

SANDA CLEJA-ȚIGOIU

VICTOR ȚIGOIU

REOLOGIE ȘI TERMODINAMICĂ

PARTEA I - REOLOGIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1998



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

Cota IV 575843
Inventar C199803228

SANDA CLEJA - ȚIGOIU

VICTOR ȚIGOIU

.0 166.694
S 166.699.

REOLOGIE ȘI TERMODINAMICĂ

PARTEA I – REOLOGIE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

BIBLIOTECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ
BUCUREȘTI
N. 515843

Referenți științifici: Acad. Prof. LAZĂR DRAGOȘ,
Dr. EUGEN SOÓS

© Editura Universității din București
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon 410.23.84

B.C.U. București



C199803228

ISBN 973 - 575 - 202 - 6

PREFAȚA

Reologia este o disciplină care se dezvoltă în cadrul mecanicii corpurilor continuu deformabile. Etimologia cuvântului este greacă: rheo = curgere, logos = știință, iar în științele moderne a fost introdus din limba franceză. Reologia își propune să formuleze legi de material sau reprezentări constitutive pentru materiale ale căror proprietăți depind în mod esențial de timp și să determine mișcarea și deformarea, starca de tensiune care se produc în corpurile constituite din astfel de materiale, sub acțiunea solicitărilor exterioare. Aceste proprietăți sunt esențial diferite de cele ale "fluidelor vâscoase clasice". Bazele teoretice ale acestei științe sunt legate, înainte de 1940, de lucrările lui Bingham, Reiner, Mooney, Zaremba, Garner și Merrington. Dezvoltarea reologiei a fost impulsionată, în special după al doilea război mondial, de producerea de materiale noi, de exemplu polimerii, în stare topită, fluidă sau solidă, materiale care au apărut din necesități industriale, tehnologice. Odată cu apariția acestor noi materiale, apar numeroase lucrări în domeniu legate de numele lui Rivlin, Weissenberg, Markovitz, Oldroyd, Flory, Thorton, De Witt, care au deschis noi perspective de cercetare, atât prin modelele teoretice introduse, cât și prin noile tipuri de experiențe și aparate construite. Cele mai importante rezultate teoretice s-au obținut după apariția lucrărilor lui Noll de fundamentare axiomatică a mecanicii mediilor continue (1958). Amintim aici doar câțiva dintre autorii unor modele, astăzi celebre : Rouse, Rivlin, Ericksen, Oldroyd, Coleman, Noll, Green, Lodge și în ultima vreme De Gennes, Doi, Edwards, Marrucci și alții.

Experimental au fost puse în evidență proprietăți specifice ale acestor materiale, care nu pot fi descrise în cadrul mecanicii fluidelor newtoniene (fluide liniar vâscoase). Dintre efectele ne-newtoniene semnalăm cățărarea fluidelor pe pereții interiori în cazul mișcării acestor fluide între doi cilindri coaxiali în rotație relativă unul față de celălalt, sau expansiunea (dilatarea) jeturilor la ieșirea din conducte. Aceste efecte pot fi explicate și descrise matematic în cadrul acelor teorii în care pot fi puse în evidență tensiuni normale (tracțiuni). Astfel de probleme vor fi considerate în capitolul 4 al prezentei lucrări.

Clasa materialelor de tip Rivlin - Ericksen de ordin strict mai mare ca 1 (descrise constitutiv în capitolul 3) și clasa fluidelor vâscoelastice (prezentate în capitolul 5) constituie cadrul constitutiv în care sunt abordate cu succes problemele menționate. Aceste clase de materiale au proprietăți puternic dependente de istoria procesului de deformare. Materialele de tip Rivlin- Ericksen (fluide sau

solide) suportă tensiuni care depind de istoria mișcării într-o vecinătate foarte mică a momentului actual, fiind materiale cu memorie scurtă, de tip diferențial. Spre deosebire de acestea, materialele vâscoelastice (solide sau fluide) sunt materiale cu o memorie de lungă durată, de tip integral.

Conceptele de cinematica mediilor continuu deformabile necesare prezentării sunt introduse în capitolul 1, punându-se accentul pe mărimi, de exemplu tensorii Rivlin- Ericksen, care pot descrie din ce în ce mai exact istoria trecută a mișcării. Sunt evidențiate și echivalentele în mici deformații sau în deformații infinitezimale ale câmpurilor tensoriale și ale vitezelor lor de variație, specifice deformațiilor finite.

Capitolul 2 prezintă cadrul constitutiv general al materialelor simple, care permite clasificarea corpurilor continuu deformabile în solide, fluide, materiale izotrope și fluide cristaline, pe baza conceptului de simetrie materială, sau izomorfism material. Teorema de maximalitate a subgrupului transformărilor ortogonale în grupul transformărilor unimodulare este esențială în această clasificare, de aceea demonstrarea acestui rezultat a fost inclusă în anexe, A3.

Sunt prezentate teoreme de caracterizare, prin condiții necesare și suficiente, a reprezentării constitutive pentru clase de materiale simple. Prin particularizări, din rezulatele generale referitoare la materialele simple, se obțin atât clasa fluidelor vâscoase (fluidele Reiner- Rivlin), cât și clasa corpurilor elastice izotrope, respectiv anizotrope, cu deformații finite. În anexa A2. sunt demonstrate teoreme de reprezentare pentru funcții izotrope, iar în anexa A4. rezulate privind invarianții anizotropi. Rezulatele capitolului 2 sunt prezente în toată lucrarea.

În capitolul 3 sunt prezentate și caracterizate constitutiv materialele de tip Rivlin -Ericksen de ordinul n în clasa materialelor de tip diferențial. Fluidele de ordinul 1 coincid cu fluidele Reiner- Rivlin (compresibile), iar cele de gradul 1, cu fluidele liniar vâscoase (fluidul Navier- Stokes).

În capitolul 5 sunt prezentate materiale vâscoelastice, de tip integral, cu deformații finite și respectiv infinitezimale, caracterizate prin reprezentări de tip integral. Pe de altă parte există modele vâscoelastice descrise prin reprezentări de tip diferențial, generate prin suprapuneri de efecte liniar vâscoase și elastice, care nu sunt, în general, echivalente cu reprezentări de tip integral. Tot în acest capitol este discutată echivalența acestor tipuri de legi de material, dar numai în cazul unidimensional, prezentându-se și modelele reologice, frecvent utilizate în cărți ingineresti.

O mare extindere este dată capitolului 4, dedicat vâscometriei. Aici sunt demonstrate rezultate legate de o clasă particulară de mișcări, mișcările vâscometrice. Se demonstrează că starea de tensiune care ia naștere în fluidele (privite în clasa materialelor simple) supuse la astfel de mișcări este caracterizată prin intermediul a trei funcții scalare, numite funcții vâscometrice : una de forfecare și două normale, de existența cărora este legată apariția efectelor ne-newtoniene. Tot în acest capitol se determină soluții exacte reprezentate prin mișcări vâscometrice, staționare, pentru problemele dinamice cu date la limita formulate pentru fluide. Rezulatele pot fi particularizate pentru fluidele liniar vâscoase (sau fluide Navier-

Stokes), Reiner- Rivlin, Rivlin- Ericksen (de ordinul 2). Pornind de la soluțiile exacte determinate pentru mișcări vâscometrice sunt prezentate metode care permit determinarea experimentală a relațiilor constitutive pentru anumite clase de fluide.

În ultimul capitol, capitolul 6, sunt prezentate relații constitutive de tip rate (de tip diferențial), pentru cazul deformațiilor infinitezimale, care includ legi vâscoelastice, dar și legi vâscoplastice care sunt utilizate de exemplu în mecanica rocilor. Este analizat comportamentul acestor materiale și sunt formulate probleme cvasi-stactice cu date inițiale și la limită, pentru materiale de tip rate. Este analizată existența soluției generalizate, printr-un procedeu bazat pe decuplarea problemei într-una elastică și una vâscoplastică propriu-zisă.

Proprietăți specifice materialelor vâscoelastice și de tip rate sunt relaxarea și fluajul, numite deseori proprietăți reologice. Corpurile elastice nu prezintă proprietăți de relaxare și fluaj, iar în clasa fluidelor liniar vâscoase poate fi pus în evidență numai un fluaj liniar. Proprietățile de fluaj și relaxare sunt definite și analizate în capitolele 5 și 6.

Menționăm o conexiune importantă (care nu face însă obiectul prezentei lucrări) rezultată prin utilizarea unei teoreme de aproximare datorată lui Coleman, Noll [1960], conform căreia materialele de tip Rivlin -Ericksen de ordinul $n \geq 2$ pot fi privite ca o aproximare a materialelor cu memorie întârziată prezentate în capitolul 5. În baza aceleiași teoreme rezultă că teoria fluidelor newtoniene reprezintă o primă apoximație a fluidelor în clasa materialelor simple, dacă acestea sunt supuse la mișcări încetinite. Se obțin și corecțiile de ordinul 2 și 3 pentru fluidele newtoniene, acestea fiind fluidele Rivlin- Ericksen de gradul 2 și respectiv 3.

La sfârșitul fiecărui capitol sunt propuse un număr de probleme, care sunt aplicații directe ale materialului prezentat, sau care pun în evidență proprietățile specifice ale diferitelor relații constitutive. Astfel câteva din problemele propuse în capitolul 6 au scopul de a pune în discuție diferite generalizări posibile în cazul deformațiilor finite, a ecuațiilor constitutive de tip rate. Se pune accentul pe obiectivitatea legilor de material propuse și pe proprietățile acestora.

Referirile bibliografice cuprind atât monografii de mecanica mediilor continuu deformabile, cât și lucrări de mecanica solidelor, mecanica fluidelor, reologie, utile aprofundării diferitelor probleme puse în discuție. De asemenea se fac trimiteri și la lucrări care abordează rezolvarea problemelor cu date la limită (și eventual date inițiale), specifice diferitelor clase de materiale.

Lucrarea are la bază experiența didactică a celor doi autori, care au ținut și țin cursuri de reologie și termodinamică pentru studenții de la secția de Matematică-Mecanică, cât și activitatea de cercetare pe care au desfășurat-o.

Lucrarea se adresează în primul rând studenților și absolvenților secției de Matematică- Mecanică, celor ce urmează cursurile de studii aprofundate și doctoranzilor, dar poate fi utilă și cadrelor didactice și cercetătorilor care lucrează în aceste domenii relativ noi ale mecanicii, fizicii și chimiei.

Lucrarea a fost procesată de autori cu programul LATEX și scoasă la imprimantă prin bunăvoința domnului profesor D.V. Ionescu căruia îi mulțumim, pe această cale. Mulțumim, în același timp colectivului Catedrei de Mecanică și Ecuații pentru sprijinul acordat la apariția cursului.

Autori

București

1.Octombrie.1997

CUPRINS

1. CINEMATICA MEDIILOR CONTINUU DEFORMABILE	11
1.1 Corp. Mișcare	11
1.2 Tensori de deformație. Tensori viteză de deformație	17
1.3 Mișcarea relativă	21
1.4 Tensorii lui Rivlin- Ericksen	24
1.5 Mișcări echivalente. Obiectivitatea câmpurilor	25
1.6 Deformații mici sau infinitezimale	28
1.7 Exerciții și probleme	31
2. RELAȚII CONSTITUTIVE	35
2.1. Principii generale ale relațiilor constitutive	35
2.2 Materiale simple. Forme reduse ale ecuațiilor constitutive	38
2.3 Principiul determinismului modificat pentru materiale simple cu legături	43
2.4 Grupuri de simetrie materială. Clasificarea materialelor simple	45
2.5 Corpuri izotrope	51
2.6 Fluide	53
2.6.1 Fluide în clasa materialelor simple	53
2.6.2 Clasa fluidelor vâscoase	55
2.7. Corpuri solide	61
2.7.1 Corpuri solide și izotrope	61
2.7.2 Corpuri elastice	62

2.7.3 Corpuri solide anizotrope	66
2.8 Exerciții și probleme	74
3. MATERIALE DE TIP RIVLIN - ERICKSEN	76
3.1 Reprezentări constitutive pentru materiale de tip Rivlin - Ericksen ...	76
3.2 Reprezentări constitutive pentru fluide Rivlin - Ericksen	81
3.3 Materiale diferențiale de ordinul 2	83
3.4 Fluide de gradul k	84
3.5 Mișcarea staționară a unui fluid de gradul trei prin conducte.	
Mișcări secundare	88
3.6 Exerciții și probleme	101
4. VÂSCOMETRIE	102
4.1 Mișcări cu istoria alungirilor relative constantă (m.i.a.r.c.)	102
4.1.1 Definiție	102
4.1.2 Condiții de caracterizare	102
4.1.3 Lema lui Wang	107
4.2 Mișcări vâscometrice	111
4.2.1 Definiția mișcării vâscometrice	111
4.2.2 Existența bazei canonice	111
4.3 Starea de tensiune într-un fluid supus la o mișcare vâscometrică	113
4.3.1 Teorema de caracterizare a stării de tensiune într-un fluid supus la o mișcare vâscometrică	113
4.3.2 Proprietăți ale funcțiilor vâscometrice	117
4.4 Exemple de mișcări vâscometrice	120
4.4.1 Elemente generale de cinematică, aplicate în descrierea mișcărilor vâscometrice	121
4.4.2 Mișcarea staționară de forfecare	124
4.4.3 Mișcarea elicoidală	125
4.4.4 Mișcarea staționară de torsiune	128
4.5 Dinamica mișcărilor vâscometrice	129
4.5.1 Dinamica mișcării staționare de forfecare	129

4.5.2	Dinamica mișcării elicoidale	130
4.5.3	Dinamica mișcării staționare de torsiune	134
4.6.	Soluții exacte pentru mișcarea fluidelor. Realizarea fizică a unor mișcări vâscometrice	135
4.6.1	Mișcarea (elicoidală) între doi cilindri coaxiali	137
4.6.2	Mișcarea Couette într-un domeniu cilindru circular drept, cu secțiunea coroană circulară	139
4.6.3	Mișcarea Poiseuille printr-o conductă cilindrică	141
4.6.4	Mișcarea unui fluid între două discuri	142
4.7.	Tensiuni normale și efectele lor. Fenomene ne-newtoniene	144
4.7.1	Efectul Weissenberg	144
4.7.2	Efectul Merrington	146
4.8	Reovâscozimetre	147
4.9	Exerciții și probleme	150
5.	VÂSCOELASTICITATE	156
5.1	Materiale cu memorie întârziată	156
5.2	Vâscoelasticitate liniară (pe istorii) cu deformații finite	162
5.3	Vâscoelasticitate liniară (pe istorii), izotropă, cu deformații finite ...	167
5.4	Vâscoelasticitate liniară, cazul deformațiilor finite	170
5.5	Vâscoelasticitate liniară, cazul deformațiilor infinitezimale	172
5.5.1	Reprezentări constitutive în vâscoelasticitate liniară	172
5.5.2	Vâscoelasticitate liniară, izotropă	174
5.5.3	Legi ereditare. Legi de relaxare și fluaj	176
5.5.4	Problema cu date inițiale și la limită pentru materiale vâscoelastice liniare și izotrope	179
5.6	Modele vâscoelastice unidimensionale	180
5.6.1	Echivalența reprezentărilor de tip diferențial și integral	180
5.6.2	Modele reologice	190
5.7	Exerciții și probleme	194

6. MATERIALE DE TIP RATE	198
6.1 Relații constitutive pentru materiale de tip rate	198
6.2 Problema cu date inițiale și la limită pentru materiale de tip rate ...	203
6.2.1 Formularea problemei cvas-istatice	203
6.2.2 Problema elastică	210
6.2.3 Problema vâscoplastică	212
6.3 Exerciții și probleme	217
A. ANEXE	222
A1. Algebră și analiză tensorială	222
A2. Teoreme de reprezentare pentru funcții izotrope	231
A3. Ortogonalul este subgrup maximal în unimodular	235
A4. Teoreme de reprezentare pentru funcții anizotrope	239
BIBLIOGRAFIE	246

1. CINEMATICA MEDIILOR CONTINUU DEFORMABILE

1.1 Corp. Mișcare

Pentru noțiunile generale de cinematică și dinamică menționăm următoarele monografii de mecanica corpurilor continuu deformabile: Truesdell, Toupin [1960], Truesdell, Noll [1965], Eringen [1967], Malvern [1969], Truesdell [1972]. O succintă trecere în revistă poate fi găsită în Cleja- Țigoiu, Cristescu [1985].

Notațiile utilizate pe parcursul lucrării pot fi găsite în anexe.

În mecanica corpurilor continuu deformabile conceptul de corp ocupă un loc central, acesta nereducându-se la un punct. Corpurile se mișcă, se deformează în interacțiune cu mediul exterior, identificându-se cu regiunile pe care le ocupă în spațiul euclidian la diferite momente de timp. Pe lângă această proprietate geometrică, corpurile sunt înzestrate cu *masă*, aceasta fiind constantă în timpul mișcării. Masa este o proprietate fizică a corpurilor și de aceea ea a fost inclusă de Noll [1958] în definiția corpurilor.

Prezentăm modelul matematic al conceptului fizic de *corp continuu deformabil* :

Definiția 1. Un *corp* \mathcal{B} este constituit dintr-o mulțime de puncte, numite *puncte materiale* sau *particule*, cu o structură definită prin:

a) familia de aplicații $\mathcal{C} = \{k : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}\}$, numite *configurații* ale corpului \mathcal{B} ;

b) o funcție reală m , numită *masă*, definită pe o mulțime de părți ale lui \mathcal{B} .

\mathcal{B} este un *corp continuu deformabil* de clasă C^2 , dacă satisface condițiile:

C1) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$ este injectivă și $k(\mathcal{B}) \subset \mathcal{E}$ este o mulțime deschisă.

C2) Dacă $k, \bar{k} \in \mathcal{C}$, atunci aplicația

$$\lambda = \bar{k} \circ k^{-1} : k(\mathcal{B}) \rightarrow \bar{k}(\mathcal{B}) \text{ este de clasă } C^2$$

cu

$$\nabla \lambda(\mathbf{X}) \in \text{Invlín} \text{ cu } \mathbf{X} = k(X), \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

λ se numește *deformația globală* de clasă C^2 de la configurația globală k la configurația globală \bar{k} .

C3) Dacă $k \in \mathcal{C}$ și $\lambda : k(\mathcal{B}) \rightarrow \lambda(k(\mathcal{B}))$ este o deformație de clasă C^2 , atunci $\lambda \circ k \in \mathcal{C}$, iar aplicația $\bar{k} = \lambda \circ k : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$ se numește *configurația globală* obținută din *configurația globală* k prin *deformația globală* λ .

Următoarele axiome caracterizează structura specifică a masei:

M1) m este o *măsură nenegativă*, definită pe părți ale lui \mathcal{B} .

M2) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$, $k(\mathcal{B})$ este măsurabilă Lebesque și $m_k = m \circ k^{-1}$ este o *măsură absolut continuă* în raport cu măsura Lebesque în $k(\mathcal{B})$, deci $\exists \rho_k : k(\mathcal{B}) \rightarrow R$, astfel încât

$$m(\mathcal{P}) = \int_{k(\mathcal{P})} \rho_k(x) dV \quad (1.1)$$

$\forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ cu $k(\mathcal{P})$ boreliană în $k(\mathcal{B})$.

M3) Oricare ar fi $k \in \mathcal{C}$, ρ_k este pozitivă și mărginită.

Prin axiomele C1)- C3) \mathcal{B} capătă o structură de *varietate diferențiabilă*, înzestrată cu o singură hartă.

Funcția $\rho_k : k(\mathcal{B}) \rightarrow R_+$ reprezintă *repartiția masei* lui \mathcal{B} în configurația k .

Valoarea $\rho_k(\mathbf{X})$ în $\mathbf{X} = k(X)$ este *densitatea sau masa specifică* în particula X , în configurația k .

Din definiția corpului rezultă **principiul de conervare a masei** sub forma

$$m_k(k(\mathcal{P})) = m_{\bar{k}}(\bar{k}(\mathcal{P})) \quad \forall \mathcal{P} \subset \mathcal{B}$$

Din proprietatea care urmează rezultă că densitatea într-o configurație determină densitatea în orice altă configurație:

Propoziția 1. Dacă $k, \bar{k} \in \mathcal{C}$ și λ este o deformație de la configurația k la configurația \bar{k} atunci

$$\rho_k(\mathbf{X}) = \rho_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) J(\mathbf{X}), \quad J(\mathbf{X}) = |\det \nabla \lambda(\mathbf{X})| \quad (1.2)$$

În continuare vom da definiția *mișcării* unui corp continuu deformabil.

Definiția 2. Se numește *mișcare* a corpului \mathcal{B} o familie de configurații

$$\chi(\cdot, t) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E} \quad (1.3)$$

depinzând de un parametru real t , numit timp, cu proprietatea că aplicația $t \rightarrow \chi(X, t)$, $\forall X \in \mathcal{B}$, fixată, este de clasă C^2 .

Notăm

$$x = \chi(X, t) \in \mathcal{B}_t \equiv \chi(\mathcal{B}, t) \tag{1.4}$$

și spunem că x reprezintă *locul* ocupat de particula X la momentul t prin mișcarea χ (unde am notat, pentru simplitate, cu \mathcal{B}_t configurația de la momentul t a corpului \mathcal{B}).

Fie

$$\chi^{-1}(\cdot, t) : \mathcal{B}_t \rightarrow \mathcal{B}, \quad X = \chi^{-1}(x, t) \tag{1.5}$$

inversa funcției care definește mișcarea.

Viteza și accelerația în particula X la momentul t se definesc prin

$$\dot{x} = \frac{\partial \chi}{\partial t}(X, t), \quad \ddot{x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(X, t) \tag{1.6}$$

Compunând aplicațiile (vezi Fig. 1.1) obținem

$$\chi(k^{-1}(\cdot), t) \equiv \chi_k(\cdot, t) : k(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}_t, \tag{1.7}$$

aplicație ce reprezintă *deformația corpului* la momentul t de la configurația k la configurația actuală $\chi(\cdot, t)$.

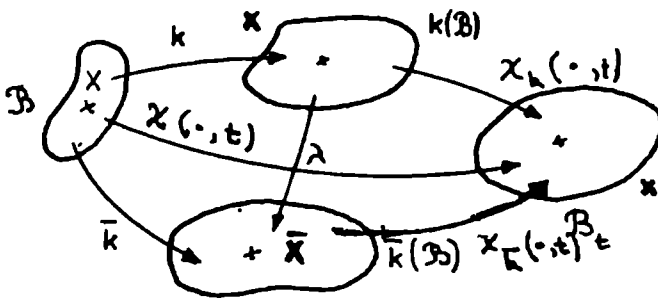


Fig. 1.1

Mișcarea poate fi descrisă în patru moduri (Truesdell, Noll [1965]):
descrierea materială în care variabilele sunt $X \in \mathcal{B}$, $t \in \mathbb{R}$;

descrierea referențială în care mișcarea este dată prin aplicația $\chi_k(\cdot, t)$, deci variabilele sunt $\mathbf{X} \in k(\mathcal{B})$, $t \in R$;

descrierea relativă în care variabilele sunt $x \in \mathcal{B}_t$ — poziția particulei la momentul t și momentul de timp $\tau \in R$, iar mișcarea este descrisă prin

$$\chi(\chi^{-1}(\cdot, t), \tau) \equiv \chi_t(\cdot, \tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau \quad (1.8)$$

descrierea spațială în care variabilele sunt \mathbf{x} și t .

Observația 1. *Descrierea referențială*, în care configurația de referință k se consideră a fi *configurația inițială*, la momentul t_0 , capătă în mod curent denumirea de *descriere materială*.

Definim funcția $\chi_0(\cdot, t)$ folosind formula (7) cu $k \equiv \chi(\cdot, t_0)$, prin

$$\chi_0(\cdot, t) \equiv \chi(\chi^{-1}(\cdot, t_0), t), \quad \chi_0(\cdot, t) : \chi(\mathcal{B}, t_0) \equiv \mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_t \quad (1.9)$$

și obținem astfel *deformația corpului* de la configurația inițială $\chi(\cdot, t_0)$ la configurația actuală $\chi(\cdot, t)$. Din (9) avem că

$$\chi_0(\mathbf{X}, t) |_{t=t_0} = \mathbf{X} \quad \text{unde} \quad \mathbf{X} = \chi(X, t_0) \in \mathcal{B}_0 \quad \text{pentru} \quad X \in \mathcal{B} \quad (1.10)$$

In *descrierea materială* se identifică în mod curent particula $X \in \mathcal{B}$ cu poziția acesteia \mathbf{X} prin $\chi(X, t_0)$.

In cele ce urmează vom face în mod consecvent identificările

$$X \equiv \mathbf{X} = \chi(X, t_0); \quad \mathcal{B} \equiv \chi(\mathcal{B}, t_0); \quad (1.11)$$

$$x = \chi(X, t) \equiv \mathbf{x} = \chi_0(\mathbf{X}, t); \quad \chi(\cdot, t) \equiv \chi_0(\cdot, t) \quad \forall t \in R,$$

deci se folosește scrierea $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$.

Ca o consecință a Definiției 2. pentru mișcarea corpului \mathcal{B} (împreună cu condiția C2) din Definiția 1. a corpului) rezultă

Propoziția 2. Aplicația definită în (9), $\chi_0(\mathbf{X}, t)$, este *diferențiabilă în*

$$\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0, \quad \mathbf{X} = \chi(X, t_0), \quad \forall X \in \mathcal{B} \quad (1.12)$$

Introducem *gradientul deformației în raport cu configurația inițială* definit prin

$$F_0(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla \chi_0(\mathbf{X}, t); \quad F_0(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{I} \quad (1.13)$$

ca o consecință a proprietății precizate în (10), unde cu ∇ se notează diferențiala în raport cu \mathbf{X} .

Observația 2. Oricărei funcții în descriere materială i se asociază o funcție în descriere spațială, prin

$$f(\mathbf{x}, t) = \phi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \iff \phi(\mathbf{X}, t) = f(\chi(\mathbf{X}, t), t) \quad (1.14)$$

Evident am folosit Observația 1. și identificările din (11).

Definim viteza și accelerația în descriere spațială, prin procedeul menționat în (14) .

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) |_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t) |_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad (1.15)$$

Vom nota, în cele ce urmează,

$$\dot{\phi}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\phi}{dt}(\mathbf{X}, t) |_{\mathbf{x}}, \quad (1.16)$$

care se numește *derivata materială* a funcției ϕ (în descriere materială). În literatură se folosește și ultima notație introdusă în (16), care precizează că \mathbf{X} este fixat. Noi am optat pentru prima reprezentare.

Dacă considerăm derivata parțială în raport cu timpul a relației (14)₂ obținem

$$\dot{\phi}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla f(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \right], \quad (1.17)$$

unde $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$

Revenim la descrierea spațială, deci la variabilele \mathbf{x}, t în (17) și obținem

$$\dot{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla f(\mathbf{x}, t) [\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] \quad (1.18)$$

care se numește **derivata materială** a funcției f în descriere spațială. Valorile funcției pot fi scalare, vectoriale sau tensoriale.

Deci **derivata materială a unui câmp în descriere spațială** este derivata în raport cu timpul a reprezentării ei materiale, rescrisă în descriere spațială.

Ecuția de continuitate a masei.

Densitatea corpului în configurația actuală și respectiv în configurația de referință, în particula X , le notăm prin $\rho(\mathbf{x}, t)$, $\rho_0(\mathbf{X}, t)$.

Dacă aplicăm Propoziția 1. pentru cele două configurații și ținem seama că deformația de la configurația de referință la configurația actuală este $\chi(\cdot, t)$ obținem din (2) relațiile

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho(\mathbf{x}, t) | \det \nabla \chi(\mathbf{X}, t) | \equiv \rho(\mathbf{x}, t) J(\mathbf{X}, t), \quad (1.19)$$

$$J(\mathbf{X}, t) = | \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) |, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla \chi(\mathbf{X}, t)$$

care se numește *ecuația de continuitate a masei în descriere materială*.

O formulare *spațială* echivalentă a *ecuației de continuitate a masei* este dată prin

Propoziția 3. Dacă $\rho_0 : \mathcal{B} \rightarrow R_+$ este de clasă C^1 atunci condiția de continuitate a masei (19) este echivalentă cu

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.20)$$

Demonstrație. Folosim condiția $J(\mathbf{X}, t) = | \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) |$ introdusă în (19) și relația lui Euler

$$\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1.21)$$

Atunci, prin derivare, în (19), în raport cu t obținem

$$\dot{\rho} J + \rho \dot{J} = 0 \quad \text{sau} \quad (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) J = 0 \quad (1.22)$$

Deoarece $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \in \text{Invlin}$ în conformitate cu condițiile de regularitate pentru funcția $\chi(\cdot, t)$, rezultă $J \neq 0$. Astfel (19) implică (20).

Reciproc. Înmulțind cu J în (20) rezultă că $\frac{d}{dt}(\rho J) |_{\mathbf{X}} = 0$. Prin integrare în raport cu timpul rezultă că există o constantă, depinzând însă de \mathbf{X} , astfel încât $\rho J = c$. Deoarece la momentul inițial t_0 avem $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t_0) = \mathbf{I}$ rezultă că $\rho(\mathbf{X}, t_0) \equiv \rho_0(\mathbf{X}) = c(\mathbf{X})$.

Semnificația mecanică a densității în configurația actuală se obține în ipoteza de continuitate a funcției ρ_0 din formula

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\chi(\mathcal{P}, t) \rightarrow \mathbf{x}} \frac{m(\mathcal{P})}{\text{măs}(\chi(\mathcal{P}, t))} \quad (1.23)$$

În formula (23) limita se calculează pentru volume materiale pentru care $\text{măs}(\chi(\mathcal{P}, t)) \rightarrow 0$ (cu $\mathbf{x} \in \chi(\mathcal{P}, t)$ fixat).

Propoziția 4. O mișcare este *izocoră* dacă una din următoarele afirmații echivalente are loc

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad J(\mathbf{X}, t) = 1 \quad (1.24)$$

pentru orice \mathbf{X}, t .

În mod tradițional în locul formulării de *mişcare izocoră*, se folosește exprimarea - *materialul este incompresibil*, dacă acesta poate suporta numai mișcări izocore.

1.2 Tensori de deformație. Tensori viteză de deformație

Fie χ - mișcarea corpului \mathcal{B} și $k \in \mathcal{C}$ o configurație de referință fixată.

Folosim Definiția 2. a mișcării și C2) din definiția corpului, de unde rezultă că funcția

$$\chi(k^{-1}(\cdot), t) \equiv \chi_k(\cdot, t) : k(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_t \quad (1.25)$$

pentru un moment de timp, $t \in \mathbf{R}$, fixat este o *deformație* din configurația de referință în configurația actuală. Aceasta este funcția care caracterizează mișcarea în descrierea *referențială*.

Observația 3. Configurațiile, deci în particular mișcarea corpului \mathcal{B} pentru un moment de timp fixat, sunt definite pe corp, ori acesta nu are o topologie care să permită definirea diferențiabilității (se mai spune că un corp este a priori amorf topologic). Topologia pe \mathcal{B} este indusă de hărți, deci de configurațiile sale. Aplicația definită în (25) de pe un deschis, cu valori într-un deschis conform proprietății C2) este diferențiabilă.

Definiția 3. *Gradientul deformației* în raport cu configurația de referință k este prin definiție *diferențiala* aplicației $\mathbf{X} \longrightarrow \chi_k(\mathbf{X}, t)$, în $\mathbf{X} \equiv k(X)$ și este notat prin

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla \chi_k(\mathbf{X}, t) \in \text{Invl}in \quad (1.26)$$

Dacă se consideră configurația inițială a corpului drept configurație de referință, atunci gradientul deformației în raport cu configurația inițială este cel definit prin formula (13). Aceasta este un caz particular al formulei (26). Din Observația 1. rezultă ca justificată folosirea acestui gradient de deformație în descrierea materială.

Observația 4. Se omite specificarea configurației de referință, dacă acest lucru nu este necesar, dar va fi prezentă în capitolele următoare, de exemplu în cazul prezentării conceptului de simetrie materială și în vâscometrie. În general vom spune că *gradientul de deformație* este definit prin

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \equiv \nabla \chi(\mathbf{X}, t) \in \text{Invl}in \quad (1.27)$$

dacă nu este necesară precizarea configurației de referință.

Intr-un reper cartezian fixat gradientul de deformație se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x^i}{\partial X^j} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{j}_j \quad (1.28)$$

Deformația la fiecare moment de timp fixat este inversabilă, ca o consecință a Definiției 2. și a condiției C2) din definiția corpului. Putem introduce tensorul

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) \equiv \nabla \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \in \text{Invlin} \quad (1.29)$$

care se numește *gradientul spațial* al deformației.

Propoziția 5. Gradientul spațial al deformației este inversul tensorului gradient de deformație

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))^{-1} \quad (1.30)$$

Se introduc *tensorii de deformație*

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) && \text{tensorul lui Cauchy-Green la dreapta,} \\ \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) && \text{tensorul lui Cauchy-Green la stânga} \\ &&& \text{sau tensorul lui Finger} \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) && \text{tensorul lui Cauchy} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Deasemenea se mai definesc și următorii tensori de deformație :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{c}) \quad (1.32)$$

Acești tensori reprezentând măsuri ale deformației, caracterizează local modul în care se deformează corpul. Ei au fost introduși : \mathbf{c} de către Cauchy (1827), \mathbf{C} de Green (1841), \mathbf{E} de Green (1841) și Saint - Venant (1844), iar \mathbf{e} de Almansi (1911) și Hamel (1912).

Elemente materiale

Fie $X \in \mathcal{B}$ și fie χ o mișcare fixată a corpului. Introducem *elementele materiale* $\mathbf{P} \in \mathcal{V}_X$ și $\mathbf{p} \in \mathcal{V}_x$ ca vectori legați de pozițiile fixate la momentul inițial și respectiv actual ale particulei materiale X . Ele reprezintă **vectorii tangenți** în \mathbf{X} , și respectiv în \mathbf{x} la imaginea unei curbe materiale din \mathcal{B} în cele două configurații (inițială și respectiv actuală). Curba materială se consideră că trece prin X (vezi Fig. 1.2)

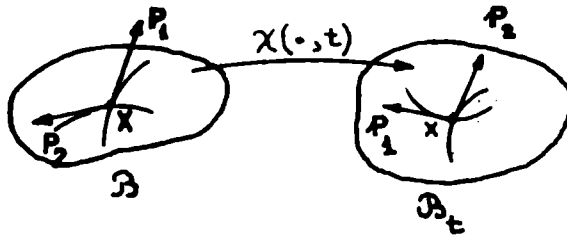


Fig. 1.2

Propoziția 6. Au loc următoarele formule

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} &= \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} = \mathbf{P} \\
 |\mathbf{P}|^2 &= \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad |\mathbf{p}|^2 = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \\
 |\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{P}|^2 &= 2\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = 2\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Din formulele (33) rezultă semnificația geometrică a tensorilor de deformare.

Observația 5. Câmpurile tensoriale \mathbf{F} , \mathbf{C} , \mathbf{B} , \mathbf{E} , sunt în descriere materială, iar câmpurile \mathbf{F}^{-1} , \mathbf{c} , \mathbf{e} sunt în descriere spațială.

Intr-un punct fixat din configurațiile corespunzătoare, tensorii de deformare introduși prin (31),(32), priviți ca aplicații *liniare*, au un comportament specificat prin

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) &: \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \\
 \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) : \mathcal{V}_{\mathbf{X}} &\longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) : \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{X}} \\
 \mathbf{c}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) &: \mathcal{V}_{\mathbf{x}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{x}}
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Vectorul de deplasare în particula X la momentul t se definește prin

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \text{ sau} \\
 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

primul fiind definit în variabile materiale, al doilea în variabile spațiale.

Gradientul deplasării este introdus prin relația

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \text{ sau } \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (1.36)$$

Din (35) se obține legătura dintre gradientul deformației și gradientul deplasării \mathbf{H}

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \mathbf{H}(\mathbf{X}, t), \quad \frac{\partial x^i}{\partial X^k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u^i}{\partial X^k} \quad (1.37)$$

Propoziția 7. Tensorii de deformație se exprimă prin gradientul deplasării sub forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}); \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T \mathbf{h}) \quad (1.38)$$

Gradientul vitezei în reprezentarea spațială este definit prin

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.39)$$

Tensorul viteza de deformare $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ este partea simetrică a gradientului vitezei

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \in Sim. \quad (1.40)$$

Partea antisimetrică a gradientului vitezei

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \in Asim, \quad (1.41)$$

se numește **tensorul spin**. Are loc deci formula

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \quad (1.42)$$

Viteza gradientului de deformație, definită ca fiind derivata materială a gradientului de deformație, $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)$, este legată de gradientul vitezei prin relația

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1.43)$$

Incheiem acest paragraf cu enunțul unei teoreme care se folosește frecvent pe parcursul prezentării.

Teorema de descompunere polară

Oricare ar fi $\mathbf{F} \in Invlin$ se poate descompune în mod unic într-un tensor simetric și pozitiv definit și un tensor ortogonal. Adică, $\forall \mathbf{F} \in Invlin \exists \mathbf{U}, \mathbf{V} \in Psim$, și $\exists \mathbf{R} \in Ort$ unici, astfel încât

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (1.44)$$

Prima formă se numește *dăscmpunerea la dreapta*, iar a doua *descompunerea la stânga*. Tensorul $U \in Psim$ se numește tensorul *lungirilor la dreapta*, iar $V \in Psim$ se numește tensorul *lungirilor la stânga*. $R \in Ort$ se numește tensorul *rotațiilor*.

Observația 6. Deoarece oricare ar fi $X \in B$ și la orice moment de timp, gradientul de deformație în raport cu o configurație de referință k este un element în *Invlín*, rezultă că putem aplica teorema de descopunere polară cu observația că tensorii din descompunere vor fi dependenți atât de particula materială, în localizarea ei într-o configurație de referință fixată, cât și de timpul t . Deci $\forall X = k(X), t \in R$ și $F_k(X, t) \in Invlín, \exists U_k(X, t), V_k(X, t) \in Psim$ și $\exists R_k(X, t) \in Ort$, astfel încât

$$F_k(X, t) = R_k(X, t)U_k(X, t), \quad F_k(X, t) = V_k(X, t)R_k(X, t) \quad (1.45)$$

și descompunerile sunt unice.

Propoziția 8. Au loc următoarele relații între tensorii de deformație

$$\begin{aligned} C &= U^2, \quad B = V^2, \\ V &= RUR^T, \quad B = RCR^T \end{aligned} \quad (1.46)$$

1.3 Mișcarea relativă

Fiind dată o mișcare χ a corpului B se consideră un moment de timp fixat t și se alege drept configurație de referință configurația de la acest moment. Mișcarea corpului urmând să fie caracterizată la diferite momente de timp τ relativ la configurația ocupată de corp la momentul t prin mișcarea χ (vezi Fig.1.3).

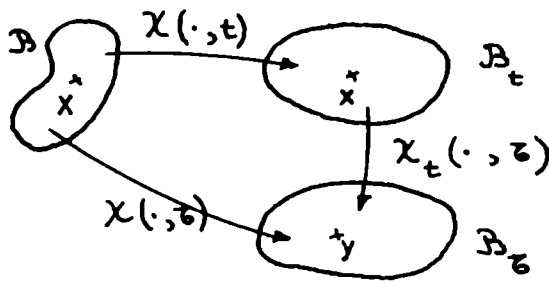


Fig. 1.3

Astfel în *descrierea relativă* variabilele independente sunt $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ — poziția particulei la momentul t și momentul de timp $\tau \in R$.

Mișcarea relativă este descrisă prin

$$\begin{aligned} \chi(\chi^{-1}(\cdot, t), \tau) &\equiv \chi_t(\cdot, \tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau \\ \chi_t(\mathbf{x}, \tau) &= \chi(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau) = \mathbf{y}, \end{aligned} \tag{1.47}$$

unde $\mathbf{x} = \chi(X, t)$, $\mathbf{y} = \chi(X, \tau)$.

Gradientul deformației relative sau gradientul deformației în mișcarea relativă reprezintă *diferențiala aplicației*

$$\mathbf{x} \longrightarrow \chi_t(\mathbf{x}, \tau)$$

definită în (47), pentru un $\tau \in R$ arbitrar, fixat, calculată în \mathbf{x}

$$F_t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}}(\chi_t(\mathbf{x}, \tau)) \tag{1.48}$$

Definim tensorii de deformație în mișcarea relativă într-un mod analog cu cei definiți în formulele (31) (pentru descrierea referențială), prin

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{tensorul lui Cauchy-Green la dreapta} \\ \mathbf{B}_t(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{F}_t^T(\mathbf{x}, \tau) \quad \text{tensorul lui Cauchy-Green la stânga} \end{aligned} \tag{1.49}$$

Din definiția mișcării relative, ca o consecință a Definiției 2. și a condiției C2) din definiția corpurilor, rezultă că gradientul mișcării relative este un tensor inversabil pentru fiecare valoare fixată a argumentelor sale, deci

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \in \text{Invl}in,$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ și pentru $\forall \tau \in R$. Putem aplica **Teorema de descompunere polară în mișcarea relativă**. Prin urmare pentru $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ și $\tau \in R$ $\exists \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{V}_t(\mathbf{x}, \tau) \in \text{Ps}im$, și $\exists \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) \in \text{Ort}$ astfel încât

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{V}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) \tag{1.50}$$

și descompunerile sunt unice. În plus știm că, pentru $\tau = t$, $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \mathbf{I}$ și prin urmare $\mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \mathbf{I}$, $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \mathbf{I}$.

Observația 7. Dacă utilizăm teorema de descompunere polară în mișcarea relativă obținem următoarea formulă pentru tensorul lui Cauchy-Green în descriere relativă

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau)^2 \quad (1.51)$$

Propoziția 9. În mișcarea relativă au loc următoarele formule

$$\begin{aligned} i) \quad \mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \chi_t(\mathbf{x}, \tau), \quad \text{cu } \mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \\ ii) \quad \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) \text{ și } \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \mathbf{I} \\ iii) \quad \mathbf{C}(\mathbf{X}, \tau) &= \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t) \mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \\ iv) \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} \\ v) \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t}, \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Demonstrație. i) Pornim de la definiția vitezei în descriere spațială dată prin formula (15), scrisă pentru $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X}, \tau) \in \mathcal{B}_\tau$ și momentul corespunzător τ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial \chi}{\partial \tau}(\mathbf{X}, \tau) |_{\mathbf{X}=\chi^{-1}(\mathbf{y}, \tau)}$$

Folosim relația $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{y}, \tau) = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ (din (47)), cu observația că ultimul termen este independent de τ , în expresia anterioară a vitezei și obținem

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial \chi}{\partial \tau}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}(\chi_t(\mathbf{x}, \tau)),$$

unde $\mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x}, t)$.

ii) Să observăm că formula (47) se scrie sub forma

$$\chi(\mathbf{X}, \tau) = \chi_t(\chi(\mathbf{X}, t), \tau) \quad (1.53)$$

Diferențiind în raport cu \mathbf{X} și folosind definiția gradientului deformației și a gradientului deformației în mișcarea relativă, (48), obținem din (53)

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \quad (1.54)$$

deci ii) este demonstrată.

iii) Folosim definiția tensorilor lui Cauchy-Green, la dreapta, în descrierea relativă, (49)₁ și relația (54)

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) &= (\mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t))^T \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{C}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Dacă în ultima relație se compune la stânga cu $\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)$ și la dreapta cu $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ rezultă iii).

iv) Derivăm în raport cu τ relația ii) și folosim relația (43). Astfel

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \quad (1.55)$$

Din teorema de descompunere polară pentru mișcarea relativă (vezi (50)), prin derivare în raport cu τ , rezultă

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) \right) \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) + \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \quad (1.56)$$

Fie $\tau = t$, din (56) , (50) și (55) deducem că

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} \quad (1.57)$$

Din teorema de descompunere polară știm, pe de altă parte, că deoarece $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \in Sim \ \forall \tau$, atunci $\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \in Sim$ pentru orice τ , deci în particular și pentru $\tau = t$. Pe de altă parte $\mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) \in Ort$, pentru orice τ , și $\mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} = \mathbf{I}$, de unde $\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} \in Asim$.

Cu ultimele formule introduse în (57) , prin separarea părților simetrice și antisimetrice, deducem ultimele două relații rămase de demonstrat.

1.4 Tensorii lui Rivlin- Ericksen

Tensorii lui Rivlin- Ericksen se introduc în contextul mișcării relative, fiind definiți prin

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) |_{\tau=t} \quad (1.58)$$

Propoziția 10. Au loc următoarele formule

$$i) \quad \mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$$

$$ii) \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) = 2 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$$

și relația de recurență pentru $\forall n > 1$

$$\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{L}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) \quad (1.59)$$

Demonstrație . i) Se obține ca o consecință a Propoziției 9. iii) prin derivare de n ori în raport cu τ . Facem pe $\tau = t$ și din definiția tensorilor Rivlin- Ericksen rezultă relația dorită.

ii) Derivăm în raport cu τ pe $\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau)$ dat sub forma (51) și avem

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t} + \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

Folosim punctul v) din Propozitia 9., formula (52) și (50), pentru $\tau = t$ de unde avem rezultatul.

iii) Folosim relația deja demonstrată i), scrisă pentru $n + 1$ astfel

$$\mathbf{C}^{(n+1)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{A}_{n+1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{C}^{(n)}(\mathbf{X}, t) \quad (1.60)$$

Derivăm apoi în raport cu timpul în i) și cu (60) avem

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^{(n+1)}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\dot{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{F}}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{x}, \tau) + \\ &+ \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Trecem în (61) la gradientul vitezei, exprimat prin (43) și utilizând această formulă împreună cu (60) deducem formula de recurență (59).

1.5 Mișcări echivalente. Obiectivitatea câmpurilor

Definiția 4. Două mișcări χ și χ^* ale corpului \mathcal{B} se numesc *echivalente* dacă există $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\mathbf{x}_0^*(t)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$ pentru orice $t \in R$ și $a \in R$, astfel încât

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &\equiv \chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0) \\ t^* &= t + a, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in R. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Observația 8. Cele două mișcări χ și χ^* diferă printr-o mișcare de corp rigid, dată pentru $\forall \mathbf{x}$ și t , prin

$$f(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (1.63)$$

deoarece pentru $\forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}$, $\forall t \in R$ are loc egalitatea:

$$\chi^*(\mathbf{X}, t^*) = f(\chi(\mathbf{X}, t), t), \quad (1.64)$$

cu $t^* = t + a$.

Observația 9. Cu alte cuvinte cele două mișcări diferă prin schimbarea reperului sau a observatorului.

Introducem câmpurile φ , \mathbf{v} , \mathbf{T} definite pentru $\forall t \in R$ pe $\chi(\mathcal{B}, t)$ (deci asociate mișcării χ , într-o *descriere spațială*), cu valori respectiv scalare, vectoriale și tensoriale.

Notăm prin φ^* , \mathbf{v}^* , \mathbf{T}^* câmpurile construite prin același procedeu cu precedentele, dar asociate mișcării χ^* , definite pentru $\forall t^* \in R$, pe $\chi^*(\mathcal{B}, t^*)$.

Definiția 5. Câmpul scalar φ^* este obiectiv (sau independent de reper, sau de observator) dacă

$$\varphi^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (1.65)$$

pentru orice χ și χ^* mișcări legate prin (62).

Definiția 6. Câmpul vectorial \mathbf{v}^* este obiectiv (sau independent de reper, sau de observator) dacă

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.66)$$

pentru orice χ și χ^* mișcări legate prin (62).

Definiția 7. Câmpul tensorial \mathbf{T}^* este obiectiv (sau independent de reper, sau de observator) dacă

$$\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t), \quad (1.67)$$

pentru orice χ și χ^* mișcări legate prin (62).

Propoziția 11. Fie χ^* echivalentă cu χ . Prin schimbarea reperului, sau a observatorului tensorii deformație se transformă prin formulele

- 1) $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t),$
- 2) $(\mathbf{F}^*)^{-1}(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t),$
- 3) $\mathbf{R}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X}, t),$
- 4) $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{C}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t),$ (1.68)
- 5) $\mathbf{V}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t), \quad \mathbf{B}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t),$
- 6) $\mathbf{c}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t),$
- 7) $\rho^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \rho(\mathbf{x}, t).$

Fie χ^* echivalenta cu χ conform Definiției 4. Diferențiem în raport cu \mathbf{X} funcția prezentă în formula (62)

$$\mathbf{X} \longrightarrow \chi^*(\mathbf{X}, t^*) \equiv \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0),$$

unde $t^* = t + a$. Prima formulă rezultă imediat. A doua se obține prin considerarea inversei relației deja demonstrată și a formulei (30) din Propoziția 5.

Folosind definițiile tensorilor de deformație \mathbf{C} , \mathbf{B} , \mathbf{c} , date în Propoziția 6., formulele (31) și relațiile demonstrate deja (1), 2), se determină legile de transformare a acestor tensori la schimbarea reperului. Relația 7) este o consecință directă a primei relații și a condiției de continuitate a masei în configurația de referință (formula (19)).

Pentru demonstrarea celorlalte formule utilizăm teorema de descompunere polară (formula (44)) aplicată tensorilor $\mathbf{F}(t), \mathbf{F}^*(t^*) \in \text{Invlın}$. Deci

$$\mathbf{F}^*(t^*) = \mathbf{R}^*(t^*)\mathbf{U}^*(t^*) = \mathbf{V}^*(t^*)\mathbf{R}^*(t^*),$$

$$\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{R}(t) \equiv (\mathbf{Q}(t)\mathbf{V}(t)\mathbf{Q}^T(t))\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t).$$

Prin utilizarea unicităților în reprezentările polare, din relațiile anterioare se deduc și celelalte relații de legătură.

Propoziția 12. Prin schimbarea reperului sau a observatorului au loc, relativ la tensorii viteze de deformație, următoarele relații

$$\dot{\mathbf{F}}^*(t^*) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{F}(t) + \mathbf{Q}(t)\dot{\mathbf{F}}(t),$$

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t), \quad \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) \in \text{Asim},$$
 (1.69)

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t),$$

$$\mathbf{W}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t).$$

Pentru **demonstrație** să observăm că $t^* = t + a$ conduce la $\frac{\partial}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial t}$. Atunci prima relație devine o consecință directă a formulei (68)₁.

Pentru demonstrarea formulei (69)₂ ținem seama de relația (43) și folosim primele relații din (68). Ultimele două relații sunt imediate dacă se ține cont de definițiile celor doi tensori și de cele de mai sus.

Propoziția 13. Prin schimbarea reperului sau a observatorului, tensorii deformație în mișcarea relativă se transformă după formulele

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{t^*}^*(\mathbf{x}^*, \tau^*) &= \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{Q}^T(t), \\ \mathbf{C}_{t^*}^*(\mathbf{x}^*, \tau^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{Q}^T(t). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Prima relație este o consecință a formulelor ii) din (52) și (68)₁, aplicată la momentele de timp τ și t .

Obiectivitatea tensorilor lui Rivlin-Ericksen este o consecință directă a definiției acestora (formula (58)) și a Propoziției 13.

Propoziția 14. Fie χ^* echivalentă cu χ . Prin schimbarea reperului (sau a observatorului) tensorii deformație în mișcarea relativă se transformă prin formulele

$$\mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t), \quad (1.71)$$

pentru orice $1 \leq k$.

Concluzii. Prin considerarea mișcărilor echivalente χ și χ^* , care rezultă prin suprapunerea unei mișcări de corp rigid peste mișcarea dată, au rezultat atât câmpuri *obiective*, *invariante*, cât și câmpuri *neobiective*.

1.6 Deformații mici sau infinitezimale

Prin formulele (35) au fost introduși *vectorii de deplasare*, în particula X la momentul t , în variabile materiale, și respectiv în variabile spațiale prin

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}, \text{ sau} \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Gradientii deplasărilor au fost definiți prin relațiile

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t), \text{ sau } \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1.73)$$

Definiția 8. Corpul \mathcal{B} este supus la mici deformații în particula X dacă

$$|\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)| = (\text{tr}(\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)))^{1/2} \ll 1, \quad (1.74)$$

pentru orice $t \in R$.

Notăm

$$\delta = \sup_{t \in R} | \mathbf{H}(\mathbf{X}, t) | \ll 1. \quad (1.75)$$

Pentru un $\delta > 0$ fixat introducem spațiile de funcții

$$\begin{aligned} O(\delta) &= \{f : R \longrightarrow \mathcal{X} \mid \exists K > 0 : |f(s)| < K\delta, \forall s \in R\}, \\ o(\delta) &= \{f : R \longrightarrow \mathcal{X} \mid \frac{|f(s)|}{\delta} \longrightarrow 0, \text{ pentru } \delta \longrightarrow 0\}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Atunci, din $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \in O(\delta)$, rezultă că $\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) \in O(\delta^2)$.

Gradientul deformației se exprimă prin gradientul deplasării cu formula (37) și obținem

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{I} + \mathbf{H}(t) = \mathbf{I} + O(\delta) \implies \mathbf{F}(t) \simeq \mathbf{I}, \quad (1.77)$$

dacă am neglijat gradientul deplasării în prezența unității. Spunem că gradientul deformației este *aproximativ* identitatea în cazul micilor deformații.

Observația 10. Menționăm că se neglijează elementele din $O(\delta^{k+1})$ în prezența termenilor $O(\delta^k)$, cu alte cuvinte neglijăm termenii de *ordinul* $k + 1$ în prezența termenilor de *ordinul* k relativ la $\delta \in (0, 1)$. Prin acest procedeu construim *aproximări* ale câmpurilor tensoriale finite, în ipoteza micilor deformații. Formulele obținute prin acest procedeu vor fi *considerate exacte* în teorii care au la bază micile deformații.

De asemenea se utilizează *notația*

$$f + O(\delta^k) \equiv f + g,$$

dacă $g \in O(\delta^k)$.

Definiția 9. *Tensorul micilor deformații*, notat tradițional cu ϵ , se definește ca fiind partea simetrică a gradientului deplasării, deci

$$\begin{aligned} \epsilon(t) \equiv \epsilon(\mathbf{u})(t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}(t) + \mathbf{H}^T(t)) \in O(\delta), \text{ adică} \\ \epsilon(\mathbf{u})(\mathbf{X}, t) &= \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla_{\mathbf{X}}^T\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Partea antisimetrică a gradientului deplasării se notează cu

$$\omega(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}^T(t)) \in O(\delta), \quad (1.79)$$

fiind tensorul *spin* în cazul micilor deformații. Evident că

$$\mathbf{H}(t) \equiv \nabla \mathbf{u}(t) = \epsilon(t) + \omega(t) \quad (1.80)$$

Observația 11. În cele ce urmează va fi frecvent utilizată formula de dezvoltare în serie de puteri a binomului

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad (1.81)$$

cu $\alpha \in \mathbb{R}$ și $x \in \text{Lin}$, care este convergentă pentru $|x| < 1$.

Convergența seriei de puteri, în variabila tensorială decurge din definiția convergenței seriilor formale.

Propoziția 15. În cazul micilor deformații au loc următoarele formule aproximative pentru tensorii de deformație, în descriere materială

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &\simeq \epsilon(t), & \mathbf{C}(t) &\simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t), & \mathbf{B}(t) &\simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t), \\ \mathbf{c}(t) &\simeq \mathbf{I} - 2\epsilon(t), & \mathbf{U}(t) &\simeq \mathbf{I} + \epsilon(t), & \mathbf{R}(t) &\simeq \mathbf{I} + \omega(t) \end{aligned} \quad (1.82)$$

pentru orice $t \in R$.

Demonstrație. Utilizăm (77) și primele formule sunt o consecință directă a definițiilor (31), (32). Din formula $\mathbf{U}(t) = (\mathbf{C}(t))^{1/2} = (\mathbf{I} + 2\epsilon + O(\delta))^{1/2}$, prin dezvoltare în serie formală după formula (81), în care $\alpha = 1/2$, se obține aproximația dorită, deoarece seria este convergentă pentru $\delta < 1$. În calculul rotației, folosim teorema de descompunere polară (formula (44)) sub forma: $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$.

Propoziția 16. Tensorii de deformație în descriere relativă se calculează după următoarele formule aproximative, în cazul micilor deformații

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\tau) &\simeq \mathbf{I} + \mathbf{H}(\tau) - \mathbf{H}(t), \\ \mathbf{C}_t(\tau) &\simeq \mathbf{I} + 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t)), \\ \mathbf{B}_t(\tau) &\simeq \mathbf{I} + 2(\epsilon(\tau) - \epsilon(t)), \\ (\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} &\equiv \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{R}(t) \simeq \mathbf{I} + 2[(\epsilon(\tau) - \epsilon(t))], \end{aligned} \quad (1.83)$$

pentru orice $t, \tau \in R$.

Ca o consecință a formulelor (49) și (52)_{ii} se **demonstrează** primele trei relații. Ultima relație este derivată din (83)₂ împreună cu ultima relație din (82).

Propoziția 17. Tensorii viteze de variație, în cazul micilor deformații, se calculează prin formulele

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) &= \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \\
 \dot{\mathbf{C}}(\mathbf{X}, t) &\simeq 2\epsilon(\dot{\mathbf{u}})(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) + \nabla_{\mathbf{X}}^T\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \\
 \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) &\simeq \dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \\
 \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) &\simeq \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) + \dot{\mathbf{H}}^T(\mathbf{X}, t)) = \epsilon(\dot{\mathbf{u}})(t), \\
 \mathbf{W}(\mathbf{x}, t) &\simeq \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) - \dot{\mathbf{H}}^T(\mathbf{X}, t)) = \dot{\boldsymbol{\omega}}(t).
 \end{aligned}
 \tag{1.84}$$

Demonstrație. Prima este o formulă exactă care se obține din (77) prin derivare în raport cu timpul. A doua este o consecință directă a formulei exacte $\dot{\mathbf{C}}(t) = \dot{\mathbf{F}}^T(t)\mathbf{F}(t) + \mathbf{F}^T(t)\dot{\mathbf{F}}(t)$ în care se utilizează (84)₁ și (77). Pentru demonstrarea relațiilor următoare folosim formulele (39)–(41) de definiție a gradientului vitezei, a tensorului viteză de deformare și a tensorului spin.

1.7 Exerciții și probleme

1. Să se demonstreze formula (2) din Propoziția 1.

$$\rho_k = \rho_{\bar{k}}J, \quad J = |\det \nabla \lambda|$$

2. Demonstrați formula lui Euler $\dot{J} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$.

3. Demonstrați formula din Propoziția 7. prin care tensorii de deformare se exprimă cu ajutorul gradientului deplasării sub forma

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^T - \mathbf{h}^T\mathbf{h}).$$

4. Demonstrați legătura dintre viteza gradientului de deformație și gradientul vitezei exprimată prin relația (43)

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t).$$

5. Demonstrați că tensorii de deformație $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ și $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ sunt legați prin deformație sub forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{e}\mathbf{F}.$$

6. Dacă $k, \bar{k} \in \mathcal{C}$ și λ este o deformație de la configurația k la configurația \bar{k} arătați că (Propoziția 1.)

$$\rho_k = \rho_{\bar{k}}J, \quad J = |\det \nabla \lambda|.$$

7. Afirmățiile următoare sunt echivalente (Propoziția 4., formulele (24))

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}), \quad J = 1.$$

8. Să se arate că formulele din Propoziția 6.

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} = \mathbf{P},$$

$$|\mathbf{P}|^2 = \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}, \quad |\mathbf{p}|^2 = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} \cdot \mathbf{P},$$

$$|\mathbf{p}|^2 - |\mathbf{P}|^2 = 2\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = 2\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$$

au loc.

9. Explicați semnificația geometrică a tensorilor de deformație, utilizând relațiile din Ex. 8.

10. Demonstrați teorema de descompunere polară.

11. Referitor la semnificația mecanică a elementelor din teorema de descompunere polară, demonstrați că dacă \mathbf{N}_i sunt vectorii proprii pentru \mathbf{C} , respectiv pentru \mathbf{U} , iar \mathbf{n}_i sunt vectorii proprii pentru \mathbf{c} atunci

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{R}\mathbf{N}_i, \quad \mathbf{N}_i = \frac{1}{\sqrt{c_i}}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}_i, \quad C_i = \frac{1}{c_i} \quad \forall \quad i \in \overline{\{1, 3\}},$$

unde C_i, c_i , sunt valorile proprii corespunzătoare ale tensorilor de deformație \mathbf{C}, \mathbf{c} .

12. Relația dintre viteza de variație a tensorului de deformație $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ și tensorul vitezei de deformație $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ este dată de

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t).$$

13. Demonstrați că derivatele materiale ale tensorilor $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ și $\mathbf{c}(\mathbf{x}, t)$ se exprimă prin gradientul vitezei sub forma

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{D} - \mathbf{L}^T\mathbf{e} - \mathbf{e}\mathbf{L}, \quad \dot{\mathbf{c}} = -\mathbf{c}\mathbf{L} - \mathbf{L}^T\mathbf{c}.$$

14. Fie χ și χ^* două mișcări echivalente. Arătați că viteza și accelerația în descriere spațială nu sunt câmpuri vectoriale obiective (demonstrând formulele de transformare)

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \dot{\mathbf{x}}_0^*(t) + \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*(t)) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \ddot{\mathbf{x}}_0^*(t) + (\dot{\mathbf{A}}(t) + \mathbf{A}^2(t))(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0^*(t)) +$$

$$+ 2\mathbf{A}(t)(\mathbf{v} - \dot{\mathbf{x}}_0^*(t)) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{a}(\mathbf{x}, t),$$

unde $\mathbf{A}(t) = \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$.

15. Studiați obiectivitatea câmpurilor de tip viteze de variație, definite în Ex. 12. și Ex. 13.

16. Știind că tensorii Rivlin- Ericksen sunt obiectivi, studiați obiectivitatea derivatei lor materiale $\dot{\mathbf{A}}_k(\mathbf{x}, t)$.

17. Explicitați deducerea formulelor aproximative (82)- (84) obținute în ipoteza micilor deformații.

18. Fie un corp \mathcal{B} , care în configurația de referință reprezintă un cilindru de rază a și înălțime h . Cilindrul suferă o deformație descrisă de

$$r = \sqrt{AR^2 + B}, \theta = \Theta + DZ, z = FZ, \text{ cu } AF = 1,$$

unde (r, θ, z) reprezintă coordonatele cilindrice asociate particulei $X \in \mathcal{B}$ în configurația deformată, iar (R, Θ, Z) sunt coordonatele cilindrice ale aceleiași particule în configurația de referință.

a) Determinați tensorii de deformație \mathbf{C} și \mathbf{B} .

b) Arătați că are loc o alungire a elementelor materiale în direcția axei de simetrie a cilindrului.

c) Arătați că planul $Z = \text{const.}$ se rotește în raport cu axa cilindrului, deci are loc o torsiune.

d) Deformația este incompresibilă.

e) Caracterizați modul în care se produce deformația și reprezentați corpul într - o configurație deformată.

19. Fie \mathcal{B} un corp care în configurația de referință reprezintă un paralelipiped ce se deformează astfel încât $x^1 = X^1, x^2 = X^2 + kX^1, x^3 = X^3$, unde (X^1, X^2, X^3) sunt coordonatele lui $X \in \mathcal{B}$ într - un reper cartezian, iar (x^1, x^2, x^3) sunt coordonatele lui $x \in \mathcal{B}_t, t \in \mathcal{R}$ fixat, în același reper.

a) Calculați tensorii de deformație \mathbf{C} și \mathbf{B} .

b) Arătați că valorile principale ale lui \mathbf{B} sunt

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{2}k^2 + k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2}, \lambda_2 = 1 + \frac{1}{2}k^2 - k\sqrt{1 + \frac{1}{4}k^2}, \lambda_3 = 1.$$

c) Determinați vectorii proprii pentru \mathbf{C} și \mathbf{B} .

d) Determinați descompunerea polară a lui \mathbf{F} .

e) Reprezentați corpul în configurația deformată.

f) Arătați că deformația descrie o forfecare.

g) Este această deformație incompresibilă ?

20. Dacă $N_j \in \mathcal{V}_X$, $|N_j| = 1$ sunt direcțiile unor elemente materiale în X și n_j sunt direcțiile elementelor materiale în configurația actuală, cu $j \in \{1, 2, 3\}$, atunci

$$\cos(\widehat{n_1, n_2}) = \frac{C(X, t)N_1 \cdot N_2}{\sqrt{C(X, t)N_1 \cdot N_1} \sqrt{C(X, t)N_2 \cdot N_2}},$$

$$\cos(\widehat{N_1, N_2}) = \frac{c(x, t)n_1 \cdot n_2}{\sqrt{c(x, t)n_1 \cdot n_1} \sqrt{c(x, t)n_2 \cdot n_2}}.$$

21. În condițiile descrise în Ex.20. și cu notațiile utilizate, arătați că

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{L}(x, t)\mathbf{p}, \quad \frac{d}{dt}(|\mathbf{p}|)^2 = 2\mathbf{D}(x, t)\mathbf{p} \cdot \mathbf{p},$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2) = 2\mathbf{D}(x, t)\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2,$$

$$-\sin(\theta_{12}) \frac{d\theta_{12}}{dt} = 2\mathbf{D}(x, t)\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 - \cos(\theta_{12})(\mathbf{D}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{D}\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2),$$

unde $\theta_{12} = \widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}$.

22. Fie \mathbf{F} reprezentat într-o bază carteziană prin matricea

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \cos(\theta) & \lambda_3 \sin(\theta) \\ 0 & -\lambda_2 \sin(\theta) & \lambda_3 \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

cu $\lambda_i > 0$.

- Determinați descompunerea polară.
- În ce condiții \mathbf{F} caracterizează o mișcare de corp rigid?
- Determinați \mathbf{L} , \mathbf{D} și \mathbf{W} pe mișcarea dată.
- Care este semnificația unghiului θ ?

23. Arătați că mișcarea de corp rigid a lui \mathcal{P} poate fi caracterizată, pentru orice $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_t$ și $t \in [t_0, t_1)$ prin una din afirmațiile echivalente

- $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0$,
- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_0, t) + \omega(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}_t$,
- $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) \in \text{Asim}$,
- $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}(t) \in \text{Asim}$,
- $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v}(\mathbf{y}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0$, $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{P}_t$.

24. Fie $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ un câmp tensorial obiectiv. Demonstrați că $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$ este obiectiv, dacă și numai dacă $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \beta(\mathbf{x}, t)\mathbf{I}$, unde $\beta(\mathbf{x}, t) \in R$, este obiectiv.

2. RELAȚII CONSTITUTIVE

2.1 Principii generale ale relațiilor constitutive

Corpurile existente în natură sunt constituite din diferite *materiale*. Acest lucru se reflectă în *teoria relațiilor (reprezentărilor) constitutive*.

Relațiile constitutive reprezintă *constrângeri (restricții)* asupra forțelor (tensiunilor) sau asupra mișcărilor, sau asupra celor două, în sensul că prin aplicarea unui sistem de forțe corpul suferă o anumită mișcare, sau deformare, care este diferită în funcție de natura corpurilor.

În mecanică se definesc diferite *clase (ideale) de materiale* prin precizarea unor relații caracteristice între tensorii de tensiune și mișcarea corpului, numite *reprezentări constitutive*.

Teoria generală a reprezentărilor constitutive stabilește *restricțiile* pe care trebuie să le satisfacă aceste relații pentru a putea fi folosite în *descrierea matematică* a comportării materialelor observate în natură.

Apoi se face o *clasificare rațională* a materialelor și se demonstrează teoreme care descriu comportamentul materialelor dintr-o anumită clasă.

Descrierea matematică a comportamentului corpurilor continuu deformabile o facem în cadrul axiomatic descris de Noll [1958], Truesdell, Noll [1965], Truesdell [1972].

Conceptul de material introdus aici reflectă caracteristica generală a corpurilor de a avea o *memorie a trecutului lor*, astfel încât răspunsul materialului la o schimbare a formei sale să se producă, în general, după un anumit interval de timp.

Pentru aceasta vom defini *istoria trecută, până la momentul curent*, inclusiv, pentru câmpuri care *depind de timp*.

Definiția 1. Fie $f : R \rightarrow \mathcal{X}$ un câmp. Definim *istoria câmpului f până la momentul t* (inclusiv) prin funcția $f^t : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{X}$ dată prin

$$f^t(s) = f(t - s), \quad \forall s \in [0, +\infty) \quad (2.1)$$

cu s — numit *parametru pe istorie*, iar \mathcal{X} , domeniul de valori considerat arbitrar.

Notăm $\tau = t - s$, pentru orice $s \in [0, +\infty)$ (de unde $\tau \leq t$).

Observăm că pentru $s = 0$ obținem valoarea curentă, la momentul t a câmpurilor considerate.

Istoria procesului de deformare într-o particulă fixată este definită prin

$$\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot) : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Invl}_n, \quad \mathbf{F}^t(\mathbf{X}, s) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t - s), \quad (2.2)$$

pentru orice $s \in [0, +\infty)$, fiind inclusă și valoarea curentă, așa cum am observat deja.

Fie $\chi : \mathcal{B} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{E}$ o mișcare a corpului. Definim *istoria mișcării întregului corp* \mathcal{B} până la momentul t ca fiind *ansamblul* istoriilor

$$\{\chi^t(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}}$$

Formulăm principiile generale ale reprezentărilor constitutive datorate lui Noll:
P1. Principiul determinismului, P2. Principiul acțiunii locale, P3. Principiul obiectivității.

P1. Principiul determinismului

Fie \mathcal{B} un corp și $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. La orice moment de timp t starea de tensiune în particula X depinde de istoria mișcării până la momentul t a *întregului corp*.

Formalizăm, în cele ce urmează enunțul *Principiului determinismului*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\{\chi^t(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}; X}) \quad (2.3)$$

Aici $\mathbf{x} = \chi(X, t)$ este poziția particulei X în configurația de la momentul t , $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \in \text{Sim}$ este tensiunea Cauchy în $X \in \mathcal{B}$, la momentul t , corespunzător mișcării χ , iar \mathcal{F} este operatorul constitutiv definit pe istorii, cu valori în Sim , care se mai numește, *operator de răspuns, operator constitutiv, funcționala constitutivă*¹, sau *funcționala memoriei*.

Prezența explicită a particulei X în reprezentarea constitutivă (3) indică posibilitatea existenței unui răspuns diferit în diferite particule ale corpului (prezența neomogenităților materiale). Principiul este mult prea general pentru a fi operabil. De aceea se întărește sub forma *principiului acțiunii locale*.

P2. Principiul acțiunii locale

La orice moment de timp t starea de tensiune în particula X depinde numai de istoria mișcării până la momentul t a *unei vecinătăți a particulei*.

În cele ce urmează formalizăm enunțul de mai sus al *Principiului acțiunii locale*: Fie \mathcal{B} un corp și $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. Atunci există $N_X \subset \mathcal{B}$,

¹Este un abuz de limbaj având în vedere faptul că valorile lui \mathcal{F} nu sunt în \mathbb{R} .

vecinătate a lui X astfel că dacă $\chi, \bar{\chi} : \mathcal{B} \times R \rightarrow \mathcal{E}$ sunt două mișcări arbitrare ale corpului pentru care $\chi(\mathbf{Y}, \tau) = \bar{\chi}(\mathbf{Y}, \tau), \forall \mathbf{Y} \in N_X, \tau \in R$, atunci la orice moment de timp t

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\{\chi^t(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}; X}) = \mathcal{F}(\{\bar{\chi}^t(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}; X}) \quad (2.4)$$

unde $\mathbf{x} = \chi(X, t) = \bar{\chi}(X, t)$.

Definiția 2. O pereche $\{\chi, \mathbf{T}\}$, în care χ este o mișcare a corpului \mathcal{B} , iar \mathbf{T} este tensiunea Cauchy, definește un *proces dinamic*. Spunem că perechile $\{\chi, \mathbf{T}\}$ și $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$ sunt *dinamic echivalente* dacă χ, χ^* sunt două *mișcări echivalente* și \mathbf{T} este *obiectiv*.

Astfel în conformitate cu Definiția 4. (formula (62)) a mișcărilor echivalente și cu Definiția 7. (formula (67)) pentru câmpuri tensoriale obiective din cap.I, putem rescrie Definiția 2. și anume: $\{\chi, \mathbf{T}\}$ și $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$ sunt *dinamic echivalente* dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &\equiv \chi^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{x}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)(\chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{x}_0) \\ t^* &= t + a, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in R \\ \mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

unde $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\mathbf{x}_0^*(t), \mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$, $a \in R$

P3. Principiul obiectivității

Fie o reprezentare constitutivă. Spunem că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității (sau reprezentarea constitutivă este obiectivă) dacă și numai dacă are proprietatea că îndată ce procesul dinamic $\{\chi, \mathbf{T}\}$, satisface reprezentarea constitutivă, atunci orice proces dinamic $\{\chi^*, \mathbf{T}^*\}$, echivalent cu $\{\chi, \mathbf{T}\}$ satisface reprezentarea constitutivă.

Astfel reprezentarea constitutivă (3), satisface principiul obiectivității dacă și numai dacă operatorul constitutiv satisface restricția

$$\mathcal{F}(\{(\chi^*)^{t^*}(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}; X}) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}(\{\chi^t(Y, \cdot)\} |_{Y \in \mathcal{B}; X})\mathbf{Q}^T(t)$$

$\forall \chi^*$ echivalentă cu χ și $\mathbf{Q}(t) \in Ort$.

Reprezentările constitutive se mai numesc și *ecuații constitutive*, sau legi de material.

Ecuația constitutivă (3) este prea generală, atâta timp cât nu se fac referiri asupra modului în care este definit operatorul constitutiv.

2.2 Materiale simple. Forme reduse ale ecuațiilor constitutive

Vom defini acum *clasa materialelor simple*, introdusă de Noll. Așa cum vom arăta în capitolele următoare materialele elastice, fluidele vâscoase, fluidele ideale, fluidele Reiner - Rivlin, etc. sunt clase particulare de materiale simple.

Observația 1. Prima aproximație a mișcării χ_k , pentru fiecare t , în vecinătatea lui \mathbf{X} , este gradientul deformației $\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t)$, așa cum rezultă din definiția acestuia. Conform Definiției 3. (formula (26)) din cap.I *diferențiala* aplicației $\mathbf{X} \rightarrow \chi_k(\mathbf{X}, t)$, în $\mathbf{X} \equiv k(X)$, este dată de

$$\chi_k(\mathbf{Y}, t) = \chi_k(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t)[\mathbf{Y} - \mathbf{X}] + \omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (2.6)$$

cu proprietatea $\lim_{\mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}} \frac{\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|} = 0$.

Materialele simple vor fi descrise prin reprezentări constitutive, prin care starea de tensiune într-o particulă fixată este determinată numai de *istoria gradientului de deformație* în particula respectivă.

Definiția 3. Fie \mathcal{B} un corp și $X \in \mathcal{B}$ o particulă a sa. Spunem că, corpul \mathcal{B} este constituit, în particula X , dintr-un *material simplu* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X}, \cdot); \mathbf{X}), \quad (2.7)$$

în raport cu k o configurație de referință fixată. \mathcal{F}_k — se numește operatorul constitutiv în raport cu configurația de referință k .

Configurația de referință va fi *subânțeleasă*, dar nu o vom menționa, decât dacă este absolut necesar. De asemenea vom **omite prezența explicită a particulei materiale** prin care se menționau posibilele neomogenități ale corpului considerat.

Observația 2. Orice material simplu satisface principiul acțiunii locale.

Principiul obiectivității *impune restricții* puternice asupra reprezentărilor constitutive. Dacă o reprezentare constitutivă *satisface* principiul obiectivității spunem că **reprezentarea constitutivă este obiectivă**.

Vom demonstra acum o **condiție necesară și suficientă** de obiectivitate a reprezentării constitutive pentru materiale simple.

Teorema 1. Fie un material simplu reprezentat prin (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot))$$

Reprezentarea constitutivă satisface P3. dacă și numai dacă are loc următoarea restricție asupra operatorului constitutiv

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) = \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) \mathbf{Q}^T(t) \quad (2.8)$$

pentru $\forall \mathbf{F}^t(\cdot)$ – istorie de deformație în domeniul constitutiv și pentru orice istorie a unui câmp ortogonal, $\mathbf{Q}^t(\cdot)$.

Demonstrație. Din principii obiectivității rezultă egalitățile

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \mathcal{F}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X}, \cdot)) \\ \parallel \\ \mathbf{Q}(t) \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(t) &= \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) \mathbf{Q}^T(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Deoarece mișcările sunt echivalente în particula X între gradientii de deformație ai celor două mișcări există legătura

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \tau^*) = \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau), \quad \forall \tau \in R,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X}, s) = \mathbf{Q}^t(s) \mathbf{F}^t(\mathbf{X}, s), \quad \forall s \geq 0, \quad (2.10)$$

deoarece am considerat $\tau^* = \tau + a$, $t^* = t + a$ și $\tau^* - t^* = \tau - t = s$. Rezultă deci, din (10), egalitatea istoriilor $(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X}, \cdot) = \mathbf{Q}^t(\cdot) \mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)$, care introdusă în (9) ne conduce la rezultat.

Reciproc. Presupunem că avem reprezentarea constitutivă (7), cu operatorul constitutiv satisfăcând restricția (8). Să arătăm că principiul obiectivității este satisfăcut. Deci să demonstrăm că dacă perechea (χ, \mathbf{T}) satisface reprezentarea constitutivă, atunci și perechea (χ^*, \mathbf{T}^*) , corespunzătoare unui proces dinamic echivalent, o satisface. Astfel, vom considera (χ, χ^*) echivalente și $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(t)$. Dacă înlocuim valoarea curentă a tensiunii Cauchy din reprezentarea constitutivă, în \mathbf{T}^* și folosim egalitatea istoriilor, din formula (10) împreună cu ipoteza (8) deducem că are loc $\mathbf{T}^*(\mathbf{x}^*, t^*) = \mathcal{F}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\mathbf{X}, \cdot))$.

Forme reduse ale reprezentărilor constitutive se numesc acele reprezentări care sunt astfel încât principiul *obiectivității să fie satisfăcut*.

Vom prezenta două forme reduse ale ecuațiilor constitutive pentru materiale simple, pe care le vom nota pentru identificare prin (I) și (II). Acestea vor fi utilizate frecvent în continuare.

Teorema 2. (Forma redusă I) Fie un material simplu cu reprezentarea constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot))$$

Reprezentarea

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\mathbf{X}, \cdot)) \mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t) \quad (2.11)$$

este o formă redusă a ecuației constitutive. În (11) istoria gradientului de deformație este prezentă prin *tensorul rotațiilor la momentul t și prin istoria tensorului lungirilor la dreapta*, deoarece

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, \tau)\mathbf{U}(\mathbf{X}, \tau), \quad (2.12)$$

pentru orice $\tau \in R$.

Demonstrație. Folosim condiția necesară și suficientă de obiectivitate din Teorema 1. (formula (8))

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) = \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) \mathbf{Q}^T(t),$$

în care fixăm o istorie a gradientului de deformație și particularizăm transformarea ortogonală $\mathbf{Q}(\tau) \equiv \mathbf{R}^T(\mathbf{X}, \tau)$, $\forall \tau$. Aici $\mathbf{R}(\mathbf{X}, \tau) \in Ort$ se obține din teorema de descompunere polară (formula (1.44)) rescrisă în (12).

Pentru simplificare vom omite și particula fixată \mathbf{X} . Din (12) rezultă că $\mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{U}(\tau)$, care introdusă în (8) ne conduce la

$$\mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot)) = \mathbf{R}^T(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \mathbf{R}(t),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Reciproc. Avem o reprezentare constitutivă sub forma (11). Notăm prin $\tilde{\mathcal{F}}$ membrul stâng din (11). Definiția operatorului $\tilde{\mathcal{F}}$ este coerentă, deoarece istoria gradientului de deformație este conținută în membrul stâng, prin intermediul descompunerii polare (la momente arbitrare de timp). Astfel

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \equiv \mathbf{R}(t) \mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot)) \mathbf{R}^T(t) \implies \mathbf{T}(t) = \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)). \quad (2.13)$$

Să arătăm că $\tilde{\mathcal{F}}$ satisface condiția (8) din Teorema 1. pentru orice $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$. Pentru aceasta să introducem istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t \equiv \mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t$. Din definiția istoriei, scrisă pentru $s \geq 0$, deducem că, pentru orice $\tau = t - s$, $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau)$ și prin urmare avem

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{R}(\tau), \quad \tilde{\mathbf{U}}(\tau) = \mathbf{U}(\tau). \quad (2.14)$$

Ultimele egalități sunt consecințe ale unicității reprezentării polare, care a fost aplicată succesiv pentru $\mathbf{F}(\tau)$ și pentru $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$ în (14)₁.

Folosim definiția operatorului $\tilde{\mathcal{F}}$ (introdus în (13), pentru istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t$), relațiile (14)₂ și deducem egalitățile

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t) &= \tilde{\mathcal{F}}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(t) \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{U}}^t(\cdot)) \tilde{\mathbf{R}}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{R}(t) \mathcal{F}(\mathbf{U}^t(\cdot)) \mathbf{R}^T(t) \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}(t) \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \mathbf{Q}^T(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Din egalitatea primului termen cu ultimul din (15) rezultă obiectivitatea reprezentării.

Observația 3. Reprezentarea (11) depinde de istoria rotațiilor *numai prin valoarea curentă* și de istoria până la momentul t a tensorilor lungirilor la dreapta.

Teorema 3. (Forma redusă II) Fie un material simplu cu reprezentarea constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot))$$

Reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității dacă și numai dacă operatorul constitutiv se poate reprezenta sub forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, \cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t), \quad (2.16)$$

unde

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad (2.17)$$

cu $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)$ pentru orice $\mathbf{A} \in \text{Lin}$. Relația (17) definește *tensorul rotit cu rotația de la momentul t* .

Demonstrație. În deducerea acestei reprezentări se trece la mișcarea relativă. Nu vom mai menționa argumentele spațiale. Folosim formula (1.52)_{ii}, sub forma $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{F}(t)$ și teorema de descompunere polară pentru $\mathbf{F}(t)$, și $\mathbf{F}_t(\tau)$ date în formulele (1.45), (1.50). Rezultă

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t), \quad \text{sau} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{R}(t) (\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}} \mathbf{U}(t),$$

cu $\mathbf{R}_t(\tau), \mathbf{R}(t) \in \text{Ort}$, dacă s-a utilizat (17).

Arătăm că reprezentarea din (16) este o condiție necesară. Facem deci presupunerea că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității. Cu alte cuvinte avem formula (8)

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \mathbf{Q}^T(t)$$

Pe de alta parte $\forall s \geq 0$ avem din (18), pentru $\tau = t - s$

$$(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t)(s) = \mathbf{Q}(t - s) \mathbf{F}(t - s) = \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{R}(t) (\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}} \mathbf{U}(t). \quad (2.19)$$

Particularizăm pentru orice $\tau \leq t$ transformarea ortogonală

$$\mathbf{Q}(\tau) \equiv (\mathbf{R}_t(\tau) \mathbf{R}(t))^T, \quad \text{și} \quad \mathbf{Q}(t) \equiv \mathbf{R}^T(t) \quad (2.20)$$

Introducem în (8) istoria din (19), cu transformarea ortogonală particulară din (20). Obținem

$$\mathcal{F}((\mathbf{U}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}} \mathbf{U}(t)) = \mathbf{R}^T(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \mathbf{R}(t). \quad (2.21)$$

Ținem seama acum de formulele (1.46), (1.51)

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{U}^2(t), \quad \mathbf{C}_t(\tau) = (\mathbf{U}_t(\tau))^2, \quad (2.22)$$

prin care rezultă că rădăcinile pătrate ale tensorilor lui Cauchy-Green la dreapta în raport cu configurația de referință, și respectiv în descrierea relativă, sunt $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{U}_t(\tau)$.

Să mai observăm că din relația anterioară și din (17), prin care se definește tensorul rotit cu rotația de la momentul t , se deduce

$$(\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} = [(\mathbf{U}_t(\tau))^{\mathbf{R}}]^2 \quad (2.23)$$

Acum suntem în măsură să afirmăm că există operatorul \mathcal{F}_1 , astfel încât

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) &= \mathbf{R}(t)\mathcal{F}((\mathbf{U}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}\mathbf{U}(t))\mathbf{R}^T(t) \\ &= \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aceasta este consecință directă a formulelor (21) - (23).

Reciproca. Fie o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) \equiv \tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot)) \quad (2.25)$$

Să arătăm că operatorul constitutiv definit în (25) are proprietatea (8)

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T(t) \quad (2.26)$$

Pentru aceasta considerăm istoria $(\mathbf{F}^*)^{t^*} = \mathbf{Q}^t\mathbf{F}^t$ corespunzătoare unei mișcări χ^* . Atunci din $\mathbf{F}^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{F}(\tau)$ rezultă

$$\mathbf{R}^*(\tau) = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{R}(\tau), \quad \mathbf{C}^*(\tau) = \mathbf{C}(\tau) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{C}_{t^*}(\tau^*) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{Q}^T(t),$$

conform cu formulele din (1.68) și (1.70). Din (25), scrisă pentru $(\mathbf{F}^*)^{t^*}$ obținem

$$\tilde{\mathcal{F}}((\mathbf{F}^*)^{t^*}(\cdot)) \equiv \mathbf{R}^*(t^*)\mathcal{F}_1((\tilde{\mathbf{C}}_{t^*}^{t^*}(\cdot))^{\mathbf{R}^*}, \mathbf{C}^*(t^*))(\mathbf{R}^*)^T(t^*) \quad (2.28)$$

Din (27), cu (17) rezultă egalitatea

$$(\mathbf{C}_{t^*}^{t^*}(s))^{\mathbf{R}^*} = \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t^t(s)\mathbf{R}(t) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}}, \quad (2.29)$$

care transformă relația (28) în

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbf{F}^*)^{t^*}(\cdot) \equiv \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\tilde{\mathbf{C}}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t)\mathbf{Q}^T(t). \quad (2.30)$$

În fine din (30) și (25) rezultă proprietatea (26).

Observația 4. În forma redusă II s-au pus în evidență două configurații de referință : configurația inițială de referință și configurația actuală, care apare în mod explicit datorită utilizării descrierii relative a mișcării. În raport cu configurația inițială de referință se calculează atât tensorul lui Cauchy-Green la dreapta, care apare sub formă de parametru, cât și rotația.

Această formă redusă va fi utilizată în mod esențial în teorema de caracterizare a fuidelor și în dezvoltările din capitolele 3 și 5.

2.3 Principiul determinismului modificat pentru materiale simple cu legături

În cele ce urmează ne vom ocupa de formularea *principiului determinismului modificat* pentru materiale simple, în cazul în care mișcarea corpului într-o vecinătate a particulei considerate este supusă la anumite restricții. Acest principiu va înlocui axiomele **P1** și **P2**.

Definiția 3. Se numește *legătură simplă*, în particula X orice relație de forma

$$\gamma(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = 0, \quad (2.31)$$

cu funcția scalară obiectivă. Legăturile sunt restricții constitutive.

Propoziția 1. Legătura (31) este echivalentă cu

$$\lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) = 0, \quad \lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) = \gamma(\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)). \quad (2.32)$$

Demonstrație. Din obiectivitate rezultă că

$$\gamma(\mathbf{F}(t)) = \gamma(\mathbf{Q}(t)\mathbf{F}(t)), \quad \forall \mathbf{Q}(t) \in Ort.$$

Fie $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{R}^T(t)$ din teorema de descompunere polară pentru $\mathbf{F}(t)$. Din (1.46) avem $\mathbf{C}(t) = (\mathbf{U}(t))^{1/2}$.

Observația 5. Legăturile (simple) se realizează prin tensiuni. Astfel relațiile constitutive pentru materiale simple cu legături trebuie să fie astfel încât să admită acțiunea acestor tensiuni independent de istoria deformației. Cele mai simple sisteme de forțe (sau de tensiuni) de legătură sunt acelea pentru care *puterea mecanică este nulă* pentru orice *mișcare compatibilă cu legăturile*. Se extinde astfel axioma legăturilor ideale din mecanica corpului rigid.

Principiul determinismului pentru materiale simple cu legături

Tensiunea este determinată prin istoria gradientului deformației mai puțin un tensor simetric, care produce o *putere mecanică nulă* pe orice *mișcare compatibilă cu legăturile*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N} + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)), \quad (2.33)$$

cu

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.34)$$

pentru orice $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$, pentru care $\lambda(\mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) = 0$.

Teorema 4. Dacă $\lambda : Sim \rightarrow \mathbf{R}$ de clasă C^1 , atunci \mathbf{N} din (33) se exprimă prin

$$\mathbf{N} = q\mathbf{F}\nabla\lambda(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \quad (2.35)$$

cu $\nabla\lambda(\mathbf{C}) \in Sim$, iar funcția scalară q depinde de (\mathbf{x}, t) .

Demonstrația folosește derivabilitatea în raport cu timpul a funcției compuse

$$t \rightarrow f(t) \equiv \lambda(\mathbf{C}(t)) = 0, \quad (2.36)$$

unde $\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}(t)^T\mathbf{F}(t)$. Prin derivare, din (36) rezultă

$$\dot{f}(t) = D\lambda(\mathbf{C}(t))[\dot{\mathbf{C}}(t)] = 0, \quad (2.37)$$

cu $\dot{\mathbf{C}}(t) = 2\mathbf{F}(t)^T\mathbf{D}(t)\mathbf{F}(t)$, dacă s-au folosit formulele (1.43), (1.40).

Pe de altă parte din diferențiabilitatea funcției λ rezultă că valoarea diferențialei $D\lambda(\mathbf{C}) : Sim \rightarrow \mathbf{R}$ este liniară și continuă. Din aplicarea teoremei lui Riesz (pe Sim înzestrat cu produsul scalar " · ") rezultă că există $\nabla\lambda(\mathbf{C}) \in Sim$, (vezi anexa A1) astfel încât

$$D\lambda(\mathbf{C})[\mathbf{A}] = \nabla\lambda(\mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A} \in Sim. \quad (2.38)$$

Din (37) cu (38) avem

$$\nabla\lambda(\mathbf{C}(t)) \cdot 2\mathbf{F}(t)^T\mathbf{D}(t)\mathbf{F}(t) = 0, \text{ sau } \mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T \cdot \mathbf{D}(t) = 0. \quad (2.39)$$

Reciproc, din (39) care este adevărată pentru orice t rezultă prin integrare că $\lambda(\mathbf{C}(t)) = const.$

Rescriem acum (34) sub forma

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.40)$$

pentru orice $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ pentru care $\mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T \cdot \mathbf{D}(t) = 0$, unde s-a avut în vedere simetria lui \mathbf{N} , și reprezentarea echivalentă a legăturii prin (39). Eliminând legătura, prin introducerea multiplicatorului Lagrange, din (40) avem

$$(\mathbf{N} - q\mathbf{F}(t)\nabla\lambda(\mathbf{C}(t))\mathbf{F}(t)^T) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.41)$$

pentru orice $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \in \text{Sim}$. Deducem deci forma tensorului de legătură \mathbf{N} .

Dăm mai jos două exemplificări, în cazul legăturii de *incompresibilitate* și *inextensibilitate*.

Teorema 5. Tensiunea pentru *materialele simple, incompresibile* este determinată prin istoria gradientului de deformare *mai puțin un tensor sferic*, care definește o *presiune de tip hidrostatic*. Deci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)), \quad (2.42)$$

pentru orice \mathbf{F}^t pentru care $\det \mathbf{F}(\tau) = 1$, la orice moment de timp $\tau \in R$.

Demonstrația se obține imediat dacă ținem seama de condiția de *incompresibilitate* caracterizată prin $\text{div } \mathbf{v} \equiv \text{tr } \mathbf{L} = 0$, conform cu Propoziția 4. (formula (1.24)). Dar $\text{tr } \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{I} = 0$. Direct din principiul determinismului modificat (33), eliminând legătura obținem

$$(\mathbf{N} + p\mathbf{I}) \cdot \mathbf{L} = 0,$$

pentru orice $\mathbf{L} \in \text{Lin}$, ceea ce este echivalent cu $\mathbf{N} = -p\mathbf{I}$. Ceea ce trebuia demonstrat. Am obținut astfel un rezultat datorat lui Poincaré.

Teorema 6. Tensiunea pentru *materiale simple* cu legătură de *inextensibilitate* într-o direcție este determinată prin istoria gradientului de deformare *mai puțin o tensiune uniaxială*. Mai precis fie $\mathbf{e}_k \in \mathcal{V}$, cu $|\mathbf{e}_k| = 1$, direcția de *inextensibilitate*, în configurația de referință, atunci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = q\mathbf{F}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{F}\mathbf{e}_k + \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)), \quad (2.43)$$

pentru orice \mathbf{F}^t pentru care $\lambda(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{C}\mathbf{e}_k - 1 = 0$.

Demonstrația este o consecință directă a formulei de calcul pentru diferențiala legăturii

$$\nabla \lambda(\mathbf{C}) = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k.$$

Obținem astfel rezultatul lui Adkins și Rivlin.

2.4 Grupuri de simetrie materială. Clasificarea materialelor simple

Conceptul de *simetrie materială* sau *izomorfism material* este datorat lui Noll și devine instrumentul matematic care permite clasificarea materialelor simple în : *fluide, solide, fluide cristaline, corpuri izotrope*. Această clasificare are în vedere comportamentul unor anumite corpuri materiale față de unele transformări ale configurațiilor lor de referință.

Se stabilește un criteriu de clasificare prin descrierea mulțimii transformărilor configurației de referință, relativ la care răspunsul materialului este același; în sensul că experimental nu poate fi pusă în evidență transformarea suportată de corp în configurația de referință.

Reamintim că în definiția materialelor simple, Definiția 3., formula (7), se avea în vedere caracterizarea constitutivă într-o particulă materială fixată.

Teorema 7. *Relația de legătură dintre operatorii constitutivi urmare a schimbării configurației de referință definită prin deformația*

$$\lambda : k_1(\mathcal{B}) \longrightarrow k_2(\mathcal{B}), \quad (2.44)$$

cu $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1)$, este dată prin

$$\mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}_{k_2}^t(\mathbf{X}_2, \cdot); \mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}_{k_2}^t(\mathbf{X}_2, \cdot)\mathbf{P}(\mathbf{X}_1, \cdot); \mathbf{X}_1), \quad (2.45)$$

unde $\mathbf{X}_j = k_j(X)$, cu $j \in \{1, 2\}$.

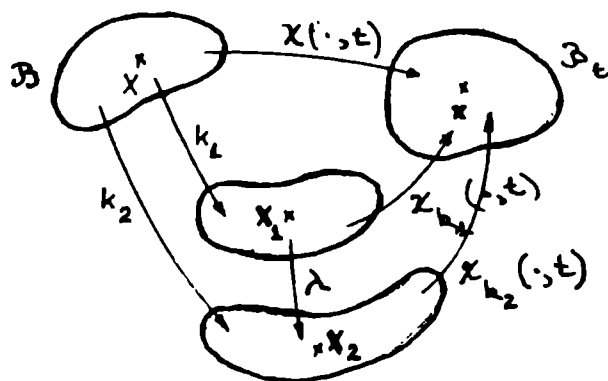


Fig. 2.1

Demonstrație. Fie χ o mișcare dată. Definim mișcările χ_{k_j} , punînd în evidență și deformația λ , conform reprezentărilor din Fig. 2.1. Rezultă relația

$$\chi_{k_1}(\mathbf{X}_1, \tau) = \chi_{k_2}(\lambda(\mathbf{X}_1), \tau) \quad (2.46)$$

pentru orice $X \in \mathcal{B}$ și $\mathbf{X}_j = k_j(X)$, $\forall \tau \in R$. Diferențiind în raport cu \mathbf{X}_1 și folosind (44)₂ avem

$$\mathbf{F}_{k_1}(\mathbf{X}_1, \tau) = \mathbf{F}_{k_2}(\mathbf{X}_2, \tau)\nabla\lambda(\mathbf{X}_1) \equiv \mathbf{F}_{k_2}(\mathbf{X}_2, \tau)\mathbf{P}. \quad (2.47)$$

Dacă notăm prin \mathcal{F}_k , funcționalele constitutive care caracterizează răspunsul materialului la o aceeași mișcare dată, dar raportînd la configurațiile k_j , atunci din definiția (7) a materialelor simple avem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}_{k_2}^t(\mathbf{X}_2, \cdot); \mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}_{k_1}^t(\mathbf{X}_1, \cdot); \mathbf{X}_1). \quad (2.48)$$

Folosim (47) în (48) și obținem afirmația din enunț.

Reamintim că în definiția materialelor simple se avea în vedere caracterizarea constitutivă într-o particulă fixată. De aceea apare naturală problema precizării unor condiții matematice din care să rezulte dacă două particule sunt constituite sau nu din același material.

Definiția 4. Două puncte materiale X_1, X_2 sunt *material izomorfe* (sau sunt *constituite dintr-un același material*), dacă $\exists k_1, k_2$ configurații ale corpului \mathcal{B} astfel încât

$$\begin{aligned} \rho_{k_1}(\mathbf{X}_1) &= \rho_{k_2}(\mathbf{X}_2), \\ \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_1) &= \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_2), \end{aligned} \quad (2.49)$$

pentru orice \mathbf{F}^t – istorie a unui câmp tensorial nesingular și $\mathbf{X}_j = k_j(X_j)$.

Observația 6. Evident că $\forall X \in \mathcal{B}$ este izomorf cu el însuși, dacă $k_1 = k_2$. Ne interesează cazul în care X este material izomorf cu el însuși într-un mod netrivial.

Definiția 5. Spunem că două configurații k_1, k_2 sunt *material izomorfe* în X , dacă au loc relațiile (49) cu $\mathbf{X}_j = k_j(X)$.

Teorema 8. Fie k_1, k_2 două configurații *material izomorfe* în X și $\lambda : k_1(\mathcal{B}) \rightarrow k_2(\mathcal{B})$ deformația între cele două configurații, atunci

$$\begin{aligned} i) \quad \mathbf{P} &= \nabla \lambda(\mathbf{X}_1) \in Unim, \\ ii) \quad \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P}; \mathbf{X}_1) &= \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

pentru orice \mathbf{F}^t .

Pentru **demonstrație** vom folosi relația de schimbare a densităților corpului în X , ca urmare a deformației dată, prin formula (1.2)

$$\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1) = |\det \mathbf{P}| \rho_{k_2}(\mathbf{X}_2), \quad (2.51)$$

cu \mathbf{P} definit prin (44). Deci egalitatea densităților din (49) impune ca $\mathbf{P} \in Unim$.

Utilizăm acum relația de legătura între operatorii constitutivi la schimbarea configurației de referință (45) și ipoteza, conform Definiției 5.,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_2) &= \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P}; \mathbf{X}_1), \\ \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_1) &= \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}_2). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Din (52) se obține ii).

Observația 7. Precizăm încă o dată că în formula (44) se avea în vedere o aceeași mișcare a corpului, dar se foloseau două reprezentări ale acesteia, iar $\mathbf{x} = \chi_{k_1}(\mathbf{X}_1, t) = \chi_{k_2}(\mathbf{X}_2, t)$ (vezi Fig. 2.1).

În cazul configurațiilor material izomorfe k_1, k_2 se au în vedere mișcările χ_{k_1}, χ_{k_2} , (vezi Fig. 2.2), la care este supus corpul aflat în configurațiile $k_1(\mathcal{B})$ și respectiv, $k_2(\mathcal{B})$. Cele două mișcări au aceeași istorie a gradientului de deformare, în imaginile particulei materiale, în cele două configurații. Poziția particulei în configurația actuală prin cele două mișcări este diferită, dar starea de tensiune și densitățile sunt aceleași

$$\begin{aligned} \nabla \chi_{k_1}(\mathbf{X}_1, \tau) &= \nabla \chi_{k_2}(\mathbf{X}_2, \tau), \quad \forall \tau \in R \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, t) &= \mathbf{T}(\mathbf{x}_2, t), \quad \rho(\mathbf{x}_1, t) = \rho(\mathbf{x}_2, t). \end{aligned} \tag{2.53}$$

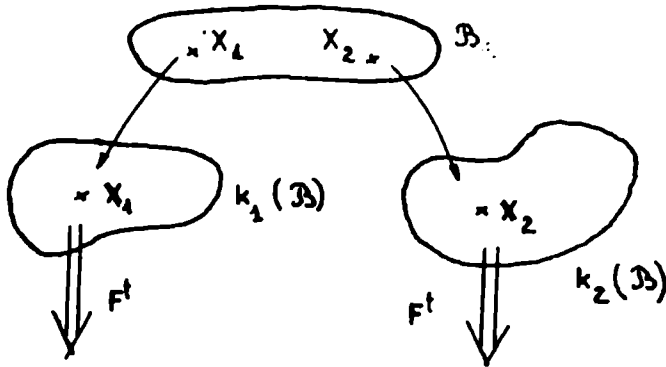


Fig. 2.2

Definiția 6. Se numește *grup de simetrie a materialului* în particula X , relativ la configurația de referință k mulțimea

$$g_k(\mathbf{X}) = \{\mathbf{H} \in Unim \mid \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{H}; \mathbf{X}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{F}^t\}. \tag{2.54}$$

Orice transformare $\mathbf{H} \in g_k(\mathbf{X})$ se numește *transformare de simetrie materială* relativ la configurația k .

Teorema 9. 1) $g_k(\mathbf{X})$ este un subgrup în $Unim$ relativ la operația de compunere a aplicațiilor în Lin .

2) Dacă k_1, k_2 sunt două configurații de referință atunci

$$g_{k_2} = \mathbf{P}g_{k_1}\mathbf{P}^{-1}, \tag{2.55}$$

cu $\mathbf{P} = \nabla \lambda(\mathbf{X}_1)$, iar λ este deformația de la configurația k_1 la configurația k_2 .

Demonstrație. 1) Fie $\mathbf{H}_1 \in g_k$ atunci $\mathbf{H}_1 \in Unim$ și deci există \mathbf{H}_1^{-1} , iar

$$\mathcal{F}_k((\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1)\mathbf{H}_1^{-1}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1). \tag{2.56}$$

Fie $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}_1$, cu $\mathbf{F}(\tau) \in \text{Invlin}$ introdus în (56). În conformitate cu (54) rezultă că $\mathbf{H}_1^{-1} \in g_k$.

Dacă $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2 \in g_k$ atunci au loc egalitățile

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t\mathbf{H}_1) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t), \quad (2.57)$$

prima egalitate având loc în baza faptului că $\mathbf{H}_2 \in g_k$, pentru $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}_1$ și ultima datorită apartenenței $\mathbf{H}_1 \in g_k$.

2) Demonstrăm dubla incluziune a mulțimilor din (55). Fie $\mathbf{H} \in g_{k_1}$. Din (45) și (54) avem

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k_2}((\mathbf{F}^t\mathbf{H})\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2) &= \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}; \mathbf{X}_1) = \mathcal{F}_{k_1}(\mathbf{F}^t; \mathbf{X}_1) \\ &= \mathcal{F}_{k_2}(\mathbf{F}^t\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Pentru $\bar{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{P}^{-1}$ din (58) rezultă

$$\mathcal{F}_{k_2}(\bar{\mathbf{F}}^t\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1}; \mathbf{X}_2) = \mathcal{F}_{k_2}(\bar{\mathbf{F}}^t; \mathbf{X}_2), \quad (2.59)$$

din care avem

$$\mathbf{P}\mathbf{H}\mathbf{P}^{-1} \in g_{k_2}, \quad \forall \mathbf{H} \in g_{k_1}(\mathbf{X}). \quad (2.60)$$

Deci

$$\mathbf{P}g_{k_1}\mathbf{P}^{-1} \subset g_{k_2}. \quad (2.61)$$

Similar se demonstrează cealaltă implicație.

Propoziția 2. Dacă k_1, k_2 sunt configurații *material izomorfe* în X , atunci

$$g_{k_1} = g_{k_2}. \quad (2.62)$$

Reciproca nu este adevărată.

Demonstrația egalității grupurilor de simetrie este evidentă din (49)₂.

Pentru a demonstra că reciproca nu este adevărată considerăm două configurații k_1, k_2 legate între ele printr-o dilatare sau comprimare, adică $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X}_1) = a\mathbf{I}$ cu $a \neq 1, a > 0$. Din Teorema 9. obținem că cele două grupuri de simetrie coincid, dar densitățile nu sunt egale, deoarece

$$\rho_{k_2}(\mathbf{X}_2) = \frac{\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1)}{\det |\mathbf{P}|} = \frac{\rho_{k_1}(\mathbf{X}_1)}{a}.$$

Astfel este contrazisă Definiția 5. S-a pus, prin urmare, în evidență proprietatea materialelor simple de a-și păstra printr-o dilatare grupul de simetrie.

În cele ce urmează va fi necesară **teorema de maximalitate** a Ort în $Unim$. Oricare ar fi g un grup cu proprietatea $Ort \subset g \subset Unim$, rezultă

$$g = Ort, \text{ sau } g = Unim. \quad (2.63)$$

Demonstrația acestei teoreme, datorată lui Noll [1965], este dată în Anexa **A3**.

Cu ajutorul conceptului de grup de simetrie materială Noll a introdus următoarele definiții

Definiția 7. Corpul \mathcal{B} este constituit dintr-un material *solid* în X dacă există o configurație a sa, k astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \subset Ort. \quad (2.64)$$

Definiția 8. Corpul \mathcal{B} este constituit dintr-un material *fluid* în X dacă există o configurație a sa, k astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) = Unim. \quad (2.65)$$

Definiția 9. Corpul \mathcal{B} este constituit dintr-un material *izotrop* în X dacă există o configurație a sa, k astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supset Ort. \quad (2.66)$$

Definiția 10. Corpul \mathcal{B} este constituit dintr-un material *fluid cristalin* sau *cristal fluid* în X dacă există o configurație a sa, k astfel încât $g_k(\mathbf{X})$ nu este un subgrup din Ort și nu este fluid.

Configurațiile din definițiile anterioare se numesc *configurații nedistorsionate de solid, fluid și respectiv de izotropie*.

Definiția 11.(Configurație naturală) Fie un material simplu descris prin ecuația constitutivă (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)),$$

în raport cu configurația de referință k . Spunem că, configurația de referință k este *configurație naturală* dacă corpul menținut nedeformat în această configurație suportă tensiune zero.

Propoziția 3. k este o configurație naturală pentru un material simplu dacă și numai dacă

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot)) = 0. \quad (2.67)$$

Demonstrația decurge din aplicarea principiului obiectivității P3. (formula (8) din Teorema 1.) pe istoria $\mathbf{F}^t = \mathbf{I}^t$

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q}^t(\cdot)) = \mathbf{Q}(t)\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T(t).$$

Deci dacă, k este configurație naturală, atunci membrul stâng din relația anterioară este nul, de unde rezultă (67). Reciproca este evidentă.

Observația 8. Existența unei configurații naturale pentru un material simplu este o *ipoteză constitutivă*. În cazul fluidelor (în sensul lui Noll) corpul menținut nedeformat într-o configurație a sa (deformată) suportă tensiuni caracterizate printr-un tensor sferic, deci *tensiuni de tip presiune hidrostatică*.

2.5 Corpuri izotrope

Vom începe prin a da o teoremă de caracterizare a transformărilor ortogonale care aparțin grupului de simetrie materială.

Teorema 10. Fie $\mathbf{Q}_0 \in Ort$. Atunci

$$\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X}) \iff \mathcal{F}_k(\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^t \mathbf{Q}_0^T) = \mathbf{Q}_0 \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t) \mathbf{Q}_0^T, \quad (2.68)$$

pentru orice \mathbf{F}^t .

Demonstrație. Fie $\mathbf{F}(\tau) \in Invlin$. Deoarece $\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X})$ rezultă că $\mathbf{Q}_0^T \in g_k(\mathbf{X})$. Din (54) cu istoria descrisă prin $\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}(\tau)$ avem

$$\mathcal{F}_k((\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^t) \mathbf{Q}_0^T) = \mathcal{F}_k(\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^t). \quad (2.69)$$

Din condiția necesară și suficientă ca \mathcal{F}_k să satisfacă principiul obiectivității ((8) din Teorema 1. , paragraful 2.2),

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t) = \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \mathbf{Q}^T(t), \quad (2.70)$$

scrisă pentru $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{Q}_0, \forall \tau \in R$, rezultă că (68) are loc.

Reciproc. Presupunem că are loc restricția asupra operatorului constitutiv din (68). Folosim din nou proprietatea (70) de obiectivitate pentru $\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{Q}_0$. Astfel din (68) și (70) avem

$$\mathcal{F}((\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^t) \mathbf{Q}_0^T) = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}^t), \quad (2.71)$$

din care renotând $\mathbf{Q}_0 \mathbf{F}(\tau)$ cu $\bar{\mathbf{F}}(\tau)$ se obține că $\mathbf{Q}_0^T \in g_k(\mathbf{X})$. Deoarece $g_k(\mathbf{X})$ este subgrup deducem că $\mathbf{Q}_0 \in g_k(\mathbf{X})$.

Teorema 11. \mathcal{B} este un *corp izotrop* dacă și numai dacă operatorul constitutiv este *izotrop*, deci

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q} \mathbf{F}^t \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t) \mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort. \quad (2.72)$$

Demonstrația este imediată folosind Teorema 10. și faptul că $Ort \cap g_k(\mathbf{X}) = Ort$, conform definiției 9., formula (66), a corpului constituit dintr-un material izotrop.

Teorema 12. Dacă \mathcal{B} este un corp izotrop atunci \mathcal{B} este sau solid izotrop sau fluid în particula X .

Demonstrația decurge din maximalitatea Ort în $Unim$, și din Definiția 9. Deci conform definiției există $k \in \mathcal{C}$ astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supset Ort \implies g_k(\mathbf{X}) = Ort, \text{ sau } g_k(\mathbf{X}) = Unim. \quad (2.73)$$

Dacă $g_k(\mathbf{X}) = Ort$ atunci $g_k(\mathbf{X}) \subset Ort$. Din Definiția 7. rezultă că \mathcal{B} este solid în particula considerată.

Dacă $g_k(\mathbf{X}) = Unim$ atunci din Definiția 8. rezultă că \mathcal{B} este fluid în particula considerată.

Vom da acum o teoremă de reprezentare pentru corpuri izotrope

Teorema 13. Forma redusă II pentru corpuri izotrope în particula X este dată de reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t)). \quad (2.74)$$

Aceasta este izotropă în ambele argumente, adică

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T, \quad (2.75)$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$, cu $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ – tensorul lui Cauchy-Green la stânga și $\mathbf{C}_t^t(\cdot)$ – istoria tensorului lui Cauchy-Green la dreapta în descriere relativă.

Demonstrația are ca punct de plecare forma redusă II, dedusă în Teorema 3., formula (16). Fie procesul $\tau \rightarrow \mathbf{F}(\tau) \in Invl_n$ și fie

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{R}^T(t), \quad (2.76)$$

cu $\mathbf{R}(t) \in Ort$ din descompunerea polară a lui $\mathbf{F}(t)$. Aplicând teorema de descompunere polară și unicitatea descompunerilor din (76) avem

$$\tilde{\mathbf{R}}(\tau) = \mathbf{R}(\tau)\mathbf{R}^T(t), \quad \tilde{\mathbf{U}}(\tau) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(\tau)\mathbf{R}^T(t) \quad (2.77)$$

Conform formulelor din (1.49), (1.52)_{ii}, (77) obținem că

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^T(t), \quad (2.78)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau) \text{ pentru că } \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau).$$

Din (16) avem, pe de altă parte

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t). \quad (2.79)$$

Corpul fiind izotrop $\mathbf{R}^T(t)$ este în $g_k(\mathbf{X})$, timpul fiind fixat. Deci

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\tilde{\mathbf{R}}}, \tilde{\mathbf{C}}(t))\tilde{\mathbf{R}}^T(t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \mathbf{B}(t)). \quad (2.80)$$

Am folosit (79) cu (77) și (78). Astfel am arătat că reprezentarea constitutivă este de forma (74).

Rămâne să mai demonstrăm izotropia operatorului constitutiv în raport cu ambele argumente. Pentru aceasta considerăm $\mathbf{F}(\tau)$ pentru orice $\tau \in R$ și fie

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{Q}\mathbf{F}(\tau)\mathbf{Q}^T, \quad (2.81)$$

cu $\mathbf{Q} \in Ort$. Folosim formulele (1.52)_{ii}, (1.49), (1.31) și deducem că

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) &= \mathbf{Q}\mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{Q}^T, & \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) &= \mathbf{Q}\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{Q}^T, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\tau) &= \mathbf{Q}\mathbf{B}(\tau)\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Din reprezentarea constitutivă (74) pentru istoria procesului $\tilde{\mathbf{F}}(\tau)$ se obține

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\tilde{\mathbf{C}}_t^t(\cdot), \tilde{\mathbf{B}}(t)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T), \quad (2.83)$$

Din (72) rezultă că

$$\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot))\mathbf{Q}^T \quad (2.84)$$

Dacă ținem seama de modul în care este conținută dependența de istoria procesului de deformare în reprezentarea constitutivă (74), din (84) cu (83) și (80) deducem condiția de izotropie din (75).

Reciproc. Dacă un corp admite o reprezentare constitutivă de forma (74), cu proprietatea (75), atunci el este izotrop.

2.6 Fluide

2.6.1 Fluide în clasa materialelor simple

În acest paragraf ne ocupăm de reprezentări constitutive pentru corpul \mathcal{B} constituit în particula X dintr-un *material simplu*, caracterizat prin (7)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X}, \cdot); \mathbf{X}), \quad (2.85)$$

în raport cu k , o configurație de referință fixată, care are proprietatea că grupul său de simetrie $g_k(\mathbf{X}) = Unim$. Deci conform definiției 8. avem în vedere un corp fluid.

Vom demonstra teorema datorată lui Noll

Teorema fundamentală asupra fluidelor. Orice corp \mathcal{B} constituit dintr-un fluid în particula X are o ecuație constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \rho), \quad (2.86)$$

cu proprietățile

$$\begin{aligned} a) \quad \mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_i^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \rho) &= \mathbf{Q}\mathcal{R}(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \rho)\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \\ b) \quad \mathcal{R}(\mathbf{I}^t(\cdot), \rho) &= 0, \end{aligned} \quad (2.87)$$

unde $\mathbf{I}^t(s) \equiv \mathbf{I}$.

Reciproc, dacă un corp admite o reprezentare constitutivă dată prin (86) cu proprietățile (87) atunci el este fluid.

Demonstrație. Conform definiției $g_k(\mathbf{X}) = Unim \supset Ort$, deci este în particular izotrop. Prin urmare putem utiliza teorema de caracterizare a corpurilor izotrope și să considerăm reprezentarea constitutivă dată prin Teorema 13.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \mathbf{B}(t)) \equiv \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)), \quad (2.88)$$

cu operatorul constitutiv izotrop în ambele argumente.

Vom demonstra că dependența de $\mathbf{B}(t)$ se transformă în dependență de ρ , ca o consecință a faptului că grupul de simetrie este $Unim$.

Considerăm $\mathbf{F}(\tau)$, pentru orice $\tau \in R$ fixat și definim

$$\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H} \implies \tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{F}^T(t). \quad (2.89)$$

Alegem transformarea $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{F}^{-1}(t)$ astfel încât $\mathbf{H} \in Unim$. Deci $\alpha^3 = |\det \mathbf{F}(t)|$, sau $\alpha^3 = \frac{\rho_0}{\rho}$. Cu această valoare avem

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim. \quad (2.90)$$

Din (89) se obține

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) &= \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau), \\ \tilde{\mathbf{F}}(t) &= \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I} = (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Aplicăm Definiția 8., a fluidelor și ținem seama că transformarea construită în (90) este o transformare de simetrie materială. Din (88) rezultă

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \mathbf{B}(t)) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t(\cdot)) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_i^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}), \quad (2.92)$$

dacă se utilizează (91). Această relație arată că valoarea curentă a tensiunii depinde de \mathbf{B} numai prin valoarea determinatului său, care este dependent de densitate.

In continuare introducem operatorul

$$\mathcal{R}(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \rho) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_i^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}) - \mathbf{T}_0, \quad (2.93)$$

unde $\mathbf{T}_0 = \mathcal{F}_1(\mathbf{I}^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I})$. Atunci din (93) deducem că

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= (\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}) - \mathbf{T}_0) + \mathbf{T}_0 = \\ &= \mathcal{R}(\mathbf{C}_t^t(\cdot), \rho) + \mathbf{T}_0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Evident că $\mathcal{R}(\mathbf{I}^t(\cdot), \rho) = 0$. Deci am demonstrat proprietatea b).

Folosim acum proprietatea de izotropie a operatorului \mathcal{F}_1 , din (88), în raport cu ambele argumente, care prin (92) devine

$$\mathcal{F}_1(\mathbf{Q}\mathbf{C}_t^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}(\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathcal{F}_1(\mathbf{C}_t^t(\cdot), (\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I})\mathbf{Q}^T, \quad (2.95)$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$. (95), prin particularizarea istoriei tensorilor lui Cauchy-Green în descriere relativă $\mathbf{C}_t^t(\cdot) = \mathbf{I}^t(\cdot)$, conduce la proprietatea

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{Q}\mathbf{T}_0\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort \iff \mathbf{T}_0 = -p(\rho)\mathbf{I}. \quad (2.96)$$

Ultima parte a formulei (96) este o consecință a faptului că un *tensor simetric* permută cu orice transformare ortogonală dacă și numai dacă este un *tensor sferic*.

Din (95) cu (96) și definiția operatorului \mathcal{R} din (93) se obține și proprietatea a) de izotropie.

Reciproc. Să demonstrăm că dacă un corp este caracterizat în particula \mathbf{X} printr-o reprezentare constitutivă (86), (87), atunci $g_k(\mathbf{X}) = Unim$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t)$, pentru orice $\mathbf{H} \in Unim$. Fie pentru aceasta, $\tilde{\mathbf{F}}(\tau) = \mathbf{F}(\tau)\mathbf{H}$, atunci $\tilde{\rho} = \rho$, $\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)$, $\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau)$. Deci tensorii de deformare menționați și densitatea curentă rămân invariabili la transformarea \mathbf{H} , de unde decurge afirmația.

Observația 9. În teorema de caracterizare a lui Noll asupra fluidelor intervine numai configurația actuală de referință, în raport cu care se determină tensorii lui Cauchy-Green la dreapta în descrierea relativă și densitatea. De aici decurge afirmația că *descrierea actuală este proprie fluidelor*. Familiar vorbind ele își uită trecutul, adică configurația inițială de referință. În cazul general al materialelor simple am remarcat (vezi Observația 4. din paragraful 2.2) prezența a două configurații de referință.

Vom prezenta câteva proprietăți ale corpurilor care sunt descrise matematic prin reprezentări constitutive de forma (86). Deducem astfel semnificația mecanică conținută în afirmațiile anterioare, care justifică atribuirea numelui de fluide acestor materiale.

Propoziția 4. Fie \mathcal{B} constituit dintr-un fluid în particula X și k o configurație nedistorsionată de fluid, fixată prin definiție.

Atunci orice configurație \bar{k} obținută din configurația k printr-o deformare λ care păstrează densitatea este material izomorfă cu k .

Demonstrație. $\lambda = \bar{k} \circ k^{-1}$ păstrează densitatea dacă și numai dacă $|\det \mathbf{P}| = 1$, cu $\mathbf{P} \equiv \nabla \lambda(k(X))$, ca o consecință a formulei (1.2)

($\rho_k = |\det \nabla \lambda(k(X))| \rho_{\bar{k}}$). Deci au loc formulele din (49)

$$\begin{aligned} \rho_k(\mathbf{X}) &= \rho_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) \quad \text{cu} \quad \mathbf{X} = k(X), \quad \bar{\mathbf{X}} = \bar{k}(X), \\ \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot); \mathbf{X}) &= \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t(\cdot)\mathbf{P}) = \mathcal{F}_{\bar{k}}(\mathbf{F}^t(\cdot); \bar{\mathbf{X}}). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Cel de-al doilea rând de egalități se obține ca o consecință a faptului că $\mathbf{P} \in g_k(\mathbf{X})$, conform definiției 8. a fluidelor și a formulei de legătură între operatorii constitutivi, la schimbarea configurației de referință (formula (45)).

Propoziția 5. Un fluid *menținut nedeformat* relativ la o configurație deformată, suportă o tensiune care corespunde unei presiuni hidrostatice (fluidul nu poate suporta tensiuni tangențiale).

Demonstrația rezultă din interpretarea condiției b) din proprietățile operatorului constitutiv din (87). Cum

$$\mathbf{C}_i^t(s) = \mathbf{I}^t(s) \equiv \mathbf{I}, \quad \forall s \geq 0 \quad \iff \quad \mathbf{F}_t(\tau) \equiv \mathbf{Q}_t(\tau) \in Ort, \quad (2.98)$$

cu $\tau = t - s \leq t$. Ultima relație din (98) se rescrie $\mathbf{F}(\tau) \equiv \mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{F}(t)$, de unde prin descompunerea polară a gradientului de deformație și utilizarea unicității descompunerii rezultă

$$\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{Q}_t(\tau)\mathbf{R}(t), \quad \tau \leq t. \quad (2.99)$$

Din (99) deducem că la orice moment de timp tensorul lungirilor este menținut constant, corpul fiind supus local la o rotație, deci nu are loc o deformație propriuzisă în raport cu o configurație fixată.

Evident dacă starea de tensiune este dată prin $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I}$ vectorul de tensiune exercitat pe un element de suprafață de normală $\mathbf{n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$, $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \equiv -p(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$ este pe direcția normalei, neexistând componente tangențiale.

Funcția scalară $p(\rho)$ se numește *presiune hidrostatică*.

2.6.2 Clasa fluidelor vâscoase

Definiția 12. Un corp \mathcal{B} este un *fluid de tip vâscos*, în particula X , dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{L}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, \mathbf{X}, t), \quad (2.100)$$

pentru o mișcare dată, unde

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) |_{\mathbf{x}=\chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}, \\ \mathbf{L}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0(\mathbf{X})}{|\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)|}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Teorema 14. Reprezentarea constitutivă a fluidelor de tip vâcos (100) satisface principiul obiectivității dacă și numai dacă este de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{h}(\mathbf{D}, \rho, \mathbf{X}), \quad (2.102)$$

cu proprietatea $\bar{h}(\mathbf{QDQ}^T, \rho, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{D}, \rho, \mathbf{X})\mathbf{Q}^T$. Aceste condiții sunt echivalente cu considerarea clasei fluidelor de tip Reiner - Rivlin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{D}^2, \quad (2.103)$$

pentru care setul de invarianți este definit prin

$$j_{\mathbf{D}} = \{\text{tr } \mathbf{D}, \text{tr } \mathbf{D}^2, \text{tr } \mathbf{D}^3\}. \quad (2.104)$$

Demonstrație. Presupunem că elementele perechii (χ, \mathbf{T}) — mișcarea și tensiunea Cauchy, sunt legate prin reprezentarea (100). Atunci din principiul obiectivității P3. (formula (8) din paragraful 2.2), rezultă restricția asupra funcției constitutive de forma

$$\begin{aligned} h(\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t^*), \rho^*(\mathbf{x}^*, t^*), \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t^*), \mathbf{x}^*, \mathbf{X}, t^*) = \\ = \mathbf{Q}(t)h(\mathbf{L}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, \mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t), \end{aligned} \quad (2.105)$$

pentru orice $\mathbf{Q}(\tau) \in \text{Ort}$, $\mathbf{x}_0^*(\tau) \in \mathcal{E}$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, elemente care caracterizează procesul dinamic (χ^*, \mathbf{T}^*) echivalent, conform cu (1.62), cu procesul (χ, \mathbf{T}) .

Relațiile de legătură între câmpurile corespunzătoare perechii de mișcări echivalente (χ, χ^*) sunt calculate conform definițiilor acestora din (101)

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \rho(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \dot{\mathbf{x}}_0^*(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \\ \mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*, t^*) &= \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t), \quad \forall \mathbf{Q}(t) \in \text{Ort}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Din (105) și (106) rezultă restricția

$$\begin{aligned} h(\mathbf{QLQ}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T, \rho, \dot{\mathbf{x}}_0^* + \mathbf{Q}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{x}_0^* + \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \mathbf{X}, t + a) = \\ = \mathbf{Q}h(\mathbf{L}, \rho, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Relația este scrisă în particula \mathbf{X} și la momentul t , fixate. Alegem următoarele valori particulare

$$t + a = 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_0^* = -\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}}_0^* = -\mathbf{v}, \quad (2.108)$$

care introduse în (107) conduc la

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{L}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}, \mathbf{X}, t) &= \\
&= h(\mathbf{L}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{X}, 0) \equiv \bar{h}(\mathbf{L}, \rho(\mathbf{x}, t), \mathbf{X}).
\end{aligned}
\tag{2.109}$$

In noua funcție, \bar{h} , restricția (105) impusă de principiul obiectivității devine

$$\bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T, \rho, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{L}, \rho, \mathbf{X})\mathbf{Q}^T, \tag{2.110}$$

pentru orice $\tau \rightarrow \mathbf{Q}(\tau) \in Ort$. Deoarece $\dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t) \in Asim$, pentru orice $t \in R$ alegem, pentru t fixat, valorile

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = -\mathbf{W}(\mathbf{x}, t) \equiv -\{\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)\}^a, \tag{2.111}$$

care introduse în (110), împreună cu reprezentarea $\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, ne conduc la demonstrarea faptului că

$$\bar{h}(\mathbf{L}, \rho, \mathbf{X}) \equiv \bar{h}(\mathbf{D}, \rho, \mathbf{X}), \tag{2.112}$$

cu proprietatea $\bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T, \rho, \mathbf{X}) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{D}, \rho, \mathbf{X})\mathbf{Q}^T$.

A doua relație din (112) provine din relația (110).

Am arătat deci că aplicația $\mathbf{D} \rightarrow \bar{h}(\mathbf{D}, \rho) \in Sim$ este izotropă. Aplicăm teorema lui Cauchy (vezi anexa A2), de reprezentare a funcțiilor izotrope cu valori tensori simetrici, de variabilă tensor simetric și rezultă reprezentarea (103).

Observația 10. Existența unui câmp ortogonal, $\tau \rightarrow \mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, cu proprietatea (111) pentru $\tau = t$, fixat rezultă din următoarea propoziție

Propoziția 6. 1) Fie $\mathbf{W} \in Asim$ atunci există $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, $\forall \tau \in R$ astfel încât $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{I}$, $\dot{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{W}$.

2) Câmpul ortogonal poate fi construit cu soluția problemei Cauchy

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I}, \tag{2.113}$$

unde $\mathbf{X}(t) \in Lin$, pentru orice $t \in R$.

Demonstrația se bazează pe existența soluției sistemului diferențial cu coeficienți constanți, reprezentată sub forma $\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(0) \exp(\mathbf{W}t)$. Pentru a demonstra că soluția definește un câmp ortogonal asociem problema Cauchy pentru $\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)$.

Observația 11. Clasa fluidelor Reiner - Rivlin descrie *fluide compresibile*, datorită prezenței *densității curente* sub formă de parametru. O subclasă remarcabilă a fluidelor Reiner - Rivlin o constituie *fluidele liniar vâscoase compresibile*.

Definiția 13. Un corp este constituit într-o particulă a sa dintr-un *fluid liniar vâscos, compresibil*, dacă admite o reprezentare constitutivă, în clasa fluidelor Reiner - Rivlin, determinată de funcția $\mathbf{D} \rightarrow \bar{h}(\mathbf{D}, \rho) \in Sim$ izotropă și afină.

Folosim anexa A2 pentru reprezentarea termenului liniar din ecuația constitutivă de mai sus. Rezultă reprezentarea constitutivă a **fluidele liniar vâscoase compresibile**, sau **fluidele Navier - Stokes compresibile**.

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (-p(\rho) + \lambda(\rho)\text{tr } \mathbf{D})\mathbf{I} + 2\mu(\rho)\mathbf{D}. \quad (2.114)$$

Observația 12. Dacă impunem *legătura de incompresibilitate* atunci în baza principiului determinismului modificat pentru materiale simple cu legături (vezi Teorema 5., formula (2.42)) rezultă următoarele reprezentări constitutive

Clasa fluidelor Reiner- Rivlin incompresibile

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \bar{\varphi}_0(j_{\mathbf{D}})\mathbf{I} + \bar{\varphi}_1(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D} + \bar{\varphi}_2(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D}^2, \quad (2.115)$$

pentru $\{\mathbf{D} \in Sim \mid \text{tr } \mathbf{D} = 0\}$.

Clasa **fluidelor liniar vâscoase incompresibile**, numite și **fluide newtoniene** sau **fluidele Navier - Stokes incompresibile**, este definită prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}, \quad (2.116)$$

pentru orice $\mathbf{D} \in Sim$, cu $\text{tr } \mathbf{D} = 0$.

Problema cu date la limită pentru fluide vâscoase liniare

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ domeniu mărginit, cu $n = 2$ sau $n = 3$. Formulăm problema spațială, deci pentru $n = 3$.

Să se determine câmpul *vitezelor* și câmpul *presiunii*

$$\mathbf{v} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathbf{R}^3 \quad (2.117)$$

$$\mathbf{p} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow R,$$

care verifică în Ω , pentru orice $t \in [0, t_1)$ ecuațiile de mișcare

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (2.118)$$

reprezentarea constitutivă pentru fluide liniar vâscoase incompresibile

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}(\mathbf{x}, t), \quad (2.119)$$

relațiile geometrice

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \nabla^T \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.120)$$

condiția de incompresibilitate

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.121)$$

condițiile pe frontiera domeniului ocupat de fluid ($\partial\Omega$)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) |_{\Gamma_1} = 0, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}(\mathbf{x}) |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, și condițiile inițiale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (2.122)$$

Dacă se elimină câmpul de tensiuni rezultă **ecuațiile Navier - Stokes** pentru fluide vâscoase incompresibile

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v}[\mathbf{v}] - \nu \Delta \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{b}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

unde $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho_0}$ este așa zisa *vâscozitate cinematică* a materialului. Aici Δ reprezintă operatorul Laplace.

Intr-un reper inerțial, reprezentarea în baza carteziană a ecuațiilor Navier - Stokes pentru *determinarea câmpului vitezelor și a câmpului presiunii* este obținută sub forma

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} - \nu \Delta v^i = -\frac{\partial p}{\partial x^i} + b^i$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0.$$

Precizarea cadrului funcțional este necesară în formularea problemelor cu date pe frontieră (și eventual cu date inițiale) ca și pentru demonstrarea teoremelor de unicitate și existență. Există o bogată literatură în care sunt studiate problemele matematice privind existența, unicitatea și regularitatea soluțiilor problemei prezentate, sau pentru diferitele liniarizări posibile ale modelului. De asemenea există rezultate în care domeniul Ω ocupat de fluid este nemărginit, sau de o formă variabilă, sau rezultate în care există condiții diferite de condiția de aderență, de exemplu există porțiuni care sunt permeabile (vezi spre exemplu Serrin [1955], Iacob [1959], Lions [1969], Temam [1979], Ladijenskaia [1970], Dragoș [1983]).

2.7. Corpuri solide

2.7.1 Corpuri solide și izotrope

Vom demonstra acum **teorema de caracterizare a corpurilor solide și izotrope** într-o particulă $X \in \mathcal{B}$.

Teorema 15. Dacă, k este o configurație nedistorsionată de corp solid și \bar{k} este o configurație nedistorsionată de corp izotrop atunci

$$g_k(\mathbf{X}) = g_{\bar{k}}(\bar{\mathbf{X}}) = Ort,$$

unde $\mathbf{X} = k(X)$, $\bar{\mathbf{X}} = \bar{k}(X)$.

Demonstrație. Din Definiția 7. a corpului solid (în particula X) rezultă că există $k \in \mathcal{C}$ astfel încât $g_k \subset Ort$. Corpul fiind în același timp și izotrop în particula considerată, există $\bar{k} \in \mathcal{C}$ astfel încât $g_{\bar{k}} \supset Ort$. Din teorema de maximalitate a Ort în Unim (vezi A3) obținem că

$$1) \quad g_{\bar{k}} = Ort \quad \text{sau} \quad 2) \quad g_{\bar{k}} = Unim.$$

Din Teorema 9. formula (55), aplicată pentru cele două configurații de referință k , \bar{k} obținem legătura dintre grupurile de simetrie

$$g_{\bar{k}} = \mathbf{P}_0 g_k \mathbf{P}_0^{-1} \quad \text{cu} \quad \mathbf{P}_0 = \nabla(\bar{k} \circ k^{-1})(\mathbf{X}). \quad (2.123)$$

Presupunem că are loc 2) $g_{\bar{k}} = Unim$. Din (123) $g_k = Unim$, ceea ce cotrazice ipoteza $g_k \subset Ort$. Rămâne posibil cazul

$$g_{\bar{k}} = Ort \quad \text{și} \quad g_k \subset Ort. \quad (2.124)$$

Folosim relațiile (123) și (124) din care rezultă

$$Ort \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0 g_k, \quad \text{cu} \quad g_k \subset Ort.$$

Deci pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in Ort$ (și reciproc) astfel încât

$$\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{Q} \quad \text{și} \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{R}_0 \in Ort, \mathbf{U}_0 \in Psim \quad \iff \quad (2.125)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_0 \mathbf{U}_0 = (\mathbf{R}_0 \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 \mathbf{Q}.$$

Mai sus am considerat descompunerea polară pentru $\mathbf{P}_0 \in Invlin$. Din (125), folosind unicitatea descompunerii polare, rezultă

$$\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{Q}, \quad \mathbf{U}_0 = \mathbf{Q}^T \mathbf{U}_0 \mathbf{Q}. \quad (2.126)$$

Prin urmare legătura dintre elementele $\bar{\mathbf{Q}} \in g_{\bar{k}} = Ort$ și $\mathbf{Q} \in g_k$ există sub forma relației (126)₁ sau într-o formă echivalentă

$$g_{\bar{k}} \equiv Ort = \mathbf{R}_0 g_k \mathbf{R}_0^T.$$

Astfel rezultă $g_k = Ort$, ceea ce trebuia demonstrat.

Observația 13. Din teorema demonstrată a rezultat că dacă corpul este solid și izotrop, într-o particulă fixată, atunci operatorul constitutiv este izotrop.

În propoziția care urmează se utilizează notațiile introduse în Teorema 15.

Propoziția 7. 1) Dacă k și \bar{k} sunt două configurații de corp solid și izotrop atunci $\mathbf{P}_0 = \alpha \mathbf{R}_0$, $\alpha \in R_+$.

Demonstrație. În teorema 15. am arătat că $g_k = g_{\bar{k}} = Ort$ iar din (126) rezultă că, $\mathbf{Q}\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_0\mathbf{Q}$ pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k = Ort$. Deci \mathbf{U}_0 permută cu orice transformare ortogonală. Deducem că $\mathbf{U}_0 = \alpha \mathbf{I}$, de unde rezultă afirmația din enunț.

Observația 14. S-a demonstrat că trecerea de la o configurație nedistorionată de corp solid și izotrop la o altă configurație de corp solid și izotrop se face printr-o deformație, care local reprezintă o dilatare (sau comprimare) compusă cu o rotație.

Configurațiile k și \bar{k} sunt material izomorfe (vezi Definiția 5.) dacă și numai dacă $\alpha = 1$.

2.7.2 Corpuri elastice

Vom prezenta acum ecuațiile constitutive care descriu comportamentul corpurilor constituite dintr-un material elastic, sau simplu al *corpurilor elastice*, privite ca o subclasă a materialelor simple. Pentru început ne plasăm în cazul deformațiilor finite.

Definiția 14. Numim *corp elastic*, corpul descris în particula X printr-o reprezentare constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = h_k(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}), \quad (2.127)$$

unde $h_k(\cdot, \mathbf{X}) : Invlin \rightarrow Sim$.

Observația 15. Corpul elastic este un material simplu, deoarece depinde de istoria gradientului de deformație, numai prin valoarea prezentă, obținută pentru $s = 0$ din istoria definită în (2).

În cazul corpului elastic operatorul constitutiv care descrie materialul simplu

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{F}_k^t(\mathbf{X}, \cdot); \mathbf{X}) \equiv h_k(\mathbf{F}_k(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}), \quad (2.128)$$

devine funcție de valoarea curentă a gradientului de deformație.²

Teorema 16. Forma redusă a ecuației constitutive pentru corpul elastic este

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)h(\mathbf{U}(t))\mathbf{R}^T(t), \quad (2.129)$$

²Nu vom mai specifica nici punctul material și nici configurația de referință, dacă nu este necesar

cu $\mathbf{R}(t) \in Ort$, $\mathbf{U}(t) \in Psim$, din descompunerea polară a gradientului de deformare $\mathbf{F}(t)$.

Demonstrația se obține prin particularizare din forma redusă I. (vezi formula (11)) sau direct din principiul obiectivității (formula (8)) .

Propoziția 8. Se consideră un corp elastic. Presupunem că g_k este într-unul din cazurile posibile

$$a) \quad g_k = Unim \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{|\det \mathbf{F}|}$$

$$b) \quad g_k = Ort \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{V}) \text{ cu } h(\mathbf{QVQ}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{V})\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad (2.130)$$

$$c) \quad g_k \subset Ort \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)h(\mathbf{U}(t))\mathbf{R}^T(t),$$

$$\text{cu } \mathbf{Q}h(\mathbf{U}(t))\mathbf{Q}^T = h(\mathbf{QU}(t)\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in g_k.$$

Demonstrație. b) Corpul elastic fiind izotrop conform Definiției 9., atunci din Teorema 10. rezultă că operatorul constitutiv este izotrop în argumentele sale, deci

$$h(\mathbf{QFQ}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort. \quad (2.131)$$

Folosim forma redusă (129) a reprezentării constitutive, împreună cu izotropia funcției h . Obținem

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}h(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = h(\mathbf{RUR}^T) = h(\mathbf{V}),$$

utilizând (1.46), ceea ce trebuia demonstrat.

a) Dacă este fluid (conform Definiției 8., formula (65)), așa cum am remarcat deja, corpul este izotrop (vezi Observația 13.) și avem reprezentarea de la punctul b). Ținem seama că $\mathbf{V} = (\mathbf{B})^{1/2}$ și deducem o reprezentare de forma $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{h}(\mathbf{B})$.

În teorema lui Noll de caracterizare a fluidelor am demonstrat că dependența de \mathbf{B} se transformă în dependența de ρ , sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{h}((\det \mathbf{B}(t))^{1/3}\mathbf{I}), \quad \det \mathbf{B}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^2.$$

Utilizând din nou proprietatea de izotropie a reprezentării constitutive scrise în relația anterioară , deducem că tensiunea este un tensor sferic. Deci avem reprezentarea constitutivă de forma menționată.

c) Se obține ca o consecință a Teoremei 10. , formula (68).

În cazul în care *corpul elastic este fluid*, caracterizat prin a) vom spune că avem un *fluid elastic*, evident *compresibil*. Această clasă constitutivă se mai numește *clasa fluidelor ideale*.

Propoziția 9. Corpurile *elastice și izotrope*, caracterizate prin (130) b), admit o reprezentare echivalentă, numită Mooney - Rivlin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \phi_0(j\mathbf{V})\mathbf{I} + \phi_1(j\mathbf{V})\mathbf{V} + \phi_2(j\mathbf{V})\mathbf{V}^2. \quad (2.132)$$

Aici $\mathbf{V} \in Psim$, reprezintă tensorul lungirilor la stânga din descompunerea polară pentru $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ (vezi formula (1.44)).

Demonstrația este evidentă dacă se utilizează teorema lui Cauchy de reprezentare a funcțiilor izotrope, de argument tensor simetric cu valori tensori simetrici, demonstrată în A2.

Teoria liniarizată a elasticității finite pentru corpuri izotrope se dezvoltă în cadrul constitutiv

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (a_0 + a_1 \text{tr } \mathbf{V})\mathbf{I} + a_2 \mathbf{V}, \quad (2.133)$$

cu a_i — constante de material . Dacă configurația de referință este o configurație *naturală*, atunci din Propoziția 3. (formula (67)) rezultă că pentru $\mathbf{V} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{1/2} = \mathbf{I}$ tensiunea este nulă. Avem deci legătura $a_0 + 3a_1 + a_2 = 0$ între constantele elastice, care determină reprezentarea

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = a_1[\text{tr } (\mathbf{V} - \mathbf{I})]\mathbf{I} + a_2(\mathbf{V} - \mathbf{I}), \quad (2.134)$$

cu două constante de material.

Definiția 15. In cazul *elasticității liniare, izotrope*, cu *deformații infinitezimale* reprezentarea constitutivă este de forma (ecuație constitutivă de tip Hooke cu tensiune inițială)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (\lambda_0 + \lambda \text{tr } \epsilon)\mathbf{I} + 2\mu\epsilon, \quad (2.135)$$

dacă există tensiuni inițiale în configurația de referință. Această reprezentare se obține prin procedeul de liniarizare din (133) sau (132), în ipoteza micilor deformații (vezi paragraful 1.6).

Definiția 16. In cazul în care configurația de referință este *naturală*, reprezentarea constitutivă pentru *elasticitatea liniară , izotropă*, cu *deformații infinitezimale* este dată prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \lambda \text{tr } \epsilon \mathbf{I} + 2\mu\epsilon, \quad (2.136)$$

unde $\epsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$. Aceasta corespunde alegerii $\lambda_0 = 0$ în reprezentarea (135).

In literatură, ecuația (136), este cunoscută sub numele de *ecuația constitutivă a lui Hooke* .

Pe baza acestei reprezentări constitutive se construiește teoria elasticității clasice, pentru corpuri izotrope, în cazul micilor deformații.

**Problema dinamică în elasticitatea liniară
(cazul deformațiilor infinitezimale)**

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ domeniu mărginit , cu $n = 2$ sau $n = 3$.

Să se determine câmpurile de *deplasări* și de *tensiuni*

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathbf{R}^3, \quad (2.137)$$

$$\mathbf{T} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6,$$

care verifică în Ω , și pentru orice $t \in [0, t_1)$ ecuațiile de mișcare

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad (2.138)$$

reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{E}[\epsilon(\mathbf{X}, t)],$$

unde $\mathcal{E} : Sim \longrightarrow Sim$ este liniară, relațiile geometrice

$$\epsilon(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)), \quad (2.139)$$

condițiile pe frontiera domeniului

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t), \quad (2.140)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t),$$

unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, sunt presupuse fixe (prin condițiile pe frontieră sunt prescriși pe porțiuni complementare ale frontierei *vectorul de deplasare și respectiv vectorul de tensiune*), condițiile inițiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega. \quad (2.141)$$

În cazul liniar și izotrop se înlocuiește reprezentarea constitutivă cu ecuațiile constitutive ale lui Hooke. Prin eliminarea tensiunilor rezultă *ecuațiile de mișcare ale lui Lamé*, formulate în deplasări.

Ecuațiile de mișcare ale lui Lammé : câmpul de deplasare \mathbf{u} satisface ecuația cu derivate parțiale

$$(\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) + \mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad (2.142)$$

în care prin Δ a fost notat operatorul laplaceian. Într-o bază carteziană ecuațiile (142) sunt date în forma echivalentă

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial X^j} + \mu \Delta u^j + \rho_0 b_j = \rho_0 \ddot{u}_j.$$

La aceste ecuații cu derivate parțiale se adaugă condițiile pe frontieră, în care vectorul de tensiune se exprimă, prin intermediul ecuației constitutive, prin câmpul de deplasare și respectiv condițiile inițiale.

Problema statică în elasticitatea liniară, cazul deformațiilor infinitezimale, corespunde cazului în care ecuațiile dinamice (138) sunt înlocuite cu ecuațiile de *echilibru*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) &= 0, \\ \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) &= \mathcal{E}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{X}, t)], \\ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{X}, t) &= \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)), \end{aligned} \tag{2.143}$$

unde $\mathcal{E} : Sim \rightarrow Sim$ este liniară, la care se adaugă condițiile pe frontiera $\partial\Omega$ a domeniului

$$\mathbf{u}(\mathbf{X})|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{T}(\mathbf{X})\mathbf{n}(\mathbf{x})|_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{X}).$$

În formulările prezentate se descrie comportamentul corpului în raport cu configurația de referință *naturală*, deci nu există tensiuni inițiale.

În Cap.6, corespunzător materialelor de tip "rate", vor interveni formulări de probleme *quasistatice*, care sunt descrise prin setul de ecuații (143), dar *cu date pe frontieră dependente de timp*, sub formă de parametru. Este posibil, în contextul considerat acolo să existe *tensiuni inițiale*, care vor interveni prin condițiile inițiale asociate.

Diferite probleme de deformare elastică a corpurilor în cazul *micilor deformații* sunt studiate, de exemplu în Truesdell, Toupin [1960], Solomon [1969], Nowacki [1970], Teodorescu [1972], Teodorescu, Ilie [1976, 1979, 1980], Dragoș [1983], Soós, Teodosiu [1983], etc. Pentru teoria elasticității cu *deformații* mici, dar și *finite* amintim lucrările lui Truesdell, Noll [1965], Wang, Truesdell [1972], Truesdell [1972]. Pentru studiul problemelor matematice ale teoriei clasice (dezvoltate în cadrul micilor deformații) trimitem cititorul la Mihlin [1957], Necăs, Hlaváček, [1981], în care sunt puse în discuție și aspectele mecanice corespunzătoare. În Duvaut, Lions [1972] sunt prezentate și probleme cu frecare, sau probleme de contact. Modalități de abordare ale problemelor matematice specifice teoriei neliniare a elasticității, dar în cadrul micilor deformații, pot fi găsite în Dincă [1972], Mazilu, Sburlan [1973].

2.7.3 Corpuri solide anizotrope

Ne plasăm în contextul Definiției 7. (formula (64)) a corpurilor solide și vom da următoarea definiție prin care se precizează specificitatea corpurilor anizotrope.

Definiția 17. Corpul \mathcal{B} este constituit dintr-un material *solid, anizotrop* în X , dacă există o configurație k astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \subset Ort \quad \text{și} \quad g_k(\mathbf{X}) \neq Ort, \quad (2.144)$$

Propoziția 10. În clasa materialelor simple grupul de simetrie al materialului este definit printr-un *sistem de generatori*, notat prin g^+ , inclus în *grupul rotațiilor proprii* $Ort^+ \equiv \{\mathbf{Q} \in Ort \mid \det \mathbf{Q} = 1\}$.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că $-\mathbf{I} \in g_k(\mathbf{X})$. Din principiul obiectivității pentru materiale simple (formula (8)), rezultă restricția

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{Q}^t \mathbf{F}^t) = \mathbf{Q}(t) \mathcal{F}_k(\mathbf{F}^t) \mathbf{Q}^T(t),$$

pentru orice \mathbf{Q}^t cu $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$ și $\tau \in R$. Prin particularizarea transformării ortogonale $\mathbf{Q}(\tau) = -\mathbf{I} \in Ort$ pentru orice $\tau \in R$, deducem că $-\mathbf{I} \in g_k(\mathbf{X})$.

Dăm exemple de *corpuri solide, anizotrope*, cu grupuri *finit dimensionale*, puse în evidență în *fizica cristalelor*. Există 32 clase de cristale solide, care însă pot fi reduse la 11, pe baza conceptului de simetrie materială.

Fie $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$ și fie $\varphi \in [0, 2\pi)$ un unghi. **Definim** transformarea ortogonală $\mathbf{R}_{\mathbf{a}}^\varphi$, care reprezintă o rotație de unghi φ în jurul vectorului \mathbf{a} , efectuată în planul ortogonal pe \mathbf{a} .

Considerăm o bază ortonormată fixată, de versori $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ și notăm prin $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ – versorul normalei octaedrice.

Clasele de cristale solide sunt caracterizate prin

Denumirea	Nr. curent	Generatori g^+	Nr. elemente în g
Sistem triclinic	1	\mathbf{I}	2
Sistem monoclinic	2	$\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^\pi$	4
Sistem rombic	3	$\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{j}}^\pi$	8
Sistem piramidal	4	$\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}$	8
	5	$\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}, \mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi/2}$	16
Sistem cubic	6	$\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{j}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{p}}^{2\pi/3}$	24
	7	$\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^{\pi/2}, \mathbf{R}_{\mathbf{j}}^{\pi/2}, \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/2}$	48
Sistem hexagonal	8	$\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{2\pi/3}$	6
	9	$\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{2\pi/3}$	12
	10	$\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/3}$	12
	11	$\mathbf{R}_{\mathbf{i}}^\pi, \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{\pi/3}$	24

Propoziția 11. Fie k o configurație *nedistorsionată* de corp *solid anizotrop* caracterizat prin $g_k \subset Ort, g_k \neq Ort$.

Mulțimea configurațiilor *nedistorsionate* de corp *solid anizotrop*, \bar{k} cu $g_{\bar{k}} = g_k$, este caracterizată prin deformațiile λ de la configurația k la configurația \bar{k} cu $\mathbf{P} = \nabla\lambda(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} = k(X)$, de forma

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{R}_0 \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{R}_0 \in \text{Ort}, \quad \mathbf{U}_0 \in \text{Psim} \quad \text{astfel încât,} \\ \mathbf{U}_0 \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}_0, \quad \forall \mathbf{Q}_0 \in g_k \quad \text{și} \quad \mathbf{R}_0 g_k \mathbf{R}_0^T = g_k. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Demonstrația urmează calea utilizată în Teorema 15., pentru solide izotrope (vezi paragraful 2.7.1).

Din Teorema 9. formula (55), aplicată pentru cele două configurații de referință k, \bar{k} obținem legătura dintre grupurile de simetrie

$$g_{\bar{k}} = \mathbf{P}_0 g_k \mathbf{P}_0^{-1}, \quad \text{cu} \quad \mathbf{P}_0 = \nabla(\bar{k} \circ k^{-1})(\mathbf{X}) \quad (2.146)$$

și $g_{\bar{k}} = g_k$ prin ipoteză.

Deci pentru orice $\mathbf{Q}_0 \in g_k$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in g_k$ astfel încât $\mathbf{P}_0 \mathbf{Q}_0 = \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{P}_0$, ceea ce este echivalent cu

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 \mathbf{Q}_0 &= \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{R}_0 \quad \text{și} \\ \mathbf{U}_0 \mathbf{Q}_0 &= \mathbf{Q}_0 \mathbf{U}_0, \end{aligned} \quad (2.147)$$

pentru orice $\mathbf{Q}_0 \in g_k$. Am considerat descompunerea polară pentru $\mathbf{P}_0 \in \text{Involin}$ și unicitatea acesteia pentru deducerea ultimelor relații. Din (147) deducem veridicitatea afirmațiilor din (145).

Observația 16. Deci tensorul lungirilor \mathbf{U}_0 este determinat din condiția de permutabilitate cu transformările din grupul de anizotropie menționat.

Observația 17. Configurațiile *nedistorsionate de corp solid și anizotrop* sunt *material izomorfe* dacă și numai dacă $\mathbf{U}_0 \in \text{Unim} \cap \text{Psim}$.

Teorema 17. Fie k o configurație nedistorsionată de corp solid anizotrop, care *nu este naturală*. Corpul *poate* suporta în configurația inițială numai *tensiunile inițiale* \mathbf{T}_0 , care au proprietatea că

$$\mathbf{T}_0 \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{T}_0, \quad (2.148)$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in g_k$.

Demonstrația se bazează pe conceptul de configurație naturală de referință introdus în paragraful 2.4. Dacă configurația de referință nu este *naturală* atunci (vezi Propoziția 3, formula (67))

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t(\cdot)) \equiv \mathbf{T}_0 \neq 0. \quad (2.149)$$

Folosim Definiția 6. (formula (54)) a grupului de simetrie materială , în care particularizăm istoria procesului de deformare, conform cu (149). Deducem

relațiile

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}'\mathbf{H}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t), \tag{2.150}$$

$$\mathcal{F}_k(\mathbf{I}'\mathbf{H}) = \mathcal{F}_k(\mathbf{H}\mathbf{I}^t) = \mathbf{H}\mathcal{F}_k(\mathbf{I}^t)\mathbf{H}^T,$$

pentru orice $\mathbf{H} \in g_k$, unde am ținut seama de faptul că $\mathbf{H} \in g_k \subset Ort$ și am aplicat principiul obiectivității (formula (8) din paragraful 2.2), pentru această transformare ortogonală, cu istoria $\mathbf{F}^t = \mathbf{I}^t$.

Introducem în (150) relația de definiție a tensiunilor inițiale din (149) și obținem afirmația teoremei.

Observația 18. Corpurile izotrope *nu pot suporta* în configurația inițială de referință *tensiuni tangențiale* deoarece grupul lor de simetrie, conform Definiției 9. (formula (66)) conține *Ort* și prin urmare din relația (149) cu (150), adevărată pentru orice $\mathbf{H} \in g_k \cap Ort$, rezultă că tensiunea inițială este un tensor sferic. În schimb corpurile solide anizotrope, dacă *nu au o configurație naturală* de referință, *pot suporta* în configurația de referință *tensiuni inițiale* de forfecare (evident dacă \mathbf{T}_0 nu se reduce la un tensor sferic).

Propoziția 12. Pentru clasele de cristale solide se obțin următoarele *restricții asupra tensiunilor inițiale*

Tipul de anizotropie	Forma \mathbf{T}_0
Sistem triclinic	nu există restricții
Sistem monoclinic	\mathbf{k} vector propriu
Sistem rombic	$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ vectori proprii
Sistem piramidal	$\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$
Sistem cubic	tensor sferic
Sistem hexagonal	$\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$

Există corpuri solide anizotrope care sunt caracterizate prin grupuri de simetrie materială, care nu au dimensiune finită. Vom prezenta câteva dintre acestea : corpuri cu *izotropie transversală*, corpuri *ortotrope*, etc. care pot fi reprezentate sub forma pusă în evidență în anexa A4., prin Definiția 8. (formula (?3)), pe care o scriem în cele ce urmează.

Definiția 8. din A4. Definim un subgrup $g \subset Ort$ caracterizat prin următoarele proprietăți

- a) *există* un subrup $\mathcal{G} \subset Ort$,
- b) *există* un set de vectori și tensori, notați (\mathbf{m}, \mathbf{M}) și

$$g = \{\mathbf{Q} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{Q}\mathbf{m} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}\}. \tag{2.151}$$

Să analizăm în cele ce urmează cele două exemple amintite mai sus.

Corpuri cu izotropie transversală

Sunt caracterizate prin existența unei direcții privilegiate de simetrie materială.

Definiția 18. Spunem că un material simplu este *cu izotropie transversală* sau are *izotropie transversală* (într-o particulă X) dacă există o configurație k de referință și o direcție $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$, $|\mathbf{n}| = 1$, astfel încât grupul său de simetrie este reprezentat prin una dintre următoarele clase

$$\begin{aligned}g_1 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort^+, \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n} \}, \\g_2 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n} \}, \\g_3 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Q} \in g_1, \quad \text{sau} \quad -\mathbf{Q} \in g_1 \}, \\g_4 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort^+, \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = -\mathbf{n} \}, \\g_5 &= \{ \mathbf{Q} \in Ort, \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = \mathbf{n}, \quad \text{sau} \quad \mathbf{Q}\mathbf{n} = -\mathbf{n} \}.\end{aligned}\tag{2.152}$$

Configurația k , de referință, este numită configurație *nedistorsionată de izotropie transversală*, iar \mathbf{n} este *direcția* care caracterizează izotropia transversală.

Observația 19. În definiția adoptată pentru principiul obiectivității, P3., în paragraful 2.1, au fost acceptate mișcările echivalente cu o mișcare dată care pot fi caracterizate prin rotații $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$ (deci prin rotații arbitrare). Prin urmare în conformitate cu această ipoteză, rezultă că grupurile posibile sunt de fapt trei : g_2, g_3, g_5 .

Evident că se poate formula principiul obiectivității (din rațiuni fizice) *numai pentru rotații proprii*.

Observația 20. Grupul "cel mai mic" g_1 conține rotațiile proprii în jurul lui \mathbf{n} , grupul g_5 conține toate celelalte grupuri, fiind aparent cel mai potrivit pentru descrierea izotropiei transversale pentru materiale cu fibre orientate sau cu structuri laminate. În literatură cel mai adesea se consideră izotropia transversală caracterizată prin g_2 .

Folosim următoarea **notație** (vezi anexa A4. Definiția 5.)

$$\mathbf{N} \in Asim, \quad \mathbf{n} = \langle \mathbf{N} \rangle, \tag{2.153}$$

unde $\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{n} \times \mathbf{u}$, pentru orice $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Folosim terminologia adoptată în A4. : $\mathbf{n} \in \mathcal{V}$ este *vectorul coaxial cu tensorul* $\mathbf{N} \in Asim$, sau tensorul $\mathbf{N} \in Asim$ este *asociat vectorului* \mathbf{n} .

Vom indica acum formulele prin care putem reprezenta grupurile de izotropie transversală, și care constituie cazuri particulare ale reprezentării date în (151).

Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{1,3\}}$ în care $\mathbf{n}_1 \equiv \mathbf{n}$.

Propoziția 13. Fie $N \in Asim$, $n = \langle N \rangle$.

$$1) \quad Q \in g_3 \iff Q \in Ort \text{ și } QNQ^T = N,$$

$$2) \quad N = n_2 \otimes n_3 - n_3 \otimes n_2.$$

Propoziția 14.

$$1) \quad Q \in g_4 \iff Q \in Ort^+ \text{ și } Q(n \otimes n)Q^T = n \otimes n,$$

$$2) \quad Q \in g_5 \iff Q \in Ort \text{ și } Q(n \otimes n)Q^T = n \otimes n.$$

Folosind reprezentările din propozițiile 13. și 14. prin aplicarea Teoremei 3. din anexa A4. obținem enunțul următoarei teoreme

Teorema 18. O funcție $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n$ cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la *grupurile de izotropie transversală* dacă și numai dacă poate fi reprezentată

$$a) \text{ pentru } g_1 \text{ prin } f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}) \quad \bar{f} \text{ hemitropă,}$$

$$b) \text{ pentru } g_2 \text{ prin } f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}) \quad \bar{f} \text{ izotropă,}$$

$$c) \text{ pentru } g_3 \text{ prin } f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{N}) \quad \bar{f} \text{ izotropă,} \quad (2.154)$$

$$d) \text{ pentru } g_4 \text{ prin } f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad \bar{f} \text{ hemitropă,}$$

$$e) \text{ pentru } g_5 \text{ prin } f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \quad \bar{f} \text{ izotropă.}$$

Corpuri ortotrope

Simetria materială este caracterizată prin existența a trei plane de simetrie ortogonale două câte două.

Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$. Planele de simetrie materială au normalele \mathbf{n}_i .

Definiția 19. Spunem că un material simplu este *ortotrop* (într-o particulă X) dacă există o configurație k de referință și trei direcții ortogonale $\mathbf{n}_i \in \mathcal{V}$, $|\mathbf{n}_i| = 1$, astfel încât grupul său de simetrie este reprezentat prin clasa

$$g_6 = \{Q \in Ort, \quad Q\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i \text{ sau } Q\mathbf{n}_i = -\mathbf{n}_i, \quad \in \{\overline{1,3}\}\}. \quad (2.155)$$

Propoziția 15. $Q \in g_6$ dacă și numai dacă

$$[Q]_{\mathbf{n}_i} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

sau într-o reprezentare echivalentă, dacă,

$$Q \in Ort \text{ și satisface } Q(\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i)Q^T = \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad \text{cu } i = 1, 2 \quad (2.156)$$

Folosind reprezentarea din Propoziția 15. prin aplicarea Teoremei 3. din anexa A4. obținem enunțul următoarei teoreme

Teorema 19. O funcție $f : \mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n$ cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la grupul de *ortotropie* dacă și numai dacă poate fi reprezentată prin

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2), \quad (2.157)$$

unde \bar{f} este izotropă .

Vom lista câteva tipuri de corpuri anizotrope în care grupurile de simetrie materială admit reprezentări de forma menționată în Definiția 8. din A4.

Introducem notațiile

$$g = (\mathcal{G}; \mathbf{m}, \mathbf{M})$$

pentru a evidenția specificitatea grupurilor de simetrie. Introducem baza ortonormată $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{1,3\}}$, $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}$ și fie $\mathbf{N}_i \in Asim$, $\mathbf{n}_i = \langle \mathbf{N}_i \rangle$. Atunci

$$\begin{aligned} a) \quad \text{Izotropie transversală} \quad g_1 &= (Ort^+; \mathbf{n}_1) \equiv (Ort; \mathbf{n}_1, \mathbf{N}_1), \\ g_2 &= (Ort; \mathbf{n}_1), \\ g_3 &= (Ort; \mathbf{N}_1), \\ g_4 &= (Ort^+; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1), \\ g_5 &= (Ort; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1), \\ b) \quad \text{Ortotropie} \quad g_6 &= (Ort; \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2). \end{aligned} \quad (2.158)$$

Vom exemplifica rezultatele din Teorema 3. A4. și respectiv Teorema 18. pentru corpul liniar elastic, cu deformații finite. Reprezentările care urmează au fost deduse și utilizate în contextul teoriei plasticității cu deformații în Cleja-Țigoiu [1997].

Teorema 20. Fie \mathcal{B} un corp liniar elastic, caracterizat prin relația constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)\mathcal{L}(\Delta)\mathbf{R}^T(t) \quad \text{cu} \quad , \quad \Delta = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.159)$$

în raport cu o configurație naturală de referință, unde $\mathcal{L} : Sym \rightarrow Sym$ este o aplicație liniară.

Corpul este cu izotropie transversă, caracterizată prin grupul de simetrie g_1 , dacă și numai dacă

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\Delta] = & \{[a_{11} - a_{12} - 4a_{44} + (a_{22} - a_{23})](\Delta \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)) + a_{12}tr\Delta\}(\mathbf{n}_1 \otimes \\
& \otimes \mathbf{n}_1) + [a_{23}tr\Delta + (a_{21} - a_{23})\Delta \cdot (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)][\mathbf{I} - (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)] + \\
& + [2a_{44} - a_{22} + a_{23}][(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)\Delta + \Delta(\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1)] + (a_{22} - a_{23})\Delta - \\
& - 2a_{45}(\mathbf{N}_1\Delta\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1) + (\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{N}_1\Delta\mathbf{n}_1) + a_{46}(\mathbf{N}_1\Delta\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_1^2\Delta\mathbf{N}_1)
\end{aligned} \tag{2.160}$$

în care a_{ij} sunt constante de material.

Demonstrație. Vom aplica, în primul rând, Propoziția 8. c) pentru funcția $h(\mathbf{U}) = \mathcal{L}[\Delta]$, cu $\Delta = 1/2(\mathbf{C} - \mathbf{I})$. Prin urmare deducem că funcția $\mathcal{L} : Sym \rightarrow Sym$ este *invariantă* relativ la g_1 .

Folosim cea de-a doua caracterizare a grupului de simetrie g_1 , dată în (158). Prin aplicarea Teoremei 3. din A4. deducem că $\mathcal{L}[\Delta]$ este invarianta relativ la g_1 dacă și numai dacă poate fi reprezentată sub forma

$$\mathcal{L}[\Delta] = \bar{\mathcal{L}}[\Delta, \mathbf{n}_1, \mathbf{N}_1] \tag{2.161}$$

cu funcția $\bar{\mathcal{L}}$ izotropă în raport cu argumentele sale, ansamblu format dintr-un tensor simetric, un versor și un tensor antisimetric. Vom utiliza teoremele de reprezentare ale lui Wang [1970], ținând seama că aplicația $\bar{\mathcal{L}}$ este liniară în raport cu tensorul simetric. Se obține formula din enunț. Reprezentarea conține un set complet și ireductibil de generatori.

Propoziția 16. Fie un corp linear elastic, cu izotropie transversă, caracterizat prin grupul g_1 , supus la deformații finite.

Intr-o bază carteziană $\{\mathbf{n}_i\}_{i \in \{1,3\}}$, în care \mathbf{n}_1 — este direcția de anizotropie, rezultă următoarea reprezentare pe componente

$$\begin{aligned}
\pi_{11} &= a_{11}\Delta_{11} + a_{12}(\Delta_{22} + \Delta_{33}) \\
\pi_{22} &= a_{21}\Delta_{11} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{33} + 2a_{46}\Delta_{23} \\
\pi_{33} &= a_{21}\Delta_{11} + a_{23}\Delta_{22} + a_{22}\Delta_{33} - 2a_{46}\Delta_{23} \\
\pi_{12} &= 2(a_{44}\Delta_{12} + a_{45}\Delta_{13}); \quad \pi_{13} = -2a_{45}\Delta_{12} + 2a_{44}\Delta_{13} \\
\pi_{23} &= a_{46}(-\Delta_{22} + \Delta_{33}) + (a_{22} - a_{23})\Delta_{23}
\end{aligned} \tag{2.162}$$

pentru $\bar{\mathcal{L}}(\Delta)$. Aici am notat cu π_{ij} componentele tensorului simetric $\bar{\mathcal{L}}(\Delta)$.

Propoziția 17. Corpul linear elastic, cu deformații finite este transversal izotrop, caracterizat prin grupul de simetrie g_4 , dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma precizată în Teorema 20. cu $a_{46} = a_{45} = 0$.

Demonstrația se obține ca o consecință a Teoremei 18., de exemplu. Astfel \mathcal{L} este invariantă relativ la g_4 dacă și numai dacă se poate reprezenta prin

$$\mathcal{L}[\Delta] = \bar{\mathcal{L}}[\Delta, \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1] \tag{2.163}$$

cu funcția $\bar{\mathcal{L}}$, cu valori tensori simetrici, hemitropă în raport cu un set de doi tensori simetrici. Rezultă că este izotropă. Se aplică din nou rezultatele lui Wang, din care rezultă reprezentarea.

2.8 Exerciții și probleme

1. Arătați că un material simplu definit prin relația constitutivă (7) satisface principiul acțiunii locale. P2.

2. Demonstrați Teorema 5., formula (42), folosind legătura de incompresibilitate scrisă sub forma $\lambda(\mathbf{C}) \equiv \det \mathbf{C} - 1 = 0$.

3. Să se explicitizeze demonstrația Teoremei 6, formula (43).

4. Demonstrați că printr-o transformare *ortogonală*, deci printr-o deformație λ , cu $\nabla \lambda(\mathbf{X}) \in Ort$, o configurație naturală se transformă într-o configurație naturală.

5. Arătați că următoarele reprezentări constitutive

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}h_1(\mathbf{U})\mathbf{F}^T, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R}h_2(\mathbf{C})\mathbf{R}^T, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}h_3(\mathbf{C})\mathbf{F}^T, \end{aligned}$$

sunt echivalente, satisfac principiul obiectivității și descriu un corp elastic.

6. Arătați că reprezentarea constitutivă pentru *fluidele de tip Reiner - Rivlin*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(j_D, \rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_D, \rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_D, \rho)\mathbf{D}^2,$$

în care setul de invarianți este definit prin $j_D = \{\text{tr} \mathbf{D}, \text{tr} \mathbf{D}^2, \text{tr} \mathbf{D}^3\}$, satisface principiul obiectivității.

7. Arătați că fluidele de tip Reiner - Rivlin reprezintă un caz particular de fluide în sensul lui Noll.

8. Fie o reprezentare constitutivă a unui corp scrisă în forma redusă I. Determinați restricțiile impuse reprezentării constitutive pentru a descrie un corp izotrop.

9. Demonstrați (vezi indicațiile din Propoziția 6.) că soluția problemei Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{W}\mathbf{X}(t), \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

pentru $\mathbf{W} \in Asim$, unde $\mathbf{X}(t) \in Lin$, pentru orice $t \in R$ definește un câmp ortogonal, de clasă $C^1(R)$.

10. Fie doi vectori dați \mathbf{u}, \mathbf{v} . Arătați că există $\tau \in R \rightarrow \mathbf{x}_0^*(\tau)$, de clasă $C^1(R)$ astfel încât $\mathbf{x}_0^*(t) = \mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{x}}_0^*(t) = \mathbf{v}$.

11. Să se determine reprezentarea constitutivă pentru un corp elastic, izotrop și incompresibil.

12. Să se scrie o reprezentare constitutivă pentru un corp elastic

a) în raport cu o configurație naturală de referință și respectiv,

b) în raport cu o configurație de referință în care corpul poate suporta tensiuni tangențiale.

13. Pentru clasele de cristale solide definite în paragraful 2.7.3 determinați elementele grupurilor de simetrie materială.

14. Să se determine mulțimea configurațiilor nedistorsionate de corp solid anizotrop pentru fiecare clasă de cristale solide, ca o consecință a Propoziției 11.

15. Folosind rezultatul din Ex. 14., analizați mulțimea configurațiilor nedistorsionate și material izomorfe de corp solid anizotrop, pentru fiecare clasă de cristale solide.

16. Demonstrați că reprezentarea constitutivă din Teorema 20. caracterizează un corp elastic anizotrop, cu grupul de simetrie g_1 – de izotropie transversală.

17. Să se deducă forma redusă pentru o ecuație constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{K}(\mathbf{F}, X)[\dot{\mathbf{F}}]$$

pentru orice $\mathbf{F} \in \text{Invl}_n$, unde $\mathbf{K}(\mathbf{F}, X) : \text{Lin} \rightarrow \text{Sim}$ este o aplicație liniară.

3. MATERIALE DE TIP RIVLIN - ERICKSEN

3.1 Reprezentări constitutive pentru materiale de tip Rivlin - Ericksen

Reprezentări constitutive pentru aceste tipuri de materiale pot fi găsite în Rivlin, Ericksen [1955]. Prezentarea din primele trei paragrafe ale capitolului urmărește expunerile din Coleman, Noll [1961], Truesdell, Noll [1965], Truesdell [1972].

Definiția 1. Un corp \mathcal{B} este constituit dintr-un material de tip diferențial de ordinul n , în particula \mathbf{X} , dacă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t), \dots, \mathbf{F}^{(n)}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}). \quad (3.1)$$

Observația 1. Aceasta este o reprezentare constitutivă pentru un material simplu deoarece starea de tensiune în particula \mathbf{X} la momentul t , corespunzător mișcării χ , depinde de $\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)$ (istoria gradientului de deformație în particula \mathbf{X}) prin $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ (valoarea curentă a gradientului de deformație) și prin derivatele parțiale, în raport cu timpul până la ordinul n , ale acestuia (ceea ce necesită cunoașterea valorilor lui \mathbf{F} într-o vecinătate, suficient de mică a momentului de timp).

Am întâlnit deja, în capitolul dedicat reprezentărilor constitutive **cazurile particulare $n = 0$**

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \quad (3.2)$$

(*materialul elastic* prezentat în 2.7.2) și respectiv **cazul $n = 1$**

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{L}(\mathbf{x}, t); \mathbf{X}), \quad (3.3)$$

(*clasa fluidelor vâscoase*, prezentate în 2.6.2) de asemenea materiale. Echivalența din relația (3) se stabilește prin intermediul formulei $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t)\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

Cazurile particulare $n = 2$, $n = 3$, vor avea un rol esențial în cazul mișcărilor cu istoria alușurilor relative constantă și, respectiv al mișcărilor vâscometrice, care vor fi considerate în capitolul următor.

Definiția 2. Pentru $\mathbf{A} \in \text{Lin}$ se definește *tensorul rotit cu rotația de la momentul t* , prin formula

$$\mathbf{A}^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad \text{unde } \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{X}, t), \quad (3.4)$$

unde \mathbf{R} reprezintă tensorul rotațiilor la momentul t .

Teorema 1. Un material de tip diferențial¹ *satisface principiul obiectivității* dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \bar{f}(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{C}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t), \quad (3.5)$$

unde $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t)$ reprezintă tensorii lui Rivlin - Ericksen de ordinul k , având definiția

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{C}_t(\tau) \Big|_{\tau=t}, \quad (3.6)$$

dată deja în 1.4.

Demonstrație Considerăm mișcarea relativă, în raport cu momentul de referință t , fixat. Din formulele (1.54)

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}(\tau) \mathbf{F}^{-1}(t), \quad \forall \tau \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{F}_t(\tau) \Big|_{\tau=t} = \mathbf{I}. \quad (3.7)$$

Prin derivare în raport cu τ din (7) obținem

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}^{(k)}(\tau) \mathbf{F}(t)^{-1}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{F}_t(\tau) \Big|_{\tau=t} = \mathbf{F}^{(k)}(t) \mathbf{F}(t)^{-1} \implies \mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{F}_t(\tau) \Big|_{\tau=t} \mathbf{F}(t).$$

Dacă se introduc ultimele relații din (8) în formula (1) obținem o nouă formă pentru reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\left\{ \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{F}_t(\tau) \Big|_{\tau=t} \right\}_{1 \leq k \leq n}, \mathbf{F}(t)). \quad (3.9)$$

A rezultat o reprezentare constitutivă în care apare *istoria gradientului în mișcarea relativă*, prin valoarea derivatelor până la ordinul n inclusiv, calculate în $\tau = t$, și valoarea gradientului de deformație la momentul t , sub formă de parametru.

Deci avem un caz particular de reprezentare constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}_t^t(\cdot), \mathbf{F}(t)) \equiv \mathbf{R}(t) \mathcal{F}((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)) \mathbf{R}^T(t), \quad (3.10)$$

ultima egalitate, având loc ca o restricție impusă de principiului obiectivității, fiind forma redusă II, (2.16), din paragraful 2.2.

În cazul considerat aici nu apare întreaga istorie a gradientului de deformație în mișcarea relativă, ci numai valorile ei *într-o vecinătate a momentului actual*, deci $\mathbf{F}_t^t(s)$, $\forall s \in [0, \delta)$, cu $\delta > 0$. Prin urmare din restricția de obiectivitate

¹In cele ce urmează nu vom mai menționa particula materială \mathbf{X} și respectiv poziția acesteia în configurația de la momentul t , $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$, în scopul simplificării scrierii. Bineînțeles că această omisiune va fi făcută numai dacă nu se produc confuzii.

rezultă că vom avea dependența operatorului constitutiv de *istoria tensorului lui Cauchy- Green*, în descriere relativă, istorie considerată cu valorile ei într-o vecinătate a momentului actual. Astfel

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R}(t) f\left(\left(\frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \mathbf{C}_t(\tau) \Big|_{\tau=t}\right)^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)\right) \mathbf{R}^T(t), \\ &= \mathbf{R}(t) f(\{\mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t)\}_{1 \leq k \leq n}, \mathbf{C}(t)) \mathbf{R}^T(t). \end{aligned}$$

Demonstrăm acum **reciproca**. Considerăm reprezentarea constitutivă de forma (5) și definim o funcție f de argumentele menționate astfel încât

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mathbf{F}(t), \dot{\mathbf{F}}(t), \dots, \mathbf{F}^{(n)}(t)) = \\ \mathbf{R}(t) f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{R}^T(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Arătăm, mai întâi, că funcția este corect definită. Din definiția tensorilor Rivlin - Ericksen (6), împreună cu definiția tensorilor Cauchy - Green, la dreapta în descriere relativă, formula (1.49), găsim

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=0}^{p=k} C_k^p \frac{\partial^p}{\partial \tau^p} \mathbf{F}_t^T(\tau) \Big|_{\tau=t} \frac{\partial^{k-p}}{\partial \tau^{k-p}} \mathbf{F}_t(\tau) \Big|_{\tau=t}.$$

Pe de altă parte din (8) calculăm derivata de ordinul m , $1 \leq m \leq k$ în raport cu τ pentru $\mathbf{F}_t(\tau)$, la momentul $\tau = t$. Rezultă că tensorii Rivlin - Ericksen de ordinul k , $1 \leq k \leq n$ se reprezintă în forma

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(t)^{-T} \left(\sum_{p=0}^{p=k} C_k^p (\mathbf{F}^{(p)}(t))^T \mathbf{F}^{(k-p)}(t) \right) \mathbf{F}(t)^{-1}. \quad (3.12)$$

Dacă folosim formula (12) și ținem seama că

$$\mathbf{C}(t) = \mathbf{F}^T(t) \mathbf{F}(t), \quad \mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t) \mathbf{U}(t), \quad (3.13)$$

unde $\mathbf{R}(t) \in Ort$ reprezintă tensorul de rotația din teorema de descompunere polară, formula (1.44), va rezulta că funcția din membrul drept al relației (11) depinde de $\mathbf{F}(t)$ și de derivatele sale materiale la momentul t . Deci argumentele funcției f , introdusă în (11) sunt corecte.

Rămâne acum să demonstrăm că reprezentarea constitutivă de forma (1), în care membrul drept este definit prin (11) satisface principiul obiectivității, vezi Teorema 1. din 2.2., ceea ce este echivalent cu demonstrarea faptului că o reprezentare constitutivă de forma (5) îl satisface.

Fie pentru aceasta, χ^* echivalentă cu χ . Atunci din teorema de descompunere polară a lui $\mathbf{F}^*(\mathbf{X}, \tau^*) = \mathbf{Q}(\tau) \mathbf{F}(\mathbf{X}, \tau)$, $\forall \tau \in R$ și din obiectivitatea tensorilor Rivlin - Ericksen (demonstrată în Propoziția 14. din paragraful 1.5) avem

$$\mathbf{R}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{R}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{C}^*(\mathbf{X}, t^*) = \mathbf{C}(\mathbf{X}, t),$$

$$(\mathbf{A}_k^*(\mathbf{x}^*, t^*))^{\mathbf{R}^*} = \mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Prin urmare a rezultat că

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(\mathbf{X}, t^*)f((\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}^*}(\mathbf{x}^*, t^*), \dots, (\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}^*}(\mathbf{x}^*, t^*), \mathbf{C}^*(\mathbf{X}, t^*)))\mathbf{R}^{*T}(\mathbf{X}, t^*) = \\ = \mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(\mathbf{X}, t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{C}(\mathbf{X}, t))\mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{Q}^T(t), \end{aligned}$$

Din cele de mai sus rezultă că principiul obiectivității este satisfăcut de reprezentarea (6).

Vom trece acum la caracterizarea constitutivă a materialelor de tip diferențial de ordinul n , care au proprietatea că sunt *izotrope*.

Teorema 2. Un material de tip diferențial *este izotrop* dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{X}, t)), \quad (3.14)$$

cu funcția f *izotropă* în argumentele sale, deci pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ și oricare ar fi valorile argumentelor sale are loc egalitatea

$$\mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, \mathbf{B})\mathbf{Q}^T = f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_n\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T). \quad (3.15)$$

Demonstrație. Notăm

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv \mathbf{R}(t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t). \quad (3.16)$$

Din Definiția 9. (paragraful 2.4) a corpului constituit dintr-un material izotrop, într-o particulă \mathbf{X} fixată a sa, rezultă că grupul său de simetrie în raport cu configurația k este astfel încât

$$g_k(\mathbf{X}) \supseteq Ort \iff \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{Q}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \quad (3.17)$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ și pentru orice istorie de deformație.

Considerăm o istorie \mathbf{F}^t dată și pentru un $\mathbf{Q} \in Ort$ construim istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t = \mathbf{F}^t\mathbf{Q}$. Atunci din (17) cu (16) avem

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t) \equiv \tilde{\mathbf{R}}(t)f(\tilde{\mathbf{A}}_1^{\tilde{\mathbf{R}}}(t), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n^{\tilde{\mathbf{R}}}(t), \tilde{\mathbf{C}}(t))\tilde{\mathbf{R}}^T(t), \quad (3.18)$$

unde mărimile cu " \sim " sunt asociate istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$. Din (7), din definiția tensorilor Cauchy - Green la dreapta, (13)₁ și (5) rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t), \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad (3.19)$$

Pe de altă parte deoarece \mathbf{Q} este în Ort , din teorema de descompunere polară, conform formulei (13)₂ aplicată pentru $\tilde{\mathbf{F}}(t)$ și $\mathbf{F}(t)$, rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}(t) = \tilde{\mathbf{R}}(t)\tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{Q} = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\mathbf{Q}.$$

Din relația anterioară, în baza unicității descompunerii polare, obținem

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{Q}, \quad \tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{U}(t)\mathbf{Q}. \quad (3.20)$$

În final din (19) și (20) deducem și următoarele egalități

$$\tilde{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_k^{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_k^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}. \quad (3.21)$$

Introducem setul de formule (20) și (21) în (18), în care utilizăm de asemenea și (16). Obținem astfel pentru $\forall \mathbf{Q}^T \in Ort$ egalitatea

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}(t))\mathbf{Q} = \\ = f(\mathbf{Q}^T\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}, \dots, \mathbf{Q}^T\mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t)\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T\mathbf{C}(t)\mathbf{Q}). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Renotând \mathbf{Q}^T prin \mathbf{Q} obținem formula (15), deci funcția f este *izotropă* în argumentele sale ($n + 1$ tensori simetrici).

Ținem seama de proprietatea de izotropie a funcției constitutive din (5) și de Definiția 2. a tensorilor roțiți, cu care rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R}(t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(t), \dots, \mathbf{A}_n^{\mathbf{R}}(t), \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t) = \\ &= f(\mathbf{A}_1(t), \dots, \mathbf{A}_n(t), \mathbf{B}(t)), \end{aligned}$$

unde $\mathbf{B}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^T(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^T(t)$.

În concluzie a rezultat reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1(t), \dots, \mathbf{A}_n(t), \mathbf{B}(t)). \quad (3.23)$$

Prin acest rezultat avem o caracterizare constitutivă a corpurilor solide izotrope.

Definiția 3. Spunem că un corp \mathcal{B} este constituit dintr-un *solid izotrop Rivlin - Ericksen de ordinul n* , în particula \mathbf{X} , dacă admite o reprezentare constitutivă de forma (14) cu proprietatea de *izotropie* (15).

Observația 1. Corpurile *solide izotrope* constituite dintr-un material de tip Rivlin - Ericksen de ordinul $n = 0$ admit o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{B}(\mathbf{X}, t)), \quad \mathbf{Q}f(\mathbf{B})\mathbf{Q}^T = f(\mathbf{QBQ}^T),$$

dedusă din (14) cu (15). Aplicând teorema de reprezentare pentru funcții izotrope deducem că aceste materiale sunt echivalente cu clasa materialelor Mooney - Rivlin, prezentate în paragraful 2.7.2.

3.2 Reprezentări constitutive pentru fluide Rivlin - Ericksen

Vom ține seama de Definiția 8. fluidelor în sensul materialelor simple, dată în paragraful 2.4. Pentru obținerea reprezentării constitutive a fluidelor Rivlin - Ericksen pornim cu reprezentarea constitutivă (5) care are proprietatea că principiul obiectivității este satisfăcut.

Teorema 3. Un material de tip diferențial de ordinul n este un *fluid* în \mathbf{X} dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{f}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t)), \quad (3.24)$$

cu următoarea proprietate satisfăcută pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t)\mathbf{Q}^T, \rho(\mathbf{x}, t)) = \\ = \mathbf{Q}\hat{f}(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t), \dots, \mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t))\mathbf{Q}^T, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\hat{f}(0, \dots, 0, \rho) = -p(\rho)\mathbf{I}.$$

Demonstrație. Din definiția fluidului în sensul lui Noll rezultă că $g_k(\mathbf{X}) = Unim$. Deoarece $Ort \subset Unim$ rezultă că corpul este izotrop. Folosim rezultatul din Teorema 2. și deci vom porni în caracterizarea constitutivă cu reprezentarea (14), având proprietatea (15). Deci considerăm caracterizarea materialului simplu prin

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv f(\mathbf{A}_1(t), \dots, \mathbf{A}_n(t), \mathbf{B}(t)). \quad (3.26)$$

Mai rămâne să demonstrăm că dependența de $\mathbf{B}(t)$ se transformă în dependență de ρ , ca o consecință a faptului că grupul de simetrie este *Unim*. Pentru a obține reprezentarea scrisă în (26) am folosit proprietatea de definiție a transformărilor de simetrie materială numai pe *Ort*.

Din definiția grupului de simetrie, prezentată în paragraful 2.4, rezultă că

$$g_k(\mathbf{X}) = Unim \iff \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \quad (3.27)$$

pentru orice $\mathbf{H} \in Unim$ și pentru orice istorie de deformație.

Considerăm o istorie \mathbf{F}^t dată și pentru un $\mathbf{H} \in Unim$ construim istoria $\tilde{\mathbf{F}}^t = \mathbf{F}^t\mathbf{H}$. Atunci din (27) cu (26) avem

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t) = \mathcal{F}(\tilde{\mathbf{F}}^t) \equiv f(\tilde{\mathbf{A}}_1(t), \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n(t), \tilde{\mathbf{B}}(t)), \quad (3.28)$$

unde mărimile cu " ~ " sunt asociate istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$.

Din (7), din definiția tensorilor Cauchy - Green la dreapta, $(13)_1$ și din (6) rezultă

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t), \quad \forall \mathbf{H} \in Unim. \quad (3.29)$$

Pe de altă parte din $\tilde{\mathbf{F}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}$ rezultă

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{H}\mathbf{H}^T\mathbf{F}^T(t). \quad (3.30)$$

Alegem transformarea $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{F}^{-1}(t)$, cu $\alpha \in R$ astfel încât $\mathbf{H} \in Unim$. Deci $\alpha^3 = |\det \mathbf{F}(t)|$ sau $\alpha^3 = \frac{\rho_0}{\rho}$. Cu această valoare avem $\mathbf{H} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3}\mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim$

Din (30) se obține

$$\tilde{\mathbf{B}}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}. \quad (3.31)$$

Folosim din nou proprietatea (28) a transformării de simetrie materială (de a lăsa neschimbat răspunsul materialului), utilizând reprezentarea (26) și găsim

$$f(\tilde{\mathbf{A}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n, \tilde{\mathbf{B}}(t)) = f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3}\mathbf{I}) \equiv \hat{f}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n, \rho). \quad (3.32)$$

Prin urmare a rezultat că are loc reprezentarea constitutivă sub forma (24). Proprietatea de izotropie (25) se transformă în proprietatea de izotropie a funcției din (32), deci are loc proprietatea (25)₁.

Să arătăm că proprietatea (25)₂ este o consecință a relației (25)₁. Fie $\mathbf{A}_k(t) = 0$, pentru orice $k \leq n$. Din (25)₁ obținem că

$$\hat{f}(0, \dots, 0, \rho) = \mathbf{Q}\hat{f}(0, \dots, 0, \rho)\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort.$$

Prin urmare avem un tensor simetric care permută cu orice transformare ortogonală, ceea ce are loc numai pentru tensori sferici. Deci are loc proprietatea (25)₂.

Demonstrația reciprocei. Introducem notația operatorială, specifică materialelor simple, de tipul relației din (26), pentru reprezentarea constitutivă (24)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t) \equiv \hat{f}(\mathbf{A}_1(t), \dots, \mathbf{A}_n(t), \rho). \quad (3.33)$$

Vrem să arătăm că

$$\forall \mathbf{H} \in Unim \implies \mathcal{F}(\mathbf{F}^t\mathbf{H}) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t), \quad (3.34)$$

pentru orice istorie de deformație, ceea ce este echivalent cu demonstrarea faptului că reprezentarea constitutivă descrie un fluid. Din calculele anterioare, formulele (29), avem egalitățile

$$\tilde{\mathbf{F}}_t(\tau) = \mathbf{F}_t(\tau)\mathbf{H} \implies \tilde{\mathbf{A}}_k(t) = \mathbf{A}_k(t), \quad \tilde{\rho} = \rho,$$

care ne conduc la egalitatea din (34), pentru reprezentarea introdusă în (33).

Semnificația mecanică este conținută în

Propoziția 1. Dacă menținem fluidul nedeformat relativ la o configurație a sa deformată² atunci starea de tensiune corespunde unei presiuni hidrostatice.

Demonstrație. Dacă $\mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{I} \quad \forall \tau \in R$, atunci $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}t) = 0 \quad \forall k \geq 0$. Din (24) rezultă că

$$\mathbf{Q}\hat{f}(0, \dots, 0, \rho)\mathbf{Q}^T = \hat{f}(0, \dots, 0, \rho), \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort.$$

Notăm $\hat{f}(0, \dots, 0, \rho) \equiv \mathbf{T}_0 \in Sim$. Atunci $\mathbf{Q}\mathbf{T}_0\mathbf{Q}^T = \mathbf{T}_0 \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort$. De aici rezultă că $\mathbf{T}_0 = -p(\rho)\mathbf{I}$. Deci starea de tensiune se reduce la o presiune hidrostatică.

Fluidele diferențiale de ordinul n , caracterizate prin reprezentarea constitutivă din Teorema 3., se numesc *fluide Rivlin - Ericksen* de ordinul n .

3.3 Materiale diferențiale de ordinul 2

Ecuatia constitutivă pentru fluide de ordinul 2 se obține din Teorema 3., pentru $n = 2$. Astfel reprezentarea constitutivă a fluidelor Rivlin - Ericksen de ordinul 2 este caracterizată de funcția

$$f : Sim \times Sim \longrightarrow Sim \quad \text{cu proprietatea,}$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \rho) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho)\mathbf{Q}^T,$$

pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$ și pentru $\forall \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in Sim$.

Wang [1970] a demonstrat diferite teoreme de reprezentare pentru funcții cu valori scalare, vectoriale, respectiv tensoriale izotrope în argumentele lor. Utilizăm reprezentarea funcțiilor cu valori simetrice de două argumente tensori simetrici și obținem următoarea caracterizare

Teorema 4. O reprezentare constitutivă de forma (24) cu (25)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \rho),$$

caracterizează un *fluid Rivlin - Ericksen de ordinul 2*, dacă și numai dacă $\exists p, \{\alpha_j\}_{1 \leq j \leq 8}$ funcții cu valori reale, dependente de ρ și de următorii invarianți

$$j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\text{tr } \mathbf{A}_1, \text{tr } \mathbf{A}_1^2, \text{tr } \mathbf{A}_1^3), \quad j_{\mathbf{A}_2} \equiv (\text{tr } \mathbf{A}_2, \text{tr } \mathbf{A}_2^2, \text{tr } \mathbf{A}_2^3),$$

$$\text{tr } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2,$$
(3.35)

astfel încât

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_2\mathbf{A}_2 + \alpha_3\mathbf{A}_1^2 + \alpha_4\mathbf{A}_2^2 + \alpha_5(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1) +$$

$$+ \alpha_6(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2) + \alpha_7(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1) + \alpha_8(\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2).$$
(3.36)

²A se vedea Propoziția 5. din 2.6.1.

Teorema 5. O reprezentare constitutivă de forma (24) cu (25)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}),$$

caracterizează un corp *solid și izotrop* de tip *Rivlin - Ericksen de ordinul 2*, dacă și numai dacă funcția constitutivă este definită prin intermediul funcțiilor $\{\beta_j\}_{1 \leq j \leq 18}$ scalare, izotrope prin

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = & \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{A}_1 + \beta_2 \mathbf{A}_2 + \beta_3 \mathbf{B} + \beta_4 \mathbf{A}_1^2 + \beta_5 \mathbf{A}_2^2 + \beta_6 \mathbf{B}^2 + \\ & + \beta_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_8 (\mathbf{A}_1 \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}_1) + \beta_9 (\mathbf{A}_2 \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}_2) + \quad (3.37) \\ & + \beta_{10} (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1^2) + \beta_{11} (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}_1^2) + \beta_{12} (\mathbf{A}_2^2 \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}_2^2) + \\ & + \beta_{13} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1) + \beta_{14} (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{A}_1) + \beta_{15} (\mathbf{A}_2 \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{A}_2) + \\ & + \beta_{16} (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2 \mathbf{A}_1^2) + \beta_{17} (\mathbf{A}_1^2 \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{A}_1^2) + \beta_{18} (\mathbf{A}_2^2 \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{A}_2^2) \end{aligned}$$

Funcțiile sunt dependente de setul complet și ireductibil de invarianți, dați de (35), la care se mai adaugă următorii invarianți

$$j_{\mathbf{B}}, \quad \text{tr } \mathbf{A}_j \mathbf{B}, \quad \text{tr } \mathbf{A}_j^2 \mathbf{B}, \quad \text{tr } \mathbf{A}_j \mathbf{B}^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_j^2 \mathbf{B}^2, \quad \text{tr } \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{B}, \quad (3.38)$$

cu $j \in \{1, 2\}$.

Demonstrație. Un corp solid și izotrop are grupul său de simetrie în raport cu o configurație nedistorsionată a sa $g_k = \text{Ort}$, în conformitate cu rezultatele prezentate în paragraful 2.7.1. Atunci rezultă, ca o consecință a Teoremei 2., că funcția constitutivă din (14), scrisă pentru $n = 2$, este izotropă în raport cu argumentele sale, cei trei tensori simetrici. Utilizăm teorema lui Wang [1970] de reprezentare a funcțiilor izotrope, cu valori tensori simetrici și având ca variabile setul de tensori $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B})$. Reprezentarea completă și ireductibilă este dată în enunțul teoremei. Menționăm că baza de reprezentare este generată de setul complet și ireductibil asociat tuturor perechilor de tensori simetrici distincți.

3.4. Fluide de gradul k

În acest paragraf definim subclase de fluide Rivlin - Ericksen, care admit reprezentări *de tip polinomial* în raport cu tensorii lui Rivlin - Ericksen. S-a definit un procedeu **rațional** de simplificare a ecuațiilor constitutive pentru fluide Rivlin- Ericksen de ordinul n .

Presupunem o mișcare $\chi : \mathcal{B} \times \longrightarrow \mathcal{E}$, dată. Construim o familie de mișcări depinzând de parametrul $r \in R_+$, definită prin

$$\chi^{(r)}(\mathbf{X}, t) \equiv \chi(\mathbf{X}, rt), \quad \forall r > 0. \quad (3.39)$$

Să observăm că dacă prin mișcarea χ particula \mathbf{X} , la momentul t , ocupă poziția \mathbf{x} , atunci prin mișcarea $\chi^{(r)}(\mathbf{X}, t)$ ocupă aceeași poziție la momentul $\frac{t}{r}$.

Definiția 4. Mișcarea $\chi^{(r)}(\mathbf{X}, t)$, cu $0 < r < 1$ se numește *mișcare încetinită* asociată mișcării χ .

Propoziția 2. Pentru mișcări încetinite asociate mișcării χ au loc formulele

$$\mathbf{A}_n^{(r)}(t) = r^n \mathbf{A}_n(t) \quad \forall r > 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (3.40)$$

în care pozițiile spațiale ale particulei \mathbf{X} corespund imaginilor prin mișcarea încetinită și prin mișcarea dată la același moment de timp t .

Demonstrație. Au loc formulele $\mathbf{F}^{(r)}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, rt) \quad \forall r > 0$. Deci $\mathbf{F}_t^{(r)}(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, r\tau)(\mathbf{F}(\mathbf{X}, r\tau))^{-1}$.

Folosim formula (1.52) iii) din paragraful 1.3

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{x}, \tau) = (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))^{-T} \mathbf{C}(\mathbf{X}, \tau) (\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))^{-1},$$

pentru mișcarea încetinită și prin derivare de ordinul n , în raport cu τ rezultă că

$$\frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \mathbf{C}_t^{(r)}(\tau) = r^n \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \mathbf{C}_t(\tau). \quad (3.41)$$

Prin urmare dacă vom considera pe $\tau = t$, din formula anterioară obținem (40).

Definiția 5. Un fluid Rivlin - Ericksen *de ordinul* n și *gradul* k este definit ca un fluid de ordinul n , care satisface următoarele ipoteze

- i) funcția constitutivă f este un polinom în argumentele sale $\{\mathbf{A}_j(\mathbf{x}, t)\}_{1 \leq j \leq n}$
- ii) pe mișcările încetinite $\chi^r(\mathbf{X}, t)$ valoarea funcției constitutive reprezintă un polinom de gradul k .

Menționăm că nu este neapărat necesară introducerea fluidelor polinomiale făcând apel la descrierea pe mișcări încetinite. Legile respective sunt valabile, atât ca propuneri de legi constitutive cât și ca formule matematice, pe orice fel de mișcări dacă axiomele mecanicii sunt satisfăcute.

Fluidul Rivlin - Ericksen *de ordinul 1* se reprezintă sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \quad (3.42)$$

cu p, α_1, α_2 funcții depinzând de $\rho, j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\text{tr } \mathbf{A}_1, \text{tr } \mathbf{A}_1^2, \text{tr } \mathbf{A}_1^3)$.

Având în vedere că $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$, în conformitate cu Propoziția 10. din paragraful 1.4, observăm că acestea coincid cu fluidele Reiner - Rivlin, reprezentate în Teorema 14. din 2.6.2.

Fluidul de gradul 1 pe o mișcare încetinită trebuie să fie un polinom de gradul 1 în variabila r .

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (-p + \lambda \text{tr } \mathbf{A}_1)\mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1, \quad (3.43)$$

cu p, λ, μ funcții ce depind numai de ρ .

Menționând din nou că $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$ regăsim clasa fluidelor liniar vâscoase, compresibile, dată în (2.114).

Dacă fluidul este *incompresibil* atunci rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1, \quad (3.44)$$

cu λ, μ constante de material, iar p funcție de (\mathbf{x}, t) , conform cu principiul determinismului modificat introdus în 2.3 și prezentat în Teorema 5. pentru cazul *incompresibil*. Regăsim deci clasa fluidelor liniar vâscoase *incompresibile*, numite și *fluide newtoniene*.

Vom considera acum *fluidul de gradul 2*. Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru fluidele de ordinul doi, descrisă prin formula (37). Ținem seama că pe mișcările încetinite, conform Definiției 5., trebuie să obținem un polinom de gradul 2 în variabila r .

Rezultă că *fluidul de gradul 2* se reprezintă sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = & [-\bar{p} + \lambda \text{tr } \mathbf{A}_1 + \alpha_{10} \text{tr } \mathbf{A}_2 + \alpha_{20} \text{tr } \mathbf{A}_1^2] \mathbf{I} + \\ & + [\mu + \alpha_{11} \text{tr } \mathbf{A}_1] \mathbf{A}_1 + \alpha_1 \mathbf{A}_2 + \alpha_2 \mathbf{A}_1^2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

cu $\bar{p}, \lambda, \mu, \alpha_j$ funcții cu valori scalare, depinzând de ρ .

Reprezentarea constitutivă pentru *fluidul incompresibil de gradul 2* este descrisă prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p\mathbf{I} + \mu\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2, \quad (3.46)$$

cu μ, α_j constante de material, iar p este funcție de (\mathbf{x}, t) , conform cu principiul determinismului modificat.

Observația 2. Reprezentarea anterioară se obține din (45) în care se înlocuiește $\text{tr } \mathbf{A}_1 = 0$, care caracterizează condiția de *incompresibilitate*, în baza relației $\mathbf{A}_1 = 2\mathbf{D}$, deja menționate.

Observația 3. Nu pot fi definite fluidele Rivlin - Ericksen de ordinul 1 și gradul 3, deoarece în baza teoremei Hamilton - Cayley, vezi anexa A1., acestea se reduc la unul de gradul 2.

Vom considera acum *fluidul de gradul 3*. Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru fluidele de ordinul trei (descrise constitutiv prin formula (24) cu (25), pentru $n = 3$) dedusă în Teorema 3. Astfel reprezentarea constitutivă a *fluidelor Rivlin - Ericksen de ordinul 3* este caracterizată de funcția

$$f : \text{Sim}^3 \longrightarrow \text{Sim} \quad \text{cu proprietatea,}$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}_3\mathbf{Q}^T, \rho) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \rho)\mathbf{Q}^T,$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in \text{Ort}$ și pentru orice $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3 \in \text{Sim}$.

Pe de altă parte în Teorema 5. am caracterizat reprezentarea funcțiilor cu valori tensori simetrici, izotrope în raport cu un set de invarianți de trei tensori simetrici, care în cazul considerat aici vor fi $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$. Deci fluidul Rivlin - Ericksen de ordinul trei admite reprezentarea constitutivă de forma (37), (38) cu

deoșbirile că \mathbf{B} este înlocuit cu \mathbf{A}_3 , iar funcțiile scalare β depind de asemenea de densitatea ρ a fluidului.

Ținem seama că pe mișcările încetinite, conform Definiției 5., trebuie să obținem un polinom de gradul 3 în variabila r , pentru a avea *fluide de gradul 3* și respectiv de ordinul 3.

Cu observațiile anterioare, folosind reprezentarea din Teorema 5., (37), (38), din care reținem numai termenii care generează pe mișcări încetinite polinoame de gradul 3 în variabila r , rezultă că *fluidulele de gradul 3, compresibile* se reprezintă sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = & (\alpha_0 + \alpha_1 \text{tr } \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \text{tr } \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \text{tr } \mathbf{A}_1^2 + \alpha_4 \text{tr } \mathbf{A}_3) \mathbf{I} + \\ & + (\gamma_0 + \gamma_1 \text{tr } \mathbf{A}_1 + \gamma_2 \text{tr } \mathbf{A}_2 + \gamma_3 \text{tr } \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1 + \beta_3 \mathbf{A}_3 + \\ & + (\delta_0 + \delta_1 \text{tr } \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_2 + (\lambda_0 + \lambda_1 \text{tr } \mathbf{A}_1) \mathbf{A}_1^2 + \beta_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \end{aligned} \quad (3.47)$$

în care coeficienții depind numai de ρ .

Pentru obținerea reprezentării constitutive a *fluidelor de gradul 3, incompresibile* aplicăm procedeul utilizat pentru fluide de gradul 2, incompresibile. Deducem

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = & -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + (\gamma_0 + \gamma_2 \text{tr } \mathbf{A}_2 + \gamma_3 \text{tr } \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1 + \beta_3 \mathbf{A}_3 + \\ & + \delta_0 \mathbf{A}_2 + \lambda_0 \mathbf{A}_1^2 + \beta_7 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1), \end{aligned} \quad (3.48)$$

în care coeficienții sunt, de această dată, constanți. $p(\mathbf{x}, t)$ este presiunea de tip hidrostatic, nedeterminată constitutiv și se obține din ecuațiile de mișcare, ținând seama de restricția de incompresibilitate $\text{tr } \mathbf{A}_1 = 2 \text{tr } \mathbf{D} = 0$, sau $\text{div } \mathbf{v} = 0$.

Incheiem cu **remarca**: Dacă ținem seama de restricțiile impuse de legea a doua a termodinamicii, în cazul fluidelor de ordinul 3, incompresibile, (vezi Țigoiu [1987]) supuse numai la procese mecanice atunci *reprezentarea constitutivă* pentru un *fluid incompresibil de gradul 3* capătă forma (cu o renotare a coeficienților)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = & -p(\mathbf{x}, t) \mathbf{I} + \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \beta_1 \mathbf{A}_3 + \\ & + \beta_2 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \beta_3 (\text{tr } \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1, \end{aligned} \quad (3.49)$$

iar constantele de material verifică următoarele restricții (a se vedea și nota de subsol din paragraful următor)

$$\mu > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 < 0, \quad 2(\beta_3 + \beta_2) + \beta_1 \geq 0.$$

Fluidele de gradul 2 au fost studiate sub diferite aspecte ale comportamentului lor de Dunn, Fosdick [1974], Fetecău [1995] în timp ce pentru cele de gradul trei amintim studiul lui Fosdick, Rajagopal [1980] și cel mai general efectuat de Țigoiu [1987]. Pentru informații mai complete trimitem pe cititor la lucrările citate sau la Huilgol și Phan - Thien [1986].

3.5 Mișcarea staționară a unui fluid de gradul 3 prin conducte Mișcări secundare

Vom exemplifica, în clasa fluidelor incompresibile de gradul 3, formularea problemei cu date la limită care descrie mișcarea staționară a fluidului în conducte infinite și vom prezenta soluția dată de Țigoiu [1995] a.

Fie $\{\mathbf{i}_k\}_{k \in \{\overline{1,3}\}}$ un reper cartezian fixat, cu axa \mathbf{i}_3 coincizând cu axa de simetrie a conductei. Fie $\Omega = \{(x^1, x^2, x^3) \mid (x^1, x^2) \in \Sigma \subset \mathbf{R}^2, x^3 \in R\}$ cu Σ — simplu conexă, domeniul în care are loc mișcarea fluidului.

Ne punem următoarea **Problemă**

Să se determine câmpul de viteze \mathbf{v} și presiunea p care în Ω satisfac

- *ecuațiile de mișcare* $\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \nabla \mathbf{v}[\mathbf{v}]$, forțele volumice derivă dintr-un potențial $\mathbf{b} = -\nabla \psi$

- *condiția de incompresibilitate* $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

- *reprezentarea constitutivă* pentru un fluid incompresibil de gradul 3 de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbf{T}_E(\mathbf{x}, t) \quad (3.50)$$

unde \mathbf{T}_E este

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E(\mathbf{x}, t) \equiv & \mu \mathbf{A}_1 + \alpha_1 (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \beta_1 \mathbf{A}_3 - 3/2 \beta_1 (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \\ & + \beta_3 (\operatorname{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Constantele de material verifică următoarele restricții³

$$\mu > 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 < 0, \quad \beta_3 - \beta_1 \geq 0, \quad (3.52)$$

- *condițiile de aderență* pe $\partial \Sigma \times R \subset \partial \Omega$, pereții rigizi ai tubului

$$\mathbf{v} \mid_{\partial \Sigma} = 0,$$

- mișcarea se face cu un *gradient de presiune constant*.

Se face următoarea **ipoteză cinematică**: mișcarea staționară este descrisă prin câmpul de viteze

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2) \mathbf{i}_3 + \mathbf{u}(x_1, x_2) \quad (3.53)$$

cu câmpul $\mathbf{u}(x_1, x_2) \cdot \mathbf{i}_3 = 0$.

Observația 4. Existența câmpului $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ este legată de apariția *mișcărilor secundare* în tuburi, cu secțiunea Σ necirculară. Este de remarcat că, în cazul

³Restricțiile formulate sunt de natură termodinamică, fiind acceptate și pe procese mecanice. Au fost deduse în Țigoiu [1987], fiind ceva mai generale decât cele deduse în Fosdick și Rajagopal [1980].

fluidului newtonian, orice astfel de mișcare se face pe linii de curent paralele cu axul conductei, indiferent de forma secțiunii. Această proprietate nu va mai fi adevărată în cazul fluidelor ne-newtoniene (în particular în cazul fluidului de gradul trei, ceea ce produce, după cum se va vedea în final, la o posibilă experiență de laborator din care să se deducă o relație între constantele constitutive, necesară pentru determinarea acestora.

Propoziția 2. Câmpul de viteze (53) satisface condiția de incompresibilitate dacă și numai dacă

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x_1, x_2) = 0. \quad (3.54)$$

Aceasta împreună cu proprietatea de simplă conexiune a domeniului conduce la existența unui potențial $\varphi(x_1, x_2)$ astfel încât

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{e}_2 \equiv (\nabla \varphi(x_1, x_2))^\perp. \quad (3.55)$$

Reciproca este de asemenea adevărată, așa cum este ușor de verificat.

Este imediat de observat din (53) că deoarece câmpul de viteze \mathbf{v} este independent de x_3 rezultă că \mathbf{T}_E și $\nabla \mathbf{v}[\mathbf{v}]$ sunt de asemenea independenți de x_3 . Atunci notând cu Δp variația de presiune raportată la unitatea de lungime, interpretată ca *forța specifică* care generează mișcarea fluidului, rezultă următoarea

Propoziția 3. În condițiile descrise mai sus potențialul generalizat $\varphi^{(1)}$ este dat de

$$\varphi^{(1)} = p/\rho + \psi, \quad \mathbf{b} = -\operatorname{grad} \psi, \quad (3.56)$$

este independent de x_3 și

$$\rho \varphi^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = -\alpha x_3 + f(x_1, x_2). \quad (3.57)$$

În același timp

$$\alpha = -\frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}. \quad (3.58)$$

Deci $\alpha \equiv \Delta p$.

Demonstrație. Din ecuația de mișcare rezultă că $\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x_3} = 0$ și are loc reprezentarea din (57). Din (56) rezultă egalitățile din formula (58) cu interpretarea constantei α , menționată în enunț.

Notăm prin $T_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{i}_j$ componentele tensorului de tensiune în baza carteziană.

Ca o consecință a ipotezei cinematice formulate în (53) rezultă

Propoziția 4. Au loc următoarele relații

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} &= \mathbf{i}_3 \otimes \nabla v + \nabla \mathbf{u}, \\ \nabla \mathbf{v}[\mathbf{v}] &= (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v})\mathbf{i}_3 + \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}], \\ \mathbf{T}_E &= t_n(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) + \mathbf{t} \otimes \mathbf{i}_3 + \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{t} + \mathbf{T}_\tau,\end{aligned}\tag{3.59}$$

în care s-au introdus notațiile

$$\begin{aligned}t_n &\equiv (\mathbf{T}_E)_{33}, \\ \mathbf{t} &\equiv (\mathbf{T}_E)_{3i}\mathbf{i}_3, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{T}_\tau &\equiv \sum_{i,j \neq 3} (\mathbf{T}_E)_{ij}(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3),\end{aligned}\tag{3.60}$$

\mathbf{T}_τ definit într-un plan ortogonal pe direcția \mathbf{i}_3

Propoziția 5. Ecuatiile de mișcare în direcția \mathbf{i}_3 și în planul ortogonal pe \mathbf{i}_3 , sunt date sub forma

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{t} + [\Delta p] &= \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{T}_\tau - \nabla f &= \rho_0 \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}],\end{aligned}\tag{3.61}$$

în care operatorii $\operatorname{div}(\cdot)$ și $\nabla(\cdot)$ se aplică funcțiilor dependente de variabilele (x_1, x_2) .

Condițiile de aderență pe peretele rigid al tubului

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) |_{\partial \Sigma} = 0,\tag{3.62}$$

sunt echivalente cu

$$v(x_1, x_2) |_{\partial \Sigma} = 0, \quad \mathbf{u}(x_1, x_2) |_{\partial \Sigma} = 0.\tag{3.63}$$

Reformulând condiția prin intermediul potențialului vitezei (mai puțin o constantă aditivă) avem

$$\varphi(x_1, x_2) |_{\partial \Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(x_1, x_2) |_{\partial \Sigma} = 0,\tag{3.64}$$

unde prin \mathbf{n} s-a notat versorul normalei la $\partial \Sigma$. **Demonstrație.** Dintr-un calcul direct, în ipoteza cinematică (53) se deduc formele ecuațiilor de mișcare scrise în (59), (60). Din (55) și (53)₂ rezultă forma (64) pentru condițiile pe peretele rigid.

Observația 5. Dacă, *căderea de presiune* Δp este nulă atunci soluția problemei corespunde fluidului aflat în repaus și este dată prin

$$v = 0, \quad \mathbf{u} = 0, \quad \rho \varphi^{(1)} = p + \rho \varphi = 0.\tag{3.65}$$

Vom prezenta acum **analiza asimptotică a curgerii**. Problema formulată va fi rezolvată prin *metoda aproximațiilor succesive* în ipoteza mișcărilor

lente, modelată prin condiția : forța specifică a mișcării, raportată la unitatea de lungime este $\Delta p = \epsilon H$, cu $\epsilon \ll 1$.

Presupunem că pentru $\epsilon \ll 1$, există soluții netede în raport cu ϵ astfel încât

$$v = \sum_{r=1}^n \epsilon^r v_r + O(\epsilon^{n+1}),$$

$$\mathbf{u} = \sum_{r=1}^n \epsilon^r \mathbf{u}_r + O(\epsilon^{n+1}); \quad \mathbf{u}_r = (\nabla \varphi_r)^\perp, \quad (3.66)$$

$$f = \sum_{r=1}^n \epsilon^r f_r + O(\epsilon^{n+1}).$$

Eroarea este de ordinul $O(\epsilon^{n+1})$ în raport cu x_1, x_2 .

Observația 6. Vom face câteva remarci privind **analiza dimensională** a problemei.

În primul rând ϵ este forța specifică adimensională a mișcării și H reprezintă o forță caracteristică a problemei.

Fie acum a (de exemplu axa mare a elipsei dacă secțiunea are această formă) o lungime caracteristică și U_o o viteză caracteristică.

În variabile adimensionale rezultă

$$\mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a} \mathbf{A}_1 + \frac{\alpha_1 U_o^2}{a^2} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \frac{\beta_1 U_o^3}{a^3} \mathbf{A}_3 -$$

$$- \frac{3\beta_1 U_o^3}{2a^3} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) + \frac{\beta_3 U_o^3}{a^3} (\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1 \quad (3.67)$$

și deci

$$\text{div} \mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a^2} \left\{ \text{div} \mathbf{A}_1 + \tilde{\alpha}_1 \text{div} (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1^2) + \right.$$

$$\left. + \tilde{\beta}_1 \text{div} \left(\mathbf{A}_3 - \frac{3}{2} (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1) \right) + \tilde{\beta}_3 \text{div} [(\text{tr} \mathbf{A}_1^2) \mathbf{A}_1] \right\}. \quad (3.68)$$

În relația (68) constantele adimensionale sunt date prin

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 \frac{U_o}{\mu a}; \quad \tilde{\beta}_i = \beta_i \frac{U_o^2}{\mu a^2}; \quad i = 1, 3. \quad (3.69)$$

Constantele din (69) pot fi rescrise prin intermediul numărului lui Weissenberg sub forma

$$\tilde{\alpha}_1 \equiv W_a^{(o)}; \quad \tilde{\beta}_i = 1 - \frac{W_a}{W_a^{(o)}}, \quad (3.70)$$

unde $W_a \equiv \lambda_1 \frac{U_o}{a}$ (λ_1 reprezentând un timp de relaxare) și $W_a^{(o)} = \alpha_1 \frac{U_o}{\mu a}$ este prima aproximație a numărului lui Weissenberg pentru mișcarea fluidului considerat.

În variabile adimensionale ecuațiile de mișcare (61) se pot scrie acum sub forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{t} + \epsilon \gamma &= \operatorname{Re} \mathbf{u} \cdot \nabla v \\ \operatorname{div} \mathbf{T}_\tau - \gamma \nabla f &= \operatorname{Re} \nabla \mathbf{u}[\mathbf{u}], \end{aligned} \quad (3.71)$$

unde constanta $\gamma \equiv \frac{Ha}{\mu U_o}$.

Observația 7. Dezvoltările pentru \mathbf{t} și \mathbf{T}_τ din descompunerea prezentată în (59)₃ se obțin prin introducerea dezvoltărilor (66) în (67). Dacă aceste rezultate sunt introduse acum în (71), prin egalarea coeficienților diferitelor puteri ale lui ϵ , se obține succesiunea de ecuații cu derivate parțiale pentru necunoscutele v_r , q_r și f_r . Aceste ecuații vor fi rezolvate pentru următoarele condiții pe frontieră (obținute din (63))

$$v_r = 0, \quad q_r = 0, \quad \frac{\partial q_r}{\partial n} = 0 \quad \text{pe } \partial \Sigma \quad (3.72)$$

Nu vom preciza întreaga dezvoltare pentru \mathbf{T}_E . Aceasta se va efectua ulterior. Să observăm că

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &\equiv \sum_{r=1}^n \epsilon_r (\mathbf{e}_3 \otimes \nabla v_r + \nabla v_r \otimes \mathbf{e}_3 + \nabla \mathbf{u}_r + \nabla^T \mathbf{u}_r) + O(\epsilon^{n+1}), \\ \mathbf{A}_2 &\equiv O(\epsilon^2), \quad \mathbf{A}_3 \equiv O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Vom pune în discuție succesiunea de probleme cu date pe frontieră după cum urmează

Propoziția 6. La primul pas de aproximare se deduce reprezentarea

$$\mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a} \epsilon (\mathbf{e}_3 \otimes \nabla v_1 + \nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3 + \nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1) + O(\epsilon^2) \quad (3.73)$$

și respectiv

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \epsilon \frac{\mu U_o}{a} \nabla v_1 + O(\epsilon^2) \\ \mathbf{T}_\tau &= \epsilon \frac{\mu U_o}{a} (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1) + O(\epsilon^2) \\ t_n &= 0 + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Aproximația sistemului (71) este

$$\begin{aligned} \nabla v_1 &= -\gamma, \\ \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla^T \mathbf{u}_1) - \gamma \nabla f_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

cu condițiile pe frontieră

$$v_1|_{\partial \Sigma} = 0, \quad \varphi_1|_{\partial \Sigma} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_{\partial \Sigma} = 0. \quad (3.76)$$

Demonstrație. Dacă se utilizează $(59)_3$ din (73) se deduc reprezentările din (74).

Observația 8. Problema $(75)_1 - (76)_1$ este o problemă Dirichlet pentru ecuația Poisson. Rezultă din proprietăți cunoscute că are o unică soluție v_1 .

Problema $(75)_2 - (76)_{2,3}$ trebuie să fie corect formulată. Dar cum $\mathbf{u}(x_1, x_2) = (\nabla\varphi(x_1, x_2))^\perp$ rezultă dintr-un calcul simplu că

$$\operatorname{div}(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) = (\nabla(\Delta\varphi))^\perp. \quad (3.77)$$

Prin urmare din ecuația $(75)_2$ (dacă considerăm întâi operația "⊥" și apoi aplicăm divergența) se deduce următoarea ecuație pentru φ_1

$$\Delta\Delta\varphi_1 = 0. \quad (3.78)$$

Cu cele de mai sus este imediată

Propoziția 7. Ecuația biarmonică (78) cu condițiile pe frontieră $(76)_{2,3}$ admite numai soluția nulă și

$$\mathbf{u}_1 = (\nabla\varphi_1)^\perp = 0. \quad (3.79)$$

Observația 9. Prima aproximație pentru \mathbf{T}_E coincide cu reprezentarea constitutivă Navier - Stokes. Rezultă că fluidul Navier - Stokes nu poate accepta mișcări secundare în conducte drepte cu secțiuni domenii simplu conexe.

Trecem acum la **aproximația de ordinul doi**. Același tip de raționament ne conduce la

Propoziția 8. Expresia lui \mathbf{T}_E cu descompunerile $(59)_3$ este dată prin

$$\mathbf{T}_E = \frac{\mu U_o}{a} \{ \epsilon (\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_1 + \nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3 + \epsilon^2 [\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_2 + \nabla v_2 \otimes \mathbf{i}_3 + \nabla \mathbf{u}_2 + \nabla^T \mathbf{u}_2 + \tilde{\alpha}_1 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_1 - |\nabla v_1|^2 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3)] \} + O(\epsilon^3) \quad (3.80)$$

și respectiv

$$\mathbf{t} = \frac{\mu U_o}{a} [\epsilon \nabla v_1 + \epsilon^2 \nabla v_2] + O(\epsilon^3),$$

$$\mathbf{T}_\tau = \frac{\mu U_o}{a} \epsilon^2 [(\nabla \mathbf{u}_2 + \nabla^T \mathbf{u}_2) + \tilde{\alpha}_1 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_1)] + O(\epsilon^3), \quad (3.81)$$

$$t_n = -\frac{\mu U_o}{a} \epsilon^2 \tilde{\alpha}_1 |\nabla v_1|^2 + O(\epsilon^3).$$

Propoziția 9. Aproximația de ordinul doi a sistemului (71) este

$$\begin{aligned} \Delta v_2 &= 0, \\ \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_2 + \nabla^T \mathbf{u}_2) + \tilde{\alpha}_1 \operatorname{div}(\nabla v_1 \otimes \nabla v_1) - \gamma \nabla f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.82)$$

cu următoarele condiții pe frontieră

$$\begin{aligned} v_2 |_{\partial\Sigma} &= 0, \\ \varphi_2 |_{\partial\Sigma} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} |_{\partial\Sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Observația 10. Problema lui Dirichlet formulată în $(82)_1 - (83)_1$ are o unică soluție

$$v_2 \equiv 0 \quad (3.84)$$

Din $(82)_2$ printr-un raționament similar cu cel utilizat în Observația 8. pentru prima aproximație obținem că

$$\Delta\Delta\varphi_2 = 0. \quad (3.85)$$

Propoziția 10. Problema $(82)_2 - (83)_{2,3}$ admite o unică soluție care este

$$\mathbf{u}_2 = (\nabla\varphi_2)^\perp = 0. \quad (3.86)$$

În aproximația de ordinul trei au loc afirmațiile conținute în

Propoziția 11. Din $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 = 0, \quad v_2 = 0$ rezultă că $\mathbf{A}_3 = O(\epsilon^5)$.

Aproximația de ordinul trei pentru tensiunea efectivă este

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E &= \frac{\mu U_o}{a} \{ \epsilon (\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_1)^S + \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 [\nabla v_1 \otimes \nabla v_1 - |\nabla v_1|^2 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3] + \\ &+ \epsilon^3 [(\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_3)^S + (\nabla \mathbf{u}_3)^S + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) |\nabla v_1|^2 (\nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3)^S] \} + O(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (3.87)$$

unde s-a folosit notația $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^S = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$. Descompunerea $(59)_3$ devine

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mu U_o}{a} \{ \epsilon \nabla v_1 + \epsilon^3 [\nabla v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) |\nabla v_1|^2 \nabla v_1] \} + O(\epsilon^4), \\ \mathbf{T}_\tau &= \frac{\mu U_o}{a} \{ \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_1) + \epsilon^3 (\nabla \mathbf{u}_3)^S \} + O(\epsilon^4), \\ t_n &= -\frac{\mu U_o}{a} \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 |\nabla v_1|^2 + O(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (3.88)$$

iar aproximația de ordinul trei pentru sistemul (71) este

$$\begin{aligned} \Delta v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) \operatorname{div}(|\nabla v_1|^2 \nabla v_1) &= 0, \\ \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_3 + \nabla^T \mathbf{u}_3) - \gamma \nabla f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.89)$$

În mod corespunzător datele pe frontieră sunt scrise sub forma

$$\begin{aligned} v_3 |_{\partial\Sigma} &= 0, \\ \varphi_3 |_{\partial\Sigma} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} |_{\partial\Sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Observația 11. Problema Dirichlet $(89)_1 - (90)_1$ are o unică soluție nenulă v_3 (căci $\tilde{\beta}_3 - 3/2\tilde{\beta}_1 > 0$, având în vedere restricția constitutivă (52)).

Ecuatia (89)₂ cu condițiile pe frontieră (90)_{2,3} conduc la următoarea problemă la limită

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi_3 &= 0, \\ \varphi_3|_{\partial\Sigma} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n}|_{\partial\Sigma} = 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Deducem că (90) admite numai soluția nulă

$$\mathbf{u}_3 = (\nabla\varphi_3)^\perp = 0. \quad (3.92)$$

Vom trece acum la **aproximația de ordinul 4**. Dintr-un calcul lung, dar direct pe care nu-l reproducem aici deducem, pe baza rezultatelor puse în evidență în pașii anteriori, că are loc

Propoziția 12. Tensiunea efectivă are expresia

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_E \equiv & \frac{\mu U_0}{a} \{ \epsilon (\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_1)^S + \epsilon^2 \tilde{\alpha}_1 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_1 - |\nabla v_1|^2 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3) + \\ & + \epsilon^3 [(\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_3)^S + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) |\nabla v_1|^2 (\nabla v_1 \otimes \mathbf{i}_3)^S] + \\ & + \epsilon^4 [(\mathbf{i}_3 \otimes \nabla v_4)^S + (\nabla \mathbf{u}_4)^S + \tilde{\alpha}_1 ((\nabla v_1 \otimes \nabla v_3)^S - 2\nabla v_1 \cdot \nabla v_3 \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3)] \} + \\ & + O(\epsilon^5), \end{aligned} \quad (3.93)$$

iar din descompunerea (59)₃ se deduc următoarele relații pentru \mathbf{t} , \mathbf{T}_τ , t_n :

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mu U_0}{a} \{ \epsilon \nabla v_1 + \epsilon^3 [\nabla v_3 + (2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1) |\nabla v_1|^2 \nabla v_1] + \epsilon^4 \nabla v_4 \} + O(\epsilon^5), \\ \mathbf{T}_\tau &= \frac{\mu U_0}{a} \{ \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_1) + \epsilon^4 [\tilde{\alpha}_1 (\nabla v_1 \otimes \nabla v_3)^S + (\nabla \mathbf{u}_4)^S] \} + O(\epsilon^5), \\ t_n &= -\frac{\mu U_0}{a} \{ \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 |\nabla v_1|^2 - 2\tilde{\alpha}_1 \epsilon^4 \nabla v_1 \cdot \nabla v_3 \} + O(\epsilon^5). \end{aligned} \quad (3.94)$$

Aproximația de ordinul 4 a sistemului (71) are forma

$$\begin{aligned} \Delta v_4 &= 0, \\ \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}_4 + \nabla^T \mathbf{u}_4) + \tilde{\alpha}_1 \operatorname{div}(\nabla v_1 \otimes \nabla v_3 + \nabla v_3 \otimes \nabla v_1) - \gamma \nabla f_4 &= 0, \end{aligned} \quad (3.95)$$

cu condițiile pe frontieră de aceeași formă ca cele date în aproximația de ordinul trei, adică

$$\begin{aligned} v_4|_{\partial\Omega} &= 0, \\ \varphi_4|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Observația 12. Problema Dirichlet formulată în (95)₁ – (96)₁ admite numai soluția nulă

$$v_4 \equiv 0. \quad (3.97)$$

Ecuatia (95)₂ cu condițiile (96)_{2,3} poate fi ușor transformată în următoarea problemă

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi_4 &= \tilde{\alpha}_1 \operatorname{div}[\operatorname{div}(\nabla v_1 \otimes \nabla v_3)^S]^\perp, \\ \varphi_4|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

dacă folosim faptul că $((\mathbf{g})^\perp)^\perp = -\mathbf{g}$, oricare ar fi \mathbf{g} .

Propoziția 13. Problema determinării potențialului φ_4 revine la problema echivalentă

$$\begin{aligned} \Delta\Delta\varphi_4 &= -2(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3)\tilde{\alpha}_1(\nabla v_1)^\perp \cdot [\operatorname{div}(|\nabla v_1|^2 \nabla v_1)], \\ \varphi_4|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial\varphi_4}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \quad (3.99)$$

care admite o unică soluție.

Câmpul de viteze (53) admite, în final, reprezentarea

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = (\epsilon v_1(x_1, x_2) + \epsilon^2 v_3(x_1, x_2))\mathbf{i}_3 + \epsilon^4 (\nabla\varphi_4)^\perp + O(\epsilon^5). \quad (3.100)$$

Deducerea formei echivalente pentru problema formulată în (98) se bazează pe considerarea ecuației (89)₁, care face posibilă reevaluarea membrului drept din (98)₁ prin calcule directe.

Observația 13. Din calculele anterioare este clar că în fluidul de gradul 3 care se mișcă într-un tub drept cu secțiunea eliptică apar mișcări secundare. Ordinul de mărime al mișcărilor secundare este cu trei ordine de mărime (în raport cu parametrul ϵ) mai mic decât ordinul de mărime al mișcării principale a fluidului în lungul tubului. În același timp termenul corespunzător este cu un ordin de mărime mai mic față de ordinul termenilor specifici reprezentării constitutive de gradul 3, care au drept coeficienți pe β_1, β_3 .

Să remarcăm în final că termenii care conțin accelerațiile de ordinul doi, \mathbf{A}_3 , nu apar datorită faptului că mișcarea fluidului a fost presupusă lentă.

Până acum au fost prezentate rezultate general valabile, indiferent de forma secțiunii tubului. Vom considera cazul tubului cu secțiunea o elipsă de ecuație

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

în care $a > b > 0$, sau, în variabile adimensionale

$$x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (3.101)$$

$0 < c < b/a < 1$.

Propoziția 14. În cazul secțiunii eliptice soluția $v_1(x_1, x_2)$ a problemei Dirichlet (75)₁ – (76)₁ se determină explicit prin

$$v_1(x_1, x_2) = -\frac{\gamma c^2}{2(1+c^2)}\left(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1\right), \quad (3.102)$$

iar din (75)₂ se obține

$$f_1(x_1, x_2) = C_1, \quad (3.103)$$

unde C_1 este o constantă.

Formula (103) a fost dedusă din (75)₂ având în vedere că $\varphi_1 \equiv 0$.

Propoziția 15. Aproximația de ordinul doi este caracterizată de $u_2 \equiv 0$, iar pentru f_2 din (82)₂ se obține

$$\nabla f_2 = \frac{\tilde{\alpha}_1}{\gamma} \operatorname{div}(\nabla v_1 \otimes \nabla v_1), \quad (3.104)$$

a cărei soluție este dată de

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{2(1+c^2)^2} [(1+2c^2)c^2 x_1^2 + (2+c^2)x_2^2] + C_2, \quad (3.105)$$

unde C_2 este o constantă.

Demonstrarea formei soluției ecuației (104) rezultă din considerare relației (102), prin intermediul căreia (104) poate fi exprimată prin

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{(1+c^2)^2} (1+2c^2)c^2 x_1, \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{(1+c^2)^2} (2+c^2)x_2.$$

Propoziția 16. a) Cea de a treia aproximare poate fi caracterizată ($u_3 = 0$) prin soluția

$$f_3(x_1, x_2) = C_3, \quad (3.107)$$

unde C_3 este o constantă. Iar v_3 se determină ca soluție a ecuației

$$\Delta v_3(x_1, x_2) = \frac{2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\gamma^3}{(1+c^2)^2} [(1+3c^2)c^4 x_1^2 + (3+c^2)x_2^2]. \quad (3.108)$$

b) Soluția problemei (89)₁ – (90)₁ este dată prin reprezentarea

$$v_3(x_1, x_2) = D(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1)(Ax_1^2 + Ax_2^2 + C), \quad (3.109)$$

unde A, B, C, D sunt constante dependente de domeniu (ce pot depinde de constantele constitutive și de asemenea de γ); ele sunt explicit date la sfârșitul paragrafului.

Demonstrație. Cu funcția determinată în (102) introdusă în (89)₁, după efectuarea câtorva calcule, rezultă ecuația cu derivate parțiale pentru v_3 sub forma (108). Dacă se asociază condițiile pe frontieră (90)_{2,3} forma soluției scrisă în (109) poate fi obținută imediat.

Propoziția 17. Cea de a patra aproximare este precizată prin $v_4 = 0$, din (97), și de φ_4 soluția problemei

$$\Delta \Delta \varphi_4 = -2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\tilde{\alpha}_1 \frac{6c^2(1-c^2)}{(1+c^2)^3} \gamma^4 x_1 x_2, \quad (3.110)$$

$$\varphi_4|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Aceasta admite o soluție dată de formula

$$\varphi_4(x_1, x_2) = -2(\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2)\tilde{\alpha}_1\gamma^4 E(x_1^2 + \frac{x_2^2}{c^2} - 1)^2 x_1 x_2. \quad (3.111)$$

În expresia de mai sus constanta dependentă de domeniu E este dată tot în tabelul constantelor de la sfârșitul paragrafului.

Demonstrație. Problema (98) poate fi rescrisă dacă se folosesc soluțiile determinate în (102) și (109). Soluția problemei (110) se obține dintr-un calcul destul de lung, dar direct.

Observația 14. Din restricțiile constitutive (52) avem $\tilde{\beta}_3 + \tilde{\beta}_2 > 0$ și $\tilde{\alpha}_1 > 0$. Atunci putem reprezenta liniile de curent, care corespund mișcării secundare, deci curbele $\varphi_4(x_1, x_2) = \text{constant}$. Remarcăm că pentru $\varphi_4(x_1, x_2) = 0$ avem drept linii de curent elipsa de secțiune și semiaxe. În Fig. 3.1 este schematic reprezentată configurația liniilor de curent și sensul mișcării secundare pe liniile de curent.

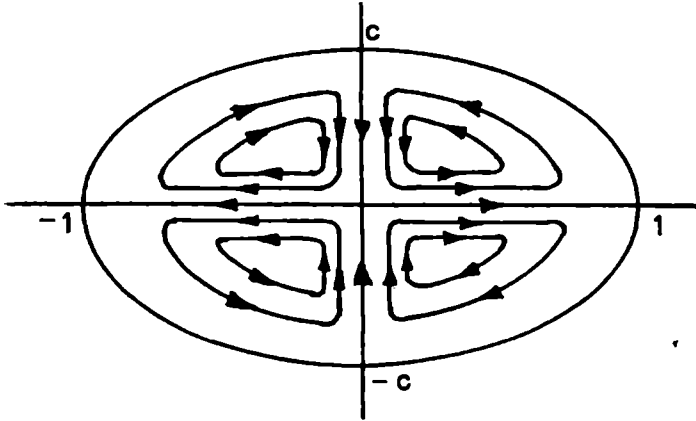


Fig. 3.1

Propoziția 18. Aproximația presiunii, până la termenii de ordinul 4 inclusiv se determină prin formula

$$p(x_1, x_2, x_3) = -\rho\psi + \sum_{i=1}^4 \epsilon^i C_i - \epsilon H x_3 + \epsilon^2 \frac{\tilde{\alpha}_1 \gamma}{2(1+c^2)^2} [(1+2c^2)c^2 x_1^2 + (2+c^2)x_2^2] - \epsilon^4 \frac{2(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3)}{(1+c^2)^3} \tilde{\alpha}_1 \gamma^3 \left[\frac{S_1}{4} x_1^4 + \frac{S_2}{2} x_1^2 x_2^2 + \frac{S_3}{2} x_1^2 + \frac{V_1}{4} x_2^4 + \frac{V_2}{2} x_2^2 \right]. \quad (3.112)$$

Demonstrația se obține din relațiile (56), (57) cu aproximarea funcției $f(x_1, x_2)$. Pentru pasul patru de aproximare calculăm pe $u_4(x_1, x_2)$ prin inter-

mediul lui (111) și obținem în final, după un calcul destul de lung (din (95)₂)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= -Q\tilde{\alpha}_1(S_1x_1^3 + S_2x_1x_2^2 + S_3x_1), \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= -Q\tilde{\alpha}_1(V_1x_2^3 + S_2x_1^2x_2 + V_2x_2),\end{aligned}\quad (3.113)$$

în care Q , S_i ($i = 1, 2, 3$), V_j ($j = 1, 2$) sunt constante dependente de domeniu, de constantele constitutive și de γ . Aceste constante sunt de asemenea explicit calculate.

Sistemul (113) este compatibil iar soluția va fi de forma

$$f_4(x_1, x_2) = -Q\tilde{\alpha}_1\left(\frac{S_1}{4}x_1^4 + \frac{S_2}{2}x_1^2x_2^2 + \frac{S_3}{2}x_1^2 + \frac{V_1}{4}x_2^4 + \frac{V_2}{2}x_2^2\right) + C_4, \quad (3.114)$$

unde C_4 este constantă.

Rezultă în final forma (112) pentru aproximația de ordinul 4 în ϵ .

Vom calcula acum presiunea normală pe suprafața rigidă a tubului prin formula

$$T_N(x_1, x_2, x_3) = -\gamma p(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_E \mathbf{n}, \quad (3.115)$$

unde p și \mathbf{T}_E au fost deja evaluate. Atunci cantitatea

$$\Delta T_N \equiv |T_N(\pm 1, 0, x_3) - T_N(0, \pm c, x_3)|, \quad (3.116)$$

reprezintă maximul variației lui T_N pentru fiecare x_3 fixat.

Propoziția 18. Expresia ΔT_N poate fi reprezentată prin

$$\Delta T_N = \tilde{\alpha}_1 \gamma^2 \frac{(1-c^2)c^2}{(1+c^2)^2} \epsilon^2 + 4(\tilde{\beta}_2 + \tilde{\beta}_3) \tilde{\alpha}_1 \gamma^4 \frac{c^4(1-c^2)^2(3c^4 + 4c^2 + 3)}{(1+c^2)^4(5c^4 + 6c^2 + 5)} \epsilon^4, \quad (3.117)$$

Demonstrație. Ținem seama de relația

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_E \mathbf{n} &= \epsilon^2 \tilde{\alpha}_1 \left[\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} n_2 \right)^2 \right] + 2\epsilon^4 \left[\frac{\partial(u_4)_1}{\partial x_1} n_1^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial(u_4)_2}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_4)_1}{\partial x_2} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial(u_4)_2}{\partial x_2} n_2^2 \right] + \\ &+ 2\epsilon^4 \tilde{\alpha}_1 \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_1} n_1^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) n_1 n_2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} n_2^2 \right]\end{aligned}\quad (3.118)$$

și folosind (84), (102), (109) și (111) ajungem la expresiile

$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_E(\pm 1, 0) \mathbf{n} &= \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 \gamma^2 \frac{c^4}{(1+c^2)^2} - 4\tilde{\alpha}_1 \epsilon^4 \gamma D(A+C) \frac{c^2}{1+c^2}, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}_E(0, \pm c) \mathbf{n} &= \tilde{\alpha}_1 \epsilon^2 \gamma^2 \frac{c^2}{(1+c^2)^2} - 4\tilde{\alpha}_1 \epsilon^4 \gamma D(Bc^2 + C) \frac{1}{1+c^2}.\end{aligned}\quad (3.119)$$

În urma calculelor efectuate prin utilizarea relațiilor (114) (115) deducem expresia (117) pentru ΔT_N .

Observația 14. Prin intermediul relației (117) rezultă că maximum variației presiunii normale, care este o mărime măsurabilă experimental, *produce o nouă relație pentru determinarea constantelor constitutive*. De remarcat că am obținut această relație într-una din ipotezele $\beta_1 = -(\beta_2 + \beta_3)$ (care asigură un criteriu de stabilitate așa cum a fost demonstrat în Țigoiu [1987]), sau $3\beta_1 + 2\beta_2 = 0$, care descrie o subclasă de fluide de gradul 3 (considerată de asemenea în lucrarea menționată).

Astfel, în concluzie, putem interpreta relația (117) fie ca pe un criteriu de existență al mișcărilor secundare la fluidele de gradul trei (dacă, constantele constitutive au fost determinate din alte experimente), fie ca pe o posibilă experiență pentru determinarea unei noi relații între constantele constitutive.

În final prezentăm lista constantelor care au fost menționate în forma dedusă a soluțiilor problemelor succesive apărute

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{c^2(3c^6 + 19c^4 + 5c^2 - 3)}{6(c^4 + 6c^2 + 1)} \\
 B &= \frac{-3c^6 + 5c^4 + 19c^2 + 3}{6(c^4 + 6c^2 + 1)} \\
 C &= \frac{c^2}{1 + c^2}(A + B); \quad D = \frac{(2\tilde{\beta}_3 - 3\tilde{\beta}_1)c^2}{2(1 + c^2)^3}\gamma^3 \\
 E &= \frac{c^6(1 - c^2)}{4(1 + c^2)^3(5c^4 + 6c^2 + 5)}; \quad Q = 2D \\
 S_1 &= \frac{2A'(1 + 5c^2) + (1 + 3c^2)c^6}{1 + c^2} - \frac{c^4(1 - c^2)(5c^2 + 3)}{3c^2(1 - c^2)(3c^2 + 5)} \\
 S_2 &= 3\left(B' + \frac{A'}{c^2}\right) + \frac{1 + c^2}{c^2(3 + c^2)} - \frac{5c^4 + 6c^2 + 5}{3c^2(1 - c^2)(3c^2 + 5)} \\
 S_3 &= \frac{(C' - A')(1 + 3c^2)}{1 + c^2} + \frac{3c^4(1 - c^4)}{5c^4 + 6c^2 + 5} \\
 V_1 &= \frac{2B'(c^2 + 5)}{c^2(1 + c^2)} + \frac{3 + c^2}{1 + c^2} + \frac{5c^4 + 6c^2 + 5}{c^2(1 - c^2)(5 + 3c^2)} \\
 V_2 &= \frac{(C' - c^2B')(3 + c^2)}{c^2(1 + c^2)} - \frac{3c^4(1 - c^4)}{5c^4 + 6c^2 + 5}
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

unde $A' = c^2A$; $B' = c^2B$; $C' = \frac{c^2}{1 + c^2}(A' + B')$.

Problema de curgere, care va fi reluată în capitolul următor (problema Poiseuille), a fost analizată pentru diferite clase de fluide ne-newtoniene de Langlois și Rivlin [1963], Pipkin și Rivlin [1963], Truesdell și Noll [1965], Dodson, Townsend și Walters [1974], Townsend, Walters și Waterhous [1976], etc., scopul nostru fiind însă, în afara prezentării problemei de curgere propriu-zise, obținerea importanței relației (68), cu toate observațiile legate de ea. Pentru proprietățile soluțiilor ecuațiilor cu derivate parțiale trimitem la Roșca [1997].

3.6 Exerciții și probleme

1. Arătați că are loc formula

$$\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1}\dot{\mathbf{U}}$$

2. Arătați că fluidele de tip diferențial de ordinul 0, reprezintă clasa fluidelor perfecte, sau clasa fluidelor elastice

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{F}(t)), \quad \text{fluid} \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(\rho)\mathbf{I}$$

3. Arătați că fluidele de tip diferențial de ordinul 1, reprezintă clasa fluidelor vâscoase, sau clasa fluidelor de tip Reiner - Rivlin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{F}(t), \mathbf{F}'(t)), \text{fluid} \iff \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}}, \rho)\mathbf{D}^2.$$

4. Folosind direct enunțul principiului obiectivității arătați că materialele de tip diferențial de ordinul 1 îl satisfac dacă și numai dacă admit o reprezentare constitutivă de forma (54) cu $n = 1$, deci

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t)f(\mathbf{A}_1^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t), \mathbf{C}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X})\mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t).$$

5. Demonstrați că un material de tip diferențial de ordinul 0 descrie un corp solid, izotrop dacă și numai dacă admite o reprezentare de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \phi_0(j_{\mathbf{B}})\mathbf{I} + \phi_1(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B} + \phi_2(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B}^2, \quad (3.121)$$

adică este un material de tip Mooney - Rivlin.

6. Demonstrați că un material de tip diferențial de ordinul 1 descrie un corp solid, izotrop dacă și numai dacă admite o reprezentare de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t), \mathbf{B}(\mathbf{X}, t); \mathbf{X}) \quad \text{cu proprietatea} \quad (3.122)$$

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{A}_1(t)\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}f(\mathbf{A}_1(t), \mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort.$$

7. Reprezentați constitutiv un material de tip diferențial de ordinul 1 care descrie un corp solid și izotrop.

8. Fie următoarele reprezentări pentru materiale de tip diferențial de ordinul 1

$$a) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mu\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}'(t)\mathbf{I},$$

$$b) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mu\mathbf{F}(t)[(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\mathbf{C}]\mathbf{F}^T(t),$$

$$c) \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}} \cdot (\mathbf{A}_1)^{\mathbf{R}}\mathbf{C}.$$

Care dintre aceste reprezentări, cu μ - constant verifică principiul obiectivității ?

4. VÂSCOMETRIE

4.1 Mișcări cu istoria alungirilor relative constantă (m.i.a.r.c.)

În mecanica materialelor simple s-au impus două tipuri de particularizări, privind

- natura materialelor din care sunt constituite corpurile,
- tipul mișcărilor efectuate de corpuri.

În acest capitol vom defini și analiza câteva clase speciale de mișcări pentru fluide, în clasa materialelor simple. Ne vom ocupa de mișcările cu *istoria alungirilor relative constantă*. Aceste mișcări au fost introduse de Coleman [1961]. Rezultatele au fost generalizate de Noll [1962], iar în Coleman, Markovitz, Noll [1966], Walters [1975], Larson [1989] sunt prezentate aplicații în vâscometrie și sunt date rezultate de natură experimentală.

4.1.1 Definiție

Definiția 1. O mișcare χ este o mișcare cu istoria alungirilor relative constantă (în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$) dacă există $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, pentru orice $\tau \in R$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ astfel încât

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s)\mathbf{Q}^T(t) \quad \forall s \geq 0, \quad \forall t \in R \quad (4.1)$$

Când ne vom referi la o mișcare cu istoria alungirilor relative constantă vom utiliza notația prescurtată m.i.a.r.c.

4.1.2 Condiții de caracterizare

Vom preciza *condiții necesare și suficiente* pentru ca o mișcare χ să fie cu istoria alungirilor relative constantă. Acestea vor fi numite (C.I) și respectiv (C.II). Ele vor fi formulate într-o particulă \mathbf{X} , fixată în corpul \mathcal{B} , pe care nu o vom mai menționa, dacă acest lucru nu produce confuzii.

Prima condiție de caracterizare, (C.I), este un rezultat datorat lui Noll [1962] și precizează forma pe care trebuie să o admită gradientul mișcării, în raport cu configurația pe care o are corpul la momentul $t = 0$, considerată drept configurație

de referință, notat $\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau)$. Gradientul mișcării este calculat în particula fixată \mathbf{X} , iar reprezentarea va avea loc la orice moment de timp, τ .

A doua condiție, (C.II), este o consecință a Definiției 1. și a condiției (C.I). Aceasta precizează forma tensorului lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, față de configurația de la momentul t , luată drept configurație de referință.

Condiția (C.I) : Teorema lui Noll de caracterizare a mișcărilor cu istoria alungirilor relative constantă

Condiția necesară și suficientă ca o mișcare χ să fie cu istoria alungirilor relative constantă este ca să existe $\mathbf{Q}(\tau) \in Ort$, $\kappa \in R$, $\mathbf{N} \in Lin$, astfel încât

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau \kappa \mathbf{N}), \quad (4.2)$$

pentru orice $\tau \in R$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$, $|\mathbf{N}| = 1$.

Demonstrație. Presupunem că are loc reprezentarea din Definiția 1. pentru m.i.a.r.c., deci

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s) \mathbf{Q}^T(t), \quad (4.3)$$

pentru orice $s \geq 0$ și orice $t \in R$. Notăm

$$\mathbf{H}(s) \equiv \mathbf{C}_0(-s) \in Sim \quad (4.4)$$

și rescriem relația anterioară prin intermediul acesteia.

Folosim formulele (1.52) ii) și (1.49):

$$\mathbf{F}_t(\tau) = \mathbf{F}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t), \quad \mathbf{C}_t(\tau) = \mathbf{F}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\tau)$$

pentru $\tau = t - s$ și obținem relația de legătură între $\mathbf{C}_t(\tau)$ și $\mathbf{C}_0(\tau)$

$$\mathbf{C}_t(\tau) = (\mathbf{F}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t))^T \mathbf{F}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{F}_0^{-T}(t) \mathbf{C}_0(\tau) \mathbf{F}_0^{-1}(t). \quad (4.5)$$

Pentru $\tau = t - s$, rezultă

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{F}_0^{-T}(t) \mathbf{C}_0(t - s) \mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{F}_0^{-T}(t) \mathbf{H}(s - t) \mathbf{F}_0^{-1}(t).$$

Astfel (1) se scrie sub forma

$$\mathbf{F}_0^{-T}(t) \mathbf{H}(s - t) \mathbf{F}_0^{-1}(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{H}(s) \mathbf{Q}^T(t),$$

sau

$$\mathbf{H}(s - t) = \mathbf{F}_0^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{H}(s) \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{F}_0(t). \quad (4.6)$$

Introducând notația

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{F}_0(t), \quad (4.7)$$

în (6) rezultă că

$$\mathbf{H}(s-t) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{H}(s)\mathbf{E}(t). \quad (4.8)$$

Derivăm în raport cu t în relația (8) și facem apoi pe $t = 0$. Rezultă

$$-\dot{\mathbf{H}}(s) = \dot{\mathbf{E}}^T(0)\mathbf{H}(s)\mathbf{E}(0) + \mathbf{E}^T(0)\mathbf{H}(s)\dot{\mathbf{E}}(0). \quad (4.9)$$

Introducând următoarea notație

$$\dot{\mathbf{E}}(0) \equiv \mathbf{M}, \quad \text{cu} \quad \mathbf{E}(0) \equiv \mathbf{Q}^T(0)\mathbf{F}_0(0) = \mathbf{I},$$

în (9), se obține problema Cauchy

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{M}^T\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}(s)\mathbf{M} \\ \mathbf{H}(0) &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Folosim rezultatul următor : soluția sistemului diferențial

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s), \quad (4.11)$$

în care $\mathbf{A} \in \text{Lin}$, cu condiția inițială $\mathbf{H}(0) = \mathbf{I}$, este unică și se reprezintă prin $\mathbf{X}(s) = \exp(\mathbf{A}s)$, care permută cu \mathbf{A} .

Deci, dacă considerăm substituția

$$\mathbf{H}(s) = \exp(-s\mathbf{M}^T)\mathbf{Y}(s),$$

din (10) va rezulta un sistem pentru necunoscuta \mathbf{Y} de forma

$$-\dot{\mathbf{Y}}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{M}, \quad (4.12)$$

cu condiția inițială $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{I}$.

Să observăm că soluția problemei Cauchy

$$\begin{aligned} -\dot{\mathbf{Y}}(s) &= \mathbf{M}\mathbf{Y}(s) \\ \mathbf{Y}(0) &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

este $\mathbf{Y}(s) = \exp(-\mathbf{M}s)$ și deoarece permută cu \mathbf{M} va fi soluția unică a problemei Cauchy, formulate în (12).

Deci soluția problemei (10) se obține sub forma

$$\mathbf{H}(s) = \exp(-s\mathbf{M}^T) \exp(-s\mathbf{M}), \quad \forall s \geq 0 \quad (4.13)$$

Arătăm că funcția $\mathbf{H}(s)$ se exprimă prin formula anterioară, și pentru $s < 0$. Pentru aceasta folosim relația (8) din care rezultă că \mathbf{H} este definită și pentru valori negative. Fie acum $\xi = s - t < 0$, și deci $\xi + t = s > 0$. Avem din (8)

$$\mathbf{H}(\xi) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{H}(\xi + t)\mathbf{E}(t).$$

Derivând relația anterioară în raport cu t și considerând $t = 0$ rezultă același sistem diferențial pentru \mathbf{H} (definită pentru $\xi < 0$) și cu aceeași condiție inițială, la $\xi = 0$. Astfel rezultă afirmația.

Înlocuim pe \mathbf{H} în relația (8) cu valoarea găsită (13)

$$\exp(-(s-t)\mathbf{M}^T)\exp(-(s-t)\mathbf{M}) = \mathbf{E}^T(t)\exp(-s\mathbf{M}^T)\exp(-s\mathbf{M})\mathbf{E}(t).$$

Pentru $s = 0$, din relația de mai sus, se obține că $\exp(t\mathbf{M}^T)\exp(t\mathbf{M}) = \mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)$, sau $\mathbf{I} = \exp(-t\mathbf{M}^T)\mathbf{E}^T(t)\mathbf{E}(t)\exp(-t\mathbf{M}) = (\mathbf{E}(t)\exp(-t\mathbf{M}))^T\mathbf{E}(t)\exp(-t\mathbf{M})$ și deci $\bar{\mathbf{Q}}(t) \equiv \mathbf{E}(t)\exp(-t\mathbf{M}) \in Ort$.

Astfel am arătat că

$$\mathbf{E}(t) = \bar{\mathbf{Q}}(t)\exp(t\mathbf{M}), \quad \text{dar} \quad \mathbf{E}(t) = \mathbf{Q}^T(t)\mathbf{F}_0(t),$$

de unde

$$\mathbf{F}_0(t) = \mathbf{Q}(t)\bar{\mathbf{Q}}(t)\exp(t\mathbf{M}) \equiv \tilde{\mathbf{Q}}(t)\exp(t\mathbf{M}).$$

In concluzie, din relația anterioară

$$\text{Dacă } \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{F}_0(t) = \mathbf{Q}(t)\bar{\mathbf{Q}}(t) \in Ort$$

$$\text{Dacă } \mathbf{M} \neq 0, \text{ luăm } \kappa = |\mathbf{M}|, \quad \mathbf{N} = \frac{1}{\kappa}\mathbf{M} \text{ și atunci,}$$

$$\mathbf{F}_0(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t)\exp(t\kappa\mathbf{N}), \quad \text{cu } \tilde{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{I} \text{ și } |\mathbf{N}| = 1.$$

Demonstrația reciprocei. Presupunem că are loc reprezentarea (2) pentru \mathbf{F}_0 . Rezultă că

$$\mathbf{C}_0(\tau) \equiv \mathbf{F}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\tau) = \exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\exp(\tau\kappa\mathbf{N}). \quad (4.14)$$

Din formula (5), în care utilizăm ipoteza (2) și formula (14) avem

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t(\tau) &= (\exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t))^T \exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\exp(\tau\kappa\mathbf{N})\exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t)\exp(-t\kappa\mathbf{N}^T)\exp(\tau\kappa\mathbf{N}^T)\exp(\tau\kappa\mathbf{N})\exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t). \end{aligned}$$

In final, înlocuind $\tau = t - s$ deducem că

$$\mathbf{C}_t^s(s) = \mathbf{Q}(t)\exp(-s\kappa\mathbf{N}^T)\exp(-s\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t), \quad (4.15)$$

care împreună cu (14) conduc la relația (1) din definiția m.i.a.r.c.

Ca o *consecință* a teoremei de caracterizare a mișcărilor cu istoria alungirilor relative constantă vom reprezenta tensorul lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, C_t^t .

Vom introduce următoarele notații

$$\mathbf{M} = \kappa \mathbf{N}, \quad \mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t), \quad (4.16)$$

asociate unei m.i.a.r.c. caracterizată prin condiția (2).

Consecința 1. Pe o mișcare cu istoria alungirilor relative constantă tensorul lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, se reprezintă prin

$$\mathbf{C}_t^t(s) = \exp(-s\mathbf{M}^T(t)) \exp(-s\mathbf{M}(t)) \quad \forall \quad s \geq 0. \quad (4.17)$$

Demonstrație. Pornind de la definiția funcției exponențiale de argument tensorial se obține că

$$\mathbf{Q} \exp(\mathbf{M}) \mathbf{Q}^T = \exp(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T), \quad \forall \quad \mathbf{Q} \in \text{Ort}, \quad \mathbf{M} \in \text{Lin}. \quad (4.18)$$

Dacă se utilizează această proprietate în condiția (15), care are loc pentru mișcări cu istoria alungirilor relative constantă, se deduce rezultatul formulat.

Să observăm că are loc în mod evident următoarea

Propoziția 1. În cazul m.i.a.r.c. o dată cu reprezentarea (2) are loc și reprezentarea

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, t) = \mathbf{Q}(t) \exp(t(-\kappa)(-\mathbf{N})),$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ și $|(-\mathbf{N})| = 1$. Deci parametrul κ poate lua valori reale arbitrare.

Condiția (C.II) de caracterizare a mișcărilor cu istoria alungirilor relative constantă:

Teorema 1. Condiția necesară și suficientă ca o mișcare χ să fie cu istoria alungirilor relative constantă este ca să existe $\mathbf{Q}(\tau) \in \text{Ort}$, cu $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ și $\mathbf{M} \in \text{Lin}$, astfel încât

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \exp(-s\mathbf{M}^T(t)) \exp(-s\mathbf{M}(t)) \quad \forall s \in \mathbb{R}_+, \quad (4.19)$$

pentru orice $s \in \mathbb{R}_+$ și orice $t \in \mathbb{R}$, unde $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$.

Demonstrație. Presupunem că mișcarea χ este cu istoria alungirilor relative constantă. Atunci are loc reprezentarea din teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c., pe care o vom utiliza în calculul expresiei gradientului de deformare în mișcarea relativă

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{F}_0(\mathbf{X}, \tau)(\mathbf{F}_0(\mathbf{X}, t))^{-1}, \quad \text{și deci}$$

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp(\tau\kappa\mathbf{N}) \exp(-t\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t) \equiv \mathbf{Q}(\tau) \exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T(t),$$

în care $\mathbf{M} = \kappa \mathbf{N} \in Lin$, $s \equiv t - \tau \geq 0$ (deci $\tau \leq t$). Dacă folosim expresia calculată în definiția tensorului lui Cauchy - Green la dreapta, în descrierea relativă, obținem

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{F}_i^T(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{F}_i(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}(t) \exp(-s\mathbf{M}^T) \exp(-s\mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t),$$

de unde, prin introducerea câmpului tensorial $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$, rezultă necesitatea condiției formulate.

Reciproc. Presupunem că are loc formula de reprezentare a tensorului lui Cauchy - Green la dreapta, în descriere relativă

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{x}, s) = \exp(-s\mathbf{M}^T(t)) \exp(-s\mathbf{M}(t)),$$

pentru orice $s \in R_+$ cu $\mathbf{M}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{M}\mathbf{Q}^T(t)$, $\mathbf{Q}(t) \in Ort$, $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{I}$ la orice moment de timp t , sau, într-o reprezentare echivalentă

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t) \exp(-s\mathbf{M}^T) \exp(-s\mathbf{M}) \mathbf{Q}^T(t), \quad (4.20)$$

dacă folosim (19). Fie $t = 0$, din (20) rezultă că

$$\mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s) = \exp(-s\mathbf{M}^T) \exp(-s\mathbf{M}) \quad \forall s \in R_+.$$

Revenind în (20) obținem reprezentarea

$$\mathbf{C}_i^t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{C}_0^0(\mathbf{x}, s) \mathbf{Q}^T(t) \quad \forall s \in R_+,$$

care arată, conform Definiției (1), că suntem pe o mișcare cu m.i.a.r.c.

4.1.3 Lema lui Wang

Lema 1. Pe mișcări cu istoria alungirilor relative constantă primii trei tensori ai lui Rivlin- Ericksen determină în mod unic mișcarea.

Demonstrație. În ipoteza că χ este o m.i.a.r.c. au loc formulele recurente de calcul pentru tensorii lui Rivlin- Ericksen

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^T(t) + \mathbf{M}(t), \quad (4.21)$$

$$\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}^T(t) \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_{n-1}(\mathbf{x}, t) \mathbf{M}(t) \quad \forall n \geq 2.$$

Vom presupune cunoscuți primii trei tensori ai lui Rivlin- Ericksen. Din primele trei relații (21) vom arăta că poate fi determinată istoria tensorului lui Cauchy - Green în descriere relativă, deci m.i.a.r.c.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t) + \mathbf{M}(t), \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t) \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \mathbf{M}(t), \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{M}^T(t) \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) \mathbf{M}(t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Presupunem prin absurd că mai există un $\bar{M}(t)$ astfel încât să fie verificate relațiile (22)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t) + \bar{\mathbf{M}}(t), \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)\bar{\mathbf{M}}(t), \\ \mathbf{A}_3(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{M}}^T(t)\mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x}, t)\bar{\mathbf{M}}(t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

În continuare nu vom mai menționa \mathbf{x} și t , pentru simplificarea relațiilor. Din primele relații (22) și (23) rezultă, pe de o parte, că

$$\mathbf{M}^T + \mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}^T + \bar{\mathbf{M}}, \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{M}\}^S = \{\bar{\mathbf{M}}\}^S.$$

Pe de altă parte, vom introduce notațiile

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \{\mathbf{M}\}^S + \{\mathbf{M}\}^A = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \{\mathbf{M}\}^A, \quad \mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W} \in \text{Asim}, \\ \bar{\mathbf{M}} &= \{\bar{\mathbf{M}}\}^S + \{\bar{\mathbf{M}}\}^A = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \{\bar{\mathbf{M}}\}^A. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Din al doilea rând de relații (22) și (23) avem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \mathbf{M} &= \bar{\mathbf{M}}^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \bar{\mathbf{M}} \quad \Leftrightarrow \\ (\mathbf{M}^T - \bar{\mathbf{M}}^T) \mathbf{A}_1 &= -\mathbf{A}_1 (\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{W} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{W}. \end{aligned}$$

În mod analog din cel de-al treilea grup de relații (22) și (23), împreună cu (24), obținem

$$\mathbf{W} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{W}.$$

În final am arătat că sunt satisfăcute următoarele relații

$$\mathbf{W} \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{W}, \quad (4.25)$$

unde $\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W} \in \text{Asim}$, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \text{Sim}$.

Fie $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}$, bază ortonormată formată din vectorii proprii ai tensorului simetric \mathbf{A}_1 . Reprezentările matriciale pentru $\mathbf{A}_1 \in \text{Sim}$ și $\mathbf{W} \in \text{Asim}$ în baza menționată vor fi scrise sub forma

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Dintr-un calcul direct rezultă

$$[\mathbf{W} \mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} 0 & bx & cy \\ -ax & 0 & cz \\ -ay & -bz & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{A}_1 \mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & ax & ay \\ -bx & 0 & bz \\ -cy & -cz & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Deci, rezultă că, relația (25)₁, $\mathbf{A}_1 \mathbf{W} = \mathbf{W} \mathbf{A}_1$, este echivalentă cu sistemul

$$(a - b)x = 0, \quad (a - c)y = 0, \quad (b - c)z = 0. \quad (4.28)$$

Avem de considerat următoarele trei cazuri posibile, după valorile proprii ale tensorului \mathbf{A}_1 :

caz 1.: $a \neq b \neq c \neq a$,

caz 2.: $a = b \neq c$,

caz 3.: $a = b = c$.

În cazul 1. rezultă $x = y = z = 0 \iff \mathbf{W} = 0$.

Astfel dacă valorile proprii ale lui \mathbf{A}_1 sunt distincte, atunci din (28) avem unicitate, în sensul că $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}}$.

În cazul 2. rezultă $y = z = 0$, deci $\mathbf{W} = x(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$ și $\mathbf{M} = \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{W}$. Cunoaștem reprezentarea lui \mathbf{W} în baza vectorilor proprii ai lui \mathbf{A}_1 , iar pe \mathbf{A}_2 , în aceeași bază îl scriem sub forma

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Din calcul direct avem

$$[\mathbf{W} \mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} xa_{12} & xa_{22} & xa_{23} \\ -xa_{11} & -xa_{12} & -xa_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2 \mathbf{W}] = \begin{pmatrix} -xa_{12} & xa_{11} & 0 \\ -xa_{22} & xa_{12} & 0 \\ -xa_{23} & xa_{13} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Astfel din (29) deducem că relația (25)₂ este echivalentă cu sistemul

$$a_{12}x = 0, \quad a_{13}x = 0, \quad a_{23}x = 0, \quad (a_{22} - a_{11})x = 0.$$

Deoarece $x \in \mathbb{R}$ este arbitrar, avem $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, $a_{11} = a_{22}$. Rezultă că \mathbf{A}_2 are aceiași vectori proprii ca \mathbf{A}_1 , admitând reprezentarea

$$[\mathbf{A}_2] = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

În continuare, vom demonstra că în cazul 2. au loc următoarele relații între tensorii Rivlin - Ericksen : $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2$, $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3$.

Revenim cu informațiile astfel obținute în relațiile (22), care definesc recurent tensorii Rivlin - Ericksen. Obținem

$$\mathbf{A}_2 = \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right)^T \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right) = \mathbf{A}_1^2 - \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1 \tilde{\mathbf{W}}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}},$$

unde $\tilde{\mathbf{W}} = \{\mathbf{M}\}^A \in \text{Asim}$. Vom nota cu $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$, elementele lui $\tilde{\mathbf{W}}$, într-o reprezentare similară cu aceea pentru \mathbf{W} . În baza vectorilor proprii ai lui \mathbf{A}_1 reprezentăm relația (30) și obținem egalitatea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & (a-c)\tilde{y} \\ 0 & 0 & (a-c)\tilde{z} \\ (a-c)\tilde{y} & (a-c)\tilde{z} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Egalitatea scrisă în (31) are loc, dacă și numai dacă

$$a_{11} = a^2, \quad a_{33} = c^2, \quad (a-c)\tilde{y} = 0, \quad (a-c)\tilde{z} = 0, \quad \text{cu } a \neq c,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2, \quad \tilde{y} = \tilde{z} = 0.$$

Am dedus astfel că

$$[\tilde{\mathbf{W}}] = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{x} & 0 \\ -\tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Revenim în ultima relație din (22) și găsim

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}},$$

$$\mathbf{A}_3 = \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right)^T \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2 \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right) = \mathbf{A}_1^3 - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^2\tilde{\mathbf{W}}.$$

Reprezentăm pe componente egalitatea anterioară, din care vom deduce forma matricială de reprezentare a lui \mathbf{A}_3 în baza vectorilor proprii ai lui \mathbf{A}_1 .

$$[\mathbf{A}_3] = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

adică $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3$.

Vom demonstra acum că $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T$, pe baza egalității

$$[\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1] = \begin{pmatrix} 0 & a\tilde{x} & 0 \\ -a\tilde{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}}] \quad (4.33)$$

și folosind expresiile

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T \mathbf{M} &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right)^T \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{A}_1^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1) - \tilde{\mathbf{W}}^2, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{M}^T &= \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}\right) \left(\frac{1}{2}\mathbf{A}_1 - \tilde{\mathbf{W}}\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathbf{A}_1^2 - \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1\tilde{\mathbf{W}} - \tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A}_1) - \tilde{\mathbf{W}}^2, \end{aligned}$$

deduse pe baza formulei (30)₂.

Deorece \mathbf{M}^T și \mathbf{M} permută, prin reintroducerea momentului de timp t , rezultă că

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \exp(-s\mathbf{M}^T(t)) \exp(-s\mathbf{M}(t)) = \exp(-s\mathbf{A}_1(t)).$$

În cazul 3. rezultă că $\mathbf{M} - \bar{\mathbf{M}} = \mathbf{W}$ și $\mathbf{M} = \frac{1}{2}\mathbf{A}_1 + \tilde{\mathbf{W}}$, cu \mathbf{W} și $\tilde{\mathbf{W}}$ arbitrare în Asim, dar

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1^2 = a^2\mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1^3 = a^3\mathbf{I}.$$

Evident ca \mathbf{M}^T și \mathbf{M} permută, vezi formula (34). Prin urmare folosind relația (19), din condiția (C.II), obținem că

$$\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, s) = \exp(-s\mathbf{M}^T(t)) \exp(-s\mathbf{M}(t)) = \exp(-s\mathbf{A}_1(t)) = \exp(-as)\mathbf{I}$$

Concluzie. Cadrul constitutiv adecvat descrierii mișcărilor cu istoria alungirilor relative constantă este clasa materialelor Rivlin - Ericksen de ordinul 3 (având în vedere rezultatul din lema lui Wang [1965]).

4.2 Mișcări vâscometrice

4.2.1 Definiția mișcării vâscometrice

Definiția 2. O mișcare χ este o mișcare vâscometrică (în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$) dacă este o mișcare cu istoria alungirilor relative constantă (în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$), caracterizată printr-o transformare $\mathbf{N} \in \text{Lin}$, cu \mathbf{N} - nilpotent de ordinul doi; deci dacă admite o reprezentare de forma (2), cu $\mathbf{N}^2 = 0$.

4.2.2 Existența bazei canonice

Vom considera clasa mișcărilor vâscometrice și vom demonstra că pentru fiecare mișcare vâscometrică se poate determina o bază în care matricea de reprezentare a \mathbf{N} -ului caracteristic mișcării este aceeași, având un singur element nenul. Demonstrăm următoarea

Lema 2. Fie $\mathbf{N} \in \text{Lin}$, cu $|\mathbf{N}| = 1$ și $\mathbf{N}^2 = 0$.

Există o bază ortonormată, notată $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{1,3\}}$, astfel încât matricea de reprezentare a lui \mathbf{N} în această bază să fie de forma

$$[\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demonstrație. Fie următoarele subspații vectoriale ale lui \mathcal{V}

$$\text{Ker}(\mathbf{N}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{N}\mathbf{v} = \mathbf{0}\},$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{N}) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{v}\}$$

Deoarece \mathbf{N} este nilpotent de ordinul doi rezultă că

$$\mathbf{N}(\mathcal{R}(\mathbf{N})) = \{\mathbf{0}\}, \quad \text{și deci } \mathcal{R}(\mathbf{N}) \subset \text{Ker}(\mathbf{N}), \quad (4.35)$$

Vom demonstra că $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 2$. Presupunem pentru aceasta, prin absurd, că $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 0$, sau 1. Dacă $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 0$ rezultă că \mathbf{N} este injectivă, iar din $\mathbf{N}^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ rezultă $\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, și deci $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ceea ce este absurd, având în vedere că $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ era arbitrar și deci $\mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Dacă $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 1$, atunci vom arăta că $\dim \mathcal{R}(\mathbf{N}) = 1$. Dar din relația (35) rezultă că $\dim \mathcal{R}(\mathbf{N}) = 0$ sau 1.

Presupunem prin absurd că $\dim \mathcal{R}(\mathbf{N}) = 0$, deci $\mathbf{N}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Astfel rezultă că $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 3$, ceea ce contrazice ipoteza admisă (că $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 1$).

A rezultat astfel că singura posibilitate este ca $\dim \mathcal{R}(\mathbf{N}) = 1$.

Notăm cu $\{\mathbf{u}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ o bază a lui \mathcal{V} astfel încât $\text{Sp}\{\mathbf{u}_1\} = \mathcal{R}(\mathbf{N}) = \text{Ker}(\mathbf{N})$, iar

$$\mathbf{N}\mathbf{u}_2 = \alpha\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{N}\mathbf{u}_3 = \beta\mathbf{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \beta\mathbf{u}_2 - \alpha\mathbf{u}_3 \in \text{Ker}(\mathbf{N}) = \text{Sp}\{\mathbf{u}_1\}.$$

Se obține din nou o contradicție, deoarece $\{\mathbf{u}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ sunt liniari independenți.

Dacă $\dim \text{Ker}(\mathbf{N}) = 2$ atunci există $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{V}$ cu $\mathbf{N}\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ și $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} = 0$ pentru orice $\mathbf{v} \in \text{Ker}(\mathbf{N})$.

$$\text{Fie } \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{N}\mathbf{e}_1}{|\mathbf{N}\mathbf{e}_1|} \quad \text{atunci } |\mathbf{e}_2| = 1, \quad \mathbf{e}_2 \in \text{Ker}(\mathbf{N}), \quad \text{cu } \mathbf{e}_2 \neq \mathbf{e}_1.$$

Rezultă că $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$. Fie $\mathbf{e}_3 \in \text{Ker}(\mathbf{N})$ astfel încât $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Astfel s-a construit baza ortonormată $\{\mathbf{e}_i\}_{i=\overline{1,3}}$ în care $\mathbf{N}\mathbf{e}_2 = \mathbf{N}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$, iar $\mathbf{N}\mathbf{e}_1 = k\mathbf{e}_2$ cu $k = |\mathbf{N}\mathbf{e}_1|$. Rezultă că singurul element nenul în reprezentarea lui \mathbf{N} , în această bază, este $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N}\mathbf{e}_1 = k$, iar $k = 1$ deoarece $|\mathbf{N}| = 1$. Astfel am demonstrat că are loc reprezentarea din enunț.

Dacă $\dim \text{Ker} \mathbf{N} = 3$ atunci $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ și astfel este contrazisă ipoteza $|\mathbf{N}| = 1$. Astfel singurul caz posibil este cel prezentat anterior.

Baza construită în această lemă se va numi *baza canonică* și va avea un rol esențial în reprezentările ulterioare.

Incheiem cu următoarea

Propoziție 2. Orice mișcare vâscometrică este incompresibilă.

Demonstrație. Această afirmație se obține ca o consecință a afirmației (vezi Ex. 7, din paragraful 4.9): o m.i.a.r.c. este incompresibilă dacă și numai dacă $\text{tr}(\kappa\mathbf{N}) = 0$. Ca o consecință a Lemei 2., rezultă că $\text{tr}(\mathbf{N}) = 0$, într-o mișcare vâscometrică.

4.3 Starea de tensiune într-un fluid supus la o mișcare vâscometrică

4.3.1 Teorema de caracterizare a stării de tensiune într-un fluid supus la o mișcare vâscometrică

Vom prezenta o teoremă datorată lui Noll [1962], prin care starea de tensiune într-un fluid (în sensul lui Noll) supus la o mișcare vâscometrică se exprimă (mai puțin un tensor sferic) prin intermediul a trei funcții, numite *funcții vâscometrice*. Aceste funcții se definesc în mod *unic* prin intermediul funcțiilor constitutive ale fluidului considerat.

Teorema 2. Fie \mathcal{B} corp constituit dintr-un fluid în $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$, supus la o mișcare vâscometrică. Fie $(\mathbf{N}, \kappa) \in \text{Lin} \times R$ – setul care caracterizează mișcarea vâscometrică, cu $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$ și $|\mathbf{N}| = 1$. Atunci

i) *Există* trei funcții cu valori reale, notate $\sigma_1(\kappa)$, $\sigma_2(\kappa)$, și $\tau(\kappa)$ astfel încât starea de tensiune în particula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ la momentul t să se reprezinte sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\bar{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N} + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T. \quad (4.36)$$

ii) *Semnificația mecanică* a funcțiilor vâscometrice este conținută în formulele

$$\begin{aligned} T_{11} - T_{33} &= \sigma_1(\kappa), & T_{22} - T_{33} &= \sigma_2(\kappa), \\ T_{12} &= \tau(\kappa), & T_{23} = T_{13} &= 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

unde am folosit notațiile $T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j$, pentru *componentele tensorului de tensiune în baza canonică* asociată lui \mathbf{N} .

Observația 1. Funcția $\bar{p}(\mathbf{x}, t)$ rămâne nedeterminată, fiind de tip presiune hidrostatică. Prezența ei în model este impusă de faptul că suntem în cazul mișcărilor *incompresibile* (vezi paragraful 2.) și deci conform principiului determinismului modificat starea de tensiune este detrimată constitutiv mai puțin un tensor sferic.

Observația 2. În teorema de reprezentare a stării de tensiune poate fi utilizat orice \mathbf{N} care caracterizează mișcarea vâscometrică.

Propoziția 3. Starea de tensiune în fluidul supus la o mișcare vâscometrică poate fi reprezentată sub forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\bar{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tau(\kappa) \frac{(\mathbf{M} + \mathbf{M}^T)}{|\mathbf{M}|} + \sigma_1(\kappa) \frac{\mathbf{M}^T\mathbf{M}}{(|\mathbf{M}|)^2} + \sigma_2(\kappa) \frac{\mathbf{M}\mathbf{M}^T}{(|\mathbf{M}|)^2}, \quad (4.38)$$

unde $\kappa = |\mathbf{M}| \neq 0$.

Demonstrație. Considerăm reprezentarea constitutivă a fluidului (în sensul lui Noll) dată în 2.6.1 sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= -p(\rho)\mathbf{I} + \mathcal{R}(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \rho), \quad \text{cu proprietățile} \\ \mathcal{R}(\mathbf{I}^t, \rho) &= \mathbf{0}, \\ \mathcal{R}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_i^t(\cdot)\mathbf{Q}^T, \rho) &= \mathbf{Q}\mathcal{R}(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \rho)\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort. \end{aligned} \tag{4.39}$$

Deoarece prin definiție orice mișcare vâscometrică este o m.i.a.r.c. putem folosi reprezentarea tensorului lui Cauchy- Green în descrierea relativă, dată în (1)

$$\mathbf{C}_i^t(s) = \mathbf{Q}(t)\exp(-s\kappa\mathbf{N}^T)\exp(-s\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t), \quad \text{pentru orice } s \geq 0.$$

Pe de altă parte, orice mișcare vâscometrică este incompresibilă, și prin urmare, principiul determinismului modificat (Teorema 5 din paragraful 2.3), aplicat reprezentării constitutive pentru fluid (39) ne conduce la o reprezentare de forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= -\tilde{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{C}_i^t(\cdot)), \quad \text{cu proprietățile} \\ \tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t) &= \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{Q}\mathbf{C}_i^t(\cdot)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{C}_i^t(\cdot))\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort. \end{aligned}$$

Înlocuind în reprezentarea anterioară expresia (1) pentru mișcări vâscometrice rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\tilde{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \tilde{\mathcal{R}}(\exp(-\cdot\mathbf{M}^T(t))\exp(-\cdot\mathbf{M}(t))), \tag{4.40}$$

dacă am utilizat notația din (16). Construim funcția

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : \mathcal{D}_g \subset Lin &\longrightarrow Sim \\ \mathbf{g}(\mathbf{M}) &= \tilde{\mathcal{R}}(\exp(-\cdot\mathbf{M}^T)\exp(-\cdot\mathbf{M})) \in Sim \end{aligned} \tag{4.41}$$

Arătăm că aceasta are proprietățile

- \mathbf{g} este izotropă : $\mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{M})\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad \forall \mathbf{M} \in \mathcal{D}_g;$
- $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$

Să demonstrăm cele două proprietăți. Pentru aceasta reamintim că

$$\exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad \text{deci}$$

$$\exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}^T\mathbf{Q}^T)\exp(-s\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\exp(-s\mathbf{M}^T)\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\exp(-s\mathbf{M})\mathbf{Q}^T.$$

Utilizăm proprietățile de izotropie ale operatorului $\tilde{\mathcal{R}}(\cdot)$:

$$\tilde{\mathcal{R}}(\mathbf{Q}\exp(-\cdot\mathbf{M}^T)\exp(-\cdot\mathbf{M})\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\tilde{\mathcal{R}}(\exp(-\cdot\mathbf{M}^T)\exp(-\cdot\mathbf{M}))\mathbf{Q}^T,$$

scrisă pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$ și pentru o formă particulară a istoriei tenso-ului Cauchy - Green în mișcarea relativă. Ultima egalitate ne conduce la proprietatea de izotropie a funcției \mathbf{g} , proprietatea a).

b) Dacă $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ este introdus în

$$\mathbf{C}_i^t(\cdot) = \exp(-\cdot \mathbf{M}^T(t)) \exp(-\cdot \mathbf{M}(t)) \quad \text{atunci} \quad \mathbf{C}_i^t(s) = \mathbf{I} = \mathbf{I}^t(s) \quad \forall s \geq 0.$$

Astfel din proprietățile operatorului constitutiv și din definiția funcției \mathbf{g} , rezultă

$$\bar{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t(s)) = \mathbf{0} \quad \text{și} \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \bar{\mathcal{R}}(\mathbf{I}^t(s)) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

În concluzie am obținut pentru starea de tensiune următoarea reprezentare

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -\tilde{p}(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \mathbf{g}(\mathbf{M}(t)), \quad \text{cu proprietățile}$$

$$\begin{aligned} a) \quad & \mathbf{g}(\mathbf{Q}\mathbf{M}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\mathbf{g}(\mathbf{M}(t))\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort, \\ b) \quad & \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.42}$$

trecând de la operatorul constitutiv, cu valorile calculate pe istoriile particulare asociate m.i.a.r.c., la funcția \mathbf{g} , prin formulele (40), (41).

Folosind izotropia funcției \mathbf{g} vom arăta că pentru $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \tau(\kappa)(\mathbf{N} + \mathbf{N}^T) + \sigma_1(\kappa)\mathbf{N}^T\mathbf{N} + \sigma_2(\kappa)\mathbf{N}\mathbf{N}^T + g_{33}(\kappa)\mathbf{I}, \tag{4.43}$$

unde $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}$, $\kappa = |\mathbf{M}|$ și deci $|\mathbf{N}| = 1$.

Dacă $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ atunci din proprietatea b) a funcției \mathbf{g} avem $\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ și în mod evident are loc egalitatea anterioară.

Dacă $\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$ atunci demonstrarea formulei (43) se face după cum urmează.

Deoarece \mathbf{N} este nilpotent de ordinul doi, de norma 1, folosim lema 2. și prin urmare punem în evidență baza canonică.

Considerăm transformarea ortogonală : $\mathbf{Q}_0 \in Ort$, care se reprezintă în baza canonică asociată lui \mathbf{N} prin

$$[\mathbf{Q}_0] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să observăm că $[\mathbf{Q}_0\mathbf{M}\mathbf{Q}_0^T] = [\mathbf{M}]$, care se obține din calculul direct

$$[\mathbf{Q}_0\mathbf{N}\mathbf{Q}_0^T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = [\mathbf{N}],$$

cu remarca $[\mathbf{M}] = \kappa[\mathbf{N}]$.

Pentru acest \mathbf{Q}_0 , din proprietatea de izotropie, rezultă că

$$\mathbf{Q}_0 \mathbf{g}(\mathbf{M}) \mathbf{Q}_0^T = \mathbf{g}(\mathbf{Q}_0 \mathbf{M} \mathbf{Q}_0^T) = \mathbf{g}(\mathbf{M}). \quad (4.44)$$

În baza canonică vom nota prin $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M}) \mathbf{e}_j$ elementele matricii $[\mathbf{g}(\mathbf{M})] \in Sim$ și vom scrie în baza canonică egalitatea anterioară, (44). Efectuând înmulțirea matricelor găsim

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & -g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & -g_{23} \\ -g_{31} & -g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Din ultima egalitate rezultă că $g_{13} = 0$ și $g_{23} = 0$. Astfel matricea $[\mathbf{g}(\mathbf{M})]$ va avea forma

$$[\mathbf{g}(\mathbf{M})] = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Arătăm că funcția \mathbf{g} este independentă de $\mathbf{M} \in Lin$, ea va depinde numai de $|\mathbf{M}| = \kappa$. Altfel exprimat

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \mathbf{g}(|\mathbf{M}|)$$

Fie \mathbf{M} și $\bar{\mathbf{M}}$ ambele nenule, cu $\mathbf{M}^2 = \bar{\mathbf{M}}^2 = 0$ și $|\mathbf{M}| = |\bar{\mathbf{M}}| = \kappa$. Există bazele canonice asociate transformărilor \mathbf{M} și $\bar{\mathbf{M}}$, notate prin $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \overline{1,3}}$, și respectiv $\{\mathbf{f}_i\}_{i \in \overline{1,3}}$ și au loc următoarele formule de reprezentare în bazele corespunzătoare

$$\mathbf{M} = \kappa \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \bar{\mathbf{M}} = \kappa \mathbf{f}_2 \otimes \mathbf{f}_1.$$

Pe de altă parte rezultă că există $\bar{\mathbf{Q}} \in Ort$ astfel încât $\bar{\mathbf{Q}} \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_j$, pentru $j \in \overline{1,3}$.

Ca o consecință a izotropiei funcției \mathbf{g} au loc următoarele egalități

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M} \mathbf{e}_j = \mathbf{f}_i \cdot \bar{\mathbf{M}} \mathbf{f}_j = \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{e}_j, \quad \text{sau}$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{M} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{e}_j \iff \mathbf{M} = \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{M}} \bar{\mathbf{Q}}^T$$

și

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M}) \mathbf{e}_j &= \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\mathbf{M}) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{f}_j = \mathbf{f}_i \cdot \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{g}(\mathbf{M}) \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{f}_j \\ &= \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{Q}}) \mathbf{f}_j = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{g}(\bar{\mathbf{M}}) \mathbf{f}_j \quad \forall i, j \in \overline{1,3} \end{aligned}$$

Fie un \mathbf{M} fixat, cu proprietățile menționate și $|\mathbf{M}| = \kappa$, atunci folosind reprezentarea găsită pentru $\mathbf{g}(\mathbf{M})$ avem

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{M}) &= g_{11}(\kappa) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + g_{12}(\kappa) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + \\ &+ g_{22}(\kappa) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + g_{33}(\kappa) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Notăm cu

$$\sigma_1(\kappa) = g_{11}(\kappa) - g_{33}(\kappa), \quad \sigma_2(\kappa) = g_{22}(\kappa) - g_{33}(\kappa), \quad \tau(\kappa) = g_{12}(\kappa),$$

care introduse în reprezentarea anterioară conduc la

$$\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \sigma_1(\kappa)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(\kappa)\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \tau(\kappa)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(\kappa)\mathbf{I}, \quad (4.46)$$

dacă ținem seama că $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. Din Propoziția 1. $\kappa \in R$.

Folosim reprezentările în baza canonică pentru $\mathbf{N} = (1/\kappa)\mathbf{M}$ și obținem că

$$[\mathbf{N}^T \mathbf{N}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} \mathbf{N}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă astfel că au loc egalitățile între aplicațiile liniare menționate

$$\mathbf{N} = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N}^T = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{N}^T \mathbf{N} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{N} \mathbf{N}^T = \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (4.47)$$

Dacă ținem seama de (47) în (46) obținem din (42) formula de reprezentare a stării de tensiune (36), în care s-a notat $-\bar{p} = g_{33}(\kappa) - \tilde{p}$.

ii) Formulele (37) se pot obține direct din reprezentarea (36), dacă se utilizează relațiile (47) care descriu reprezentările, în baza canonică a tensorilor ce intervin în membrul drept al relației (36).

Observația 3. Funcțiile vâscometrice introduse în teorema lui Noll admit reprezentările (37) prin componentele tensorului de tensiune în baza canonică asociată tensorului caracteristic al mișcării vâscometrice. Prin urmare funcțiile vâscometrice σ_j , cu $j \in \{1,2\}$, au semnificație mecanică de *diferențe ale tensiunilor normale*, iar funcția vâscometrică τ reprezintă o *tensiune de forfecare*. De aici decurg denumirile acestora.

Funcțiile vâscometrice $\sigma_j(\cdot)$ se numesc *funcții vâscometrice normale*, iar funcția vâscometrică $\tau(\cdot)$ se numește *funcție vâscometrică de forfecare*. Tensiunea de forfecare este egală cu componenta vectorului de tensiune care acționează pe un element de suprafață de normală \mathbf{e}_1 în direcția \mathbf{e}_2 .

Scalarul κ se numește *viteză de forfecare*, ceea ce se justifică atât prin dimensiunea fizică de viteză, cât și prin semnificația ei. Câteva considerații pe această temă vor fi făcute în paragraful 4.4.2, în care se analizează mișcarea staționară de forfecare.

4.3.2 Proprietăți ale funcțiilor vâscometrice

Propoziția 4. Funcțiile vâscometrice introduse în teorema de reprezentare (36) au următoarele proprietăți

$$\sigma_j(\kappa) = \sigma_j(-\kappa), \quad j \in \{1,2\}, \quad \tau(-\kappa) = -\tau(\kappa) \quad \forall \kappa \in R$$

Deci funcțiile vâscometrice normale sunt pare, iar funcția vâscometrică de forfecare este impară.

Demonstrație. Fie \mathbf{N} dat. Să considerăm $\mathbf{Q}_1 \in Ort$, reprezentat în baza canonică a lui \mathbf{N} prin matricea

$$[\mathbf{Q}_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Printr-un calcul direct rezultă că

$$[\mathbf{Q}_1 \mathbf{N} \mathbf{Q}_1^T] = -[\mathbf{N}].$$

Pe de altă parte

$$[\mathbf{Q}_1 \mathbf{g}(\mathbf{M}) \mathbf{Q}_1^T] = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} & 0 \\ -g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Folosim din nou proprietatea de izotropie a funcției \mathbf{g} , scrisă în (42) și utilizăm proprietatea menționată pentru compunerea cu \mathbf{Q}_1 a transformării \mathbf{N} . Rezultă

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{g}(\kappa \mathbf{N}) \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{g}(-\kappa \mathbf{N}). \quad (4.48)$$

Rescriem egalitatea din (48) prin intermediul reprezentării (46). Membrul stâng devine

$$\sigma_1(\kappa) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(\kappa) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 - \tau(\kappa) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(\kappa) \mathbf{I},$$

unde s-a folosit transformarea pentru $\mathbf{g}(\kappa \mathbf{N})$ prin compunere cu \mathbf{Q}_1 . Membrul drept rezultă egal cu

$$\sigma_1(-\kappa) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \sigma_2(-\kappa) \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \tau(-\kappa) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + g_{33}(-\kappa) \mathbf{I},$$

dacă în (46) am folosit perechea $(-\kappa, \mathbf{N})$. Afirmatia din enunțul propoziției se obține din (48), împreună cu formulele anterioare.

Observația 4. Dacă acceptăm că funcțiile vâscometrice sunt netede, prin dezvoltări în serie în vecinătatea lui $\kappa = 0$, obținem

$$\tau(\kappa) = \mu_0 \kappa + \mu_1 \kappa^3 + O(\kappa^5), \quad (4.49)$$

$$\sigma_1 = s_1 \kappa^2 + O(\kappa^4), \quad \sigma_2 = s_2 \kappa^2 + O(\kappa^4).$$

Vom presupune în cele ce urmează că

$$\kappa \longrightarrow \tau(\kappa) \text{ este inversabila} \quad (4.50)$$

și vom defini funcțiile

$$\hat{\sigma}_j(\gamma) = \sigma_j(\tau^{-1}(\gamma)), \quad (4.51)$$

numite *funcții vâscometrice normale modificate*. Aceste funcții vor fi folosite curent în paragraful 4. al prezentului capitol.

Observația 5. Sunt utilizate în literatură și alte reprezentări pentru funcțiile vâscometrice, ca de exemplu

$$\eta(\kappa) = \frac{\tau(\kappa)}{\kappa} \quad \text{cu proprietățile,}$$

$$\eta(-\kappa) = \eta(\kappa), \quad \exists \lim_{\kappa \rightarrow 0} \eta(\kappa) = \mu_0.$$

$\eta(\kappa)$ se numește *vâscozitate de forfecare*, sau *funcțiile vâscometrice reduse* $V(K)$, $N_1(K)$, $N_2(K)$, care sunt funcții adimensionale, pare, de variabilă adimensională

$$\tau(\kappa) = \mu_0 \kappa V(K),$$

$$\sigma_1(\kappa) = \mu_0 s_0 \kappa^2 N_1(K),$$

$$\sigma_2(\kappa) = \mu_0 s_0 \kappa^2 N_2(K),$$

unde $K = s_0 \kappa$. Mărimile μ_0 și s_0 se numesc *vâscozitate naturală* și respectiv *timp caracteristic (natural)*.

Constantele de material introduse au următoarele dimensiuni fizice

$$\dim(\mu_0) \equiv [\mu_0] = ML^{-1}T^{-1}, \quad \dim(s_0) \equiv [s_0] = T^{-1}.$$

Astfel proprietățile vâscometrice ale fluidelor sunt complet specificate prin cunoașterea cantităților :

1. *Vâscozitatea naturală* μ_0 .
2. *Timpul caracteristic natural* s_0 .
3. *Funcțiile vâscometrice reduse* $V(K)$, $N_1(K)$, $N_2(K)$.

Așa cum remarca Truesdell, există o infinitate de modalități de definire a constantelor de material, dar se pot introduce unele care să admită un suport experimental. Truesdell [1964] introduce funcția de *timp caracteristic natural* $\tilde{s}(K)$, ca fiind o măsură a importanței relative a tensiunilor normale și a celor de forfecare și care să se anuleze pentru acele fluide, și numai pentru acelea, pentru care nu există efecte ale tensiunilor normale, pe mișcări vâscometrice

$$\tilde{s}(K) \equiv \frac{\sqrt{(\sigma_1(\kappa))^2 + (\sigma_2(\kappa))^2}}{\kappa^2 \eta(\kappa)} = s_0 \frac{\sqrt{(N_1(K))^2 + (N_2(K))^2}}{V(K)} \quad (4.52)$$

$$\mu_0 = \eta(0), \quad s_0 \equiv \tilde{s}(0)$$

Funcțiile V , N_1 , N_2 rezultă că sunt supuse la restricțiile

$$V(0) = 1, \quad N_1^2(0) + N_2^2(0) = 1,$$

care se deduc din definițiile anterioare.

Observația 6. Cazul fluidului liniar vâcos, în care nu există efecte ale tensiunilor normale corespunde următoarelor reprezentări

$$\eta(K) \equiv \mu_0, \quad V(K) \equiv 1, \quad N_1(K) \equiv N_2(K) \equiv 0.$$

Date de natură experimentală privind valorile funcțiilor vâscometrice pot fi găsite în Coleman, Markovitz, Noll [1966], Larson [1989]. În Fig. 4.1 și 4.2 sunt date graficele pentru funcțiile vâscometrice ale unei soluții de poliizobutilenă în cetan (soluție des folosită în literatură pentru exemplificări, graficele fiind făcute după Coleman, Markovitz, Noll [1966]).

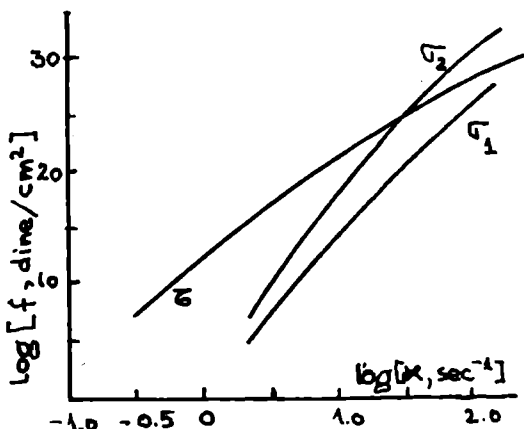


Fig. 4.1

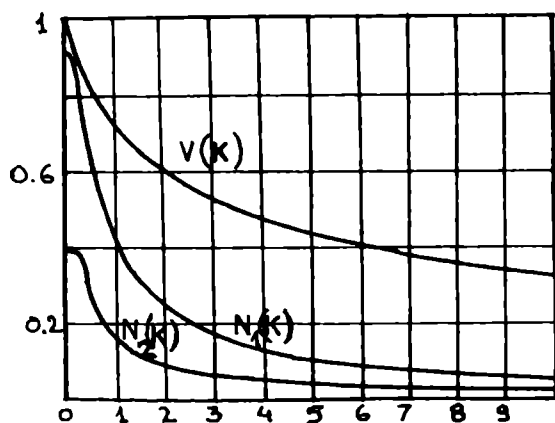


Fig. 4.2

4.4 Exemple de mișcări vâscometrice

Mișcările vâscometrice concrete (sau particulare) sunt introduse prin intermediul câmpului de viteze în particula $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ la fiecare moment de timp. Sunt definite *componentele contravariante ale vitezei în sisteme curbilinii de coordonate*.

În prezentarea exemplurilor vom urmări, în acest paragraf, numai *aspectele cinematice*, punând în evidență următoarele elemente

- a) *Definirea* câmpului de viteze în bazele locale specifice,
- b) *Construirea* mișcării căreia i se asociază câmpul de viteze menționat,
- c) *Demonstrarea* faptului că mișcările considerate sunt vâscometrice.

Vom prezenta următoarele mișcări

1. *mișcarea staționară de forfecare* în paragraful 4.4.2;

2. mișcarea elicoidală în cazul general, în paragraful 4.4.3;
3. mișcarea staționară de torsiune în paragraful 4.4.4;
4. mișcarea Couette și respectiv mișcarea Poiseuille vor fi obținute prin particularizări specifice din mișcarea elicoidală, dar vom prezenta în detaliu dinamica acestora în paragrafele 4.6.2 și 4.6.3;
5. mișcarea de tip con - placă va fi prezentată sub formă de probleme propuse în paragraful de exerciții.

În primul paragraf vom discuta formulele generale de cinematică care vor fi utilizate în cazurile concrete de mișcări vâscometrice.

4.4.1 Elemente generale de cinematică, aplicate în descrierea mișcărilor vâscometrice.

Vom nota prin $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$ și respectiv $\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X}, \tau)$ pozițiile particulei \mathbf{X} , la momentele de timp t și, respectiv, τ . Considerăm, într-o bază carteziană fixată, coordonatele lui \mathbf{x} și respectiv \mathbf{y} , notate prin $\{x^i\}_{i \in \{1,3\}}$ și $\{y^i\}_{i \in \{1,3\}}$, iar coordonatele curbilinii corespunzătoare vor fi notate $\{q^i\}_{i \in \{1,3\}}$ și $\{\xi^i\}_{i \in \{1,3\}}$.

Considerăm deci (vezi Fig. 4.3)

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t); \quad \{x^i\}_{i \in \{1,3\}} \longrightarrow \{q^i\}_{i \in \{1,3\}} \text{ bijectivă, nesingulară,}$$

$$\mathbf{y} = \chi(\mathbf{X}, \tau); \quad \{y^i\}_{i \in \{1,3\}} \longrightarrow \{\xi^i\}_{i \in \{1,3\}} \text{ bijectivă, nesingulară,}$$

regulate, de clasă C^2 .

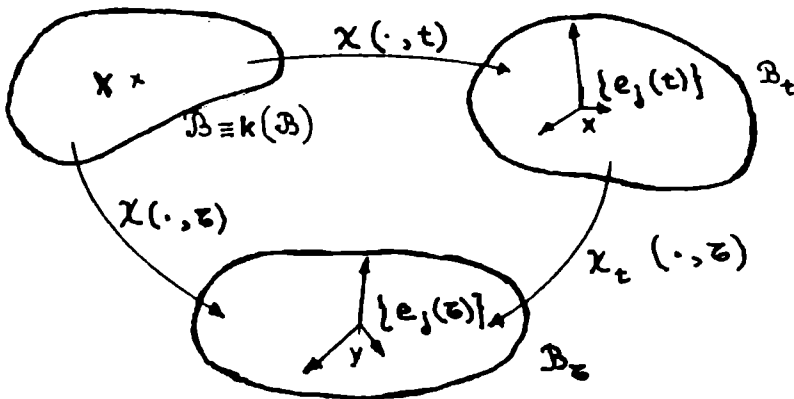


Fig. 4.3

Definim bazele locale în $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ — configurația corpului la momentul t , considerată drept configurație inițială într-o descriere relativă a mișcării și respectiv în

$\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\tau$ – configurația corpului la momentul τ , configurația curentă: $\{\mathbf{e}_i(t)\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}$ și respectiv $\{\mathbf{e}_i(\tau)\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}$, prin

$$\mathbf{e}_i(t) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i}, \quad \mathbf{e}_i(\tau) = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi^i}, \quad \forall i \in \overline{\{1,3\}} \quad (4.53)$$

Utilizăm notațiile standard pentru *bazele reciproce* ale bazelor locale definite mai sus, la momentul τ ,

$$\{\mathbf{e}^i(\tau)\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}, \quad \text{asfel încât } \mathbf{e}^k(\tau) \cdot \mathbf{e}_p(\tau) = \delta_p^k, \quad i, k, p \in \overline{\{1,3\}} \quad (4.54)$$

și în mod similar pentru baza reciprocă la momentul t .

Tensorul metric, corespunzător sistemelor curbilinii introduse, este caracterizat prin matricea

$$[g_{ij}(\tau)]_{(i,j)}, \quad \text{cu } g_{ij}(\tau) = \mathbf{e}_i(\tau) \cdot \mathbf{e}_j(\tau) \quad \forall i, j \in \overline{\{1,3\}}, \quad (4.55)$$

la momentul τ și în mod similar la momentul t . Notăm matricea inversă la momentul τ și respectiv t prin

$$[g^{ij}(\tau)]_{(i,j)} \quad \text{și} \quad [g^{ij}(t)]_{(i,j)} \quad \text{pentru } i, j \in \overline{\{1,3\}} \quad (4.56)$$

Bazele fizice asociate bazelor locale sunt definite, la momentele de timp menționate, prin

$$\mathbf{e}_{\langle i \rangle}(\tau) = \frac{\mathbf{e}_i(\tau)}{\sqrt{g_{ii}(\tau)}}(!), \quad \text{și} \quad \mathbf{e}^{\langle i \rangle}(t) = \frac{\mathbf{e}^i(t)}{\sqrt{g^{ii}(t)}}(!) \quad (4.57)$$

pentru $i, j \in \overline{\{1,3\}}$. Nu se face nici o sumare în relațiile anterioare.

Vom utiliza descrierea relativă a mișcării pentru a construi traiectoria particulei materiale \mathbf{X} , pornind de la câmpul de viteze descris în sistemele curbilinii de coordonate.

Mișcarea relativă este definită prin formula (1.47)

$$\chi_t(\cdot, \tau) : \mathcal{B}_t \longrightarrow \mathcal{B}_\tau; \quad \mathbf{y} = \chi_t(\mathbf{x}, \tau),$$

iar pentru $\tau = t$ avem $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.

Gradientul mișcării relative se definește prin formula (1.48)

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau). \quad (4.58)$$

Propoziția 5. i) În bazele locale asociate au loc formulele

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} \mathbf{e}_k(\tau) \otimes \mathbf{e}^i(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \mathbf{e}^k(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_i(t), \quad (4.59)$$

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} g_{kj}(\tau) \mathbf{e}^j(\tau) \otimes \mathbf{e}^i(t) \quad \Rightarrow \quad g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \mathbf{e}_j(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_i(t).$$

ii) Dacă bazele locale sunt ortogonale, la orice moment τ , (deci și la momentul t) atunci

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}_t(\tau) \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} \frac{g_{kj}(\tau)}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(t)}} \mathbf{e}_{\langle j \rangle}(t) \otimes \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(t) \quad \text{unde} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{Q}_t(\tau) \in Ort, \quad \text{astfel încât} \quad \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(\tau) = \mathbf{Q}_t(\tau) \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(t) \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}$$

Menționăm că matricea care definește metrica, în acest caz, la momentul τ are elementele nediagonale nule.

Demonstrație. i) Folosim definițiile bazei locale (53) și a gradientului în mișcarea relativă (58) și obținem

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_i(t) &= \nabla_{\mathbf{x}} \chi_t(\mathbf{x}, \tau) \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^i} \right] = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial q^i} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} \mathbf{e}_k(\tau) \end{aligned}$$

Utilizând acum proiecția pe bază și pe baza reciprocă la momentul τ avem

$$\mathbf{e}_j(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_i(t) = \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} g_{kj}(\tau), \quad \mathbf{e}^j(\tau) \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_i(t) = \frac{\partial \xi^j}{\partial q^i}.$$

De aici rezultă reprezentările în bazele menționate prin formulele (58), conform formulelor din A1.

ii) Introducem transformarea ortogonală $\mathbf{Q}_t(\tau)$ care pune în corespondență elementele celor două baze fizice, ortogonale și folosind (57) rezultă

$$\mathbf{e}_j(\tau) = \sqrt{g_{jj}(\tau)} \mathbf{Q}_t(\tau) \mathbf{e}_{\langle j \rangle}(t) (!).$$

Introducem ultima relație în (59) și trecînd de asemenea la baza fizică la momentul t avem

$$\sqrt{g_{jj}(\tau)} \mathbf{Q}_t(\tau) \mathbf{e}_{\langle j \rangle}(t) \cdot \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) (\sqrt{g_{ii}(t)} \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(t)) = g_{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i}$$

Aici indicele k este de sumare, în timp ce j și i sunt fixate, nesumându-se după i și j .

O formă echivalentă cu cele de mai sus este

$$\mathbf{e}_{\langle j \rangle}(t) \cdot \mathbf{Q}_t^T(\tau) \mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(t) = g_{jk} \frac{1}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(t)}} \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} \quad (!),$$

din care rezultă formula (60) prin trecerea la reprezentarea tensorială, ținînd seama că bazele fizice asociate bazelor locale ortogonale și reciprocilor lor coincid.

Consecința 2. Prin particularizarea momentului t , ca fiind momentul inițial, din (60) avem

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{Q}_0(\tau) \frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} \frac{g_{kj}(\tau)}{\sqrt{g_{jj}(\tau)g_{ii}(0)}} \mathbf{e}_{\langle j \rangle}(0) \otimes \mathbf{e}_{\langle i \rangle}(0). \quad (4.61)$$

Propoziția 6. În baza locală câmpul de viteze la momentul curent τ și respectiv la momentul t se reprezintă prin

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) = \xi^k \mathbf{e}_k(\tau), \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{q}^k \mathbf{e}_k(t). \quad (4.62)$$

Deci ξ^k și \dot{q}^k reprezintă *componentele contravariante* ale vitezei în bazele locale de la momentele τ și t .

Demonstrație Pornim de la formula (1.52) care definește viteza în mișcarea relativă și folosim definiția bazei locale (53)

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}, \tau) = \frac{\partial \chi_t(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \tau} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial \tau} = \xi^k \mathbf{e}_k(\tau).$$

4.4.2 Mișcarea staționară de forfecare

Definiția 3. Spunem că mișcarea χ este *staționară de forfecare* (în particula \mathbf{X}) dacă, componentele vitezei într-o bază carteziană $\{\mathbf{i}_k\}_{k \in \{1,3\}}$ se reprezintă la orice moment de timp τ prin

$$\dot{y}^1 = 0, \quad \dot{y}^2 = v(y^1), \quad \dot{y}^3 = 0. \quad (4.63)$$

Propoziția 7. i) În mișcarea de forfecare simplă traiectoria particulei, care la momentul t , ocupă poziția \mathbf{x} este o dreaptă paralelă cu \mathbf{i}_2 . Particula se mișcă cu viteză constantă $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v(x^1)\mathbf{i}_2$.

ii) Gradientul în mișcarea relativă se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{I} + (\tau - t)\kappa \mathbf{N} \equiv \exp((\tau - t)\kappa \mathbf{N}), \quad \forall \kappa, \quad \tau \in R,$$

$$\text{cu } \mathbf{N} = \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 \text{ deci } \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{N}| = 1 \text{ și } \kappa = v'(x^1).$$

iii) Mișcarea staționară de forfecare este o mișcare vâscometrică.

Demonstrație i) Prin integrarea sistemului diferențial (63) cu condiția inițială $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}$, rezultă funcția care descrie mișcarea relativă $\chi_t(\mathbf{x}, \tau)$

$$y^1(\tau) = x^1, \quad y^2(\tau) = (\tau - t)v(x^1) + x^2, \quad y^3(\tau) = x^3,$$

în sistemul cartezian de coordonate.

Rezultă imediat din calculul $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\partial y^k}{\partial x^j} \mathbf{i}_k \otimes \mathbf{i}_j$ afirmațiile i), ii). Dacă vom considera în ii) pe $t = 0$, rezultă că mișcarea este vâscometrică, conform Definiției 2 și ținând seama că are loc formula (2).

Propoziția 8. În mișcarea staționară de forfecare valorile principale nenule ale lui $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ sunt egale cu $\pm \frac{1}{2}\kappa$, cu notația $\kappa \equiv v'(x^1)$.

Demonstrație. Calculăm

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v'(x^1) \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} v'(x^1) (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1).$$

Ecuția caracteristică este dată de $\lambda(\lambda^2 - (\frac{1}{2}v'(x^1))^2) = 0$. Rezultă că valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm \frac{1}{2}v'(x^1)$, de unde afirmația făcută.

Observația 6. Remarcăm că baza carteziană coincide cu baza canonică asociată tensorului nilpotent de ordinul al doilea, care caracterizează mișcarea vâscometrică. De aici decurge o altă semnificație fizică : în baza canonică mișcarea vâscometrică corespunde unei mișcări staționare de forfecare.

În baza acestei propoziții este totodată justificată denumirea de viteză de forfecare pentru parametrul real κ .

4.4.3 Mișcarea elicoidală

Definiția 4. Spunem ca mișcarea χ este elicoidală (în particula \mathbf{X}) dacă componentele contravariante ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se reprezintă la orice moment de timp τ prin

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = \omega(\xi^1), \quad \xi^3 = u(\xi^1). \quad (4.64)$$

Propoziția 9. i) Mișcarea elicoidală definită cinematic prin (64) este caracterizată de următoarea reprezentare parametrică a traiectoriei particulei \mathbf{X} , care la momentul t ocupă poziția \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \xi^1 &= q^1, \\ \xi^2 &= \omega(q^1)(\tau - t) + q^2, \\ \xi^3 &= u(q^1)(\tau - t) + q^3, \end{aligned} \quad (4.65)$$

la momentul t coordonatele curbiliniilor ale lui x fiind $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$.

ii) Semnificația mecanică a celor de mai sus este dată de următoarele

a) Dacă $\omega(r)$ și $u(r) \neq 0$, traiectoria particulei X este o elice, circulară dreaptă, aflată pe suprafața $q^1 = r$, de pas $h \equiv 2\pi \frac{u(r)}{\omega(r)}$. În acest caz are loc o mișcare elicoidală propriu-zisă.

b) Dacă $\omega(r) \neq 0$ și $u(r) = 0$, traiectoria este un cerc de rază r pe suprafața cilindrică $q^1 = r$. Mișcarea, în acest caz, este de tip Couette.

c) Dacă $\omega(r) = 0$ și $u(r) \neq 0$, traiectoria particulei este o dreaptă pe suprafața cilindrică $q^1 = r$. În acest caz mișcarea este de tip Poiseuille.

Demonstrație. i) Integrăm sistemul diferențial din (64), cu condiția inițială asociată la momentul $\tau = t$, $\xi^i = q^i$ pentru $i \in \{1, 3\}$,

$$\frac{d\xi^1}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\xi^2}{d\tau} = \omega(\xi^1), \quad \frac{d\xi^3}{d\tau} = u(\xi^1).$$

Rezultă formulele (65).

ii) Sistemul de coordonate curbiliniu considerat în această mișcare este sistemul cilindric de coordonate. La momentul τ avem relațiile de legătură între coordonatele carteziene ale punctului y și coordonatele curbilinii

$$y^1 = \xi^1 \cos \xi^2, \quad y^2 = \xi^1 \sin \xi^2, \quad y^3 = \xi^3. \quad (4.66)$$

Din (66) și (65) rezultă reprezentarea parametrică a curbei descrise de particula materială X , identificată prin poziția ei x , la momentul t fixat, sub forma

$$y^i = f^i(\tau; t, q^1, q^2, q^3). \quad (4.67)$$

Aceasta este o curbă care se găsește pe suprafața cilindrică $q^1 = r$.

Fie două momente τ și τ_1 astfel încât unghiul polar al celor două poziții, pe traiectorie, să difere prin 2π ,

$$\xi^2(\tau) = \omega(r)(\tau - t) + \theta \quad \text{și} \quad \xi^2(\tau_1) \equiv \xi^2(\tau) + 2\pi = \omega(r)(\tau_1 - t) + \theta,$$

$$\xi^3(\tau) = u(r)(\tau - t) + z \quad \text{și} \quad \xi^3(\tau_1) = u(r)(\tau_1 - t) + z.$$

Eliminând pe τ_1 rezultă că

$$\xi^3(\tau_1) - \xi^3(\tau) = 2\pi \frac{u(r)}{\omega(r)} \equiv h,$$

dacă $\omega(r) \neq 0$. Deci este o elice circulară dreaptă pe suprafața cilindrică $q^1 = r$. În celelalte cazuri rezultatele sunt evidente. Reprezentarea traiectoriei punctului

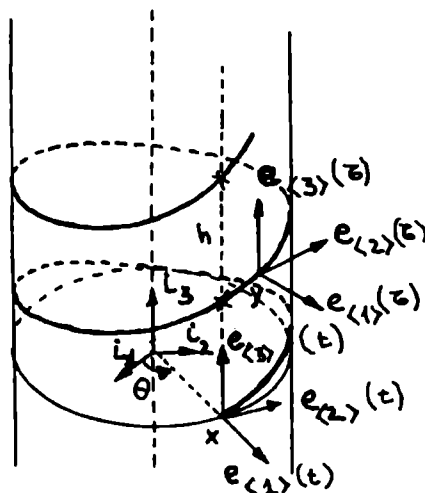


Fig. 4.4

material în mișcarea elicoidală este dată în Fig. 4.4.

Propoziția 10. Mișcarea elicoidală este o mișcare *vâscometrică*. Elementele caracteristice acestei mișcări vâscometrice (κ, \mathbf{N}) , cu $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$, $|\mathbf{N}| = 1$, sunt

$$\kappa = \sqrt{r^2(\omega'(r))^2 + (u'(r))^2}, \quad [\mathbf{N}]_{\mathbf{e}_{\langle i \rangle(0)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{r\omega'(r)}{\kappa} & 0 & 0 \\ \frac{u'(r)}{\kappa} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Demonstrație. Vectorii bazei locale la momentul t , dați de (53), sunt calculați în sistemul cilindric de coordonate, prin

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 1), \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1), \quad (4.69)$$

unde $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = z$.

Calculăm din (65) matricea care caracterizează gradientul în mișcarea relativă, de forma precizată în (60)

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial q^i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \omega'(r)(\tau - t) & 1 & 0 \\ u'(r)(\tau - t) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.70)$$

Matricele care caracterizează metrica la momentele t și τ , definite în (55), în sistemul cilindric de coordonate sunt date prin

$$[g_{ij}(t)]_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [g_{ij}(\tau)]_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & (\xi^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Considerăm momentul inițial fixat $t = 0$ și gradientul de deformație, din (60) poate fi reprezentat sub forma

$$[\mathbf{Q}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \tau)]_{\{\mathbf{e}_{\langle i \rangle(0)}\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r\omega'(r)(\tau) & 1 & 0 \\ u'(r)(\tau) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \tau[\mathbf{M}]_{\mathbf{e}_{\langle i \rangle(0)}}. \quad (4.72)$$

Prin calcul direct se verifică că \mathbf{M} este nilpotent de ordinul doi. Presupunem că \mathbf{M} nu este tensorul nul și calculăm $|\mathbf{M}|$. Definind $\kappa = |\mathbf{M}|$, rezultă expresia dată în (68). κ este nenul în mișcarea elicoidală. În continuare definim $\mathbf{N} = \frac{1}{|\mathbf{M}|}\mathbf{M}$, care va avea forma și proprietățile menționate în (68).

Trecând la o reprezentare tensorială, din (72) obținem că

$$\mathbf{Q}_0^T(\tau)\mathbf{F}_0(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{I} + \tau\kappa\mathbf{N} \equiv \exp(\tau\kappa\mathbf{N}), \quad \text{cu } \mathbf{N}^2 = \mathbf{0}, \quad |\mathbf{N}| = 1.$$

Propoziția 11. Relația de legătură între baza canonică \mathbf{e}_i asociată lui \mathbf{N} , în mișcarea elicoidală și baza fizică $\mathbf{e}_{\langle i \rangle}(t)$ la momentul t , corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se exprimă prin

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) \\ \mathbf{e}_2 &= \alpha \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) + \beta \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t), \quad \mathbf{e}_3 = -\beta \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) + \alpha \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t) \\ \alpha &= \frac{r\omega'(r)}{\kappa}, \quad \beta = \frac{u'(r)}{\kappa}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{aligned} \quad (4.73)$$

Demonstrație. Singurele elemente nenule în reprezentarea lui \mathbf{N} în baza fizică sunt $\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) = \frac{r\omega'(r)}{\kappa}$ și $\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) = \frac{u'(r)}{\kappa}$, iar în baza canonică $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_1 = 1$. Prin urmare, deoarece ambele baze sunt ortonormate, rezultă că transformarea ortogonală care definește trecerea de la o bază la alta se determină printr-o rotație în planul $(\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t), \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t))$, deci având forma menționată în primele relații din (73).

Sistemul pentru determinarea parametrilor α și β , cu expresiile scrise în (73) este obținut din următoarele condiții

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_1 = \alpha \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + \beta \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t), \\ 0 &\equiv \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_1 = -\beta \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + \alpha \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t) \cdot \mathbf{N} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t). \end{aligned}$$

4.4.4 Mișcarea staționară de torsiune

Definiția 5. Spunem că mișcarea χ este *staționară de torsiune* (în particula \mathbf{X}) dacă componentele contravariante ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se reprezintă la orice moment de timp τ prin

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = w(\xi^3), \quad \xi^3 = 0. \quad (4.74)$$

Printr-un calcul analog celor anterioare pot fi demonstrate următoarele propoziții

Propoziția 12. i) Mișcarea staționară de torsiune este caracterizată de următoarea reprezentare parametrică a traiectoriei particulei \mathbf{X} , care la momentul t ocupă poziția \mathbf{x} :

$$\xi^1 = r, \quad \xi^2 = w(z)(\tau - t) + \theta, \quad \xi^3 = z.$$

La momentul t coordonatele curbilinii ale lui \mathbf{x} fiind $q^1 = r, q^2 = \theta, q^3 = z$.

ii) Semnificația mecanică a relațiilor de mai sus este dată de: traiectoria particulei este un *cerc de rază r* pe suprafața cilindrică $q^1 = r$, în planul $q^3 = z$.

iii) Gradientul în mișcarea relativă se reprezintă sub forma

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{X}, \tau) = \mathbf{I} + (\tau - t)\kappa \mathbf{N} \equiv \exp((\tau - t)\kappa \mathbf{N}), \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

cu $\mathbf{N} = \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} \otimes \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}$ deci, $\mathbf{N}^2 = 0$, $|\mathbf{N}| = 1$ și $\kappa = rw'(z)$

iv) Mișcarea staționară de torsiune este o mișcare *vâscometrică*. Baza canonică este dată prin $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}$, $\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}$.

Concluzii. *Ca și în cazul mișcării Couette* traiectoria pentru o particulă materială fixată este un cerc într-un plan perpendicular pe axă și deci câmpul de viteze, tangent la cerc, are componente numai după \mathbf{e}_2 .

Spre deosebire de mișcarea Couette componenta vitezei este funcție de z și nu de r , iar *viteza de forfecare* κ depinde de z și de r .

4.5 Dinamica mișcărilor vâscometrice

În acest paragraf vom discuta *condițiile de compatibilitate dinamică* în cazul mișcărilor vâscometrice.

Am demonstrat în paragraful 3. că starea de tensiune într-un fluid este determinată prin intermediul funcțiilor vâscometrice, care depind de viteza de forfecare κ a mișcării vâscometrice, conform teoremei lui Noll. Prin urmare starea de tensiune în componente fizice, pe de o parte se exprimă prin funcțiile vâscometrice, iar pe de altă parte trebuie să satisfacă ecuațiile de mișcare pentru a fi soluția unei probleme fizice. Rezultă anumite *condiții de compatibilitate dinamică*.

Starea de tensiune rezultată în cazul mișcărilor vâscometrice este dependentă de cinematica impusă și trebuie să fie astfel încât condițiile de compatibilitate dinamică să fie satisfăcute.

Urmează deci să considerăm

- *ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy*

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho \mathbf{a}(\mathbf{x}, t), \quad (4.75)$$

într-un domeniu Ω ocupat de fluidul, care este supus la o mișcare vâscometrică, deci cu o cinematică impusă, în care $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ reprezintă forțele masice.

- *reprezentarea constitutivă* sub forma rezultată din teorema lui Noll, prin intermediul funcțiilor vâscometrice.

Ne vom plasa din nou într-un cadru constitutiv general, deoarece este necesară precizarea formei concrete a funcțiilor vâscometrice.

Mentionăm că mișcărilor vâscometrice sunt incompresibile (vezi Propoziția 2. din paragraful 2.2). Din caracterizarea condiției de incompresibilitate, formulele (1.24), rezultă că $\rho \equiv \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) \equiv \rho_0$.

4.5.1 Dinamica mișcării staționare de forfecare

Ca o consecință a faptului că mișcarea *staționară de forfecare*, descrisă în paragraful 4.2, este o mișcare vâscometrică rezultă, prin aplicarea teoremei lui Noll din paragraful 3.1, următoarea afirmație

Propoziția 13. *În mișcarea staționară de forfecare* starea de tensiune este

caracterizată, în baza canonică, prin intermediul funcțiilor vâscometrice

$$T_{11} - T_{33} = \sigma_1(\kappa), \quad T_{22} - T_{33} = \sigma_2(\kappa),$$

$$T_{12} = \tau(\kappa), \quad T_{13} = T_{23} = 0,$$

unde $\kappa = v'(x^1)$ și $T_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{i}_j$.

Propoziția 14. În mișcarea staționară de forfecare starea de tensiune este *compatibilă cu ecuațiile de mișcare*, în ipoteza forțelor masice derivate din potențialul $-\rho_o\psi$, dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} T_{11} &= \rho_o\psi - ax^2 + b, & T_{12} &= ax^1 + c, \\ T_{33} &= T_{11} - \sigma_1(\kappa), & T_{22} &= T_{11} + \sigma_2(\kappa) - \sigma_1(\kappa), \end{aligned}$$

cu a, b, c constante, iar câmpul de viteze și tensiunile sunt legate prin *condiția de compatibilitate*

$$v'(x^1) = \tau^{-1}(ax^1 + c). \quad (4.76)$$

Demonstrație. Din ecuațiile de mișcare deducem că

$$\frac{\partial(T_{11} - T_{33})}{\partial x^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x^3} = 0,$$

unde $\varphi \equiv T_{33} - \rho_o\psi$ este potențialul modificat.

Din ultimele două deducem că, în mod necesar $\varphi = x^2 f(x^1) + h(x^1)$ deoarece T_{12} este funcție numai de x^1 în conformitate cu Propoziția 13. Din prima rezultă că $f(x^1) = -a$, constantă, având în vedere că $T_{11} - T_{33}$ depinde numai de x^1 în baza aceleiași propoziții. Astfel $\varphi \equiv T_{33} - \rho_o\psi = -ax^2 + h(x^1)$. Prin integrare din prima relație avem $T_{11} - T_{33} + \varphi = F(x^2)$, și rezultă $F(x^2) = -ax^2 + b$, dacă am utilizat forma determinată pentru φ . Deducem forma lui T_{11} , folosind, de data aceasta, definiția potențialului modificat φ . Din a doua relație deducem și expresia componentei de forfecare a tensorului de tensiune.

Dacă ținem seama de relațiile $T_{12} = \tau(\kappa) = ax^1 + c$, cu $\kappa = v'(x^1)$ atunci, din inversabilitatea funcției vâscometrice τ , rezultă condiția de compatibilitate (76).

4.5.2 Dinamica mișcării elicoidale

Propoziția 15. i) Legătura între componentele fizice ale tensorului de tensiune în baza fizică și funcțiile vâscometrice este dată prin formulele

$$T_{rr} - T_{zz} = \sigma_1(\kappa) - \beta^2\sigma_2(\kappa), \quad T_{\theta\theta} - T_{zz} = (\alpha^2 - \beta^2)\sigma_2(\kappa), \quad (4.77)$$

$$T_{r\theta} = \alpha\tau_1(\kappa), \quad T_{\theta z} = \alpha\beta\sigma_2(\kappa), \quad T_{rz} = \beta\tau(\kappa),$$

în care α, β, κ sunt funcții de r definite prin (68) și (73).

ii) Combinațiile componentelor de tensiune din membrul stâng al relațiilor (77) sunt dependente numai de r .

Demonstrație. Cunoscând transformarea ortogonală descrisă prin formulele (73), care realizează legătura între cele două baze : $\{e_i\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}$ (baza canonică) și $\{e_{\langle i \rangle}(t)\}_{i \in \overline{\{1,3\}}}$ (baza fizică la momentul t), putem trece la exprimarea legăturii dintre componentele tensorului tensiunii în cele două baze.

Folosim notațiile $T_{ij} = e_i \cdot \mathbf{T}e_j$, pentru componentele tensorului \mathbf{T} în baza canonică și cele tradiționale ($T_{rr}, T_{r\theta}, T_{\theta z}, T_{rz}, T_{zz}, T_{\theta\theta}$) pentru componentele fizice ale tensorului de tensiune în baza locală asociată sistemului cilindric de coordonate. Printr-un calcul direct avem

$$T_{rr} \equiv e_{\langle 1 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 1 \rangle}(t) = T_{11}, \quad T_{\theta\theta} \equiv e_{\langle 2 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 2 \rangle}(t) = \alpha^2 T_{22} + \beta^2 T_{33},$$

$$T_{zz} \equiv e_{\langle 3 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 3 \rangle}(t) = \beta^2 T_{22} + \alpha^2 T_{33}, \quad T_{r\theta} \equiv e_{\langle 1 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 2 \rangle}(t) = \alpha T_{12},$$

$$T_{\theta z} \equiv e_{\langle 2 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 3 \rangle}(t) = \alpha\beta(T_{22} - T_{33}), \quad T_{rz} \equiv e_{\langle 1 \rangle}(t) \cdot \mathbf{T}e_{\langle 3 \rangle}(t) = \beta T_{12},$$

în care utilizăm definiția funcțiilor vâscometrice, introduse prin (37) și relația $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Rezultă formulele (77).

Teorema 3. i) Starea de tensiune în fluidul supus la o mișcare elicoidală satisface ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy dacă și numai dacă

$$T_{rr} = \rho_o \psi - \int \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} dr - \int \rho_o r \omega^2(r) dr + az + d\theta + g, \quad (4.78)$$

$$T_{r\theta} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{r^2}, \quad T_{rz} = -\frac{ar}{2} + \frac{b}{r}.$$

ii) Funcțiile care caracterizează mișcarea și starea de tensiune în fluid trebuie să fie astfel încât

$$\omega'(r) = \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)} \left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2} \right), \quad u'(r) = \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)} \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2} \right), \quad (4.79)$$

unde $\gamma(r) = \sqrt{\left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2}$.

Demonstrație. i) Ecuațiile de mișcare în sistemul cilindric de coordonate, în cazul incompresibil ($\rho = \rho_o$), cu forțele masice derivate dintr-un potențial $\mathbf{b} = -\nabla\psi$, se scriu sub forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} - \rho_o (\nabla\psi)_r &= \rho_o a_r, \\ \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{T_{r\theta}}{r} - \rho_o (\nabla\psi)_\theta &= \rho_o a_\theta, \\ \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} - \rho_o (\nabla\psi)_z &= \rho_o a_z. \end{aligned} \quad (4.80)$$

În baza fizică gradientul potențialului se scrie

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t).$$

În cazul mișcării elicoidale, cu câmpul de viteze descris prin (64), accelerația în baza fizică este dată prin $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = -r\omega^2(r)\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t)$.

Dacă introducem potențialul modificat

$$\varphi = T_{zz} - \rho_o\psi \quad (4.81)$$

și folosim expresiile pentru $\nabla\psi$ și \mathbf{a} în ecuațiile de mișcare (80), deducem că

$$\frac{\partial(T_{rr} - T_{zz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\rho_o r \omega^2(r),$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0,$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Dacă ținem seama de Propoziția 15. ii) ecuațiile de mișcare se reduc la

$$\frac{\partial(T_{rr} - T_{zz})}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\rho_o r \omega^2(r),$$

$$\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0, \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{T_{rz}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

În baza formulelor (77) înlocuim derivatele parțiale prin derivata în raport cu r în termenii care conțin tensiuni și atunci, din ultimele relații (82), rezultă că $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ sunt funcții numai de r . Deci

$$\varphi = az + d\theta + h(r). \quad (4.83)$$

Prin integrare în raport cu r a primei ecuații din (82) rezultă

$$T_{rr} - T_{zz} + \int \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} dr + \varphi + \int \rho_o r (\omega)^2(r) dr = f(\theta, z), \quad (4.84)$$

adevărată $\forall (r, \theta, z) \in \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^3$.

Funcția $f(\theta, z)$, constantă în raport cu r , este determinată prin

$$f(\theta, z) = az + d\theta + g, \quad \text{cu } g = \text{const.},$$

ținând seama că variabilele θ, z intervin numai în expresia potențialului modificat, exprimat prin (83). Din cele de mai sus înlocuite în (84), împreună cu (81) deducem că

$$T_{rr} + \int \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} dr - \rho_0 \psi + \int \rho_0 r (\omega)^2(r) dr = az + d\theta + g. \quad (4.85)$$

Ultimele două ecuații din (82), împreună cu (83) devin

$$\frac{dT_{r\theta}}{dr} + 2\frac{T_{r\theta}}{r} = -\frac{d}{r}, \quad \frac{dT_{rz}}{dr} + \frac{T_{rz}}{r} = -a. \quad (4.86)$$

Din (86) prin integrare obținem

$$T_{r\theta} = -\frac{d}{2} + \frac{c}{r^2} \equiv \alpha \tau(\kappa), \quad T_{rz} = -\frac{ar}{2} + \frac{b}{r} \equiv \beta \tau(\kappa), \quad (4.87)$$

unde am folosit și relațiile (77).

ii) Deoarece $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ din formulele (87) obținem că

$$\tau(\kappa) = \sqrt{\left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2} \equiv \gamma(r), \quad (4.88)$$

unde am acceptat ipoteza că $\tau(\kappa) > 0$ pentru $\kappa > 0$.

În ipoteza că aplicația $\kappa \rightarrow \tau(\kappa)$ este inversabilă, din (88) rezultă că ,

$$\kappa = \tau^{-1}(\gamma(r)). \quad (4.89)$$

Folosind din nou relațiile (87) și expresiile (73) pentru α și β deducem

$$\alpha = \frac{\tau\omega'(r)}{\kappa}, \quad \beta = \frac{u'(r)}{\kappa}, \quad (4.90)$$

$$\omega'(r) = \frac{\kappa}{r\tau(\kappa)}\left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}\right), \quad u'(r) = \frac{\kappa}{\tau(\kappa)}\left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right).$$

unde $\kappa = \tau^{-1}(\gamma(r))$. Din relațiile (90) și (88) obținem (79).

Observația 7. În acest mod au rezultat *formulele de compatibilitate* dintre funcțiile care caracterizează mișcarea vâscometrică și funcția vâscometrică de forfecare τ .

Câmpul de viteze, în mișcarea elicoidală poate fi exprimat prin intermediul funcțiilor vâscometrice, ca o consecință a dinamicii mișcării, prin

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \int \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)} \left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}\right) dr + c_1, \\ u(r) &= \int \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)} \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right) dr + c_2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\text{unde } \gamma(r) = \sqrt{\left(\frac{c}{r^2} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2}.$$

De remarcat că în reprezentarea (91) apar 6 constante. Vom arăta cum pot fi determinate constantele prin condițiile date pe frontiera domeniului în paragraful 6.1.

4.5.3 Dinamica mișcării staționare de torsiune

În paragraful 4.4 am prezentat mișcarea staționară de torsiune ca o mișcare vâscometrică. Reprezentăm tensorul de tensiune corespunzător atât în baza canonică (introducând deci funcțiile vâscometrice conform teoremei lui Noll din paragraful 3.1), cât și în baza fizică asociată sistemului cilindric de coordonate, specific mișcării de torsiune. Obținem

Propoziția 16. În cazul *mișcării staționare de torsiune* legătura între componentele fizice ale tensiunii și funcțiile vâscometrice se exprimă prin

$$T_{11} - T_{33} = \sigma_1(\kappa) = T_{zz} - T_{rr}, \quad T_{22} - T_{33} = \sigma_2(\kappa) = T_{\theta\theta} - T_{rr}$$

$$T_{12} = \tau(\kappa) = T_{\theta z}, \quad T_{13} = 0 = -T_{rz}, \quad T_{23} = 0 = -T_{\theta r}$$

unde $\kappa = r w'(z)$.

În concluzie combinațiile nenule menționate în formulele anterioare sunt funcții numai de r, z . Putem obține următorul rezultat

Propoziția 17. Ecuațiile dinamicii se reduc la

$$\frac{\partial(T_{rr} - T_{zz})}{\partial r} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\rho_0 r \omega^2(z), \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

unde $\varphi \equiv T_{zz} - \rho_0\psi$ reprezintă *potențialul modificat*, dacă am presupus că forțele volumice sunt conservative cu potențialul $-\psi$.

Am folosit din nou reprezentarea în baza fizică a potențialului sub forma $\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t)$, precum și reprezentarea câmpului de accelerații $\mathbf{a} = -r\omega^2(z)\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t)$ în mișcarea de torsiune (74). Formulele au mai fost utilizate în cazul mișcării elicoidale.

Teorema 4. i) Starea de tensiune într-un fluid supus la o mișcare staționară de torsiune satisface ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy dacă și numai dacă

$$T_{rr} = \rho_0\psi - \int \frac{(T_{rr} - T_{\theta\theta})}{r} dr + d\theta - \rho_0 \frac{r^2}{2} \omega^2(z) + m(z),$$

$$T_{\theta z} = -\frac{dz}{r} + l(r),$$

$$\varphi \equiv T_{zz} - \rho_0\psi = d\theta + h(r),$$

cu funcțiile $m(z)$, $h(r)$, $l(r)$, arbitrare și d constantă.

ii) Funcțiile care caracterizează mișcarea și starea de tensiune în fluid trebuie să satisfacă *condiția de compatibilitate*

$$rw'(z) = \tau^{-1}\left(-\frac{dz}{r} + l(r)\right). \quad (4.93)$$

Demonstrație. Din ecuațiile dinamice $(92)_{2,3}$ rezultă că $\varphi = \theta f(r) + h(r)$, care introdusă în prima ne conduce la $f'(r) = 0$, deci $f(r) = d$, constantă. Astfel potențialul modificat capătă forma menționată în enunț. Din a doua ecuație dinamică obținem prin integrare forma componentei de forfecare $T_{\theta z}$. Aceasta, pe de altă parte, se exprimă prin funcția vâscometrică de forfecare, deci

$$T_{\theta z} = \tau(\kappa) \equiv -\frac{dz}{r} + l(r). \text{ Astfel rezultă și condiția de compatibilitate (93).}$$

Din prima ecuație (92) obținem prin integrare în raport cu r

$$T_{rr} - T_{zz} + \varphi + \int \frac{(T_{rr} - T_{\theta\theta})}{r} dr + \bar{m}(\theta, z) = -\rho_0 \frac{r^2}{2} \omega^2(z), \quad (4.94)$$

unde $\varphi \equiv T_{zz} - \rho_0 \psi = d\theta + h(r)$. Inlocuindu-l pe φ prin formula găsită și derivând în raport cu θ , rezultă că $\bar{m}(\theta, z) + d\theta = -m(z)$, dacă ținem seama de formulele din Propoziția 16. Inlocuindu-l pe $\bar{m}(\theta, z)$ în (94) și revenind la potențialul ψ , se obține reprezentarea pentru T_{rr} .

Aceste formule vor fi folosite pentru descrierea mișcării între două discuri.

4.6. Soluții exacte pentru mișcarea fluidelor Realizarea fizică a unor mișcări vâscometrice

În acest paragraf vom prezenta soluții *exacte* pentru mișcarea fluidelor, descrise cinematic prin mișcări vâscometrice.

Vom discuta condițiile în care se poate *realiza* din punct de vedere fizic o mișcare vâscometrică. Prin realizarea fizică a unei mișcări vâscometrice date, se înțelege posibilitatea determinării acesteia ca o soluție exactă, a unei probleme cu date inițiale și la limită într-un domeniu dat, pentru o anumită clasă de fluide, precizată constitutiv prin forma funcțiilor vâscometrice. Ne plasăm în cadrul constitutiv general: starea de tensiune se exprimă prin cele trei funcții vâscometrice, fără a preciza forma concretă a acestora prin intermediul funcțiilor constitutive. Prin urmare rezultatele vor fi generale, și prin particularizarea funcțiilor vâscometrice, conform cadrului constitutiv de interes, vom obține soluțiile problemelor puse, pentru diverse materiale.

Menționăm că mișcările vâscometrice considerate au fost *staționare*, deci câmpurile de viteză din definiția mișcărilor vâscometrice nu depind explicit de timp. Prin urmare la orice moment de timp avem aceeași distribuție de viteze, ceea ce implică faptul că, în formularea problemelor condițiile inițiale nu joacă nici un rol.

Deci urmează să considerăm

- *ecuațiile de mișcare ale lui Cauchy*

$$\operatorname{div}\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho\mathbf{a}(\mathbf{x}, t),$$

într-un domeniu Ω ocupat de fluidul, care este supus la o mișcare vâscometrică, deci cu o cinematica impusă,

- *reprezentarea constitutivă* sub forma rezultată din toerema lui Noll, prin intermediul funcțiilor vâscometrice,

- *condiții pe frontiera domeniului, $\partial\Omega$* :

Dacă există un perete rigid $\Sigma \subset \partial\Omega$ atunci se consideră că fluidul satisface *condiția de aderență*

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r \quad \text{pe } \Sigma_r \subset \partial\Omega,$$

unde prin \mathbf{v}_r am notat viteza relativă a peretelui rigid cu care este în contact fluidul.

Pe porțiunea din frontiera lui Ω , care nu este constituită din perete solid se introduc condiții în tensiuni, sau condiții mixte.

Observația 8. i) Forma domeniului trebuie să fie compatibilă cu forma liniilor de curent rezultate din cinematica impusă, pentru a fi consistentă condiția de aderență pe perețele solid. Se impun deci *condiții de compatibilitate geometrică*.

ii) Starea de tensiune într-un fluid este determinată prin intermediul funcțiilor vâscometrice, care depind de viteza de forfecare κ , a mișcării, conform teoremei lui Noll din paragraful 3.1. Prin urmare starea de tensiune în componente fizice, pe de o parte, se exprimă prin funcțiile vâscometrice, iar pe de altă parte trebuie să satisfacă ecuațiile de mișcare. Rezultă anumite *condiții de compatibilitate dinamică*.

iii) Starea de tensiune rezultă determinată prin cinematica impusă, este astfel încât condițiile de compatibilitate dinamică să fie satisfăcute. Tensiunea se obține în general dependentă de un număr de parametri reali. Parametrii reali ai problemei se determină, în principiu, din condițiile în tensiuni, sau condițiile mixte pe porțiunile din frontiera lui Ω , care nu sunt constituite din perete solid.

Deci, realizarea fizică a unei mișcări vâscometrice presupune satisfacerea simultană a unor condiții de compatibilitate

- *geometrică* (între forma pereților solizi și forma liniilor de curent) ;

- *dinamică* (satisfacerea ecuațiilor de mișcare) ;

- *a datelor pe porțiunile din frontiera domeniului, care nu se reprezintă ca pereți solizi.*

4.6.1 Mișcarea (elicoidală) între doi cilindrii coaxiali

Mișcarea între doi cilindrii coaxiali a fost analizată pe o clasă specială de fluide de tip diferențial de Rivlin [1956] și Fredrickson [1960]. În cadrul general al mișcărilor vâscometrice este prezentată de Coleman, Noll [1959].

Problema. Se consideră mișcarea unui fluid într-un domeniu mărginit de doi cilindrii coaxiali, de lungime infinită în care suprafețele rigide, laterale au o mișcare de roto - translație. Ne punem, în fapt întrebarea firească dacă este posibilă descrierea acestei mișcări prin intermediul *mișcării elicoidale* ?

Observația 9. Presupunerea că mișcarea poate fi descrisă printr-o mișcare vâscometrică este în principiu posibilă, deoarece există o *compatibilitate geometrică*. Din studiul *liniilor de curent* în mișcarea elicoidală, Propoziția 9. din paragraful 4.3, a rezultat că acestea sunt compatibile cu un domeniu cu simetrie cilindrică.

Teorema 5. *Există o mișcare elicoidală care se realizează în domeniul Ω*

$$\Omega = \{(r, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi), \quad r \in [R_1, R_2], \quad z \in R\},$$

astfel încât condițiile de aderență pe suprafața laterală, scrise sub forma

$$u(r) |_{r=R_j} = U_j, \quad \omega(r) |_{r=R_j} = \Omega_j, \quad \text{cu } j \in \{1, 2\},$$

să fie satisfăcute, în ipoteza că pereții solizi au o mișcare de translație cu vitezele U_j și o mișcare de rotație în jurul axei de simetrie, cu vitezele unghiulare Ω_j . Momentul de torsiune *necesar menținerii în rotație relativă a celor doi cilindrii* este dat.

Câmpul de viteze în mișcarea elicoidală este descris prin formulele (64)

$$\begin{aligned} \omega(r) &= \frac{M}{2\pi} \int_{R_1}^r \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{s^3 \gamma(s)} ds + \Omega_1, \\ u(r) &= \int_{R_1}^r \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{\gamma(s)} \left(\frac{b}{s} - \frac{as}{2} \right) ds + U_1, \end{aligned} \tag{4.95}$$

în care $\gamma(r) = \sqrt{\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2}$. Constantele a, b se determină astfel încât

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(s)} \left(\frac{b}{s} - \frac{as}{2} \right) ds, \\ \Omega_2 - \Omega_1 &= \frac{M}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(s))}{s^3 \gamma(s)} ds. \end{aligned} \tag{4.96}$$

Starca de tensiune este definită prin

$$T_{rr} = \rho_0 \psi - \int_{R_1}^r \frac{\hat{\sigma}_1(\gamma(s)) - \alpha^2 \hat{\sigma}_2(\gamma(s))}{s} ds - \int_{R_1}^r \rho_0 s \omega^2(s) ds + az + g,$$

$$T_{\theta\theta} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\gamma(r)) + \alpha^2 \hat{\sigma}_2(\gamma(r)), \quad T_{zz} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1(\gamma(r)) + \beta^2 \hat{\sigma}_2(\gamma(r)), \quad (4.97)$$

$$T_{rz} = \frac{b}{r} - \frac{ar}{2}, \quad T_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}, \quad T_{\theta z} = 0,$$

cu

$$\alpha = \frac{r \omega'(r)}{\tau^{-1}(\gamma(r))}, \quad \beta = \frac{u'(r)}{\tau^{-1}(\gamma(r))}.$$

În formulele (97) $\hat{\sigma}_j$ sunt funcțiile vâscometrice normale modificate, definite în (51), iar τ este funcția vâscometrică de forfecare.

Urmează să **demonstrăm** că o astfel de mișcare poate fi determinată prin utilizarea rezultatelor obținute în Teorema 3. din paragraful 5.2, referitoare la dinamica mișcării elicoidale. Din prima relație (78) rezultă că T_{rr} este funcție de (r, θ, z) , multiformă în raport cu θ (în sensul că aceluiași punct din spațiul fizic i se pot asocia o infinitate de valori pentru componenta T_{rr} , care diferă între ele prin $2k\pi d$), dacă $d \neq 0$. Prin urmare este necesar să considerăm $d = 0$.

Câmpul de viteze în mișcarea elicoidală este definit (ținând seama de dinamica mișcării elicoidale, prin formulele (79) cu $d = 0$) numai de trei constante reale a, b, c .

Utilizăm condițiile de aderență pe suprafețele laterale și găsim 2 relații între cele trei constante

$$U_2 - U_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{\gamma(r)} \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2} \right) dr,$$

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}(\gamma(r))}{r\gamma(r)} \frac{c}{r^2} dr,$$

$$\gamma(r) = \sqrt{\left(\frac{c}{r^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{r} - \frac{ar}{2}\right)^2}.$$

Fie mișcarea elicoidală și starea de tensiune dinamic compatibilă asociată. Vom arăta că

i) În mod necesar componenta după axa de simetrie a momentului resultant al vectorilor de tensiune, raportat la unitatea de lungime și notat prin M , care acționează într-un punct de pe suprafața $r = r^*$, este o constantă, independentă de r^* , dacă $d = 0$.

ii) Legătura dintre c și M este dată de formula

$$c = \frac{M}{2\pi}.$$

Pentru **demonstrație** considerăm un element pe suprafața $r = r^*$. Normala exterioară este $\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t)$. Considerăm un punct de pe suprafață caracterizat prin coordonatele curbilini (r^*, θ, z) . Vectorul de tensiune în punctul fixat este dat de

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) = T_{rr}\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + T_{r\theta}\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle}(t) + T_{rz}\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t),$$

iar momentul resultant în raport cu polul aflat pe axa de simetrie, în secțiunea considerată prin punctul considerat, se calculează prin

$$\int_{\Sigma} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\langle 1 \rangle} & \mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} & \mathbf{e}_{\langle 3 \rangle} \\ r & 0 & 0 \\ T_{rr} & T_{r\theta} & T_{rz} \end{pmatrix} d\mathbf{a} = \int_{\Sigma} (-rT_{rz}\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} + rT_{r\theta}\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle})d\mathbf{a}. \quad (4.98)$$

Proiectăm relația (98) pe axa $\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}(t)$, axa de simetrie. Ținem seama de expresia componentei de torsiune a tensiunii, $T_{r\theta}$, și de măsura pe suprafață $d\mathbf{a} = r d\theta dz$. Rezultă imediat afirmațiile i) și expresia constantei $c = \frac{M}{2\pi}$. Prin urmare, dacă, condiția anterioară este adăugată condiției de aderență a fluidului pe pereții rigizi, din relațiile (96) obținem un sistem nelinier pentru determinarea constantelor a, b , deoarece c este cunoscut.

Astfel a fost determinată mișcarea vâscometrică, elicoidală care ia naștere în mișcarea fluidului în interiorul celor doi cilindri coaxiali.

Observația 10. Momentul M introdus în propoziția anterioară este numit *moment de torsiune, necesar menținerii în rotație relativă, a celor doi cilindri*. Se consideră condiția globală formulată în (98) cu $M\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}$ dat.

4.6.2 Mișcarea Couette într-un domeniu cilindru circular drept cu secțiunea coroană circulară

Problema mișcării Couette între doi cilindri a fost analizată pentru clasa fluidelor Reiner - Rivlin de Rivlin în 1948 și generalizată la fluidele de tip diferențial [1956] și a fost considerată pentru alte modele de Oldroyd [1950]. În cadrul general al mișcărilor vâscometrice problema a fost rezolvată în Coleman, Noll [1959]. O clasă apropiată de mișcări de acest tip (mișcări între două plăci infinite care se rotesc relativ) a fost studiată de Tigoiu [1995,b] și va fi prezentată în partea a doua a lucrării.

Definiția 6. Spunem că mișcarea χ este *de tip Couette* (în particula X) dacă, *componentele contravariante* ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate se reprezintă la orice moment de timp τ prin

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = \omega(\xi^1), \quad \xi^3 = 0. \quad (4.99)$$

În mod evident, din formulele (61) rezultă că mișcarea Couette poate fi considerată ca un caz particular al mișcării elicoidale, traiectoria particulei fiind un cerc, într-un plan perpendicular pe axa de simetrie a cilindrului. Prin urmare, prin particularizări din formulele deduse în studiul mișcării elicoidale vom obține echivalentele acestora pentru mișcarea Couette.

Propoziția 18. Mișcarea Couette este o mișcare *vâscometrică* care se obține, din mișcarea elicoidală, prin considerarea valorilor

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \kappa = r\omega'(r), \tag{4.100}$$

în ipoteza $\omega'(r) \neq 0$.

Demonstrație. Din formulele (73) rezultă că $\beta = 0$, iar din (66) $\kappa = |r\omega'(r)|$, deoarece $\omega'(r) \neq 0$ avem, de exemplu valoarea din (100) pentru $\omega'(r) > 0$.

Teorema 6. i) Mișcarea unui fluid între doi cilindri coaxiali infiniți, de raze R_j , care se rotesc în jurul axei de simetrie cu vitezele unghiulare Ω_1, Ω_2 poate fi descrisă printr-o mișcare Couette, pentru care starea de tensiune este descrisă prin

$$T_{rr} = \rho_0\psi - \int \frac{\hat{\sigma}_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) - \hat{\sigma}_2\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)}{r} dr - \int \rho_0 r \omega^2(r) dr + g, \tag{4.101}$$

$$T_{\theta\theta} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) + \hat{\sigma}_2\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right),$$

$$T_{zz} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right), \quad T_{rz} = T_{\theta z} = 0, \quad T_{r\theta} = \frac{M}{2\pi r^2}.$$

ii) Mișcarea este caracterizată prin (65) în care $u'(r) = 0$ și

$$\omega(r) = \int_{R_1}^r \frac{\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi s^2}\right)}{s} ds + \Omega_1. \tag{4.102}$$

Constanta M se determină din condiția

$$\Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi s^2}\right)}{s} ds.$$

Demonstrația decurge din Teorema 5. în care se fac particularizările $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Din (87) pentru $\beta = 0$ obținem că

$$T_{rz} = \frac{b}{r} - \frac{ar}{2} = 0 \quad \forall r \in [R_1, R_2],$$

ceea ce este echivalent cu $a = b = 0$. $d = 0$ rezultă din considerațiile privind existența unei stări de tensiune exprimabile prin funcții uniforme în raport cu θ .

Constantele care caracterizează cinematica în mișcarea Couette sunt

$$a = b = d = 0, \quad c = \frac{M}{2\pi}. \quad (4.103)$$

Formulele (101), (102) sunt deduse din (97) și (95) cu particularizările menționate.

4.6.3 Mișcarea Poiseuille printr-o conductă cilindrică

Vom menționa definiția mișcării Poiseuille, independent de mișcarea elicoidală.

Definiția 7. Spunem că mișcarea χ este de tip Poiseuille (în particula **X**) dacă, componentele *contravariante* ale vitezei în baza locală, corespunzătoare sistemului cilindric de coordonate, se reprezintă la orice moment de timp τ prin

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = 0, \quad \xi^3 = u(\xi^1). \quad (4.104)$$

În mod evident, din formulele (64) rezultă că mișcarea Poiseuille poate fi considerată un caz particular al mișcării elicoidale, traiectoria particulei fiind o dreaptă paralelă cu axa de simetrie a cilindrului. Prin urmare, prin particularizări din formulele obținute în studiul mișcării elicoidale vom obține echivalentele acestora pentru mișcarea Poiseuille. Din formulele (73) rezultă

Propoziția 19. Mișcarea Poiseuille este o mișcare vâscometrică care se obține din mișcarea elicoidală, prin considerarea valorilor

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1 \quad \kappa = u'(r), \quad (4.105)$$

în ipoteza $u'(r) \neq 0$.

Teorema 7. Mișcarea Poiseuille se realizează într-o conductă cilindrică circulară de rază R , cu lungimea infinită, în care fluidul aderă la peretele rigid. Presupunem că peretele rigid are o mișcare de translație cu viteza U în lungul axei de simetrie.

i) Starea de tensiune este dată prin

$$T_{rr} = \int_0^r \frac{\hat{\sigma}_1\left(\frac{as}{2}\right)}{s} ds + az + g, \quad T_{\theta\theta} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1\left(\frac{ar}{2}\right), \quad (4.106)$$

$$T_{zz} = T_{rr} - \hat{\sigma}_1\left(\frac{ar}{2}\right) + \hat{\sigma}_2\left(\frac{ar}{2}\right), \quad T_{\theta z} = 0, \quad T_{r\theta} = 0, \quad T_{rz} = \frac{-ar}{2},$$

dacă se neglijează forțele masice.

ii) Funcția care caracterizează mișcarea este

$$u(r) = \int_r^R \tau^{-1}\left(\frac{as}{2}\right) ds + U. \quad (4.107)$$

iii) Dacă se cunoaște debitul volumic Q constant, care trece printr-o secțiune perpendiculară pe axa conductei, constanta a se determină prin condiția

$$Q = \pi \int_0^R s^2 \tau^{-1}\left(\frac{as}{2}\right) ds + \pi R^2 U. \quad (4.108)$$

Pentru **demonstrație** folosim rezultatele din Teorema 3. pentru mișcarea elicoidală. Să remarcăm că $b = 0$ este o condiție necesară pentru realizarea unei mișcări Poiseuille printr-un tub cilindric (pentru a avea asigurată condiția ca tensiunea dată în (78), deci și componenta T_{rz} , să fie definită în toate punctele domeniului). În $r = 0$ avem o singularitate pentru tensiune, dacă $b \neq 0$. Deoarece în (87) considerăm $\alpha = 0$ rezultă că $c = d = 0$. Din (88) $\gamma(r) = |a| \frac{r}{2}$. Presupunem că $a > 0$ și din (78) cu (77) deducem formulele (106). Prin integrarea în raport cu r a relației (79), rescrisă în mișcarea Poiseuille sub forma

$$u'(r) = -\tau^{-1} \left(\frac{ar}{2} \right),$$

obținem formula (107), utilizând și condiția

$$u(r) |_{r=R} = U,$$

care definește aderența fluidului la peretele rigid.

Debitul volumic printr-o secțiune perpendiculară pe axa tubului se calculează prin

$$Q \equiv \int_{z=const} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da, \quad (4.109)$$

care în ipoteza câmpului de viteze $\mathbf{v} = u(r) \mathbf{i}_3$ devine

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r) r dr.$$

Dacă introducem expresia câmpului de viteze (107) și integrăm prin părți, rezultă expresia (108).

Observația 11. Semnificația mecanică a constantei a este obținută din relația

$$-a = \frac{2}{R} T_{rz} |_{r=R}.$$

4.6.4 Mișcarea unui fluid între două discuri

În cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin problema a fost rezolvată de Rivlin [1948], de Truesdell [1952] (în condiții ceva mai generale), Rivlin [1956] a generalizat-o pentru fluide de tip diferențial, iar o rezolvare prin intermediul funcțiilor vâscometrice a fost propusă de Markovitz [1957], Coleman, Noll [1959].

Se consideră următoarea **Problemă**. Fie mișcarea unui fluid între două discuri paralele, de raze R , aflate la o distanță h , care se rotesc cu viteze unghiulare Ω_0, Ω_1 în jurul axei \mathbf{i}_3 , fluidul fiind în contact cu aerul pe suprafața liberă laterală. Ne punem aceeași întrebare : poate fi această mișcare descrisă printr-o mișcare staționară de torsiune ?

Observația 12. Condițiile pe frontiera domeniului, care exprimă ipoteza de aderență a fluidului pe discuri, se scriu

$$w(0) = \Omega_0, \quad w(h) = \Omega_1, \quad (4.110)$$

iar condiția pe suprafața liberă Σ_l de contact cu aerul, aflat la o presiune hidrostatică p_0 , se scrie

$$\mathbf{Tn} |_{\Sigma_l} = -p_0 \mathbf{n}.$$

Ipoteză: Presupunem că are loc o *mișcare staționară de torsiune* între cele două discuri. Folosim rezultatele de cinematică și dinamică din paragrafele 4.4 și 5.3 pentru determinarea stării de tensiune și a mișcării de torsiune.

Propoziția 20. *Mișcarea de torsiune între două discuri* este descrisă prin câmpul de viteze

$$w(z) = \frac{\Delta\Omega}{h}z + \Omega_0, \quad \text{cu } \Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0, \quad (4.111)$$

iar starea de tensiune este dată prin următoarele formule

$$T_{rr} = -p_0 + \rho_0 \frac{(R^2 - r^2)}{2} w^2(z) - \int_r^R \frac{\sigma_2(s \frac{\Delta\Omega}{h})}{s} ds,$$

$$T_{zz} = T_{rr} + \sigma_1(r \frac{\Delta\Omega}{h}), \quad T_{\theta z} = \tau(r \frac{\Delta\Omega}{h}), \quad T_{\theta r} = 0, \quad T_{rz} = 0.$$

unde am considerat că *suprafața liberă este de formă cilindrică*, deci $r = R$, cu condiții de forma

$$T_{rr} |_{r=R} = -p_0$$

și am neglijat forțele masice.

Demonstrație. Deoarece câmpul de tensiune trebuie să fie o funcție definită pentru $\forall r \in [0, R]$, rezultă că $T_{\theta z}$ (reprezentat în Teorema 4. din paragraful 5.3) nu poate avea o singularitate în $r = 0$. Astfel în formulele din teorema menționată trebuie să considerăm $d = 0$. Condiția de *compatibilitate dinamică* (93)

$$\kappa \equiv r w'(z) = \tau^{-1}(l(r)) \implies w(z) = cz + b \quad \text{și} \quad \kappa = cr \quad (4.112)$$

Folosim condițiile de aderență și deducem forma câmpului de viteze, $w(z)$, liniar în z , scrisă în (111).

Introducem în formulele din Teorema 4. $d = 0$, funcția vâscometrică prin intermediul Propoziției 16. și găsim că

$$T_{rr} = \rho_0 \psi + \int_0^r \frac{\sigma_2(cs)}{s} ds - \rho_0 \frac{r^2}{2} w^2(z) + m(z). \quad (4.113)$$

Din condiția pe frontieră se determină funcția $m(z)$, sub forma

$$m(z) = -p_0 + \rho_0 \frac{R^2}{2} w^2(z) - \int_0^R \frac{\sigma_2(c s)}{s} ds, \quad (4.114)$$

unde au fost neglijate forțele masice. Rezultatul se obține imediat.

Relativ la mișcarea staționară de forfecare amintim că aceasta este descrisă, de exemplu, în Coleman, Noll [1959] b., Eringen [1960].

4.7. Tensiuni normale și efectele lor. Fenomene ne-newtoniene

Vom prezenta două tipuri de fenomene, care sunt puse în evidență experimental, pentru anumite materiale și care nu au loc dacă experiențele se efectuează cu fluide liniar vâscoase.

Soluțiile puse în evidență în mișcarea fluidului între doi cilindri (mișcarea Couette) și respectiv în tub (mișcarea Poiseuille) au fost obținute în ipoteza că suprafețele cilindrice au lungime infinită. Vom considera acum domeniile mărginite, dar vom utiliza soluțiile anterioare, care devin soluții aproximative, care diferă de soluția reală în vecinătatea planelor ce delimitează suprafețele cilindrice.

În această secțiune vom considera două tipuri de efecte ne-newtoniene : *efectul Weissenberg* și *efectul Meringhton*, care sunt datorate prezenței tensiunilor normale, sau prezenței funcțiilor vâscometrice normale.

În cele ce urmează vom urmări prezentarea acestor fenomene așa cum apare în Truesdell, Noll [1965], Coleman, Markovitz, Noll [1966]. Rezultatele sunt calitative.

4.7.1 Efectul Weissenberg

În cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin o analiză detaliată a efectului Weissenberg (efect de *cățărare*) a fost efectuată de Serrin [1959]. Prezentarea dată de Noll o generalizează pe cea datorată lui Ericksen [1959]. Acest efect este pus în evidență în aparate, în care se realizează mișcări Couette, staționare. În Truesdell, Noll [1965] se menționează că Garner și Nissan, în 1942, au observat fenomenul de cățărare a fluidului pe pereții solizi, iar Weissenberg [1947] a efectuat o serie de experiențe sistematice. În Fig. 4.5 b), c) sunt reprezentate efectele ne-newtoniene de tip Weissenberg, puse în evidență pentru viteze relativ mici și respectiv mari de rotație ale cilindrului exterior. În imaginile din partea stângă, a), fluidele sunt în repaus, în timp ce, în imaginile din dreapta, d), sunt prezentate comportamentele fluidelor newtoniene.

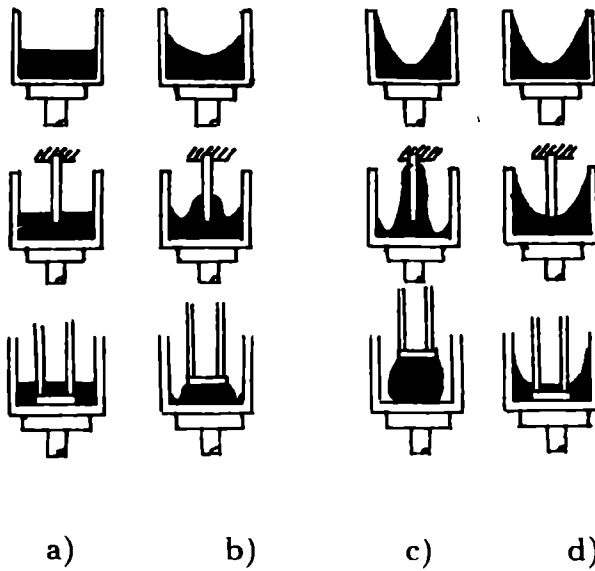


Fig. 4.5

Vom considera mișcarea Couette a unui fluid între doi cilindri coaxiali din paragraful 6.2. Fluidul este în contact cu aerul aflat la o presiune p_0 . Tensiunea normală, pe o suprafață a cărei normală este axa de simetrie, este dată de T_{zz} . Conform formulelor (97), menționate în Teorema 5., dacă neglijăm prezența forțelor masice, rezultă

$$T_{zz} = - \int_{R_1}^r \frac{\hat{\sigma}_1 \left(\frac{M}{2\pi s^2} \right) - \hat{\sigma}_2 \left(\frac{M}{2\pi s^2} \right)}{s} ds - \int_{R_1}^r \rho_0 s \omega^2(s) ds - \hat{\sigma}_1 \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) + g.$$

Constanta g poate fi determinată din condiția globală de echilibru a forțelor care acționează pe suprafața plană $z = z_1$, de contact a fluidului cu aerul

$$\int_{z=z_1} \mathbf{T} e_{\langle 3 \rangle} da = - \int_{z=z_1} p_0 e_{\langle 3 \rangle} da \quad \Leftrightarrow \quad . \quad (4.115)$$

$$2\pi \int_{R_1}^{R_2} T_{zz} r dr = -p_0 \pi (R_2^2 - R_1^2).$$

Definim *excesul presiunii atmosferice peste presiunea normală* $-T_{zz}$ exercitată de fluid pe suprafața liberă

$$N = p_0 - (-T_{zz}) \equiv p_0 + T_{zz}.$$

Prin relația anterioară a fost definită o funcție de r , pentru $\forall r \in (R_1, R_2)$. Vom demonstra următoarea proprietate

Propoziția 21. i) Fluidul linear vâcos are proprietatea că N este o funcție descrescătoare de r .

ii) Există fluide de tip Reiner - Rivlin, și respectiv Rivlin - Ericksen pentru care N este o funcție crescătoare de r .

Demonstrație. In ipoteza că funcțiile vâscometrice sunt regulate obținem, prin derivare în raport cu r , că

$$\frac{dN}{dr} = -\rho_0 r \omega^2(r) + \frac{M}{\pi r^3} \hat{\sigma}'_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) + \frac{1}{r} \left[\hat{\sigma}_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) - \hat{\sigma}_2\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) \right].$$

i) In cazul fluidului linear vâscos (vezi Ex. 16), funcțiile vâscometrice normale sunt zero, deci $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ și rezultă că

$$\frac{dN}{dr} = -\rho_0 r (\omega(r))^2 < 0.$$

ii) In cazul fluidelor în care funcțiile vâscometrice normale nu sunt zero, se pot construi modele astfel încât $r \rightarrow N(r)$ să nu fie desrescătoare. De exemplu în cazul fluidelor Reiner - Rivlin funcțiile vâscometrice normale sunt egale între ele, dar nenule (vezi Ex. 16). Pentru ca funcția să fie nedescrescătoare este necesar ca $\hat{\sigma}_1$ să fie crescătoare și astfel încât $\frac{M}{\pi r^3} \hat{\sigma}'_1\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right) > \rho_0 r \omega^2(r)$, pentru $r \in (R_1, R_2)$.

Concluzie. In cazul fluidelor linear vâscoase, numite și newtoniene, pe peretele interior, spre deosebire de cel exterior, apăsarea exercitată de presiunea atmosferică este mai mare decât acțiunea fluidului asupra suprafeței plane. Prin urmare fluidul *coboară* pe peretele interior și *se ridică* pe peretele exterior.

In cazul fluidelor în care există funcții vâscometrice normale, nenule este posibil să se producă *cățărarea* fluidului pe peretele interior. Deci se poate explica (calitativ) apariția efectului Weissenberg în anumite clase de fluide, pe baza unei soluții, exacte pentru domenii infinite, care corespunde unei mișcări vâscometrice.

4.7.2 Efectul Merrington

Efectul Merrington a fost observat experimental de Merrington [1943], Garner, Nissan, Wood între anii 1942- 1946. Existența efectului de *dilatate* sau de *expansiune* a jetului la ieșirea dintr-o conductă, în cadrul constitutiv al fluidelor Reiner - Rivlin a fost semnalată pentru prima oară de Braun și Reiner [1952]. O analiză detaliată a fenomenului de expansiune a fluidului la ieșirea dintr-o conductă, numit *efect Merrington* a fost făcută de Serrin [1959] b., pentru un fluid Reiner - Rivlin.

Vom considera mișcarea Poiseuille printr-o conductă cilindrică de rază R , descrisă în paragraful 6.3. Vom presupune ca soluția descrisă prin intermediul mișcărilor vâscometrice, care se realizează în conducte de lungime infinită, este o bună aproximație pentru tensiunea reală chiar și la ieșirea dintr-un tub de lungime *finită*. Atunci , dacă $z = 0$ este secțiunea la ieșirea din conductă determinăm constanta g , din formulele (101) dintr-o condiție globală de echilibru pentru *forța*

axială

$$\int_{z=z_1} T_{zz} |_{z=0} da = -p_0 \pi R^2, \quad (4.116)$$

unde p_0 este presiunea atmosferică.

Definim *excesul presiunii atmosferice peste presiunea radială* $-T_{rr} |_{r=R}$, exercitată de fluid pe suprafața laterală, liberă, la ieșire

$$P = p_0 - (-T_{rr} |_{r=R}) \equiv p_0 + T_{rr} |_{r=R}.$$

Propoziția 22. i) Din condiția globală de echilibru (116) rezultă valoarea constantei g

$$g = -p_0 + \frac{1}{R^2} \int_0^R \left[\frac{R^2 + r^2}{r} \hat{\sigma}_1 \left(\frac{ar}{2} \right) - 2r \hat{\sigma}_2 \left(\frac{ar}{2} \right) \right] dr, \quad (4.117)$$

iar valoarea lui P se calculează prin

$$P = az + \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left[\hat{\sigma}_1 \left(\frac{ar}{2} \right) - 2 \hat{\sigma}_2 \left(\frac{ar}{2} \right) \right] dr. \quad (4.118)$$

ii) Există fluide ne-newtoniene pentru care $P < 0$ sau $P > 0$ pentru $z = 0$, corespunzător cărora are loc *expansiunea* sau respectiv *sucțiunea* fluidului la ieșirea din tub.

Demonstrație. i) Dintr-un calcul direct, dacă se utilizează reprezentările din Teorema 7. în formula (116) și se integrează prin părți, se obține expresia constantei g . Cu g determinat din (117) se deduce (118).

ii) Dacă considerăm $z = 0$ în (118) și dacă presupunem că fluidul nu este newtonian, deci σ_1 și σ_2 sunt nenule, atunci apar ca posibile cazurile menționate. De exemplu în cazul fluidului Reiner - Rivlin $\sigma_1 = \sigma_2$. Dacă în plus $\sigma_1 > 0$, atunci are loc expansiunea fluidului la ieșire.

4.8 Reovâscozimetre

Aparatele în care se realizează m.i.a.r.c. și /sau mișcări vâscometrice se numesc *reovâscozimetre*, *reometre* sau *vâscozimetre*. Cu ajutorul acestora se determină experimental funcțiile vâscometrice. La baza determinărilor experimentale stau rezultatele teoretice care au fost puse în evidență pentru diferite tipuri de mișcări. Formulele teoretice se rescriu în forme convenabile conținând *mărimi măsurabile*.

Exemplificăm modalități posibile de interpretare a rezultatelor teoretice astfel ca acestea să capete semnificații experimentale.

Reovâscozimetrele de tip Weissenberg se compun din doi cilindri coaxiali, suficient de lungi și având în general raportul $\frac{R_2 - R_1}{R_1}$ suficient de mic.

Cilindrii se găsesc în rotație relativă unul față de celălalt, cu o rotație controlată, unul din cilindri fiind în general fix. Rotația cilindrului este impusă printr-o viteză unghiulară, Ω constantă, sau printr-un moment, raportat la unitatea de lungime, M constant. În reovâscozimetrele de tip Weissenberg se realizează *mişcări Couette*.

Formula care permite determinarea experimentală a *funcțiilor vâscometrice* este consecința relației (102)

$$\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi s^2}\right)}{s} ds. \quad (4.119)$$

Cu schimbarea de variabilă $\frac{M}{2\pi s^2} = y$ (119) devine

$$\Delta\Omega = -\frac{1}{2} \int \frac{\frac{M}{2\pi R_2^2} \tau^{-1}(y)}{\frac{M}{2\pi R_1^2} y} dy \iff \Delta\Omega = f(M). \quad (4.120)$$

Prin derivare în raport cu R deducem

$$2M \frac{d(\Delta\Omega)}{dM} = \left[\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi R_1^2}\right) - \tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi R_2^2}\right) \right]. \quad (4.121)$$

Dacă $F(M) = 2M \frac{d(\Delta\Omega)}{dM}$ și $\alpha = \frac{R_1^2}{R_2^2} < 1$ obținem că

$$F(M) = \left[\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi R_1^2}\right) - \tau^{-1}\left(\alpha \frac{M}{2\pi R_1^2}\right) \right]. \quad (4.122)$$

În (122) luăm succesiv pe M ca fiind $\alpha^n M$ și prin sumare după n de la 0 la N deducem că

$$\sum_{n=0}^N F(\alpha^n M) = \left[\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi R_1^2}\right) - \tau^{-1}\left(\alpha^{N+1} \frac{M}{2\pi R_1^2}\right) \right].$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$, cu ipoteza că τ este continuă și $\tau^{-1}(0) = 0$ din relația de mai sus, prin trecere la limită, rezultă că

$$\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi R_1^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F(\alpha^n M), \quad (4.123)$$

unde $F(M) = 2M \frac{d(\Delta\Omega)}{dM}$. Astfel este posibilă determinarea funcției vâscometrice τ dacă se cunoaște $\Delta\Omega = \Delta\Omega(M)$.

Pentru determinarea funcțiilor vâscometrice normale folosim formulele (101) reprezentate sub forma

$$T_{rr} - T_{zz} = \sigma_1\left(\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\right), \quad T_{\theta\theta} - T_{zz} = \sigma_2\left(\tau^{-1}\left(\frac{M}{2\pi r^2}\right)\right). \quad (4.124)$$

O formulă, eficient folosită în determinările experimentale pentru funcțiile vâscometrice normale, rezultă prin considerarea diferențelor tensiunilor normale exercitate pe cilindrii exterior și respectiv interior, exprimată prin (101)₁, sub forma

$$\begin{aligned} \Delta T_{rr} &\equiv T_{rr}(R_2) - T_{rr}(R_1) = \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{1}{r} \left[\sigma_2(\tau^{-1}) \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) - \sigma_1(\tau^{-1}) \left(\frac{M}{2\pi r^2} \right) \right] - \rho_0 r \omega^2(r) \right\} dr. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Când $\frac{R_2 - R_1}{R_1} \ll 1$ formula (126) poate fi aproximată prin

$$T_{rr}(R_2) - T_{rr}(R_1) \simeq \frac{R_2 - R_1}{R_1} \left[\sigma_2(\tau^{-1}) \left(\frac{M}{2\pi R_2^2} \right) - \sigma_1(\tau^{-1}) \left(\frac{M}{2\pi R_2^2} \right) \right], \quad (4.126)$$

iar formula (120) prin

$$\Delta \Omega \simeq \frac{R_2 - R_1}{R_1} (\tau^{-1}) \left(\frac{M}{2\pi R_2^2} \right). \quad (4.127)$$

Ambele formule (126) și (127) au eroarea de ordinul lui $\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1} \right)^2$.

Reovâscozimetrele în care se realizează o mișcare vâscometrică de tip Poiseuille se compun din două rezervoare care comunică printr-o conductă cilindrică de rază R , fluidul trecând dintr-un rezervor într-altul.

Experimental poate fi măsurat debitul Q , presupus constant, de fluid care trece printr-o secțiune perpendiculară pe axa conductei. Pornind de la definiția debitului dată în (109) a rezultat formula (107) în care vom considera viteza de translație a peretelui $U = 0$. Se poate obține următoarea formulă

$$Q(a) = \pi \int_0^R r^2 \tau^{-1} \left(\frac{ar}{2} \right) dr. \quad (4.128)$$

Fie schimbarea de variabilă $ra = x$ în formula (128). Deducem

$$Q(a) = \pi \int_0^{Ra} \frac{x^2}{a^3} \tau^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) dx, \quad (4.129)$$

formulă ce dă legătura între debitul volumic și forța a , dacă funcția vâscometrică este cunoscută. Prin derivare în raport cu a rezultă formula

$$\frac{d}{da} (a^3 Q(a)) = \pi a^2 R^3 \tau^{-1} \left(\frac{aR}{2} \right), \quad (4.130)$$

care permite determinarea experimentală a funcției vâscometrice de forfecare, mai precis inversa acesteia, dacă $Q(a)$ este determinat experimental.

Pentru aceasta este necesar să înțelegem semnificația fizică a constantei a , pusă în evidență în Observația 11. din 4.6.3, care definește mișcarea de tip

Poiseuille printr-o conductă și care apare în formula de calcul a debitului, (129). Considerăm valoarea componentei de forfecare (într-o direcție paralelă cu axa conductei) a vectorului de tensiune care acționează pe suprafața laterală. Prin urmare experimental poate fi măsurată constanta a , prin măsurarea tensiunii tangențiale de forfecare în lungul peretelui conductei, raportată la lungimea $\frac{R}{2}$.

Funcțiile vâscometrice normale pot fi de asemenea determinate, dacă avem în vedere formulele (106), în care τ a fost deja determinată. Se utilizează relațiile

$$T_{rr} - T_{\theta\theta} = \sigma_1(\tau^{-1}(\frac{ar}{2})), \quad T_{zz} - T_{\theta\theta} = \sigma_2(\tau^{-1}(\frac{ar}{2})). \quad (4.131)$$

Studii legate de mișcările vâscometrice și modalitățile de determinare a funcțiilor vâscometrice, pentru fluide ne-newtoniene sunt prezentate, spre exemplu în Coleman, Markovitz, Noll [1966].

În lucrările datorate autorilor Astarita, Marrucci [1974], Huilgol [1975], Walters [1975], Huilgol, Phan-Thien [1986] sunt puse în discuție probleme privind efectele de capăt și de suprafață (în cazul existenței suprafețelor libere). Sunt formulate unele probleme de mișcări vâscometrice perturbate și sunt prezentate chestiuni privind stabilitatea, ca și unele rezultate de existență și unicitate.

4.9 Exerciții și probleme

1. Arătați că funcția exponențială are următoarele proprietăți (folosind, de exemplu, ecuațiile diferențiale ale căror soluții sunt)

a) $(\exp(s\mathbf{M}))^T = \exp(s\mathbf{M}^T), \quad (\exp(s\mathbf{M}))^{-1} = \exp(-s\mathbf{M}),$

b) $\det(\exp(s\mathbf{M})) = \exp(s \operatorname{tr}\mathbf{M}),$

c) $\mathbf{Q}(\exp\mathbf{M})\mathbf{Q}^T = \exp(\mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort},$

pentru $\forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{M} \in \text{Lin}.$

2. Arătați că dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}$ sunt permutabile, atunci pentru $\forall s \in \mathbb{R}$ are loc

$$\exp(s\mathbf{A})\exp(s\mathbf{B}) = \exp(s(\mathbf{A} + \mathbf{B})).$$

3. Ce se poate afirma despre unicitatea reprezentării m.i.a.r.c. dată în Teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c. ?

4. Este unică reprezentarea gradientului de deformație dată în Teorema lui Noll, dacă se presupune că mișcarea este vâscometrică ?

5. Utilizând teorema lui Noll pe m.i.a.r.c. demonstrați că

a) gradientul în mișcarea relativă $\mathbf{F}_i(\tau) = \mathbf{Q}(\tau) \exp((\tau - t)\kappa\mathbf{N})\mathbf{Q}^T(t),$

b) gradientul vitezei $\mathbf{L} = \kappa\mathbf{Q}(t)\mathbf{N}\mathbf{Q}^T(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{Q}^T(t)$

și calculați \mathbf{D} și \mathbf{W} .

6. Să se calculeze tensorii lui Rivlin - Ericksen pe m.i.a.r.c., arătând că

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t),$$

$$\mathbf{A}_2(t) = 2\mathbf{M}^T(t)\mathbf{M}(t) + (\mathbf{M}(t))^2 + (\mathbf{M}^T(t))^2,$$

$$\mathbf{A}_n(t) = \mathbf{M}^T(t)\mathbf{A}_{n-1}(t) + \mathbf{A}_{n-1}(t)\mathbf{M}(t), \quad \forall n \geq 2.$$

Aici s-a folosit notația introdusă în (16).

7. Arătați că o m.i.a.r.c. este incompresibilă $\iff (\kappa = 0, \text{ sau } \text{tr}\mathbf{N} = 0)$, sau $\text{tr}\mathbf{M} = 0$, cu notația $\mathbf{M} = \kappa\mathbf{N}$.

8. Ca o consecință a Lemei lui Wang, deduceți tipurile de neunicitate în teorema lui Noll de caracterizare a m.i.a.r.c.

9. Arătați că sunt echivalente următoarele condiții

$$a) \quad \mathbf{A}_4(t) = 0 \quad \text{pentru } \forall t \in \mathbf{R},$$

$$b) \quad \mathbf{M} = \kappa\mathbf{N} \quad \text{cu } \mathbf{N}^2 = 0,$$

$$c) \quad \mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I} - s(\mathbf{M}(t) + \mathbf{M}^T(t)) + s^2\mathbf{M}^T(t)\mathbf{M}(t),$$

unde $\mathbf{M}(t) = \tilde{\mathbf{Q}}(t)(\mathbf{M})\tilde{\mathbf{Q}}^T(t)$.

10. Arătați că au loc formulele

$$\mathbf{A}_n(t) = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (\mathbf{M}(t)^k)^T (\mathbf{M}(t))^{(n-k)} = \mathbf{Q}(t)\mathbf{A}_n(0)\mathbf{Q}^T(t).$$

11. Fie spațiul vectorial \mathcal{V} de dimensiune trei. Care este ordinul maxim de nilpotență pentru aplicațiile $\mathbf{A} \in \text{Lin}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$?

12. Să se arate că orice mișcare vâscometrică este incompresibilă.

13. Să se calculeze tensorii Rivlin - Ericksen pe mișcări vâscometrice și arătați că tensorii Rivlin- Ericksen pentru $k \geq 3$ sunt nuli.

14. Să se calculeze tensorii Rivlin - Ericksen pe mișcări vâscometrice, și arătați că au loc formulele

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}^T + \mathbf{M} \quad \mathbf{A}_2 = 2\mathbf{M}^T\mathbf{M},$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 = 2\kappa^2(\mathbf{M}^T + \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1^2 = 2\kappa^2(\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{M}^T),$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1 = 4\kappa^4(\mathbf{M}^T + \mathbf{M}),$$

$$\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_2^2\mathbf{A}_1^2 = 4\kappa^4(\mathbf{M}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{M}^T).$$

15. Calculați invariantii tensorilor Rivlin - Ericksen și a combinațiilor acestora. Arătați că au loc relațiile

$$j_{\mathbf{A}_1} \equiv (\text{tr}\mathbf{A}_1, \text{tr}\mathbf{A}_1^2, \det\mathbf{A}_1) = (0, 2\kappa^2, 0), \quad j_{\mathbf{A}_2} = (2\kappa^2, 4\kappa^4, 0).$$

16. Să se calculeze funcțiile vâscometrice pentru următoarele fluide incompresibile

a) *fluidul liniar vâscos* : $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D}$,

b) *fluidul Reiner - Rivlin* : $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\mathbf{x}, t)\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D} + \varphi_2(j_{\mathbf{D}})\mathbf{D}^2$,

c) *fluidul Rivlin - Ericksen* : descris prin reprezentarea (3.36)

și să se arate că acestea se exprimă prin

a) $\tau(\kappa) = \mu\kappa, \quad \sigma_1(\kappa) = \sigma_2(\kappa) = 0$,

b) $\tau(\kappa) = \frac{1}{2}\hat{\kappa}\varphi_1(\kappa), \quad \sigma_1(\kappa) = \sigma_2(\kappa) = \frac{1}{4}(\kappa)^2\hat{\varphi}_2(\kappa)$,

unde $j_{\mathbf{D}} \equiv (\text{tr}\mathbf{D}, \text{tr}\mathbf{D}^2, \det\mathbf{D}) = (0, \frac{\kappa^2}{2}, 0)$

c) $\tau(\kappa) = \kappa\hat{\alpha}_1(\kappa) + 2\kappa^3\hat{\alpha}_5(\kappa) + 4\kappa^5\hat{\alpha}_7(\kappa)$,

$\sigma_1(\kappa) = \kappa^2\hat{\alpha}_3(\kappa) + 2\kappa^2\alpha_2(\kappa) + 4\kappa^4\alpha_4(\kappa) + 2\kappa^4\hat{\alpha}_6(\kappa) + 4\kappa^6\hat{\alpha}_8(\kappa)$,

$\sigma_2(\kappa) = \kappa^2\hat{\alpha}_3(\kappa) + 2\kappa^4\hat{\alpha}_6(\kappa) + 4\kappa^6\hat{\alpha}_8(\kappa) = 0$,

unde am notat prin " ^ " compunerea funcțiilor constitutive cu valorile setului de invarianti calculate pe mișcarea vâscometrică.

17. Arătați că pentru descrierea mișcărilor vâscometrice este suficient să se considere ecuații constitutive de tip Rivlin - Ericksen de forma minimală

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A}_1 + \alpha_3(\mathbf{A}_1)^2 + \alpha_2\mathbf{A}_2,$$

cu $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ funcții depinzând numai de $\text{tr}(\mathbf{A}_1^2)$.

18. Demonstrați că pozitivitatea energiei disipate într-un fluid supus la o mișcare vâscometrică este echivalentă cu $\kappa\tau(\kappa) > 0$, știind că puterea mecanică (sau energia disipată) într-o particulă fixată \mathbf{X} se calculează prin $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}$.

19. In cazul mișcării elicoidale, cu câmpul de viteze descris prin (64), demonstrați că accelerația corespunzătoare este dată prin $\mathbf{a} = -r(\omega)^2(r)\mathbf{e}_{<1>}(t)$, în baza fizică.

20. In cazul mișcării staționare de torsiune, cu câmpul de viteze descris prin (74), demonstrați că accelerația corespunzătoare este dată prin $\mathbf{a} = -r\omega(z)^2\mathbf{e}_{<1>}(t)$, în baza fizică.

21. Arătați că în sistemul cilindric de coordonate are loc formula

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e}_{\langle 1 \rangle}(t) + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_{\langle 2 \rangle} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e}_{\langle 3 \rangle}.$$

22. Considerăm mișcarea staționară de forfecare între două plane infinite, aflate la o distanță d . Planul $x^1 = 0$ este fix, iar planul $x^1 = d$ are o mișcare de translație cu o viteză V paralelă cu planul fix. Arătați că, câmpul de viteze este descris prin $v(x^1 = \int_0^{x^1} \tau^{-1}(-as)ds$ cu condiția $V = \int_0^d \tau^{-1}(-as)ds$, folosind proprietatea că funcția τ este impară.

23. Fie o mișcare descrisă într-o bază carteziană prin câmpul de viteze $\dot{x}^1 = \gamma x^2$, $\dot{x}^2 = \gamma x^1$, $\dot{x}^3 = 0$. Studiați dacă este o m.i.a.r.c.

24. În sistemul curbiliniu de coordonate $\{q^i\}$, ortogonal, câmpul de viteze este descris prin componentele contravariante

$$\dot{q}^1 = u(q^2, q^3), \quad \dot{q}^2 = 0, \quad \dot{q}^3 = 0.$$

Ce condiție trebuie să satisfacă tensorul metric $[g_{ij}]$ pentru ca mișcarea descrisă să fie vâscometrică.

25. Fie o mișcare Couette definită prin câmpul de viteze (99).

a. Demonstrați pe o cale directă (nu prin particularizarea formulelor de la mișcarea elicoidală) că este o mișcare vâscometrică. Arătați că ea determină o soluție exactă, în cazul mișcării între doi cilindri, cu condițiile menționate în Teorema 5.

b. Particularizați formulele care descriu mișcarea între doi cilindri pentru fluidele: liniar vâcos, Reiner- Rivlin, Rivlin-Ericksen de ordinul 2.

26. Fie o mișcare Poiseuille, definită prin câmpul de viteze (104).

a. Demonstrați în mod direct, utilizând definițiile, că aceasta este o mișcare vâscometrică și că determină o soluție exactă în cazul mișcării printr-o conductă cilindrică, în condițiile Teoremei 6.

b. Particularizați formulele care descriu mișcarea în conductă pentru fluidele: liniar vâcos, Reiner- Rivlin, Rivlin-Ericksen de ordinul 2.

27. Se consideră un reovâscozimetru ortogonal compus din două discuri paralele aflate la o distanță d_o care au o mișcare de rotație în jurul axelor lor, care se găsesc la o distanță r_o . Rotația discurilor este uniformă și este caracterizată de viteză unghiulară de rotație Ω_o . Fie câmpul de viteze într-o bază cartezian caracterizat prin

$$v_1 = -\Omega_o [y - \varphi(z)], \quad v_2 = \Omega_o [x - \psi(z)], \quad v_3 = 0$$

a. Arătați că o astfel de mișcare este cu istoria alungirilor relative constantă.

b. Mișcarea este incompresibilă ?

c. Calculați expresia tensiunii suportată de un fluid Reiner-Rivlin și respectiv Rivlin- EricKsen de ordinul 2, dacă are loc mișcarea descrisă.

28. Presupunem că suprafața liberă în mișcarea unui fluid este cu simetrie de rotație, reprezentată prin ecuația $z = h(r)$ în sistemul cilindric de coordonate.

a. Exprimați condiția pe suprafața liberă $\mathbf{Tn} = -p_0\mathbf{n}$ pe componente în baza fizică asociată sistemului cilindric de coordonate.

b. Din ce condiție poate fi determinată forma suprafeței libere ?

c. Particularizați rezultatul de la punctul b. pentru mișcarea de tip Couette și de tip Poiseuille. Ce rezultă relativ la forma suprafeței libere ?

29. *Mișcarea con- placă* este descrisă, la fiecare moment de timp τ , prin componentele contravariante ale vitezei scrise în baza locală corespunzătoare sistemului sferic de coordonate, sub forma

$$\xi^1 = 0, \quad \xi^2 = \omega(\xi^2), \quad \xi^3 = 0.$$

La momentul $\tau = t$ particula materială ocupă poziția \mathbf{x} caracterizată prin coordonatele curbilini (sferice)

$$(q^3 \equiv r, q^2 \equiv \theta, q^1 \equiv \varphi),$$

unde componentele în baza carteziană ale lui \mathbf{x} sunt date prin

$$x^1 = \sin \varphi \cos \theta, \quad x^2 = \sin \varphi \sin \theta, \quad x^3 = \cos \varphi,$$

pentru $r \in R_+$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, 1/2 \pi]$.

a. Determinați traiectoria particulei materiale, dedusă prin integrarea sistemului care caracterizează câmpul de viteze, dacă se consideră condițiile inițiale $\xi^1(t) = \varphi, \xi^2(t) = \theta, \xi^3(t) = r$.

b. Demonstrați că mișcarea con- placă este o mișcare *vâscometrică* cu $\kappa = \sin \varphi \omega'(\varphi)$.

30. Pentru mișcarea con- placă demonstrați că :

a. Baza canonică și baza fizică, asociată sistemului sferic de coordonate, de forma scrisă în Ex. coincid.

b. Arătați că componentele tensorului de tensiune în baza fizică și funcțiile vâscometrice sunt legate prin formulele

$$T_{\varphi\varphi} - T_{rr} = \sigma_1(\kappa), \quad T_{\theta\theta} - T_{rr} = \sigma_2(\kappa),$$

$$T_{\theta,\varphi} = \tau(\kappa), T_{r\theta} = 0, \quad T_{r\varphi} = 0,$$

ca o consecință a formulelor (4.37) și a punctului a.

31. Scrieți ecuațiile de mișcare în absența forțelor masice, în sistemul sferic de coordonate și determinați starea de tensiune corespunzătoare mișcării con-placă, care le satisface (folosind deci formulele de legătură din Ex. 30 b). Se va presupune că $\varphi \in [1/2 \pi - \alpha, 1/2 \pi]$, pentru α foarte mic.

32. Se consideră mișcarea con-placă într-un domeniu delimitat de planul $x^3 = 0$, și suprafața conului cu vârful pe plan, de semiunghi la vârf egal cu $1/2 \pi - \alpha$.

Presupunem că planul și conul se rotesc în jurul axei de simetrie cu vitezele unghiulare Ω_0, Ω_1 diferite și că fluidul se găsește în contact cu aerul pe suprafața liberă, pe care o considerăm definită prin $r = R$.

Deci domeniul în care are loc mișcarea este dat de $r \in [0, R]$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [1/2 \pi - \alpha, 1/2 \pi]$.

a. Arătați că condițiile de aderență devin $\omega(1/2\pi) = \Omega_0$, $\omega(1/2\pi - \alpha) = \Omega_1$ și condiția pe suprafața liberă este $T_{rr} |_{r=R} = -p_0$.

c. Demonstrați că tensiunea normală T_{rr} în lungul planului și al conului se exprimă prin

$$T_{rr} = -p_0 + \sigma_1 \left(\frac{\Delta\Omega}{\alpha} \right) - \log\left(\frac{R}{r}\right) \left[\sigma_1 \left(\frac{\Delta\Omega}{\alpha} \right) + \sigma_2 \left(\frac{\Delta\Omega}{\alpha} \right) \right].$$

unde $\Delta\Omega = \Omega_1 - \Omega_0$.

5. VÂSCOELASTICITATE

5.1 Materiale cu memorie întârziată

În prezentarea reprezentărilor constitutive pentru corpuri vâscoelastice vom urmări lucrările Truesdell, Noll [1965], Coleman, Noll [1961], Truesdell [1972], Gurtin, Sternberg [1962], etc. plasându-ne în cazul materialelor simple.

Prezentarea generală a materialelor simple a fost făcută în cap.2, paragraful 2, punându-se în evidență proprietăți *algebrice* pentru operatorii constitutivi, care au fost obținute din principiile generale și din definițiile introduse. Acum vor fi necesare proprietăți *topologice*, de netezime ale operatorilor constitutivi. Acestea vor fi introduse pe baza *principiului materialelor cu memorie întârziată*.

Fie reprezentarea constitutivă a materialului simplu

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)), \quad (5.1)$$

prin care starea de tensiune în particula fixată $X \in \mathcal{B}$, la momentul t este determinată de istoria gradientului de deformație până la momentul t , considerat în particula fixată.

În Teorema 3. din cap.2 s-a demonstrat că reprezentarea constitutivă (1) satisface principul obiectivității dacă și numai dacă operatorul constitutiv se poate reprezenta sub forma

$$\mathcal{F}(\mathbf{F}^t(\mathbf{X}, \cdot)) = \mathbf{R}(\mathbf{X}, t) \mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\mathbf{x}, \cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(\mathbf{X}, t)) \mathbf{R}^T(\mathbf{X}, t). \quad (5.2)$$

În continuare nu vom mai menționa particula în localizările acesteia, după cum nu am mai menționat nici configurația de referință k , în scopul simplificării scrierii.

Rezultă deci forma redusă II, scrisă în (2), pentru reprezentările constitutive ale materialelor simple, sau într-o reprezentare echivalentă

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t)). \quad (5.3)$$

Amintim că :

$\mathbf{R}(t) \in Ort$ este rotația la momentul t , rezultată din teorema de descompunere polară aplicată gradientului de deformație $\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)$, cu $\mathbf{U}(t) \in Psim$;

$C(t) = F(t)^T F(t)$ – tensorul Cauchy-Green la dreapta, care intervine sub formă de parametru;

$C_t^t(s) = F_t^T(\tau) F_t(\tau)$, cu $\tau = t - s$, $s \geq 0$, reprezintă valoarea curentă a istoriei tensorului Cauchy-Green la dreapta în descrierea relativă a mișcării;

$F_t(\tau) = F(\tau) F(t)^{-1}$ – reprezintă gradientul deformației în mișcarea relativă, exprimat prin valorile gradientului de deformație, la momentele corespunzătoare de timp, față de configurația de referință k ;

$A^R \equiv R^T A R$, definit în (2.17), este tensorul rotit cu rotația de la momentul t , aici $R \equiv R(t)$ și $A \in Lin$.

Pentru un moment de timp t fixat introducem istoria

$$\begin{aligned} G : R &\longrightarrow Sim, & G(s) &= (C_t^t(s))^R - I \quad \forall s \geq 0, \\ G(s) &= 0 \quad \forall s \geq 0 &\iff C_t^t(s) &= I \equiv I^t(s) \quad \forall s \geq 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Observația 1. Istoria $G(\cdot) = 0$ are semnificația care decurge din interpretarea condiției $C_t^t(s) = I^t(s) \equiv I$, în conformitate cu (2. 98) : corpul este local menținut nedeformat față de o configurație deformată a sa , fiind supus (local) numai la rotații.

Propoziția 1. Reprezentarea constitutivă (3) se reprezintă în forma echivalentă

$$\begin{aligned} T^R(x, t) &= f(C(t)) + \mathcal{F}(G(\cdot), C(t)), \\ \mathcal{F}(0(\cdot), C(t)) &= 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Demonstrație. Punem în evidență istoria identității

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1((C_t^t(\cdot))^R, C(t)) &= \mathcal{F}_1((C_t^t(\cdot))^R, C(t)) - \mathcal{F}_1(I^t(\cdot), C(t)) + f(C(t)), \\ &= f(C(t)) + \mathcal{F}(G(\cdot), C(t)), \end{aligned} \tag{5.6}$$

unde $f(C(t)) = \mathcal{F}_1(I^t(\cdot), C(t))$. Afirmția devine evidentă dacă ținem cont de definiția (4).

Deci reprezentării (5), pentru fiecare valoare fixată a tensorului $C(t)$, i se asociază operatorul constitutiv

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((\cdot), C(t)) : \mathcal{H} &\longrightarrow Sim, \\ \mathcal{H} &= \{G : [0, +\infty) \longrightarrow Sim \mid \text{cu anumite proprietăți}\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Organizăm spațiul de istorii \mathcal{H} cu o structură de spațiu Hilbert introdusă prin intermediul funcției de influență.

Definiția 1. O funcție $h : [0, +\infty) \longrightarrow R_+$ se numește funcție de influență

dacă

- a) h este continuă, $h(0) = 1$,
- b) $\exists r > \frac{1}{2}$ astfel încât $s^r h(s) \rightarrow 0$, pentru $s \rightarrow \infty$
- (5.8)

Propoziția 2. Funcția de influență are următoarele proprietăți

- 1) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $h(s) < \frac{\epsilon}{s^r}$ pentru $s > \delta_\epsilon$.
- 2) $h \in L^2([0, +\infty))$, deci este de pătrat integrabil.
- 3) $h(s) \rightarrow 0$ pentru $s \rightarrow +\infty$.

Dăm câteva **exemple** de funcții de influență

- i) $h(s) = \frac{1}{(1+s)^p}$ cu $p > r$.
- ii) $h(s) = \exp(-\beta s)$ cu $\beta > 0$.

Observația 2. Deoarece $h(0) = 1$ funcția de influență lasă nealterate valorile istoriei \mathbf{C}_t^i în vecinătatea momentului actual, în sensul că $h(0)\mathbf{G}(0) = (\mathbf{C}_t^i(0))^{\mathbf{R}}$. Deoarece $h(s) \rightarrow 0$ pentru $s \rightarrow +\infty$ funcția de influență atenuează valorile la infinit ale istoriei \mathbf{G} , în sensul că $h(s)\mathbf{G}(s) \rightarrow 0$ pentru $s \rightarrow +\infty$.

Precizăm **domeniul de definiție** al operatorului constitutiv \mathcal{F} din (7), care fiind construit cu ajutorul funcției de influență este notat prin $\mathcal{H}_{(h)}$ și este dat de

$$\mathcal{H}_{(h)} = \{ \mathbf{G} : [0, +\infty) \rightarrow Sim \mid \mathbf{G} \text{ măsurabilă } \int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{G}(s)ds < \infty \}. \quad (5.9)$$

Introducem

$$\| \mathbf{G} \|_{(h)} = \left(\int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{G}(s)ds \right)^{1/2}. \quad (5.10)$$

Propoziția 3. $(\mathcal{H}_{(h)}; \langle, \rangle_{(h)})$ este un spațiu Hilbert cu produsul scalar definit prin

$$\langle, \rangle_{(h)}: \mathcal{H}_{(h)} \times \mathcal{H}_{(h)} \rightarrow \mathbb{R},$$
$$\langle \mathbf{G}, \mathbf{H} \rangle_{(h)} = \int_0^\infty h^2(s)\mathbf{G}(s) \cdot \mathbf{H}(s)ds \equiv \int_0^\infty h^2(s)\text{tr}(\mathbf{G}(s)\mathbf{H}^T(s))ds, \quad (5.11)$$

iar $\| \mathbf{G} \|_{(h)}$, definită în (10) este norma corespunzătoare.

Vom introduce acum **principiul materialelor cu memorie întârziată**.¹ Spunem că materialul simplu descris prin reprezentarea constitutivă (5)

¹In formularea acceptată aici, este un principiu slăbit.

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)) + \mathcal{F}(\mathbf{G}(\cdot), \mathbf{C}(t)) \quad \text{unde } ,$$

$$\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{C}(t)) : \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow Sim, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C}(t)) = 0,$$

satisface *principiul materialelor cu memorie întârziată* dacă operatorul constitutiv $\mathcal{F}(\cdot, \mathbf{C}(t))$ este *diferențiabil Fréchet* în $\mathbf{G} = \mathbf{0} \in \mathcal{H}_{(h)}$.

Teorema 1. Diferențiala Fréchet a operatorului constitutiv este dată prin²

$$D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] = \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{G}(s)] ds, \quad (5.13)$$

pentru $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$ cu următoarele proprietăți

$$1) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim \quad \text{liniară} \iff ,$$

$$\exists \tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}) \in R, \quad \forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\} \quad \text{astfel încât}, \quad (5.14)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}) A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,$$

cu simetriile

$$\tilde{K}_{jklm} = \tilde{K}_{kjlm} = \tilde{K}_{jkm l} \quad \forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\}. \quad (5.15)$$

$$2) \int_0^\infty h^2(s) \|\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})\|_{(4)}^2 ds < \infty, \quad (5.16)$$

$$\text{unde } \|\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} = \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 (\tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}))^2 \right)^{1/2}.$$

Demonstrație. Din definiția diferențiabilității Fréchet în $\mathbf{0}$ (vezi anexa A1.) rezultă că

$$\exists D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C}) : \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow Sim \quad \text{liniară și continuă} \quad \text{astfel încât},$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{G}, \mathbf{C}) = \mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C}) + D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] + \omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C}) \quad \text{cu}, \quad (5.17)$$

$$\lim_{\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C})}{\|\mathbf{G}\|_{(h)}} = 0.$$

²Notăm $\mathbf{C} \equiv \mathbf{C}(t)$.

Considerăm o bază carteziană fixată $\{\mathbf{i}_k\}_{k \in \overline{\{1,3\}}}$ și asociem funcționalele $\phi_{jk} = \phi_{kj}$:

$$\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)} \longrightarrow \phi_{jk}[\mathbf{G}] = \mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] \mathbf{i}_k \in R, \quad (5.18)$$

care sunt liniare și continue, cu valori reale, definite pe spațiul Hilbert $\mathcal{H}_{(h)}$, având în vedere proprietățile diferențialei Fréchet pentru operatorul constitutiv care ia valori în *Sim*. Simetria funcționalelor ϕ_{jk} în indicii j, k este o consecință a proprietății diferențialei, dată în (17).

Din teorema lui Riesz, de reprezentare a funcționalelor lineare și continue pe spații Hilbert, rezultă că pentru $\forall(jk), \forall \mathbf{C} \in \text{Sim}$

$\exists \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot, \mathbf{C}) \in \mathcal{H}_{(h)}$ unice astfel încât ,

$$\phi_{jk}[\mathbf{G}] = \langle \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot, \mathbf{C}), \mathbf{G} \rangle_{(h)} \equiv \mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}, \quad (5.19)$$

$$\phi_{jk} = \phi_{kj} \iff \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot, \mathbf{C}) = \tilde{\mathbf{K}}_{kj}(\cdot, \mathbf{C}).$$

Dacă utilizăm definiția (11) a produsului scalar $\langle, \rangle_{(h)}$, din (19) obținem

$$\mathbf{i}_j \cdot D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] \mathbf{i}_k = \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G}(s) ds \iff \quad (5.20)$$

$$D\mathcal{F}(\mathbf{0}, \mathbf{C})[\mathbf{G}] = \left(\int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G}(s) ds \right) \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k,$$

reprezentările având loc $\forall \mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$.

Pe de altă parte din definiția (9) a spațiului $\mathcal{H}_{(h)}$ rezultă $\forall j, k \in \overline{\{1,3\}}$ proprietățile

$$\begin{aligned} i) \quad & \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C}) \in \text{Sim} \quad \forall s \geq 0, \\ ii) \quad & \int_0^\infty h^2(s) |\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C})|^2 ds < \infty. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Construim, pentru $\forall \mathbf{C} \in \text{Sim}$ fixat, câmpul (tensorial de ordinul patru)

$\tilde{\mathbf{K}}(\cdot, \mathbf{C})$ definită a.p.t. pe $[0, +\infty)$, măsurabilă,

$\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) : \text{Sim} \longrightarrow \text{Sim}$ liniară și astfel încât,

$\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s, \mathbf{C}) A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k$ unde,

$\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s, \mathbf{C}) = \mathbf{i}_l \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot, \mathbf{C}) \mathbf{i}_m$.

Simetria scrisă în (15), în raport cu ultimii doi indici (pentru primii doi fixați), rezultă ca o consecință a proprietății i) din (21), $\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(\cdot, \mathbf{C}) \in \text{Sim}$ și a definiției

(22)₃ pentru $\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s, \mathbf{C})$, ca fiind componentele lm ale tensorilor simetrici (pentru fiecare pereche jk fixată). Din (19)₃ rezultă și simetria în prima pereche de indici (pentru a doua pereche fixată), scrisă în (15).

Din definițiile produsului scalar a doi tensori (vezi anexa A1.) și a câmpului tensorial de ordinul patru introdus în (22) deducem că

$$\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{G}(s) \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k = \tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s, \mathbf{C}) G_{lm}(s) \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k = \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]. \quad (5.23)$$

Revenind în (20)₂ cu reprezentarea (23) se deduc atât forma (13) a diferențialei operatorului constitutiv cât și proprietățile 1).

A mai rămas de arătat că are loc proprietatea 2). În ii) (21) explicităm modulul din integrant, cu utilizarea relațiilor din (22). Astfel

$$\int_0^\infty h^2(s) \sum_{l,m=1}^3 (\tilde{\mathbf{K}}_{jklm}(s, \mathbf{C}))^2 ds < \infty.$$

Dacă se sumează acum după indicii i, j rezultă convergența integralei scrisă în (16).

Observația 3. Din Teorema 1. și definiția diferențiabilității Fréchet scrisă în (17) se obține o *estimare* a tensiunii sub forma

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{G}(s)] ds + \omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C}) \quad \text{cu,} \quad (5.24)$$

$$\lim_{\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C})}{\|\mathbf{G}\|_{(h)}} = 0,$$

dacă am utilizat reprezentarea constitutivă fundamentală (5) cu proprietatea (5)₂.

Observația 4. În clasa materialelor cu memorie întârziată este descrisă proprietatea fizică : starea de tensiune a corpului la momentul de timp t este influențată cu o pondere mai mare de istoria recentă a procesului de deformare, față de istoria avută în trecutul îndepărtat. Acest fapt este modelat prin introducerea funcției de influență, care amortizează efectul istoriei îndepărtate a procesului de deformare.

Pe baza principiului materialelor cu memorie întârziată, operatorul \mathcal{F} poate fi aproximat printr-un operator liniar pe istorii. Eroarea tinde la zero mai repede decât $\|\mathbf{G}\|_{(h)}$ tinde la zero. În condiții de regularitate suplimentară , dacă operatorul este diferențiabil de ordinul al doilea într-o vecinătate a istoriei $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, se poate aplica o formulă de evaluare a restului, dată de exemplu în Vainberg [1972].

Pe de altă parte putem asocia unei istorii date \mathbf{G} o istorie încetinită, similar mișcărilor încetinite introduse în paragraful 3.4. Pentru fiecare $\alpha \in (0, 1)$ definim $\mathbf{G}_\alpha(s) = \mathbf{G}(\alpha s)$, $\forall s \geq 0$. Dacă funcția de influență h are proprietatea suplimentară 3) $s^r h(r) \rightarrow 0$, monoton pentru s mari, atunci $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\mathbf{G}_\alpha(\cdot)\|_{(h)} = 0$.

Curbele descrise de $\mathbf{G}, \mathbf{G}_\alpha$ in Sim coincid pentru $s \in R_+$, dar pe istoriile încetinite viteza de parcurgere este mai mică. Rezultă că pe mișcări lente sau încetinite răspunsul materialului simplu poate fi aproximat prin termenul liniar pe istorii (vezi pentru demonstrații Coleman, Noll [1960]).

5.2. Vâscoelasticitate liniară (pe istorii) cu deformații finite

Vom defini corpurile constituite dintr-un material *vâscoelastic liniar pe istorii*, pornind de la estimarea stării de tensiune, dată în formula (24) pentru un material care *satisface principiul materialelor cu memorie întârziată*, reținând numai termenii liniari pe istorii. Dependența de istorie a operatorului constitutiv și proprietățile acestuia sunt cele ce au fost puse în evidență în paragraful anterior.

Definiția 2. Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa X , dintr-un material *vâscoelastic liniar pe istorii*, cu *deformații finite*, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}^R(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) [\mathbf{G}(s)] ds \quad (5.25)$$

pentru orice istorie $\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)}$, $\forall s \geq 0$, cu $\mathbf{G}(s) \equiv (\mathbf{C}_t^t(s))^R - \mathbf{I}$, iar $\tilde{\mathbf{K}}$, numit *nucleu de relaxare*, are proprietățile

$$1) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) : Sim \longrightarrow Sim \text{ liniara } \iff \exists \tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}) \in R, \forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\} \text{ astfel încât} \quad (5.26)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] = \tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}) A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,$$

cu simetriile

$$\tilde{K}_{jklm} = \tilde{K}_{kjlm} = \tilde{K}_{jkm}l \quad \forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\} \quad (5.27)$$

$$2) \int_0^\infty h^2(s) \|\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})\|_{(4)}^2 ds < \infty, \quad (5.28)$$

unde $\|\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} = \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 (\tilde{K}_{jklm}(s, \mathbf{C}))^2 \right)^{1/2}$.

Observația 5. Reamintim că proprietățile menționate ale nucleului au fost deduse în (14) - (16), pentru termenul liniar pe istorii, în ipotezele formulate pentru materialele cu memorie întârziată, iar spațiul funcțional $\mathcal{H}_{(h)}$ a fost definit prin Propoziția 3. În obținerea reprezentărilor constitutive pentru vâscoelasticitatea

liniară pe istorii, nu au fost făcute ipoteze asupra *mărimii* tensorului \mathbf{C} , care intervine sub formă de parametru. Deci astfel de reprezentări sunt aplicabile pentru corpuri în care deformațiile de la configurația de referință la cea actuală sunt *finite*.

Vom pune în evidență *semnificația mecanică a funcțiilor constitutive* din reprezentarea (25). Referitor la funcția f , observăm că primul termen din (25)

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)), \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)f(\mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t)$$

corespunde unei reprezentări constitutive, sub formă redusă (dată în Propoziția 16., formula (2.182)), pentru un corp constituit dintr-un material *elastic*, definit prin (2.180).

Vom considera istorii ale gradientului de deformație care corespund unor procese de tip *Heaviside*, prin care deformația în particula considerată suferă un *salt*, la un anumit moment de timp, de exemplu la $t = 0$, fiind apoi menținută constantă.

Propoziția 4. Fie un proces de deformare de tip *Heaviside*, definit prin

$$\mathbf{F}(\tau) = \begin{cases} \mathbf{F}_0 & \text{pentru } \tau \geq 0, \\ \mathbf{I} & \text{pentru } \tau < 0. \end{cases}$$

Au loc următoarele formule

$$1) \quad \mathbf{G}(s) \equiv \mathbf{G}_{(t)}(s) = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{pentru } s \in [0, t] \\ \mathbf{C}_0^{-1} - \mathbf{I} & \text{pentru } s > t, \end{cases} \quad (5.29)$$

$$2) \quad \mathbf{G}_{(t)} \in \mathcal{H}_{(h)}, \quad (\|\mathbf{G}\|_{(h)})^2 = \left[\int_t^\infty h^2(s) ds \right] (\mathbf{C}_0^{-1} - \mathbf{I})^2, \quad (5.30)$$

$$3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}_{(t)}\|_{(h)} = 0. \quad (5.31)$$

Istoria $\mathbf{G}(s)$ depinde de t – valoarea curentă a timpului. Dacă este calculată valoarea acesteia pentru procesul de deformare de tip Heaviside se obține reprezentarea din (29), în care apare explicit t în membrul drept. Am menționat explicit dependența de t în notația din (29), deoarece ne interesează comportamentul istoriilor în raport cu parametrul t .

Teorema de relaxare a tensiunii. Dacă se consideră familia istoriilor de deformare de forma prescrisă în Propoziția 4., atunci

$$i) \quad \mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}_0) + \left(\int_t^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}_0) ds \right) [\mathbf{C}_0 - \mathbf{I}], \quad (5.32)$$

$$ii) \quad f(\mathbf{C}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}_0 \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \right) \mathbf{R}_0^T,$$

cu $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{U}_0$ și $\mathbf{C}_0 = \mathbf{U}_0^2$.

Demonstrație. Să observăm că prin construcție aplicația

$$\mathbf{G} \in \mathcal{H}_{(h)} \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) [\mathbf{G}(s)] ds \quad (5.33)$$

este continuă în $\mathbf{G} = \mathbf{0}$. Deoarece istoriile din Propoziția 4. sunt elemente din $\mathcal{H}_{(h)}$ cu proprietatea $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{G}_{(t)}\|_{(h)} = 0$, rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) [\mathbf{G}_{(t)}(s)] ds = 0. \quad (5.34)$$

În trecerea la limită considerată în (34) am folosit faptul că $\mathbf{F}(\tau) = \mathbf{F}_0$ pentru $\tau \geq 0$, deci și pentru $\tau = t \geq 0$. Prin urmare $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_0$ independent de timp și $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0$.

Dacă în reprezentarea constitutivă (25) se consideră câmpurile introduse în Propoziția 4., se deduce formula (32). Ca o consecință a relației i) din (32) și, prin trecere la limită, ca o consecință a formulei (34) se deduce ii).

Observația 6. Interpretarea mecanică a funcției f se desprinde din Teorema de relaxare a tensiunii. $f(\mathbf{C}_0)$ reprezintă valoarea limită a tensiunii, rotite cu rotația \mathbf{R}_0 , într-o experiență în care deformația suportă un salt la momentul $t = 0$, de la valoarea \mathbf{I} la valoarea $\mathbf{F}_0 = \mathbf{R}_0(\mathbf{C}_0)^{1/2}$, care este menținută constantă un timp îndelungat.

Nucleul $\tilde{\mathbf{K}}$ descrie în general influența istoriei de deformație asupra stării curente a tensiunii, în particula considerată, iar pentru procese de tip Heaviside descrie variația în timp a tensiunii, așa numita relaxare a tensiunii, prin formula i) (24). Menționăm că aceasta este o proprietate specifică materialelor vâscoelastice. Corpurile elastice, fluidele Reiner - Rivlin, fluidele liniar vâscoase nu prezintă proprietăți de relaxare a tensiunii.

Definiția 3. Spunem că un corp \mathcal{B} are proprietăți de relaxare dacă are loc o variație în timp a tensiunii într-o experiență în care deformația suferă un salt (la $t=0$ de exemplu) și apoi este menținută constantă pentru orice moment de timp $\tau > 0$.

Vom introduce un alt nucleu de relaxare, notat \mathbf{K} , care este o funcție de material.

Propoziția 5. Câmpul tensorial definit prin

$$\mathbf{K}(s, \mathbf{C}) = h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) : \text{Sim} \longrightarrow \text{Sim}, \quad \text{liniară} \quad \forall s \geq 0, \quad \text{a.p.t.}, \quad (5.35)$$

are următoarele proprietăți

- 1) $\mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] = K_{jklm}(s, \mathbf{C})A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k \quad \forall \mathbf{A} \in Sim$ cu simetriile,
 $K_{jklm} = K_{kjlm} = K_{jklm} \quad \forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\}$,
- 2) $\int_0^\infty h^{-2}(s) (\|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)})^2 ds < \infty,$ (5.36)
- 3) $\int_0^\infty \|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} ds < \infty,$
- 4) $\exists \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}) ds : Sim \rightarrow Sim$ liniară și continuă,
- 5) $\forall \tau \in [0, +\infty) \exists f(\tau) = \int_\tau^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}) ds \in Lin(Sim, Sim) \equiv \mathcal{X},$
și există $\dot{f}(\tau) \equiv -\mathbf{K}(\tau, \mathbf{C})$ a.p.t. cu, $\dot{f} \in L^1([0, +\infty), \mathcal{X})$
- 6) $f(t) = f(0) + \int_0^t \dot{f}(s) ds.$

Evident că funcția f definită prin 5) depinde de $\mathbf{C} \in Sim$, dar nu l-am mai menționat.

Demonstrație. 1) se obține ca o consecință a proprietăților câmpului tensorial $\tilde{\mathbf{K}}(\cdot, \mathbf{C})$, listate în 1) din (14) și (15).

2) Din proprietatea ii) din (21), rescrisă pentru noul câmp deducem că

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty h^2(s) |\tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{jk}(s, \mathbf{C})| ds = \\ & = \int_0^\infty h^{-2}(s) |\mathbf{K}_{jk}(s, \mathbf{C}) \cdot \mathbf{K}_{jk}(s, \mathbf{C})| ds = \int_0^\infty h^{-2}(s) (\|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)})^2 ds < \infty. \end{aligned}$$

3) Cum $h \in L^2([0, +\infty))$, aplicând inegalitatea lui Hölder rezultă

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} ds \leq \\ & \left(\int_0^\infty h^2(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty (h^{-1}(s) \|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)})^2 ds \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

unde am ținut seama de 2) deja demonstrat.

4) Pentru $\mathbf{A} \in Sim$ fixat, funcția $s \rightarrow \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}]$ pentru $s \in [0, +\infty)$ este măsurabilă, și

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] ds \right| &\leq \int_0^\infty \left| \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] \right| ds \leq \\ &\leq \int_0^\infty \|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} \|\mathbf{A}\| ds. \end{aligned}$$

Pentru demonstrarea estimării (37) am folosit majorarea

$$\left| \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] \right| \leq \|\mathbf{K}(s, \mathbf{C})\|_{(4)} \|\mathbf{A}\|, \quad \forall \mathbf{A} \in Sim,$$

care este o consecință directă a definițiilor normelor în Lin și $\|\cdot\|$ (16). Astfel rezultă că aplicația liniară

$$\forall \mathbf{A} \in Sim \quad \longrightarrow \quad \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] ds \in Sim$$

există, deoarece are loc (37) pentru $\forall \mathbf{A} \in Sim$.

Pe de altă parte aplicația definită în (39) este și continuă, deoarece avem mărginirea aplicației. Deci a fost demonstrată și formula 4).

Prin demonstrarea punctului 4) am arătat deci că $\mathbf{K}(\cdot, \mathbf{C}) \in L^1([0, +\infty))$. Cu tehnica standard rezultă existența funcției de variabilă τ , introdusă în definiție, care are proprietățile acesteia.

Adoptăm în cele ce urmează

Definiția 4. Aplicația $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ cu \mathcal{X} spațiu normat, se numește *absolut continuă* dacă

$$\exists \dot{f} \in L^1_{loc}([0, +\infty), \mathcal{X}) \quad \text{astfel încât} \quad f(t) = f(0) + \int_0^t \dot{f}(s) ds$$

Deci \dot{f} este integrabilă pe orice compact din $[0, +\infty)$.

Vom spune că funcția f absolut continuă este *tare* dacă este în $L^1([0, +\infty))$. Notăm $f \in L^1([0, +\infty))$.

Observația 7. Funcția introdusă în (36) la punctul 5)

$$f(\tau) = \int_\tau^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}) ds \in Lin(Sim, Sim) \equiv \mathcal{X}, \quad \forall \tau \in [0, +\infty)$$

are proprietatea că este absolut continuă, tare (în conformitate cu definiția)

$$\dot{f}(\tau) \equiv -\mathbf{K}(\tau, \mathbf{C}) \quad \text{a.p.t.,} \quad \dot{f} \in L^1([0, +\infty), \mathcal{X}).$$

Observația 8. Nucleul \mathbf{K} introdus prin formula (35), are proprietățile menționate în Propoziția 5., *mai slabe* decât proprietățile nucleului $\tilde{\mathbf{K}}$. El permite o estimarea a tensiunii (vezi Observația 3., formula (24)) sub forma

$$\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{G}(s)]ds + \omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C}), \quad (5.43)$$

cu $\lim_{\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\omega(\mathbf{0}, \mathbf{G}; \mathbf{C})}{\|\mathbf{G}\|_{(h)}} = 0.$

Observația 8. va sta la baza introducerii unei alte reprezentări constitutive pentru materiale vâscoelastice liniare (pe istorii), prin nucleul de relaxare \mathbf{K} – integrabil, deci cu proprietăți slăbite. Printr-un procedeu de liniarizare, din reprezentarea constitutivă (43) se desprinde o reprezentare constitutivă, *posibilă*, prin care se va defini un nou material.

Definiția 5. Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa X , dintr-un material *vâscoelastic liniar cu deformații finite*, dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t)\{f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}(t))[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t), \quad (5.44)$$

unde istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0$, a fost definită în (4), și $\mathbf{K}(\cdot, \mathbf{C}) : [0, +\infty) \rightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ numită *nucleu de relaxare*, are proprietățile

$$a) \mathbf{K}(s, \mathbf{C})[\mathbf{A}] = K_{jklm}(s, \mathbf{C})A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \quad K_{jklm} = K_{kjlm} = K_{jkml}, \quad (5.45)$$

pentru $\forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\}$ și $\forall \mathbf{A} \in \text{Sim}$ și

$$b) \exists \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C})ds : \text{Sim} \rightarrow \text{Sim} \text{ liniară și continuă.}$$

Domeniul de definiție al operatorului de tip integral introdus prin Definiția 5., în care nucleul de relaxare are proprietățile menționate, va fi precizat, astfel încât integrala să fie convergentă. Pentru exemplificare vezi exercițiul 17.

5.3 Vâscoelasticitate liniară (pe istorii), izotropă, cu deformații finite

Fie \mathcal{B} un corp vâscoelastic liniar (pe istorii), cu deformații finite caracterizat în particula X , în raport cu o configurație de referință k , prin reprezentarea constitutivă (44), rescrisă în forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{R}(t)\{f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}(t))[\mathbf{G}(s)]ds\}\mathbf{R}^T(t) \equiv \\ &\equiv \mathbf{R}(t)\mathcal{F}_1((\mathbf{C}_t^t(\cdot))^{\mathbf{R}}, \mathbf{C}(t))\mathbf{R}^T(t), \end{aligned} \quad (5.46)$$

în care am menționat că avem de fapt o reprezentare constitutivă particulară a formei reduse II, conform formulei (2). Afirmția este corectă, deoarece din (4) istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_i^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I}$, $\forall s \geq 0$,

Vom presupune că \mathcal{B} este izotrop, în raport cu configurația k , deci conform Definiției 9., formula (2.66), $g_k(\mathbf{X}) \supset Ort$.

Vom demonstra acum o teoremă de caracterizare.

Teorema 2. Dacă \mathcal{B} este un corp vâscoelastic liniar (pe istorii), cu deformații finite, caracterizat prin (46), atunci el este izotrop în particula X dacă și numai dacă admite reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{B}(t))[\bar{\mathbf{G}}(s)]ds, \quad (5.47)$$

unde $\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_i^t(s) - \mathbf{I}$ $\forall s \geq 0$. Funcțiile constitutive verifică, condițiile de izotropie

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}f(\mathbf{B}(t))\mathbf{Q}^T, \quad (5.48)$$

$$\mathbf{K}(s, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbf{K}(s, \mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)]\mathbf{Q}^T,$$

pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort$, $\forall s \geq 0$, a.p.t. și pentru orice istorie \mathbf{F}^t .

Demonstrația utilizează condiția necesară și suficientă pentru ca o reprezentare constitutivă sub forma redusă II să descrie un corp izotrop (vezi Teorema 13., formulele (2.74) și (2.75)). Prin aplicarea teoremei menționate din (46) avem reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_1(\mathbf{C}_i^t(\cdot), \mathbf{B}(t)) \equiv f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{B}(t))[\bar{\mathbf{G}}(s)]ds, \quad (5.49)$$

cu condiția de izotropie în ambele argumente (dedusă din (2.75))

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q}^T) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{Q}\mathbf{B}(t)\mathbf{Q})[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T]ds = \\ = \mathbf{Q}\{f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{B}(t))[\bar{\mathbf{G}}(s)]ds\}\mathbf{Q}^T, \end{aligned}$$

pentru orice $\mathbf{Q} \in Ort$ unde $\bar{\mathbf{G}}(s) = \mathbf{C}_i^t(s) - \mathbf{I}$, $\forall s \geq 0$.

Particularizăm istoria de deformație \mathbf{F}^t la un proces care corespunde menținerii locale a corpului nedeformat, față de configurația actuală (vezi (2. 98) din Propoziția 5.), deci astfel încât $\mathbf{C}_i^t(s) = \mathbf{I}$ $\forall s \geq 0$, sau $\bar{\mathbf{G}}(s) = 0$, sau încă $\mathbf{U}(\tau) = \mathbf{U}(t)$, $\forall \tau \leq t$. Din (49)₂ rezultă izotropia funcției f . Revenind în (49) deducem că are loc egalitatea

$$\int_0^\infty \{ \mathbf{K}(s, \mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^T)[\mathbf{Q}\bar{\mathbf{G}}(s)\mathbf{Q}^T] - \mathbf{Q}\mathbf{K}(s, \mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)]\mathbf{Q}^T \} ds = 0, \quad (5.50)$$

pentru $\forall \mathbf{Q} \in Ort, \quad \forall \mathbf{F}^t$.

Datorită arbitrarului în alegerea \mathbf{F}^t , din (50) obținem că are loc izotropia nucleului de relaxare în raport cu ambele argumente a.p. t. în s .

Teorema 3. Un corp solid constituit dintr-un material vâscoelastic, liniar pe istorii este izotrop, dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{B}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{B}(t))[\bar{\mathbf{G}}(s)] ds, \quad \text{unde}$$

$$a) \quad f(\mathbf{B}) = \varphi_0(j_{\mathbf{B}})\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B} + \varphi_2(j_{\mathbf{B}})\mathbf{B}^2, \quad (5.51)$$

$$b) \quad \mathbf{K}(s, \mathbf{B})[\bar{\mathbf{G}}(s)] = \bar{\mathbf{G}}(s) f_1(s, \mathbf{B}) + f_1(s, \mathbf{B}) \bar{\mathbf{G}}(s) +$$

$$+ \text{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s) f_2(s, \mathbf{B})] \mathbf{I} + \text{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s) f_3(s, \mathbf{B})] \mathbf{B} + \text{tr}[\bar{\mathbf{G}}(s) f_2(s, \mathbf{B})] \mathbf{B}^2,$$

în care $\{f_j\} \quad 1 \leq j \leq 3$, sunt funcții de (s, \mathbf{B}) , izotrope în raport cu \mathbf{B} , cu valori tensori simetrice, deci reprezentabile sub forma a), cu funcțiile coeficienți depinzând de $(s, j_{\mathbf{B}})$.

Demonstrația decurge imediat prin aplicarea teoremelor lui Cauchy și respectiv ale lui Wang [1970] de reprezentare a funcțiilor izotrope, cu valori tensori simetrice. Ținem seama că f prin (48) este funcție izotropă de argument tensor simetric, deci are loc reprezentarea din teorema lui Cauchy, vezi anexa A2. Referitor la nucleul de relaxare utilizăm teorema lui Wang (scrisă în Teorema 4. formula (3.38) pentru materiale diferențiale de ordinul doi), cu specificitatea cazului discutat, de a avea liniaritate în raport cu valorile curente ale istoriei \mathbf{G} și dependența de $s \in R_+$.

Reciproca este imediată.

Teorema 4. Fie un corp \mathcal{B} constituit dintr-un material vâscoelastic, liniar pe istorii, cu deformații finite. Corpul este fluid în particula X dacă și numai dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = -p(\rho)\mathbf{I} + \int_0^\infty [\gamma_0(s, \rho)\bar{\mathbf{G}}(s) + \mu_0(s, \rho)\text{tr}(\bar{\mathbf{G}}(s))\mathbf{I}] ds. \quad (5.52)$$

Demonstrație. Conform Definiției 8., formula (2.65), pentru fluide grupul de simetrie g_k al materialului în particula X , în raport cu configurația de referință k , este Unim. Prin urmare este izotrop și admite reprezentarea din Teorema 3. În teorema fundamentală asupra fluidelor am arătat că dependența de \mathbf{B} se transformă în dependență de ρ . Procedăm în mod similar (vezi formula (2.90)); pentru o istorie a gradientului de deformație dată construim

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{1/3} \mathbf{F}^{-1}(t) \in Unim. \quad (5.53)$$

Știind că răspunsul materialului simplu rămâne neschimbat, deci suportă aceeași tensiune pentru istoria \mathbf{F}^t și $\tilde{\mathbf{F}}^t \equiv \mathbf{F}^t \mathbf{H} \quad \forall \mathbf{H} \in Unim$, fixat, deducem, corespunzător formulelor (2.91), că

$$\tilde{\mathbf{C}}_t(\tau) = \mathbf{C}_t(\tau), \quad \tilde{\mathbf{B}}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{2/3} \mathbf{I} = (\det \mathbf{B}(t))^{1/3} \mathbf{I}. \quad (5.54)$$

Calculăm răspunsul materialului corespunzător istoriei $\tilde{\mathbf{F}}^t$. Valoarea funcției f , calculată din (51) cu (54), rezultă un tensor sferic, dependent de densitatea curentă, notat $-p(\rho)\mathbf{I}$, iar pentru nucleul de relaxare, calculat pentru $\tilde{\mathbf{B}}(t)$ dat în (54) se obține formula (52).

Observația 9. Reprezentarea constitutivă din Teorema 4. reprezintă o particularizare a formulelor (2.86) din teorema fundamentală pentru fluide.

5.4 Vâscoelasticitate liniară, cazul deformațiilor finite.

Vom liniariza reprezentarea constitutivă a materialelor vâscoelastice liniare (pe istorii) (introduse în Definiția 2., formula (25)), în raport cu măsura de deformație $\mathbf{C}(t) \equiv \mathbf{C}$, în vecinătatea valorii $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ (deci în vecinătatea configurației inițiale de referință).

Facem următoarele ipoteze :

i) Funcția $\mathbf{C} \in Sim \rightarrow f(\mathbf{C})$ este diferențiabilă Fréchet în \mathbf{I} , deci

$$\begin{aligned} \exists D f(\mathbf{I}) : Sim &\rightarrow Sim \text{ liniară și continuă astfel încât,} \\ f(\mathbf{C}) &= f(\mathbf{I}) + D f(\mathbf{I})[\mathbf{C} - \mathbf{I}] + \omega_1(\mathbf{I}, \mathbf{C}), \quad \lim_{\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{I}} \frac{\omega(\mathbf{I}, \mathbf{C})}{|\mathbf{C} - \mathbf{I}|} = 0; \end{aligned} \quad (5.55)$$

ii) Funcția $\mathbf{C} \in Sim \rightarrow \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C})$ este continuă în $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, uniform în raport cu s .

Deci $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ astfel încât $\|\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}) - \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})\|_4 < \epsilon$ pentru $\forall \mathbf{C} : |\mathbf{C} - \mathbf{I}| < \delta_\epsilon, \forall s \in [0, +\infty)$.

Astfel din (25) se obține următoarea estimare a tensiunii

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{I}) + D f(\mathbf{I})[\mathbf{C} - \mathbf{I}] + \int_0^\infty h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})[\mathbf{G}(s)] ds + \\ &+ \int_0^\infty h^2(s) [\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})][\mathbf{G}(s)] ds + \omega_1(\mathbf{I}, \mathbf{C}), \end{aligned} \quad (5.56)$$

în care s-au pus în evidență termenii liniari pe istorii, dar și terme raport cu $\mathbf{C} - \mathbf{I}$.

Observația 10. Vom da o estimare pentru valoarea penultimului (56), care decurge din calculele următoare

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\infty h^2(s) [\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})] [\mathbf{G}(s)] ds \right| \leq \\ & \leq \int_0^\infty h^2(s) \| [\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})] \|_4 | [\mathbf{G}(s)] | ds \\ & \leq \left(\int_0^\infty h^2(s) (\| [\tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{C}(t)) - \tilde{\mathbf{K}}(s, \mathbf{I})] \|_4)^2 ds \right)^{1/2} \times \\ & \times \left(\int_0^\infty h^2(s) | [\mathbf{G}(s)] |^2 ds \right)^{1/2} \leq \epsilon \| \mathbf{G} \|_{(h)} \left(\int_0^\infty h^2(s) ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

pentru orice \mathbf{C} cu $\| \mathbf{C} - \mathbf{I} \| < \delta_\epsilon$.

Introducem următoarele notații

$\mathbf{T}_0 \equiv f(\mathbf{I}) \in Sim$, $L_0 \equiv Df(\mathbf{I}) : Sim \rightarrow Sim$, liniară și conti-

$\mathbf{K}_0 : [0, +\infty) \rightarrow Lin(Sim, Sim)$ definită prin $\mathbf{K}_0(s) = h^2(s) \tilde{\mathbf{K}}$

pentru orice $s \in [0, +\infty)$.

Forma *liniarizată* obținută în estimarea tensiunii, găsită în (definiția care urmează.

Definiția 6. Spunem că un corp este constituit, într-o particulă, un material *liniar văscocoelastic, cu deformații finite*, dacă admite o constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t) \{ \mathbf{T}_0 + 2L_0[\mathbf{E}(t)] + \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s) [\mathbf{G}(s)] ds \} \mathbf{R}^T(t)$$

cu \mathbf{T}_0 , L_0 , \mathbf{K}_0 , definiți prin formulele (58), tensorul de deformație $2\mathbf{E}(t) = \mathbf{C}(t) - \mathbf{I}$, iar istoria $\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I}$.

Tensorul simetric \mathbf{T}_0 are semnificație de tensiune inițială, deoarece este menținut nedeformat ($\mathbf{C}(t) = \mathbf{I}$, $\mathbf{C}_t^t(s) = \mathbf{I}$) în configurația sa. atunci $\mathbf{T}^{\mathbf{R}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_0$. Prezența celui de-al doilea termen are semnif portament liniar elastic, în timp ce \mathbf{K}_0 este un nucleu de relaxare de deformația curentă.

Vom prezenta în continuare o justificare posibilă pentru forma constitutive a corpurilor constituite din materiale *liniar văscocoelastic deformații infinitizimale sau mici*.

5.5 Vâscoelasticitate liniară, cazul deformațiilor infinitezimale

5.5.1 Reprezentări constitutive în vâscoelasticitatea liniară

Pornim de la reprezentarea constitutivă pentru corpuri constituite din materiale liniare vâscoelastice cu deformații finite (59) și introducem *ipoteza* că, corpul suportă numai *deformații infinitezimale, sau mici*.

Folosim formulele de aproximare, introduse în paragraful 1.6, pentru cazul deformațiilor infinitezimale, pentru tensorii de deformație ((82)₁, (82)₅, (83)₄)

$$\mathbf{R}(t) \simeq \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}(t) = \mathbf{I} + O(\delta), \quad \mathbf{E}(t) \simeq \boldsymbol{\epsilon}(t), \quad (5.60)$$

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t(\tau))^{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R}^T(t)\mathbf{C}_t(\tau)\mathbf{R}(t) \simeq 2[(\boldsymbol{\epsilon}(\tau) - \boldsymbol{\epsilon}(t))], \quad \tau = t - s.$$

Dacă le introducem în (59) și ținem seama de ordinul lor de mărime în raport cu δ deducem că

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{T}_0 + \boldsymbol{\omega}(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\boldsymbol{\omega}(t) + 2L_0[\boldsymbol{\epsilon}(t)] + \\ &+ 2 \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)[\boldsymbol{\epsilon}(t-s) - \boldsymbol{\epsilon}(t)]ds + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Vom utiliza proprietățile nucleului de relaxare \mathbf{K}_0 , menționate anterior. Din (36)₅ scrisă pentru $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, rezultă că (61) admite reprezentarea

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{T}_0 + \boldsymbol{\omega}(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\boldsymbol{\omega}(t) + 2(L_0 - \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)ds)[\boldsymbol{\epsilon}(t)] + \\ &+ 2 \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)[\boldsymbol{\epsilon}(t-s)] + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (5.62)$$

În conformitate cu Observația 7. rezultă că *există* aplicația absolut continuă, definită prin

$$\mathbf{M}_0(\tau) = -2 \int_\tau^\infty \mathbf{K}_0(s)ds \in \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim}) \equiv \mathcal{X} \quad \forall \tau \in [0, +\infty), \quad (5.63)$$

cu $\mathbf{M}_0(0) = -2 \int_0^\infty \mathbf{K}_0(s)ds$. Deci

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}}_0(\tau) &\equiv 2\mathbf{K}_0(\tau) \quad \text{a.p.t.} \quad \dot{\mathbf{M}}_0 \in L^1([0, +\infty), \mathcal{X}) \quad \text{și} \\ \mathbf{M}_0(\tau) &= \mathbf{M}_0(0) + \int_0^\tau \dot{\mathbf{M}}_0(s)ds \in \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim}). \end{aligned} \quad (5.64)$$

Cu noul nucleu \mathbf{M}_0 , definit în (63), rescriem pe (62)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{T}_0 + \boldsymbol{\omega}(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\boldsymbol{\omega}(t) + (2L_0 + \mathbf{M}_0(0))[\boldsymbol{\epsilon}(t)] + \\ &+ \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}_0(s)[\boldsymbol{\epsilon}(t-s)] + O(\delta^2). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Observația 11. Să observăm că aplicația $\mathbf{M}(\tau) = \mathbf{M}_0(\tau) + 2L_0$ are proprietățile nucleului \mathbf{M}_0 , cu deosebirea că la momentul $t = 0$ are o altă valoare.

În final am obținut o nouă reprezentare pentru (65) prin intermediul nucleului absolut continuu \mathbf{M} :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t) + \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)] + O(\delta^2), \quad (5.66)$$

Suntem în măsură să dăm următoarea definiție

Definiția 7. Spunem că un corp este constituit, într-o particulă a sa X , dintr-un material *liniar vâscoelastic, cu deformații infinitezimale*, cu *tensiuni inițiale* (în configurația sa de referință), dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}_0 + \omega(t)\mathbf{T}_0 - \mathbf{T}_0\omega(t)\mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds, \quad (5.67)$$

cu $\mathbf{T}_0 \in \text{Sim}$, iar nucleul \mathbf{M} absolut continuu, are proprietățile

$$\mathbf{M} : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim}), \quad (5.68)$$

$$\mathbf{M}(s)[\mathbf{A}] = M_{jklm}(s)A_{lm} \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \text{ cu } M_{jklm} = M_{kjl m} = M_{j k m l}.$$

Dacă nucleul este definit pe $[0, +\infty)$ și este o funcție absolut continuă, spunem că este un nucleu *tare*.

Tensorul micilor deformații și tensorul spin sunt definiți în (1.78)- (1.80) prin partea simetrică și respectiv partea antisimetrică a gradientului deplasării

$$\epsilon(t) \equiv \epsilon(\mathbf{u})(t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(t) + \nabla^T \mathbf{u}(t)), \quad \omega(t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla^T \mathbf{u}(t)). \quad (5.69)$$

Observația 12. Să remarcăm că în cazul existenței tensiunilor inițiale reprezentarea constitutivă depinde de *istoria tensorului micilor deformații*, dar și de *valoarea curentă a gradientului de deplasare, prin spinul elastic*. Tensorul simetric \mathbf{T}_0 reprezintă valoarea tensiunii în corp care corespunde menținerii lui nedeformat, deci cu $\epsilon(\tau) = 0, \quad \forall \tau \in R_+$.

Definiția 8. Modelul constitutiv pentru materialul *liniar vâscoelastic, cu deformații infinitezimale*, fără *tensiuni inițiale*, este descris prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds. \quad (5.70)$$

Remarcăm că în acest caz starea de tensiune este determinată numai prin istoria până la momentul t a părții simetrice a gradientului de deplasare.

Vom pune în evidență *semnificația mecanică* a nucleului \mathbf{M} .

Propoziția 6. Fie un corp vâscoelastic liniar cu deformații infinitezimale, supus la un proces de deformație de tip Heaviside

$$\epsilon(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \tau < 0, \\ \tilde{\epsilon}(\tau) & \text{pentru } \tau \geq 0. \end{cases} \quad (5.71)$$

Starea de tensiune corespunzătoare, pentru $t \geq 0$, se exprimă prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\tilde{\epsilon}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)[\tilde{\epsilon}(t-s)]ds. \quad (5.72)$$

Demonstrația este imediată dacă observăm că $\tau = t - s < 0$ este echivalent cu $s > t$ deci $\epsilon(t-s) = 0$, pentru $s > t$.

Propoziția 7. Fie o experiență de *relaxare*, definită printr-un proces de deformație de tip Heaviside, dat în (71) cu $\tilde{\epsilon}(\tau) = \epsilon_0$. Nucleul \mathbf{M} caracterizează *variația în timp a tensiunii* în experiența de relaxare, deoarece

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(t)[\epsilon_0]. \quad (5.73)$$

Demonstrația este o consecință a relației (64) și a faptului că, din (72), pentru $t > 0$ rezultă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon_0] + \left(\int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)ds \right) [\epsilon_0] \equiv \mathbf{M}(t)[\epsilon_0].$$

5.5.2 Vâscoelasticitate liniară și izotropă

În cazul deformațiilor finite, pornind de la definiția corpului constituit dintr-un material izotrop am *dedus* condiții necesare și suficiente pe care trebuie să le satisfacă operatorul constitutiv, pentru ca grupul de simetrie al materialului $g_k(\mathbf{X})$ în raport cu configurația k de referință să includă mulțimea transformărilor ortogonale.

În cazul deformațiilor infinitezimale conceptul de câmp obiectiv își pierde sensul. De exemplu în aproximațiile făcute (vezi formulele (1.82) din Propoziția 15), tensorii de deformație $\mathbf{B}(t)$ (care este *obiectiv*) și $\mathbf{C}(t)$ (care este invariant), coincid cu $\simeq \mathbf{I} + 2\epsilon(t)$.

Prin urmare vom *postula condiția de izotropie* a operatorului constitutiv, *obținută din definiție* în cazul deformațiilor finite.

Definiția 9. Modelul constitutiv pentru materialul *liniar vâscoelastic*, cu *deformații infinitezimale*, fără tensiuni inițiale, reprezentat prin (70) este *izotrop*

dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\{\mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)]ds\}\mathbf{Q}^T &= \\ &= \mathbf{M}(0)[\mathbf{Q}\epsilon(t)\mathbf{Q}^T] + \int_0^\infty \dot{\mathbf{M}}(s)[\mathbf{Q}\epsilon(t-s)\mathbf{Q}^T]ds, \end{aligned} \quad (5.74)$$

pentru $\mathbf{Q} \in Ort$, și pentru orice valoare a tesorerului de deformare $\epsilon(\tau)$.

Teorema de reprezentare pentru corpul vâscoelastic liniar, cu deformații infinitezimale și izotrop. Un corp vâscoelastic liniar este izotrop dacă și numai dacă există două funcții scalare, absolut continue λ și μ astfel încât nucleul \mathbf{M} se reprezintă sub forma

$$\mathbf{M}(s)[\mathbf{A}] = \lambda(s) \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{I} + 2\mu(s) \mathbf{A} \quad \forall s \in [0, +\infty), \quad \forall \mathbf{A} \in Sim, \quad (5.75)$$

sau pe componente, într-o bază carteziană fixată

$$M_{jklm}(s) = \lambda(s) \delta_{jk} \delta_{lm} + \mu(s) (\delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{jm} \delta_{kl}), \quad (5.76)$$

pentru $\forall j, k, l, m \in \{\overline{1, 3}\}$.

Deci reprezentarea constitutivă (70) se scrie sub forma

$$\mathbf{T}(t) = \lambda(0) \operatorname{tr} \epsilon(t) \mathbf{I} + 2\mu(0) \epsilon(t) + \int_0^\infty (\dot{\lambda}(s) \operatorname{tr} \epsilon(t-s) \mathbf{I} + 2\dot{\mu}(s) \epsilon(t-s)) ds \quad (5.77)$$

numită *reprezentarea lui Boltzmann*.

Demonstrație. Considerăm experiența de relaxare definită printr-un proces de deformare de tip Heaviside, dat în (71) cu $\tilde{\epsilon}(\tau) = \epsilon_0$ fixat, dar arbitrar. În Propoziția 7. am arătat că răspunsul materialului se exprimă sub forma (73). În relația de definiție a corpului izotrop (74) introducem deformația menționată, de unde va rezulta că

$$\mathbf{M}(t)[\mathbf{Q}\epsilon_0\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbf{M}(t)[\epsilon_0]\mathbf{Q}^T \quad \forall \epsilon_0 \in Sim, \quad \forall t \in R. \quad (5.78)$$

Deci pentru $\forall s \in [0, +\infty)$ $\mathbf{M}(s) : Sim \rightarrow Sim$ este liniară și izotropă, prin urmare din teorema de reprezentare pentru funcții izotrope (vezi anexa A2), rezultă reprezentarea menționată. Funcțiile scalare au aceleași proprietăți de regularitate ca și funcția $\mathbf{M}(s)$.

Funcțiile λ și μ caracterizează *proprietățile de relaxare* ale corpului, μ – în experiențe de *forfecare*, iar $3\lambda + 2\mu$ – într-o experiență de *compresiune/dilatare volumică*.

Propoziția 8. Reprezentarea constitutivă a lui Boltzmann, (77), este echivalentă cu o reprezentare *decuplată* în partea *deviatorică* și *sferică*

$$\mathbf{T}'(\mathbf{x}, t) = 2\mu(0)\epsilon'(t) + 2 \int_0^\infty \dot{\mu}(s)\epsilon'(t-s)ds, \quad (5.79)$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (3\lambda(0) + 2\mu(0)) \operatorname{tr} \epsilon(t) + \int_0^\infty (3\dot{\lambda}(s) + 2\dot{\mu}(s)) \operatorname{tr} (\epsilon(t-s)) ds,$$

cu definiția clasică pentru deviatorul unui tensor : $\epsilon' = \epsilon - (1/3)\text{tr}(\epsilon)\mathbf{I}$.

5.5.3 Legi ereditare. Legi de relaxare și fluaj

În Definiția 8. a fost introdusă reprezentarea constitutivă pentru materialul *liniar văscuoelastic, cu deformații infinitezimale, fără tensiuni inițiale*.

Renotăm nucleul de relaxare $\mathbf{M} \equiv \mathbf{G}$, iar tensorul micilor deformații, ϵ prin \mathbf{E} .

Dacă nucleul $\mathbf{G} : [0, +\infty) \rightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ este presupus funcție absolut continuă, cu $\dot{\mathbf{G}}$ integrabilă pe $[0, +\infty)$, conform Definiției 4., spunem că este un nucleu de relaxare *tare*.

Presupunem că \mathcal{B} este constituit dintr-un material văscuoelastic liniar, caracterizat printr-o reprezentare constitutivă (cu un *nucleu de relaxare, tare*), dată în (70) sub forma

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{G}(0)[\mathbf{E}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{G}}(s)[\mathbf{E}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_G(\mathbf{E})(t), \quad (5.80)$$

pentru $\forall t > 0$.

Reprezentarea constitutivă este numită și *lege ereditară de relaxare, lege văscuoelastică de relaxare, sau reprezentare integrală de tip relaxare*.

Definiția 10. Spunem că un corp \mathcal{B} este *văscuoelastic de tip relaxare* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma (80) și un corp \mathcal{B} este *văscuoelastic de tip fluaj* dacă admite o reprezentare constitutivă de forma

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})(t). \quad (5.81)$$

Aici $\mathbf{J} : [0, +\infty) \rightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ este o funcție absolut continuă, cu simetriile din (68) și definește un nucleu de *fluaj, tare*.

Observația 13. Vom considera în domeniile de definiție, pentru (81), procese de tip Heaviside, deci $\mathbf{T}(\tau) = 0 \quad \forall \tau < 0$. Atunci reprezentarea constitutivă devine

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds \equiv \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})(t). \quad (5.82)$$

Se pune **problema determinării condițiilor** în care un corp *văscuoelastic de tip relaxare* poate fi caracterizat, în același timp, drept un corp *văscuoelastic de tip fluaj*. Prezentăm o teoremă datorată lui Gurtin și Sternberg [1962].

Teorema 5. Fiind dată o lege *văscuoelastică de tip relaxare* \mathcal{L}_G cu un nucleu \mathbf{G} —tare, există o lege *văscuoelastică de tip fluaj* \mathcal{L}_J^* dacă și numai dacă

$$\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}_4, \quad (5.83)$$

$$\mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(t) + \dot{\mathbf{G}}(t)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(t) = 0 \quad a.p.t.,$$

unde produsul de convoluție din (83) este definit prin

$$(\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{G}}(s)\dot{\mathbf{J}}(t-s)ds, \quad (5.84)$$

iar $\dot{\mathbf{I}}_4$ reprezintă identitatea în spațiul tensorilor de ordinul patru.

Demonstrație. Vom demonstra că (83) sunt condiții necesare. Fie procesul de deformare definit prin legea de tip fluaaj (81)

$$\mathbf{E} = \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T}) \quad \text{astfel încât} \quad \mathbf{T} = \mathcal{L}_G(\mathbf{E}), \quad (5.85)$$

pentru $\forall \mathbf{T}$ de tip Heaviside, din domeniul de definiție pentru \mathcal{L}_J^* .

Rescriem condiția (85) prin intermediul reprezentărilor (80) și (81) sub forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \mathbf{G}(0)[\mathbf{J}(0)\mathbf{T}(t)] + \mathbf{G}(0) \int_0^\infty \dot{\mathbf{J}}(s)[\mathbf{T}(t-s)]ds + \\ &+ \int_0^\infty \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0)[\mathbf{T}(t-s)]ds + \int_0^\infty \dot{\mathbf{G}}(s) \left\{ \int_0^t \dot{\mathbf{J}}(u)[\mathbf{T}(t-s-u)]du \right\} ds \end{aligned} \quad (5.86)$$

și folosim Observația 13. Aplicând o teoremă de tip Foubini se rescrie (86) într-o formă echivalentă

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= (\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0))[\mathbf{T}(t)] + \\ &+ \int_0^t \{ \mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(s) + \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(s) \} [\mathbf{T}(t-s)]ds. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Deoarece relația este adevărată pentru orice proces \mathbf{T} deducem (vezi Ex. 18. și Propoziția 7.) că, prin alegerea $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 h$, cu h funcția lui Heaviside, din (87) se obține

$$\mathbf{T}_0 = (\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0))\mathbf{T}_0 \quad \forall \mathbf{T}_0 \in Sim \quad (5.88)$$

Astfel $\mathbf{G}(0)\mathbf{J}(0) = \mathbf{I}_4$, deci se obține prima condiție din (83).

Dacă introducem pe (88) în (87) avem

$$\int_0^t \{ \mathbf{G}(0)\dot{\mathbf{J}}(s) + \dot{\mathbf{G}}(s)\mathbf{J}(0) + (\dot{\mathbf{G}} * \dot{\mathbf{J}})(s) \} [\mathbf{T}(t-s)]ds = 0. \quad (5.89)$$

Deoarece istoria $\mathbf{T}^t(s) = \mathbf{T}(t-s) \quad \forall s \geq 0$ este arbitrară obținem că integrantul este nul, cu alte cuvinte avem și a doua relație din (83) demonstrată.

Reciproca se obține imediat urmând raționamente similare bazate pe formula (86).

Observația 14. Din condiția $(83)_1$ a rezultat că, în mod necesar pentru ca un corp vâscoelastic descris printr-o lege de tip relaxare să admită și o reprezentare de tip fluaj trebuie ca valoarea la momentul inițial a nucleului de relaxare $\mathbf{G}(0)$ să fie inversabilă, ca tensor de ordinul 4. Deci, în mod necesar, există $\mathbf{G}(0)^{-1} \equiv \mathbf{J}(0)$.

Observația 15. Condiția $(83)_2$, ca o consecință a primei condiții, se va rescrie sub forma

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{U}(s) - (\mathbf{V} * \mathbf{U})(s) \quad a.p.t. s \in R_+ \quad \text{unde,} \tag{5.90}$$

$$\mathbf{U}(s) = \dot{\mathbf{J}}(s)(\mathbf{J}(0))^{-1}, \quad \mathbf{V}(s) = -(\mathbf{G}(0))^{-1} \dot{\mathbf{G}}(s).$$

Deoarece \mathbf{G} este un nucleu tare rezultă că $\mathbf{V} : [0, +\infty) \rightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ este integrabilă pe R_+ .

Se pot formula condițiile în care ecuația integrală (90) admite soluție unică.

Teorema 6. Fiind dată o reprezentare de tip relaxare există o unică lege de tip fluaj asociată, dacă

$$\|\mathbf{V}\|_1 = \int_0^\infty |\mathbf{V}(s)| ds < 1, \quad \text{cu } \mathbf{V}(s) = -(\mathbf{G}(0))^{-1} \dot{\mathbf{G}}(s).$$

Demonstrație. Ca o consecință a Teoremei 5. este suficient să demonstrăm că ecuația integrală din $(90)_1$, rescrisă sub forma

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{V}^t(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}(s) ds, \tag{5.91}$$

admite o soluție unică. Soluția ecuației (91) se determină prin metoda aproximațiilor succesive

$$\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{V}^t(t),$$

$$\mathbf{U}_{k+1}(t) = \mathbf{V}^t(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}_k(s) ds \equiv \sum_{p=1}^{k+2} \underbrace{(\mathbf{V} * \dots * \mathbf{V})}_p(t), \quad \forall k \geq 0. \tag{5.92}$$

Seria

$$\sum_{n=1}^\infty \underbrace{(\mathbf{V} * \dots * \mathbf{V})}_n, \tag{5.93}$$

este convergentă în $L^1(R_+)$, deoarece

$$\left\| \sum_{n=1}^k \underbrace{(\mathbf{V} * \dots * \mathbf{V})}_p \right\|_1 < \sum_{n=1}^k \left\| (\mathbf{V} * \dots * \mathbf{V}) \right\|_1^n \leq \frac{\|\mathbf{V}\|_1}{1 - \|\mathbf{V}\|_1}$$

și prin ipoteză $\| \mathbf{V} \|_1 < 1$.

Din (92) cu demonstrarea convergenței seriei (93) rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(V * \dots * V)}_n$ este soluție a ecuației integrale (91).

Unicitatea se deduce imediat. Dacă presupunem că $\exists \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2$ soluții distincte pentru (91). Deci

$$\mathbf{U}_j(t) = \mathbf{V}(t) + \int_0^t \mathbf{V}(t-s)\mathbf{U}_j(s) ds$$

cu $j = 1, 2$. Atunci

$$\bar{\mathbf{U}}(t) - (\mathbf{V} * \bar{\mathbf{U}})(t) = 0 \quad (5.94)$$

pentru $\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 \neq 0$. Evaluând normele în $L^1(\mathbb{R}_+)$ din (94) obținem că

$$\| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \leq \| \mathbf{V} \|_1 \| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \quad \text{cu} \quad \| \bar{\mathbf{U}} \|_1 \neq 0$$

Rezultă că $\| \mathbf{V} \|_1 \geq 1$, ceea ce contrazice ipoteza că $\| \mathbf{V} \|_1 < 1$.

Incheiem cu observația că nu orice reprezentare vâscoplastică de tip relaxare poate fi privită ca o reprezentare de tip fluaj. Această problemă va fi discutată prin câteva exemple în cazul reprezentărilor unidimensionale.

Există o bogată literatură dedicată problematicii materialelor vâscoelastice liniare, cu deformații infinitezimale, formulări de probleme mecanice și modalități de abordare. Trimitem pentru un studiu aprofundat și pentru informații bibliografice la Gurtin, Sternberg [1962], Leitman, Fisher [1974], Kecs, Teodorescu [1975].

5.5.4 Problema cu date inițiale și la limită

pentru materiale vâscoelastice liniare

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domeniu mărginit, cu $n = 2$ sau $n = 3$ și $\partial\Omega$ frontiera sa. Să se determine câmpurile de *deplasare* și de *tensiuni*

$$\mathbf{u} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\mathbf{T} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \text{Sim} \equiv \mathbb{R}^6,$$

cu $\mathbf{u}(\cdot, \tau) = 0$, $\mathbf{T}(\cdot, \tau) = 0$ pentru $\forall \tau < 0$, care verifică în Ω , pentru $\forall t \in [0, t_1)$ ecuațiile de mișcare

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{X}, t) = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t), \quad (5.95)$$

reprezentarea constitutivă pentru materiale vâscoelastice

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{M}(0)[\epsilon(t)] + \int_0^t \dot{\mathbf{M}}(s)[\epsilon(t-s)] ds,$$

relațiile geometrice

$$\epsilon(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)),$$

condițiile pe frontiera domeniului

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t),$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t),$$

(unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) și condițiile inițiale

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega.$$

În Duvaut, Lions [1972] sunt demonstrate, cu tehnici de inegalități variaționale, teoreme de existență și unicitate pentru problemele dinamice și staționare. Sunt prezentate problemele în cadrul constitutiv al vâscoelasticității liniare, pentru *materiale cu memorie de lungă durată* sub forma (70). Se consideră și cazul materialelor cu *memorie de scurtă durată*, descrise constitutiv prin

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}_0 \epsilon(\mathbf{X}, t) + \mathbf{A}_1 \dot{\epsilon}(\mathbf{X}, t), \quad (5.96)$$

în care $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ sunt tensorii de ordinul 4, care generalizează, la cazul tridimensional, reprezentarea de tip diferențial asociată modelului unidimensional Kelvin-Voigt ((132) din paragraful 5.6.2).

În formulările *statice* membrul drept din (95) este zero și nu se mai asociază condiții inițiale.

5.6 Modele vâscoelastice unidimensionale

5.6.1 Echivalența reprezentărilor de tip diferențial și integral

În acest paragraf vom demonstra, într-o variantă proprie, câteva dintre rezultatele principale prezentate de Gurtin și Sternberg [1962], care pun în evidență condițiile în care avem echivalența între reprezentări constitutive de tip integral, de tip Boltzmann, și reprezentări de tip diferențial. Ne plasăm în cadrul teoriei corpurilor vâscoelastice liniare, cazul deformațiilor infinitezimale și vom considera procese unidimensionale.

Exemple de reprezentări constitutive de tip diferențial și modalitățile de determinare ale acestora, în cazul stărilor de tensiune și de deformație unidimensionale,

vor fi prezentate și discutate în paragraful următor 5.6.2. Se vor pune în evidență rezultatele discutate în acest paragraf.

Forma reprezentărilor de tip integral este dedusă din reprezentările constitutive de tip Boltzmann, tridimensionale, (77) în ipoteza că starea de deformare este descrisă printr-o istorie a procesului de deformare în care variază o singură componentă, celelalte fiind nule. Ca răspuns materialul va suporta o tensiune cu o singură componentă nenulă, dacă se consideră că până la un anumit moment, $t = 0$, tensiunea și deformarea sunt nule.

Rezultatele discutate în acest paragraf se pot extinde pentru materiale vâsco-elastice liniare și izotrope, având în vedere că se produce o decuplare (vezi formula (79) din Propoziția 8.) în descrierea comportamentului de forfecare de cel de tip dilatare/compresiune.

Reprezentări constitutive de tip diferențial

Fie operatorii de tip diferențial (sau polinoame de tip diferențial) :

$$P(D) = \sum_{k=0}^N p_k \frac{d^k}{dt^k} \text{ și } Q(D) = \sum_{k=0}^N q_k \frac{d^k}{dt^k}, \text{ cu } p_k, q_k \in R.$$

Definiția 11. Spunem că perechea de operatori diferențiali este de *ordinul* N , dacă $p_N \neq 0$ sau $q_N \neq 0$. Notăm o perechea de operatori diferențiali de ordinul N prin $[P(D), Q(D)]_N$

Dacă $p_N \neq 0$, atunci perechea este de tip *relaxare*, iar dacă $q_N \neq 0$, atunci perechea este de tip *fluaj*.

Amintim că în clasa proceselor de tip Heaviside a fost introdusă clasa

$$H^N = \{ \phi : R \rightarrow R \mid \phi(\tau) = 0 \quad \forall \tau < 0, \quad \phi|_{[0, +\infty)} \in C^N([0, +\infty)) \} \quad (5.97)$$

Definiția 12. Fie perechea de operatori diferențiali de ordinul N $[P(D), Q(D)]_N$.

Spunem ca perechea $(\sigma, \epsilon) \in H^N \times H^N$ satisface reprezentarea constitutivă de tip diferențial dacă

$$P(D)\sigma = Q(D)\epsilon \iff \sum_{k=0}^N p_k \sigma^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N q_k \epsilon^{(k)}(t) \quad \forall t > 0 \quad (5.98)$$

Unde am folosit notația

$$\sigma^{(k)}(t) \equiv \frac{d^k \sigma}{dt^k}(t) \quad (5.99)$$

Definiția 13. Fie $\sigma, \epsilon \in H^N$. Prin definiție perechea (σ, ϵ) satisface *condițiile de racordare a datelor inițiale*, dacă datele inițiale sunt legate prin relațiile

$$\sum_{r=k}^N p_r \sigma^{(r-k)}(0) = \sum_{r=k}^N q_r \epsilon^{(r-k)}(0) \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\} \quad (5.100)$$

Definiția 14. Pentru procese unidimensionale o reprezentare constitutivă de tip integral este dată prin

$$\sigma(t) = G(0) \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_G(\epsilon)(t) \quad (5.101)$$

$\forall t > 0$, unde G este nucleul de relaxare,

sau este dată sub forma

$$\epsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(\tau) \sigma(t - \tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_J(\sigma)(t) \quad (5.102)$$

$\forall t > 0$, unde J este nucleul de fluaj.

Observația 16. În ipoteza că $G \in H^1$ și respectiv $J \in H^1$ atunci reprezentările constitutive sunt bine definite pentru procesele ϵ și respectiv $\sigma \in H^0$. Reprezentarea (101) se va numi de tip *relaxare*, iar (102) se va numi de tip *fluaj*.

Notăm prin h - funcția lui Heaviside

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

Propoziția 9. Dacă (σ, ϵ) , cu $\epsilon = h$ satisface reprezentarea de tip integral (101), atunci $\sigma = G$.

Demonstrația este imediată.

Observația 17. Rezultă că nucleul de relaxare G reprezintă variația în timp a tensiunii, într-o experiență în care deformația este menținută constantă la o valoare egală cu unitatea, de la momentul $t = 0$. Deci facem o experiență de relaxare.

Teorema 7. Fie o reprezentare constitutivă de tip integral $\sigma = \mathcal{L}_G(\epsilon)$, în care

- a) $G \in H^N$,
- b) $\exists q_0, p_r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq N, p_N \neq 0$, astfel încât (5.103)
- c) $P(D)G = q_0$

Dacă perechea $(\sigma, \epsilon) \in H^N \times H^N$ satisface reprezentarea integrala $\sigma = \mathcal{L}_G(\epsilon)$ atunci

- 1) (σ, ϵ) va satisface reprezentarea diferențială

$$P(D)\sigma = Q(D)\epsilon \quad \text{cu,} \quad (5.104)$$

$$q_k = \sum_{r=k}^N p_r G^{(r-k)}(0) \quad k \in \{\overline{1, N}\};$$

2) (σ, c) satisfac condițiile de racordare a datelor inițiale (100).

Demonstrație. 1) Pornim de la reprezentarea integrală (101) scrisă sub forma echivalentă

$$\sigma(t) = G(t) \epsilon(0) + \int_0^t G(t-\tau) \epsilon^{(1)}(\tau) d\tau \quad \forall t > 0. \quad (5.105)$$

Calculăm derivatele de ordinul $n \geq 1$ ale funcției σ exprimată cu ajutorul funcției $\epsilon \in H^N$ prin intermediul relației (105). Prin inducție se demonstrează formula de calcul

$$\sigma^{(n)}(t) = G^{(n)}(t) \epsilon(0) + \sum_{l=1}^n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(t) + \int_0^t G^{(n)}(t-\tau) \epsilon^{(1)}(\tau) d\tau, \quad (5.106)$$

pentru orice n care verifică condițiile $1 \leq n \leq N$.

Folosind formulele din (106) calculăm $P(D)\sigma$ la momentul $t > 0$ fixat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N p_n \sigma^{(n)}(t) &= \left(\sum_{n=0}^N p_n G^{(n)}(t) \right) \epsilon(0) + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^n p_n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(t) + \\ &+ \int_0^t \sum_{n=0}^N p_n G^{(n)}(t-\tau) \epsilon^{(1)}(\tau) d\tau = \\ &= q_0 \epsilon(0) + \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^n p_n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(t) + q_0 (\epsilon(t) - \epsilon(0)) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Ultima egalitate este o consecință a faptului că nucleul din reprezentarea integrală este de o formă particulară, mai precis este o soluție pentru ecuația diferențială scrisă în ipoteza c).

În (107) apare o sumă dublă, după un număr finit de indici. Efectuăm schimbarea ordinii de sumare și deducem egalitățile

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{l=1}^n p_n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(t) &= \sum_{l=1}^N \left(\sum_{n=l}^N p_n G^{(n-l)}(0) \right) \epsilon^{(l)}(t) = \\ &= \sum_{l=1}^N q_l \epsilon^{(l)}(t) \equiv Q(D) \epsilon(t). \end{aligned} \quad (5.108)$$

De data aceasta am introdus, prin intermediul relațiilor (104), constantele q_k , $1 \leq k \leq N$, care se definesc prin constantele p_n introduse în ipoteza b) și prin condițiile inițiale asociate lui G , funcție dată prin ipoteză, cu proprietățile menționate.

2) Vrem să demonstrăm că rezultă condiția de racordare a condițiilor inițiale, (100), pe care o scriem într-o formă echivalentă

$$\sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k} \sigma^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{N-k} q_{n+k} \epsilon^{(n)}(0) \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\} \quad (5.109)$$

care se obține prin translația $r - k = n$, pentru fiecare k fixat.

În membrul stâng al formei (109) apar derivatele $\sigma^{(n)}(0)$, care pot fi obținute ca o consecință a reprezentării de tip integral, acceptată în ipoteză. Din formula (106), prin trecere la limită, $t \searrow 0$, deducem următoarele relații între condițiile inițiale pentru perechea (σ, ϵ) considerată

$$\begin{aligned} \sigma^{(n)}(0) &= G^{(n)}(0) \epsilon(0) + \sum_{l=1}^n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(0) \quad \forall n : 1 \leq n \leq N, \\ \sigma(0) &= G(0) \epsilon(0). \end{aligned} \quad (5.110)$$

Pe de altă parte să remarcăm că în membrul drept al formulei (109) apar constantele q_k , $k \in \{\overline{1, N}\}$, introduse prin (104)₂ pe care le rescriem, efectuând translația indicelui de sumare $r - k = n$, pentru fiecare k fixat. Relațiile (104)₂ devin

$$q_k = \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k} G^n(0) \quad k \in \{\overline{1, N}\}. \quad (5.111)$$

Calculăm suma din membrul stâng al relației (109), prin intermediul relațiilor (110), punând în evidență termenii care conțin derivatele de ordin zero, adică valorile funcțiilor calculate în $t = 0$. Astfel

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k} \sigma^{(n)}(0) &= p_k G(0) \epsilon(0) + \sum_{n=1}^{N-k} p_{n+k} G^{(n)}(0) \epsilon(0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{N-k} p_{n+k} \sum_{l=1}^n G^{(n-l)}(0) \epsilon^{(l)}(0). \end{aligned} \quad (5.112)$$

Coeficientul lui $\epsilon(0)$ este tocmai q_k , conform relației (111). În celălalt grup de termeni vom schimba din nou ordinea de sumare

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k} \sigma^{(n)}(0) &= q_k \epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} \left(\sum_{n=l}^{N-k} p_{n+k} G^{(n-l)}(0) \right) \epsilon^{(l)}(0) = \\ &= q_k \epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} \left(\sum_{m=0}^{N-(l+k)} p_{m+(l+k)} G^{(m)}(0) \right) \epsilon^{(l)}(0). \end{aligned}$$

In ultima egalitate am schimbat indicele de sumare n prin m legați prin relația $n - l = m$, pentru fiecare l fixat. Folosim încă o dată relațiile (111) de definiție a constantelor q_r pentru $r \in \{\overline{1, N}\}$ și rescriem relația anterioară astfel

$$\sum_{n=0}^{N-k} p_{n+k} \sigma^{(n)}(0) = q_{(k)} \epsilon(0) + \sum_{l=1}^{N-k} q_{k+l} \epsilon^{(l)}(0).$$

Aceasta reprezintă relația (109) care este echivalentă cu condiția de racordare a datelor inițiale.

Vom demonstra acum Teorema 8. care este o reciprocă a anterioarei.

Teorema 8. Fie reprezentarea diferențială (98)

$$P(D) \sigma = Q(D) \epsilon \quad \text{cu } N > 1,$$

cu condițiile inițiale racordate prin relațiile (100).

Fie $G \in H^N$ soluția ecuației diferențiale de ordinul N

$$P(D) G = q_0, \tag{5.113}$$

care satisface condițiile inițiale

$$G(0) = \frac{q_1}{p_1}, \tag{5.114}$$

dacă $N = 1$, sau

$$G(0) = \frac{q_N}{p_N}, \tag{5.115}$$

$$G^{(r)}(0) = \frac{1}{p_N} [q_{N-r} - \sum_{n=0}^{r-1} p_{N-r+n} G^{(n)}(0)] \quad \forall r \in \{\overline{1, N-1}\}$$

dacă $N > 1$.

Dacă $(\sigma, \epsilon) \in H^N \times H^N$ verifică reprezentarea de tip diferențial (98) și condițiile inițiale racordate (100), atunci (σ, ϵ) verifică reprezentarea integrală (101), deci pentru $\forall t > 0$

$$\sigma(t) = G(0) \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau.$$

Demonstrație. Fie o pereche $(\sigma, \epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea (98), cu condițiile inițiale racordate (100).

Cu funcția de deformație $\epsilon \in H^N$ din perechea anterioară construim funcția

$$\theta(t) = G(0) \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau, \tag{5.116}$$

definită pentru $\forall t > 0$, în care nucleul G este soluția problemei Cauchy (113) cu (114), sau respectiv (115).

Am obținut o pereche $(\theta, \epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea integrală (101), conform relației (116).

Dacă arătăm că $\theta = \sigma$ obținem afirmația din enunțul teoremei.

Vom utiliza în mod esențial Teorema 7. Pentru aceasta vom arăta că din condițiile inițiale pentru funcția G , (114), sau respectiv (115), se deduc relațiile între q_k , p_n și derivatele funcției G , până la ordinul $N - 1$, inclusiv, calculate în $t = 0$.

Pentru $N > 1$ relațiile (115) sunt echivalente cu

$$q_N = G(0)p_N \quad \text{și}$$

$$q_{N-r} = p_N G^{(r)}(0) + \sum_{n=0}^{r-1} p_{N-r+n} G^{(n)}(0) \quad \forall r \in \overline{\{1, N-1\}}, \quad (5.117)$$

sau dacă schimbăm indicele r în k prin relația $k = N - r$,

$$q_N = G(0)p_N \quad \text{și}$$

$$q_k = p_N G^{(N-k)}(0) + \sum_{n=0}^{N-(k+1)} p_{k+n} G^{(n)}(0) \quad \forall k \in \overline{\{1, N-1\}}. \quad (5.118)$$

Comparăm (118) cu (104) și constatăm că acestea sunt identice, dacă schimbăm indicele n de sumare cu r prin relația $r = n + k$, pentru fiecare valoare a lui k , fixată. Astfel (118) devine

$$q_N = G(0)p_N \quad \text{și}$$

$$q_k = p_N G^{(N-k)}(0) + \sum_{r=k}^{N-1} p_r G^{(r-k)}(0) \equiv \sum_{r=k}^N p_r G^{(r-k)}(0) \quad \forall k \in \overline{\{1, N-1\}},$$

ceea ce este echivalent cu (104).

Astfel putem aplica Teorema 7. perechii $(\theta, \epsilon) \in H^N \times H^N$ care verifică reprezentarea integrală (101) (în care nucleul G este soluția Problemei Cauchy (113), (115)), deoarece conform celor demonstrate anterior condiția (104) este satisfăcută.

Rezultă că (θ, ϵ) verifică reprezentarea de tip diferențial (104) și condiția de racordare a datelor inițiale (100). Deci

$$P(D)\theta = Q(D)\epsilon,$$

$$\sum_{r=k}^N p_r \theta^{(r-k)}(0) = \sum_{r=k}^N q_r \epsilon^{(r-k)}(0) \quad \forall k \in \overline{\{1, N\}}.$$

Reamintim că perechea (θ, ϵ) a fost construită cu procesul de deformare ϵ , dintr-o pereche (σ, ϵ) care satisfacea enunțul teoremei (adică (98) și (100)).

Introducem funcția $x = \theta - \sigma$ care satisface

$$P(D)x(t) \equiv \sum_{k=0}^N p_k x^{(k)}(t) = 0, \tag{5.119}$$

$$\sum_{r=k}^N p_r x^{(r-k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \{\overline{1, N}\}.$$

Vom arăta că din (119)₂ obținem condițiile inițiale nule pentru funcția x . Pentru demonstrație particularizăm succesiv valorile lui k în (119)₂.

Fie $k = N$ atunci $p_N x(0) = 0$, deci $x(0) = 0$ deoarece $p_N \neq 0$.

Fie acum $k = N - 1$ atunci $p_N x^{(1)}(0) + p_{N-1} x(0) = 0$ cu $x(0) = 0$. Vom obține deci și $x^{(1)}(0) = 0$. Prin recurență deducem că $x^{(r)}(0) = 0$, cu $r = 0, \dots, N - 2$. Din (119)₂, scrisă pentru $k = 1$, rezultă că $p_N x^{(N-1)}(0) = 0$. Deoarece $p_N \neq 0$ avem și ultima condiție inițială $x^{(N-1)}(0) = 0$.

Am arătat că funcția $x = \theta - \sigma$ este soluția ecuației diferențiale liniare, omogene (119)₁, cu coeficienți constanți, de ordinul N și, în plus, satisface condiții inițiale nule, $x^{(j)}(0) = 0$, pentru $j \in \{\overline{0, N-1}\}$. Din unicitatea soluției Problemei Cauchy formulate obținem $x = \theta - \sigma \equiv 0$. Rezultă deci coincidența celor două funcții $\theta = \sigma$ definite pentru $\forall t > 0$. Astfel am arătat că perechea (σ, ϵ) este legată prin reprezentarea integrală (101).

Teorema 9. Presupunem că reprezentările de tip integral și diferențial sunt echivalente, în sensul că $\forall(\sigma, \epsilon)$ care verifică reprezentarea de tip integral (101), verifică și reprezentarea de tip diferențial (98) pentru $t > 0$ și reciproc.

Atunci *nucleul de relaxare* G este soluție pentru ecuația diferențială cu coeficienți constanți

$$P(D)G = q_0. \tag{5.120}$$

Demonstrație. Presupunem că avem o pereche care satisface reprezentarea de tip integral. Fie aceasta (G, h) , conform Propoziției 9. Atunci satisface și reprezentarea de tip diferențial pentru $t > 0$. Deoarece $h \in H^N$ cu $h(t) = 1, \dots, h^{(k)}(t) = 0$, pentru $\forall t > 0$, și $\forall k \geq 1$, număr natural, obținem că $P(D)G = Q(D)h \equiv q_0$, pentru $\forall t > 0$.

Observația 18. Reprezentările de tip integral (de tip relaxare) și cele de tip diferențial pot fi echivalente, conform Teoremei 9, numai dacă *nucleele de relaxare*, care caracterizează reprezentările de tip integral sunt date de *soluțiile unor ecuații diferențiale cu coeficienți constanți*, generate de polinoamele diferențiale.

In general reprezentările de tip diferențial și integral *nu sunt echivalente*.

In cele ce urmează vom aduce argumente pentru înțelegerea *condiției de racordare a datelor inițiale*, care a fost asociată reprezentării de tip diferențial.

Pentru aceasta vom avea nevoie de introducerea *transformării Laplace*.

Definiția 15. Spunem că o funcție $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{X}$ cu $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ sau \mathbb{C} este un element în $O(\exp(s_0 t))$, $s_0 \in \mathbb{R}$, pentru $t \rightarrow +\infty$ dacă $|f(t)| \leq M \exp(s_0 t)$ pentru $t \rightarrow +\infty$.

Definiția 16. Transformata Laplace pentru funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{X}$ este

$$\mathcal{L}(f)(s) \equiv \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} \exp(st) f(t) dt \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{cu} \quad \operatorname{Re}(s) > s_0. \quad (5.121)$$

Pentru utilizarea celor două definiții, în cadrul prezentat aici, este suficient să considerăm funcțiile $f \in H^N \cap O(\exp(s_0 t))$ pentru $t \rightarrow +\infty$

Observația 19. Transformata Laplace pentru funcțiile cu proprietățile anterioare există în semiplanul complex definit prin $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > s_0\}$.

Amintim două rezultate privind calculul transformatelor Laplace

1) pentru derivata unei funcții

$$\mathcal{L}(f^{(1)})(s) = -f(0) + s \mathcal{L}(f)(s)$$

și 2) pentru produsul de convoluție a două funcții ($h(t) \equiv \int_0^t G(t-\tau)g(\tau)dt$),

$$\mathcal{L}(h)(s) = \mathcal{L}(G)(s) \mathcal{L}(g)(s) \quad \forall s \in \mathbb{C} \quad \text{cu} \quad \operatorname{Re}(s) > s_0.$$

Aici $s_0 = \max(s_1, s_2)$ dacă $G \in O(\exp(s_1 t))$ și $g \in O(\exp(s_2 t))$ pentru $t \rightarrow +\infty$.

Teorema 10. Presupunem că reprezentarea de tip integral (101)

$$\sigma(t) = G(0) \epsilon(t) + \int_0^t \dot{G}(\tau) \epsilon(t-\tau) d\tau \equiv \mathcal{L}_G(\epsilon)(t), \quad (5.122)$$

$\forall t > 0$ este echivalentă cu o reprezentare de tip diferențial (98)

$$\sum_{k=0}^N p_k \sigma^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^N q_k \epsilon^{(k)}(t) \quad \forall t > 0. \quad (5.123)$$

Atunci $(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon})$, transformatele Laplace ale perechii (σ, ϵ) , care satisface reprezentările (122) și respectiv (123), sunt astfel încât au loc simultan (124) și (125), scrise mai jos

$$\bar{\sigma}(s) = s \bar{G}(s) \bar{\epsilon}(s) \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad \text{cu} \quad \operatorname{Re} s > s_0 \quad (5.124)$$

și

$$P(s) \bar{\sigma}(s) - \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \left\{ \sum_{k=n}^N p_k \sigma^{(k-n)}(0) - \sum_{k=n}^N q_k \epsilon^{(k-n)}(0) \right\} = Q(s) \bar{\epsilon}(s), \quad (5.125)$$

unde $P(s) = \sum_{k=0}^N p_k s^k$ și respectiv $Q(s) = \sum_{k=0}^N q_k s^k$ sunt polinoamele în variabilă complexă $s \in \mathbb{C}$, generate de polinoamele diferențiale care definesc reprezentarea (123).

Demonstrație. Presupunem că $\sigma, \epsilon, G \in H^N \cap O(\exp(s_0 t))$, pentru $t \rightarrow +\infty$.

Fie reprezentarea de tip integral (122) scrisă într-o formă echivalentă, (105). Îi vom aplica transformarea Laplace, ținând seama de liniaritatea ei și de proprietățile menționate în Observația 19. Deducem că

$$\mathcal{L}(\sigma)(s) = \mathcal{L}(G)(s) \epsilon(0) + \mathcal{L}(G)(s) \mathcal{L}(\epsilon^{(1)})(s) \equiv s \mathcal{L}(G)(s) \mathcal{L}(\epsilon)(s).$$

Deci am dedus formula (124).

Pe de altă parte, aplicăm transformata Laplace reprezentării de tip diferențial. Din liniaritatea transformării și formula de calcul 1), aplicată recurent, deducem că transformata Laplace a membrului stâng este

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(D) \sigma)(s) &= \sum_{k=0}^N p_k \mathcal{L}(\sigma^{(k)})(s) = \\ &= \sum_{k=0}^N p_k s^k \mathcal{L}(\sigma)(s) - \sum_{k=1}^N p_k \sum_{r=0}^{k-1} s^r \sigma^{(k-1-r)}(0). \end{aligned} \quad (5.126)$$

În a doua sumă schimbăm indicele de sumare r în n definit prin relația $n = r + 1$ și obținem că

$$\frac{1}{s} \sum_{k=1}^N p_k \sum_{n=1}^k s^n \sigma^{(k-n)}(0) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \left(\sum_{k=n}^N p_k \sigma^{(k-n)}(0) \right), \quad (5.127)$$

după ce am schimbat ordinea de sumare. Din (126) cu (127) găsim expresia transformatei Laplace pentru $P(D)\sigma$. Similar formulelor (126) și (127) calculăm transformata Laplace pentru membrul drept. Rezultă formula (125).

Observația 20. Presupunem echivalența reprezentărilor de tip integral și diferențial. Din (124) și (125) prin eliminarea lui $\bar{\sigma}$ deducem o relație în care putem considera $\bar{\epsilon}$, transformata Laplace pentru $\epsilon \in H^N$, arbitrar

$$[s P(s) \bar{G}(s) - Q(s)] \bar{\epsilon}(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^N s^n \underbrace{\left\{ \dots \right\}}_{\text{condiții inițiale racordate}} \quad (5.128)$$

Dacă, condițiile inițiale sunt racordate prin formulele (100) atunci deducem că transformata Laplace a funcției de relaxare este definită prin polinoamele de variabilă complexă, asociate operatorilor diferențiali, așa cum rezultă din egalitatea funcțiilor meromorfe

$$\bar{G}(s) = \frac{Q(s)}{s P(s)}. \quad (5.129)$$

Presupunem că *nu avem condițiile inițiale racordate*. Fie un proces $\epsilon \in H^N$, arbitrar fixat. Atunci în (128) alegem setul de valori inițiale pentru σ astfel încât condițiile inițiale aflate în membrul drept să se anuleze. Deducem din nou legătura (129). Revenind în (128) se anulează membrul stâng și deducem că, în mod necesar condițiile inițiale trebuie să se anuleze.

Observația 21. Dacă se consideră o reprezentare constitutivă de tip *fluaș* se obțin rezultate asemănătoare schimbându-se formal tensiunea cu deformația, în cazul problemei de echivalență dintre modelele de tip integral și diferențial.

5.6.2 Modele reologice

În acest paragraf vom aduce o *motivație* pentru *reprezentări constitutive* de tip *diferențial* în vâscoelasticitatea liniară, pe cazul deformațiilor infinitezimale și unidimensionale.

S-a dezvoltat o întreagă literatură privind descrierea constitutivă a unor clase de materiale pornind de la ideea suprapunerii efectelor *vâscoase* și *elastice*, în reprezentări unidimensionale.

Modelele reologice au la bază modelele elementare :

- *elastic*, căruia i se asociază reprezentarea constitutivă $\sigma = E \epsilon$,
- *vâscos*, caracterizat prin reprezentarea $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$.

E — reprezintă modulul lui Young și η — constanta de vâscozitate, acestea sunt constante de material, iar ϵ — reprezintă deformația și σ — tensiunea.

În cazul micilor deformații reprezentarea constitutivă menționată pentru corpul liniar vâscos este justificată în cazul unidimensional, deoarece în cazul micilor deformații $\mathbf{D} = 1/2(\nabla \mathbf{v} + \nabla^T \mathbf{v}) \simeq \dot{\epsilon} = 1/2(\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla^T \dot{\mathbf{u}})$, în conformitate cu formulele (1.84), din paragraful 1.6.

Modelului elastic i se asociază o schemă grafică, simbolizând un *resort*, iar modelului vâscos i se asociază o schemă grafică, simbolizând un *piston*. Reprezentările grafice vor fi menționate în figura 5.1 a).

Modelele reologice se definesc ca o combinație de elemente elastice și vâscoase legate în *serie* și / sau *în paralel*.

Prin formalismul, pe care-l explicăm în continuare, punem în corespondență unui model reologic o *reprezentare constitutivă de tip diferențial*.

Se consideră două elemente, caracterizate prin perechile (σ_1, ϵ_1) și respectiv (σ_2, ϵ_2) .

Definiția 17. Dacă cele două elemente sunt *legate în serie* atunci *modelul rezultat* este caracterizat prin starea de tensiune și de deformație (σ, ϵ) în care *tensiunea* $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$, iar *deformația* $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

Dacă cele două elemente sunt *legate în paralel* atunci *modelul rezultat* este caracterizat prin starea de tensiune și de deformație (σ, ϵ) în care *tensiunea*

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, iar *deformația* $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$.

Modelul Maxwell este modelul reologic rezultat prin considerarea a două elemente unul elastic (E, σ_1, ϵ_1) și unul vâcos ($\eta, \sigma_2, \epsilon_2$), legate în serie, reprezentat în Fig. 5.1 b).

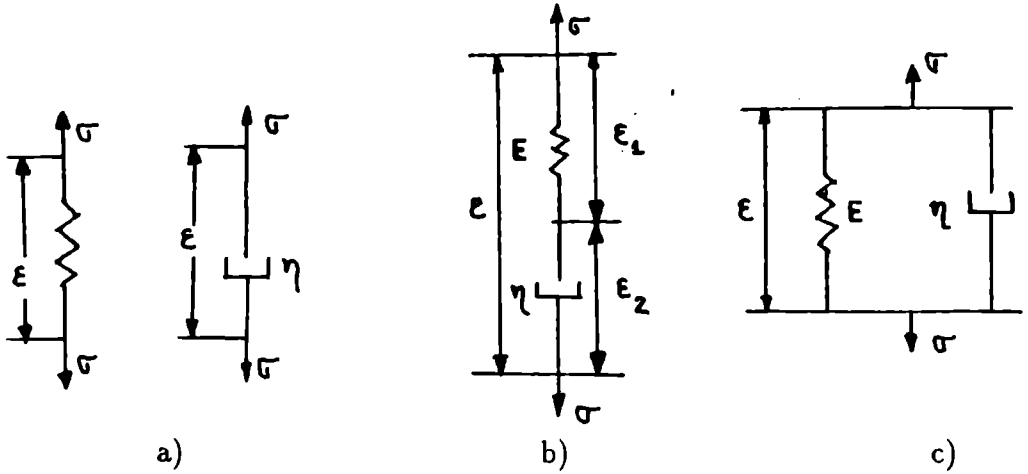


Fig. 5.1

Propoziția 10. Reprezentarea constitutivă asociată *modelului Maxwell* este

$$\frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} = \dot{\epsilon}. \quad (5.130)$$

Demonstrație. Conform ipotezelor enunțate

$$\sigma_1 = E \epsilon_1 \text{ elastic}, \quad \sigma_2 = \eta \dot{\epsilon}_2 \text{ vâcos}, \quad (5.131)$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Avem 5 relații pentru 6 cantități, deci eliminând pe σ_j, ϵ_j cu $j = 1, 2$ va rezulta reprezentarea de tip diferențial asociată modelului.

Modelul Kelvin - Voigt este modelul reologic rezultat prin considerarea a două elemente unul elastic (E, σ_1, ϵ_1) și unul vâcos ($\eta, \sigma_2, \epsilon_2$), legate în paralel, reprezentat în Fig.5.1 c).

Propoziția 11. Reprezentarea constitutivă asociată *modelului Kelvin - Voigt* este o reprezentare de tip diferențial, de ordinul 1

$$\sigma = E \epsilon + \eta \dot{\epsilon}. \quad (5.132)$$

Demonstrație. Din ipoteze avem relațiile

$$\sigma_1 = E \epsilon_1 \text{ elastic}, \quad \sigma_2 = \eta \dot{\epsilon}_2 \text{ vâcos}, \quad (5.133)$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad \epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2,$$

pentru 6 cantități legate prin 5 relații scalare. Din eliminarea mărimilor σ_j, ϵ_j cu $j = 1, 2$ se deduce reprezentarea de tip diferențial asociată modelului.

Observația 22. Modelul Maxwell este caracterizat prin

$q_1 = 1 \neq 0, q_0 = 0, p_1 = \frac{1}{E} \neq 0, p_0 = \frac{1}{\eta}$. Astfel $N = 1$. Modelul este de tip *relaxare*, dar și de tip *fluaj*.

Condiția de racordare a datelor inițiale (100) este

$$\sigma(0) = E \epsilon(0). \quad (5.134)$$

Semnificația acestei relații este evidentă. Dacă la momentul inițial corpul suferă o *deformație bruscă, instantanee*, de la 0 la $\epsilon(0) \neq 0$, atunci în corp se produc tensiunile care corespund unui *corp elastic*. Deci datele inițiale sunt legate printr-un *răspuns elastic*.

Observația 23. Modelul Kelvin - Voigt este caracterizat prin

$q_1 = \eta \neq 0, q_0 = E, p_1 = 0, p_0 = 1$. Acest model este de *fluaj*, dar nu descrie proprietăți de *relaxare*, și $N = 1$.

Condiția de racordare a datelor inițiale (100) este

$$p_1 \sigma(0) = q_1 \epsilon(0) \iff \epsilon(0) = 0. \quad (5.135)$$

Propoziția 12. Fie un proces de deformare de tip Heaviside, în H^1 , caracterizat prin $t \rightarrow \epsilon(t)$, pentru $\forall t \geq 0$.

Dacă se consideră condiția inițială $\sigma(t)|_{t=0} = \sigma(0)$, atunci răspunsul materialului descris printr-un model Maxwell este caracterizat prin

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & (\sigma(0) - E \epsilon(0)) \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t)\right\} + E \epsilon(t) - \\ & - \frac{E^2}{\eta} \int_0^t \epsilon(s) \exp\left\{-\frac{E}{\eta}(t-s)\right\} ds. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Demonstrație. Reprezentarea se deduce din integrarea ecuației diferențiale, (130) neomogenă cu coeficienți constanți, în necunoscuta σ , pentru deformația $\epsilon(t)$ dată.

Observația 24. În relația (136) avem o *dependență de tip integral*, dar care conține datele inițiale ale tensiunii și ale deformației, dacă acestea nu sunt legate printr-un răspuns elastic, de forma (134).

Dacă în (136) considerăm condițiile inițiale legate prin (134) și facem schimbarea de variabilă $u = t - s$ rezultă că

$$\begin{aligned} \exists G(u) = & E \exp\left(-\frac{E}{\eta}u\right) \quad \forall u \geq 0 \quad \text{și} \\ \sigma(t) = & G(0) \epsilon(t) + \int_0^t \epsilon(t-u) \dot{G}(u) du. \end{aligned} \quad (5.137)$$

Deci a rezultat o reprezentare constitutivă de tip integral cu nucleul de relaxare G . Această reprezentare este un caz particular al uneia dintre primele reprezentări integrale, cunoscută în literatură ca reprezentarea constitutivă a lui Lodge (vezi Larson [1989]).

Propoziția 13. 1) Fie un proces de deformare de tip Heaviside, caracterizat prin $\epsilon(t) = \epsilon(0) \forall t \geq 0$ și condițiile inițiale racordate $\sigma(0) = E \epsilon(0)$, atunci răspunsul materialului descris printr-un model Maxwell este caracterizat prin

$$\sigma(t) \equiv \epsilon(0) G(t) = E \epsilon(0) \exp\left(-\frac{E}{\eta} t\right); \quad (5.138)$$

2) Funcția G este soluția problemei Cauchy

$$p_1 G^{(1)}(t) + p_0 G(t) = q_0 \quad \text{și} \quad G(0) = \frac{q_1}{p_1} \equiv E. \quad (5.139)$$

Demonstrație. 1) Din (136) prin particularizarea procesului de deformare $\epsilon = \epsilon(0)h$, cu h – funcția lui Heaviside și considerarea condițiilor inițiale racordate, conform ipotezei, se deduce (138).

2) In paragraful 5.6.1. am arătat că dacă există reprezentarea constitutivă de tip integral, atunci perechea $(\sigma \equiv G, \epsilon \equiv h)$ satisface reprezentarea. Ecuația diferențială (139) se deduce din (130) scrisă pe perechea $(\sigma \equiv G, \epsilon \equiv h)$, cu constantele precizate în Observația 22.

Observația 25. Tensiune descrisă prin (138) este descrescătoare și descrie un fenomen de relaxare a tensiunii, în care pentru $t \rightarrow \infty$ tensiunea tinde către 0, dacă $\epsilon(0) > 0$.

Propoziția 14. Fie modelul de tip diferențial al lui Maxwell, cu condițiile inițiale racordate prin răspunsul elastic, atunci el este echivalent cu o reprezentare de tip integral (de fluaj):

$$\epsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(s) \sigma(t-s) ds \quad \text{cu,} \quad (5.140)$$

$$\dot{J}(t) = \frac{1}{\eta} \quad J(0) = \frac{1}{E} \equiv \frac{p_1}{q_1} \quad \iff \quad J(t) = \frac{1}{E} \left(\frac{E}{\eta} t + 1 \right)$$

Demonstrație. Considerăm o istorie de tensiune descrisă prin funcția Heaviside $\sigma = h$. Starea de deformație, care caracterizează răspunsul materialului $\epsilon \equiv J(t)$, se determină din ecuația diferențială (130), rezultată din (132). Condiția inițială pentru J este dedusă din condiția de racordare a datelor inițiale $\sigma_0 = E \epsilon_0$, pe perechea considerată, deci $1 = E J(0)$.

Observația 26. Modelul Maxwell prezintă un *fluaj liniar*, caracterizat prin funcția J din (140), cu $\lim_{t \rightarrow \infty} J(t) = \infty$. Deci deformația crește infinit cu trecerea timpului.

Prin combinații de modele reologice se pot obține reprezentări constitutive, care să descrie atât fluajul cât și relaxarea (ca de exemplu modelul lui Maxwell),

dar cu o descriere mai realistă a acestora. Astfel există modele care descriu un fluaj neliniar, care se *stabilizează*, în sensul că există o asimptotă orizontală pentru $t \rightarrow \infty$ la graficul deformației, ca funcție de timp. De asemenea există modele care descriu comportamentul de relaxare, în care tensiunea descrește spre o asimptotă orizontală, nenulă, pentru $t \rightarrow \infty$.

5.7 Exerciții și probleme

1. Demonstrați proprietățile funcției de influență enunțate în Propoziția 2.
2. Arătați că mulțimea $\mathcal{H}_{(h)}$ definită în (9) cu structura introdusă prin aplicația biliniară construită în (11) $\langle, \rangle_{(h)}$ este un spațiu Hilbert real.
3. Demonstrați Propoziția 4.
4. Explicitați demonstrația afirmațiilor de la punctele 5) și 6) din Propoziția 5.
5. Fie reprezentarea constitutivă

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R}(t) \left\{ f(\mathbf{C}(t)) + \int_0^\infty \mathbf{K}(s, \mathbf{C}) [\mathbf{G}(s)] ds \right\} \mathbf{R}^T(t),$$

$$\text{cu } \mathbf{G}(s) = (\mathbf{C}_t^t(s))^{\mathbf{R}} - \mathbf{I} \quad \forall s \geq 0.$$

Arătați că aceasta satisface principiul obiectivității, utilizând direct definiția.

6. Demonstrați, folosind definițiile, că reprezentarea constitutivă definită prin relațiile (51) satisface principiul obiectivității și descrie un corp izotrop.

7. Demonstrați că reprezentarea constitutivă a lui Boltzmann, (77), este echivalentă cu o reprezentare *decuplată* în parte *deviatorică* și *sferică*, precizată în (79).

8. Fie o experiență de forfecare $\epsilon(\tau) = \epsilon_{12}(\tau)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1)$.

a. Determinați răspunsul materialului descris printr-o ecuație constitutivă de tip Boltzmann.

b. Arătați că $2\mu(s) = \frac{T_{12}(s)}{\epsilon_0}$ în experiența de relaxare corespunzătoare.

9. Fie o experiență de dilatare/ compresiune $\epsilon(\tau) = x(\tau)\mathbf{I}$.

a. Determinați răspunsul materialului descris printr-o ecuație constitutivă de tip Boltzmann.

b. Arătați că $3\lambda(s) + 2\mu(s) = \frac{\text{tr } \mathbf{T}(s)}{3x(0)}$ în experiența de relaxare corespunzătoare.

10. Fie un model Kelvin - Voigt cu constantele E, η .

a. Demonstrați teoremele de echivalență pentru reprezentarea de tip diferențial și integral.

b. Comparați fluajul descris de acest model cu fluajul descris prin modelul Maxwell.

11. Fie un model vâcos cu constanta de vâscozitate η_2 și un model Kelvin - Voigt (cu constantele E, η_1) care sunt legate în serie, reprezentate în Fig. 5.2 a).

a. Arătați că reprezentarea de tip diferențial asociată este dată prin

$$p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon} + q_0 \epsilon \quad \text{cu,}$$

$$p_1 = 1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad p_0 = \frac{E}{\eta_2}, \quad q_2 = \eta_1, \quad q_1 = E, \quad q_0 = 0.$$

b. Scrieți condiția de racordare a datelor inițiale (100), din paragraful 5.6.1.

c. Determinați reprezentarea integrală de tip fluaj .

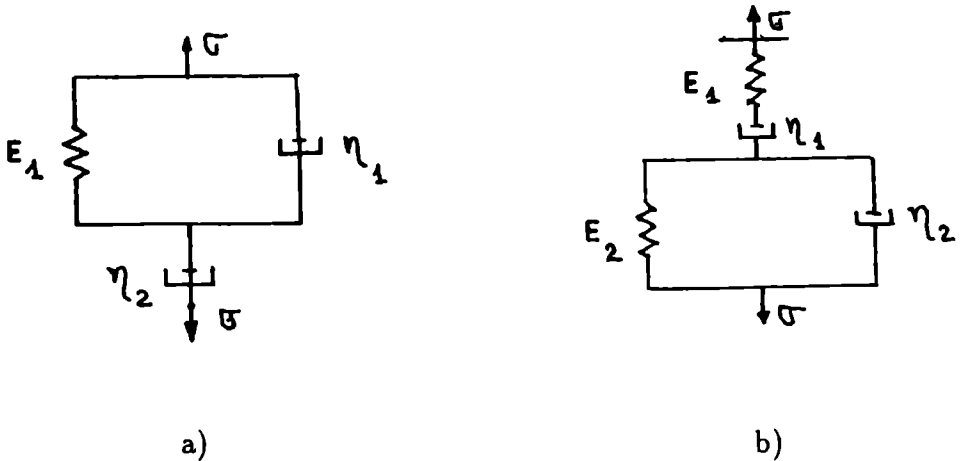


Fig. 5.2

12. Fie un model reologic descris printr-un model Maxwell, cu constantele E_1, η_1 și un model Kelvin - Voigt cu constantele E_2, η_2 care sunt legate în serie, reprezentate în Fig. 5.2 b).

a. Arătați că reprezentarea de tip diferențial asociată este dată prin

$$p_2 \ddot{\sigma} + p_1 \dot{\sigma} + p_0 \sigma = q_2 \ddot{\epsilon} + q_1 \dot{\epsilon} + q_0 \epsilon \quad \text{cu,}$$

$$p_2 = \frac{\eta_2}{E_1}, \quad p_1 = 1 + \frac{E_2}{E_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}, \quad p_0 = \frac{E_2}{\eta_1},$$

$$q_2 = \eta_2, \quad q_1 = E_2, \quad q_0 = 0.$$

b. Scrieți condiția de racordare a datelor inițiale (100), din 5.6.1.

c. Determinați reprezentarea integrală de tip relaxare .

d. Determinați reprezentarea integrală de tip fluaj .

e. Refaceți demonstrația teoremelor de echivalență pentru acest model.

13. Comparați proprietățile de relaxare sau de fluaj, după cum este cazul, pentru modelele reologice descrise în Ex. 11 - 12.

14. Demonstrați că, corpurile constituite din materiale elastice și fluidele Reiner - Rivlin nu prezintă proprietăți de relaxare. Ce se poate afirma despre existența fluajului ?

15. Arătați că domeniul de definiție pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (44) poate fi mulțimea

$$\{\mathbf{G} : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \text{continuuă cu suportul compact}\}.$$

16. Arătați că domeniul de definiție pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (67) poate fi una dintre mulțimile

a. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \text{continuuă cu suportul compact}\},$

b. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \text{integrabilă pe orice compact}\},$

c. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \epsilon(\tau) = 0 \forall \tau < 0, \epsilon|_{[0, +\infty)} \text{ continuuă}\} \equiv H^0,$

dacă nucleul \mathbf{M} este absolut continuu.

17. Arătați că domeniul de definiție pentru operatorul integral din reprezentarea constitutivă (67) poate fi una dintre mulțimile

a. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \lim_{|t| \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0, \epsilon \text{ continuuă}\},$

b. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid |\epsilon(t)| \leq M \quad \forall t \in R\},$

c. $\{\epsilon : [0, +\infty) \longrightarrow \text{Sim} \mid \epsilon \in L^1(R)\}$

dacă nucleul \mathbf{M} este absolut continuu, tare.

18. Fie $\psi, \phi \in H^{ac}$, de tip Heaviside ($\psi, \phi = 0 \quad \forall \tau < 0$ și absolut continue pentru $\forall \tau \geq 0$, cu valori tensori de ordinul 4). Arătați că operatorul lui Boltzmann

$$(\psi \otimes \phi)(t) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \tau < 0 \\ \psi(0)\phi(t) + \int_0^\infty \dot{\psi}(s)\phi(t-s)ds \equiv \mathcal{L}_\psi(\phi)(t) & t > 0 \end{cases}$$

are proprietățile

a. $(\psi \otimes \phi) \in H^{ac},$

b. $(\psi \otimes \phi)(0) = \psi(0)\phi(0),$

c. $\overbrace{(\psi \otimes \phi)}(t) = \psi(0)\dot{\phi}(t) + \dot{\psi}(t)\phi(0) + (\dot{\psi} * \dot{\phi})(t)$

pentru $t > 0$.

19. Folosind definițiile, demonstrați că reprezentarea constitutivă (52) satisface principiul obiectivității și descrie un fluid.

20. Determinați funcțiile vâscometrice în cazul fluidului vâscoelastic, liniar pe istorii, cu deformații finite, reprezentat în (52).

21. Demonstrați că sunt suficiente condițiile din (83) pentru ca $\mathbf{E} = \mathcal{L}_J^*(\mathbf{T})$ să satisfacă $\mathbf{T} = \mathcal{L}_G(\mathbf{E})$ pentru $\forall \mathbf{T}$ de tip Heaviside (vezi Teorema 5).

6. MATERIALE DE TIP RATE

6.1 Relații constitutive pentru materiale de tip rate

În acest paragraf vom prezenta comportamentul unor materiale, care sunt descrise prin reprezentări constitutive care generalizează de fapt modelele de tip diferențial, unidimensionale din vâscoelasticitate la cazul tridimensional, cu deformații infinitezimale. În Freudental, Geiringer [1958], Eringen [1967] și Larson [1989] sunt prezentate astfel de modele generalizate, ca de exemplu modelul Maxwell, Kelvin -Voigt , etc.

Vom defini reprezentări constitutive pentru *materiale de tip rate* care includ materiale de tip vâscoelastice cu *memorie de scurtă durată*, de tip diferențial, liniare cât și materiale elasto-vâscoplastice. Denumirea de *materiale de tip rate* ni se pare mai naturală, avînd în vedere că aceste materiale nu pot fi identificate cu materiale vâscoelastice și pe de altă parte, această clasă poate include materiale vâscoplastice, în accepțiunea pe care o vom menționa ulterior.

În cap.5 am arătat că materialele vâscoelastice cu *memorie de lungă durată*, de tip integral (cazul unidimensional, sau izotrop) admit reprezentări de tip *diferențial* numai în anumite condiții, cele două clase de materiale nefiind în general echivalente.

Un studiu sistematic pentru *materialele* denumite *de tip rate*, reprezentate prin modele cvasi-stactice, este făcut în Cristescu , Suliciu [1976], [1982] fiind prezente atât modele de tip vâscoelastic cât și modele vâscoplastice. Acestea din urmă au constituit baza reprezentărilor constitutive utilizate de Cristescu [1989], [1990] în descrierea comportamentului complex al materialelor de tip *rocă*, deoarece modelele vâscoplastice pot modela *fluajul*, *dilatanța*, etc.

Ne plasăm în ipoteza micilor deformații și urmărim, în primul paragraf, rezultatele din Cristescu, Suliciu [1976], [1982], Gurtin, Williams, Suliciu [1980].

Definiția 1. Vom spune că un corp este constituit, într-o particulă fixată $X \in \mathcal{B}$, dintr-un *material de tip rate*, cvasi-liniar, dacă este descris printr-o reprezentări constitutivă de forma

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] + \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \quad (6.1)$$

în care $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset Sim \times Sim \rightarrow Lin(Sim, Sim)$, iar $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow Sim$. Aici $\mathcal{D} \subset Sim \times Sim$ este o mulțime deschisă și conexă , cu $(0, 0) \in \mathcal{D}$.

Definiția 2. Spunem că reprezentarea constitutivă (1) descrie un *comportament vâscoplastic* într-o particulă a corpului \mathcal{B} dacă există $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă, cu $g(\mathbf{0}, \mathbf{0}) < 0$, numită *funcție vâscoplastică* astfel încât

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = h(g(\mathbf{T}, \mathbf{E}))\bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T}, \mathbf{E}), \quad (6.2)$$

unde h este funcția Heaviside.

Observația 1. Astfel dacă (\mathbf{T}, \mathbf{E}) este astfel încât $g(\mathbf{T}, \mathbf{E}) < 0$, atunci răspunsul materialului vâscoplastic este "de tip elastic":

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \dot{\mathbf{E}},$$

Dacă (\mathbf{T}, \mathbf{E}) este astfel încât $g(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \geq 0$, atunci răspunsul materialului este descris prin

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})\dot{\mathbf{E}} + \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T}, \mathbf{E}).$$

Semnificația expresiei "de tip elastic" va fi dată în Definiția 4. Din condiția $g(\mathbf{0}, \mathbf{0}) < 0$, cu g continuă, rezultă că există o vecinătate a lui $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ în care corpul are un comportament elastic. În aplicații se consideră că funcția g depinde numai de \mathbf{T} .

Definiția 3. Spunem că un material de tip rate posedă o *configurație naturală*, dacă pentru $\mathbf{E}(\tau) = \mathbf{0}$ pentru orice $\tau \in [\alpha, \beta]$, rezultă că $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{0}$ pentru orice $\tau \in [\alpha, \beta]$.

Propoziția 1. Presupunem că materialul de tip rate (1) admite o configurație naturală atunci $\mathcal{G}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Demonstrație. Fie $\mathbf{E}(\tau) = \mathbf{0}$ pentru $\forall \tau \in [\alpha, \beta]$ și $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{0}$, cu ipoteza existenței configurației naturale, din (1) rezultă că

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{G}(\mathbf{T}(t), \mathbf{0}) \quad \text{cu} \quad \mathbf{T}(\alpha) = \mathbf{0}. \quad (6.3)$$

Problema Cauchy (3) admite soluția nulă dacă și numai dacă

$$\mathcal{G}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0. \quad (6.4)$$

Observația 2. Dacă $\mathbf{T} \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E})$ este local Lipschitz și este *continuă în ansamblul argumentelor*, atunci sistemul diferențial (3) admite o soluție unică. Dacă în plus condiția (4) este îndeplinită obținem că materialul este cu configurație naturală.

Definiția 4. Presupunem că $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset \text{Sim} \times \text{Sim} \rightarrow \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ este de clasă C^1 . Spunem că forma diferențială

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E}(\mathbf{T}(t), \mathbf{E}(t))[\dot{\mathbf{E}}(t)], \quad (6.5)$$

caracterizează un *răspuns instantaneu elastic* dacă și numai dacă ecuația asociată

$$\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{E}} = \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}), \quad (6.6)$$

admite soluție în sensul Definiției 5.

Definiția 5. Se numește soluție pentru ecuația (6) o funcție diferentiabilă $\varphi : \mathcal{U} \subset Sim \rightarrow Sim$, cu \mathcal{U} mulțime deschisă, de clasă C^1 , astfel încât

$$\begin{aligned} 1) & \quad (\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \in \mathcal{D} \quad \text{pentru } \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U} \\ 2) & \quad D\varphi(\mathbf{E}) = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

unde $D\varphi : \mathcal{U} \rightarrow Lin(Sim, Sim)$.

Egalitatea din (7)₂ are loc în sensul egalității aplicațiilor liniare.

Se pune problema precizării condițiilor în care ecuația (6) admite soluții.

Teorema 1. Materialul de tip rate admite un răspuns instantaneu elastic dacă și numai dacă $\forall (\mathbf{T}, \mathbf{E}) \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{E}}(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{A}])\mathbf{B} + \partial_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{A}])(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})\mathbf{B}) = \\ \partial_{\mathbf{E}}(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{B}])\mathbf{A} + \partial_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\mathbf{B}])(\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})\mathbf{A}), \end{aligned} \tag{6.8}$$

pentru orice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$. Egalitatea din (8) are loc în Sim .

Aici s-a utilizat notația $\partial_{\mathbf{E}}\mathcal{E}$ pentru diferențiala aplicației

$\mathbf{E} \in Sim \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E})$, în care \mathbf{T} este fixat. Să mai remarcăm că $\partial_{\mathbf{E}}\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \in Lin(Sim, Lin(Sim, Sim))$.

Demonstrația se obține prin aplicarea teoremei lui Frobenius la cazul considerat.

Arătăm aici că relația din (8) este o condiție necesară. Dacă există o soluție, atunci conform Definiție 5. pentru $\forall \mathbf{A} \in Sim$ are loc egalitatea

$$D\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}] = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}] \in Sim \tag{6.9}$$

Acum considerăm aplicația $\mathbf{E} \in Sim \rightarrow D\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}] \in Sim$, care rezultă diferentiabilă în ipoteza că \mathcal{E} este de clasă C^1 . Scriem expresia diferențialei funcției din (9), pentru $\mathbf{A} \in Sim$ fixat. Avem, pentru $\forall \mathbf{B} \in Sim$,

$$\begin{aligned} D(D\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{A}])(\mathbf{B}) = \partial_{\mathbf{E}}(\mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}])(\mathbf{B}) + \\ \partial_{\mathbf{T}}(\mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E})[\mathbf{A}])(D\varphi(\mathbf{E})[\mathbf{B}]) \in Sim. \end{aligned} \tag{6.10}$$

În (10) folosim încă o dată egalitatea (9) și obținem expresia scrisă în membrul stâng al relației (8).

Exprimăm condiția de simetrie pentru diferențiala de ordinul doi a soluției, scrisă în (10). Din simetria în raport cu \mathbf{A}, \mathbf{B} deducem că, condiția (8) este necesară. Se demonstrează (vezi Cartan [1967], Mirică [1989]) că această condiție este și *suficientă*, dacă domeniul de definiție este *simplu conex*.

Observația 3. Pe componente într-o bază carteziană condiția (8), din Teorema 1. se scrie

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} A_{kl} B_{mn} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} A_{kl} \mathcal{E}_{pqmn} B_{mn} =$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} B_{kl} A_{mn} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} B_{kl} \mathcal{E}_{pqmn} A_{mn} ,$$

pentru $\forall i, j \in \{\overline{1, 3}\}$. Datorită faptului că $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$ sunt arbitrari, relația anterioară este echivalentă cu egalitățile

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial E_{mn}} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijkl}}{\partial T_{pq}} \mathcal{E}_{pqmn} = \frac{\partial \mathcal{E}_{ijmn}}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \mathcal{E}_{ijmn}}{\partial T_{pq}} \mathcal{E}_{pqkl}$$

pentru orice $i, j, k, l, m, n \in \{\overline{1, 3}\}$.

Observația 4. Dacă \mathcal{E} este un tensor de ordinul 4 constant, atunci în mod evident materialul de tip rate are răspuns instantaneu elastic.

Propoziția 2. Dacă un material de tip rate are o configurație naturală și este cu răspuns instantaneu elastic, atunci există φ astfel încât

$$\mathbf{T} = \varphi(\mathbf{E}) \quad \text{pentru } \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U} \quad \text{cu } \varphi(0) = 0 \tag{6.11}$$

$$D\varphi(\mathbf{E}) = \mathcal{E}(\varphi(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \quad \forall \mathbf{E} \in \mathcal{U}.$$

Demonstrația este o consecință a Definițiilor 5. și 3.

În concluzie, prin Propoziția 2. avem o reprezentare constitutivă de corp elastic, neliniar, cu mici deformații. Datorită definițiilor introduse și a semnificațiilor mecanice vom spune că \mathcal{E} caracterizează proprietățile elastice ale materialului.

Definiția 6. Spunem că materialul de tip rate are proprietăți de relaxare dacă pentru o experiență în care deformația este menținută constantă, deci pentru un proces de deformare $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 h$, cu h funcția Heaviside, are loc o variație în timp a tensiunii.

Ca o consecință imediată a definiției obținem că

Propoziția 3. Relaxarea tensiunii este descrisă pentru $t > 0$ prin sistemul diferențial

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0). \tag{6.12}$$

Observația 5. Dacă materialul de tip rate este cu răspuns instantaneu elastic, atunci corespunzător deformației \mathbf{E}_0 starea de tensiune este $\mathbf{T}_0 = \varphi(\mathbf{E}_0)$, fiind dată prin răspunsul elastic (11).

Pentru materiale de tip rate cu configurație naturală și răspuns instantaneu elastic relaxarea tensiunii este determinată din următoarea problemă Cauchy:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0), \quad \mathbf{T}(0) \equiv \mathbf{T}_0 = \varphi(\mathbf{E}_0) \tag{6.13}$$

corespunzător procesului de deformare $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 h$.

Notăm soluția $\mathbf{T}(\tau) = T(\tau, \mathbf{E}_0)$, reprezentând relaxarea tensiunii.

Definiția 7. Curba $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{T}_R(\mathbf{E})$ cu $(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}), \mathbf{E}) \in \mathcal{D} \subset Sim \times Sim$ se numește *curbă de relaxare* dacă

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}), \mathbf{E}) = 0. \tag{6.14}$$

Observația 6. Dacă există $(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) \in \mathcal{D}$ astfel încât

$$\mathcal{G}(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) = 0 \quad \text{și} \quad \partial_{\mathbf{T}} \mathcal{G}(\mathbf{T}^*, \mathbf{E}^*) \neq 0, \tag{6.15}$$

din teorema funcțiilor implicite rezultă că există $\mathbf{T} = \mathbf{T}_R(\mathbf{E})$, definită într-o vecinătate a lui \mathbf{E}^* , care verifică (15). Deci există o *curbă de relaxare*.

Dacă \mathcal{G} este continuă și Lipschitz în raport cu primul argument, atunci $\mathbf{T} = \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0) h$ este o soluție pentru ecuația diferențială

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}_0) \tag{6.16}$$

conform relației (14). Suntem în condițiile de existență și unicitate, deci există o unică soluție care trece prin $(\mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0), \mathbf{E}_0)$, presupus în \mathcal{D} .

Propoziția 4. 1) Dacă presupunem că modelul admite *timi de relaxare finiți*, deci dacă $\exists t^* \in \mathbb{R}$ astfel încât $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ pentru $\tau > 0$ (reprezentând relaxarea tensiunii), cu proprietatea că

$$\lim_{\tau \rightarrow t^*} \mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0),$$

atunci în mod necesar problema Cauchy (12) nu admite soluții unice.

2) Dacă problema Cauchy (12) admite soluție unică, atunci modelul de tip rate are *timi de relaxare infiniți*.

Demonstrație. Pentru problema Cauchy din (12) va rezulta soluția $\mathbf{T}(\tau) = \mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ de clasă C^1 , reprezentând relaxarea tensiunii. Prin punctul $(\mathbf{E}_0, \mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0))$ de pe curbă de relaxare, trec două soluții: $\mathbf{T}(\tau, \mathbf{E}_0)$ și $\mathbf{T}_R(\mathbf{E}_0) h$. Deci în mod necesar nu are loc unicitatea.

Funcția \mathcal{G} caracterizează *proprietățile de relaxare* ale materialului.

Observația 7. Dacă presupunem că materialul de tip rate are proprietatea $\mathcal{E} : \mathcal{D} \subset Sim \times Sim \rightarrow Lin(Sim, Sim)$ este un tensor de ordinul 4, inversabil în punctele domeniului \mathcal{D} , atunci există și reprezentarea constitutivă de forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{T}}] - \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E})\mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) \iff \\ \dot{\mathbf{E}} &= \mathcal{E}^{-1}(\mathbf{T}, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{T}}] - \mathcal{F}(\mathbf{T}, \mathbf{E}), \end{aligned} \tag{6.17}$$

deci materialul are și *proprietăți de fluaj*.

Definiția 8. Materialul de tip rate descris prin (17) are *proprietăți de fluaj*, dacă prin menținerea tensiunii constante, dată prin $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 h$ are loc o *variație în timp a deformației*.

În mecanica rocilor este esențială utilizarea unor modele constitutive care să permită punerea în evidență a *fluaajului rocilor*.

Materialele de tip rate care au fost prezentate în acest paragraf descriu în general proprietăți de relaxare și fluaaj, proprietăți care au fost puse în discuție și în clasa materialelor vâscoelastice.

Reprezentări constitutive pentru materiale de tip rate, în cazul deformațiilor finite, vor fi prezentate în paragraful 6.3, sub formă de exerciții. Sunt puse în evidență diferite legi de materiale, care pot fi considerate ca extensii posibile, la cazul deformațiilor finite, a reprezentărilor de tip rate, prezentate în acest paragraf. În Cleja- Țigoiu [1991] a fost propusă o reprezentare constitutivă pentru materiale de tip rocă, care generalizează reprezentările constitutive din mecanica rocilor, la cazul deformațiilor finite.

6.2 Problema cvasi-statică cu date inițiale și la limită

În cele ce urmează vom arăta cum poate fi formulată o problemă cu date inițiale și la limită pentru clasa materialelor de tip rate, având în vedere reprezentări constitutive utilizabile în mecanica rocilor. Vom accepta prin urmare un model în care *tensorul elastic* este inversabil, eventual putând depinde de punctul material (în scopul caracterizării *neomogenităților* existente într-un masiv de roci deformabile).

Rezultate de existență, unicitate și dependență continuă de date ale soluției se găsesc expuse în Ionescu, Sofonea [1983], [1993].

Prezentăm aici punctele esențiale în modalitatea descrierii comportamentului unui material de tip rate în problema cvasi-statică cu date inițiale și la limită, bazată pe decuplajul într-o *problemă de tip elastic* și una numită *vâscoelastică*.

6.2.1 Formularea problemei cvasi-statice

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ domeniu mărginit, conex. Notăm prin $\partial\Omega$ — frontiera domeniului, presupusă suficient de netedă. Se pune problema determinării câmpurilor de *deplasare* și de *tensiuni*

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3 \quad \mathbf{T} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6 ,$$

pentru care vom folosi următoarele *notații*

$$\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}(\cdot, t) : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^3 , \tag{6.18}$$

$$\mathbf{T}(t) \equiv \mathbf{T}(\cdot, t) : \Omega \longrightarrow Sim \equiv \mathbf{R}^6 ,$$

care verifică în Ω pentru $\forall t \in [0, t_1)$: ecuațiile de echilibru

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(t) + \mathbf{b}(t) = 0 , \tag{6.19}$$

reprezentarea constitutivă pentru materiale de tip rate

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E}\dot{\mathbf{E}}(t) + \mathcal{G}(\mathbf{T}(t), \mathbf{E}(t)) , \tag{6.20}$$

relațiile geometrice

$$\mathbf{E}(t) \equiv \epsilon(\cdot, t) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}(t) + \nabla^T \mathbf{u}(t)). \quad (6.21)$$

Am introdus pentru comoditatea scrierii, $\mathbf{E} \equiv \epsilon$, notație pentru tensorul micilor deformații. Se mai folosește și notația $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ pentru a face precizarea că tensorul de deformații este asociat câmpului de deplasare \mathbf{u} .

Câmpurile de deplasare și de tensiune trebuie să satisfacă condițiile ($\partial\Omega$ fiind frontiera domeniului),

$$\mathbf{u}(t) |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{T}(t)\mathbf{n} |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t), \quad (6.22)$$

pentru $t \in [0, t_1)$, unde $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

și condițiile inițiale în Ω

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{T}(0) = \mathbf{T}_0. \quad (6.23)$$

În formularea problemei timpul t apare sub formă de parametru prin intermediul condițiilor pe frontieră și se presupune că în configurația de referință corpul este *deformat*, având tensiuni inițiale.

Formularea problemei este *cvasi-statică* deoarece se consideră *ecuațiile de echilibru* și nu *ecuațiile de mișcare*.

Observația 8. Suntem în cazul micilor deformații și prin urmare, conform formulelor din paragraful 1.6,

$$\dot{\mathbf{E}} \equiv \dot{\epsilon}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\nabla \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t) + \nabla^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)) \equiv \mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}). \quad (6.24)$$

Se impune condiția de **concordanță** a datelor inițiale

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(0) + \mathbf{b}(0) = 0, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{u}(0) |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(0), \quad \mathbf{T}(0)\mathbf{n} |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(0).$$

Câmpurile forțelor volumice, deplasărilor și vectorului de tensiune, pe porțiunile corespunzătoare ale frontierei, sunt date astfel încât să fie de clasă $C^1([0, t_2])$ cu valori în spațiile de funcții corespunzătoare, iar g este restricția unei funcții h , $g = h |_{\Gamma_1}$, care la fiecare moment de timp este definită pe întreaga frontieră a domeniului.

Soluția problemei formulate este perechea

$$\mathbf{u} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3, \quad \mathbf{T} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \operatorname{Sim} \equiv \mathbf{R}^6, \quad (6.26)$$

definită în spații adecvat definite, care satisface ecuațiile și condițiile menționate.

Formulăm în primul rând **Problema de tip elastic** (vezi cap.2.7.2):

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ domeniul mărginit, conex și $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Să se determine câmpurile $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{T}}) : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \times Sim$ care verifică

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{T}}(t) + \mathbf{b}(t) &= 0, \\ \tilde{\mathbf{T}}(t) &= \mathcal{E} \tilde{\mathbf{E}}(t), \quad \tilde{\mathbf{E}}(t) = \frac{1}{2}(\nabla \tilde{\mathbf{u}}(t) + \nabla^T \tilde{\mathbf{u}}(t)), \end{aligned} \quad (6.27)$$

condițiile pe frontieră

$$\tilde{\mathbf{u}}(t) |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t), \quad \tilde{\mathbf{T}}(t) \mathbf{n} |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t) \quad (6.28)$$

și condițiile inițiale în Ω

$$\tilde{\mathbf{u}}(0) = \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \tilde{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{T}_0. \quad (6.29)$$

Condițiile (29) se introduc în cazul în care există tensiuni inițiale în configurația de referință, care este deja deformată în raport cu o alta.

Observația 9. În problema elastică (27)-(29) se consideră forțele volumice date în ecuația de echilibru (19) și condițiile pe frontieră identice cu cele din (22), corespunzătoare formulării problemei pentru materiale de tip rate.

Introducem câmpurile

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}} &\equiv \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \equiv \mathbf{R}^3, \\ \bar{\mathbf{T}} &= \mathbf{T} - \tilde{\mathbf{T}} : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow Sim, \end{aligned} \quad (6.30)$$

unde $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ definește soluția problemei elastice (27)-(29).

Formulăm acum **Problema vâscoplastică** :

O pereche de câmpuri $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) : \Omega \times [0, t_1) \longrightarrow \mathcal{V} \times Sim$ definește o soluție a problemei *vâscoplastice* asociate, dacă satisface

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{T}}(t) = 0, \quad (6.31)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) = \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)] + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \dot{\bar{\mathbf{T}}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)), \quad (6.32)$$

condițiile pe frontieră

$$\bar{\mathbf{u}}(t) |_{\Gamma_1} = 0 \quad \bar{\mathbf{T}}(t) \mathbf{n} |_{\Gamma_2} = 0, \quad (6.33)$$

și condițiile inițiale în Ω

$$\bar{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{u}_0 - \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad \bar{\mathbf{T}}(0) = \mathbf{T}(0) - \tilde{\mathbf{T}}_0. \quad (6.34)$$

Observația 10. Formularea problemei *vâscoplastice* se obține, dacă în problema (19)-(23) se introduc câmpurile $(\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{T}} + \bar{\mathbf{T}})$ care descriu o *suprapunere de efecte elastice și de tip vâscoplastic*.

Observația 11. Problema vâscoplastică introdusă aici comportă absența forțelor masice, date pe frontieră omogene și condiții inițiale nenule.

Vom formula următoarele ipoteze asupra funcțiilor constitutive.

Ipoteze asupra \mathcal{E} :

- a) $|\mathcal{E}(\mathbf{x})|_{(4)} \leq \text{const.} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$
- b) $\mathcal{E}(\mathbf{x}) : Sim \rightarrow Sim$ liniar, simetric, strict pozitiv definit
- 1) $\mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$ (6.35)
- 2) există o constantă pozitivă $d > 0$ astfel încât pentru orice $\mathbf{x} \in \Omega$

și pentru orice $\mathbf{A} \in Sim$, să avem $\mathcal{E}(\mathbf{x})\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \geq d \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \equiv d |\mathbf{A}|^2$.

Ultima este o condiție de *coercivitate*, asigurând și existența câmpului tensorial $\mathcal{E}(\mathbf{x})^{-1}$.

Ipoteze asupra \mathcal{G} :

a) \mathcal{G} este lipschitziană în ansamblul argumentelor, deci există o constantă $L > 0$ astfel încât

$$|\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{T}_1, \mathbf{E}_1) - \mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{T}_2, \mathbf{E}_2)| \leq L(|\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2| + |\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2|) \quad (6.36)$$

pentru $\forall \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2 \in Sim$,

b) $\mathcal{G}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$.

Condiția b) a fost motivată în paragraful anterior, prin Propoziția 1.

Vom preciza câteva preliminarii legate de spațiile funcționale în care se definesc și se formulează, *în sens generalizat*, problemele de existență și de unicitate. Introducem spațiile funcționale

$$\begin{aligned} L &= \{\mathbf{T} \mid T^{ij} = T^{ji} \in L^2(\Omega) \quad i, j \in \{\overline{1, 3}\}\}, \\ L_u &= \{\mathbf{v} \mid v^i \in L^2(\Omega) \quad i \in \{\overline{1, 3}\}\}, \\ L_d &= \{\mathbf{T} \mid \mathbf{T} \in L, \quad \text{div } \mathbf{T} \in L_u\}, \\ H^1(\Omega) &= \{u : \Omega \rightarrow R \mid u, \frac{\partial u}{\partial x^i} \in L^2(\Omega) \quad i \in \{\overline{1, 3}\}\}, \\ H &= \{\mathbf{u} \mid u^i \in H^1(\Omega), i \in \{\overline{1, 3}\}\}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Spațiile formulate în (37) sunt spații Hilbert cu produsele scalare definite prin

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{S}, \mathbf{E}) &= \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \, dx && \text{în } L, \\
 ((\mathbf{u}, \mathbf{v})) &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx && \text{în } L_u, \\
 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_H &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, dx, && \text{în } H, \\
 \langle \mathbf{S}, \mathbf{E} \rangle_d &= \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} \, dx, && \text{în } L_d,
 \end{aligned}
 \tag{6.38}$$

iar normele sunt notate prin $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_d$, pentru ultimele două spații.

Pentru primele spații introducem normele

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{S}\| &= \left(\int_{\Omega} |\mathbf{S}| \, dx \right)^{1/2} \equiv (\mathbf{S}, \mathbf{S})^{1/2} \quad \forall \mathbf{S} \in L, \\
 \|\mathbf{u}\| &= \left(\int_{\Omega} |\mathbf{u}| \, dx \right)^{1/2} \equiv ((\mathbf{u}, \mathbf{u}))^{1/2} \quad \forall \mathbf{u} \in L_u.
 \end{aligned}
 \tag{6.39}$$

De asemenea mai introducem spațiile

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_1 &= \{\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow R^3 \mid \mathbf{u} \in H, \mathbf{u} = 0 \text{ pe } \Gamma_1\} \subset H, \\
 \mathcal{V}_2 &= \{\mathbf{T} \mid \operatorname{div} \mathbf{T} = 0, \mathbf{T}\mathbf{n} = 0 \text{ pe } \Gamma_2\} \subset L_d.
 \end{aligned}
 \tag{6.40}$$

Menționăm, fără a intra în detalii (vezi de exemplu Necăs [1967], Iftimie [1978]), că se consideră condițiile pe frontiera domeniului în sensul *operatorilor de urmă*.

Observația 12. Spațiul Sobolev, de ordinul 1, pentru funcții cu valori vectoriale (notat aici cu H) poate fi obținut prin închiderea în raport cu norma $\|\cdot\|_H$ a spațiului $\mathcal{E}(\bar{\Omega})$ – care reprezintă mulțimea funcțiilor, infinit derivabile în Ω și care sunt prelungibile prin continuitate în $\bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \partial\Omega$.

Se demonstrează că

1) există *operatorul de urmă* $\gamma_0 : H \longrightarrow L^2(\partial\Omega, R^3)$, astfel încât dacă $\mathbf{u} \in C^1(\bar{\Omega}, R^3)$ atunci $\gamma_0(\mathbf{u}) = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$.

2) γ_0 este un operator *liniar și continuu*, deci astfel încât

$$\|\gamma_0(\mathbf{u})\|_{\Gamma} \leq c(\Omega) \|\mathbf{u}\|_H \quad \forall \mathbf{u} \in H,
 \tag{6.41}$$

unde s-a introdus notația

$$\|\mathbf{u}\|_{\Gamma} = \left(\int_{\partial\Omega} |\mathbf{u}|^2 \, da \right)^{1/2} \text{ pentru } \forall \mathbf{u} \in L^2(\partial\Omega, R^3).$$

Constanta $c(\Omega) > 0$ este dependentă de domeniu.

3) Operatorul γ_0 nu este surjectiv. Se introduce spațiul $H_\Gamma \equiv \gamma_0(H)$ care conduce la prezentarea operatorului de urmă ca un operator *surjectiv*.

Observația 13. Vom nota prin H_1 subspațiul lui H_Γ definit prin

$$H_1 = \{\xi \in H_\Gamma \mid \xi = 0 \text{ pe } \Gamma_1\}. \quad (6.42)$$

Operatorul $\mathbf{E} : H \rightarrow L$, prin care oricărui $\mathbf{u} \in H$ i se asociază câmpul tensorial al micilor deformații $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ definit prin formula (21), ca element în L , este liniar și continuu. Dacă măs $\Gamma_1 > 0$, atunci are loc inegalitatea lui Korn (vezi de exemplu Nečas, Hlaváček [1981], Roșca [1997])

$$\|\mathbf{E}(\mathbf{u})\| \geq c_1(\Omega) \|\mathbf{u}\|_H, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_1, \quad (6.43)$$

cu constanta $c_1(\Omega) > 0$ dependentă de domeniu și de Γ_1 .

Se demonstrează că (vezi de exemplu Léné [1974])

1) Dacă $\mathbf{T} \in L_d$ atunci există $\gamma_n(\mathbf{T}) \in H'_\Gamma$ (unde H'_Γ este dualul lui H_Γ) astfel încât

$$\langle \gamma_n(\mathbf{T}), \gamma_0(\mathbf{u}) \rangle_\Gamma = (\mathbf{T}, \mathbf{E}(\mathbf{u})) + ((\text{div } \mathbf{T}, \mathbf{u})) \quad \forall \mathbf{u} \in H, \quad (6.44)$$

unde \langle, \rangle_Γ este aplicația de dualitate.

2) Operatorul de urmă $\gamma_n : L_d \rightarrow H'_\Gamma$ este liniar și continuu, cu proprietatea

$$\|\gamma_n(\mathbf{T})\|_{\Gamma'} \leq c(\Omega) \|\mathbf{T}\|_d \quad \forall \mathbf{T} \in L_d. \quad (6.45)$$

Observația 14. Prin $\mathbf{T}_n|_{\Gamma_2}$ vom înțelege un element al dualului spațiului H_1 , care este restricția lui $\gamma_n(\mathbf{T})$ pe H_1 , definit prin Observația 13., formula (42).

Propoziția 5. 1) Dacă $\mathbf{S} \in L_d$ și $\mathbf{v} \in H$ sunt funcții regulate, atunci are loc relația din (44), scrisă sub forma

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \int_\Omega \text{div } \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da, \quad (6.46)$$

cunoscută în mecanică sub numele de *teorema asupra puterii totale* sau *principiul lucrului mecanic virtual*.

2) Dacă $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$ și $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$, atunci are loc condiția de ortogonalitate

$$\int_\Omega \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0. \quad (6.47)$$

Demonstrația punctului 1) se obține prin aplicarea teoremei Green - Gauss, observând că în reprezentări într-o bază carteziană are loc identitatea

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \text{div } \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x^j} (\mathbf{S}^{ij} v_i),$$

Prin aplicarea teoremei Green - Gauss deducem că

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x^j} (S^{ij} v_i) dx = \int_{\partial\Omega} S^{ij} v_i n_j da.$$

2) Pentru funcțiile regulate din $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, din relația (46) deducem condiția (47), deoarece din (40) avem condiții nule pe porțiunile frontierei, iar \mathbf{S} este cu divergență nulă. Prin închidere în raport cu normele construite pe spațiile corespunzătoare, rezultă egalitatea din (47) pentru elementele din \mathcal{V}_1 și \mathcal{V}_2 .

Se demonstrează (pot fi utilizate reprezentările și tehnicile din Ladijesnkaiia [1970], sau vezi mențiunile din Ionescu, Sofonea [1993]) că are loc reciproca din Propoziția 5. punctul 2).

Propoziția 6. $\mathbf{E}(\mathcal{V}_1)$ este complementul ortogonal al lui \mathcal{V}_2 în L .

Deci din condiția *de ortogonalitate*

$$(\mathbf{S}, \mathbf{E}(\mathbf{v})) \equiv \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1, \quad (6.48)$$

rezultă că $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$.

Demonstrația decurge prin considerarea identității (44) sau (46) pentru funcții regulate, cu utilizarea ipotezei. Deducem că

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da, \quad (6.49)$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$. Deoarece $\mathbf{v}|_{\Gamma_1} = \mathbf{0}$, în sensul urmei, în (49) integrala pe $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ se reduce la integrala pe Γ_2 :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma_2} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da. \quad (6.50)$$

Fară a intra în detaliile demonstrației să observăm că în (50) putem considera $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ pe $\partial\Omega$. Atunci $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} dx \equiv ((\operatorname{div} \mathbf{S}, \mathbf{v})) = 0$, care este o condiția de ortogonalitate în L_u , pentru $\forall \mathbf{v} \in L_u$. Rezultă că $\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{0}$. Revenim în (50), din care rămâne $\int_{\Gamma_2} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} da = 0$ cu $\mathbf{v} \in L_u$, arbitrar încă pe Γ_2 . Rezultă în final $\mathbf{S} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ în sensul urmei. Deci $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$, conform definițiilor din (40).

Propoziția 7. Dacă \mathcal{X} este unul din spațiile Hilbert anterioare atunci

$$C^0([a, b], \mathcal{X}) = \{\mathbf{z} : [a, b] \longrightarrow \mathcal{X}, \text{ continue}\},$$

$$C^1([a, b], \mathcal{X}) = \{\mathbf{z} : [a, b] \longrightarrow \mathcal{X}, \exists \dot{\mathbf{z}} \in C^0([a, b], \mathcal{X})\},$$

sunt spații normate cu normele definite prin

$$\max_{t \in [a, b]} \|\mathbf{z}(t)\| \quad \text{și respectiv} \quad \max_{t \in [a, b]} \|\mathbf{z}(t)\| + \max_{t \in [a, b]} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|.$$

În mecanică se folosesc *conceptele de câmp static și câmp cinematic admisibile*, care au generat definițiile din (40) pentru spațiile în care se găsesc soluțiile (*generalizate*) ale problemelor la limită formulate.

Definiția 9. Un câmp $\mathbf{S} : \Omega \rightarrow Sim$ se numește *static admisibil* dacă

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{b}(t) = 0, \quad \mathbf{S} \mathbf{n} |_{\Gamma_2} = \mathbf{f}(t), \quad (6.51)$$

cu clasa de regularitate a soluției clasice, $\mathbf{S} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Notăm prin \mathcal{T}_{ad} mulțimea câmpurilor static admisibile.

Definiția 10. Un câmp $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathcal{V}$ se numește *cinematic admisibil* dacă

$$\mathbf{u} |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}(t), \quad (6.52)$$

cu clasa de regularitate a soluției clasice, $\mathbf{u} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Notăm prin \mathcal{U}_{ad} mulțimea câmpurilor cinematic admisibile.

Atunci *principiul lucrului mecanic virtual*, din (46) se reformulează astfel

Propoziția 8. $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{T}_{ad}$ și $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}_{ad}$ are loc condiția

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E} \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_1} \mathbf{S} \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da. \quad (6.53)$$

6.2.2 Problema elastică

În problema elastică de echilibru formulată prin (27)-(29) intervine timpul sub formă de parametru, ceea ce înseamnă considerarea unei familii de soluții elastice, determinate la fiecare moment de timp. Vom prezenta succint modalitatea de demonstrare a existenței și unicității soluției *generalizate* pentru problema elastică.

Problema de tip elastic revine la aflarea câmpurilor $(\mathbf{u}, \mathbf{T}) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3 \times Sim$ care verifică (27) - (29). Se formulează *problema generalizată* prin intermediul **Teoremei asupra puterii totale** (53), care capătă forma

$$\int_{\Omega} \mathcal{E} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_1} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} da \quad (6.54)$$

dacă \mathbf{S} , arbitrar în spațiul tensiunilor admisibile este înlocuit prin \mathbf{T} , tensiunea corespunzătoare soluției elastice și se utilizează condițiile pe frontieră (28), în sensul urmei, pentru fiecare moment de timp fixat. (54) are loc pentru orice câmp cinematic admisibil, deci $\forall \mathbf{v} \in H$ cu $\mathbf{v} |_{\Gamma_1} = \mathbf{g}$.

Propoziția 9. Din ipotezele asupra tensorului elastic \mathcal{E} există

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) : H \times H \rightarrow R,$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{E} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx, \quad (6.55)$$

$$|a(\mathbf{v}, \mathbf{v})| \geq d(\mathbf{E}(\mathbf{v}), \mathbf{E}(\mathbf{v}))^{1/2} \geq c(\Omega) \|\mathbf{v}\|_H \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1,$$

simetrică, biliniară, continuă și coercivă.

Demonstrație. Din (55) obținem că $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, adică simetria și $|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq c_2 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$, deci continuitatea. Coercivitatea este dată de ultima inegalitate din (55), care este o consecință a inegalității lui Korn (43), adevărată pentru $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

Presupunem că $\exists \mathbf{u}_1 \in H$ astfel încât $\mathbf{u}_1|_{\Gamma_1} = \mathbf{g}$. Atunci considerăm translația $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$ în (55)₂, prin care rezultă problema

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da - a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}), \quad (6.56)$$

scrisă pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

În final mai menționăm că pentru $\mathbf{v} \in H$

$$(E(\mathbf{v}), E(\mathbf{v})) = 0 \text{ dacă și numai dacă } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{w}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (6.57)$$

Termenul din dreapta caracterizează o mișcare de corp rigid. Dacă $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ atunci el se anulează, în sensul urmei, pe porțiunea Γ_1 de frontieră și atunci rezultă că mișcarea de corp rigid este nulă. Prin (55) cu (57) a fost introdusă pe \mathcal{V}_1 o normă echivalentă cu norma pe H .

Teorema 2. Problema elastică generalizată - să se determine $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_1$ astfel încât $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ să aibă loc egalitatea

$$a(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} da - a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}), \quad (6.58)$$

pentru $\mathbf{b} \in L_u$, $\mathbf{f} \in H'_1$ și forma a , definită în Propoziția 9. - admite o unică soluție în \mathcal{V}_1 .

Demonstrația rezultă din aplicarea Lemei lui Lax- Milgram (vezi de exemplu Roșca [1997], paragraful 11.1), termenul din membrul drept definind o funcțională liniară și continuă pe \mathcal{V}_1 , ca o consecință a definițiilor introduse.

Observația 15. Dacă se consideră date dependente de timp, cu $\mathbf{b} \in C^1(R_+, L_u)$, $\mathbf{f} \in C^1(R_+, H'_1)$ și $\mathbf{h} \in C^1(R_+, H_\Gamma)$, care are proprietatea că $\mathbf{h} = \mathbf{g}$ pe Γ_1 atunci rezultă și formulele de *dependență continuă* de date pentru soluția problemei elastice generalizate, formulată la început. Dacă $(\mathbf{u}_j, \mathbf{T}_j)$ cu $j = 1, 2$ corespunzătoare datelor notate cu indicele j , atunci pentru orice moment de timp $t \in R_+$ au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_H + \|\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2\|_d &\leq \\ &\leq C\{\|\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2\| + \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{\Gamma'} + \|\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2\|_{\Gamma}\} \end{aligned} \quad (6.59)$$

și inegalități similare conținând derivatele temporale ale câmpurilor introduse.

6.2.3 Problema vâscoplastică

Problema vâscoplastică a fost formulată în (31)-(34) și conține soluția problemei elastice (27)-(29).

Demonstrarea unui rezultat de *existență și unicitate a soluției generalizate* se face în spațiul funcțional produs $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ pe care definim produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ prin

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \mathcal{E} \mathbf{E}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} dx, \quad (6.60)$$

$$\forall \mathbf{y} = (\mathbf{u}, \mathbf{T}), \quad \mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{S}) \in \mathcal{V}$$

Produsul scalar induce o *normă energetică*.

Observația 16. În problema vâscoplastică considerată aici câmpurile tensoriale static admisibile au $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ și deci corespund unor forțe volumice nule. Ca urmare în expresia produsului scalar pe \mathcal{V}_2 , deci și a normei, nu mai apar termenii care conțin divergența câmpurilor tensoriale static admisibile.

Teorema 3. Perechea $\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ este soluția problemei vâscoplastice (31)-(34) dacă și numai dacă \mathbf{y} este soluție în spațiul Hilbert \mathcal{V} a problemei Cauchy

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t, \mathbf{y}) \quad \text{cu} \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \quad (6.61)$$

Operatorul $A(t, \mathbf{y})$ este definit prin

$$\begin{aligned} \langle A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle &= - \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx, \end{aligned} \quad (6.62)$$

pentru orice $\mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}$.

Demonstrație. Fie $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{V})$ soluția problemei vâscoplastice (31)-(34) a cărei existență o acceptăm, atunci conform *principiului lucrului mecanic virtual* (44) are loc identitatea

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0 \quad \forall t > 0, \quad (6.63)$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$. În particular are loc și pentru $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}$. Din (63) rezultă și

$$\int_{\Omega} \dot{\mathbf{T}}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0 \quad \forall t > 0. \quad (6.64)$$

Folosim reprezentarea constitutivă (32), pe care o înmulțim scalar cu $\mathbf{E}(\mathbf{v})$ și o integrăm pe Ω , pentru t fixat. Folosim (64) și obținem

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \dot{\mathbf{T}}(t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}})(t)] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Aplicăm transformarea \mathcal{E}^{-1} reprezentării constitutive (32) și deducem că

$$\mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) = \mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t) + \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)). \quad (6.66)$$

În (66) înmulțim scalar cu $\mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$ și prin integrare pe Ω rezultă

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) \cdot \mathbf{P} dx &= \int_{\Omega} \mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t) \cdot \mathbf{P} dx + \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx \quad \forall \mathbf{P} \in \mathcal{V}_2. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Din (65) și (67) în care aplicăm condiția de ortogonalitate (47) deducem identitățile

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}})(t)] \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = - \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx, \quad (6.68)$$

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}}(t) \cdot \mathbf{P} dx = \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx.$$

adevărate pentru $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$ și $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$.

Folosim definiția produsului scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ introdus în (60), pentru perechea $(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z})$, la un anumit moment de timp dat, fixat și găsim

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} &= \int_{\Omega} \mathcal{E}\mathbf{E}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{z}) dx + \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{P} dx = \\ &- \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{z}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx, \end{aligned} \quad (6.69)$$

dacă au fost utilizate relațiile (68). (69) are loc pentru orice $\mathbf{z} \in \mathcal{V}_1$ și $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$.

Pentru perechea $\mathbf{y} = (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}})$ la orice moment de timp t fixat, să observăm că aplicația prin care \mathbf{y} se asociază fiecărui element $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$, numărul real din membrul drept al relației (69), este liniară și mărginită, în baza ipotezelor (35), (36). Aplicația fiind deci liniară și continuă. Prin aplicarea teoremei lui Riesz de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe spații Hilbert, rezultă că există elementul, notat $A(t, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}$, astfel încât valoarea funcționalei, definită prin (69), să fie dată de $\langle A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}}$.

$$\forall \mathbf{z} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{P}) \in \mathcal{V} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ &+ \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1}\mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx \equiv \langle A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (6.70)$$

Am obținut astfel expresia operatorului introdus în (62).

Din (70) și (69) deducem că

$$\langle \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} = \langle A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{V} \iff \dot{\mathbf{y}} = A(t, \mathbf{y}). \quad (6.71)$$

În ipoteza că soluția problemei vâscoase există și este de clasă C^1 în raport cu timpul, din ipotezele formulate pentru funcțiile constitutive deducem că aceasta este soluție pentru ecuația diferențială în spații Hilbert scrisă în (71). Condiția inițială $\mathbf{y}(0) = (\bar{\mathbf{u}}(0), \bar{\mathbf{T}}(0))$ este dată prin condițiile inițiale (34) ale problemei.

Dacă \mathcal{G} este Lipschitz atunci și $A(t, \cdot)$ este Lipschitz în al doilea argument și continuă în raport cu primul.

Reciproc. Fie $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{T}}) \equiv \mathbf{y} \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ soluția de clasă $C^1([0, t_1], \mathcal{V})$, a problemei Cauchy pentru ecuația diferențială în spațiul Hilbert, scrisă sub forma

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} = & \langle A(t, \mathbf{y}), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} \equiv \\ & - \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \\ & + \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{P} dx \end{aligned} \quad (6.72)$$

pentru $\forall \mathbf{z} = (\mathbf{v}, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}$. Vrem să demonstrăm că

- 1) $\bar{\mathbf{T}}$ este static admisibil,
- 2) $\bar{\mathbf{u}}$ este cinematic admisibil,
- 3) elementele $\mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})$, $\bar{\mathbf{T}}$ sunt legate prin reprezentarea constitutivă (32).

În acest fel demonstrăm că are loc reciproca teoremei.

Particularizăm elementul arbitrar din (72) pentru a produce decuplajul elementelor din perechea \mathbf{y} .

Fie $\mathbf{z} = (\mathbf{v}, 0) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ introdusă în (72), atunci

$$\langle \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} = - \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx \quad (6.73)$$

În (73) înlocuim expresia (60) a produsului scalar din membrul stâng și astfel (73) devine echivalentă cu

$$\int_{\Omega} \mathcal{E} \mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0, \quad (6.74)$$

scrisă pentru $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1$.

Pentru orice $t > 0$, fixat, din domeniul de existență a soluției definim câmpul tensorial pus în evidență în (74)

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \equiv & \mathcal{E} \mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}})(t) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t)) \quad \text{cu} \\ & \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) dx = 0, \end{aligned} \quad (6.75)$$

pentru $\forall v \in \mathcal{V}_1$. Din relația (75)₂ (ca o consecință a Propoziției 6.) deducem că $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$, deci $\operatorname{div} \mathbf{S} = 0$ și $\mathbf{S} \mathbf{n} |_{\Gamma_2} = 0$.

Fie acum $\mathbf{z} = (0, \mathbf{P}) \in \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ introdus în (72), atunci

$$\langle \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}(t))) \cdot \mathbf{P} dx. \quad (6.76)$$

În (76) înlocuim expresia (60) a produsului scalar și obținem egalitatea

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} [\dot{\mathbf{T}}(t) - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}(t)))] \cdot \mathbf{P} dx = 0, \quad (6.77)$$

adevărată pentru $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$.

Astfel din (77) deducem că există elementul \mathbf{E}^* cu proprietățile

$$\mathbf{E}^* = \mathcal{E}^{-1} [\dot{\mathbf{T}}(t) - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}(t)))] \iff \quad (6.78)$$

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = \mathcal{E} \mathbf{E}^* + \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}(t)))$$

și

$$\int_{\Omega} \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{P} dx = 0. \quad (6.79)$$

Introducem câmpul tensorial $\mathbf{B}(t) \in L^2(\Omega)$

$$\mathbf{B}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}(t))] - \mathcal{G}(\bar{\mathbf{T}}(t) + \tilde{\mathbf{T}}(t), \mathbf{E}(\bar{\mathbf{u}}(t)) + \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}}(t))), \quad (6.80)$$

atunci din (80) cu (75)₁ și (78)₂ rezultă că

$$\mathbf{B}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t) - \mathbf{S} \quad \text{și} \quad \mathbf{B}(t) = \mathcal{E} \mathbf{E}^* - \mathcal{E}[\mathbf{E}(\dot{\mathbf{u}}(t))]. \quad (6.81)$$

Din (81)₂ cu (79) și (46) rezultă că

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{P} dx = 0, \quad (6.82)$$

pentru $\mathbf{P} \in \mathcal{V}_2$. Avem deci $\mathcal{E}^{-1} \mathbf{B}(t) \in \mathcal{V}_1$. Deoarece $\dot{\mathbf{T}}(t)$, $\mathbf{S} \in \mathcal{V}_2$, rezultă că $\mathbf{B}(t) \in \mathcal{V}_2$. Introducem pe $\mathbf{B}(t)$ în (82) și deducem că

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}^{-1} \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{B}(t) dx = 0 \quad (6.83)$$

Deoarece \mathcal{E}^{-1} este strict pozitiv definit din (83) avem $\mathbf{B}(t) = \mathbf{0}$. Atunci din (80) deducem că (32) este satisfăcută.

Folosind Teorema 3., problema (31) - (34) a fost înlocuită cu problema Cauchy (61) în spațiul Hilbert \mathcal{V} . Demonstrația existenței și unicității soluției problemei Cauchy (61) se bazează pe următorul rezultat (dat în Pavel, Ursescu [1974]) :

Teorema 4. Fie \mathcal{V} un spațiu Hilbert și $A : R_+ \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ un operator continuu astfel încât există o constantă $D > 0$ cu proprietatea

$$\langle A(t, \mathbf{y}_1) - A(t, \mathbf{y}_2), \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2 \rangle_{\mathcal{V}} \leq D \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathcal{V}}^2, \quad (6.84)$$

pentru $\forall t > 0$ și $\forall \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathcal{V}$. Atunci pentru orice $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{V}$ există o soluție unică $\mathbf{y} \in C^1(R_+, \mathcal{V})$ pentru problema (61).

Lema 1. Operatorul A definit prin (62) este continuu și satisface (84).

Demonstrație. Fie $t_j > 0$, cu $j = 1, 2$, și $\mathbf{y}_1 = (\mathbf{u}_1, \mathbf{T}_1), \mathbf{y}_2 = (\mathbf{u}_2, \mathbf{T}_2)$. Notăm $\mathbf{E}(u_j) \equiv \mathbf{E}_j$ și $\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{u}})(t_1) \equiv \tilde{\mathbf{E}}(t_1)$. Pentru orice (\mathbf{v}, \mathbf{P}) avem

$$\begin{aligned} |\langle A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2, \mathbf{y}_2), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}}| &\leq \\ &\leq |\langle \mathcal{G}(\mathbf{T}_1 + \tilde{\mathbf{T}}(t_1), \mathbf{E}_1 + \tilde{\mathbf{E}}(t_1)), \mathbf{E}(\mathbf{v}) \rangle - \\ &- \langle \mathcal{G}(\mathbf{T}_2 + \tilde{\mathbf{T}}(t_2), \mathbf{E}_2 + \tilde{\mathbf{E}}(t_2)), \mathbf{E}(\mathbf{v}) \rangle| + \\ &+ |\langle \mathcal{E}^{-1} \dot{\mathcal{G}}(\mathbf{T}_1 + \tilde{\mathbf{T}}(t_1), \mathbf{E}_1 + \tilde{\mathbf{E}}(t_1)) - \\ &- \mathcal{E}^{-1} \dot{\mathcal{G}}(\mathbf{T}_2 + \tilde{\mathbf{T}}(t_2), \mathbf{E}_2 + \tilde{\mathbf{E}}(t_2)), \mathbf{P} \rangle|. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Folosind ipotezele referitor la funcția \mathcal{G} deducem, după un număr de estimări că

$$\begin{aligned} |\langle A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2, \mathbf{y}_2), \mathbf{z} \rangle_{\mathcal{V}}| &\leq \\ &\leq C(\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathcal{V}} + \|\tilde{\mathbf{u}}(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}(t_2)\|_H + \|\tilde{\mathbf{T}}(t_1) - \tilde{\mathbf{T}}(t_2)\|_d) \|\mathbf{z}\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Deoarece $\mathbf{z} \in \mathcal{V}$ este arbitrar rezultă că

$$\begin{aligned} \|A(t_1, \mathbf{y}_1) - A(t_2, \mathbf{y}_2)\|_{\mathcal{V}} &\leq \\ &\leq C(\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathcal{V}} + \|\tilde{\mathbf{u}}(t_1) - \tilde{\mathbf{u}}(t_2)\|_H + \|\tilde{\mathbf{T}}(t_1) - \tilde{\mathbf{T}}(t_2)\|_d). \end{aligned} \quad (6.87)$$

Din ultima relație, dacă se folosesc inegalitățile deduse din condiția de continuitate a soluției elastice în raport cu datele (59), rezultă continuitatea operatorului A din $R_+ \times \mathcal{V}$ în \mathcal{V} . Dacă în relația (87) se consideră $t_1 = t_2 = t$ rezultă condiția

$$\|A(t, \mathbf{y}_1) - A(t, \mathbf{y}_2)\|_{\mathcal{V}} \leq C \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_{\mathcal{V}}. \quad (6.88)$$

Am prezentat problema *cu date inițiale și la limită pentru o reprezentare constitutivă* care este deseori utilizată în multe aplicații privind deformările în masivele de roci. Implementările numerice se bazează pe decuplajul soluției elastice de problema vâscoplastică, sau de problema fluajului.

6.3 Exerciții și probleme

1. Arătați că forma biliniară $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$ definită în (60) este un produs scalar pe \mathcal{V} și generează o *normă echivalentă* cu norma canonică pe spațiul produs cartezian, $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$.

2. În ipotezele (35) și (36) demonstrați că are loc estimarea din (86) pentru operatorul $A(t, \mathbf{y})$ definit în (62).

3. Demonstrați că soluțiile problemelor elastice și respectiv vâscoplastice sunt unice.

4. Fie o reprezentare constitutivă de tip rate unidimensională (modelul lui Sokolovski) :

$$\dot{\sigma} = \varphi(\sigma, \epsilon)\dot{\epsilon} + \psi(\sigma, \epsilon),$$

cu $\varphi(\sigma, \epsilon) = E$ – modulul de elasticitate al lui Young, iar

$$\psi(\sigma, \epsilon) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |\sigma| < \sigma_Y \\ (-\text{sign } \sigma)F(|\sigma - \sigma_Y|), & \text{dacă } |\sigma| \geq \sigma_Y, \end{cases}$$

în care $F(r) > 0$, $F'(r) > 0$ pentru $r > 0$ și $F(0) = 0$. Caz particular $F(r) = k E r$, în care E, k și σ_Y sunt constante de material pozitive.

a. Determinați curbele de relaxare.

b. Studiați fluajul și relaxarea descrise de acest model.

c. Modelul are timpi de relaxare finiți?

5. Fie un model de tip rate în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = -k(\mathbf{T} - f(\mathbf{E})),$$

cu $k > 0$ constantă de vâscozitate a materialului.

a. Analizați comportamentul materialului descris printr-un astfel de model, conform prezentării din Paragraful 6.1.

b. Fie dat un proces de deformare de forma

$$\mathbf{E}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \tau < 0 \\ x(\tau)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1), & \text{dacă } \tau \geq 0, \end{cases}$$

cu $\{\mathbf{i}_k\}_{k \in \{1,2,3\}}$ o bază carteziană fixată. Aici funcția x este de clasă $C^1([0, t_1])$ și $x(0) = 0$.

Caracterizați răspunsul materialului și comportamentul acestuia.

c. Care este diferența între cazul prezentat și cel în care

$$\mathcal{E}_0[\mathbf{A}] = \lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} \mathbf{I} + 2 \mu \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \operatorname{Sim},$$

cu $\lambda, \mu > 0$ constante de material ?

6. Fie aceeași problemă ca în exercițiul 5. dar pentru un model în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = -k h(g(\mathbf{T}))(\mathbf{T} - f(\mathbf{E})),$$

în care $g(\mathbf{T}) = \sqrt{1/2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}} - k_1$. Aici se consideră că k și k_1 sunt constante de material pozitive.

7. Fie un model de tip rate definit în (1), în care

$$\mathcal{E}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = \mathcal{E}_0, \quad \mathcal{G}(\mathbf{T}, \mathbf{E}) = \frac{1}{2\eta}(\mathbf{T} - P_K \mathbf{T}), \quad \text{unde } K = \{\mathbf{T} \mid \sqrt{1/2 \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'} \leq k\},$$

iar P_K reprezintă proiecția pe mulțimea K și $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I}$. Aici η, k sunt constante de material pozitive.

a. Arătați că mulțimea K este convexă și închisă.

b. Arătați că modelul este de tip vâscoplastic.

c. Studiați proprietățile de relaxare și fluaj ale materialului.

d. Determinați curbele de relaxare.

e. Modelul are timpi de relaxare finiți ?

f. Considerați un proces de deformare ca în exerciciul 5. b) și cercetați răspunsul materialului.

8. Fie un model cu deformări finite, în care \mathbf{T} reprezintă tensiunea Cauchy și \mathbf{D} tensorul vitezei de deformare, descris printr-o reprezentare constitutivă de tip Bingham

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2\eta}(\mathbf{T} - P_K \mathbf{T}), \quad \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0, \quad \text{iar } K = \{\mathbf{T} \mid \sqrt{1/2 \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'} \leq k\},$$

unde P_K reprezintă proiecția pe mulțimea K , iar $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I}$ este deviatorul tensorului \mathbf{T} . Aici η, k sunt constante de material pozitive.

a. Arătați că reprezentarea constitutivă este echivalentă cu

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2\eta} \left\langle 1 - \frac{k}{\sqrt{II_{\mathbf{T}'}}} \right\rangle \mathbf{T}', \quad \operatorname{tr} \mathbf{D} = 0,$$

în care $\langle z \rangle = \frac{1}{2}(z + |z|)$.

b. Demonstrați că reprezentarea constitutivă este obiectivă.

c. Demonstrați că reprezentarea constitutivă este inversabilă și determinați inversa acesteia.

d. Se consideră o experiență de forfecare simplă descrisă prin

$$\mathbf{F}(s) = \alpha(s)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) + \mathbf{I},$$

în care $s \geq 0 \rightarrow \alpha(s)$ este o funcție crescătoare de timp, cu $\alpha(0) = 0$. Determinați răspunsul materialului.

e. Materialul descrie proprietăți de relaxare ? Dar de fluaj ?

9. Se consideră o reprezentare constitutivă descrisă prin

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2G}(\overset{\circ}{\mathbf{T}})' + \frac{1}{2\eta} \langle 1 - \frac{k}{\sqrt{II_{T'}}} \rangle \mathbf{T}', \quad \text{tr } \mathbf{D} = 0,$$

în care $\langle z \rangle = \frac{1}{2}(z + |z|)$. Aici \mathbf{T} și \mathbf{D} reprezintă tensorii de tensiune Cauchy și respectiv tensorul viteză de deformare.

a. Arătați că $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$, unde $\mathbf{W} = \{\mathbf{L}\}^A$ – tensorul spin, reprezintă un câmp obiectiv.

b. Arătați că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității.

c. Fie o experiență de forfecare simplă în tensiuni dată prin

$$\mathbf{T}(s) = y(s)(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1)$$

în care $s \geq 0 \rightarrow y(s)$ este o funcție crescătoare de timp, cu $y(0) = 0$. Determinați răspunsul materialului.

d. Fie experiența de forfecare descrisă la punctul d. din exercițiul precedent. Studiați răspunsul materialului.

e. Materialul descrie proprietăți de relaxare ? Dar de fluaj ?

10. În cazul deformațiilor finite se consideră reprezentarea constitutivă de forma

$$2 \mu \mathbf{D} = \overset{\circ}{\mathbf{T}} + \lambda c(\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T})$$

a. Arătați că reprezentarea constitutivă este obiectivă. Aici câmpul $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ este definit ca în exercițiul 9. a., iar μ, λ, c sunt constante pozitive de material.

b. În ipoteza că are loc o mișcare vâscometrică care este starea de tensiune rezultată în material ?

c. Fie $c = 0$ și materialul supus la o deformație de forfecare descrisă în exercițiul 8. d. Determinați starea de tensiune rezultată, dacă la momentul $t = 0$ tensiunea este nulă.

d. Dacă starea de deformare este de forma $\mathbf{F}(s) = \mathbf{I}$ pentru $s < 0$ și $\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_0$ pentru $s \geq 0$, cercetați dacă materialul prezintă proprietăți de relaxare.

11. În cazul deformațiilor finite se consideră o reprezentare constitutivă de tip rate de forma

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{E}(\mathbf{F}, \mathbf{T})[\dot{\mathbf{F}}],$$

cu $\mathcal{E} : Lin \rightarrow Lin$ liniară.

a. Arătați că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității dacă și numai dacă aceasta este de forma

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{\mathbf{R}}) = \mathcal{E}(\mathbf{U}, \mathbf{T}^{\mathbf{R}})[\dot{\mathbf{U}}],$$

unde $\mathbf{T}^{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{R}$ este tensorul rotit cu $\mathbf{R} \in Ort$, iar $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$ reprezintă descompunerea polară a gradientului de deformare.

b. Arătați că

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T}^{\mathbf{R}}) = \mathbf{R}^T \frac{D}{Dt}(\mathbf{T}) \mathbf{R},$$

unde $\frac{D}{Dt}(\mathbf{T}) \equiv \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \Omega - \Omega \mathbf{T}$ în care $\Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \in Asim$.

c. Arătați că $\frac{D}{Dt}(\mathbf{T})$ este un câmp tensorial obiectiv, dacă \mathbf{T} este tensorul de tensiune al lui Cauchy.

12. Fie $\Pi = |\det \mathbf{F}| \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T}$ tensorul de tensiune Piola-Kirchhoff simetric.

a. Arătați că o reprezentare constitutivă de forma $\Pi = h(\mathbf{E})$ cu $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ descrie un corp elastic, cu deformații finite. Demonstrați că reprezentarea constitutivă satisface principiul obiectivității.

b. Fie o ecuația constitutivă de tip rate $\dot{\Pi} = \mathcal{A}(\Pi, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}]$. Demonstrați că principiul obiectivității este satisfăcut.

13. Se consideră o ecuație constitutivă de tip rate pentru cazul deformațiilor finite, în raport cu configurația de referință scrisă sub forma

$$\dot{\Pi} = \mathcal{E}(\Pi, \mathbf{E})[\dot{\mathbf{E}}] + \mathcal{G}(\Pi, \mathbf{E}).$$

a. Determinați forma acestei reprezentări, în configurația actuală punând în evidență tensiunea Cauchy. Arătați că viteza de variație $\dot{\Pi}$ se înlocuiește cu câmpul

$$\check{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F})[\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L} \mathbf{T} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T] + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v}, \text{ iar } \dot{\mathbf{E}} \text{ cu } \mathbf{D}.$$

b. Arătați că reprezentarea de tip rate satisface principiul obiectivității.

c. Pentru starea de deformare reprezentată la d. ex. 8 determinați variația tensiunii Piola-Kirchhoff și a tensiunii Cauchy.

14. Fie o reprezentare constitutivă de forma

$$\dot{\mathbf{T}} = \bar{\mathcal{E}}(\mathbf{T}, \mathbf{c})[\mathbf{D}] + \bar{\mathcal{G}}(\mathbf{T}, \mathbf{c}),$$

cu $\bar{\mathcal{E}}(\mathbf{T}, \mathbf{c}) : Sim \rightarrow Sim$ liniară.

a. Determinați restricțiile impuse de principiul obiectivității asupra funcțiilor constitutive.

b. Dacă se consideră procesul de deformare din ex. 8 d. determinați starea de tensiune corespunzătoare.

c. Aceeași problemă pentru câmpul de deformare corespunzător unei forfecări simple.

15. Se consideră o ecuație constitutivă de corp elastic $\mathbf{T} = f(\mathbf{F})$ și ecuația de tip rate asociată $\dot{\mathbf{T}} = \partial_{\mathbf{F}} f(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}]$.

a. Determinați restricțiile impuse de principiul obiectivității asupra reprezentării constitutive.

b. În ce condiții o reprezentare de tip rate $\dot{\mathbf{T}} = \mathcal{A}(\mathbf{F})[\dot{\mathbf{F}}]$, cu $\mathcal{E}(\mathbf{F}) : Sim \rightarrow Sim$ liniară admite un răspuns instantaneu elastic echivalent cu o ecuație constitutivă de tip elastic.

În acest exercițiu \mathbf{T} reprezintă tensorul de tensiune al lui Cauchy.

A. ANEXE

A1. Algebră și analiză tensorială

Noțiuni și expuneri complete de algebră și analiză tensorială sunt prezentate în lucrările următoare Eringen [1967], Malvern [1969], Iacob [1971], Dragoș [1976], Beju, Sóos, Teodorescu [1976], [1977], [1983], Gurtin [1981].

Vom reaminti doar câteva definiții și proprietăți ce sunt utilizate adesea în cuprinsul cărții. Se utilizează următoarele *notații*

\mathcal{E} – spațiul euclidian punctual (afin) tridimensional, cu
 \mathcal{V} – spațiul vectorial al translațiilor lui \mathcal{E} (vectori liberi),
 \mathbb{C} – corpul numerelor complexe
 \mathbb{R} – corpul numerelor reale, \mathbb{R}_+ – mulțimea numerelor reale pozitive,
 \mathbb{N} – mulțimea numerelor naturale,
 $Lin \equiv Lin(\mathcal{V}, \mathcal{V}) \equiv \{\mathbf{T} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \mid \text{liniară}\};$
 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ – vectori;
 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ – notație pentru produsul scalar a doi vectori;
 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ – notație pentru produsul vectorial a doi vectori;
 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ – notație pentru produsul mixt a trei vectori;
 $x, y \in \mathcal{E}$ – puncte în spațiul euclidian;
 $x - y = \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ – vectorul cu originea în y și extremitatea în x ;
 $x - O = \mathbf{x}$ – vectorul de poziție al punctului $x \in \mathcal{V}$, $O \in \mathcal{E}$ – fixat
 $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Lin$, se numesc *tensori* (tensori de ordinul doi)

Definiția 1. Fie $\mathbf{T} \in Lin$. Se numește transpusul lui \mathbf{T} elementul din Lin , notat cu \mathbf{T}^T definit prin

$$\mathbf{T}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.1})$$

Bază carteziană este $\{\mathbf{i}_j\}_{j \in \{\overline{1,3}\}}$ - bază ortonormată fixată, deci cu $\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k = \delta_{jk}$ – simbolurile lui Kronecher.

Bază reciprocă bazei $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$ în \mathcal{V} este o *bază* notată $\{\mathbf{e}^k\}_{k \in \{\overline{1,3}\}}$ cu proprietatea

$$(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = \delta_j^i, \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\}. \quad (\text{A.2})$$

Propoziția 1. Dacă $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$ în \mathcal{V} este o bază *ortonormată* atunci baza reciprocă coincide cu baza dată.

Tensorul metric, corespunzător bazei $\{\mathbf{e}\}_{j \in \{\overline{1,3}\}}$ este caracterizat prin matricea

$$[g_{ij}]_{(i,j)}, \quad \text{cu } g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\}. \quad (\text{A.3})$$

Propoziția 2. i) Există matricea inversă a tensorului metric notată

$$[g^{ij}]_{(i,j)} \text{ pentru } i, j \in \{\overline{1,3}\} \quad \text{cu proprietatea } g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j. \quad (\text{A.4})$$

ii) Relațiile de legătură între cele două baze sunt date prin

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^i &= g^{ij} \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \text{ pentru } i, j \in \{\overline{1,3}\}, \\ g &\equiv \det([g_{ij}]_{(i,j)}) = (\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3))^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Bazele fizice asociate bazelor date sunt definite prin¹

$$\mathbf{e}_{\langle i \rangle} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}(!)}, \quad \text{și } \mathbf{e}^{\langle i \rangle} = \frac{\mathbf{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}(!)}, \quad (\text{A.6})$$

pentru $i, j \in \{\overline{1,3}\}$.

Produsul tensorial a doi vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}$ se definește ca o aplicație liniară

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V} \quad \text{prin} \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{v} &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Produsul dublul tensorial a trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathcal{V}$ se definește ca un tensor de ordinul trei, deci ca o aplicație liniară

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} : \mathcal{V} &\longrightarrow \text{Lin} \quad \text{prin} \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c})\mathbf{v} &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Teorema de reprezentare a vectorilor

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} &\implies \exists(!)\{v^i\} \{v_i\}, \quad \text{astel încât} \\ \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i, \quad \text{cu } v^i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}, \\ \mathbf{v} &= v_i \mathbf{e}^i, \quad \text{cu } v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}. \end{aligned}$$

¹Nu se face nici o sumare după indicii care se repetă în relațiile urmate de (!).

Teorema de reprezentare a tensorilor de ordinul 2

$$\forall \mathbf{T} \in Lin \quad \implies \quad \exists (!) \{T^{ij}\} \quad \{T_{ij}\}, \quad \{T_j^i\}; \quad \{T_i^j\} \quad \text{astel încât}$$

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{cu} \quad T^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}^j \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\},$$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad \text{cu} \quad T_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\}, \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{T} = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad \text{cu} \quad T^i_j = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_j \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\},$$

$$\mathbf{T} = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad \text{cu} \quad T_i^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}^j \quad \forall i, j \in \{\overline{1,3}\}.$$

Definiția 2. Componentele tensorului \mathbf{T} se numesc $\{T^{ij}\}$ - componente *contravariante* ; $\{T_{ij}\}$ - componente *covariante* ; $\{T^i_j\}$; $\{T_i^j\}$ - componente *mixte*.

Teorema de reprezentare a tensorilor de ordinul 3

$\forall \mathbf{N} \in Lin(\mathcal{V}, Lin) \implies \exists (!) \{N^{ijk}\}, \{N_{ijk}\}, \{N^{ij}_k\}, \{N_i^{jk}\}, \text{etc.},$
astel încât

$$\mathbf{N} = N^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N} \mathbf{e}^k = N^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i, j, k \in \{\overline{1,3}\},$$

$$\mathbf{N} = N_{ijk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N} \mathbf{e}_k = N_{ijk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \quad \forall i, j, k \in \{\overline{1,3}\},$$

$$\mathbf{N} = N^{ij}_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N} \mathbf{e}_k = N^{ij}_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i, j, k \in \{\overline{1,3}\},$$

$$\mathbf{N} = N_i^{jk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \quad \text{cu} \quad \mathbf{N} \mathbf{e}^k = N_i^{jk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall i, j, k \in \{\overline{1,3}\}.$$

(A.10)

și așa mai departe.

Vom reprezenta acum vectorii și tensorii în baze fizice asociate² Exemplificăm aceste tipuri de reprezentare în următoarea

Teorema de reprezentare în baze fizice

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v^{<i>} \mathbf{e}_{<i>}, \quad \text{cu} \quad v^{<i>} = v^i \sqrt{g_{ii}} (!)$$

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i = v_{<i>} \mathbf{e}^i, \quad \text{cu} \quad v_{<i>} = v_i \sqrt{g^{ii}} (!) \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T_{<ij>} \mathbf{e}^{<i>} \otimes \mathbf{e}^{<j>} \quad \text{cu} \quad T_{<ij>} = T_{ij} \sqrt{g^{ii}} \sqrt{g^{jj}} (!)$$

pentru orice $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ și pentru orice $i, j \in \{\overline{1,3}\}$.

Urma este aplicația liniară $\text{tr} : Lin \rightarrow R$ definită prin

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.12})$$

²Numai prin trecere la bazele fizice se obține aceeași dimensiune fizică pentru componente

Această definiție, împreună cu formulele de reprezentare ale unui tensor conduc la concluzia că pentru orice $\mathbf{T} \in Lin$ urma sa este dată de

$$tr\mathbf{T} = T^i{}_i = T_i{}^i = g_{ji}T^{ij} = T_{ij}g^{ji}. \quad (\text{A.13})$$

Produsul scalar a doi tensori se definește ca fiind aplicația biliniară $\cdot : Lin \times Lin \longrightarrow R$ dată prin

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = tr(\mathbf{T}\mathbf{U}^T). \quad (\text{A.14})$$

Propoziția 3. Aplicația anterioară definește un produs scalar pe Lin .

Mulțimea transformărilor ortogonale

$$\begin{aligned} Ort &\equiv \{\mathbf{Q} \in Lin \mid \mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \text{ pentru orice } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}, \\ &\iff \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = I, \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Introducem următoarele mulțimi :

Mulțimea transformărilor simetrice

$$Sim \equiv \{\mathbf{S} \in Lin \mid \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\}.$$

Mulțimea transformărilor antisimetrice

$$Asim \equiv \{\mathbf{A} \in Lin \mid \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T\}.$$

Mulțimea transformărilor inversabile

$$Involin \equiv \{\mathbf{T} \in Lin \mid \det \mathbf{T} \neq 0\}.$$

Mulțimea transformărilor unimodulare

$$Unim \equiv \{\mathbf{T} \in Lin \mid |\det \mathbf{T}| = 1\}.$$

Mulțimea transformărilor pozitiv definite

$$Psim \equiv \{\mathbf{S} \in Sim \mid \mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ și } \mathbf{S}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Propoziția 4.

$$i) \forall \mathbf{A} \in Lin \text{ atunci există și sunt unici } \mathbf{A}^S \in Sim, \mathbf{A}^A \in Asim$$

astfel încât $\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A$.

ii) Au loc formulele $\mathbf{A}^S = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$, și $\mathbf{A}^A = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$, numite partea simetrică și respectiv partea antisimetrică a tensorului \mathbf{A} .

Propoziția 5.

- i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC} = \mathbf{AC}^T \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \text{Lin};$
- ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{C} \in \text{Sim} \quad \implies \quad \mathbf{A} \in \text{Asim};$
- iii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{B} \in \text{Asim} \quad \implies \quad \mathbf{A} \in \text{Sim};$
- iv) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ dacă $\mathbf{A} \in \text{Sim}$ și $\mathbf{B} \in \text{Asim}$

Definiția 3. Pentru orice $\mathbf{T} \in \text{Lin}, \lambda \in \mathbb{R}$ se numește *valoare proprie* dacă există $\mathbf{e} \in \mathcal{V}, \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, numit *vector propriu*, așa încât

$$\mathbf{T}\mathbf{e} = \lambda \mathbf{e}. \quad (\text{A.16})$$

Teorema de descompunere spectrală.

i) Dacă $\mathbf{T} \in \text{Sim}$ atunci există $\lambda_j \in \mathbb{R}$, *valori proprii* și $\mathbf{e}_j \in \mathcal{V}$ *vectori proprii ortonormați* cu $j \in \{\overline{1,3}\}$ astfel încât

$$\mathbf{T} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.17})$$

ii) În plus, dacă $\mathbf{T} \in \text{Psim}$, atunci oricare ar fi $j \in \{\overline{1,3}\};, \lambda_j > 0$ (λ_j valoare proprie a lui \mathbf{T}).

iii) $\forall \mathbf{T} \in \text{Psim}$ există un unic $\mathbf{T}_1 \in \text{Psim}$ astfel încât $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1^2$, deci

$$\mathbf{T}_1 = \sum_{j=1}^3 \sqrt{\lambda_j} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.18})$$

Propoziția 6. i) λ este valoare proprie pentru $\mathbf{T} \in \text{Lin}$ dacă și numai dacă

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \iff -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda + I_3 = 0, \quad (\text{A.19})$$

numită *ecuația caracteristică* (sau *seculară*).

Scalarii $I_j, j = \overline{1,3}$ se numesc *invarianții tensorului \mathbf{T}* și sunt dați de

$$I_1 = \text{tr} \mathbf{T}, \quad I_2 = 1/2[\text{tr}(\mathbf{T}^2) - (\text{tr} \mathbf{T})^2], \quad I_3 = \det \mathbf{T}. \quad (\text{A.20})$$

ii) Dacă se consideră setul de invarianți

$$j_{\mathbf{T}} = (\text{tr} \mathbf{T}, \text{tr} \mathbf{T}^2, \text{tr} \mathbf{T}^3), \quad (\text{A.21})$$

au loc relațiile de echivalență

$$\text{tr} \mathbf{T} = I_1, \quad \text{tr}(\mathbf{T}^2) = 2I_2 + (I_1)^2, \quad \text{tr} \mathbf{T}^3 = I_1 \text{tr} \mathbf{T}^2 + I_2 \text{tr} \mathbf{T} + 3I_3 \mathbf{I}. \quad (\text{A.22})$$

iii) \mathbf{T} satisface ecuația caracteristică

$$-\mathbf{T}^3 + \mathbf{I}_1 \mathbf{T}^2 + \mathbf{I}_2 \mathbf{T} + \mathbf{I}_3 \mathbf{I} + \mathbf{0},$$

cunoscută sub numele de teorema Hamilton - Cayley.

În această parte vom reaminti o serie de proprietăți și definiții de analiză vectorială și tensorială folosite pe parcursul lucrării.

Definiția 4. $\mathbf{M} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$, este liniară dacă și numai dacă $\mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Lin}, \text{Lin})$. O astfel de aplicație se numește tensor de ordinul patru.

Propoziția 7. Fie $\mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Lin}, \text{Lin})$. Atunci

i) Există $M_{ijkl} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\mathbf{M}[\mathbf{A}] = M_{ijkl} A_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (\text{A.23})$$

pentru orice $\mathbf{A} \in \text{Lin}$,

ii) $\forall \mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Lin}, \text{Lin})$ $\|\tilde{\mathbf{M}}\|_{(4)} = \left(\sum_{j,k,l,m=1}^3 (\tilde{M}_{jklm})^2 \right)^{1/2}$ definește o normă în spațiul tensorilor de ordinul 4. În plus, are loc inegalitatea

$$|\mathbf{M}[\mathbf{A}]| \leq \|\tilde{\mathbf{M}}\|_{(4)} |\mathbf{M}| \quad \forall \mathbf{A} \in \text{Lin};$$

iii) $\mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ dacă și numai dacă

$$M_{jklm} = M_{kjlm} = M_{jkm l} \quad \forall j, k, l, m \in \{\overline{1,3}\}.$$

Definiția 5. $\mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Lin}, \text{Lin})$ se numește *simetrică și pozitiv definită* dacă și numai dacă $\mathbf{M} \in \text{Lin}(\text{Sim}, \text{Sim})$ și

$$i) \quad \mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}[\mathbf{B}] \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Sim}$$

$$ii) \quad \mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot [\mathbf{A}] \geq 0 \quad \text{și} \quad \mathbf{M}[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{A} = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Definiția 6. Fie \mathcal{X}, \mathcal{Y} – două spații Banach și fie $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$ o mulțime deschisă, nevidă și conexă.

Aplicația $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y}$ se numește **diferențiabilă** în $X \in \mathcal{D}$ dacă există aplicația $Df(X) \in \text{Lin}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ și $\omega(X, \cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{Y}$, continue, așa încât

$$f(Y) = f(X) + Df(X)[\mathbf{v}] + \omega(X, Y), \quad \mathbf{v} = Y - X \in \mathcal{X} \quad \forall Y \in \mathcal{D} \quad \text{și}$$

$$\lim_{Y \rightarrow X} \frac{\omega(X, Y)}{|\mathbf{v}|} = 0. \quad (\text{A.24})$$

În cele ce urmează vom preciza această definiție pentru cazurile în care funcția ia valori reale, vectoriale și respectiv, tensoriale. Astfel, împreună cu proprietățile ce rezultă de aici, aceste formule vor fi utilizate în lucrare.

Definiția 7. Fie $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow R$ un câmp scalar diferențiabil în $X \in \mathcal{D}$, atunci $\exists D\varphi(X) : \mathcal{V} \rightarrow R$, liniară și continuă astfel încât,

$$\varphi(Y) = \varphi(X) + D\varphi(X)[\mathbf{v}] + \omega(X, Y), \quad \mathbf{v} = Y - X \in \mathcal{V} \quad \forall Y \in \mathcal{D} \quad \text{și} \quad (\text{A.25})$$

$$\lim_{Y \rightarrow X} \frac{\omega(X, Y)}{|\mathbf{v}|} = 0.$$

Ca urmare a teoremei lui Riesz, de reprezentare a funcționalelor liniare și continue pe spații Hilbert $\exists \nabla\varphi(X) \in \mathcal{V}$ așa încât

$$D\varphi(X)[\mathbf{v}] \equiv \nabla\varphi(X) \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (\text{A.26})$$

și $\nabla\varphi(X) \in \text{Lin}$ se numește *gradientul* lui φ .

Fie $(0, (\mathbf{i}_j)_{j \in \{\overline{1,3}\}})$ cu $0 \in \mathcal{E}$, un reper cartezian, atunci

$$\nabla\varphi(X) \cdot \mathbf{i}_j = \frac{\partial\varphi}{\partial X_j} \iff \nabla\varphi(X) = \frac{\partial\varphi}{\partial X_k} \mathbf{i}_k. \quad (\text{A.27})$$

Propoziția 8. i) Dacă $\mathbf{w} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ este diferențiabil în $X \in \mathcal{D}$, atunci există $D\mathbf{w}(X) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$, care, cu notația $\nabla\mathbf{w}(X) = D\mathbf{w}(X)$, este un tensor de ordinul 2. Într-o bază carteziană acesta se reprezintă prin

$$\begin{aligned} \nabla\mathbf{w}(X)[\mathbf{i}_j] &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{w}(X + s\mathbf{i}_j) - \mathbf{w}(X)}{s} = \frac{\partial\mathbf{w}}{\partial X_j} \\ &\iff \nabla\mathbf{w}(X) = \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j; \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

ii) Dacă $\mathbf{T} : \mathcal{D} \rightarrow \text{Lin}$ este un câmp tensorial diferențiabil în $X \in \mathcal{D}$ atunci $D\mathbf{T}(X) \equiv \nabla\mathbf{T}(X) \in \text{Lin}(\mathcal{V}, \text{Lin}(\mathcal{V}, \mathcal{V}))$ este un tensor de ordinul trei, care se reprezintă, într-o bază carteziană, prin

$$\nabla\mathbf{T}(\mathbf{X}) = T_{ij,k} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_k, \quad \text{cu} \quad T_{ij,k} \equiv \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_k}. \quad (\text{A.29})$$

Fie un reper cartezian $(0, (\mathbf{i}_k)_{k \in \{\overline{1,3}\}})$. Notăm $\mathbf{X} = X - 0 \equiv X^k \mathbf{i}_k$ vectorul de poziție al punctului $X \in \mathcal{E}$ în reperul dat.

Definiția 8. Fie transformarea $\{X^i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}} \in D \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \{q^i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}} \in \Delta \subset \mathbf{R}^3$ bijectivă, nesingulară, de clasă C^2 . $\{q^i\}_{i \in \{\overline{1,3}\}}$ se numesc coordonate curbilini asociate punctului \mathbf{X} .

Definim baza locală în \mathbf{X} prin tripletul de vectori

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial q^i} \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}. \quad (\text{A.30})$$

Teorema 1. Tripletul de vectori definit în (3f) are proprietățile

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \equiv \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = \sqrt{g} \quad \text{unde} \quad \sqrt{g} = \det \left(\frac{\partial X^j}{\partial q^k} \right)_{jk} \neq 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = \Gamma_{ik}^s \mathbf{e}_s \quad \text{cu} \quad \Gamma_{ik}^s = \mathbf{e}^s \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q^k} = -\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}^s}{\partial q^k} = g^{sp} \Gamma_{ik,p}, \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma_{ik,p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pi}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{pk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^p} \right).$$

Teorema 2. Vectorul gradient al unui câmp scalar, tensorul gradient pentru câmpuri vectoriale și gradientul câmpurilor tensoriale, în baze locale se calculează prin formulele

$$\nabla \varphi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i}(\mathbf{X}), \quad \nabla \mathbf{w}(\mathbf{X})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial q^i}(\mathbf{X}), \quad \nabla \mathbf{T}(\mathbf{X})[\mathbf{e}_i] = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q^i}(\mathbf{X}). \quad (\text{A.32})$$

Formulele rezultă din definiții, cu utilizarea formulelor de calcul pentru diferențialele aplicațiilor, în baze carteziene, ținând seama că $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{X}^k}{\partial q^i} \mathbf{i}_k, \forall i \in \{1, 3\}$.

Ca o consecință a formulelor date în Teorema 1. se deduc reprezentările

$$\nabla \varphi(\mathbf{X}) = \frac{\partial \varphi}{\partial q^i} \mathbf{e}^i,$$

$$\nabla \mathbf{w}(\mathbf{X}) = w^p{}_{;i} \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^i, \quad w^p{}_{;i} = w^p{}_{,i} + w^s \Gamma_{si}^p,$$

$$\nabla \mathbf{w}(\mathbf{X}) = w_{p;i} \mathbf{e}^p \otimes \mathbf{e}^i, \quad w_{p;i} = w_{p,i} - w_s \Gamma_{pi}^s,$$

$$\nabla \mathbf{T}(\mathbf{X}) = T^{ij}{}_{;k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k, \quad T^{ij}{}_{;k} = T^{ij}{}_{,k} + \Gamma_{sk}^j T^{is} + \Gamma_{rk}^i T^{jr},$$

(A.33)

cu notația $f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial q^k}$ pentru derivata parțială în raport cu q^k .

Mărimile $w^p{}_{;i}, w_{p;i}$, se numesc *derivate covariante* ale componentelor *contravariante*, respectiv *covariante* ale câmpului vectorial \mathbf{w} .

Mărimile $T^{ij}{}_{;k}$ se numesc *derivate covariante* ale componentelor *contravariante* ale câmpului tensorial \mathbf{T} .

Vom defini acum *divergența* câmpurilor vectoriale și respectiv a câmpurilor tensoriale.

Definiția 9. *Operatorul divergență*, notat prin div , este aplicația liniară definită pe mulțimea câmpurilor vectoriale, diferențiabile, care are valori reale și asociază fiecărui câmp vectorial $\mathbf{w} : \mathcal{D} \in \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}$ diferențiabil pe \mathcal{D} , funcția cu valori reale definită prin

$$\text{div } \mathbf{w}(X) = \text{tr} (\nabla \mathbf{w}(X)) = w^i{}_{;i}(X), \quad \forall X \in \mathcal{D}. \quad (\text{A.34})$$

Definiția 10. Divergența unui câmp tensorial $\mathbf{T} : \mathcal{D} \in \mathcal{E} \rightarrow \text{Lin}$, diferentiabil pe domeniul de definiție, este câmpul vectorial $\text{div } \mathbf{T} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}$ definit pentru $\forall X \in \mathcal{D}$ prin

$$\text{div } \mathbf{T}(X) \cdot \mathbf{a} = \text{tr } \nabla (\mathbf{T}^T(X)\mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.35})$$

Propoziția 9. Formula de calcul pentru divergența unui câmp tensorial este

$$\text{div } \mathbf{T}(X) = T^{p l}{}_{;l} \mathbf{e}_p. \quad (\text{A.36})$$

Demonstrația este o consecință a definiției *intrinseci*, adoptate pentru divergența unui câmp tensorial, dacă aplicăm formula de calcul (35) pentru divergența unui câmp vectorial

$$\text{div } \mathbf{T}(X) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{T}^T(X)\mathbf{a})^l{}_{;l} = (T^{p l} a_p)_{;l} = (T^{p l}{}_{;l}) a_p, \quad (\text{A.37})$$

deoarece oricare ar fi $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

$$\frac{\mathbf{a}}{q^k} \equiv a^s{}_{;k} \mathbf{e}_k = 0. \quad (\text{A.38})$$

Folosind definiția produsului scalar deducem din (37) că $(\text{div } \mathbf{T}(X))^p = T^{p l}{}_{;l}$. Deci avem expresia componentei contravariante a câmpului vectorial care definește divergența câmpului tensorial într-un punct fixat.

Propoziția 10. Într-un reper cartezian au loc formulele

$$\text{div } \mathbf{w}(X) = \frac{\partial w^i}{\partial X^i} \in R, \quad \text{div } \mathbf{T}(X) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^j} \mathbf{i}_i \in \mathcal{V}. \quad (\text{A.39})$$

Formulele (39) se deduc direct din definiție sau din formulele generale dacă ținem seama că vectorii bazei sunt ficși și deci $\Gamma_{kp}^s = 0$, pentru orice valori ale indicilor (vezi (31)₂).

În formulele de calcul este util să folosim

Propoziția 11. Cu utilizarea *componentelor contravariante* pentru câmpurile vectoriale și tensoriale rezultă următoarele expresii pentru câmpurile divergență

$$\text{div } \mathbf{w}(X) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} w^i)}{\partial q^i} \in R, \quad (\text{div } \mathbf{T}(X))^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g} T^{km})}{\partial q^m} + \Gamma_{pm}^k T^{p m} \quad (\text{A.40})$$

Demonstrația este o consecință directă a formulelor (35), (37) cu (34) în care se utilizează relația

$$\sum_{l=1}^3 \Gamma_{sl}^l = \frac{\partial(\ln \sqrt{g})}{\partial q^s} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial q^s}. \quad (\text{A.41})$$

Incheiem prezentarea acestei părți cu observația că, în mecanică se folosesc *componentele fizice ale vectorilor și tensorilor*, din necesitatea de a avea aceeași

mărime fizică pentru componentele unui același vector. Astfel se *pierde* caracterul tensorial, care apare în calculul diferențial.

Pentru a scrie în ecuațiile de mișcare expresia componentelor accelerației, componentelor tensorului de tensiune precum și ale măsurilor de deformare sau ale vitezelor de deformare (corespunzător tipului de reprezentare constitutivă utilizată în model) se *înlocuiesc* în formulele de calcul tensorial, anterior prezentate, componentele covariante, contravariante sau mixte cu *componentele fizice*, în conformitate cu procedeul pe care l-am amintit deja (vezi formulele(11)).

A2. Teoreme de reprezentare pentru funcții izotrope

Teorema lui Cauchy de reprezentare a funcțiilor izotrope cu valori scalare și tensori simetrici, definite pe mulțimea tensorilor simetrici este demonstrată în Truesdell [1972], Dragoș [1976]. Prezentăm aici o demonstrație a lui Gurtin [1981], bazată pe raționamente pur algebrice, elementare.

Definiția 1. Fie $\mathcal{G} \subset Ort$ și $\mathcal{A} \subset Lin$. Spunem că \mathcal{A} este *invariant în raport cu \mathcal{G}* dacă

$$QAQ \in \mathcal{A} \quad \forall Q \in \mathcal{G}, \quad A \in \mathcal{A}. \quad (A.42)$$

Următoarea propoziție se obține direct din definițiile corespunzătoare.

Propoziția 1. Următoarele grupuri sunt invariante în raport cu Ort : Lin , $Invlín$, Ort , Ort^+ , Sim , $Asim$, $Psim$.

Definiția 2. Funcția scalară $\varphi : \mathcal{A} \subset Lin \rightarrow R$ este *invariantă în raport cu $\mathcal{G} \subset Ort$* dacă \mathcal{A} este *invariant în raport cu \mathcal{G}* și

$$\varphi(A) = \varphi(QAQ) \quad \forall A \in \mathcal{A}, Q \in \mathcal{G}. \quad (A.43)$$

Definiția 3. Funcția tensorială $S : \mathcal{A} \subset Lin \rightarrow Sim$ este *invariantă în raport cu $\mathcal{G} \subset Ort$* , dacă \mathcal{A} este *invariantă în raport cu \mathcal{G}* și

$$QS(A)Q^T = S(QAQ^T) \quad \forall A \in \mathcal{A}, Q \in \mathcal{G}. \quad (A.44)$$

Definiția 4. O funcție scalară sau tensorială este *izotropă* dacă este *invariantă în raport cu Ort* .

Direct din definiții se demonstrează

Teorema 1. Fie $\mathcal{A} = Sim$. Următoarele funcții scalare definite pe \mathcal{A}

a) \det , tr sunt izotrope,

b) j_A este izotropă, unde j_A este o listă de invarianți pentru A , de exemplu $j_A = \{\text{tr } A, \text{tr } A^2, \text{tr } A^3\}$.

Considerăm $\mathcal{A} \subset Sim$ *invariant în raport cu Ort* .

Teorema de reprezentare pentru funcții scalare izotrope. O funcție $\varphi : \mathcal{A} \subset Sim \rightarrow R$ este izotropă dacă și numai dacă $\exists \tilde{\varphi} : j(\mathcal{A}) \rightarrow R$ astfel încât $\varphi(\mathbf{A}) = \tilde{\varphi}(j_{\mathbf{A}})$.

Aici s-a introdus notația $j(\mathcal{A}) = \{j_{\mathbf{A}} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{A}\}$.

Demonstrație. Presupunem că φ este izotropă. Vom demonstra că $\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{B})$ dacă $j_{\mathbf{A}} = j_{\mathbf{B}}$.

Fie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Sim$ cu $j_{\mathbf{A}} = j_{\mathbf{B}}$, atunci din teorema de reprezentare spectrală (vezi A1.) există bazele ortonormate $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{f}_i\}$, de vectori proprii astfel încât

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{f}_i. \quad (\text{A.45})$$

Rezultă că există $\mathbf{Q}_0 \in Ort$ astfel încât $\mathbf{Q}_0 \mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i, \quad \forall i \in \{\overline{1,3}\}$. Deci $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_0 \mathbf{B} \mathbf{Q}_0$. Din ipoteză rezultă că

$$\varphi(\mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{Q}_0 \mathbf{B} \mathbf{Q}_0^T) = \varphi(\mathbf{B}). \quad (\text{A.46})$$

Prin urmare am demonstrat că φ depinde de valorile proprii și nu depinde de bază.

Reciproca este imediată.

Lema 1. Fie $S : \mathcal{A} \subset Sim \rightarrow Sim$ izotropă. Atunci fiecare vector propriu al lui $\mathbf{A} \in \mathcal{A} \subset Sim$ va fi vector propriu al lui $S(\mathbf{A})$.

Demonstrație. Fie \mathbf{e} vector propriu al lui \mathbf{A} . Fie $\mathbf{f} \in \mathcal{V}$ astfel încât $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 0$. Atunci $\mathbf{f} \in (Spe)^{\perp}$. Are loc reprezentarea $\mathcal{V} = Spe \oplus (Spe)^{\perp}$. Construim baza ortonormată $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$.

Considerăm $\mathbf{Q}_1 \in Ort$ astfel încât $\mathbf{Q}_1 \mathbf{e} = -\mathbf{e}, \quad \mathbf{Q}_1 \mathbf{f} = \mathbf{f}$. Se verifică direct pe bază că are loc egalitatea $\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{A}$.

Din izotropia funcției S rezultă că

$$\mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A}) \mathbf{Q}_1^T = S(\mathbf{Q}_1 \mathbf{A} \mathbf{Q}_1^T) = S(\mathbf{A}). \quad (\text{A.47})$$

Folosim (47) și definiția transformării ortogonale \mathbf{Q}_1 pentru a calcula $S(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A}) \mathbf{Q}_1^T \mathbf{e} = -\mathbf{Q}_1 S(\mathbf{A}) \mathbf{e}$. Din egalitatea termenilor extremi a rezultat că

$$\mathbf{Q}_1 (S(\mathbf{A})\mathbf{e}) = -S(\mathbf{A})\mathbf{e} \implies S(\mathbf{A})\mathbf{e} \parallel \mathbf{e}. \quad (\text{A.48})$$

Din coliniaritatea vectorilor dedusă în (48) am obținut că $\exists \mu(\mathbf{A}, \mathbf{e}) \in R$ astfel încât $S(\mathbf{A})\mathbf{e} = \mu(\mathbf{A}, \mathbf{e}) \mathbf{e}$, ceea ce trebuia demonstrat.

Vom demonstra acum lema lui Wang

Lema 2. Fie $\mathbf{A} \in Sim$. Sunt posibile cazurile

$$a) \quad \mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{dacă} \quad \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1 \quad \text{atunci}$$

$\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ sunt liniari independenți și

$$Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\} \quad (\text{A.49})$$

$$b) \quad \mathbf{A} = \omega_1 \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \omega_2 (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \quad \text{dacă,} \quad \omega_1 \neq \omega_2 = \omega_3 \quad \text{atunci}$$

$\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\}$ liniari independenți și $Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\} = Sp\{\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}, \mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\}$

$$c) \quad \mathbf{A} = \omega \mathbf{I} \quad \text{dacă} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \quad \text{atunci} \quad Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\} = Sp\{\mathbf{I}\}$$

Demonstrație. a) Să aratăm că $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ sunt liniari independenți. Considerăm combinația $a\mathbf{I} + b\mathbf{A} + c\mathbf{A}^2 = 0$ care reprezentată în baza vectorilor proprii (ortonormată) ne conduce la sistemul liniar

$$\begin{aligned} a + b\omega_1 + c\omega_1^2 &= 0 \\ a + b\omega_2 + c\omega_2^2 &= 0 \\ a + b\omega_3 + c\omega_3^2 &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

în necunoscutele a, b, c . În cazul valorilor proprii distincte determinantul este nenul și găsim $a = b = c = 0$, ca unică soluție, deci liniar independența este demonstrată.

Notăm prin $\mathcal{N} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\}$ spațiu vectorial de dimensiune 3. Din teorema de reprezentare spectrală (A.17) pentru tensorul \mathbf{A} rezultă că $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 \in \mathcal{N}$. Deci $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ este o bază pentru \mathcal{N} . Ca o consecință imediată, rezultă egalitatea spațiilor.

b) Dacă \mathbf{A} are valorile proprii $\omega_2 = \omega_3$ atunci din (A.17) aratăm că $a\mathbf{I} + b\mathbf{A} = 0$ dacă și numai dacă $a = b = 0$. În baza vectorilor proprii avem sistemul liniar

$$a + b\omega_1 = 0, \quad a + b\omega_2 = 0,$$

cu determinant nenul. Deducem că $a = b = 0$. Deci $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}\}$ este un sistem liniar independent și în mod corespunzător deducem că formează o bază pentru $Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{I} - \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1\}$, de unde avem rezultatul.

c) este evidentă.

Teorema de reprezentare a funcțiilor izotrope cu valori tensori simetrici

Fie $S : \mathcal{A} \subset Sim \rightarrow Sim$. S este izotropă dacă și numai dacă

$$\begin{aligned} \exists \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 : j(\mathcal{A}) \rightarrow R \quad \text{astfel încât} \\ S(\mathbf{A}) = \varphi_0(j_{\mathbf{A}})\mathbf{I} + \varphi_1(j_{\mathbf{A}})\mathbf{A} + \varphi_2(j_{\mathbf{A}})\mathbf{A}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

în care setul de invarianți este definit de exemplu prin $j_{\mathbf{A}} = \{\text{tr } \mathbf{A}, \text{tr } \mathbf{A}^2, \text{tr } \mathbf{A}^3\}$.

Demonstrație. Vom considera separat cele trei cazuri posibile.

a) dacă $\omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3 \neq \omega_1$ atunci $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$ Folosim Lema 1. și

$$\text{deducem că } S(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 \beta_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

Folosim Lema 2. (a lui Wang) și deoarece $Sp\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\} = Sp\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\}$ rezultă că .

$$S(\mathbf{A}) = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \alpha_2 \mathbf{A}^2. \quad (\text{A.52})$$

A mai rămas de demonstrat că funcțiile scalare α_j depind numai de $j_{\mathbf{A}}$. Vom arăta că sunt funcții scalare izotrope. Rescriem ipoteza, împreună cu reprezentarea (52)

$$\mathbf{Q}S(\mathbf{A})\mathbf{Q}^T - S(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = 0 \iff (\alpha_0(\mathbf{A}) - \alpha_0(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)) \mathbf{I} + \quad (\text{A.53})$$

$$+ (\alpha_1(\mathbf{A}) - \alpha_1(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)) \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T + (\alpha_2(\mathbf{A}) - \alpha_2(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)) \mathbf{Q}\mathbf{A}^2\mathbf{Q}^T = 0.$$

Compunând cu \mathbf{Q}^T la stânga și cu \mathbf{Q} la dreapta obținem o combinație liniară egală cu zero, de unde în baza liniar independenței ansamblului de tensori $\{\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2\}$ deducem că, coeficienții scalari sunt nuli. Deci am demonstrat că rezultă

$$\alpha_j(\mathbf{A}) - \alpha_j(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = 0 \text{ pentru } j = 0, 1, 2.$$

Folosim și Teorema 1. din care rezultă reprezentarea (51).

Reciproca rezultă dintr-un calcul direct, folosind definițiile.

Teorema de reprezentare pentru funcții tensoriale liniare și izotrope

Fie $S : Sim \rightarrow Sim$ liniară. S este izotropă dacă și numai dacă $\exists \lambda, \mu, \in R$ astfel încât

$$S(\mathbf{A}) = \lambda (\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{A}. \quad (\text{A.54})$$

Demonstrație. Presupunem că S este izotropă.

Fie $\mathbf{e} \in \mathcal{V}$ și $\mathbf{A} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} \in Sim$. Deoarece suntem în cazul în care tensorul are două valori egale, utilizăm reprezentarea în cazul b), odată cu Lema 1. Rezultă că

$$S(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) = \beta \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} + \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \equiv \lambda(\mathbf{e}) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e}) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (\text{A.55})$$

Folosim ipoteza de izotropie și reprezentarea (55) de unde

$$\mathbf{Q}S(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{Q}^T - S(\mathbf{Q}\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\mathbf{Q}^T) = 0 \implies$$

$$(\lambda(\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{e})) \mathbf{I} + 2(\mu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{Q}\mathbf{e})) \mathbf{Q}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e})\mathbf{Q}^T = 0, \quad (\text{A.56})$$

$$(\lambda(\mathbf{e}) - \lambda(\mathbf{Q}\mathbf{e})) \mathbf{I} + 2(\mu(\mathbf{e}) - \mu(\mathbf{Q}\mathbf{e})) \mathbf{e} \otimes \mathbf{e} = 0.$$

Am compus la dreapta cu \mathbf{Q} și la stânga cu \mathbf{Q}^T , în $(56)_2$ și a rezultat $(56)_3$.

Din Lema 2. $\{\mathbf{I}, \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}\}$ sunt liniari independenți, din (56) deducem că cele două funcții scalare sunt izotrope în raport cu variabila vectorială, deoarece

$$\lambda(\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{Qe}), \quad \mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{Qe}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}. \quad (\text{A.57})$$

Arătăm că funcțiile nu depind de orientarea vectorilor, ci numai de mărimea lor. Pentru aceasta considerăm $\mathbf{f} \in \mathcal{V}$, cu $|\mathbf{f}| = |\mathbf{e}|$ și construim $\mathbf{Q} \in \text{Ort}$ astfel încât $\mathbf{Qe} = \mathbf{f}$. Din (57) deducem că

$$\lambda(\mathbf{e}) = \lambda(\mathbf{f}), \quad \mu(\mathbf{e}) = \mu(\mathbf{f}), \quad \text{pentru } \forall \mathbf{f}, \mathbf{e} \in \mathcal{V} \text{ cu } |\mathbf{f}| = |\mathbf{e}|. \quad (\text{A.58})$$

Fie acum $\mathbf{A} \in \text{Sim}$. Folosim reprezentarea spectrală a tensorului și liniaritatea aplicației S

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad \text{atunci} \quad (\text{A.59})$$

$$S(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 \omega_i S(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \omega_i \{\lambda(\mathbf{e}_i) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i\}.$$

Din (58) obținem că $\lambda(\mathbf{e}_1) = \lambda(\mathbf{e}_2) = \lambda(\mathbf{e}_3) = \lambda$, $\mu(\mathbf{e}_1) = \mu(\mathbf{e}_2) = \mu(\mathbf{e}_3) = \mu$. Revenind în relația (59) deducem că

$$S(\mathbf{A}) = \lambda \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{I} + 2\mu \sum_{i=1}^3 \omega_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = 2\mu \mathbf{A} + \lambda \text{tr } \mathbf{A} \mathbf{I}. \quad (\text{A.60})$$

A3. Ortogonalul este subgrup maximal în unimodular

În această anexă vom demonstra (Noll [1965]) maximalitatea grupului transformărilor ortogonale în grupul transformărilor unimodulare.

Fie \mathcal{V} un spațiu vectorial n -dimensional.

$$\text{Unim} = \{\mathbf{H} \in \text{Lin} \mid |\det \mathbf{H}| = 1\} \quad \text{Ort} = \{\mathbf{Q} \in \text{Lin} \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}\}.$$

Teorema 1. *Ort este subgrup maximal în Unim.*

Afirmația este echivalentă cu

$$\begin{aligned} \forall g \text{ subgrup } \subset \text{Unim} \text{ si } \text{Ort} \subset g \subset \text{Unim} \\ \implies g = \text{Ort}, \quad \text{sau } g = \text{Unim}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Lema 1. Fie $\mathbf{S} \in \text{Unim} \cap \text{Psim}$ și \mathbf{S} are cel puțin două valori proprii distincte s și t cu $s > t > 0$. Atunci $\forall \xi$ astfel încât $(\frac{t}{s})^2 \leq \xi \leq (\frac{s}{t})^2$ $\exists \mathbf{R} \in \text{Ort}$ astfel încât tensorul

$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{S}^2\mathbf{R}^T\mathbf{S}^{-1}$ să aibe valorile proprii $\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1$.

Demonstrație. Fie \mathbf{g}, \mathbf{f} vectorii proprii unitari ai lui \mathbf{S} care corespund valorilor proprii alese s și respectiv t . Considerăm $\mathcal{W} = (Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\})^\perp$ – subspațiul vectorial, de dimensiune $n - 2$, ortogonal pe spațiul generat de \mathbf{g}, \mathbf{f} . Deci

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \oplus Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\} \iff$$

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \exists \mathbf{w} \in \mathcal{W}, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ unice, astfel încât} \quad (\text{A.62})$$

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{g} + \alpha_2\mathbf{f} + \mathbf{w}.$$

Să observăm că $\mathbf{S}\mathcal{W} = \mathcal{W}$. Definim $\mathbf{R}_\theta \in Ort$, astfel încât

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\theta\mathbf{w} &= \mathbf{w}, \\ \mathbf{R}_\theta\mathbf{g} &= \cos\theta\mathbf{g} + \sin\theta\mathbf{f}, \\ \mathbf{R}_\theta\mathbf{f} &= -\sin\theta\mathbf{g} + \cos\theta\mathbf{f}, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

reprezentînd o rotație de unghi θ în planul determinat de \mathbf{g}, \mathbf{f} .

Definim și transformarea

$$\mathbf{T}_\theta = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{R}_\theta\mathbf{S}^2\mathbf{R}_\theta^T\mathbf{S}^{-1} \in Psim \cap Unim, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi), \quad (\text{A.64})$$

care are proprietățile

$$1) \quad \mathbf{T}_\theta(\mathbf{w}) = \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W},$$

$$2) \quad \mathbf{T}_\theta(\mathbf{g}) = \left(\cos^2\theta + \frac{t^2}{s^2}\sin^2\theta\right)\mathbf{g} + \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t} - \frac{t}{s}\right)\sin 2\theta\mathbf{f}, \quad (\text{A.65})$$

$$\mathbf{T}_\theta(\mathbf{f}) = \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t} - \frac{t}{s}\right)\sin 2\theta\mathbf{g} + \left(\cos^2\theta + \frac{s^2}{t^2}\sin^2\theta\right)\mathbf{f},$$

obținute dintr-un calcul direct.

Din (65) deducem că valorile proprii ale transformării simetrice \mathbf{T}_θ sunt $\lambda_1 = \Lambda_1(\theta, s, t)$, $\lambda_2 = \Lambda_2(\theta, s, t)$ și $\lambda_3 = 1$, care are ordinul $n - 2$ de multiplicitate. Deoarece \mathbf{T}_θ este în $Unim$ rezultă că $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

λ_1, λ_2 sunt valorile proprii care se determină din ecuația

$$\det([\mathbf{T}_\theta]_{\mathbf{g}, \mathbf{f}} - \lambda) = 0, \quad (\text{A.66})$$

unde matricea de reprezentare a transformării \mathbf{T}_θ , proiectată pe $Sp\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\}$ se reprezintă pe baza $\{\mathbf{g}, \mathbf{f}\}$ prin

$$[\mathbf{T}_\theta]_{\mathbf{g}, \mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta + \frac{t^2}{s^2}\sin^2\theta & \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t} - \frac{t}{s}\right)\sin 2\theta \\ \frac{1}{2}\left(\frac{s}{t} - \frac{t}{s}\right)\sin 2\theta & \cos^2\theta + \frac{s^2}{t^2}\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

pentru $\forall \theta \in [0, 2\pi)$.

Pentru valorile s, t fixate rezultă că aplicațiile

$$\theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_1(s, t, \theta) \in R \quad \text{și} \quad \theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_2(s, t, \theta) \in R, \quad (\text{A.67})$$

sunt continue.

De pe altă parte din $(65)_2$ deducem că pentru

$$\begin{aligned} \theta = \frac{\pi}{2} &\implies \mathbf{T}_{\pi/2}(\mathbf{g}) = \frac{t^2}{s^2}\mathbf{g}, \quad \mathbf{T}_{\pi/2}(\mathbf{f}) = \frac{s^2}{t^2}\mathbf{f}, \\ \theta = 0 &\implies \mathbf{T}_0(\mathbf{g}) = \mathbf{g}, \quad \mathbf{T}_0(\mathbf{f}) = \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

Aplicăm proprietatea lui Darboux pentru funcțiile continue

$$\theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_1(s, t, \theta) \in R \quad \text{și} \quad \theta \in [0, 2\pi) \longrightarrow \Lambda_2(s, t, \theta) \in R.$$

$$\text{Deoarece } \Lambda_1(s, t, 0) = 1, \quad \Lambda_1(s, t, \frac{\pi}{2}) = \frac{t^2}{s^2} < 1, \quad \text{rezultă că} \quad (\text{A.69})$$

$$\forall \xi \in [\frac{t^2}{s^2}, 1] \quad \exists \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât } \Lambda_1(s, t, \theta_\xi) = \xi$$

$$\text{și } \Lambda_2(s, t, \theta_\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

$$\text{In mod analog, cum } \Lambda_2(s, t, 0) = 1, \quad \Lambda_2(s, t, \frac{\pi}{2}) = \frac{s^2}{t^2} > 1, \quad \text{rezultă că}$$

$$\forall \xi \in [1, \frac{s^2}{t^2}] \quad \exists \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât } \Lambda_2(s, t, \theta_\xi) = \xi \quad (\text{A.70})$$

$$\text{și } \Lambda_1(s, t, \theta_\xi) = \frac{1}{\xi}.$$

In concluzie, pe baza proprietăților afirmate în (69) și (70) deducem că

$$\forall \xi \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}] \quad \exists \theta_\xi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \text{astfel încât} \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{T}_{\theta_\xi} \quad \text{are valorile proprii } \{\xi, \frac{1}{\xi}, 1, \dots, 1\}$$

Astfel am demonstrat Lema 1., iar pe baza ei vom demonstra următoarea teoremă

Teorema 2. Fie $\mathbf{S} \in Unim \cap Psim$ și \mathbf{S} are cel puțin două valori proprii distincte s și t , cu $s > t > 0$. Atunci

$$\forall \mathbf{H} \in Unim \cap Psim \implies \mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort), \quad (\text{A.72})$$

unde prin $\mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$ s-a notat grupul generat de elementul \mathbf{S} și Ort .

Demonstrație. Fie $\mathbf{H} \in Unim \cap Psim$ și fie $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, o bază ortonormată de vectori proprii ai lui \mathbf{H} , corespunzători valorilor proprii $\{h_1, \dots, h_n\}$.

Deoarece $\mathbf{H} \in Psim$ atunci $h_i > 0$. Din $\mathbf{H} \in Unim$ deducem că $h_1 \cdot \dots \cdot h_n = 1$.

Considerăm $\mathbf{H}_k \in Unim \cap Psim$ cu aceiași vectori proprii, dar corespunzător valorilor proprii $\{1, \dots, \eta_k, \eta_k^{-1}, 1, \dots, 1\}$, cu precizarea că η_k este valoare proprie asociată vectorului propriu \mathbf{e}_k , iar η_k^{-1} este asociată vectorului propriu \mathbf{e}_{k+1} , pentru valorile proprii

$$\eta_1 = h_1, \dots, \eta_k = \eta_{k-1} h_k, \quad k = 2, \dots, n-1. \quad (\text{A.73})$$

Demonstrăm că

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1}, \quad (\text{A.74})$$

arătând că are loc egalitatea pe vectorii bazei.

Pentru aceasta vom porni remarcând că dacă $1 \leq k \leq n-1$, fixat, atunci

$$\mathbf{H}_k \mathbf{e}_i = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{dacă } 1 \leq i < k, \\ \eta_i \mathbf{e}_i & \text{dacă } i = k, \\ (\eta_{i-1})^{-1} \mathbf{e}_i & \text{dacă } i = k+1, \\ \mathbf{e}_i & \text{dacă } k+1 < i \leq n. \end{cases} \quad (\text{A.75})$$

De exemplu

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{e}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{e}_1 = h_1 \mathbf{e}_1,$$

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{e}_2 = \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{H}_1 (\eta_2 \mathbf{e}_2) = \eta_2 \eta_1^{-1} \mathbf{e}_2 = h_2 \mathbf{e}_2, \quad (\text{A.76})$$

dacă am folosit (75) și (73). În continuare se urmărește aceeași cale.

Vom folosi observația că șirul $a^{1/m} \rightarrow 1$, când $m \rightarrow \infty$. Deci pentru

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m_\epsilon \in \mathbf{N} \quad \text{astfel încât} \quad \forall m > m_\epsilon, \quad (\text{A.77})$$

$$|(\eta_k)^{1/m} - 1| < \epsilon \iff 1 - \epsilon < (\eta_k)^{1/m} < \epsilon + 1.$$

Este posibil ca $\eta_k \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$ și atunci suntem în condițiile lemei.

Dacă $\eta_k > 0$ nu este în intervalul $[\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$ atunci pentru

$$\epsilon < \min\{\frac{s^2}{t^2} - 1, 1 - \frac{t^2}{s^2}\} \quad \exists m_{\epsilon,k} \in \mathbf{N} \quad \text{astfel încât} \quad (\text{A.78})$$

$$\forall m > m_{\epsilon,k} \quad (\eta_k)^{1/m} \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}].$$

Deci vom nota prin $m_k \in \mathbb{N}$ o valoare corespunzător căreia $(\eta_k)^{1/m} \in [\frac{t^2}{s^2}, \frac{s^2}{t^2}]$.
 Aplicăm Lema 1. și prin urmare $\exists \mathbf{R}_k \in Ort$ astfel încât

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{R}_k \mathbf{S}^2 \mathbf{R}_k^T \mathbf{S}^{-1}, \quad (\text{A.79})$$

să aibă valorile proprii $\{\xi, \xi^{-1}, 1, \dots, 1\}$, pentru $\xi = (\eta_k)^{1/m}$.

Atunci $(\mathbf{T}_k)^{m_k}$ are valorile proprii $\{\eta_k, \eta_k^{-1}, 1, \dots, 1\}$, aceleași cu valorile proprii ale lui \mathbf{H}_k .

Rezultă că există o transformare ortogonală, $\bar{\mathbf{R}}$, care pune în corespondență bazele de vectori proprii corespunzătoare celor două transformări simetrice.

Astfel obținem că $\mathbf{H}_k \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$, $\forall k \in \{\overline{1, n-1}\}$.

Deoarece $\mathbf{H} \in Psim \cap Unim$ are proprietatea de-a fi exprimat prin compunerea $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \dots \mathbf{H}_{n-1}$, rezultă că și $\mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$.

Am demonstrat astfel teorema.

Vom trece acum la **demonstrarea** Teoremei 1. Presupunem că g este un subgrup în $Unim$, care include strict Ort . Deci $\exists \mathbf{F} \in g$, care nu este o transformare ortogonală.

Deoarece $\mathbf{F} \in Unim$ rezultă că $\mathbf{F} \in Involin$, și prin urmare (aplicând teorema de descompunere polară $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{S}$ cu $\mathbf{R} \in Ort$ și $\mathbf{S} \in Psim \cap Unim$, $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$), rezultă că \mathbf{S} are cel puțin două valori distincte, deoarece dacă toate valorile proprii ar fi egale, atunci din condiția $\det \mathbf{S} = 1$ ar rezulta că toate valorile proprii sunt egale cu 1, ele fiind pozitive. Aceasta conduce la $\mathbf{S} = \mathbf{I}$, ceea ce este imposibil.

Să mai arătăm că $\mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort) \subset g$.

Deoarece prin ipoteză $Ort \subset g$ rezultă că $\mathbf{R} \in Ort \cap g$. Atunci $\mathbf{R}^T \in g$. Din $\mathbf{R}^T, \mathbf{F} \in g$ rezultă că $\mathbf{R}^T \mathbf{F} = \mathbf{S} \in g$, fiind subgrup.

Pentru acest element $\mathbf{S} \in g$ vom aplica Teorema 1., relativ la elementele din $Unim$.

Pentru orice $\mathbf{U} \in Unim$, care nu este transformare ortogonală, îi aplicăm descompunerea polară și rezultă că $\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{H}$, cu $\mathbf{H} \in Psim \cap Unim$.

Din Teorema 1. avem $\mathbf{H} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$. În mod evident rezultă că $\forall \mathbf{U} \in \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort)$. Avem deci incluziunile $Unim \subset \mathcal{G}(\mathbf{S}, Ort) \subset g$. Astfel am arătat că dacă g este un subgrup în $Unim$, care include strict Ort include și $Unim$. Deci $g = Unim$. Ceea ce trebuia demonstrat.

A4. Teoreme de reprezentare pentru funcții anizotrope

Vom prezenta câteva rezultate datorate lui Liu [1981] privind reprezentări pentru invarianți anizotropi.

Aceste teoreme se demonstrează în ipoteza că grupul de anizotropie, g este caracterizat printr-un set de vectori și tensori, care rămân invarianți în raport cu

elementele unui alt subgrup $\mathcal{G} \in Ort$. Să considerăm

\mathcal{V} – spațiu vectorial real, de dimensiune p ,

$Lin = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \text{ liniare}\}$,

\mathcal{V}^m – spațiu produs cartezian de ordin $m \in \mathbf{N}^*$, corespunzător spațiului vectorial real \mathcal{V} ,

Lin^n – spațiu produs cartezian de ordin $n \in \mathbf{N}^*$, corespunzător spațiului vectorial real Lin .

Fie $\mathcal{D} \subset \mathcal{V}^m \times Lin^n$ – multime deschisă și conexă și funcțiile

$$\varphi : \mathcal{D} \rightarrow R, h : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{V}, S : \mathcal{D} \rightarrow Lin \quad (\text{A.80})$$

Notăm

$$\mathbf{v} \in \mathcal{V}^m \iff \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m), \quad \mathbf{v}_i \in \mathcal{V}, \forall i \in \{\overline{1, m}\};$$

$$\mathbf{A} \in Lin^n \iff \mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n), \quad \mathbf{A}_i \in Lin, \forall i \in \{\overline{1, n}\}; \quad (\text{A.81})$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} \in \mathcal{V}^m \iff \mathbf{Q}\mathbf{v} = (\mathbf{Q}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{v}_m), \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort;$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T \in Lin^n \iff \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}^T, \dots, \mathbf{Q}\mathbf{A}_n\mathbf{Q}^T), \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort.$$

Definiția 1. Fie $\mathcal{G} \subset Ort$, subgrup. Spunem că \mathcal{D} este *invariant în raport cu \mathcal{G}* dacă

$$\forall (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D} \rightarrow (\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \in \mathcal{D} \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \quad (\text{A.82})$$

Definiția 2. Spunem că funcțiile φ , h și S sunt *invariante în raport cu \mathcal{G}* dacă \mathcal{D} este *invariant în raport cu \mathcal{G}* și

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) &= \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}), \\ h(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q}h(\mathbf{v}, \mathbf{A}), \\ S(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q}S(\mathbf{v}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T, \\ \forall (\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D}, \mathbf{Q} \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Definiția 3. Dacă $\mathcal{G} = Ort^+$ atunci funcțiile invariante în raport cu Ort^+ se numesc *hemitrope*.

Definiția 4. Dacă $\mathcal{G} = Ort$ atunci funcțiile invariante în raport cu Ort se numesc *izotrope*.

Observația 1. Se regăsesc definițiile din A2., pentru $n = 1, m = 0$.

Reprezentările funcțiilor izotrope, de argument ansamblu de vectori, tensori simetrici și respectiv antisimetrici, cu valori reale, și respectiv tensoriale (simetrice

și antisimetrice) se găsesc în lucrarea lui Wang [1970]. Sunt date reprezentările pentru un ansamblu de maximum 4 elemente.

Propoziția care urmează permite identificarea spațiului vectorial \mathcal{V} cu spațiul tensorilor antisimetrice $Asim$, spațiile fiind izomorfe.

Propoziția 1. i) Fie $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, atunci $\exists \mathbf{W} \in Asim$ unic, astfel încât

$$\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \text{și} \quad \mathbf{W}\mathbf{v} = 0. \quad (\text{A.84})$$

ii) Fie $\mathbf{W} \in Asim$, atunci $\exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ unic, astfel încât să aibă loc (84).

iii) Aplicația $\phi : Asim \rightarrow \mathcal{V}$ definită prin (84) și notată $\phi(\mathbf{W}) \equiv \langle \mathbf{W} \rangle = \mathbf{v}$, este un izomorfism.

Definiția 5. Spunem că $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ este *vectorul coaxial cu tensorul* $\mathbf{W} \in Asim$, sau că tensorul $\mathbf{W} \in Asim$ este *asociat vectorului* \mathbf{v} , dacă $\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$, $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Notăm $\mathbf{v} = \langle \mathbf{W} \rangle$.

Propoziția 2. Dacă $\mathbf{v} = \langle \mathbf{W} \rangle$, atunci

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \langle \mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T \rangle \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort^+. \quad (\text{A.85})$$

Teorema 1. Fie funcțiile φ, S cu valori scalare și respectiv tensoriale. Definim funcțiile $\hat{\varphi}, \hat{S}$ prin relațiile

$$\hat{\varphi}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \hat{S}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = S(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \text{unde } \mathbf{v} = \langle \mathbf{W} \rangle, \quad (\text{A.86})$$

$$\varphi, S \text{ hemitropă} \iff \hat{\varphi}, \hat{S} \text{ izotropă}$$

Demonstrație. Presupunem că $\hat{\varphi}, \hat{S}$ sunt izotrope. Deci

$$\hat{\varphi}(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \hat{\varphi}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort \quad \text{și} \quad (\text{A.87})$$

$$\mathbf{Q}\hat{S}(\mathbf{W}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \hat{S}(\mathbf{Q}\mathbf{W}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort.$$

În particular pentru $\mathbf{Q} \in Ort^+$ au loc egalitățile (87) și din definițiile (86), cu utilizarea Propoziției 2, rezultă că φ, S sunt hemitrope.

Presupunem că φ este hemitropă

$$\varphi(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \varphi(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{Q} \in Ort^+, \quad (\text{A.88})$$

deci și $\hat{\varphi}$ este hemitropă.

Să observăm că

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} \in Ort^+ &\iff -\mathbf{Q} \in Ort \quad \text{cu} \quad \det \mathbf{Q} = -1, \\ (-\mathbf{Q})(-\mathbf{Q})^T &= \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Deoarece $\hat{\varphi}$ este o funcție cu valori scalare și este hemitropă rezultă că este și izotropă (dacă folosim (89)).

Analog se demonstrează și pentru funcția cu valori tensoriale.

Teorema 2. Fie funcția h cu valori vectoriale și fie funcția H cu valori tensori antisimetrice asociată funcției h , prin relația $h = \langle H \rangle$. Definim funcția \hat{H} prin relația

$$\hat{H}(\mathbf{W}, \mathbf{A}) = H(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \text{unde } \mathbf{v} = \langle \mathbf{W} \rangle, \quad (\text{A.90})$$

$$\text{atunci } h \text{ hemitropă} \iff \hat{H} \text{ izotropă}$$

Demonstrație. Presupunem că \hat{H} este izotropă. Deci

$$\hat{H}(\mathbf{QWQ}^T, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}\hat{H}(\mathbf{W}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort} \implies \quad (\text{A.91})$$

$$H(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}H(\mathbf{v}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T = \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}^+.$$

Egalitatea din (91)₂ se obține din ipoteza, scrisă în particular pentru $\mathbf{Q} \in \text{Ort}^+$, cu utilizarea definiției funcției \hat{H} și a Propoziției 2.

Dacă considerăm vectorii coaxiali cu tensorii antisimetrice din (91)₂ avem egalitatea

$$\langle H(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) \rangle = \langle \mathbf{Q}H(\mathbf{v}, \mathbf{A})\mathbf{Q}^T \rangle = \mathbf{Q} \langle H(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \rangle \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}^+, \quad (\text{A.92})$$

$$\text{atunci } h(\mathbf{Qv}, \mathbf{QAQ}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Ort}^+.$$

Am utilizat încă o dată Propoziția 2.

Cealaltă implicație se demonstrează în mod analog, dacă ținem seama de observațiile din (89).

Definiția 8. Definim un subgrup $g \subset \text{Ort}$ caracterizat prin proprietatea că există un set de vectori și tensori, notați (\mathbf{m}, \mathbf{M}) astfel încât

$$g = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \mid \mathbf{Qm} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{QMQ}^T = \mathbf{M} \} \quad (\text{A.93})$$

Lema 1. Fie funcțiile φ, h, S cu valori scalare, vectoriale și respectiv tensoriale invariante relativ la g . Fie $\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \mathcal{G}$. Dacă $\mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$, atunci au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{Rv}, \mathbf{RAR}^T) &= \varphi(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T), \\ \mathbf{R}^T h(\mathbf{Rv}, \mathbf{RAR}^T) &= \mathbf{R}'^T h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T), \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

$$\mathbf{R}^T S(\mathbf{Rv}, \mathbf{RAR})\mathbf{R} = \mathbf{R}'^T S(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T)\mathbf{R}'.$$

Demonstrație. Considerăm cazul funcțiilor cu valori vectoriale, celelalte demonstrații sunt similare.

Notăm $\mathbf{Q} = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$ din ipoteza. $\mathbf{R} \in \mathcal{G} \subset Ort$ deci $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$.
 Flosim ipoteza că h este invariantă relativ la g , în particular pentru $\mathbf{Q} \in g$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T) &= h(\mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}'^T\mathbf{R}\mathbf{R}^T) = \\ &= h(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}'^T\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T) = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T) \end{aligned} \quad (\text{A.95})$$

Din egalitatea termenilor extremi se deduce formula (94), pentru funcția h .

Definiția 9. Se definesc mulțimea

$$\mathcal{M} = \{(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{m}, \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}\bar{\mathbf{Q}}^T) \mid \bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{G}\} \quad (\text{A.96})$$

și funcțiile $\bar{\varphi}$, \bar{h} , \bar{S} definite pe $\mathcal{D} \times \mathcal{M}$ prin relațiile

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) &= \varphi(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T), \\ \bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) &= \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T), \\ \bar{S}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) &= \mathbf{R}^T S(\mathbf{R}\mathbf{v}, \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T)\mathbf{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.97})$$

pentru orice $(\mathbf{v}, \mathbf{A}) \in \mathcal{D}$, $(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \in \mathcal{M}$ cu $\mathbf{R} \in \mathcal{G}$, cu proprietățile $\mathbf{R}\mathbf{p} = \mathbf{m}$, $\mathbf{R}\mathbf{P}\mathbf{R}^T = \mathbf{M}$.

Propoziția 3. Dacă φ , h , S sunt invariante relativ la g , atunci funcțiile $\bar{\varphi}$, \bar{h} , \bar{S} din (97) sunt corect definite.

Demonstrație. În general \mathbf{R} nu este unic determinat în condițiile din (97)₂. Dacă mai există

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' \in \mathcal{G} \text{ astfel ca } \mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m}, \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M} \text{ atunci} \\ \mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{m} = \mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m} \text{ și } \mathbf{R}'\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{R}'^T = \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

Aceasta înseamnă că $\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \mathcal{G}$ și $\mathbf{R}'\mathbf{R}^T \in g$. Suntem în condițiile Lemei 1. și prin urmare valorile funcțiilor din membrul drept nu depind de alegerea elementului \mathbf{R} , cu proprietățile menționate în (97).

Teorema 3. O funcție f definită pe \mathcal{D} cu valori scalare, vectoriale sau tensoriale este *invariantă* relativ la g , dacă și numai dacă poate fi reprezentată prin $f(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{f}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M})$ cu funcția \bar{f} definită pe $\mathcal{D} \times \mathcal{M}$, *invariantă* relativ la \mathcal{G} .

Demonstrație. Vom face demonstrația pentru funcții cu valori vectoriale, în celelalte cazuri demonstrațiile fiind similare. Presupunem că h este invariantă relativ la g . Atunci funcția \bar{h} definită în (97), conform Propoziției 3. este corect definită. Pentru $\mathbf{R} = \mathbf{I} \in \mathcal{G}$ obținem că

$$\begin{aligned} \exists \bar{h} : \mathcal{D} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}, \\ h(\mathbf{v}, \mathbf{A}) = \bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M}) \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Trebuie să arătăm că funcția \bar{h} este invariantă relativ la \mathcal{G} . Fie pentru aceasta $\mathbf{Q} \in \mathcal{G}$. Pentru $\forall (\mathbf{p}, \mathbf{P}) \in \mathcal{M}$ există $\bar{\mathbf{Q}} \in \mathcal{G}$ astfel încât $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{m}$, $\mathbf{P} = \bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}\bar{\mathbf{Q}}^T$. Atunci $\mathbf{Q}\mathbf{p} = \mathbf{Q}(\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{m})$, $\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}}\mathbf{M}(\bar{\mathbf{Q}}\bar{\mathbf{Q}})^T$, ca o consecință a definiției mulțimii \mathcal{M} dată în (96).

Deci $\exists \mathbf{R} \equiv (\mathbf{Q}\bar{\mathbf{Q}})^T \in \mathcal{G}$ astfel încât

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}\mathbf{p}) = \mathbf{m}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T)\mathbf{R}^T = \mathbf{M}. \quad (\text{A.100})$$

Din definiția (97) pentru funcția \bar{h} , cu \mathbf{R} introdus în (100), obținem

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{p}, \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}(\mathbf{Q}\mathbf{v}), \mathbf{R}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T)\mathbf{R}^T) = \\ &= \mathbf{R}^T h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T), \quad \text{cu } \mathbf{R}' = \mathbf{R}\mathbf{Q} \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Dacă introducem $\mathbf{R}' \equiv \mathbf{R}\mathbf{Q}$ atunci $\mathbf{R}' \in \mathcal{G}$ pentru că $\mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathcal{G}$. Dar din (100) avem proprietatea

$$\mathbf{R}'\mathbf{p} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{R}'\mathbf{P}\mathbf{R}'^T = \mathbf{M}, \quad (\text{A.102})$$

care ne îndreptățește să folosim definiția (97), rezultând

$$h(\mathbf{R}'\mathbf{v}, \mathbf{R}'\mathbf{A}\mathbf{R}'^T) = \mathbf{R}'\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) \quad (\text{A.103})$$

Introducem pe (103) în ultimul membru din (101), care ne conduce la

$$\begin{aligned} \bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{p}, \mathbf{Q}\mathbf{P}\mathbf{Q}^T) &= \mathbf{R}^T \mathbf{R}'\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}) \equiv \\ &\equiv \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{p}, \mathbf{P}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{G} \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

Astfel am demonstrat că \bar{h} este invariantă relativ la \mathcal{G} . Menționăm că în demonstrație proprietatea de invarianță a funcției h relativ la g a fost folosită prin intermediul Propoziției 3., care asigură corecta defnire a funcției \bar{h} .

Reciproc. Presupunem că funcția h se reprezintă prin \bar{h} (conform relației (99)), care este invariantă relativ la \mathcal{G} .

Fie $\mathbf{Q} \in g \subset \mathcal{G} \subset Ort$. Din definiția (99) și ipoteza de invarianță pentru \bar{h} avem egalitățile

$$\begin{aligned} h(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) &= \bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{m}, \mathbf{M}) = \\ &= \bar{h}(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{m}, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{M}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{Q}^T\mathbf{m}, \mathbf{Q}^T\mathbf{M}\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Deoarece $\mathbf{Q} \in g$ conform Definiției 8., formula (14), rezultă că

$$\mathbf{Q}\mathbf{m} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T = \mathbf{M} \iff \mathbf{Q}^T\mathbf{m} = \mathbf{m}, \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{M}\mathbf{Q} = \mathbf{M}. \quad (\text{A.106})$$

Ținem seama de egalitățile din (106) în (105) și deducem

$$h(\mathbf{Q}\mathbf{v}, \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\bar{h}(\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{m}, \mathbf{M}) \equiv \mathbf{Q}h(\mathbf{v}, \mathbf{A}). \quad (\text{A.107})$$

Pentru ultima egalitate din (107) am folosit încă o dată definiția (99). Astfel am obținut invarianța lui h relativ la g .

În paragraful 2.7.3 intitulat corpuri solide anizotrope vom defini câteva grupuri de simetrie materială g , care sunt caracterizate prin relația (93) și care corespund alegerii $\mathcal{G} \equiv Ort$ sau $\mathcal{G} \equiv Ort^+$.

Teoremele pe care le-am demonstrat aici, permit obținerea de reprezentări pentru funcții anizotrope, caracterizate prin grupuri de simetrie g , cu proprietatea din (93), pentru $\mathcal{G} \equiv Ort$ sau $\mathcal{G} \equiv Ort^+$, dacă se utilizează teoremele de reprezentare formulate de Wang [1970].

BIBLIOGRAFIE

- Astarita G., Marrucci G.** - Principles of non-newtonian fluid mechanics. McGraw-Hill, 1974.
- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul vectorial cu aplicații. Editura Tehnică, București, 1976.
- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Tehnici de calcul tensorial cu aplicații. Editura Tehnică, București, 1977.
- Beju I., Soós E., Teodorescu P.P.** - Euclidian tensor calculus with applications. Editura Tehnică - Abacus Press, 1983.
- Braun I., Reiner M.** - Problems of cross viscosity. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **5**, 42-53, 1952.
- Cartan H.** - Calcul différentiel. Formes différentielles. Hermann Paris. 1967.
- Cleja-Țigoiu S., Cristescu N.** - Teoria plasticității cu aplicații în prelucrarea metalelor. Univ. București, 1985.
- Cleja-Țigoiu S.** - Constitutive equations for rock-type materials (finite deformation). *Int. J. Engng.Sci.* **29**, 1531-1544, 1991.
- Cleja-Țigoiu S.** - Models in multiplicative finite elastoplasticity in Collection "Travaux en cours", Hermann, Eds. de sciences et des arts (în curs de apariție), 1997.
- Coleman B.D.** Kinematical concepts with applications in the mechanics and thermodynamics of incompressible viscoelastic fluids. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **9**, 273- 300, 1961.
- Coleman B.D., Noll W.** - On certain steady flows of general fluids. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **3**, 289- 303, 1959. a.
- Coleman B.D., Noll W.** - Helical flow of general fluids. *J. Appl. Phys.* **30**, 1508-1512, 1959. b.

- Coleman B.D., Noll W.** - An Approximation Theorem for Functionals, with Applications in Continuum Mechanics. *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **6**, 5, 355-370, 1960.
- Coleman B.D., Markovitz H., Noll W.** - Viscometric Flows of non-newtonian fluids. Springer-Verlag, New York , 1966.
- Coleman B.D., Noll W.** - Foundations of Linear Viscoelasticity. Reviews of modern physics, **33**, 239-249, 1961, sau in Noll W., The foundations of mechanics and thermodynamics, Selected papers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 113-123, 1974.
- Cristescu N., Suliciu I.** - Viscoplasticitate. Ed.Tehnică București, 1976.
- Cristescu N., Suliciu I.** - Viscoplasticity. Martinus Nijhoff, Netherlands, 1982.
- Cristescu N.** - Mecanica rocilor, Modele matematice reologice. Ed. Științifică, București, 1990.
- Cristescu N.** Rock Rheology, Kluwer, Dordrecht, 1989.
- Dincă G.** - Operatori monotoni în teoria plasticității. Ed. Academiei, 1972.
- Dodson A.G., Townsend P., Walters K.** - *Comput. Fluids* , **2**, 213, 1974.
- Dragoș L.** - Principiile mecanicii analitice. Ed.Tehnică București, 1976.
- Dragoș L.** - Principiile mecanicii mediilor continue. Ed.Tehnică, București,1983.
- Dunn J.E., Fosdick R.L.** - Thermodynamics, Stability, and Boundedness of fluids of Complexity 2 and fluids of second grade *Arch.Rat.Mech.Anal.* **56**, 191- 252, 1974.
- Duvaut G., Lions J.L.** - Les inéquations en mécanique et en physiques. Dunod, Paris, 1972.
- Ericksen J.L.** - The secondary flow phenomena in non-linear fluids. *Tappi* **42**, 773-775, 1959.
- Eringen A.C.** - The behavior of certain visco-elastic materials in laminar shearing motions. *Visco-elasticity: Phenomenological Aspects*, New York: Academic Press, 77-91, 1960.
- Eringen A.C.** - *Mechanics of Continua*. John Wiley and Sons Inc.,New York-London-Sydney, 1967.
- Fetecău C.** - Fluide newtoniene - teorie și aplicații, Ed.Gh.Asachi,Iași,1995.
- Fredrickson A.G.** Helical flow of an annular mass of visco-elastic fluid, *Chem. Engr. Sci.* **11**, 252-259, 1960.

- Fosdick R.L., Rajagopal K.R.** - Thermodynamics, Stability, and Boundedness of fluids of third grade. Proc. Roy. Soc. London A, **339**, 351 - 377, 1980.
- Freudental A.M., Geiringer H.** - The mathematical theories of the inelastic continuum, Springer-Verlag, 1958.
- Gurtin M.** - An Introduction to Continuum Mechanics. Acad.Press, 1981.
- Gurtin M., Sternberg E.** - On the linear theory of viscoelasticity Arch.Rat. Mech.Anal., **11**, 291-356, 1962.
- Gurtin M., Williams W., Suliciu I.** - On the rate constitutive equations and energy of viscoelastic and viscoplastic materials. Int. J. Solids Struc. **16**, 607- 617, 1980.
- Halanay A.** - Ecuatii diferențiale. Ed. Didactică și Pedagogică, 1970.
- Huilgol R.R.** - Continuum mechanics of viscoelastic liquids. J.Wiley & Sons,Inc., New York, 1975.
- Huilgol R.R., Phan-Thien N.** - Recent advances in the continuum mechanics of viscoelastic liquids. Int.J.Engng.Sci., **24**, 161-251, 1986.
- Kecs W., Teodorescu P.P.** - Introducere în teoria distribuțiilor cu aplicații. Editura tehnică, București, 1975.
- Iacob C.** - Introduction mathématique à la Mécanique des fluides, Bucarest, Ed. de l'Académie de la R.P.R., Paris- Gauthier - Villards, 1959.
- Iacob C.** - Mecanica Teoretică. E.D.P., București, 1971.
- Ionescu I.R., Sofonea M.** - Quasistatic processes for elastic-viscoplastic materials, Q.Appl. Math., **46**, 229-243, 1988.
- Ionescu I.R., Sofonea M.** - Functional and numerical methods in viscoplasticity, Oxford Univ.Press. Oxford, 1993.
- Ladijesnkaia O.A.** - Matematicheskie voprosi dinamiki viasnoi jidkosti, Nauka, Moskva, 1970. (lb. rusa)
- Langlois W.E., Rivlin R.S.** - Slow steady-state flow of visco-elastic fluid through non-circular tubes, Rend. Mat. **22**, 169, 1963.
- Larson R.G.** - Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions, Butterworths, 1989.
- Léné P.** - Sur les matériaux élastiques à l'énergie de déformation non quadratique. J. Mécanique, **13**, 3, 499-534, 1974.
- Leitman M.J., Fisher M.C.** - The linear theory of viscoelasticity, Handbuch

- der Physik, VI 3/3, 1-123, 1974.
- Lions J.L.** - Quelques methodes de résolution des problèmes aux limites non li aires. Dunod, Paris, 1969.
- Liu I Shih** - On representation of anisotropic invariants, Int.J. Engng. Sci. **20**, 10, 1099-1109, 1982.
- Malvern L.E.** - Introduction to the mechanics of a continous medium. 1969.
- Markovitz H.** - Normal effect in polysiobutylene solutions, II. Classification of rheological theories. Trans. Soc. Rheol. **1**, 37-52, 1957.
- Mazilu P., Sburlan S.** - Metode func ionale  n rezolvarea ecua iilor teoriei elasticit ţii. Ed. Acad. Bucureşti, 1973.
- Mihlin S.G.** - Varia ion ie metod v matematicescor fizike. Moskva, 1957.
- Miric   t.** - Ecua ii diferen iale  i cu derivate par iale. Univ. Buc., 1989.
- Nec s J.** - Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Acad., Praha, 1967.
- Nec s J., Hlav cek I.** - Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: an introduction. Elsevier scientific publishing company, Amsterdam-Oxford New York, 1981.
- Noll W.** - A mathematical theory of the mechanical behavior of continous media. Arch. Rat. Mech. Anal. **2**, 197-226, 1958; sau  n The foundations of mechanics and thermodynamics, Selected papers. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1-30, 1974.
- Noll W.** - Motions with constant stretch hystory, Arch.Rat.Mech.Anal.,**11**, 97-105, 1962, sau  n The foundations . . . , 125-133, 1974.
- Noll W.** - A new mathematical theory of simple materials, Arch. Rat.Mech.Anal., **48**, 1-50, 1972; sau  n The foundations . . . , 243-292, 1974.
- Noll W.** - Proof of the maximality of the orhogonal group in the unimodular group. **4**, 323- 425, 1965; sau  n The foundations . . . , 200-202, 1974.
- Nowacki W.** - Teoria uprugosti, Mir, Moskva, 1975. (lb. rus )
- Oldroyd J.G.** - On the formulation of rheological equations of state. Proc. Roy. Soc. London A **200**, 523-541 , 1950.
- Pavel N., Ursescu C.** - Existence and uniqueness for some non-linear functional equations in a Banach space, Anal. t.Univ.Ia i,Mat., **XX**,53-58,1974.
- Pipkin , Rivlin R.S.** - Normal stresses in flow through tubes of non- circular

cross- section, ZAMP, 14, 738- 1963.

- Reiner R. S.** - Phenomenological Macroreology. Rheology, Theory and Applications 1, New York: Academic Press. 1956.
- Rivlin R.S.** - Solutions of some problems in the exact theory of visco-elasticity. J. Rat. Mech. Anal. 5, 179-188, 1956.
- Rivlin R.S., Ericksen J.L.** - Stress deformation relations for isotropic materials. J. Rat. Mech. Anal. 4, 325-425, 1965.
- Roșca I.** - Ecuatii cu derivate parțiale. Ed. Universității Bucuresti, 1997.
- Serrin J.** - Mathematical principles of clasical fluid mechanics, The Encyclop., VIII, part I, 125-263, 1959.
- Serrin J.** - Poiseuille and Couette flow of non-newtonian fluids. Z. angew. Math. Mech. 39, 295-299, 1959.
- Solomon L.** - Elasticitate liniară. Introducere matematica in statica solidului elastic. Ed. Academiei R.S.R., București, 1969.
- Soós E., Teodosiu C.** - Calcul tensorial cu aplicații în mecanica solidelor, Ed. Șt.Enc., 1983.
- Temam R.** - Navier - Stokes Equations (theory and numerical analysis).North-Holland Pub.Comp., 1979.
- Teodorescu P.P.** - Dinamica corpurilor liniar elastice. Ed. Academiei R.S.R., București, 1972.
- Teodorescu P.P., Ilie V.** - Teoria elasticității și introducere în mecanica solidelor deformabile, vol. 1-3 , Ed. Dacia, Cluj-Napoca,1976-1980.
- Townsend P., Walters K., Waterhouse W.M.** - J. Non-Newt. Fluid Mech., 1, 107, 1976.
- Truesdell C.** - A First Course in Rational Continuum Mechanics. Acad. Press, 1972.
- Truesdell C., Noll W.** - The non-linear field theories of Mechanics, Handb. der Physik, III /3, 1965.
- Truesdell C., Toupin R.A.** - The clasical field theories. Encyclop.of Phys., III /1, ed. by S. Flügge, Berlin - Gottingen, Springer, 1960.
- Țigoiu V.** - Propagări de unde și termodinamică pentru fluide de gradul trei. Studii și cercetări, 39, 4, 279-348, 1987.
- Țigoiu V.** - Existence criterion for secondary flows in elliptic pipes for viscoelastic

- third grade fluids, *Rev.Roum.Sci.Techn.Méc.Appl.*, **40**, 2-3, 145, 1995,a.
- Țigoiu V.** - The flow of a viscoelastic third grade fluid between two coaxial rotating discs, with heat transfer, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, **XL**, 5-6, 541, 1995,b.
- Vainberg M.M.** - Variaționii metod i metod monotonîh operatorov v teorii nelineinîh uravnenii. Nauka, Moskva, 1972.
- Walters K.** - Rheometry. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1975.
- Wang C.C.** - Stress relaxation and the principle of fading memory, *Arch.Rat. Mech.Anal.*, **18**, 343-366, 1965.
- Wang C.C.** - A representation theorem for constitutive equation of a simple material in motions with constant stretch history, *Arch.Rat.Mech.Anal.*, **20**, 329-340, 1965.
- Wang C.C.** - A New Representation Theorem for Isotropic Functions, *Arch.Rat. Mech.Anal.*, **36**, 166-223, 1970.
- Wang C.C., Truesdell C.** - Introduction to rational elasticity. Groningen, Wolters- Nordhoff, 1972.

**Tiparul s-a executat sub cda 404/1997 la
Tipografia Editurii Universității din București**

ISBN - 973 - 575 - 202 - 6

Lei 16900