup_{t\in\mathbf{R}}\left[-\log\hat{\mu}(t)\right] = \sup_{t\ge 0}\left[-\log\hat{\mu}(t)\right].$$

Pentru $t \geq 0$, putem scrie

$$P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) = P\left[e^{t(X_1+\ldots+X_n)} \geq 1\right]$$
$$\leq E\left[e^{t(X_1+\ldots+X_n)}\right] = [\hat{\mu}(t)]^n \ ;$$

deci

$$\frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \leq \inf_{t\geq 0}[\log\hat{\mu}(t)] = -\lambda(0),$$

adică (3.5).

Demonstraţia formulelor (3.4) foloseşte următoarea lemă tehnică (cazul in care μ este "cu suport finit").

LEMA 3.1.2 *Fie x_i, p_i $(1 \leq i \leq k)$ numere reale astfel ca $p_i > 0$ şi $\min_i x_i < 0 < \max_i x_i$. Notăm*

$$b = \inf_{t\in\mathbf{R}}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i e^{tx_i}\right) \text{ şi } f(n_1,\ldots,n_k) = n!\prod_{i=1}^{k}\frac{p_i^{n_i}}{n_i!}.$$

Atunci există o constantă $c > 0$ şi un număr natural N astfel ca orice $n \geq N$ se poate scrie ca $n = n_1 + \ldots + n_k$, unde numerele naturale n_i verifică

$$\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \geq 0 \text{şi } f(n_1,\ldots,n_k) \geq cn^{-k/2}b^n.$$

Demonstraţia lemei 3.1.2 Conform formulei lui Stirling, pentru $z_i \in [1,\infty)$, obţinem

$$f(z_1,\ldots,z_k) \geq n^{-k/2}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{np_i}{z_i}\right)^{z_i} =: g(z_1,\ldots,z_k)$$

Să fixăm $s \in \mathbf{R}$ astfel ca $b = \sum_{1\leq i\leq k} p_i e^{sx_i}$. Atunci numerele reale $u_i = np_i e^{sx_i}/b$ verifică

$$\sum_{i=1}^{k} u_i = n, \ \sum_{i=1}^{k} u_i x_i = 0,$$

$$g(u_1,\ldots,u_k) = n^{-k/2}b^n.$$

Fără a pierde generalitatea, putem presupune că $x_i \leq x_k$ pentru orice i. Punem $N_i = [u_i]$ şi $N_k = n - \sum_{i<k} u_i$. Pentru $A > 0$ fixat şi B variind intr-un interval mărginit fixat, există o constantă c_1 cu proprietatea

$$\left(\frac{v}{Av+B}\right)^{Av+B} \geq c_1 \left(\frac{v}{Av}\right)^{Av}$$

pentru orice $v \geq 1$ şi $Av + B \geq 1$. De aici rezultă existenţa unei constante c_2 astfel ca $(np_i/N_i)^{N_i} \geq c_2 (np_i/u_i)^{u_i}$ pentru orice i şi orice n suficient de mare. Deci, pentru n suficient de mare, cu $c_3 = c_2^k$,avem

$$\sum_{i=1}^{k} N_i = n, \quad \sum_{i=1}^{k} N_i x_i \geq 0,$$

$$g(N_1, \ldots, N_k) \geq c_3 n^{-k/2} b^n,$$

şi lema este demonstrată.

Demonstraţia formulelor (3.4). Putem presupune că $\mu((0,\infty))$ şi $\mu((-\infty,0))$ sunt $\neq 0$. Fie $\mu = \sum_{i\geq 1} p_i \delta_{x_i}$ (suma cel mult numărabilă) şi $p_i > 0$ pentru orice i. Pentru k suficient de mare, vom avea

$$\min_{1\leq i\leq k} x_i < 0 < \max_{1\leq i\leq k} x_i \ .$$

Sirul monoton de funcţii $f_k(t) = \sum_{1\leq i\leq k} p_i e^{tx_i}$ converge către $\hat{\mu}(t)$ când $k \to \infty$, deci converge uniform converge către $\hat{\mu}(t)$ pe orice compact inclus in $\{t \mid \hat{\mu}(t) < \infty\}$. Cum $f_k(t)$ tinde către $+\infty$ odată cu $|\, t\,|$, avem

$$\lim_{k\to\infty} \left[\inf_t f_k(t)\right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}.$$

Punem $b_k = \inf_t f_k(t)$ şi fixăm k. Cu notaţiile din lema 3.1.2 obţinem, pentru orice n

$$P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq f(n_1, \ldots, n_k) \geq c_k n^{-k/2} b_k^n$$

şi deci

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq \log b_k \ .$$

Facem $k \to \infty$ şi obţinem formulele (3.4).

Să trecem la cazul general. Punem $Y_n^{(s)} = \frac{i}{s}$ pentru $\frac{i-1}{s} \leq X_n \leq \frac{i}{s}$. Fie μ_s legea comună a $Y_n^{(s)}$ -urilor şi λ_s transformarea Cramer a lui μ_s . Construcţia lui μ_s implică

$$\hat{\mu}_s(t) \geq e^{-|t|/s}\hat{\mu}(t) \text{ pentru orice } t, s > 0.$$

Cum $(0, +\infty)$ şi $(-\infty, 0)$ nu sunt μ-neglijabile, avem că $\hat{\mu}(t) \geq Ae^{B|t|}$, cu A, B constante strict pozitive. Putem scrie

$$e^{-\lambda_s(1/s)} = \inf_t \left[e^{-t/s}\hat{\mu}_s(t)\right] \geq \inf_t \left[e^{-2|t|/s}\hat{\mu}(t)\right].$$

Sirul de funcţii $g_s(t) = e^{-2|t|/s}\hat{\mu}(t)$ converge crescător către $\hat{\mu}(t)$ când $s \to \infty$ şi către $+\infty$ când $|t| \to \infty$, pentru $s > 2/B$. Ca mai sus, aceasta implică

$$\lim_{s\to\infty}\left[\inf_t g_s(t)\right] = \inf_t \hat{\mu}(t) = e^{-\lambda(0)}$$

şi deci $\lim_{s\to\infty}[-\lambda_s(1/s)] \geq -\lambda(0)$.

Din cazul discret, pentru s fixat, obţinem

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{Y}_n^{(s)} \geq 1/s\right) \geq -\lambda_s(1/s)$$

şi ţinând cont de incluziunea $\left\{\overline{Y}_n^{(s)} \geq 1/s\right\} \subseteq \left\{\overline{X}_n \geq 0\right\}$ obţinem că

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \geq 0\right) \geq -\lambda_s(1/s);$$

facem $s \to \infty$ şi obţinem formula (1.4).□

Observaţii 1. In formulele (3.5), restricţiile asupra semnului expresiei $[a - \int x d\mu(x)]$ nu sunt puse decât pentru a formula simplu singurul rezultat netrivial. Intr-adevăr, dacă $\int x d\mu(x) < a$, avem de exemplu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \leq a\right) = 0.$$

2. Teorema 3.1.1 sugerează că probabilitatea de a găsi $\overline{X}_n$ in vecinătatea lui x "are ordinul" $e^{-n\lambda(x)}$; in această formă,

rezultatul este fals, dar acest enunţ exprimă conţinutul intuitiv al teoremei 3.1.1, după cum vom preciza mai departe. Să reţinem pentru moment că valorile mari ale lui λ corespund punctelor in care apariţiile lui $\overline{X}_n$ sunt puţin probabile.

PROPOZITIA 3.1.3 *Fie $[u,v] \subset [-\infty,+\infty]$ anvelopa convexă inchisă a suportului repartiţiei μ cu $\int |x| \, d\mu(x) < +\infty$. Atunci $\lambda(x) = +\infty$ pentru $x \notin [u,v]$ in timp ce $\lambda(x)$ este finită şi continuă pentru $x \in (u,v)$. In plus, λ este continuă la stânga in v (dacă v este finit) şi continuă la dreapta in u (dacă u este finit). Pentru v finit, relaţia $\lambda(v) = +\infty$ este echivalentă cu $\mu(\{v\}) = 0$ (rezultat analog pentru u finit). In particular avem*

$$\int_{\mathbf{R}} e^{s\lambda(x)} d\mu(x) < \infty \text{ pentru orice } s < 1 \tag{3.6}$$

şi

$$\hat{\mu}(t) < \infty \text{ pentru orice } t > 0 \iff \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty \tag{3.7}$$

(rezultat analog pentru $t < 0$, $x \to -\infty$).

Demonstraţie. Deoarece $\overline{X}_n \in [u,v]$ aproape sigur, formulele (1.4) aplicate cu $a < u$ şi $a > v$ arată că $\lambda(a) = +\infty$ pentru $a \notin [u,v]$. Reciproc, fie $m = \int x d\mu(x)$; dacă $a \geq m$ şi $\lambda(a) = +\infty$, formulele (3.5) arată că $P\left(\overline{X}_n \geq a\right) = 0$ şi deci $\mu(\{a\}) = 0$, ceea ce implică $a \geq v$. Argument analog pentru $a \leq m$. Deci λ este finită pe (u,v); in plus am văzut că $\lambda(v) = +\infty$ implică $\mu(\{v\}) = 0$, iar formulele (3.4) demonstrează reciproca. Toate proprietăţile de continuitate ale lui λ sunt consecinţe simple ale faptului că λ este convexă şi inferior semi-continuă.

Formula (3.6) este evidentă dacă $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t > 0$ sau dacă v este finit. In cazul contrar, intrucât λ este convexă şi continuă pe $(u,+\infty)$, derivata ei λ' există pe $(u,+\infty)$ (mai puţin, eventual, pe o mulţime numărabilă). O integrare prin părţi impreună cu condiţia $\lim_{x\to+\infty} \lambda(x) = +\infty$ arată că $\int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} d\mu(x)$ este finită dacă integrala

$$I := \int_m^{+\infty} e^{s\lambda(x)} \lambda'(x) \mu([x,+\infty)) \, dx$$

este finită. Din formulele (3.5) aplicate pentru $n = 1$, obţinem că $\mu([x, +\infty)) \leq e^{-\lambda(x)}$ pentru $x \geq m$, deci

$$I \leq \int_m^{+\infty} e^{(s-1)\lambda(x)}\lambda'(x)dx < +\infty \text{ pentru } s < 1.$$

Raţionăm analog pentru $\int_{-\infty}^m$ şi formula (3.6) este demonstrată.

Să demonstrăm formula (3.7). Dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t > 0$, din definiţia transformării Cramer rezultă, pentru $t, x > 0$, că $\frac{\lambda(x)}{x} \geq t - \frac{1}{x}\log\hat{\mu}(t)$ şi deci $\liminf_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} \geq t$. Cum t este arbitrar, obţinem că $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{x} = +\infty$.

Reciproc, pentru orice $t > 0$ fixat, are loc majorarea $tx \leq \frac{1}{2}\lambda(x)$ pentru x suficient de mare. Din formula (3.6), obţinem

$$\int_A^{+\infty} e^{tx}d\mu(x) \leq \int_A^{+\infty} e^{1/2\lambda(x)}d\mu(x) < +\infty,$$

deci $\hat{\mu}(t)$ este finită.□

Remarcă In formula (3.6), condiţia $s < 1$ nu poate fi imbunătaţită (in general). De exemplu, dacă μ este gausiană sau exponenţială, atunci $\int_R e^{\lambda(x)}d\mu(x) = +\infty$. Acest fapt rămâne adevărat pentru orice probabilitate μ pe $\mathbf{R}$ cu suport necompact astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită cel puţin intr-un $t \neq 0$. In acest caz, λ ar putea fi caracterizată ca funcţia convexă "cea mai mare la ∞" astfel ca $\int_{\mathbf{R}} e^{s\lambda(x)}d\mu(x)$ este finită pentru $s < 1$ şi infinită pentru $s = 1$.

Fie $\mathbf{E}$ spaţiu Banach real şi separabil inzestrat cu borelienele $\mathcal{B}(\mathbf{E})$, iar μ o probabilitate pe $\mathbf{E}$. Fie (Ω, P) câmp de probabilitate complet şi $X_n : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente şi identic repartizate, cu legea μ. Punem $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, notăm

$$\underline{l}(A) = \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \in A\right),$$

$$\overline{l}(A) = \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

şi observăm că $-\infty \leq \underline{l}(A) \leq \overline{l}(A) \leq 0$.

Dacă $\underline{l}(A) = \overline{l}(A)$, notăm

$$l(A) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right).$$

PROPOZITIA 3.1.4 *Limita $l(A)$ există pentru orice parte $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ convexă. Oricare ar fi $A, B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$, avem*

$$\max\left[\underline{l}(A), \underline{l}(B)\right] \le \underline{l}(A \cup B) \le \overline{l}(A \cup B) \le \max\left[\overline{l}(A), \overline{l}(B)\right].$$

In particular, dacă $l(A_i)$ există pentru $i = 1, \ldots, n$, atunci există $l(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ şi este egală cu $\max\left[l(A_1), \ldots, l(A_n)\right]$.

Demonstraţie. Punem

$$X = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n) \text{ şi } Y = \frac{1}{m}(X_{n+1} + \ldots + X_{n+m});$$

atunci $\overline{X}_{n+m} = \frac{n}{n+m} X + \frac{n}{n+m} Y$, iar convexitatea lui A implică $(X \in A) \cap (Y \in A) \subset \left(\overline{X}_{n+m} \in A\right)$. Deducem că $\mu_n(A)\mu_m(A) \le \mu_{n+m}(A)$, unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$, deci funcţia $f : \mathbf{N} \to [0, \infty]$, $f(n) = -\log \mu_n(A)$ este subaditivă, şi deci există $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{n}$.

Apoi folosim faptul că $\underline{l}$ şi $\overline{l}$ sunt funcţii crescătoare şi că, pentru $c > \max\left[\overline{l}(A), \overline{l}(B)\right]$ şi n mare, $\mu_n(A)$ şi $\mu_n(B)$ sunt majorate de e^{nc}, deci $\mu_n(A \cup B) \le 2e^{nc}$, adică $\overline{l}(A \cup B) \le c$.□

Vom numi **transformarea Cramer** a măsurii μ aplicaţia $\lambda : \mathbf{E} \to [0, +\infty]$, dată de

$$\lambda(x) = -\inf\left\{l(A),\ A \text{ deschisă şi convexă, cu } x \in A\right\}. \qquad (3.8)$$

Exerciţiu Cu notaţiile de mai sus, arătaţi că

$$\lambda(x) = -\lim_{\delta \to 0} l\left(B(x, \delta)\right),$$

unde $B(x, \delta)$ este bila din $\mathbf{E}$ de centru x şi rază δ.

A priori, această definiţie nu coincide cu definiţia din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$. Vom vedea că acest lucru se intâmplă in cazul in care momentele de ordinul 1 ale tuturor proiecţiilor (continue) 1−dimensionale ale lui μ sunt finite.

LEMA 3.1.5 *Transformata Cramer λ a lui μ este funcţie convexă şi inferior semi-continuă.*

Demonstraţie. Intr-adevăr, pentru $x \in \mathbf{E}$ şi $c < \lambda(x)$ date, există o vecinătate deschisă şi convexă A a lui x astfel ca $c < -l(A)$. Pentru orice $y \in A$, vom avea

$$\lambda(y) = \sup\left\{-l(B),\ B \text{ vecinătate deschisă şi convexă a lui } y\right\},$$

deci $\lambda(y) \geq -l(A) > c$. Funcţia λ este inferior semicontinuă deoarece verifică relaţia $\lambda(x) \leq \liminf_{y \to x} \lambda(y)$.

Convexitatea se verifică pe dreptele spaţiului, deci este suficient de arătat că $\lambda(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}\lambda(x) + \frac{1}{2}\lambda(y)$ pentru orice $x, y \in \mathbf{E}$. Pentru orice deschis convex care conţine $\frac{x+y}{2}$, există deschisi convexi B, C care conţin x respectiv y şi astfel ca $\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) \subset A$. Să punem $X = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ şi $Y = \frac{1}{n}(X_{n+1} + \ldots + X_{2n})$; incluziunea $(X \in B) \cup (Y \in C) \subset \left(\overline{X}_{2n} \in A\right)$ implică $\mu_n(B)$ $\mu_n(C) \leq \mu_{2n}(A)$, unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$. Trecem la limită după n şi obţinem

$$\frac{1}{2}l(B) + \frac{1}{2}l(C) \leq l(A),$$

deci $-\frac{1}{2}\lambda(x) - \frac{1}{2}\lambda(y) \leq l(A)$ iar apoi luăm inf după A in membrul drept.□

Fie (E, μ) ca mai inainte şi λ transformarea Cramer a lui μ. Numim **funcţionala Cramer** a lui μ aplicaţia $\Lambda : \mathcal{P}(\mathbf{E}) \to [0, +\infty]$ definită prin

$$\Lambda(A) = \inf_{x \in A} \lambda(x),\ A \subset \mathbf{E}. \tag{3.9}$$

Să observăm că a cunoaşte λ este echivalent cu a cunoaşte Λ.

TEOREMA 3.1.6 *Fie $X_n : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente şi cu aceeaşi lege μ, iar Λ funcţionala Cramer asociată lui μ. Atunci*

(a) Pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$-\Lambda\left(\mathring{A}\right) \leq \underline{l}(A). \tag{3.10}$$

(b) Dacă $\overline{A}$ este compact, atunci

$$\overline{l}(A) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right). \tag{3.11}$$

(c) Pentru orice reuniune finită A de deschise convexe ale lui $\mathbf{E}$*, avem*

$$l(A) = -\Lambda(A). \tag{3.12}$$

Demonstraţie. Dacă $x \in \overset{\circ}{A}$, există o vecinatate deschisă şi convexă C a lui x astfel ca $C \subset \overset{\circ}{A}$ şi avem $\underline{l}(A) \geq \underline{l}(C) = l(C) \geq -\lambda(x)$. Luăm sup după $x \in \overset{\circ}{A}$ şi obţinem formula (3.10).

Intrucât $\bar{l}$ este monotonă, avem $\bar{l}(A) \leq \bar{l}(\bar{A})$, deci putem presupune A compact pentru a demonstra (3.11). Fie $a > -\Lambda(A)$; pentru orice $x \in A$ avem $a > -\lambda(x)$ şi deci există un deschis convex $C_x \ni x$ astfel ca $a > l(C_x)$. Fie $C_{x_i}, i = 1, \ldots, k$ o acoperire finită a lui A. Din propoziţia 3.1.4 ştim că

$$\bar{l}(A) \leq \max_{i=1,\ldots,k} l(C_{x_i}) < a$$

şi cum a este arbitrar, obţinem (3.11).

Din definiţia lui Λ, avem intotdeauna $\Lambda(A \cup B) = \inf[\Lambda(A), \Lambda(B)]$. Conform propoziţiei 3.1.4 putem presupune A deschisă şi convexă pentru a demonstra formula (3.12). Din (3.10) rezultă că $-\Lambda(A) \leq l(A)$, deci este suficient de demonstrat inegalitatea inversă când $l(A)$ este finită.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, putem găsi $N \in \mathbf{N}$ astfel ca

$$\frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geq l(A) - \epsilon \text{ pentru } n \geq N.$$

Intrucât A este deschis şi convex, există un compact convex K inclus in A astfel ca $\mu(A \setminus K) \leq \epsilon$, deci

$$\frac{1}{N} \log \mu_N(A) - \frac{1}{N} \log \mu_N(K) \leq \epsilon.$$

Aceasta inseamnă că funcţia $f(n) = -\log \mu_n(K)$ verifică $f(N) \leq -[l(A) - 2\epsilon] N$ şi, intrucât K este convex, rezultă că f este subaditivă (vezi propozitia 3.1.4). In particular avem $f(pN) \leq -[l(A) - 2\epsilon] Np$ pentru orice $p \in \mathbf{N}^*$ şi deci

$$-l(K) = \lim_{p \to \infty} \frac{f(pN)}{pN} \leq -l(A) + 2\epsilon.$$

Formula (3.11) arată inegalitatea $\Lambda(K) \leq -l(K)$. Ultimele două inegalităţi, impreună cu $\Lambda(A) \leq \Lambda(K)$ implică $\Lambda(A) \leq -l(A) + 2\epsilon$ şi cum ϵ este arbitrar, obţinem $\Lambda(A) \leq -l(A)$.□

PROPOZITIA 3.1.7 *Transformarea Cramer asociată lui μ se poate calcula cu formula*

$$\lambda(x) = \sup\{-l(H),\ H \text{ semi-spaţiu deschis, cu } x \in H\}\,.$$

Demonstratie. Fie $a < \lambda(x)$. Mulţimea convexă şi inchisă $C = \{y;\ \lambda(y) \leq a\}$ nu-l conţine pe x. Există deci un semi-spaţiu deschis H al lui $\mathbf{E}$ astfel ca $H \cap C = \emptyset$ şi $x \in H$. In particular $\Lambda(H) \geq a$. Din relaţia $-l(H) = \Lambda(H)$ obţinem că $-l(H) \geq a$, deci $r = \sup\{-l(H),\ H$ semi-spaţiu deschis, cu $x \in H\}$ este $\geq a$ pentru $a < \lambda(x)$ i.e. $r \geq \lambda(x)$. Inegalitatea opusă rezultă direct din definiţia lui $\lambda(x)$.□

Observaţie Propoziţia 3.1.7 reduce calculul lui λ la calculul lui $l(H)$ cu H semi-spaţiu deschis, iar aceasta este o problemă $1-$dimensională, apropiată de cea rezolvată anterior. Acest fapt ne va permite să calculăm λ in orice dimensiune, pornind de la $\hat{\mu}$ (transformata Laplace a lui μ) iar funcţionala Λ devine in principiu calculabilă.

Fie μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Notăm $\hat{\mu}(t) := \int_{\mathbf{E}} e^{<t,x>} d\mu(x)$, $t \in \mathbf{E}'$ (dualul lui $\mathbf{E}$), **transformarea Laplace** a lui μ. Funcţia $\log \hat{\mu}(t)$ este definită pe $\mathbf{E}'$, cu valori in $[0, +\infty]$, este convexă şi inferior semi-continuă ($\mathbf{E}'$ este inzestrat cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E}', \mathbf{E})$). Are loc următorul rezultat.

PROPOZITIA 3.1.8 *Cu notaţiile precedente, dacă*

$$\int_{\mathbf{E}} |< t, x >|\, d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } t \in \mathbf{E}'\,,$$

atunci

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} [< t, x > - \log \hat{\mu}(t)]\,,\ x \in \mathbf{E}.$$

Demonstraţie. Să considerăm μ centrată şi $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (cazul in care μ nu este centrată se reduce prin translaţie la calculele ce urmează). Avem de arătat că

$$f(x) := \sup_{t \in \mathbf{R}} [tx - \log \hat{\mu}(t)]$$

coincide cu

$$g(x) := -\lim_{\epsilon\searrow 0} l\left((x-2\epsilon,\ x+2\epsilon)\right),\ x\in \mathbf{R}.$$

Cum μ este centrată, formulele (3.5) implică pentru $x \geq 0$

$$\begin{aligned} l\left((x-2\epsilon,\ x+2\epsilon)\right) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq x-2\epsilon\right) \\ &\leq -f(x-2\epsilon), \end{aligned}$$

deci

$$g(x) \geq \lim_{\epsilon\searrow 0} f(x-2\epsilon) \text{ pentru } x\geq 0. \tag{3.13}$$

Formulele (3.4) implică pentru $x \geq 0$

$$-f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n \geq x\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n > x\right)$$

şi, conform formulei 3.12, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P\left(\overline{X}_n > x\right) = -\Lambda\left((x,+\infty)\right) = -\inf_{y>x} g(y),$$

deci

$$f(x) \geq \inf_{y>x} g(y) \text{ pentru } x \geq 0.$$

Legea numerelor mari arată că $g(0) = 0$ şi cum g este convexă, inferior semicontinuă şi pozitivă, avem $\inf_{y>x} g(y) = \lim_{\epsilon\searrow 0} g(x+\epsilon)$ pentru $x \geq 0$, deci

$$f(x) \geq \lim_{\epsilon\searrow 0} g(x+\epsilon) \tag{3.14}$$

Pot avea loc urmatoarele situaţii. Există $a, b \in [0,+\infty]$ astfel ca f, g să fie respectiv
1) continue finite pe $[0,a)$, $[0,b)$
2) $\equiv +\infty$ pe $(a,+\infty), (b,+\infty)$
3) continue la stânga in a pentru a finit (in b pentru b finit).

Cu inegalităţile (3.13), (3.14), arătăm succesiv că $a = b$, apoi că f şi g coincid pe $[0,+\infty)\setminus\{a\}$, deci coincid pe $[0,+\infty)$. Similar tratăm problema compararii lui f şi g pe $(-\infty,0]$.

In cazul general, fie $x \in \mathbf{E}$. Orice semi-spaţiu deschis care-l conţine pe x se scrie

$$H_{t,r}^{+} = \{y \in \mathbf{E}\ ;\ \langle t, y\rangle - r > 0\}\ , \text{cu}$$
$$\langle t, x\rangle - r > 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}'\ , r \in \mathbf{R}$$

sau

$$H_{t,r}^{-} = \{y \in \mathbf{E}\ ;\ \langle t, y\rangle - r < 0\}\ , \text{cu}$$
$$\langle t, x\rangle - r < 0 \text{ pentru } t \in \mathbf{E}'\ , r \in \mathbf{R}.$$

Fie $t : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ forma liniară asociată lui $t \in \mathbf{E}'$ şi să notăm $Y_n = t(X_n)$, $L_r^{+} = t\left(H_{t,r}^{+}\right) = (r, +\infty)$ şi $L_r^{-} = t\left(H_{t,r}^{-}\right) = (-\infty, r)$, $u = t(x)$, $\mu_t = t(\mu)$, $l_t(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{Y}_n \in A\right)$ $= l\left[t^{-1}(A)\right]$, unde A este deschis şi convex in $\mathbf{R}$. Conform propoziţiei 3.1.7, notând transformarea Cramer a lui μ_t prin λ_t , obţinem

$$\lambda_t(u) = \max\left\{\left[\sup_{r<u} \ -l_t\left(L_r^{+}\right)\right],\ \left[\sup_{r>u} \ -l_t\left(L_r^{-}\right)\right]\right\}$$

de unde, ţinând cont că $l_t(L_r^{\pm}) = l\ |\ t^{-1}(L_r^{\pm})\ | = l\left(H_{t,r}^{\pm}\right)$, obţinem

$$\lambda_t(u) = \max\left\{\left[\sup_{r<t(x)} \ -l\left(H_{t,r}^{+}\right)\right],\ \left[\sup_{r>t(x)} \ -l\left(H_{t,r}^{-}\right)\right]\right\}.$$

Luăm sup in membrul drept din ultima inegalitate după $t \in \mathbf{E}'$ şi obţinem $\sup\{-l(H), H$ semi-spaţiu deschis, cu $x \in H\}$, care este egal (cf. propoziţiei 3.1.7) cu $\lambda(x)$. Obţinem deci

$$\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \lambda_t(< t, x >) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \lambda_{t(\mu)}\left[t(x)\right].$$

Din cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}$ (studiat anterior) avem

$$\lambda_t\left[t(x)\right] = \varphi_t\left[t(x)\right] = \sup_{s\in\mathbf{R}}\left[s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}_t(s)\right].$$

Cum insă $\hat{\mu}_t(s) = \hat{\mu}(st)$ pentru $s \in \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{E}'$, obţinem $\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'} \sup_{s\in\mathbf{R}} \left[s \cdot t(x) - \log \hat{\mu}(st)\right]$, ceea ce arată că $\lambda(x) = \sup_{t\in\mathbf{E}'}\left[< t, x > - \log \hat{\mu}(t)\right]$.□

Exemple 1. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ este gausiană de medie M şi matrice de covariaţie Σ (presupusă inversabilă) . Atunci

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}(x - M)^* \Sigma^{-1} (x - M).$$

2. $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, $d\mu(x) = f(x)dx$ cu $f(x) \sim \frac{ct.}{|x|^r}$ când $|\, x \,| \to +\infty$. Atunci $\hat{\mu}(t) = +\infty$ pentru orice $t \neq 0$, deci $\lambda \equiv 0$ (cf. propoziţiei 3.1.8).

Observaţii 1. Din teorema 3.1.6 rezultă că λ este identic nulă $\Leftrightarrow$ pentru orice parte boreliană A a lui $\mathbf{E}$, de interior nevid, are loc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0,$$

deci situaţia $\lambda \equiv 0$ necesită o descriere mai fină a comportamentului asimptotic al $P\left(\overline{X}_n \in A\right)$, care poate converge către 0 (atunci când $\int_{\mathbf{E}} x d\mu(x) \notin \overline{A}$) e.g. cu viteză polinomială in $\frac{1}{n}$.

2. Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, μ probabilitate pe $\mathbf{E}$ astfel ca $\int_{\mathbf{E}} |\, x \,|\, d\mu(x) < +\infty$ şi μ nu incarcă nici un subspaţiu afin (propriu) al lui $\mathbf{R}^d$. Dacă λ este transformata Cramer a lui μ, atunci corespondenţa dintre λ şi μ este biunivocă.

3. In teoria funcţiilor convexe (in dualitate) pe $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, se arată că mulţimea $D(\lambda) := \left\{x \in \mathbf{R}^d \,;\, \lambda(x) \text{ finită}\right\}$ are interiorul nevid şi că λ este diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\lambda)$. In plus, dacă $y \in \partial \overset{\circ}{D}(\lambda)$, atunci $\lim_{x \to y,\, x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)} \| \lambda'(x) \| = +\infty$.

4. Tot in cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, se poate arăta că funcţia $\log \hat{\mu}$ este diferenţiabilă pe $\overset{\circ}{D}(\log \hat{\mu})$. In plus, dacă $\hat{\mu}(t)$ este finită pentru orice $t \in \mathbf{R}^d$, atunci putem scrie $\lambda(x) = \langle z, x\rangle - \log \hat{\mu}(z)$, pentru orice $x \in \overset{\circ}{D}(\lambda)$, unde z este soluţia (unică) a ecuaţiei $\frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}}'(z) = x$.

Evaluarea lui $l(A)$ se bazează pe teorema 3.1.6; restricţia "$\overline{A}$ compact" pentru validitatea formulei $\overline{l}(A) \leq -\Lambda\left(\overline{A}\right)$ este prea puternică in majoritatea aplicaţiilor. In vedea in continuare situaţii cand această condiţie devine inutilă.

LEMA 3.1.9 *Fie μ probabilitate pe spatiul Banach real şi separabil* $\mathbf{E}$, X_n $(n \geq 1)$ *şir de variabile aleatoare independente de lege μ, cu valori in* $\mathbf{E}$. *Dacă, pentru orice $a > 0$ există un compact $K_a \subset \mathbf{E}$ astfel ca $P\left(\overline{X}_n \notin K_a\right) \leq e^{-na}$ pentru orice $n \geq N(a)$, atunci, pentru orice $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$\bar{l}(B) \leq -\Lambda\ \left(\bar{B}\right).$$

In plus, daca λ este transformarea Cramer a lui μ, atunci mulţimile $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ sunt convexe şi compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstraţie. Este clar că $\bar{l}\,(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. Avem

$$\bar{l}(B) \leq \max\left\{\bar{l}\,(B \cap K_a)\,,\ \bar{l}\,(B \cap (\mathbf{E} \setminus K_a))\right\}$$

$$\leq \max\left\{\bar{l}\left(\overline{B} \cap K_a\right),\ -a\right\}.$$

Cum $\overline{B} \cap K_a$ este compact, teorema 3.1.6 implică

$$\bar{l}\left(\overline{B} \cap K_a\right) \leq -\Lambda\left(\overline{B} \cap K_a\right) \leq -\Lambda\left(\overline{B}\right),$$

deci $\bar{l}(B) \leq \max\left\{-\Lambda\left(\overline{B}\right),\ -a\right\}$ pentru orice $a > 0$, deci $\bar{l}(B) \leq -\Lambda\ \left(\bar{B}\right)$.

Fie $b > 0$ şi $a > b$ fixat. Mulţimea $\mathbf{E} \setminus K_a$ este deschisă, deci teorema 3.1.6 implică

$$-\Lambda\,(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in (\mathbf{E} \setminus K_a)\right),$$

deci, din definiţia lui K_a rezultă $-\Lambda\,(\mathbf{E} \setminus K_a) \leq -a$. In particular avem $\lambda(x) \geq a$ pentru $x \notin K_a$, deci $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\} \subset K_a$ şi apoi folosim faptul că λ este inferior semicontinuă. Observaţi că $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ este şi convexă (deoarece λ este convexă).□

Observaţie Demonstraţia lemei 3.1.9 funcţionează in ipoteza $\mathbf{E}$ =spatiu vectorial topologic.

PROPOZITIA 3.1.10 *Fie* **E** *dualul unui spatiu Banach* **F** *şi μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca*

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru } s \text{ intr-o vecinătate a lui } 0.$$

Atunci, dacă Λ este transformata Cramer a lui μ, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem

$$-\Lambda\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \tag{3.15}$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\bar{A}\right),$$

unde $\mathring{A}$, $\bar{A}$ sunt in raport cu topologia slabă $\sigma(\mathbf{E},\mathbf{F})$ pe **E**. *In plus, mulţimile $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte (slabe) pentru orice $b > 0$.*

Demonstraţie Formulele (3.15) vor rezulta din teorema 3.1.6 după construcţia compacţilor K_a din lema 3.1.9 Fie B_a bila inchisă de rază a din **E**, care este slab compactă. Din formulele (3.5) obţinem

$$P\left(\overline{X}_n \in B_a\right) = P(\| X_n \| > a)$$

$$\leq P\left\{\frac{1}{n}(\| X_n \| + \ldots + \| X_n \|) > a\right\} \leq e^{-n\alpha(a)},$$

unde α este transformarea Cramer a lui ν =legea lui $\| X_n \|$.

Prin ipoteza $\hat{\nu}$ este finită intr-o vecinătate a lui 0, deci $\lim_{a\to+\infty} \alpha(a) = +\infty$. Rămâne să aplicăm lema 3.1.9□

COROLAR 3.1.11 *Fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$ şi μ probabilitate pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ astfel ca $\hat{\mu}(t)$ să fie finită pentru orice t intr-o vecinătate a lui 0. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$-\Lambda\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\bar{A}\right).$$

In plus, $\lambda(x) \to +\infty$ *când* $x \to \infty$ *in* $\mathbf{R}^d$.

Observaţii 1. Dacă $\mathbf{E} = \mathbf{F}'$, atunci $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ este acelaşi pentru orice topologie intre topologia normei şi cea slabă. In particular, transformarea Cramer λ şi funcţionala Cramer Λ sunt aceleaşi pentru topologiile normei şi slabă. Să reamintim că dualul lui $\mathbf{E}$ cu topologia slabă este $\mathbf{F}$; in particular spatiul $C[0,1]$ nu este dual de spatiu Banach.

2. Interiorul unei mulţimi $B \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ este mai mare in topologia tare decât in cea slabă, in timp ce aderenţa ei este mai mică. Deci, valorile $-\Lambda\left(\overset{\circ}{B}\right)$ si $-\Lambda\left(\bar{B}\right)$ se imbunatăţesc când trecem de la topologia slabă la cea a normei. Propoziţia 3.1.10 nu permite utilizarea acestor valori decât pentru topologia slabă, cel puţin in ce-l priveşte pe $-\Lambda\left(\bar{B}\right)$. In continuare vom intări ipotezele, pentru a putea utiliza topologia tare.

Fie $\mathbf{\Gamma}$ spaţiu topologic polonez; in acest curs vom considera $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{R}^d$ $(d \geq 1)$ sau $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}$ (spaţiu Banach separabil). Fie $\mathcal{M}(\mathbf{\Gamma})$ spaţiul măsurilor mărginite pe $\mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$ şi $\mathcal{M}_1(\mathbf{\Gamma})$ submulţimea convexă şi inchisă a probabilităţilor pe $\mathcal{B}(\mathbf{\Gamma})$. Spaţiul $\mathcal{M}(\mathbf{\Gamma})$ il considerăm inzestrat cu topologia convergenţei slabe : $\mu_n \Rightarrow \mu$ dacă $\int f d\mu_n \to \int f d\mu$ pentru orice $f \in C_b(\mathbf{\Gamma})$. O parte $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}(\mathbf{\Gamma})$ este relativ compactă dacă, pentru orice $\epsilon > 0$, există K_ϵ compact in Γ astfel ca $\mu^{\pm}(\mathbf{\Gamma} \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$, pentru orice $\mu = \mu^+ - \mu^- \in \mathcal{C}$.

Fie $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ cu $\int_{\mathbf{E}} \| x \| d\mu(x) < +\infty$. Atunci există şi este unic un element notat $b(\mu) \in \mathbf{E}$ astfel ca

$$\langle t, b(\mu)\rangle = \int_{\mathbf{E}} \langle t, x\rangle d\mu(x) \text{ pentru orice } t \in \mathbf{E}',$$

numit *baricentrul* lui μ. Au loc următoarele proprietăţi :

1. Dacă $\mu(C) = 1$ atunci $b(\mu) \in C$, unde C este convex inchis din $\mathbf{E}$.

2. Fie $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$ convergent către $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E})$. Dacă B este o bilă inchisă din $\mathbf{E}$ astfel ca $\mu_n(B) = 1$ pentru orice n, atunci $b(\mu_n) \to b(\mu)$ când $n \to +\infty$.

LEMA 3.1.12 *Fie* $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *funcţie continuă cu* $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = +\infty$. *Atunci mulţimea*

$$\mathcal{F}(f,a) := \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{E}) \ ; \ \int_{\mathbf{E}} f(\| x \|) \, d\mu(x) \le a \right\}$$

este inchisă in $\mathcal{M}(\mathbf{E})$. *Aplicaţia* $\mu \to b(\mu)$ *este bine-definită şi continuă pe* $\mathcal{F}(f,a)$.

Demonstraţie. Lema lui Fatou arată că $\mathcal{F}(f,a)$ este inchisă. Pe de altă parte, pentru $\mu \in \mathcal{F}(f,a)$ şi $r > 0$, avem

$$\| \int_{\|x\| \ge r} x d\mu(x) \| \le \int_{\|x\| \ge r} \| x \| \, d\mu(x)$$

$$\le \epsilon(r) \int_{\|x\| \ge r} f(\| x \|) \, d\mu(x) \le a\epsilon(r),$$

unde $\epsilon(r) = \sup_{\|x\| \ge r} [\| x \| / f(\| x \|)]$; observăm că $\lim_{r \to +\infty} \epsilon(r) = 0$ şi aplicăm proprietatea 2 de mai sus a baricentrelor pentru a obţine continuitatea aplicaţiei $\mu \to b(\mu)$ pe $\mathcal{F}(f,a)$.□

LEMA 3.1.13 *Fie* Γ *spaţiu topologic polonez şi* X_n *şir de variabile aleatoare independente cu valori in* Γ, *cu aceeaşi lege* μ. *Să considerăm legea empirică a eşantionului* $X_1, \ldots, X_n$ *i.e. variabila aleatoare* $Z_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \ldots + \delta_{X_n})$ *cu valori in* $\mathcal{M}_1(\Gamma)$. *Atunci, pentru orice* $a > 0$, *există un compact* $\mathcal{K}_a$ *in* $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ *şi un număr natural* $N(a)$, *astfel ca*

$$P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \le e^{-na} .$$

Demonstraţie. Fie b_p, ϵ_p şiruri de numere pozitive care converg către 0. Pentru fiecare p alegem un compact K_p in Γ astfel ca $\mu(\Gamma \setminus K_p) \le b_p$. Notăm

$$\mathcal{F}_p = \{ \nu \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \text{ cu } \nu(\Gamma \setminus K_p) \le b_p \} .$$

Să arătăm că

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}_p\right) \leq \left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p} \quad \text{pentru orice } n, p. \tag{3.16}$$

Dacă acest lucru este arătat atunci, cu notaţia $\mathcal{K} := \cap_{p\geq 1}\mathcal{F}_p$ (care este compact in $\mathcal{M}_1(\mathbf{\Gamma})$) şi cu formula (3.16), obţinem

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{K}\right) \leq \sum_{p\geq 1} P\left(Z_n \notin \mathcal{F}_p\right) \leq \sum_{p\geq 1}\left(\frac{b_p}{\epsilon_p}\right)^{1/2n\epsilon_p} .$$

Este suficient apoi de considerat $b_p = \epsilon_p u^{2p/\epsilon_p}$ cu $0 < u < 1/2$ pentru a obţine

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{K}\right) \leq \sum_{p\geq 1} u^{np} \leq 2u^n$$

şi lema este demonstrată. Rămâne de arătat formula (3.16). Suprimăm indicele p pentru uşurinţa calculelor. Are loc

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}\right)$$

$$= P\left\{\frac{1}{n}\left[\mathbf{1}_{K^c}(X_1) + \ldots + \mathbf{1}_{K^c}(X_n)\right] > \epsilon\right\}$$

$$= P\left(\overline{U}_n > \epsilon\right),$$

unde $U_i = \mathbf{1}_{K^c}(X_i)$ este variabila aleatoare cu legea binomială $\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_0$, cu $\alpha = \mu\left(K^c\right)$ şi a cărei transformare Cramer o notăm cu λ. După formulele (3.5) avem

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}\right) \leq e^{-n\lambda(\epsilon)} . \tag{3.17}$$

Dar, pentru $\epsilon \in (0,1)$ avem

$$\lambda(\epsilon) = \epsilon \log\frac{\epsilon}{\alpha} + (1-\epsilon)\log\frac{1-\epsilon}{1-\alpha}$$

şi luăm $b_p < \epsilon_p$ (deci $\alpha \leq b_p < \epsilon_p$) şi $\epsilon_p \leq \frac{1}{2}$ pentru a obţine $\lambda(\epsilon_p) \geq \epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$. Impunem condiţia $\frac{1}{2}\epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p} \geq \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$ pentru a obţine

$$\lambda(\epsilon_p) \geq \frac{1}{2}\epsilon_p \log\frac{\epsilon_p}{b_p},$$

ceea ce, impreună cu (23.17), demonstrează (3.16).□

TEOREMA 3.1.14 *Fie* $\mathbf{E}$ *spaţiu Banach real, separabil şi* μ *probabilitate pe* $\mathbf{E}$ *astfel ca*

$$\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \text{ este finită pentru orice } s \in \mathbf{R}.$$

Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ *avem*

$$-\Lambda\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right)$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \leq -\Lambda\left(\bar{A}\right),$$

unde Λ *este funcţionala Cramer asociată lui* μ. *In plus, mulţimile* $\{x \in \mathbf{E};\ \lambda(x) \leq b\}$ *sunt compacte pentru orice* $b > 0$ *finit.*

Demonstraţie. Fie ν legea comună a variabilelor $\| X_n \|$ şi să notăm $m = \int_{\mathbf{R}} x d\nu(x)$. Vom arăta existenţa unei funcţii f continuă şi convexă pe $[0, +\infty)$ astfel ca

$$f(x) = 0 \text{ pentru } 0 \leq x \leq m$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \tag{3.18}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{sf(x)} d\nu(x) \text{ este finita pentru } s < 1.$$

Cum $\hat{\nu}$ este finită pe $\mathbf{R}$ (din ipoteză), putem lua $f(x) = \lambda_\nu(x)$ pentru $x \in [m, +\infty)$, unde λ_ν este transformarea Cramer a lui ν şi $f(x) = 0$ pentru $x \in [0, m]$. Cu notaţiile din lemele 3.1.12 si 3.1.13, avem

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}(f, a)\right) = P\left\{\frac{1}{n}\left[f\left(\| X_1 \|\right) + \ldots + f\left(\| X_n \|\right)\right] > a\right\}$$

$$\leq e^{-n\lambda_\theta(a)},$$

unde prin λ_θ am notat transformarea Cramer asociată lui θ, legea lui $f(\| X_1 \|)$. Conform formulelor (3.18), $\hat{\theta}(s)$ este finită in vecinătatea lui 0, deci $\lambda_\theta(a)$ converge către $+\infty$ când $a \to +\infty$. Deci, pentru orice $A > 0$ există a_A astfel ca

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{F}(f,a)\right) \leq e^{-nA} .$$

Fie acum $\mathcal{L}_A := \mathcal{K}_A \cap \mathcal{F}(f,a)$, unde $\mathcal{K}_A$ este compactul din lema 3.1.13 Conform acestei leme şi a ultimei formule, obţinem

$$P\left(Z_n \notin \mathcal{L}_A\right) \leq 2e^{-nA} \text{ pentru } n \geq N(A).$$

In plus, conform lemei 3.1.12, $\mathcal{L}_A$ este compact in $\mathcal{M}_1(\mathbf{E})$, pe care aplicaţia $\pi \to b(\pi)$ este bine-definită şi continuă. Deci imaginea $L_A = b(\mathcal{L}_A)$ este compactă in $\mathbf{E}$ şi

$$P\left(X_n \notin L_A\right) = P\left(b(Z_n) \notin b(\mathcal{L}_A)\right) \leq P\left(Z_n \notin \mathcal{L}_A\right) \leq 2e^{-nA}$$

pentru $n \geq N(A)$. Rămân de aplicat lema 3.1.9 şi teorema 3.1.6□

Exemplu Fie repartiţiile $\mu_\epsilon(dx) = (2\pi/\epsilon)^{-1/2} \exp\left(-x^2/2\epsilon\right) dx$. Arătaţi că

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(A) = -\operatorname*{essinf}_{x\in A} x^2/2$$

pentru orice boreliană reală A.

Observaţii 1. In ipotezele corolarului 3.1.11, se observă că relaţia $\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = \Lambda\left(\bar{A}\right)$ (care implică $\Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = \Lambda\left(\bar{A}\right) = \Lambda\ (A)$) este suficientă pentru existenţa lui $l(A)$ precum şi a relaţiei $l(A) = -\Lambda(A)$. Reciproca este falsă : fie $\mathbf{E} = \mathbf{R}$, $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ si $A = (0, +\infty)$. Atunci avem $l(A) = -\Lambda(A)$ deoarece A este deschis convex, in timp ce $\Lambda\ (A) = \Lambda\left(\overset{\circ}{A}\right) = +\infty$ iar $\Lambda\left(\bar{A}\right) = \lambda(1) = \log 2$.

2. Dacă $A \subset \mathbf{E}$ este mulţime deschisă şi satisface

$$\Lambda\ (A) = \Lambda\left(\bar{A}\right), \tag{3.19}$$

in ipotezele propoziţiei 3.1.10, ale corolarului 3.1.11 sau ale teoremei 3.1.14 avem că

$$\text{există } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in A\right) \text{ şi este egală cu } -\Lambda\ (A). \tag{3.20}$$

Dacă dim $\mathbf{E} < \infty$, atunci $\lambda(\cdot)$ este continuă, deci relaţiile (3.19) şi (3.20) sunt satisfăcute.

3. In cazul $\mathbf{E} = \mathbf{R}^d$, relaţia (3.20) pentru orice $A \subset \mathbf{R}^d$ boreliană este fals; se poate construi o mulţime A inchisă cu interior nevid, astfel ca $\Lambda \ (A) < +\infty$ şi

$$P\left(\overline{X}_n \in A\right) = 0, \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots$$

4. Din propoziţia 3.1.4 rezultă că relaţia (3.19) este satisfăcută pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă şi convexă; se poate arăta că (3.19) este satisfăcută pentru $\mathbf{E} \backslash \bar{A}$, unde $A \subset \mathbf{E}$ este deschisă şi convexă.

3.2 CAZUL GAUSIAN

Fie $\mathbf{E}$ spatiu Banach separabil. O probabilitate μ pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$ se numeşte **gausiană** dacă, pentru orice functională liniară şi continuă $t : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$, legea $t(\mu)$ este gausiană pe $\mathbf{R}$. Dacă in plus $t(\mu)$ este centrată pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, spunem că μ este **centrată.**

TEOREMA 3.2.1 *Dacă μ este probabilitate gausiană centrată pe $\mathbf{E}$, atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ este finită pentru orice $s \in \mathbf{R}$. In particular, $\int_{\mathbf{E}} \| x \|^2 d\mu(x)$ este finită.*

Demonstraţie. Putem presupune μ centrată. Fie $x, x_1, \ldots, x_n$ variabile aleatoare independente din $\mathbf{E}$, toate având legea μ. Să observăm că, pentru $n \geq 1$, legea lui $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k=1}^{n} x_k$ in raport cu μ^n este aceeaşi cu legea lui x in raport cu μ. Vom arăta că este suficient ca $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)$ să fie finită *pentru un singur* $s \in \mathbf{R}$. Intr-adevăr, dacă este aşa, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} e^{n^{1/2} s\|x\|} d\mu(x)$$

$$= \int_{\mathbf{E}} \exp\left(n^{1/2} \frac{s}{n^{1/2}} \| \sum_{k=1}^{n} x_k \|\right) \mu^n (dx_1, \ldots, dx_n)$$

$$\leq \left(\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x)\right)^n .$$

Acum să observăm că, dacă x, y sunt variabile aleatoare pe $\mathbf{E}$, independente şi cu legea μ, atunci $\left(\frac{x+y}{2^{1/2}}, \frac{x-y}{2^{1/2}}\right)$ are aceeaşi lege sub μ^2 ca şi (x, y). Pentru $0 < s < t$, avem

$$\mu^2\left((x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ \| x \| \leq s, \ \| y \| \geq t\right),$$

$$= \mu^2\left((x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ \| x - y \| \leq 2^{1/2}s, \ \| x + y \| \geq 2^{1/2}t\right)$$

$$\leq \mu^2\left((x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ |\| x \| - \| y \|| \leq 2^{1/2}s, \ \| x \| + \| y \| \geq 2^{1/2}t\right)$$

$$\leq \mu^2\left((x,y) \in \mathbf{E}^2 : \ \| x \| \wedge \| y \| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}}\right),$$

deci

$$\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right)\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq t\right)$$
$$\leq \left(\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq \frac{t-s}{2^{1/2}}\right)\right)^2 .$$

Luăm $t_0 = s$ şi $t_{n+1} = s + 2^{1/2}t_n$ pentru a obţine

$$\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq t_{n+1}\right) / \mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right)$$
$$\leq \left(\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq t_n\right) / \mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right)\right)^2 .$$

Deci

$$\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq t_n\right)$$
$$\leq \mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right) \times \exp\left[2^n \log \frac{\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq s\right)}{\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right)}\right]$$

pentru orice $0 < s < t$ şi $n \geq 0$. In particular, alegem pe s astfel ca $\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq s\right) / \mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \leq s\right) = \rho < 1$; obţinem

$$\mu\left(x \in \mathbf{E} : \ \| x \| \geq \frac{2^{(n+1)/2} - 1}{2^{1/2} - 1} s\right) \leq e^{2^n \log \rho} . \square$$

Să notăm $\mathbf{E}'$ dualul lui $\mathbf{E}$ şi $\langle t, x \rangle$ dualitatea dintre $t \in \mathbf{E}'$ şi $x \in \mathbf{E}$. Pentru μ centrată, definim **covariaţia** lui μ prin $K : \mathbf{E}' \times \mathbf{E}' \to \mathbf{R}$,

$$K(s,t) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x \rangle \langle t, x \rangle d\mu(x); \ s, t \in \mathbf{E}' .$$

Intrucât $| K(s,t) | \leq c^2 \| s \| \| t \|$ cu $c^2 = \int \| x \|^2 \, d\mu(x)$, observăm că aplicaţia K este biliniară şi continuă pe $\mathbf{E}' \times \mathbf{E}'$ iar $K(s,t) \geq 0$ pentru $t \in \mathbf{E}'$.

Spaţiul $\mathbf{E}'$ se scufundă intr-un spaţiu Hilbert $\mathbf{H}$ in felul următor. Fiecarei $t \in \mathbf{E}'$ ii asociem variabila aleatoare gausiană reală Z^t definită pe câmpul de probabilitate $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ prin $Z^t(x) = \langle t, x \rangle$. Fie $\mathbf{H}$ inchiderea in $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ a spaţiului vectorial $\{Z^t , t \in \mathbf{E}'\}$. Aplicaţia $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ este liniară, continuă şi de imagine densă. In plus, dacă notăm $[\cdot, \cdot]$ produsul scalar din $L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$ (deci şi din $\mathbf{H}$), avem

$$K(s,t) = \left[Z^s, Z^t\right] \text{ pentru orice } s, t \in \mathbf{E}' .$$

Să observăm că, dacă $v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)$, atunci

$$\int_{\mathbf{E}} \| x \| | v(x) | \, d\mu(x) \leq c \| v \|_{L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu)}$$

deci formula

$$Sv = \int_{\mathbf{E}} xv(x) d\mu(x)$$

defineşte un operator liniar şi continuu $S : L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) \to \mathbf{E}$. Din construcţie avem
$\int_{\mathbf{E}} Z^s(x)v(x)d\mu(x) = \int_{\mathbf{E}} \langle s, x \rangle v(x) d\mu(x) = \langle s, \int_{\mathbf{E}} xv(x)d\mu(x) \rangle$ şi deci

$$\left[Z^t, v\right] = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , v \in L^2(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}), \mu) ,$$

ceea ce arată că restricţia lui S la $\mathbf{H}$ este injectivă.

In concluzie, dată fiind o probabilitate gausiană μ pe spaţiul Banach separabil $\mathbf{E}$, ii putem asocia un spaţiu Hilbert separabil $\mathbf{H}$ cu produsul scalar notat $[\cdot, \cdot]_{\mathbf{H}}$, o injecţie liniară şi continuă $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$, o aplicaţie liniară şi continuă (de imagine densă) $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ astfel ca

$$\left[Z^t, v\right]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sv \rangle \text{ pentru } t \in \mathbf{E}' , v \in \mathbf{H},$$

$$\left[Z^t, Z^s\right]_{\mathbf{H}} = K(t,s) \text{ pentru } t, s \in \mathbf{E}' .$$

PROPOZITIA 3.2.2 *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil* $\mathbf{E}$. *Fie* $\mathbf{H}$ *spaţiu Hilbert şi* $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ *injecţia liniară şi continuă asociate lui μ ca mai inainte. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \parallel S^{-1}x \parallel_{\mathbf{H}}^2 \ \text{dacă } x \in S(\mathbf{H}) \\ +\infty, \text{dacă } x \in \mathbf{E} \backslash S(\mathbf{H}). \end{cases}$$

In plus, operatorul S este compact.

Demonstraţie. Transformarea Laplace $\hat{\mu}(t)$ se scrie

$$\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbf{E}} e^{\langle t,x \rangle} d\mu(x) = E\left[\exp\left(Z^t\right)\right],$$

deci $\log \hat{\mu}(t) = \frac{1}{2}[Z^t, Z^t]_{\mathbf{H}} = \frac{1}{2}K(t,t)$. Propoziţia 3.1.8 arată că

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[< t, x > -\frac{1}{2} K(t,t) \right], \ x \in \mathbf{E}, \text{ deci}$$

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left[< t, x > -\frac{1}{2} \parallel Z^t \parallel^2 \right]. \tag{3.21}$$

Fie acum $x \in \mathbf{E}$ fixat astfel ca $\lambda(x) < +\infty$. Pentru $t \in \operatorname{Ker} Z$ şi orice $a \in \mathbf{R}$, conform formulei (3.21), avem $\lambda(x) \geq a\langle t, x\rangle$, ceea ce implică $\langle t, x \rangle = 0$. Aceasta inseamnă că există o aplicaţie liniară $g : \operatorname{Im} Z \to \mathbf{R}$ astfel ca $g(Z^t) = \langle t, x \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Tot din formula (3.21) rezultă

$$| g(v) | \leq \lambda(x) + \frac{1}{2} \parallel v \parallel_{\mathbf{H}}^2 \ \text{ pentru } v \in \operatorname{Im} Z,$$

deci g este marginită pe intersecţia dintre $\operatorname{Im} Z$ şi bila unitate din $\mathbf{H}$. Cum $\operatorname{Im} Z$ este densă in $\mathbf{H}$, aplicaţia g se prelungeşte (unic) la o funcţională liniară şi continuă pe $\mathbf{H}$ i.e. există $w \in \mathbf{H}$ astfel ca $g(v) = [v, w]_{\mathbf{H}}$ pentru orice $v \in \mathbf{H}$. In particular $\langle t, x \rangle = g(Z^t) = [Z^t, w]_{\mathbf{H}} = \langle t, Sw \rangle$ pentru orice $t \in \mathbf{E}'$, deci $x = Sw$ i.e. $x \in S(\mathbf{H})$.

Reciproc, fie $x \in S(\mathbf{H})$ şi să scriem $x = Sw$ cu $w \in \mathbf{H}$. Conform formulei (3.21), avem

$$\lambda(x) = \sup_{t \in \mathbf{E}'} \left\{ \left[Z^t, w\right]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \parallel Z^t \parallel_{\mathbf{H}}^2 \right\}$$

şi cum $\operatorname{Im} Z$ este densă in $\mathbf{H}$, obţinem

$$\lambda(x) = \sup_{v \in \mathbf{H}} \left\{ [v, w]_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} \| v \|_{\mathbf{H}}^2 \right\}.$$

Pentru $\| v \|_{\mathbf{H}} = a$ fixat, $\sup [v, w]_{\mathbf{H}}$ este atins şi este egal cu $a \| w \|_{\mathbf{H}}$. Cum $\sup \left(a \| w \|_{\mathbf{H}} - \frac{1}{2} a^2 \right)$ este egal cu $\frac{1}{2} \| w \|_{\mathbf{H}}^2$, obţinem $\lambda(x) = \frac{1}{2} \| w \|_{\mathbf{H}}^2 = \frac{1}{2} \| S^{-1} x \|_{\mathbf{H}}^2$ şi in particular $\lambda(x) < +\infty$.

Calculul lui λ arată că imaginea prin S a bilei unitate din $\mathbf{H}$ este $\{x \in \mathbf{E} : \lambda(x) \leq 1\}$. Această mulţime este compactă (cf. teoremei 3.1.14), deci S este operator compact.□

TEOREMA 3.2.3 *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil $\mathbf{E}$. Fie $X : \Omega \to \mathbf{E}$ variabilă aleatoare de lege μ. Fie Λ funcţionala Cramer asociată lui μ. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{B}(\mathbf{E})$ avem*

$$-\Lambda \left(\overset{\circ}{A} \right) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \leq -\Lambda \left(\bar{A} \right).$$

Demonstraţie. Fie $\epsilon \in (0,1)$ şi notăm $n(\epsilon)$ partea intreagă a lui $1/\epsilon^2$. Putem scrie

$$\epsilon = \frac{b(\epsilon)}{n(\epsilon)^{1/2}}, \text{ cu } 1 - \epsilon^2 \leq b^2(\epsilon) \leq 1. \tag{3.22}$$

Fie $X_p : \Omega \to \mathbf{E}$ şir de variabile aleatoare independente, toate cu legea μ. Intrucât μ este gausiană, media normalizată $p^{1/2} \overline{X}_p$ are aceeaşi lege ca şi X pentru orice p. In consecinţă

$$P(\epsilon X \in A) = P\left(\epsilon n(\epsilon)^{1/2} \overline{X}_{n(\epsilon)} \in A \right) \tag{3.23}$$

$$= P\left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A \right)$$

Să notăm $F = \left\{ x \in \mathbf{E} : x = ay,\ 1 \leq a \leq 2,\ y \in \bar{A} \right\}$. Din definiţia lui Λ şi remarcând că transformarea Cramer λ a lui μ satisface $\lambda(ax) = a^2 \lambda(x)$ pentru orice $a \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{E}$, obţinem

$$\Lambda(F) = \inf_{x \in F} \lambda(x) \tag{3.24}$$

$$= \inf_{y \in \bar{A}} \inf_{1 \le a \le 2} a^2 \lambda(y) = \inf_{y \in \bar{A}} \lambda(y) = \Lambda\left(\bar{A}\right).$$

Pe de altă parte, $\frac{1}{b(\epsilon)} A \subset F$ dacă ϵ este suficient de mic (F este inchisă) şi cum $\lim_{\epsilon \to 0} n(\epsilon) = +\infty$, teorema 3.1.14 implică

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \frac{1}{n(\epsilon)} \log P\left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in \frac{1}{b(\epsilon)} A\right)$$

$$\le \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log P\left(\overline{X}_n \in F\right) \le -\Lambda(F),$$

ceea ce, impreună cu formulele (3.22)-(3.24) dau a doua inegalitate din concluzia teoremei.

Fie $x \in \overset{\circ}{A}$. Există o vecinătate deschisă şi convexă V a lui x astfel ca, pentru ϵ suficient de mic, să avem $V \subset \frac{1}{b(\epsilon)} A$. Conform aceleiaşi teoreme 3.1.14, avem

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \ge \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{b^2(\epsilon)}{n(\epsilon)} \log P\left(\overline{X}_{n(\epsilon)} \in V\right)$$

$$= -\Lambda(V) \ge -\lambda(x).$$

Luăm sup in membrul drept din ultima inegalitate după $x \in \overset{\circ}{A}$ şi obţinem prima inegalitate din concluzia teoremei. □

Sa considerăm acum $\mathbf{E}$ spaţiu Hilbert separabil şi μ probabilitate gausiană (centrată) pe $\mathcal{B}(\mathbf{E})$. Are loc $\mathbf{E} \simeq \mathbf{E}'$, iar covariaţia $K(s,t)$ asociată lui μ se scrie

$$K(s,t) = \langle s, Tt \rangle = \langle Ts, t \rangle \text{ pentru } s, t \in \mathbf{E},$$

unde $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ este operator liniar, continuu, autoadjunct, pozitiv şi *de urmă finită*. Aceasta inseamnă ca există o bază ortonormală e_n a lui $\mathbf{E}$ şi numere pozitive r_n astfel ca $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n < +\infty$ şi

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}.$$

Vom nota $T^{1/2}$ rădăcina pătrată (unică) auto-adjunctă a lui T, definită prin

$$T^{1/2}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle r_n^{1/2} e_n \text{ pentru } x \in \mathbf{E}$$

şi $\mathbf{H}$ inchiderea lui $T^{1/2}(\mathbf{E})$. Atunci $\mathbf{H}$ este ortogonalul lui $\operatorname{Ker} T$ in $\mathbf{E}$, iar $\operatorname{Ker} T$, $\mathbf{H}$ sunt nucleul şi aderenţa imaginii lui $T^{1/2}$. In particular, restricţia lui $T^{1/2}$ la subspaţiul inchis $\mathbf{H}$ este injectivă şi $T^{1/2}(\mathbf{E}) = T^{1/2}(\mathbf{H})$.

PROPOZITIA 3.2.4 *Fie μ probabilitate gausiană (centrată) pe spaţiul Hilbert separabil* $\mathbf{E}$, $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *operatorul de covariaţie asociat lui μ ca mai inainte şi* $\mathbf{H}$ *ortogonalul lui* $\operatorname{Ker} T$ *in* $\mathbf{E}$. *Notăm cu S restricţia lui $T^{1/2}$ la* $\mathbf{H}$, *deci $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ este injectiv şi aplică* $\mathbf{H}$ *pe* $T^{1/2}(\mathbf{E})$. *Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată de*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \| S^{-1}x \|_{\mathbf{H}}^2 & \text{dacă } x \in T^{1/2}(\mathbf{E}) \\ +\infty, & \text{dacă } x \notin T^{1/2}(\mathbf{E}). \end{cases}$$

Demonstraţie. Pentru orice $s \in \mathbf{E}' = \mathbf{E}$, notăm $Z^s = T^{1/2}s$. Intrucât operatorul $T^{1/2}$ lasă pe $\mathbf{H}$ invariant şi verifică $\overline{T^{1/2}(\mathbf{E})} = \mathbf{H}$, obţinem că $Z : \mathbf{E}' \to \mathbf{H}$ este operator liniar, continuu, de imagine densă, in timp ce $S : \mathbf{H} \to \mathbf{E}$ este injectiv. Rămâne de aplicat propoziţia 3.2.2, observând că $S(\mathbf{H}) = T^{1/2}(\mathbf{E})$.□

Fie $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ proces gausian centrat cu traiectoriile continue a.s. Atunci ***covariaţia*** ρ i.e.

$$\rho(s,t) = \int_\Omega X_s(\omega) X_t(\omega) dP(\omega), \text{ pentru } s,t \in [0,1],$$

este continuă in (s,t). Reciproc, dacă ρ satisface condiţia Hölder

$$| \rho(s,t) - \rho(s',t') | \leq ct. [| s - s' |^\alpha + | t - t' |^\alpha]$$

pentru $s, t, s', t' \in [0,1]$, atunci procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s. Mai mult, deindată ce procesul X_t admite o versiune cu traiectoriile continue a.s., putem găsi o versiune a procesului cu traiectoriile continue *peste tot*. Obţinem astfel o aplicaţie măsurabilă $X : \Omega \to C[0,1]$, unde $X(\omega)$ este funcţia care lui $t \in [0,1]$ ii asociază $X_t(\omega)$, iar $C[0,1]$ este spaţiul funcţiilor continue pe $[0,1]$ inzestrat cu corpul borelienelor.

Fie μ imaginea probabilitaţii P (dată pe Ω) prin aplicaţia X, i.e. *legea procesului* X_t . Atunci μ este probabilitate gausiană centrată pe $(\mathbf{E}, \mathcal{B}(\mathbf{E}))$, unde $\mathbf{E} = C[0,1]$ inzestrat cu structura sa uzuală de spaţiu Banach.

Intr-adevar, $\mathbf{E}'$ este spaţiul măsurilor Radon mărginite pe $[0,1]$; pentru orice $\pi \in \mathbf{E}'$, variabila aleatoare $Z^\pi : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Z^\pi(f) = \langle \pi, f \rangle = \int_{[0,1]} f(t)d\pi(t), \text{ pentru } f \in \mathbf{E}$$

are aceeaşi lege (atunci când $\mathbf{E}$ este inzestrat cu probabilitatea μ) ca şi variabila aleatoare $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ definită prin

$$Y(\omega) = \int_{[0,1]} X_t(\omega)d\pi(t).$$

Deci imaginea măsurii μ prin orice funcţională liniară şi continuă este gausiană centrată, deci μ este gausiană centrată.

Covariaţia K a lui μ este dată de

$$K(\pi, \eta) = \mathrm{Cov}\left[\int_{[0,1]} X_t d\pi(t), \int_{[0,1]} X_t d\eta(t)\right]$$
$$= \iint_{[0,1]\times[0,1]} \rho(s,t)d\pi(s)d\eta(t).$$

PROPOZITIA 3.2.5 *Fie* $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ *proces gausian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariaţie* $\rho(s,t)$, $s,t \in [0,1]$. *Să definim operatorul* $R : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ *prin* $Rf(t) = \int_0^1 \rho(t,s)f(s)ds$. *Atunci* R *ia valori in* $C[0,1]$, *este auto-adjunct, pozitiv, compact şi de urmă finită. Fie* $\mathbf{H}$ *ortogonalul lui* $\mathrm{Ker}\, R$ *in* $L^2[0,1]$ *şi* S *restricţia la* $\mathbf{H}$ *a operatorului* $R^{1/2}$, *deci* $S : \mathbf{H} \to L^2[0,1]$ *este injectiv şi aplică* $\mathbf{H}$ *pe* $R^{1/2}(L^2[0,1])$.

Fie μ legea procesului X_t . Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată (pentru $f \in C[0,1]$) de :

$$\lambda(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \| S^{-1} f \|^2_{L^2[0,1]} \text{ dacă } f \in R^{1/2}(L^2[0,1]) \\ +\infty, \text{ dacă } f \notin R^{1/2}(L^2[0,1]) . \end{cases}$$

Demonstraţia se va baza pe lema următoare.

LEMA 3.2.6 *Fie* $\mathbf{C}$, $\mathbf{L}$ *spaţii Banach separabile şi μ probabilitate gausiană centrată pe* $\mathbf{C}$. *Dacă există o injecţie continuă $i : \mathbf{C} \to \mathbf{L}$, atunci transformările Cramer ale măsurilor μ şi $i(\mu)$ sunt legate prin relaţia*

$$\lambda_\mu = \lambda_{i(\mu)} \circ i .$$

Demonstraţia lemei 3.2.6 Fie $i^* : \mathbf{L}^* \to \mathbf{C}^*$ aplicaţia duală a lui i. Din definiţia covariaţiei obţinem

$$K_{i(\mu)}(s,t) = K_\mu(i^*(s), i^*(t)) \text{ pentru } s,t \in \mathbf{L}^* .$$

Cum i este injectivă, $i^*(\mathbf{L}^*)$ este densă in $\mathbf{C}^*$ şi deci, pentru $x \in \mathbf{C}$, avem

$$\lambda_\mu(x) = \sup_{t \in \mathbf{C}^*} \left[\langle t, x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(t,t) \right]$$

$$= \sup_{s \in \mathbf{L}^*} \left[\langle i^*(s), x \rangle - \frac{1}{2} K_\mu(i^*(s), i^*(s)) \right]$$

$$= \sup_{s \in \mathbf{L}^*} \left[\langle s, i(x) \rangle - \frac{1}{2} K_{i(\mu)}(s,s) \right]$$

i.e. $\lambda_\mu(x) = \lambda_{i(\mu)}(i(x))$.□

Demonstraţia propoziţiei 3.2.5 Luăm $\mathbf{C} := C[0,1]$ şi $\mathbf{L} := L^2[0,1]$; dacă i este injecţia canonică, lema 3.2.6 arată că, pentru $f \in C[0,1]$ avem $\lambda_\mu(f) = \lambda_{i(\mu)}(f)$ unde prin abuz de limbaj am identificat f şi $i(f)$. Apoi, covariaţia lui $i(\mu)$ este dată de $K_{i(\mu)}(f,g) = \langle Rf, g \rangle_{L^2[0,1]}$, iar calculul lui $\lambda_{i(\mu)}$ pentru spaţiul Hilbert $\mathbf{L}$ a fost făcut in propoziţia 3.2.4 Folosim in final că λ este "restricţia " lui $\lambda_{i(\mu)}$ la $\mathbf{C}$.□

3.3 APLICAŢII

APLICAŢIE LA MIŞCAREA BROWNIANĂ, MĂSURI ŞI PROCESE GAUSIENE

PROPOZITIA 3.3.1 *Fie $W_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ mişcare browniană cu $W_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mişcării browniene W_t pe $C_0[0,1]$, spaţiul Banach al funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi nule in 0. Atunci transformarea Cramer λ a lui μ este dată, pentru $f \in C_0[0,1]$, prin*

$$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f', respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

Demonstraţie. Vom aplica propoziţia 3.2.5 spaţiului $C_0[0,1]$ in loc de $C[0,1]$, ceea ce nu modifică nimic. Avem $\rho(s,t) = s \wedge t$, iar operatorul $R : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ este dat de

$$Rg(t) = \int_0^1 (s \wedge t)\, g(s)ds = \int_0^t sg(s)ds + t\int_t^1 g(s)ds.$$

Este clar că, dacă f este continuă, nulă in 0 şi $f = Rg$, atunci f admite derivată continuă $f'(t) = \int_t^1 g(s)ds$ nulă in 1 şi admite derivată de ordinul doi $f'' = -g$ de pătrat integrabil. De aici rezultă că R este injectiv, că $R(L^2[0,1])$ este mulţimea $f \in C_0[0,1]$ de două ori derivabile, astfel ca $f'' \in L^2[0,1]$ şi $f'(1) = 0$. In fine, pentru $f \in R(L^2[0,1])$, avem $R^{-1}f = -f''$.

Fie $f \in R(L^2[0,1])$; din $f = -Rf''$, obţinem

$$\| R^{-1/2}f \|^2_{L^2[0,1]} = \| R^{1/2}f'' \|^2_{L^2[0,1]} = \langle Rf'', f''\rangle_{L^2[0,1]}$$

$$= -\langle f, f''\rangle_{L^2[0,1]} = \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \quad ,$$

in care ultima egalitate s-a obţinut prin integrare prin părţi, deoarece $f(0) = f'(1) = 0$. Conform propoziţiei 3.2.5 avem

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \| R^{-1/2} f \|^2_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]},$$

pentru $f \in R(L^2[0,1])$. Acest rezultat trebuie extins la $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$. Fie deci $f = R^{1/2} g$ cu $g \in L^2[0,1]$, $f \in C_0[0,1]$. Cum R este injectiv, şi $R^{1/2}$ este injectiv, deci $R^{1/2}(L^2[0,1])$ este dens in $L^2[0,1]$. Există un şir $h_n \in L^2[0,1]$ astfel ca $R^{1/2} h_n = g_n$ converge către g in $L^2[0,1]$, ceea ce implică convergenţa lui $f_n = R^{1/2} g_n = R h_n$ către f in $C_0[0,1]$. Cum $f_n \in R(L^2[0,1])$, avem

$$\| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f_n \|_{L^2[0,1]} = \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

şi cum g_n converge către g, se obţine că f'_n este şir mărginit in $L^2[0,1]$. Putem deci extrage un subşir (notat tot f'_n) convergent slab către $k \in L^2[0,1]$. In consecinţă, $f_n(t) = \langle f'_n, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]}$ converge pentru orice $t \in [0,1]$ către

$$\overline{k}(t) = \langle k, 1_{[0,t]} \rangle_{L^2[0,1]} = \int_0^t k(s) ds.$$

Cum f_n converge către f in $C_0[0,1]$, rezultă că $f = \overline{k}$, deci există $k = f' \in L^2[0,1]$. In plus, cum f'_n converge slab către f' in $L^2[0,1]$, avem

$$\| f' \|_{L^2[0,1]} \leq \liminf_{n \to +\infty} \| f'_n \|_{L^2[0,1]}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \| g_n \|_{L^2[0,1]} = \| g \|_{L^2[0,1]} = \| R^{-1/2} f \|_{L^2[0,1]}$$

adică, tinând cont de propoziţia 3.2.5:

$$\frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \leq \lambda(f) \text{ pentru } f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}\left(L^2[0,1]\right).$$

In plus, am văzut că $f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$ implică existenţa lui f' şi $f' \in L^2[0,1]$.

Reciproc, fie $f \in C_0[0,1]$ astfel că f' există şi $f' \in L^2[0,1]$. Aproximăm f' in $L^2[0,1]$ cu funcţii de clasă C^1 şi obţinem existenţa unui şir $v_n \in C_0[0,1]$ astfel că v'_n , v''_n există, $v''_n \in L^2[0,1]$, $v'_n(1) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} v'_n = f'$ in $L^2[0,1]$ şi $\lim_{n\to+\infty} v_n = f$ in $C_0[0,1]$. Semi-continuitatea inferioară a lui λ implică $\lambda(f) \leq \liminf_{n\to+\infty} \lambda(v_n)$. Pe de altă parte, intrucât $v_n \in R(L^2[0,1])$, avem $\lambda(v_n) = \frac{1}{2} \| v'_n \|_{L^2[0,1]}$, deci

$$\lambda(f) \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \| v'_n \|_{L^2[0,1]} = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]} \ .$$

In particular $\lambda < +\infty$, ceea ce implică $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$.

Am identificat deci $C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$ cu mulţimea $f \in C_0[0,1]$ astfel că f' există şi $\in L^2[0,1]$, am demonstrat că $\lambda(f) = \frac{1}{2} \| f' \|^2_{L^2[0,1]}$ pentru $f \in C_0[0,1] \cap R^{1/2}(L^2[0,1])$, in timp ce $\lambda = +\infty$ in afara acestui subspaţiu.□

Exerciţii 1. Fie procesul Ornstein-Uhlenbeck real definit prin

$$V_t = \alpha e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \ , \ V_0 = 0,$$

sau ca soluţia unică a ecuaţiei stocastice Langevin

$$V_t = \alpha W_t - \beta \int_0^t V_s ds.$$

Folosind metoda din propoziţia 3.3.1, arătaţi că transformarea Cramer a acestui proces este, pentru $f \in C_0[0,1]$

$$\lambda(f) = \frac{1}{2\alpha^2} \int_0^1 [f'(t) + \beta f(t)]^2 \, dt$$

dacă f este absolut continuă cu derivata (Lebesgue) f' , respectiv $\lambda(f) = +\infty$, dacă f nu este absolut continuă.

2. Fie λ transformarea Cramer a legii traiectoriilor mişcarii browniene şi $f \in C_0[0,1]$ cu $\lambda(f) < +\infty$. Arătaţi că

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon W - f| < \delta \right\}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P \left\{ \sup_{[0,1]} |\epsilon W - f| < \delta \right\} = -\lambda(f).$$

3. In cazul unui proces gausian X_t (vezi propoziţia 3.2.5), pentru $f \in R^{1/2}(L^2[0,1])$, arătaţi că

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{P\left\{\sup_{[0,1]} |\epsilon X - f| < \delta\right\}}{P\left\{\sup_{[0,1]} |\epsilon X| < \delta\right\}} = \exp\left\{-\epsilon^{-2}\lambda(f)\right\}.$$

4. Arătaţi că afirmaţiile de la 2 şi 3 rămân adevărate in cazul unei variabile aleatoare cu valori intr-un spaţiu Banach (sau a unei probabilităţi cu valori intr-un spaţiu Banach). Mai precis, fie λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \to \mathbf{E}$,cu $\mathbf{E}$ spaţiu Banach separabil, cu legea gausiană centrată. Atunci, pentru orice $S(\mathbf{H})$ (vezi notaţiile din propoziţia 3.2.2 şi teorema 3.2.3), avem

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(\| \epsilon X - x \| < \delta) = -\lambda(x)$$

şi

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{P(\| \epsilon X - x \| < \delta)}{P(\| \epsilon X \| < \delta)} = \exp\left\{-\epsilon^{-2}\lambda(x)\right\}.$$

Indicaţie. Arătaţi că, in ipoteza

$\Phi(t) := \{\lambda(x) \le t\}$ sunt mulţimi compacte pentru orice $t > 0$,

următoarele afirmaţii sunt echivalente.

a) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ deschisă avem

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \ge -\Lambda(A).$$

a') Pentru orice $\delta, \gamma > 0$, $x \in \mathbf{E}$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\| \epsilon X - x \| < \delta) \ge \exp\left(-\epsilon^{-2}[\lambda(x) + \gamma]\right) \text{ pentru } \epsilon \le \epsilon_0 .$$

Similar, următoarele afirmaţii sunt echivalente.

b) Pentru orice $A \subset \mathbf{E}$ inchisă avem

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon X \in A) \le -\Lambda(A).$$

b') Pentru orice $\delta, \gamma, s > 0$, există $\epsilon_0 > 0$ astfel ca

$$P(\| \epsilon X - \Phi(s) \| \ge \delta) \le \exp\left(-\epsilon^{-2}(s - \gamma)\right) \text{ pentru } \epsilon \le \epsilon_0 .$$

LEMA 3.3.2 *Fie E spaţiu Banach separabil, λ transformarea Cramer a unei variabile aleatoare $X : \Omega \to E$ şi $A \subset E$ astfel ca*

$$\inf_{x \in \mathring{A}} \lambda(x) = \inf_{x \in \bar{A}} \lambda(x),$$

iar valoarea comună este atinsă intr-un punct unic $x_0 \in E$. Atunci, pentru orice $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{P\{(\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| < \delta)\}}{P(\epsilon X \in A)} = 1 \tag{3.25}$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\inf\left\{\lambda(x),\ x \in \bar{A},\ \| x - x_0 \| < \delta\right\} > \lambda(x_0).$$

Apoi

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P((\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta))$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left(\left(\epsilon X \in \bar{A}\right) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta)\right)$$

$$< -\lambda(x_0).$$

Aceasta inseamnă că $P((\epsilon X \in A) \cap (\| x - x_0 \| \geq \delta))$ converge către 0 mai repede ca numitorul din (3.25).□

Exemplu Fie procesul stocastic X_t^ϵ pe intervalul $[0, 1]$ care satisface ecuaţia liniară

$$P\left(\frac{d}{dt}\right) X_t^\epsilon \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k X_t^\epsilon}{dt^k} = \epsilon \dot{W}_t ,$$

impreună cu n condiţii la frontieră, liniare, omogene şi deterministe, unde W_t este o mişcare browniană. Avem

$$X_t^\epsilon = \epsilon \int_0^1 G(s, t)\, dW_s ,$$

unde $G(s, t)$ este funcţia Green a problemei la frontieră asociată operatorului $P(d/dt)$şi condiţiilor la frontieră date. Transformarea Cramer asociată traiectoriilor procesului X_t^ϵ este $\lambda(f) =$

$+\infty$ dacă f nu satisface condiţiile la frontieră sau dacă derivata $d^{n-1} f_t / dt^{n-1}$ nu este absolut continuă, respectiv

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| P\left(\frac{d}{dt}\right) f \right|^2 dt$$

in caz contrar. Arătaţi că mulţimea $A = \{f \in L^2[0,1] \; : \; \| f \| > c\}$ satisface ipotezele lemei 3.3.2 şi deduceţi că

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| > c\} = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| \geq c\}$$

$$= -\inf\left\{\frac{1}{2} \| P\left(\frac{d}{dt}\right) f \|^2\right\},$$

unde inf $-$ul se ia după toate funcţiile f care satisfac condiţiile la frontieră şi $\| f \| = c$. In cazul particular in care $P(d/dt)$ este autoadjunct in $L^2[0,1]$, avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\{\| X^\epsilon \| > c\} = -\frac{c^2}{2}\zeta^2 ,$$

unde ζ este valoarea proprie cea mai mica in valoare absolută a lui $P(d/dt)$.

Observaţie Vom vedea in capitolul următor un alt exemplu de aplicare al lemei 3.3.2 in cazul difuziilor (soluţiile ecuaţiilor stocastice), la evaluarea asimptotică a probabilităţii ca difuzia să rămâna intr-un domeniu şi a primului timp de ieşire a difuziei dintr-un domeniu.

PROPOZITIA 3.3.3 *Fie μ probabilitate gausiană centrată pe spaţiul Banach separabil* $\mathbf{E}$. *Fie λ transformata ei Cramer şi K covariaţia ei. Atunci numerele*

$$a = \inf\{\lambda(x) : x \in \mathbf{E}, \; \| x \| = 1\}$$

şi

$$b = \sup\{K(t,t) : t \in \mathbf{E}', \; \| t \| = 1\}$$

sunt finite şi avem

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r^2}\log\mu\{x\in\mathbf{E},\ \| x \|\geq r\} = -a = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstraţie. Fie $B=\{x\in\mathbf{E},\ \| x \|\geq 1\}$. Relaţia $\lambda(\alpha x)=\alpha^2\lambda(x)$ pentru $\alpha\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{E}$ implică

$$\Lambda(B)=\inf_{x\in B}\lambda(x)=\inf_{\|y\|=1}\inf_{\alpha>1}\alpha^2\lambda(y)=a.$$

$$\Lambda\left(\mathring{B}\right)=\inf_{\|y\|=1}\inf_{\alpha>1}\alpha^2\lambda(y)=a.$$

Cum B este inchisă, teorema 3.2.3 implică

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r^2}\log\mu\{x\in\mathbf{E},\ \| x \|\geq r\}$$

$$=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r^2}\log P\left(\frac{1}{r}X\in B\right)=-a,$$

unde $X:(\Omega,P)\to\mathbf{E}$ este variabilă aleatoare cu legea μ.

Rămân de comparat numerele a si $1/2b$. Pentru $x\in\mathbf{E}$, $t\in\mathbf{E}'$ şi $s\geq 0$, avem $\lambda(x)\geq s\langle t,x\rangle-\frac{1}{2}s^2K(t,t)$. Fie $x\in\mathbf{E}$ cu $\| x \|=1$ fixat. Conform teoremei Hahn-Banach, există $t_0\in\mathbf{E}'$ cu $\| t_0 \|=1$ astfel ca $\langle t_0,x\rangle=1$. Obţinem

$$\lambda(x)\geq\sup_{s\geq 0}\left[s-\frac{1}{2}s^2K(t_0,t_0)\right]=\frac{1}{2K(t_0,t_0)}\geq\frac{1}{2b}$$

şi de aici obţinem $a\geq\frac{1}{2b}$. Fie acum $t\in\mathbf{E}'$ cu $\| t \|=1$; avem $t^{-1}[1,+\infty)\subset B$. Fie $X_n:\Omega\to\mathbf{E}$ variabile aleatoare cu legea μ. Atunci

$$P\left(\overline{t(X_n)}\in[1,+\infty)\right)\leq P\left(\overline{X_n}\in B\right).$$

In această inegalitate aplicăm log, facem $n\to+\infty$ şi, dacă notăm $\lambda_{t(\mu)}$ transformata Cramer a lui $t(\mu)$, obţinem

$$-\frac{1}{2K(t,t)}=-\lambda_{t(\mu)}(1)=-\Lambda_{t(\mu)}[1,+\infty)\leq-\Lambda(B)=-a$$

şi de aici rezultă $a \leq \frac{1}{2b}$.

Cum K este biliniară şi continuă, rezultă că $b < +\infty$ şi deci $a > 0$. Calculul lui λ arată că $a < +\infty$ şi deci $b > 0$.□

Vom vedea in cazul proceselor gausiene situaţii in care atât λ cât şi numerele a, b se pot determina explicit.

PROPOZITIA 3.3.4 *Fie* $X_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ *proces gausian centrat cu traiectoriile continue a.s., de covariaţie* $\rho(s,t)$, $s, t \in [0,1]$. *Dacă notăm* $b = \sup_{t\in[0,1]} \rho(t,t)$, *atunci*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log P\left\{\sup_{t\in[0,1]} \mid X_t \mid \geq r\right\} = -\frac{1}{2b}.$$

Demonstraţie. Conform propoziţiei 3.3.3, este suficient de verificat că

$$\sup\{K(\eta,\eta);\, \eta \in \mathbf{E}',\ \|\eta\| = 1\} = b.$$

Fie $\eta \in \mathbf{E}'$ cu $\|\eta\| = 1$. Putem scrie $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\tilde{\eta} = \eta^+ + \eta^-$ şi $\|\tilde{\eta}\| = \|\eta\| = 1$, deci

$$K(\eta,\eta) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \rho(s,t)d\eta(s)d\eta(t)$$

$$\leq \iint_{[0,1]\times[0,1]} \mid \rho(s,t) \mid d\tilde{\eta}(s)d\tilde{\eta}(t).$$

Funcţia ρ este pozitiv definită, deci $\rho(s,t)^2 \leq \rho(s,s)\rho(t,t)$ şi deci $\sup_{s,t\in[0,1]} \mid \rho(s,t) \mid = b$, ceea ce arată că $K(\eta,\eta) \leq b$. Pe de altă parte, din compactitate, există $t \in [0,1]$ astfel ca $\rho(t,t) = b$, ceea ce dă $K(\delta_t, \delta_t) = b$.□

Remarcă Dacă procesul gausian X_t are traiectoriile a.s. in $L^p[0,1]$, cu $p \geq 1$, propoziţia 3.3.3 arată că

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r^2} \log P\left\{\left(\int_0^1 \mid X_t \mid^p dt\right)^{1/p} \geq r\right\}$$

există, dar calculul acestei limite, plecând de la ρ, nu este posibilă "explicit" in general.□

LEGEA STRASSEN A LOGARITMULUI ITERAT

Fie $W_t : \Omega \to \mathbf{R}$, $t \in [0,1]$ o mişcare browniană cu $W_0 = 0$ a.s. Fie μ legea traiectoriilor mişcării browniene W_t pe $C_0[0,1]$, spaţiul Banach al funcţiilor continue pe $[0,1]$ şi nule in 0. Reamintim că $tW_{1/t}$, $t \in [1,+\infty)$ este incă mişcare browniană, deci putem considera mişcarea browniană B_t definită pentru $t \in [0,+\infty)$.

Vom prezenta in continuare **forma "functională" a legii logaritmului iterat** pentru mişcarea browniană. Notăm prin $AC[0,1]$ spaţiul funcţiilor $g \in C[0,1]$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0,1]$, derivata (Lebesgue) g' a lui g există şi este de pătrat integrabil pe $[0,t]$, inzestrat cu topologia indusă de $C[0,1]$.

TEOREMA 3.3.5 *Sirul de procese*

$$\left\{(2n \operatorname{loglog} n)^{-1/2} W_{nt} \ , \ t \in [0,1] \, , \ n \geq 2\right\},$$

(cu traiectoriile in $C_0[0,1]$), este relativ compact in $C_0[0,1]$ cu $\mu-$probabilitate 1 şi multimea punctelor sale limită este dată de

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in AC[0,1] \, , \, f(0) = 0, \ \int_0^1 f'(x)^2 \, dx \leq 1 \right\}.$$

Aceasta inseamnă că există $\Omega_0 \subset \Omega$ de probabilitate 0 cu proprietăţile următoare.

1. Pentru orice $\omega \notin \Omega_0$ şi orice şir de numere naturale $n_1 < n_2 < \ldots$, există un subşir $n_{k_j} = n_{k_j}(\omega)$ şi o funcţie $f \in \mathcal{S}$ astfel ca

$$\left(2n_{k_j} \log\log n_{k_j}\right)^{-1/2} W_{n_{k_j}t}(\omega) \to f(t) \text{ uniform in } t \in [0,1], \text{ şi}$$

2. Pentru orice $f \in \mathcal{S}$ şi $\omega \notin \Omega_0$, există un şir $n_k = n_k(\omega, f)$ astfel ca

$$(2n_k \log\log n_k)^{-1/2} W_{n_k t}(\omega) \longrightarrow f(t) \text{ uniform in } t \in [0,1].$$

Conform propoziţiei 3.3.1, mulţimea limită $\mathcal{S}$ coincide cu $\{f \in AC[0,1], f(0)=0, 2\lambda(f) \leq 1\}$.

COROLAR 3.3.6 *Dacă $\Phi : C_0[0,1] \to \mathbf{R}$ este functională liniară şi continuă, atunci*

$$\limsup_{n\to+\infty} \Phi\left((2n \log\log n)^{-1/2} W_{n\cdot}\right) = \sup_{f\in\mathcal{S}} \Phi(f) \quad \mu - \text{a.s.}$$

In particular, pentru $\Phi(f) = f(1)$, obţinem legea clasică a logaritmului iterat :

$$\limsup_{n\to+\infty} \pm (2n \log\log n)^{-1/2} W_n = 1 \quad \mu - \text{a.s.}$$

Observaţie Folosind un rezultat al lui Skorohod, care afirmă că un şir de variabile aleatoare se poate obţine redefinind o mişcare browniană, din teorema 3.3.5 se poate obţine *forma "functională" a legii Hartman-Wintner-Hincin* a logaritmului iterat pentru variabile aleatoare identic repartizate. Mai precis, fie $X_1', X_2', \ldots$ independente, identic repartizate pe $(\Omega', \mathcal{K}', P')$, cu media 0 şi dispersia 1. Atunci (Skorohod) există un câmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ şi pe el un şir de variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots$ independente, identic repartizate, cu media 0 şi dispersia 1, şi cu

$$\{X_n, n \geq 1\} = \{X_n', n \geq 1\} \text{ in lege,}$$

precum şi o mişcare browniană $\{W_t, t \geq 0\}$ pe $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ astfel incât

$$\sup_{t\geq 0} |S_t - W_t| \to 0 \text{ in } P - \text{probabilitate,}$$

unde am notat $S_0 = 0$ şi

$$S_t = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ dacă } t \in \mathbf{N}^* \\ (1-t-[t])\, S_{[t]} + (t-[t])\, S_{[t]+1} \text{ in caz contrar.} \end{cases}$$

Atunci (Hartman-Wintner-Hincin) şirul de procese

$$\left\{(2n \log\log n)^{-1/2} S_{nt}\ ,\ t \in [0,1],\ n \geq 2\right\},$$

este relativ compact in $C_0[0,1]$ cu $P-$probabilitate 1 şi mulţimea punctelor sale limită este dată de $\mathcal{S}$. In particular, procedând ca in corolarul 3.3.6, obţinem

$$\limsup_{n\to+\infty} \pm (2n \log\log n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \ P - \text{a.s.}$$

Cu notaţiile de mai sus, fie μ_n legea lui $S_{nt}/n^{1/2}$. Arătaţi că $\mu_n \to \mu$ slab, unde μ este legea traiectoriilor mişcării browniene. (*Principiul de invariantă* al lui Donsker).

Pentru a face demonstraţia teoremei 3.3.5, vom avea nevoie de

LEMA 3.3.7 *Fie $K \subset C_0[0,1]$ compact, $g \in C_0[0,1]$ şi $I \subset (1,+\infty)$, $1 \in \bar{I}$. Notăm $g_n(t) = g(nt)/(2\log\log n)^{1/2}$ pentru $n \geq 2$, $t \in [0,1]$. Pentru $i > 1$, notăm $i_n = [i^n]$. Dacă*

$$\limsup_{n\to+\infty} \| g_{i_n} - K \| = 0 \text{ pentru orice } i \in I,$$

atunci şirul $\{g_n \ , n \geq 2\}$ este relativ compact şi orice subşir convergent al său converge către un element din K.

Demonstraţie. Intrucât K este compact, există $M > 0$ şi $\rho : (0,1] \to (0,+\infty)$ nedescrescătoare cu $\lim_{t\searrow 0} \rho(t) = 0$ şi

$$\sup_{f\in K} \| f \| \leq M, \ \sup_{f\in K} | f(t) - f(s) | \leq \rho(t-s), \ 0 \leq s < t \leq 1.$$

Dat fiind $\epsilon > 0$, să alegem $i \in I$ cu $\rho(1-1/i) < \epsilon$ şi $(i-1) \times (M+\epsilon) < \epsilon$. Apoi alegem un număr natural $L \geq 2$ astfel ca $\log\log ix/\log\log x \leq i$ pentru $x \geq L$. In fine, fie $n(i,\epsilon)$ cu $\| g_{i_n} - K \| < \epsilon$ pentru $n \geq n(i,\epsilon)$; notăm $n(\epsilon) = L \vee n(i,\epsilon)$. Pentru $n \geq n(\epsilon)$, să alegem m astfel ca $i^m \leq n \leq i^{n+1}$ şi notăm $N = [i^{m+1}]$; cum $m \geq n(i,\epsilon)$, ştim că $\| g_N - K \| < \epsilon$. Deci $\| g_n - K \| < \epsilon + \| g_n - g_N \|$. Observând că

$$g_n(t) = g\left(\frac{n}{N} Nt\right) / (2\log\log n)^{1/2}$$

$$= g_N\left(\frac{n}{N} t\right) (2\log\log N)^{1/2} / (2\log\log n)^{1/2}$$

obţinem

$$\| g_n - g_N \| = \sup_{0\le t\le 1} \left| \frac{(2\operatorname{loglog} N)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} g_N\left(\frac{n}{N}t\right) - g_N(t) \right|$$

$$\le \left| \frac{(2\operatorname{loglog} N)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} - 1 \right| \| g_N \| + \sup_{0\le t\le 1} \left| g_N\left(\frac{n}{N}t\right) - g_N(t) \right|$$

$$\le \left| \frac{(2\operatorname{loglog} N)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} - 1 \right| (M+\epsilon) + 2\epsilon + \rho\left(1 - \frac{n}{N}\right).$$

Cum $n \le N \le \lambda n$, avem

$$1 \le \frac{(2\operatorname{loglog} N)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} \le \frac{(2\operatorname{loglog} \lambda n)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} \le \lambda,$$

deci

$$\left| \frac{(2\operatorname{loglog} N)^{1/2}}{(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}} - 1 \right| (M+\epsilon) \le (\lambda - 1)(M+\epsilon) \le \epsilon.$$

In acelaşi timp avem $\rho(1 - n/N) \le \rho(1 - 1/\lambda) < \epsilon$, deci $\| g_n - K \| < 5\epsilon$ pentru $n \ge n(\epsilon)$.□

Demonstraţia teoremei 3.3.5 Fie $i > 1$ si $\delta > 0$ fixate ; notam $i_n = [i^n]$, $\mathcal{S}^\delta = \{g \in C_0[0,1],\ \| g - \mathcal{S} \| < \delta\}$, $\xi_n(t) = W_{nt}/(2\operatorname{loglog} n)^{1/2}$ şi alegem $1 < i < \inf_{g\in\mathcal{S}^\delta} 2\lambda(g)$. Din a doua inegalitate a teoremei 3.3.1 rezultă

$$\mu\left(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) \le \exp(-\gamma \operatorname{loglog} i_n) \le \frac{1}{(n-1)^\gamma \log i}$$

pentru n suficient de mare. De aici obţinem

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(\xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) < +\infty, \text{ deci } \mu\left(\limsup_{n\to+\infty} \xi_{i_n}(\cdot) \notin \mathcal{S}^\delta\right) = 1.$$

Această egalitate este adevărată pentru orice $\delta > 0$ deci, pentru orice $i > 1$, există B_i cu $\mu(B_i) = 0$ şi

$$\limsup_{n\to+\infty} \| \xi_{i_n}(\cdot,\omega) - \mathcal{S} \| = 0 \text{ pentru } \omega \notin B_i.$$

Punem $B = \cup_{n\geq 1} B_{1+1/n}$; avem $\mu(B) = 0$ şi pentru orice $\omega \notin B$ aplicăm lema 3.3.6 cu $I = \{1 + 1/n\ ,\ n \geq 1\}$ pentru a obtine că şirul $\{\xi_n\ ,\ n \geq 2\}$ este relativ compact şi orice subsir convergent al său converge către un element din $\mathcal{S}$.

Pentru reciprocă, să alegem o submulţime numărabilă densă in $\mathcal{S}$, formată din funcţii f cu $2\lambda(f) < 1$ (luăm e.g. $f_n(t) = \int_0^t \dot{f}_n(t)\,dt$; $n \geq 1$, $t \in [0,1]$, unde $\dot{f}_n \in L^2[0,1]$ este densă in $\left\{f \in L^2[0,1],\ \|f\|_{L^2[0,1]} < 1\right\}$). Este deci suficient de arătat că, pentru orice $f \in \mathcal{S}$ cu $2\lambda(f) < 1$, avem

$$\mu\left(\liminf_{n\to+\infty} \| \xi_n(\cdot) - f \| = 0\right) = 1.$$

Pentru $k \geq 2$, definim

$$f_k(t) = \begin{cases} 0, \text{ pentru } 0 \leq t \leq 1/k \\ f(t) - f(1/k),\ \text{pentru } t \geq 1/k \end{cases}$$

şi pentru $m \geq 1$

$$\eta_{m,k}(t) = \begin{cases} 0,\ \text{dacă } 0 \leq t \leq 1/k \\ (W_{k^m t} - W_{k^{m-1}}) / (2 \log\log k^m)^{1/2},\ \text{dacă } t \geq 1/k. \end{cases}$$

Să observăm că

$$\| \xi_{k^m} - f \| \leq \sup_{[0,1/k]} \| \xi_{k^m} \| + \sup_{[0,1/k]} \| f \| + \sup_{[1/k,1]} \| \xi_{k^m} - f \|$$

$$\leq 2\left(\sup_{[0,1/k]} \| \xi_{k^m} \| + \sup_{[0,1/k]} \| f \|\right) + \| \eta_{m,k} - f_k \| .$$

Dacă $C := \{\omega :\ \xi_{i_n}(\cdot,\omega)$ este relativ compact$\}$, pentru $\delta > 0$ şi $\omega \in C$, există $k(\omega) \geq 2$ cu

$$\| \xi_{k^m} - f \| \leq \delta + \| \eta_{m,k(\omega)} - f_k \| \ \text{ pentru } m \geq 1.$$

Cum $\mu(C) = 0$, este suficient de arătat că pentru $k \geq 2$,

$$\mu\left(\liminf_{m\to+\infty} \| \eta_{m,k} - f_k \| = 0\right) = 1.$$

Insă procesele $\{\eta_{m,k}\ , m \geq 1\}$ sunt independente in raport cu μ, deci vom arăta că

$$\sum_{m \geq 1} \mu\left(\| \eta_{m,k} - f_k \| < \epsilon\right) = +\infty.$$

Din prima inegalitate din teorema 3.3.1 obţinem că există $m(k)$ cu proprietatea

$$\mu\left(\| \eta_{m,k} - \widetilde{f}_k \| < \epsilon\right) \geq \exp\left(-\gamma \operatorname{loglog} k^m\right) = \frac{1}{(m \log k)^\gamma}$$

pentru $m \geq m(k)$, unde γ este strict subunitar, iar $\widetilde{f}_k :=$ $f_k(t + 1/k)$ pentru care $\int_0^{1-1/k} \widetilde{f}_k{}'(t)^2\, dt \leq 2\lambda(f) < 1$.□

LEGEA ERDÖS-RÉNYI A NUMERELOR MARI

TEOREMA 3.3.8 *Fie $\{X_n, n \geq 1\}$ un şir de variabile aleatoare reale independente, identic repartizate, toate cu aceeaşi repartiţie μ a cărei transformată Laplace $\hat{\mu}$ este finită intr-o vecinătate a lui 0. Notăm prin λ transformata Cramer a lui μ, $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ şi*

$$\alpha(c) := \sup\left\{x \in \mathbf{R} : \lambda(x) \leq \frac{1}{c}\right\}.$$

Atunci, pentru orice $c > 0$, avem

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{0 \leq k \leq n - [c \log n]} \frac{S_{k+[c \log n]} - S_k}{[c \log n]} = \alpha(c) \text{ a.s.},$$

unde $[x]$ inseamnă partea intreagă a lui $x \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie. Notăm $l_n = [c \log n]$ şi $\alpha = \alpha(c)$. Să arătăm mai intâi că

$$\limsup_{n \to +\infty} \max_{0 \leq k \leq n - l_n} \frac{S_{k+l_n} - S_k}{l_n} \leq \alpha \text{ a.s.}$$

Fie

$$A_n = A_n(c,\epsilon) := \left\{\max_{0\le k\le n-l_n} \frac{S_{k+l_n}-S_k}{l_n} \ge \alpha+\epsilon\right\}$$

$$\text{şi } A_n^* = A_n^*(c,\epsilon) := \left\{\max_{0\le k\le n-l_n} \frac{S_{k+l_n}-S_k}{l_n+1} \ge \alpha+\epsilon\right\}.$$

Din formulele (3.5) avem

$$P(A_n) \le nP\left(\frac{S_{l_n}}{l_n} \ge \alpha+\epsilon\right) \le n\exp\left(-l_n\lambda(\alpha+\epsilon)\right);$$

din definiţia lui α există un $\delta>0$ astfel ca $\lambda(\alpha+\epsilon) \ge \frac{1+\delta}{c}$, deci

$$P(A_n) \le n\exp\left(-\frac{1+\delta}{c}[c\log n]\right)$$

şi dacă N este cel mai mic număr intreg astfel ca $N\delta > 1$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n^N}) < +\infty$. Similar demonstrăm că $\sum_{n=1}^{\infty} P(A^*_{n^N}) < +\infty$ şi folosim faptul că $l_{(n+1)^N} - l_{n^N} \le 1$ pentru n mare.

Să demonstrăm acum că

$$\liminf_{n\to+\infty} \max_{0\le k\le n-l_n} \frac{S_{k+l_n}-S_k}{l_n} \ge \alpha \text{ a.s.}$$

Fie

$$B_n = B_n(c,\epsilon) := \left\{\max_{0\le k\le n-l_n} \frac{S_{k+l_n}-S_k}{l_n} < \alpha-\epsilon\right\};$$

cum $\lambda(\alpha-\epsilon) < \frac{1}{c}$, pentru orice $\epsilon>0$ şi $c>0$ există $\delta = \delta(c,\epsilon) > 0$ astfel ca

$$\exp\left(-\lambda(\alpha-\epsilon)\right) - \delta \ge \exp\left(\frac{1-\delta}{c}\right).$$

Din formulele (3.4)-(3.5) obţinem

$$P(B_n) \le \prod_{d=1}^{[n/l_n]} P\left(\frac{S_{dl_n}-S_{(d-1)l_n}}{l_n} < \alpha-\epsilon\right)$$

$$= \left\{1 - P\left(\frac{S_{l_n}}{l_n} \geq \alpha - \epsilon\right)\right\}^{[n/l_n]}$$

$$\leq \left\{1 - (\exp(-\lambda(\alpha - \epsilon)) - \delta)^{l_n}\right\}^{[n/l_n]}$$

$$\leq \left\{1 - \exp\left(-\frac{1-\delta}{c} l_n\right)\right\}^{[n/l_n]}$$

$$= O\left(\exp\left(-\frac{n^{\delta/2}}{\log n}\right)\right) \text{ pentru } n \text{ mare,}$$

deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < +\infty$.□

Observaţii. 1. Funcţia $\alpha(c)$ din legea Erdös-Rényi determină in mod unic legea variabilelor aleatoare X_n (deoarece α determină λ, λ determină $\hat{\mu}$, iar $\hat{\mu}$ determină μ).

2. In cazul unui şir $\{X_n, n \geq 1\}$ de variabile aleatoare reale independente, identic repartizate cu $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = 1/2$, legea Erdös-Rényi arată că

$$\max_{0 \leq k \leq n - [c \log n]} \left(S_{k+[c\log n]} - S_k\right) \approx [c \log n] \text{ a.s.,}$$

pentru orice $c \in (0,1)$, deoarece in acest caz $\alpha(c) = 1$.

3. Folosind rezultatul lui Skorohod (amintit la forma funcţională a legii logaritmului iterat), din legea Erdös-Rényi putem obţine in cazul unei mişcări browniene $\{W_t, t \geq 0\}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{0 \leq t \leq n - c\log n} \frac{|W_{t+c\log n} - W_t|}{c \log n} = \sqrt{\frac{2}{c}} \text{ a.s.,}$$

pentru orice $c > 0$ (limita este tocmai $\alpha(c)$ in cazul $\mu = N(0,1)$).

LEGEA TARE A NUMERELOR MARI IN SPATII BANACH

Pe câmpul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ vom considera un şir de variabile aleatoare $\{X_n, n \geq 1\}$ independente şi identic repartizate, cu legea μ şi cu valori in spaţiul Banach separabil E. Să notăm $\overline{X}_n := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$.

TEOREMA 3.3.9 *Dacă $E(\| X_1 \|) < +\infty$, atunci $\overline{X}_n \to E(\mu)$ a.s. (şi in probabilitate).*

Demonstraţie. Să presupunem că $\| X_1 \| \leq M$ (a.s. sau in probabilitate). Atunci $\int_{\mathbf{E}} e^{s\|x\|} d\mu(x) \leq e^{sM} < +\infty$ pentru orice $s \in \mathbf{R}$ şi deci, din teorema 3.1.14 (şi lema 3.1.13) există un compact $K \subset \mathbf{E}$ şi o constantă $c > 0$, cu

$$P\left(\overline{X}_n \notin K\right) = \mu_n(K^c) \leq ce^{-n} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

unde μ_n este legea lui $\overline{X}_n$. Deci $P\left(\liminf_{n\to+\infty}\left\{\overline{X}_n \notin K\right\}\right) = 0$ i.e. şirul $\left\{\overline{X}_n(\omega), n \geq 1\right\}$ este relativ compact pentru $\omega \in \Omega_1$, cu $P(\Omega_1^c) = 0$. Din legea tare a numerelor mari (cazul real) avem

$$t\left(\overline{X}_n\right) \to t(E(\mu)) \text{ a.s., in probabilitate,}$$

pentru orice $t \in \mathbf{E}'$. Cum $\mathbf{E}$ este separabil, $\mathbf{E}'$ este w^*-separabil, deci $\overline{X}_n(\omega) \to E(\mu)$ slab, pentru $\omega \in \Omega_2$, cu $P(\Omega_2^c) = 0$. Aceasta inseamnă că $\overline{X}_n(\omega) \to E(\mu)$ tare, pentru $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

Pentru cazul general, notăm $X_n^{(M)} = \chi_{[0,M)}(\| X_n \|) X_n$ şi fie $Y_n^{(M)} = X_n - X_n^{(M)}$ pentru $n \geq 1$, $M > 0$. Pentru $\epsilon > 0$ dat, să alegem $M > 0$ cu $E\left(\| Y_1^{(M)} \|\right) < \epsilon/4$. Din legea tare pentru şirul $\left\{\| Y_n^{(M)} \|, n \geq 1\right\}$, alegem N astfel ca

$$P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \| Y_k^{(M)} \| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2$$

şi

$$P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n} \| X_n^{(M)} - E\left(\mu^{(M)}\right) \| \geq \epsilon/3\right) < \epsilon/2,$$

unde $\mu^{(M)}$ este legea lui $X_1^{(M)}$. Observând că $\| E(\mu) - E\left(\mu^{(M)}\right) \| \leq E\left(\| Y_1^{(M)} \|\right)$, obţinem

$$P\left(\sup_{n\geq N} \| \overline{X}_n - E(\mu) \| \geq \epsilon\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{n\geq N} \| \overline{X}_n - X_n^{(M)} \| \geq \epsilon/3\right)$$

$$+P\left(\sup_{n\geq N} \| X_n^{(M)} - E\left(\mu^{(M)}\right) \|\geq \epsilon/3\right)$$

$$\leq P\left(\sup_{n\geq N} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \| Y_k^{(M)} \|\geq \epsilon/3\right) + \epsilon/2 = \epsilon. \square$$

APLICAŢIE IN STATISTICĂ

Vom formula şi demonstra această aplicaţie in cazul real, deşi rămâne adevărată in contextul unui spaţiu topologic polonez. Să remarcăm importanţa ei intrinsecă, deoarece se calculează explicit transformarea Cramer a legii empirice asociate unui eşantion dat.

Notăm $\mathcal{M}(\mathbf{R})$ (resp. $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$) spaţiul măsurilor reale mărginite (resp. spaţiul probabilităţilor pe dreaptă). Pentru $\mu,\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, definim **informaţia Kullback** lui ν in raport cu μ prin

$I_\mu(\nu) = \int f(x)\log f(x) d\mu(x)$, dacă ν este absolut continuă in raport cu μ şi $f(x) = \frac{d\mu}{d\nu}(x)$,

$I_\mu(\nu) = +\infty$, dacă ν nu este absolut continuă in raport cu μ.

Observăm ca $I_\mu(\nu)$ este cu atât "mai mare "cu cât ν este mai indepărtată de μ. In particular $I_\mu(\nu) = 0 \Leftrightarrow \nu = \mu$.

TEOREMA 3.3.10 *Fie X_n şir de variabile aleatoare reale independente, cu aceeaşi lege μ. Să considerăm legea empirică a eşantionului $X_1,\ldots,X_n$ i.e. $Z_n := \frac{1}{n}\left(\delta_{X_1} + \ldots + \delta_{X_n}\right)$ cu valori in $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Atunci, pentru orice $A \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ avem*

$$-I_\mu\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log P\left(Z_n \in A\right)$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log P\left(Z_n \in A\right) \leq -I_\mu\left(\bar{A}\right),$$

unde $I_\mu(A) = \inf_{\nu\in A} I_\mu(\nu)$. Pentru orice reuniune A de deschise şi convexe din $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, avem

$$-I_\mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log P\left(Z_n \in A\right).$$

In fine, transformarea Cramer λ a legii lui δ_{X_1} coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ şi este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. In plus, mulţimile $\{\lambda(x) \leq b\}$ sunt compacte, pentru orice $b > 0$.

Demonstraţie. Din lema 3.1.13 există, pentru orice $a > 0$, un compact $\mathcal{K}_a$ in $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ astfel ca $P(Z_n \notin \mathcal{K}_a) \leq e^{-na}$. Lema 3.1.9 şi teorema 3.1.6 furnizează concluzia, dacă arătam că transformarea Cramer λ a lui π (:=legea lui δ_{X_1}) coincide cu I_μ pe $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ şi este egală cu $+\infty$ pe $\mathcal{M}(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$. Ultima afirmaţie rezultă din faptul că $\mathcal{M}_1(\mathbf{R})$ conţine anvelopa convexă inchisă a suportului lui π. Pentru $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbf{R})$, conform cu propoziţia 3.1.8, avem

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbf{R})} [\langle f, \nu \rangle - \log \hat{\pi}(f)].$$

Din constructie, pentru $f \in C(\mathbf{R})$, avem

$$\hat{\pi}(f) = \int_{\mathcal{M}_1(\mathbf{R})} \exp(\langle f, \tau \rangle)\, d\pi(\tau) = \int e^{f(x)} d\mu(x),$$

deci

$$\lambda(\nu) = \sup_{f \in C(\mathbf{R})} \left[\int f(x) d\nu(x) - \log \int e^{f(x)} d\mu(x) \right].$$

Să presupunem că $I_\mu(\nu) < +\infty$. Atunci $\nu \ll \mu$ şi fie $g = \frac{d\nu}{d\mu}$. Pentru $f \in C(\mathbf{R})$, din inegalitatea Jensen, obţinem

$$\exp\left[\int (f - \log g)\, \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu \right] \leq \int \exp(f - \log g)\, \mathbf{1}_{(g>0)} g d\mu,$$

deci

$$\int f g d\mu - \int g \log g d\mu \leq \log \int e^f d\mu$$

sau

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \int g \log g d\mu = I_\mu(\nu).$$

Luăm sup in membrul stâng dupa $f \in C(\mathbf{R})$ şi obţinem $\lambda(\nu) \leq I_\mu(\nu)$. Reciproc, presupunem $\lambda(\nu) < +\infty$ deci, pentru orice $f \in C(\mathbf{R})$ avem

$$\int f d\nu - \log \int e^f d\mu \leq \lambda(\nu) < +\infty. \tag{3.26}$$

Formula (3.26) rămâne adevărată pentru orice f măsurabilă şi marginită (cf. teoremei lui Luzin, restricţia unei astfel de funcţii la compacţi de ν şi $\mu-$măsură ≈ 1 este continuă). Aplicăm (3.26) funcţiei $f = n\mathbf{1}_A$, cu $A \subset \mathbf{R}$, $\mu(A) = 0$ şi obţinem $n\nu(A) \leq \lambda(\nu)$ pentru orice n, deci $\nu(A) = 0$. Notăm $g = \frac{d\nu}{d\mu}$ şi, dacă $\log g$ ar fi mărginită, formula (3.26) aplicată funcţiei $\log g$ ar implica

$$\int \log g d\nu - \log \int d\mu \leq \lambda(\nu)$$

i.e. $I_\mu(\nu) \leq \lambda(\nu)$. Dacă $\log g$ nu e mărginită, o aproximăm cu funcţii măsurabile mărginite.□

3.4 PERTURBAŢII ALEATOARE MICI

Fie $b : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ câmp (local) lipschitzian de vectori căruia ii asociem soluţia maximală x_t a sistemului dinamic

$$\dot{x}_t = b(x_t)\,, \tag{3.27}$$

Fie σ aplicaţie (local) lipschitziană de la $\mathbf{R}^n$ in spaţiul matricilor (n, n). Pentru orice funcţie continuă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, orice $\epsilon \geq 0$ şi orice $x \in \mathbf{R}^n$, ecuaţia diferenţială

$$\dot{x}_t^\epsilon = b(x_t^\epsilon) + \epsilon\sigma(x_t^\epsilon) f_t \tag{3.28}$$

admite o soluţie maximală unică cu $x_0^\epsilon = x$. Dacă (a, b) este intervalul de definiţie al acestei soluţii maximale, atunci avem $0 < b \leq +\infty$, iar b nu nu poate fi finit dacât dacă $\lim_{t\to b} \|x_t^\epsilon\| = +\infty$. Vom numi b ***timpul de explozie*** al soluţiei x_t^ϵ .

Să considerăm un proces gausian $G_t : \Omega \to \mathbf{R}^n$ cu traiectorii continue, $\epsilon > 0$ şi sistemul

$$\begin{cases} \dot{X}_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon) + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon) G_t \\ X_0^\epsilon = x, \text{ cu } x \in \mathbf{R}^n \text{ dat,} \end{cases} \tag{3.29}$$

unde, pentru orice $\omega \in \Omega$, $X_t^\epsilon(\omega)$ este soluţia maximală unică a lui (3.28) când inlocuim f_t cu $G_t(\omega)$ şi punem $X_0^\epsilon(\omega) = x$. Continuitatea soluţiilor lui (3.28) (ca funcţionale de f) implică măsurabilitatea lui X_t^ϵ in raport cu corpul borelian generat de G_s , $0 \le s \le t$. Să observăm că, in general, X_t^ϵ nu este proces gausian.

Problema pe care o studiem este de a preciza comportamentul traiectoriilor lui X_t^ϵ când $\epsilon \to 0$, mai precis să evaluăm probabilitatea ca traiectoria lui X_t^ϵ , $t \in [0,1]$ să apartină unei mulţimi A de traiectorii "aberante "din punctul de vedere al sistemului (3.27). Aceste probabilităţi vor converge către 0 odată cu ϵ, cu viteze de tipul $\exp(-C(A)\epsilon^2)$, iar problema este de a evalua $C(A)$.

Interpretarea euristică a acestei probleme este următoarea. "Creşterile" $\Delta X_t^\epsilon = X_{t+\Delta t}^\epsilon - X_t^\epsilon$ "verifică" $\Delta X_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)\Delta t + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\Delta Z_t$. Cu alte cuvinte, creşterea deterministă $b(X_t^\epsilon)\Delta t$ anticipată de sistemul (3.27) este perturbată aici de variabila aleatoare $\epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\Delta Z_t$ ("zgomotul") a cărei legi condiţionate de trecut la timpul t este gausiană centrată şi cu matricea de covariaţie proporţională cu ϵ^2.

Remarcă Dacă $b \equiv 0$, $k = n$, $x = 0$, $\sigma \equiv$identitatea, atunci $X_t^\epsilon = \epsilon Z_t$, unde $Z_t = \int_0^t G_s ds$ este proces gausian cu traiectorii continue iar aceasta situaţie a fost tratată in capitolul anterior.

Vom presupune că timpii de explozie ai soluţiilor lui (3.27)-(3.29) sunt infiniţi. Aceasta se intâmplă e.g. dacă b şi σ sunt cu creştere subliniară i.e. $\|\sigma(y)\| + \|b(y)\| \le ct.(1 + \|y\|)$. Totodată vom presupune că, pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$, matricea $\sigma(x)$ este inversabilă.

Observaţie In aceste ipoteze putem justifica afirmaţia că (3.29) este **"perturbaţie aleatoare mică"** a lui (3.27). Mai precis, se arată uşor că, pentru orice $t \in [0,1]$ şi $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} P\left\{\sup_{0 \le s \le t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta\right\} = 0.$$

Vom nota $C[0,1]$ spaţiul funcţiilor continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}^n$ şi, pentru $x \in \mathbf{R}^n$, notăm $C_x[0,1]$ subspaţiul funcţiilor $f \in C[0,1]$ cu $f(0) = x$, ambele inzestrate cu topologia convergenţei uniforme. In particular, observăm că aplicaţia X^ϵ care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria (soluţia lui (3.29)) $t \to X_t^\epsilon$, $t \in [0,1]$, este măsurabilă de la Ω la $C_x[0,1]$. Fie acum $x \in \mathbf{R}^n$ fixat. Pentru orice $f \in C[0,1]$, vom nota $F_x(f)$ restricţia la $[0,1]$ a soluţiei unice maximale g a ecuaţiei diferenţiale

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t \text{ cu } g_0 = x.$$

Din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, obţinem că aplicaţia F_x de la $C[0,1]$ la $C_x[0,1]$ este *continuă.*

TEOREMA 3.4.1 *In ipotezele precedente, notăm $\lambda : C[0,1] \to [0,+\infty]$ transformarea Cramer a legii traiectoriilor procesului G_t in $C[0,1]$. Definim $\tilde{\lambda}(g) = +\infty$ dacă g nu este de clasă C^1 pe $[0,1]$ şi*

$$\tilde{\lambda}(g) = \lambda(f),$$

cu f dată de $f_t = \sigma(g_t)^{-1}\left(\dot{g}_t - b(g_t)\right)$, $t \in [0,1]$, $g_0 = x$. Dacă $\tilde{\Lambda}(A) = \inf_{g \in A} \tilde{\lambda}(g)$ pentru A boreliană in $C_x[0,1]$, atunci

$$-\tilde{\Lambda}\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A) \leq -\tilde{\Lambda}\left(\bar{A}\right).$$

Demonstraţie. Pentru $g \in C_x[0,1]$ considerăm mulţimea (posibil vidă) $F_x^{-1}(g)$ a funcţiilor $f \in C[0,1]$ astfel că g este pe $[0,1]$ soluţia maximală a ecuaţiei diferenţiale $\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f_t$ cu $g_0 = x$. Atunci avem că $\lambda(g) = \inf\{\lambda(f) \mid f \in F_x^{-1}(g)\}$ pentru $g \in C_x[0,1]$ şi $\tilde{\Lambda}(A) = \Lambda \circ F_x^{-1}(A)$ pentru $A \subset C_x[0,1]$.

Intrucât $P(X^\epsilon \in A) = P\{\epsilon G \in F_x^{-1}(A)\}$, teorema 3.2.3 arată că, atunci când $\epsilon \to 0$, liminf şi limsup ale lui $\epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$ sunt in intervalul $\left[-\Lambda\left(\mathring{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right]$, unde $C = F_x^{-1}(A)$. Continuitatea lui F_x implică $\bar{C} \subset F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)$ şi $\mathring{C} \supset F_x^{-1}\left(\mathring{A}\right)$, deci

$$\left[-\Lambda\left(\mathring{C}\right), -\Lambda\left(\bar{C}\right)\right] \subset \left[-\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\mathring{A}\right)\right), -\Lambda\left(F_x^{-1}\left(\bar{A}\right)\right)\right].$$

Rămâne să aplicăm teorema 3.1.14,tinând cont că $\tilde{\lambda}$ este inferior semi-continuă şi ca mulţimile $\left\{\tilde{\lambda}(g) \leq a\right\}$ sunt compacte pentru orice $a \geq 0$ finit (deoarece λ este inferior semi-continuă şi F_x este continuă).□

Observaţie Ipotezele in care am lucrat se pot adapta uşor la situaţia in care procesul gausian G_t are traiectoriile in L^2 (resp. continue) şi inzestrând spaţiul traiectoriilor lui X_t^ϵ cu norma $\left(\|\dot{g}\|_{L^2}^2 + \| g \|_{L^2}^2\right)^{1/2}$ (resp. $\|\dot{g}\|_{\infty}^2 + \| g \|_{\infty}^2$).□

Situaţia tratată până acum se referă la un proces X_t^ϵ ale carui traiectorii verifică "ecuaţia stocastică " $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)\,dt + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\,dZ_t$, unde Z_t este proces gausian cu traiectoriile continue şi ***diferenţiabile.***

Cazul ecuaţiilor stocastice ar corespunde lui $Z_t = W_t$, unde W_t este mişcare browniană. Insă W_t nu este diferenţiabilă, deci nu este posibil să considerăm X_t^ϵ ca funcţională continuă de "$\epsilon\, \dot{W}_t$ " , dar putem considera X_t^ϵ ca funcţională de $F_x(\epsilon W_\cdot)$, unde $W_\cdot$ inseamnă traiectoria mişcării browniene in R^n . In general insă, regularitatea aplicaţiei F_x se reduce in acest caz doar la măsurabilitate, deşi rezultatul formal vom vedea că rămâne adevarat i.e. dacă notăm λ funcţionala Cramer a mişcării browniene şi $\widetilde{\lambda}$ "funcţionala Cramer " asociată ecuaţiei stocastice $dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)\,dt + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\,dW_t$, din propoziţia 3.3.1 şi teorema 3.4.1, avem

$$\widetilde{\lambda}(g) = \lambda\left[F_x^{-1}(g)\right] = \frac{1}{2} \| \frac{d}{dt} F_x^{-1}(g) \|_{L^2}^2 ,$$

unde relaţia $f = F_x^{-1}(g)$ inseamnă $g_t = \int_0^t \left[b(g_s) + \sigma(g_s)\,\dot{f}_s\right] ds$, adică

$$\widetilde{\lambda}(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \| \sigma(g_s)^{-1} \left[\dot{g}_s - b(g_s)\right] \|^2\, ds.$$

Să arătăm insă acest lucru riguros; punctul "tare" va fi in a arăta că, pentru ϵ mic, aplicaţia F_x "seamănă" cu o aplicaţie continuă.

Fie $D \subset R^n$ deschis, σ câmp de matrice (n, n) şi o familie de câmpuri de vectori b_ϵ , $\epsilon \geq 0$ ($b_0 =: b$) care satisfac condiţiile

$$\begin{gathered} \sigma \in C^1(D) \\ b_\epsilon \text{ sunt local lipschitziene pe } D \\ \lim_{\epsilon\to 0} b_\epsilon(x) = b(x) \text{ uniform pe compactele lui } D. \end{gathered} \tag{3.30}$$

Notam prin X_t^ϵ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice pe D

$$dX_t^\epsilon = b_\epsilon(X_t^\epsilon)\,dt + \epsilon\sigma(X_t^\epsilon)\,dW_t\ ,\ X_0^\epsilon = x \in D, \tag{3.31}$$

unde W_t este mişcare browniană de dimensiune n. Vom presupune că ecuaţia (3.31) are o soluţie unică conservativă X_t^ϵ : $\Omega \to D$, $t \in [0,1]$ i.e. timpul de explozie al acestei soluţii este infinit pe D şi traiectoriile soluţiei sunt in $C_x(D)$, spaţiul funcţiilor f continue pe D cu $f(0) = x$. Vom nota $X^\epsilon : \Omega \to C_x(D)$ variabila aleatoare care asociază lui $\omega \in \Omega$ traiectoria $t \to X_t^\epsilon(\omega)$.

Observaţie Sistemul (3.31) apare şi el ca **perturbaţie aleatoare mică** a sistemului dinamic (3.27) in sensul că, pentru orice $t \in [0,1]$ şi $\delta > 0$, avem

$$\lim_{\epsilon\to 0} P\left\{\sup_{0\le s\le t} |X_s^\epsilon - x_s| > \delta\right\} = 0\ ;$$

in plus acest model este invariant la schimbarile de coordonate i.e. dacă $\varphi : D \to D'$ (D' deschis din $\mathbf{R}^n$) este difeomorfism, atunci procesul $\varphi(X_t^\epsilon)$ verifică o ecuaţie de tip (3.31) cu coeficienţi b'_ϵ ,σ' care satisfac condiţiile (3.30).

Vom nota $AC(D)$ spaţiul funcţiilor $g \in C(D)$ cu proprietatea că, pentru orice $t \in [0,1]$, derivata (Lebesgue) $\dot{g}$ a lui g există şi este de pătrat integrabil pe $[0,t]$, inzestrat cu topologia indusă de $C(D)$. Din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare, avem

LEMA 3.4.2 *Fie $x \in D$ şi $f \in AC(D)$. Atunci ecuaţia diferenţială*

$$\dot{g}_t = b(g_t) + \sigma(g_t)\,\dot{f}_t \tag{3.32}$$

admite o soluţie unică $g \in AC(D)$ cu $g_0 = x$. Notăm această asociere $g = F_x(f)$. Aplicaţia $F : D \times AC(D) \to AC(D)$ nu este in general continuă, dar restricţia ei la $D \times K_a$ este continuă pentru orice $a \geq 0$, unde $K_a := \left\{f \in AC(D) \,\middle|\, \int_0^1 |\dot{f}_t|^2\,dt \leq a\right\}$.

In plus, pentru orice compacţi $K, L \subset D$ *cu* $K \subset \mathring{L}$ *şi orice* $a > 0$, *există* $t, c > 0$ *cu proprietăţile*

(i) pentru orice $v \in K$, $f \in K_a$, *funcţia* $h = F_v(f)$ *are timpul de explozie infinit şi* $h([0,t]) \subset L$.

(ii) pentru orice $v, w \in K$, $f \in K_a$ *şi* $s \leq t$ *avem*

$$\sup_{[0,s]} | F_v(f) - F_w(f) | \leq e^{cs} | v - w | .$$

TEOREMA 3.4.3 *Cu notaţiile şi in ipotezele precedente, să fixăm un compact* $K \subset D$ *şi numerele reale* $a > 0$, $t \in (0,1]$. *Atunci, pentru orice* $R, \rho > 0$ *există* $\alpha, r, \epsilon_0 > 0$ *cu proprietatea următoare. Pentru orice* $x \in K$, $f \in AC(\mathbf{R}^n)$, $g = F_x(f)$ *care verifică* $\int_0^t |f_t|^2\, dt \leq a$ *şi* $g([0,t]) \subset K$, *relaţiile* $\epsilon \leq \epsilon_0$ *şi* $| X_0^\epsilon - x | \leq r$ *(P-a.s.) implică*

$$P\left[\sup_{[0,t]} | \epsilon W - f | \leq \alpha,\ \sup_{[0,t]} | X^\epsilon - g | > \rho \right] \tag{3.33}$$

$$\leq \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right).$$

Observaţii Pentru $h \in C(D)$, să notăm

$$\Gamma_{0,t}(h,r) = \left\{ k \in C(D) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} | h - k | \leq r \right\}$$

banda inchisă de axă h şi rază r. Teorema 3.4.3 garantează că, pentru ϵ şi α mici şi dacă neglijăm un eveniment de probabilitate inferioară lui $\exp(-R\epsilon^{-2})$, prezenţa lui ϵW in banda $A = \Gamma_{0,t}(f,\alpha)$ implică prezenţa lui X^ϵ in banda de axă $g = F_x(f)$ şi rază ρ, cu condiţia ca X_0^ϵ sa fie suficient de aproape de $g_0 = x$. Teorema 3.4.3 descrie deci o proprietate de "continuitate" a aplicaţiei măsurabile care lui ϵW ii asociază X^ϵ când $x = X_0^\epsilon$ este fixat. Formal, propoziţia 3.3.1 implică $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon W \in A) = -\Lambda(A)$, unde $\Lambda(A) = \inf_{\varphi\in A} \lambda(\varphi)$ şi $\lambda(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^t \|\dot{\varphi}_s\|^2\, ds$, norma fiind euclidiană. Probabilitatea $P(\epsilon W \in A)$ se comportă deci ca şi $\exp(-(ct.)\epsilon^{-2})$; dar, pentru R suficient de mare, probabilităţile in $\exp(-R\epsilon^{-2})$ sunt neglijabile in raport cu $P(\epsilon W \in A)$. Aceasta ajută la inţelegerea consecinţei următoare.

COROLARUL 3.4.4 *In ipotezele şi cu notaţiile din teorema 3.4.3, să fixăm x, f şi punem $g = F_x f$. Atunci, pentru orice $\rho > 0$ şi $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ astfel ca relaţia $\alpha \leq \alpha_0$ să implice*

$$\lim_{\epsilon \to 0} P\left[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g,\rho) \,|\epsilon W \in \Gamma_{0,t}(f,\alpha)\right] = 1.$$

Mai precis, pentru orice $\rho, R > 0$ şi $0 \leq t \leq 1$, există $\alpha_0 > 0$ şi $\epsilon_0(\alpha) > 0$ cu proprietatea

$$P\left[X^\epsilon \in \Gamma_{0,t}(g,\rho) \,|\epsilon W \in \Gamma_{0,t}(f,\alpha)\right] \geq 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right)$$

pentru $\alpha \leq \alpha_0$ şi $\epsilon \leq \epsilon_0(\alpha)$.

Demonstráţia corolarului 3.4.4 Vom nota simplu $\Gamma_{0,t}(g,\rho) = \Gamma_g$ si $\Gamma_{0,t}(f,\alpha) = \Gamma_f$. Fie $p = P[X^\epsilon \in \Gamma_g \,|\epsilon W \in \Gamma_f]$. Atunci

$$p = 1 - \frac{P\left[(\epsilon W \in \Gamma_f) \cap (X^\epsilon \notin \Gamma_g)\right]}{P(\epsilon W \in \Gamma_f)}. \tag{3.34}$$

Fie $a = \frac{1}{2}\int_0^t |\dot{f}_t|^2\, dt$. Conform propoziţiei 3.3.1, avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P[\epsilon W \in \Gamma_f] = -\Lambda(\Gamma_f) \geq -a$$

deci, pentru $\epsilon \leq \epsilon_1(\alpha)$

$$P[\epsilon W \in \Gamma_f] \geq \exp\left(-\frac{2a}{\epsilon^2}\right). \tag{3.35}$$

Pentru $R > 0$ dat, să punem $R_1 = R + 2a$. Teorema 3.4.3 aplicată lui ρ, t, R_1 implică existenţa unor $\epsilon_0(R_1), \alpha_0(R_1)$ astfel că majorarea (3.33) se aplică pentru $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1)$ şi $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$. Din formulele (3.34) şi (3.35) rezultă, pentru $\alpha \leq \alpha_0(R_1)$ şi $\epsilon \leq \epsilon_0(R_1) \wedge \epsilon_1$

$$p \geq 1 - \frac{\exp(-R_1/\epsilon^2)}{\exp(-2a/\epsilon^2)} = 1 - \exp\left(-\frac{R}{\epsilon^2}\right). \square$$

Demonstraţia teoremei 3.4.3 Fie $K, L \subset D$ compacte astfel ca $K \subset \mathring{L}$. Notam K^r reuniunea bilelor inchise de centru $v \in K$ şi de rază $r > 0$. Fixăm $r_0 > 0$ astfel ca $K^{3r_0} \subset \overset{\circ}{L}$, $a > 0$, $T \in (0,1]$ şi punem $K_a = \left\{ f \in AC(\mathbf{R}^n) \middle| \int_0^T |\dot{f}_t|^2\, dt \leq a \right\}$.

Din propoziţia 3.4.2, există $s_0 \in (0, T]$ astfel ca, pentru orice $f \in K_a$ şi orice $v \in K^{r_0}$, funcţia $h = F_x f$ să fie definită pe $[0, s_0]$ şi $h([0, s_0]) \subset K^{2r_0}$. In plus, pentru s_0 suficient de mic, există o constantă $c > 0$ astfel ca, pentru $s \leq s_0$, $v, w \in K^{r_0}$, $f \in K_a$ să avem

$$\sup_{[0,s]} (F_v f,\ F_w f) \leq e^{cs} \mid v - w \mid . \tag{3.36}$$

Pentru $\rho \in (0, r_0]$, $v \in K^{r_0}$ şi $g = F_v f$, cu notaţia $\varphi_t = X_t^\epsilon - g_t$ avem, pentru $t \leq s_0$

$$\varphi_t = \int_0^t a_s dW_s + z_t + \int_0^t h_s ds + X_0^\epsilon - v,$$

unde am notat $a_s = \epsilon[\sigma(X_s^\epsilon) - \sigma(g_s)]$, $h_s = b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s)$, $z_t = \int_0^t \sigma(g_s)\left[\epsilon dW_s - \dot{f}_s\, ds\right]$.

Funcţia $m_s = \frac{d}{ds}\sigma(X_s^\epsilon) \in L^2[0, s_0]$ şi, integrând prin părţi, obţinem

$$z_t = \sigma(g_t)[\epsilon W_t - f_t] - \sigma(g_0)[\epsilon W_0 - f_0] - \int_0^t m_s(\epsilon W_s - f_s)\, ds.$$

Pentru $\alpha > 0$, $\rho \in (0, r_0]$, considerăm timpii de stopare

$$\begin{aligned} \eta &= \inf\{s \in [0,1]\ ;\ \mid \epsilon W_s - f_s \mid \geq \alpha\} \\ \theta &= \inf\{s \in [0,1]\ ;\ \mid X_s^\epsilon - g_s \mid \geq \rho\}. \end{aligned}$$

Pentru $t \leq \theta \wedge s_0$; X_t^ϵ şi g_t rămân in $K^{3r_0} \subset L$ şi există deci o constantă care majorează (peste tot) expresiile $\mid \sigma(g_t) \mid$, $\mid \sigma(X_t^\epsilon) - \sigma(g_t) \mid / \mid X_t^\epsilon - g_t \mid$, $\mid b(X_t^\epsilon) - b(g_t) \mid / \mid X_t^\epsilon - g_t \mid$ şi $\int_0^t \mid m_s \mid^2 ds$.

Convergenţa lui b_ϵ către b este uniformă pe compacţi deci, pentru orice $\gamma > 0$, există $\epsilon_0(\gamma) > 0$ astfel ca

$$\mid b_\epsilon(X_t^\epsilon) - b(X_t^\epsilon) \mid \leq \gamma \text{ pentru } \epsilon \leq \epsilon_0 \text{ si } t \leq \theta \wedge s_0 .$$

Punem condiţiile

$$\begin{gathered} v \in K^{r_0}\ ,\ f \in K_a\ ,\ \epsilon \leq \epsilon_0 = \epsilon_0(\gamma)\ ,\ \rho \leq r_0 \\ \mid X_0^\epsilon - v \mid \leq \rho/R\ P\text{-a.s.} \end{gathered} \tag{3.37}$$

pentru a obţine majorările (cu c constantă adecvată)

$$\mid a_t \mid \leq \epsilon c_\rho \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$\int_0^t h_s ds \leq \int_0^t \mid b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(X_s^\epsilon) \mid ds$$

$$+ \int_0^t \mid b_\epsilon(X_s^\epsilon) - b(g_s) \mid ds \leq (\gamma + c\rho)t \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0$$

$$\mid z_t \mid \leq c^\alpha \text{ pentru } t \leq \theta \wedge s_0 \wedge \eta.$$

Punem $w_t = \int_0^t a_s dW_s = \varphi_t - z_t - \int_0^t h_s ds - X_0^\epsilon + v$ pentru a obţine

$$\mid w_t \mid \geq \mid \varphi_t \mid - \mid z_t \mid - \mid \int_0^t h_s ds \mid - \frac{1}{5}\rho.$$

Fie $s \leq s_0$. Cu notaţia $A := \{\theta \leq s \leq \eta\}$, obţinem $\mid \varphi_\theta \mid = \rho$ şi, tinând cont de majorările precedente, obţinem

$$\mid w_\theta \mid \geq \rho - c\alpha - \gamma s - cs\rho - \frac{1}{5}\rho\ .$$

In afară de condiţiile (3.37), să punem şi condiţiile

$$c\alpha \leq \frac{1}{5}\rho,\ s \leq s_0\ ,\ cs \leq \frac{1}{5},\ \gamma s_0 = \frac{1}{5}\rho \tag{3.38}$$

pentru a obţine că $A \subset \left\{\mid w_\theta \mid \geq \frac{1}{5}\rho\right\}$. Dacă w_θ^i , $i = 1, \ldots, n$ sunt coordonatele lui w_θ , atunci

$$P(A) \leq \sum_{i=1}^n P\left\{\mid w_\theta \mid \geq \frac{1}{5}\rho\right\}. \tag{3.39}$$

Pentru orice $i = 1, \ldots, n$, w_t^i este martingal local al carui proces crescator asociat d_t este majorat de $\int_0^t \mid a_s \mid^2 ds$, deci $Z_t := \exp\left(Mw_t^i - \frac{M^2}{2}d_t\right)$ este martingal local pentru orice $M \in \mathbf{R}$.

In consecintă, $Z_{t\wedge\theta}$ este martingal mărginit pentru $t \in [0,T]$ şi $E(Z_{s\wedge\theta}) = E(Z_0) = 1$. Putem scrie deci

$$P\left\{w^i_{s\wedge\theta} \geq \frac{1}{5}\rho\right\} = P\left\{Mw^i_{s\wedge\theta} - \frac{M^2}{2}d_{s\wedge\theta} \geq \frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2}d_{s\wedge\theta}\right\},$$

iar din (3.38) obtinem

$$d_{s\wedge\theta} \leq \int_0^{s\wedge\theta} |a_s|^2 ds \leq \epsilon^2 sc^2\rho^2 ,$$

deci

$$P\left\{w^i_{s\wedge\theta} \geq \frac{1}{5}\rho\right\} \leq P\left\{Z_{s\wedge\theta} \geq \exp\left(\frac{M}{5}\rho - \frac{M^2}{2}\epsilon^2 sc^2\rho^2\right)\right\}$$

$$\leq E(Z_{s\wedge\theta})\exp\left(-\frac{M}{5}\rho + \frac{M^2}{2}\epsilon^2 sc^2\rho^2\right).$$

Alegem acum $M = \rho/5(\epsilon^2 sc^2\rho^2)$ pentru a obţine

$$P\left\{w^i_{s\wedge\theta} \geq \frac{1}{5}\rho\right\} \leq \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 sc^2}\right).$$

Similar găsim o majorare pentru $P\left\{w^i_{s\wedge\theta} \leq -\frac{1}{5}\rho\right\}$ deci, impreună cu (3.39) obţinem, in ipotezele (3.37) şi (3.38)

$$P(A) \leq 2n\exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 sc^2}\right).$$

Ceea ce am demonstrat până acum se poate enunţa astfel. In ipotezele

$$v \in K^{r_0},\ f \in K_a,\ g = F_x f,\ |X_0^\epsilon - v| \leq \rho/5\ P\text{-a.s.}$$

$$\rho \leq r_0,\ \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) = \epsilon_0\left(\frac{\rho}{5s_0}\right),\ \alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c} \qquad (3.40)$$

$$\alpha \leq \alpha_0(\rho) = \frac{\rho}{5c},\ s \leq s_1 = s_0 \wedge \frac{1}{5c},$$

are loc

$$P\left[\sup_{[0,s]}|\epsilon B - f| \leq \alpha,\ \sup_{[0,s]}|X^\epsilon - g| \geq \rho\right] \qquad (3.41)$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 sc^2}\right).$$

Conform proprietatii Markov obţinem că, dacă

$$f \in K_a \ , \rho \leq r_0 \ , \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) \, , \alpha \leq \alpha_0(\rho) \, , s \leq s_1, \, t+s \leq T,$$

atunci, pe mulţimea $\{\omega \in \Omega \ ; X_t^\epsilon \in K^{r_0} \}$, are loc $P-$a.s. inegalitatea

$$P\left[\sup_{[t,t+s]} \mid \epsilon W - f \mid \leq \alpha, \ \sup_{[t,t+s]} \mid X^\epsilon - G^t \mid \geq \rho \mid \mathcal{F}_t\right] \tag{3.42}$$

$$\leq 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 sc^2}\right),$$

unde $\mathcal{F}_t$ este corpul borelian generat de mişcarea browniană până la momentul t, iar G^t este traiectoria aleatoare definită pe $[t, t+s]$ ca soluţia unică a ecuaţiei stocastice $\dot{\psi}_s = b(\psi_s) + \sigma(\psi_s)\dot{f}_s$, care porneşte din X_t^ϵ la timpul t.

Fie acum $f \in AC(\mathbf{R}^n)$şi $N \in \mathbf{N}^*$. Punem $g = F_x(f)$, $s = T/N$ şi presupunem verificate condiţiile

$$f \in K_a \ , g([0,T]) \subset K, \, \epsilon \leq \epsilon_1(\rho) \, , \alpha \leq \alpha_0(\rho) \, , s \leq s_1 \, . \tag{3.43}$$

Pentru $k = 0, \ldots, N-1$, definim evenimentele

$$A_0 = \left\{\sup_{[0,s]} \mid X^\epsilon - g \mid \geq \rho\right\},$$

$$A_k = \left\{\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - G^{ks} \mid \geq \rho\right\}, \ k = 1, \ldots, N-1.$$

Prin recurenţă după k, in ipoteza

$$\rho N \left(e^{cT} - 1\right) / cT \leq r_0 \, , \tag{3.44}$$

să arătăm că, pentru $k = 1, \ldots, N$ avem

$$A_0 \cap \ldots \cap A_{k-1} \tag{3.45}$$

$$\subset \left\{ \sup_{[0,ks]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho \left(e^{cks} - 1 \right) / \left(e^{cs} - 1 \right) \right\}$$

Pentru $k = 1$ relaţia (3.45) este evidentă. Dacă este adevărată pentru un $k = 1, \ldots, N - 1$, fie $\omega \in A_0 \cap \ldots \cap A_k$; din ipoteza de inducţie avem

$$\mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid \leq \rho \frac{e^{cks} - 1}{e^{cs} - 1} \leq \rho \frac{e^{cT} - 1}{e^{cT/N} - 1} \leq \rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT},$$

deci, in ipoteza (3.44), avem că $X^\epsilon_{ks} \in K^{r_0}$. Traiectoriile G^{ks} iau valori in D pe $[ks, (k+1)\, s]$ iar proprietatea (3.36) implică

$$\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid G^{ks} - g \mid \leq \mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid,$$

deci

$$\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho + e^{cs} \mid X^\epsilon_{ks} - g_{ks} \mid$$

Obţinem in fine

$$\sup_{[0,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho e^{cs} \left(e^{cks} - 1 \right) / \left(e^{cs} - 1 \right)$$

$$= \rho \left(e^{c(k+1)s} - 1 \right) / \left(e^{cs} - 1 \right),$$

deci (3.45) este demonstrată.

Fie $r > 0$ arbitrar şi presupunem indeplinită condiţia

$$\rho N \frac{e^{cT} - 1}{cT} < r \wedge r_0 \tag{3.46}$$

Atunci (3.45) implică, pentru $k = N$,

$$A_0 \cap \ldots \cap A_{N-1} \subset \left\{ \sup_{[0,T]} \mid X^\epsilon - g \mid < r \right\},$$

deci

$$\left\{ \sup_{[0,T]} \mid X^\epsilon - g \mid \geq r \right\} \subset A_0^c \cap \ldots \cap A_{N-1}^c = \bigcup_{k=0}^{N-1} F_k \,, \tag{3.47}$$

unde $F_0 = A_0^c$, $F_k = A_0 \cap \ldots \cap A_{k-1} \cap A_k^c$ pentru $k = 1, \ldots, N-1$. Din (3.45) şi (3.46) avem $F_k \subset \{X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap A_k^c$ şi deci $F_k \subset \{X_{ks}^\epsilon \in K^{r_0}\} \cap \left\{\sup_{[ks,(k+1)s]} \mid X^\epsilon - G^{ks} \mid > \rho\right\}$.

Condiţiile (3.43), (3.46) şi

$$\mid X_0^\epsilon - g_0 \mid \le \frac{1}{5}\rho \ P\text{-a.s.} \tag{3.48}$$

implică $F_0 \subset \left\{\mid X_0^\epsilon - g_0 \mid \le \frac{1}{5}\rho\right\} \cap \left\{\sup_{[0,s]} \mid X^\epsilon - g \mid > \rho\right\}$. Aplicăm acum inegalităţile (3.41) şi (3.42) pentru a obţine, pentru $k = 0, \ldots, N-1$,

$$P\left[F_k \cap \left\{\sup_{[0,T]} \mid \epsilon B - f \mid \le \alpha\right\}\right] \le 2n \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 s c^2}\right). \tag{3.49}$$

Notăm $Q = \left\{\sup_{[0,T]} \mid \epsilon B - f \mid \le \alpha,\ \sup_{[0,T]} \mid X^\epsilon - g \mid \ge r\right\}$. Din (3.47)-(3.49) rezultă (pentru că $s = T/N$)

$$P(Q) \le 2nN \exp\left(-\frac{1}{50\epsilon^2 T c^2}\right)$$

şi cum $se^{-s} \le e^{-s/2}$ pentru orice $s \ge 0$, avem

$$P(Q) \le 100n\epsilon^2 T c^2 \exp\left(-\frac{N}{100\epsilon^2 T c^2}\right).$$

Fie $R > 0$ arbitrar; in condiţiile (3.43), (3.46), (3.48) şi

$$N/100Tc^2\ ,\ 100nTc^2\epsilon^2 \le 1 \tag{3.50}$$

obţinem $P(Q) \le \exp(-R/\epsilon^2)$. Pentru a termina demonstraţia, să observăm că setul următor de condiţii implică (3.43), (3.46), (3.48) şi (3.50).

$$\epsilon \le \epsilon_2(r, R),\ \alpha \le \alpha_1(r, R),\ f \in K_a\ ,\ g([0,T]) \subset K$$

$$\mid X_0^\epsilon - x \mid \le 1/5\rho_0(r, R)\ \ P\text{-a.s.}\ ,$$

unde $\epsilon_2(r, R) = \min\left[\epsilon_1(\rho_0), 1/\sqrt{100nTc^2}\right]$, $\alpha_1(r, R) = \alpha_0(\rho_0)$, $\rho_0 = \min\left[cT(r \wedge r_0)/2N_0\left(e^{cT} - 1\right), r_0\right]$, iar $N_0 = N_0(R)$ este ales $\ge \max(100Tc^2 R, T/s_1)$.□

Definim **transformarea Cramer** $\lambda : C(D) \to [0, +\infty]$ a sistemului dinamic (3.31) prin

$$\lambda(g) = +\infty \text{ pentru } g \in C(D),\ g \notin AC(D), \tag{3.51}$$

$$\lambda(g) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\| \sigma(g_t)^{-1} \left[\dot{g}_t - b(g_t) \right] \right\|^2 dt$$

şi **funcţionala Cramer** a sistemului (3.31) prin

$$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g) \text{ pentru orice } A \subset C(D). \tag{3.52}$$

Interpretarea transformării Cramer este aceea că $\lambda(g)$ măsoară distanţa dintre g şi soluţia sistemului (3.27), ambele plecând din acelaşi punct $x \in D$ şi utilizând pe spaţiul tangent la D in x metrica definită de forma pătratică $\frac{1}{2} \parallel \sigma(x)^{-1}(\cdot) \parallel^2$.

PROPOZITIA 3.4.5 *Cu notaţiile de mai sus şi in ipotezele (3.30), transformarea Cramer (3.51) este inferior semicontinuă, pentru orice compact $K \subset D$ şi $a \geq 0$, mulţimile $\{g \in C(D),$ $g_0 \in K, \lambda(g) \leq a\}$ sunt compacte şi, pentru orice $g \in C(D)$, avem*

$$\lambda(g) = \inf\left\{ \tilde{\lambda}(f),\ f \in AC(\mathbf{R}^n),\ g = F_x f \right\}, \tag{3.53}$$

unde $\tilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{f}_t|^2\, dt$ este transformarea Cramer a mişcării browniene (cf. propoziţiei 3.3.1). In această formulă, inf *este atins dacă $\lambda(g)$ este finită.*

Demonstraţie. Fie borelianul

$$D^* = \left\{ (x, v) \in D \times \mathbf{R}^n \,\middle|\, \sigma(x)^{-1}(v) \neq \emptyset \right\}$$

şi, pentru $(x, v) \in D^*$, notăm

$$K(x, v) = \left\{ w \in \sigma(x)^{-1}(v) \,\middle|\, |\, v \,| = \inf_{u \in \sigma(x)^{-1}(v)} |\, u \,| \right\}.$$

Cum $\{(u, v) \,|\, K(x, v) \cap S \neq \emptyset\}$ este borelian pentru orice inchis S din $\mathbf{R}^n$, există o funcţie boreliană $\chi : D^* \to \mathbf{R}^n$ cu proprietatea $\chi(x, v) \in K(x, v)$ pentru orice $(x, v) \in D^*$.

Fie $g \in C(D)$ cu $\lambda(g)$ finită. Din faptul că

$$\| \sigma^{-1}(x) v \|^2 = \inf \left\{ | w |^2 , w \in \mathbf{R}^n , \sigma(x)w = v \right\},$$

avem $\left(g_t , \dot{g}_t - b(g_t)\right) \in D^*$ şi

$$\left\| \sigma(g_t)^{-1} \left[\dot{g}_t - b(g_t)\right] \right\|^2 = \left| \chi \left[g_t , \dot{g}_t - b(g_t)\right] \right|^2$$

pentru orice $t \in [0,1]$. Din (3.51) avem

$$\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \chi \left[g_t , \dot{g}_t - b(g_t)\right] \right|^2 dt < +\infty,$$

deci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\lambda(g) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 \, dt$ (este suficient de luat $\dot{f}_t = \chi \left[g_t , \dot{g}_t - b(g_t)\right]$ pentru aproape toţi $t \in [0,1]$). Am arătat că, dacă $g \in C_x(D)$ cu $\lambda(g)$ finită, atunci există $f \in AC(\mathbf{R}^n)$ astfel ca $\widetilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ si $g = F_x f$.

Fie acum $h \in AC(\mathbf{R}^n)$ cu $g = F_x h$; pentru aproape toţi $t \in [0,1]$ avem

$$|\dot{f}_t|^2 = \left\| \sigma(g_t)^{-1} \left[\dot{g}_t - b(g_t)\right] \right\|^2 = \left\| \sigma(g_t)^{-1} \left(\dot{f}_t\right) \right\|^2,$$

şi $\dot{f}_t = \sigma(g_t) \dot{h}_t$, deci $|\dot{f}_t|^2 \leq |\dot{h}_t|^2$ a.e. Aceasta inseamnă că

$$\lambda(g) = \widetilde{\lambda}(f) = \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{f}_t|^2 \, dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\dot{h}_t|^2 \, dt = \widetilde{\lambda}(h) \ .$$

deci (3.53) este satisfacută.

Conform propoziţiei 3.4.2, dacă $K_a = \left\{ f \in C(\mathbf{R}^n), \ \widetilde{\lambda}(f) \leq a \right\}$ şi dacă K este compact in D, atunci restricţia lui F_x la $K \times K_a$ (cu valori in $C(D)$), este continuă. Din (3.51) rezultă că λ este inferior semicontinuă şi că $F_x(K \times K_a)$ este compact.□

Exerciţiu Folosind teorema 3.4.5, regăsiţi transformarea Cramer a procesului Ornstein-Uhlenbeck, ca difuzie perturbată aleator.

COROLAR 3.4.6 *In ipotezele şi cu notaţiile de mai sus, pentru orice $A \subset C_x(D)$ avem*

$$- \widetilde{\Lambda}\left(\mathring{A}\right) \leq \liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left(X^\epsilon \in A\right) \leq -\tilde{\Lambda}\left(\bar{A}\right).$$

Demonstraţie. Fie $g \in \mathring{A}$ cu $\lambda(g)$ finită. Din propoziţia 3.4.5, există $f \in AC(D)$ astfel ca $\tilde{\lambda}(f) = \lambda(g)$ şi $g = F_x f$. Apoi există $t \in [0,1]$ şi $\rho > 0$ astfel ca

$$\left\{ h \in C_x(D) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} \mid h - g \mid \leq \rho \right\} \subset \mathring{A}.$$

Fie $R > 0$ astfel ca $R > \lambda(g) = \tilde{\lambda}(f)$. Conform teoremei 3.4.3 există α, $\epsilon_0 > 0$ cu proprietatea următoare. Relatia $\epsilon \leq \epsilon_0$ implică

$$P\left[\sup_{[0,t]} \mid \epsilon W - f \mid \leq \alpha,\ \sup_{[0,t]} \mid X^\epsilon - g \mid > \rho\right]$$
$$\leq \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce dă

$$P\left(X^\epsilon \in A\right) \geq P\left[\sup_{[0,t]} \mid X^\epsilon - g \mid \leq \rho\right]$$

$$\geq P\left[\sup_{[0,t]} \mid \epsilon W - f \mid \leq \alpha\right] - \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right).$$

Din propozitia 3.4.5 avem

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left(\sup_{[0,t]} \mid \epsilon W - f \mid \leq \alpha\right)$$

$$= -\inf\left\{ \tilde{\lambda}(\varphi) \,\middle|\, \sup_{[0,t]} \mid \varphi - f \mid \leq \alpha \right\} \geq -\tilde{\lambda}(f)$$

şi $-\tilde{\lambda}(f) > -R$, ceea ce implică

$$\liminf_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P\left(X^\epsilon \in A\right) \geq -\tilde{\lambda}(f) = -\lambda(g).$$

Luam sup după $g \in \mathring{A}$ şi obţinem prima inegalitate din corolar.

Fie acum $a < \Lambda\left(\bar{A}\right)$ şi punem $K_a = \{g \in C_x(D) \,|\lambda(g) \le a\}$, $L_a = \left\{f \in AC(\mathbf{R}^n) \middle| \tilde{\lambda}(f) \le a\right\}$; avem $K_a = F_x(L_a)$. Din $K_a \cap \bar{A} = \emptyset$, pentru orice $g \in K_a$ există o vecinătate deschisă V_g a lui g in $C_x(D)$ astfel ca $V_g \cap A = \emptyset$. Există $\rho_g > 0$, $t_g \in [0, 1]$ astfel ca

$$G^g = \left\{h \in C_x(D) \middle| \sup_{[0,t_g]} | h - g | \le \rho_g\right\} \subset V_g .$$

Fie $f_g \in L_a$ astfel ca $g = F_x(f_g)$. Din teorema 3.4.3, pentru $R > a$, există $\alpha_g, \epsilon_g > 0$ cu proprietatea următoare. Dacă

$$D^g = \left\{f \in AC(\mathbf{R}^n) \middle| \sup_{[0,t_g]} | f - f_g | < \alpha_g\right\},$$

atunci

$$P\left[(\epsilon W \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin G^g)\right] \le \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce implică

$$P\left[(\epsilon W \in D^g) \cap (X^\epsilon \notin V^g)\right] \le \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right).$$

Din acoperirea deschisă $(D^g)_{g\in K_a}$ a lui L_a extragem o acoperire finită $D_1^g, \ldots, D_k^g$ şi punem $D_* = \cup_{i=1}^k D_i^g$. Obţinem că

$$(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A) = \cup_i \left\{(\epsilon B \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \in A)\right\},$$

care este inclus in evenimentul $\cup_i \left\{(\epsilon W \in D_i^g) \cap (X^\epsilon \notin V_{g_i})\right\}$. Deci, dacă alegem $\epsilon \le \min\{\epsilon_{g_1}, \ldots, \epsilon_{g_k}\}$, avem

$$P\left[(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)\right] \le k \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right),$$

ceea ce implică

$$P(X^\epsilon \in A) \le P\left[(\epsilon W \in D_*) \cap (X^\epsilon \in A)\right] + P(\epsilon W \in D_*^c)$$

$$\le k \exp\left(-R\epsilon^{-2}\right) + P(\epsilon W \in D_*^c).$$

Propozitia 3.3.1 implică

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(\epsilon W \in D_*^c) = -\tilde{\Lambda}(D_*^c)$$

(deoarece D_* este deschis), deci

$$\bar{l}(A) = \limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon^2 \log P(X^\epsilon \in A)$$

$$\leq (-R) \vee \left(-\tilde{\Lambda}(D_*^c)\right).$$

Cum $R > a$ şi $D_*^c \cap L_a = \emptyset$, membrul al doilea este majorat de $-a$. Relaţia $\bar{l}(A) \leq -a$ pentru orice $a < \Lambda\left(\bar{A}\right)$, a finit, implică $\bar{l}(A) \leq -\Lambda(A)$.□

Observaţie Transformarea Cramer $\tilde{\lambda}$ (deci şi funcţionala Cramer $\tilde{\Lambda}$) in cazul perturbaţiilor cu procese gausiene şi al ecuaţiilor stocastice sunt *uniforme* in raport cu $x \in \mathbf{R}^n$, când $\epsilon \to 0$.

APLICATII

Să considerăm X_t^ϵ soluţia ecuaţiei diferenţiale stocastice

$$dX_t^\epsilon = b(X_t^\epsilon)\,dt + \epsilon dW_t \text{ , pe } \mathbf{R}^n \text{ , cu } X_t^\epsilon = x_0$$

Dacă D este domeniu in $\mathbf{R}^n$ cu $x_0 \in D$, notăm ∂D frontiera lui D, $\tau^\epsilon = \inf\{t : X_t^\epsilon \notin D\}$ *prima ieşire* a lui X_t^ϵ din D şi

$$H_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) \ : f_0 = x_0 \ , f_t \in D \cup \partial D\} \, ,$$

$$\bar{H}_D(t) = \{f \in C(\mathbf{R}^n) \ : f_0 = x_0 \ , f_s \notin D \text{ pentru un } 0 \leq s \leq t\} \, .$$

PROPOZITIA 3.4.7 *Dacă frontiera lui D coincide cu frontiera lui $\bar{D}$, atunci*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log P\{X_t^\epsilon\in D\} = -\inf_{f\in H_D(t)}\lambda(f) \tag{3.54}$$

şi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^2\log P\{\tau^\epsilon\le t\} = -\inf_{f\in \bar{H}_D(t)}\lambda(f). \tag{3.55}$$

Demonstraţie. Relaţia (3.55) va rezulta din lema 3.3.2; să verificăm ipotezele acesteia. Presupunem că $\inf_{f\in\bar{H}_D(t)}\lambda(f) = \lambda(f_0)$, cu $f_0 = x_0$. Funcţia f_t atinge frontiera ∂D intr-un $t_0 \neq 0$, iar inf $-$ul de mai sus este finit pentru că există funcţii netede arbitrare care pleacă din x_0 şi părăsesc D in $[0,1]$; rezultă că f_t este absolut continuă.

Pentru $\epsilon > 0$ dat, există $x^\epsilon \in \mathbf{R}^n \setminus D$ intr-o $\epsilon-$vecinătate a lui f_{t_0} ; punem

$$f_t^\epsilon = f_t + \frac{t}{t_0}(x^\epsilon - f_{t_0}),\ 0\le t\le 1.$$

Observăm că f_t^ϵ aparţine interiorului lui $\bar{H}_D(t)$. Să arătăm că $\lambda(f^\epsilon)\to\lambda(f)$ când $\epsilon\to 0$. Avem

$$\lambda(f^\epsilon)-\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^1\left[\left|\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)\right|^2 - \left|\dot{f}_t - b(f_t)\right|^2\right]dt$$

$$= \int_0^1\left\langle \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t),\ \dot{f}_t - b(f_t)\right\rangle_{L^2[0,1]} dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^1\left|\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t)\right|^2 dt.$$

Apoi

$$\dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon) - \dot{f}_t + b(f_t) = \frac{1}{t_0}(x^\epsilon - f_{t_0}) + b(f_t)\ \dot{f}_t^\epsilon - b(f_t^\epsilon)$$

care converge către 0 uniform in $t\in[0,1]$ când $\epsilon\to 0$.□

Observaţii 1. Calculul expresiilor (3.54)-(3.55) se reduce la probleme variaţionale. Intr-adevăr, să observăm că noi ne-am restrâns la spaţiul $C[0,1]$, dar toate argumentele şi calculele rămân adevărate in spaţiul $C[0,t]$, $t>0$. Să notăm λ_t transformarea Cramer asociată traiectoriilor $X^\epsilon_\cdot$ pe intervalul $[0,t]$ (deci $\lambda \equiv \lambda_1$). Pentru calculul extremelor avem la dispoziţie ecuaţia Euler, iar inf $-$ul se poate găsi prin ecuaţia Hamilton-Jacobi. Punem

$$V(t,x,y) = \inf_{f_0=x,\ f_t=y} \lambda_t(f).$$

Atunci

$$\inf_{f\in H_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{y\in D\cup\partial D} V(t,x,y)$$

şi

$$\inf_{f\in \bar{H}_D(t)} \lambda_t(f) = \inf_{0\le s\le t,\ y\notin D} V(s,x,y).$$

Ecuaţia Hamilton-Jacobi pentru $V(t,x,y)$ are forma

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\left|\nabla_y V(t,x,y)\right|^2 + \langle b(y),\ \nabla_y V(t,x,y)\rangle,$$

la care adaugăm condiţiile $V(0,x,x)=0$ si $V(t,x,y)\ge 0$.

2. Să notăm că funcţiile $u^\epsilon(t,x) = P\{X^\epsilon_t \in D\}$ şi $v^\epsilon(t,x) = P\{\tau^\epsilon \le t\}$ sunt soluţiile problemelor

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2}\Delta u^\epsilon + \langle b(x),\ \nabla_x u^\epsilon\rangle,\ x\in \mathbf{R}^n,\ t>0$$

$$u^\epsilon(0,x) = 1 \text{ pentru } x\in D,\ u^\epsilon(0,x) = 0 \text{ pentru } x\notin D,$$

respectiv

$$\frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} = \frac{\epsilon^2}{2}\Delta v^\epsilon + \langle b(x),\ \nabla_x v^\epsilon\rangle,\ x\in D,\ t>0$$

$$v^\epsilon(0,x) = 0 \text{ pentru } x\in D,\ v^\epsilon(t,x)_{|x\in\partial D} = 1.$$

(remarcaţi că parametrul ϵ apare la derivatele de cel mai mare ordin). Propoziţia 3.4.7 furnizează informaţii, atunci când $\epsilon\to 0$, asupra comportamentului soluţiilor problemelor de mai sus.

4

INDEX

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 317/1996 la
Tipografia Editurii Universității din București

ISBN - 973 - 575 - 072 - 4

Lei 9600