

DOINA MASSIER

# MECANICA. APLICAȚII

PARTEA I

## MECANICA NEWTONIANĂ A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI  
1998



BIBLIOTECA CENTRALĂ  
UNIVERSITARA  
București

Cota TV5-15930

Inventar C-19980436

DOINA MASSIER

# MECANICA. APLICAȚII

## PARTEA I

# MECANICA NEWTONIANĂ A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI

1998

ECA CENTRALĂ UNIVERSITARĂ  
BUCUREȘTI  
TV 515 930

Referenți științifici: Prof. dr. NICOLAE ȘANDRU  
Conf. dr. NICOLAE MARCOV

B.C.U. București



C199804366

© Editura Universității din București  
Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon 410.23.84

ISBN - 973 - 575 - 238 - 7

# PREFATA

În stadiul actual de dezvoltare a învățământului superior matematic, studenții sunt pregătiți pentru a deveni profesori în învățământul gimnazial și liceal, dar și matematicieni care să lucreze în diferite sfere de activitate. Disciplina "Mecanica" din planul de învățământ este orientată spre exemplificarea posibilității modelării matematice, a drumului fenomen - sistem de axiome și prelucrări matematice - fenomen.

Aplicațiile cuprinse în această lucrare sunt alese în sprijinul ideii menționate mai sus. Nu sunt considerate aplicații care ar constitui mai degrabă obiect al unor discipline înrudite și care își găsesc locul în planul de învățământ pentru învățământul tehnic superior (statica - rezistența materialelor). Au fost lăsate la o parte și aplicații cu caracter relativ artificial, chiar dacă unora, clasice fiind, li se poate da o rezolvare elegantă cu o frumoasă interpretare geometrică. S-au reținut mai ales acele aplicații ce își găsesc un corespondent în realitate. Pentru aceasta s-au avut în vedere următoarele aspecte:

- scrierea ecuațiilor diferențiale de evoluție a sistemului mecanic cu sublinierea unor caracteristici calitative ce decurg din acestea (integrale prime, singularități etc);
- rezolvarea acestor ecuații (de obicei sisteme de ecuații diferențiale ordinare, dar în anumite capitole și ecuații diferențiale cu derivate parțiale) pe cale analitică sau numerică, cu rezultate prezentate sub formă de tabele sau grafice;
- sublinierea deosebirilor ce pot apărea din alegerea modelului de sistem mecanic (punct material/solid rigid).

Există și aplicații cu caracter teoretic, menite să sublinieze diferența dintre modelarea matematică în mecanică și unele domenii ale matematicii.

Dacă studiul mișcării unui sistem a permis mai multe variante, fie prin modelarea aleasă, fie prin încadrarea în diferite moduri generale de abordare (mecanică newtoneană, mecanică lagrangeană, mecanică hamiltoneană etc), acestea s-au realizat, după caz, separat sau nu, dar cu trimitere la celelalte variante.

În fiecare capitol, uneori și în unele paragrafe, s-au menționat relațiile fundamentale necesare abordării aplicațiilor precum și unele trimiteri bibliografice.

Desenele și graficele sunt realizate cu MAPLE V R3 și prelucrate cu CorelDRAW! 4.0. Pentru aspecte mai deosebite, în text au fost incluse programele MAPLE de calcul numeric al unor mărimi (integrale care nu admit primitive, integrale eliptice), de rezolvare numerică a unor ecuații diferențiale, reprezentări grafice speciale etc.

Lucrarea se adresează studenților secției matematică-mecanică (anii II, III) dar și celor de la celelalte secții ale Facultății de Matematică, reprezentând un material util pentru seminarii. Pentru ca lucrarea să fie ușor de manevrat, ea a fost împărțită în mai multe părți al căror cuprins este inclus în totalitate în lucrare.

Doina Massier

# CUPRINS

## PARTEA I

### MECANICA NEWTONIANA A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

<b>PREFATA</b> .....	3
<b>CUPRINS</b> .....	4
<b>NOTATI</b> .....	6
<b>DIMENSIUNI SI UNITATI DE MASURA</b> .....	8
<b>Capitolul 1. CALCUL VECTORIAL</b> .....	9
§1.1. Aplicații geometrice. Identități.....	9
§1.2. Ecuații vectoriale.....	13
§1.3. Sisteme de vectori alunecători.....	17
§1.4. Baze reciproce. Coordonate curbilini.....	24
<b>PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE</b> .....	33
<b>Capitolul 2. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL</b> .....	35
§2.1. Cinematica mișcării rectilinii și circulare.....	36
§2.2. Cinematica mișcării pe o curbă în coordonate carteziene.....	41
§2.3. Cinematica în coordonate polare.....	43
§2.4. Cinematica mișcării relative.....	48
§2.5. Probleme diverse.....	51
<b>Capitolul 3. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL</b> .....	60
§3.1. Consecințe ale principiilor fundamentale.....	60
§3.2. Statica punctului material.....	63
§3.3. Mișcarea punctului material greu la suprafața Pământului.....	68
§3.4. Mișcarea punctului material în câmp central. Mișcarea kepleriană.....	81
§3.5. Mișcarea unui punct material pe o suprafață, fără și cu frecare.....	94
§3.6. Mișcarea punctului material pe o curbă, fără și cu frecare.....	102
§3.7. Mișcări tautocrone.....	123
§3.8. Mișcări oscilatorii.....	130
§3.9. Mișcarea relativă a punctului material.....	140
<b>Capitolul 4. DINAMICA SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE</b> .....	149
Anexă. <b>FUNCTII ELIPTICE</b> .....	158
<b>BIBLIOGRAFIE</b> .....	167

## PARTEA A II-A

### MECANICA NEWTONIANA A SOLIDULUI RIGID

#### PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE A SOLIDULUI RIGID

##### Capitolul 1. ELEMENTE DE CINETICA

##### Capitolul 2. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

##### Capitolul 3. STATICA SOLIDULUI RIGID

##### Capitolul 4. DINAMICA SOLIDULUI RIGID

§4.1. Dinamica solidului rigid liber

§4.2. Mișcarea plan-paralelă

§4.3. Dinamica solidului rigid cu axă fixă

§4.4. Dinamica solidului rigid cu punct fix

§4.5. Dinamica solidului rigid cu legături de contact, fără și cu frecare

### DISCONTINUITATI IN MECANICA

##### Capitolul 5. DISCONTINUITATI ÎN VITEZE

§5.1. Șocuri și percuții

§5.2. Ciocniri

##### Capitolul 6. DINAMICA SISTEMELOR DE MASA VARIABILA

## PARTEA A III-A

### MECANICA ANALITICA

##### Capitolul 1. MECANICA LAGRANGEANA

§1.1 Principiul lucrului mecanic virtual pentru sisteme discrete de puncte materiale și pentru solidul rigid

§1.2. Ecuatiile Lagrange de speța a doua pentru sisteme olonome discrete de puncte materiale

§1.3. Ecuatiile Lagrange de speța a doua pentru solidul rigid cu legături olonome

§1.4. Ecuatiile Lagrange de speța II-a cu multiplicatori pentru sisteme neolonome

§1.5. Ecuatiile Appell

##### Capitolul 2. MECANICA HAMILTONIANA

§2.1. Ecuatiile canonice (Hamilton)

§2.2. Ecuatiile Hamilton-Jacobi

§2.3. Transformări canonice

##### Capitolul 3. PRINCIPII VARIATIONALE

##### Capitolul 4. STABILITATEA MISCARII SI ECHILIBRULUI

### RELATIVITATE RESTRANSA

##### Capitolul 5. PROBLEME DE MECANICA RELATIVISTA A PUNCTULUI MATERIAL

## NOTATII

$\left\{ \begin{array}{l} \alpha, \beta, \gamma, \dots \\ a, b, c, \dots \\ \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots \\ \omega, \Omega, \dots \\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \dots \end{array} \right.$	<p>mărimi scalare</p> <p>mărimi vectoriale</p>
$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \\ \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\} \\ \{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\} \\ \{\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\} \end{array} \right.$	<p>baze reciproce de vectori (oarecari)</p> <p>bază ortonormată de vectori</p> <p>bază ortonormată de vectori (asociată cu referențial inerțial)</p>
$\ \mathbf{u}\  = u$ $\{u^1, u^2, u^3\}$ $\{u_1, u_2, u_3\}$	<p>modulul unui vector</p> <p>componentele contravariante ale unui vector (în baza <math>\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}</math>)</p> <p>componentele contravariante ale unui vector (în baza <math>\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}</math>)</p>
$t, t', \dots$ $\tau$	<p> timp</p> <p> perioadă</p>
$m, m_i, \dots$ $m$	<p> masa punctului material</p> <p> masă totală a unui sistem de puncte materiale</p>
$\mathbf{x}, \mathbf{x}_i, \mathbf{X}, \mathbf{X}_0, \dots$ $\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{x}}_i, \mathbf{X}, \mathbf{V}, \dot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{V}_0, \dots$ $\ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{a}, \ddot{\mathbf{x}}_i, \ddot{\mathbf{X}}, \mathbf{A}, \ddot{\mathbf{X}}_0, \mathbf{A}_0, \dots$ $\mathbf{x}^o, \dot{\mathbf{x}}_i^o, \mathbf{v}^o, \dots$ $\omega$	<p> vectori de poziție (în raport cu un reper menționat)</p> <p> viteze (în raport cu un reper menționat)</p> <p> accelerații (în raport cu un reper menționat)</p> <p> date inițiale</p> <p> viteză unghiulară</p>
$\mathbf{F}, \mathbf{F}_i, \mathbf{F}_{jk}, \mathbf{R}, \mathbf{N}, \Phi, \dots$ $\mathbf{F}$ $\mathbf{H}$	<p> forțe care acționează asupra punctelor materiale</p> <p> rezultanta forțelor care acționează asupra unui sistem discret de puncte materiale</p> <p> impuls al unui punct material,  impuls total al unui sistem discret de puncte materiale</p>
$\mathbf{M}_O$	<p> moment al unei forțe în raport cu polul O</p> <p> moment resultant al forțelor care acționează asupra unui sistem discret de puncte materiale, în raport cu polul O</p>
$\mathbf{K}_O$	<p> moment cinetic al unui punct material,  moment cinetic total al unui sistem discret de puncte materiale</p>
$T$	<p> energia cinetică a unui punct material</p> <p> energia cinetică totală a unui sistem de puncte materiale</p>
$P$	<p> puterea mecanică a unei forțe</p>
$P_{ext}, P_{int}$	<p> putere mecanică totală a forțelor exterioare, respectiv interioare care acționează asupra unui sistem discret de puncte materiale</p>



$U$	potențialul unei forțe
$V$	energia potențială
$f$	coeficient de frecare de aderență/alunecare
$f$	constanta de atracție universală
$g$	acelerația gravitațională
$C$	centrul de masă al unui sistem de puncte materiale
$C$	constanta ariilor
$q^1, q^2, q^3$	coordonate curbilinii
$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\} \\ \{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\} \end{array} \right.$	baze locale naturale asociate coordonatelor curbilinii (capitol 2)
$r, \theta, z$	coordonate cilindrice
$\mathbf{t}_r, \mathbf{t}_\theta, \mathbf{t}_z$	baza ortonormată asociată coordonatelor cilindrice
$r, \theta, \varphi$	coordonate sferice
$\mathbf{t}_r, \mathbf{t}_\theta, \mathbf{t}_\varphi$	baza ortonormată asociată coordonatelor sferice
$s$	abscisa curbilinie (pe o curbă)
$\tau, \nu, \beta$	versorii triedrului lui Frenet
$\rho$	raza de curbură
$\tau, \mathbf{n}, \mathbf{m}$	versorii triedrului lui Darboux
$\rho_n, \rho_g$	raza de curbură normală, respectiv geodezică

## DIMENSIUNI SI UNITATI DE MASURA

Nr.crt.	Mărimea	Dimensiuni	Unități S.I.	Observații
1	Lungime	$L^1 M^0 T^0$	m (metru)	-
2	Masă	$L^0 M^1 T^0$	kg	-
3	Timp	$L^0 M^0 T^1$	s (secunda)	-
4	Viteza	$L^1 M^0 T^{-1}$	$m s^{-1}$	$v = \frac{dx}{dt}$
5	Accelerație	$L^1 M^0 T^{-2}$	$m s^{-2}$	$a = \frac{d^2x}{dt^2}$
6	Unghi plan	$L^0 M^0 T^0$	rad	$\theta$
7	Viteză unghiulară	$L^1 M^0 T^{-1}$	$rad s^{-1}$	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
8	Accelerație unghiulară	$L^1 M^0 T^{-2}$	$rad s^{-2}$	$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$
9	Perioadă	$L^0 M^0 T^1$	s	$\tau$
10	Frecvență	$L^0 M^0 T^{-1}$	$s^{-1}$	$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$
11	Forță	$L^1 M^1 T^{-2}$	N (newton)	$F = ma$
12	Moment al forței	$L^2 M^1 T^{-2}$	J (joule)	$M_O = \mathbf{x} \times \mathbf{F}$
13	Impuls	$L^1 M^1 T^{-1}$	N s	$H = mv$
14	Moment cinetic	$L^2 M^1 T^{-1}$	J s	$K_O = \mathbf{x} \times m\mathbf{v}$
15	Energie	$L^2 M^1 T^{-2}$	J	$T = \frac{1}{2}mv^2$
16	Putere mecanică	$L^2 M^1 T^{-3}$	W (watt)	$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$

## CALCUL VECTORIAL

### §1.1. Aplicații geometrice. Identități

1.1.1. Fie A, B, C trei puncte și P un punct oarecare în spațiu. Să se arate că

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PG},$$

G fiind centrul de greutate al triunghiului ABC.

Fie C' mijlocul laturii AB.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{PA} = \vec{PG} + \vec{GA} \\ \vec{PB} = \vec{PG} + \vec{GB} \\ \vec{PC} = \vec{PG} + \vec{GC} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = 3\vec{PG} + \underbrace{\vec{GA} + \vec{GB}}_{2\vec{GC}'} + \vec{GC} = 3\vec{PG}$$

$$2\vec{GC}' = -\vec{GC}$$

În particular rezultă

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \mathbf{0}$$

1.1.2. Să se determine al patrulea vârf al unui paralelogram ABCD știind că

$$\mathbf{x}_A = 2\mathbf{t}_1 - 3\mathbf{t}_2 + 4\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{x}_B = 3\mathbf{t}_1 + 2\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3, \quad \mathbf{x}_C = \mathbf{t}_2 - 2\mathbf{t}_3$$

Condiția ca ABCD să fie paralelogram este  $\vec{AB} = \vec{DC}$  sau  $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A = \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D$ , deci

$$\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C = -\mathbf{t}_1 - 4\mathbf{t}_2 + 3\mathbf{t}_3.$$

1.1.3. Să se demonstreze relațiile

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

utilizând operațiile cu vectori.

Fie vectorii în plan

$$\mathbf{a} = \cos \alpha \mathbf{t}_1 + \sin \alpha \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{b} = \cos \beta \mathbf{t}_1 \pm \sin \beta \mathbf{t}_2$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{def}{=} \cos(\alpha \mp \beta), \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \stackrel{anal.}{=} \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{def}{=} -\sin(\alpha \mp \beta) \mathbf{t}_3, \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} \stackrel{anal.}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \cos \beta & \pm \sin \beta & 0 \end{vmatrix} = -(\sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta) \mathbf{t}_3$$

1.1.4. Să se determine ecuația vectorială a dreptei

- ce trece prin punctul  $P_0$  și are direcția  $\mathbf{u}$ ;
- ce trece prin punctele  $P_1$  și  $P_2$ .

Fie O originea unui reper și  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  respectiv  $\mathbf{x}$  vectorii de poziție ai punctelor  $P_0, P_1, P_2$  respectiv al unui punct oarecare P al dreptei. Au loc relațiile

$$a) \quad \vec{OP} = \vec{OP}_o + \vec{P}_oP, \vec{P}_oP = \lambda \mathbf{u} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \lambda \mathbf{u}, \lambda \in R$$

$$b) \quad \vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{P}_1P, \vec{P}_1P = \lambda \vec{P}_1P_2 \Rightarrow \mathbf{x} = (1 - \lambda)\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2, \lambda \in R.$$

**1.1.5.** Să se determine ecuația vectorială a planului

- ce trece prin punctul  $P_o$  și are normala  $\mathbf{n}$ ;
- determinat de drepte de direcții  $\mathbf{u}$  și  $\mathbf{v}$  ce trec prin punctul  $P_o$ ;
- ce trece prin punctele  $P_1, P_2, P_3$ .

Cu notații similare celor din problema precedentă, se obțin relațiile

$$a) \quad \vec{P}_oP \perp \mathbf{n} \Rightarrow \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = 0;$$

$$b) \quad \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \vec{P}_oP \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = 0;$$

$$c) \quad \mathbf{u} = \vec{P}_1P_2, \mathbf{v} = \vec{P}_1P_3, \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \vec{P}_1P \perp \mathbf{n} \Rightarrow (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0.$$

**1.1.6.** Condiția necesară și suficientă ca punctele A, B și P de vectori de poziție  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  și respectiv  $\mathbf{x}$  să fie colineare este ca să existe relația

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \lambda + \mu = 1.$$

Necesitatea. Fie A, B, P colineare

1°.  $\mathbf{a}$  colinear cu  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}$  ( $\alpha \neq 1 \Leftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ );  $\mathbf{x} = k \mathbf{a}$ ; relația din enunț are loc cu

$$\lambda = \frac{\alpha - k}{\alpha - 1}, \mu = \frac{k - 1}{\alpha - 1};$$

2°.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  nu sunt colineari;  $\vec{AP} = k \vec{AB} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = k(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ; relația din enunț are loc cu

$$\lambda = 1 - k, \mu = k.$$

Suficiența. Intre vectorii de poziție are loc relația  $\mathbf{x} = (1 - \mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$  de unde rezultă

$$\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \Rightarrow \vec{AP} // \vec{AB} \Rightarrow \text{A, B, P colineare}$$

Relația corespunde cu rezultatul obținut la problema 1.1.4.

**1.1.7.** Condiția necesară și suficientă ca punctele A, B, C și P de vectori de poziție  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  și respectiv  $\mathbf{x}$  să fie coplanare este ca să existe relația

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} + \nu \mathbf{c}, \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Necesitatea. Punctele A, B, C, P sunt în același plan.

1°.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  coplanari;  $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$  ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  nu sunt colineari); P în același plan cu A, B, C și O;  $\mathbf{x} = k \mathbf{a} + l \mathbf{b}$ ; relația din enunț are loc cu

$$\lambda = \frac{k(\beta - 1) - \alpha(l - 1)}{\alpha + \beta - 1}, \mu = \frac{l(\alpha - 1) - \beta(k - 1)}{\alpha + \beta - 1}, \nu = \frac{k + l - 1}{\alpha + \beta - 1}.$$

2°.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  necoplanari;  $\vec{AP} = k \vec{AB} + l \vec{AC} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{a} = k(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + l(\mathbf{c} - \mathbf{a})$ ; relația din enunț are loc cu

$$\lambda = 1 - k - l, \mu = k, \nu = l.$$

Suficiența. Intre vectorii de poziție are loc relația  $\mathbf{x} = (1 - \mu - \nu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$  de unde rezultă

$$\begin{aligned} \mathbf{x} - \mathbf{a} &= \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB} + \nu\overrightarrow{AC} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AP} \in \text{plan}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \Rightarrow A, B, C, P \text{ coplanare.} \end{aligned}$$

**1.1.8.** Să se găsească distanța de la punctul  $M(\mathbf{m})$  la planul  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \alpha$ .

Ecuția dreptei perpendiculare pe plan, prin  $M$

$$\mathbf{x} = \mathbf{m} + \lambda\mathbf{n}$$

Valoarea parametrului pentru punctul de intersecție între plan și dreaptă se obține astfel

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{m} + \lambda_o\mathbf{n}) = \alpha \Rightarrow \lambda_o = \frac{\alpha - \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{n^2}$$

Distanța de la  $M$  la plan este

$$d = \|\lambda_o\mathbf{n}\| = \frac{|\alpha - \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{n}$$

**1.1.9.** Să se găsească ecuația planului mediator al segmentului  $M_1 M_2$ ,  $M_1(\mathbf{x}_1) \neq M_2(\mathbf{x}_2)$ .

Planul mediator trece prin mijlocul  $M$  al segmentului  $M_1 M_2$  și este ortogonal pe acesta

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_M &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2); (\mathbf{x} - \mathbf{x}_M) \perp (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \Rightarrow \left[ \mathbf{x} - \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \right] \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = 0 \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^2). \end{aligned}$$

**1.1.10.** Se dau vârfurile patrulaterului  $ABCD$ :  $\mathbf{x}_A = 3\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 + 5\mathbf{t}_3$ ,  $\mathbf{x}_B = 2\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + 2\mathbf{t}_3$ ,  $\mathbf{x}_C = 5\mathbf{t}_1 + 3\mathbf{t}_2 + 7\mathbf{t}_3$ ,  $\mathbf{x}_D = 6\mathbf{t}_1 + 5\mathbf{t}_2 + 10\mathbf{t}_3$ . Să se arate că este un patrulater plan și să i se calculeze aria.

Se observă că  $\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_A - \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_C$  deci (v.pb.1.1.7) patrulaterul este plan.

$$\begin{aligned} \text{aria}(ABCD) &= \text{aria}(ABC) + \text{aria}(DBC) = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| + \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \right\| + \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right\| = \|\mathbf{t}_1 - 2\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3\| + \|\mathbf{t}_1 - 2\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3\| = 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

**1.1.11.** Să se arate că aria triunghiului cu vârfurile  $A(\mathbf{x}_A)$ ,  $B(\mathbf{x}_B)$ ,  $C(\mathbf{x}_C)$  este dată de relația

$$\text{aria}(ABC) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_A \times \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_B \times \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_C \times \mathbf{x}_A\|.$$

$$2 \text{aria}(ABC) = \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \|(\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \times (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A)\| = \|\mathbf{x}_B \times \mathbf{x}_C + \mathbf{x}_C \times \mathbf{x}_A + \mathbf{x}_A \times \mathbf{x}_B\|.$$

**1.1.12.** Să se arate că dacă

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_4,$$

atunci vectorii  $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2$  sunt paraleli.

$$(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2) = \underbrace{\mathbf{v}_4 \times \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}_{=0} = \mathbf{0}.$$

**1.1.13.** Să se arate că dacă într-un tetraedru, cu vârfurile  $A(\mathbf{x}_A), B(\mathbf{x}_B), C(\mathbf{x}_C), D(\mathbf{x}_D)$ , două perechi de muchii sunt ortogonale, atunci și muchiile din a treia pereche sunt ortogonale.

$$AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A) \cdot (\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_B) = 0$$

$$AB \perp DC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \cdot (\mathbf{x}_C - \mathbf{x}_D) = 0$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_C \cdot \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_D - \mathbf{x}_C \cdot \mathbf{x}_B + \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_B = 0 \\ \mathbf{x}_B \cdot \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_C - \mathbf{x}_B \cdot \mathbf{x}_D + \mathbf{x}_A \cdot \mathbf{x}_D = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{x}_A \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) - \mathbf{x}_D \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_A - \mathbf{x}_D) \cdot (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_C) = 0$$

$$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{DA} \perp \overrightarrow{CB}.$$

**1.1.14.** Să se demonstreze următoarele identități:

- a)  $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$  (Lagrange);
- b)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ;
- c)  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a}$ ;
- d)  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$ ;
- e)  $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ ;
- f)  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v})\mathbf{v}_3$ .

$$a) \quad \alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}); \quad \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = (ab \sin \alpha)^2 = a^2 b^2 - (ab \cos \alpha)^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$$

Altă demonstrație se poate obține din identitatea b) prin particularizarea vectorilor.

$$b) \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \cdot [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] = \\ = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$$

$$c) \quad \underbrace{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}_{\mathbf{c}} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c})\mathbf{d} - ((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -\underbrace{(\mathbf{c} \times \mathbf{d})}_{\mathbf{a}} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -[(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{a}$$

$$d) \quad \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \times [(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{d}] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \times \mathbf{d})$$

$$e) \quad \mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})] = \mathbf{a} \times \left[ \mathbf{b} \times \underbrace{(\mathbf{c} \times \mathbf{d})}_{\mathbf{a}} \right] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

$$f) \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v} \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v})\mathbf{v}_3.$$

## §1.2. Ecuații vectoriale

### 1.2.1. Să se rezolve ecuația $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \alpha$ , $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ .

Fie  $\mathbf{x}_p$  o soluție particulară a ecuației date. Atunci  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$  este soluție a ecuației omogene  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = 0$ .

Ecuația omogenă  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = 0$  este satisfăcută de orice vector ortogonal pe  $\mathbf{a}$ . Această soluție se poate reprezenta sub forma produsului vectorial  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{a} \times \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  fiind un vector arbitrar.

Soluția particulară a ecuației neomogene se caută un vector paralel cu  $\mathbf{a}$ :  $\mathbf{x}_p = k\mathbf{a}$ , constanta de proporționalitate obținându-se din ecuația dată

$$\mathbf{a} \cdot k\mathbf{a} = \alpha \Rightarrow k = \frac{\alpha}{a^2}.$$

Prin urmare soluția generală a ecuației date este

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{a^2}\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \text{ arbitrar (ortogonal pe } \mathbf{a}\text{)}.$$

Ecuația se poate interpreta ca ecuația unui plan care trece prin punctul de vector de poziție  $\mathbf{x}_p$  și are normala  $\mathbf{a}$ . Soluția ecuației este reprezentarea vectorului de poziție al oricărui punct din plan.

### 1.2.2. Să se rezolve ecuația $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ .

Fie  $\mathbf{x}_p$  o soluție particulară a ecuației date. Atunci  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$  este soluție a ecuației omogene  $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{0}$ .

Ecuația omogenă  $\mathbf{a} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{0}$  este satisfăcută de orice vector paralel cu  $\mathbf{a}$ . Această soluție se poate reprezenta sub forma  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \lambda\mathbf{a}$ ,  $\lambda$  arbitrar.

Soluția particulară a ecuației neomogene se caută un vector ortogonal pe  $\mathbf{a}$  dar și pe  $\mathbf{b}$  (proprietățile produsului vectorial):  $\mathbf{x}_p = k\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ , constanta de proporționalitate obținându-se din ecuație

$$\mathbf{a} \times k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \Rightarrow k \left[ \underbrace{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}_{=0} \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \right] = \mathbf{b} \Rightarrow k = -\frac{1}{a^2}$$

Prin urmare soluția generală a ecuației date este

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{a}}{a^2} + \lambda\mathbf{a}, \quad \lambda \text{ arbitrar.}$$

Ecuația se poate interpreta ca ecuația unei drepte care trece prin punctul de vector de poziție  $\mathbf{x}_p$  și are direcția  $\mathbf{a}$ . Soluția ecuației este reprezentarea vectorului de poziție al oricărui punct de pe dreaptă.

### 1.2.3. Să se rezolve ecuația $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}$ , $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ , $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ , $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ .

Ecuația se poate scrie sub forma

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{x} = 0$$

și admite soluție orice vector ortogonal pe  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \text{ arbitrar}$$

1.2.4. Să se rezolve ecuația

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{x} = \mathbf{a}_2 \times \mathbf{x}, \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2.$$

Ecuația se poate scrie sub forma

$$(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2) \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

și admite soluție orice vector paralel cu  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$

$$\mathbf{x} = \lambda(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2), \lambda \text{ arbitrar.}$$

1.2.5. Să se rezolve ecuația

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}) = \alpha.$$

Ecuația se poate scrie sub forma

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = \alpha$$

și admite soluția (conform problemei 1.2.1)

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \text{ vector arbitrar.}$$

Problema are sens numai pentru  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$  dacă  $\alpha \neq 0$ .

1.2.6. Să se rezolve ecuația

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) = \mathbf{c}. \text{ Discuție.}$$

Ecuația are sens numai dacă  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ . Se obține

$$\mathbf{b} \times \mathbf{x} = \frac{1}{a^2} \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} \times \mathbf{x} = \frac{1}{a^2} \mathbf{c} \times \mathbf{a} + \lambda \mathbf{a} \quad | \cdot \mathbf{b}$$

$$\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{a^2} = 0$$

Sunt posibile următoarele situații:

a)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ; atunci ecuația inițială dă

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Ecuația este compatibilă numai dacă  $\mathbf{c} = \beta \mathbf{b}$  și se reduce la

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \beta \Rightarrow \mathbf{x} = \frac{\beta}{a^2} \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \text{ arbitrar.}$$

b)  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0$ ; atunci  $\lambda = -\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}$ . Ecuația devine

$$\mathbf{b} \times \mathbf{x} = \frac{1}{a^2} \mathbf{c} \times \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{a}$$

Rezultă

$$\mathbf{x} = \mu \mathbf{b} + \frac{1}{b^2} \left[ \frac{1}{a^2} \mathbf{c} \times \mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{a} \right] \times \mathbf{b}, \mu \text{ arbitrar.}$$

1.2.7. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \alpha \\ \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b} \end{cases}, \mathbf{a} \neq \mathbf{0}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Fie  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_\perp = 0$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{0}$ . Atunci



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}_{//} = \alpha \Rightarrow \mathbf{x}_{//} = \frac{\alpha}{a^2} \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x}_{\perp} = \frac{1}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

deci soluția sistemului este

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{a^2} \mathbf{a} + \frac{1}{a^2} \mathbf{b} \times \mathbf{a}.$$

**1.2.8.** Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{b} \end{cases}$ . Discuție.

Din prima ecuație se obține

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{x}$$

Substituind în adoua ecuație, aceasta devine

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{a} - \mathbf{x}) = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}.$$

Această ecuație este cea de la pb.1.2.2. Ea are soluție numai dacă  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  (pentru  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  ecuația are soluție numai dacă și  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ).

Prin urmare soluția sistemului este

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2} \\ \mathbf{y} = (1 - \lambda) \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{a^2} \end{cases}, \lambda \text{ arbitrar.}$$

**1.2.9.** Să se rezolve sistemul  $\begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b} \\ (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \alpha \end{cases}$ .

Din primele două ecuații se obține

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{x}, \mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{x},$$

cea de a treia ecuație devine

$$[\mathbf{x} \times (\mathbf{a} - \mathbf{x})] \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{x}) = \alpha \text{ sau încă } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} = \alpha$$

Soluția acestei ecuații este

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \text{ arbitrar.}$$

Ultimul termen este un vector ortogonal pe  $\mathbf{a}$  și pe  $\mathbf{b}$ , adică în planul acestor vectori. Deci soluția sistemului este

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x} = \frac{\alpha}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \\ \mathbf{y} = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} + (1 - \lambda) \mathbf{a} - \mu \mathbf{b} \\ \mathbf{z} = -\frac{\alpha}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - \lambda \mathbf{a} + (1 - \mu) \mathbf{b} \end{array} \right\}, \lambda, \mu \text{ arbitrari.}$$

**1.2.10.** Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = \alpha_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = \alpha_2 \end{cases}, \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}, \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}.$$

Soluția primei ecuații este

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha_1}{a_1^2} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{u}, \mathbf{u} \text{ arbitrar cu } \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u} = 0$$

Introducând în cea de a doua ecuație în  $\mathbf{x}$ , se obține ecuația pentru  $\mathbf{u}$

$$(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1) \cdot \mathbf{u} = \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{a_1^2}$$

și admite soluția

$$\mathbf{u} = \left( \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{a_1^2} \right) \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1\|^2} + (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1) \times \mathbf{v},$$

$\mathbf{v}$  arbitrar, ortogonal pe  $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1$  adică  $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2$ ,  $\lambda, \mu$  arbitrari.

Dar

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1, \mathbf{v}) \\ \mathbf{v} &= \lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu = 0$$

Deci soluția sistemului este

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha_1}{a_1^2} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1 \times \left[ \left( \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{a_1^2} \right) \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1\|^2} + \lambda (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1) \times \mathbf{a}_1 \right], \lambda \text{ arbitrar}$$

sau încă

$$\mathbf{x} = \frac{\alpha_1}{a_1^2} \mathbf{a}_1 + \left( \alpha_2 - \alpha_1 \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1}{a_1^2} \right) \frac{a_1^2 \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1\|^2} + \lambda a_1^2 (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2), \lambda \text{ arbitrar.}$$

**1.2.11.** Să se rezolve sistemul 
$$\begin{cases} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} = \alpha_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x} = \alpha_2 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{x} = \alpha_3 \end{cases}, (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \neq \mathbf{0}.$$

Intrucât  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \neq \mathbf{0}$ , cei trei vectori constituie o bază și soluția se va căuta de forma

$$\mathbf{x} = k_1 \mathbf{a}^1 + k_2 \mathbf{a}^2 + k_3 \mathbf{a}^3.$$

vectorii  $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$  fiind vectorii bazei reciproce (v. §1.4 și problema 1.1.10 f)

$$\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \mathbf{a}^3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}.$$

Pentru componentele vectorului  $\mathbf{x}$  se obține

$$k_j = \alpha_j \quad j = 1, 2, 3$$

deci soluția sistemului este

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} + \alpha_2 \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)} + \alpha_3 \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}$$

Determinarea soluției s-ar putea realiza procedând ca la problema precedentă.

### §1.3. Sisteme de vectori alunecători

Moment în raport cu un pol O al vectorului  $v$  legat/alunecător, aplicat în  $A$ , este vectorul legat în  $O$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{x} \times \mathbf{v}, \quad \overrightarrow{OA} = \mathbf{x}; \quad \mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{jmn} x_m v_n \mathbf{i}_j.$$

Torsorul sistemului de vectori legați/alunecători  $.S = \{v_j, A_j\}_{j=1}^n$  în punctul  $O$ , este perechea de vectori  $\tau_O(S) = (\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$ , formată din  
- rezultanta generală  $\mathbf{R}$  a sistemului

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \text{ (calculată ca sumă de vectori liberi);}$$

- momentul rezultatant  $\mathbf{M}_O$  al sistemului în raport cu punctul  $O$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{j=1}^n \overrightarrow{OA_j} \times \mathbf{v}_j \text{ (suma momentelor calculată ca sumă de vectori legați în } O).$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \overrightarrow{O'O} \times \mathbf{R}$$

Invariantul torsorului (sistemului):  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = \text{const.}$

Axa centrală a sistemului: mulțimea punctelor  $P$  din spațiu pentru care rezultanta generală  $\mathbf{R} \neq \mathbf{o}$  și momentul rezultatant sunt coliniari:  $\mathbf{R} \times \mathbf{M}_P = \mathbf{o}$  sau  $\mathbf{M}_P = \lambda \mathbf{R}$

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP}, \mathbf{x}_o = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{M}_O}{R^2}, \alpha = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{R}}{R^2}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \alpha \mathbf{R}$$

$$\frac{M_{O1} - (x_2 R_3 - x_3 R_2)}{R_1} = \frac{M_{O2} - (x_3 R_1 - x_1 R_3)}{R_2} = \frac{M_{O3} - (x_1 R_2 - x_2 R_1)}{R_3}$$

Operații elementare de echivalență (operațiile efectuate asupra sistemului de vectori alunecători care nu îi modifică torsorul): alunecarea unui vector pe suportul său; adăugarea sau suprimarea a doi vectori egali în mărime, situați pe același suport, dar de sens opus; compunerea mai multor vectori cu suporturi concurente într-un punct; descompunerea unui vector aplicat în  $A$  în mai mulți vectori aplicați în  $A$ .

Cuplu: un sistem format din doi vectori alunecători având suporturi paralele și rezultantă nulă. Sistem echivalent cu zero:  $(S) \sim \{\mathbf{o}\} \Leftrightarrow \mathbf{R} = \mathbf{o}, \exists P \text{ a.i. } \mathbf{M}_P = \mathbf{o}$ .

Dacă două sisteme de vectori alunecători sunt echivalente (au același torsor), atunci se poate trece de la unul la celălalt prin operații elementare de echivalență.

Cazuri particulare

a)  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0$ , atunci  $\mathbf{R} \neq \mathbf{o}, \mathbf{M}_O \neq \mathbf{o}$ , caz cu cele două elemente prezente; centrul de reducere poate fi punct al axei centrale; în acest caz rezultanta are direcția axei centrale și momentul cuplului are direcția axei centrale.

b)  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \mathbf{R} \neq \mathbf{o}$  sistemul este echivalent cu un vector unic situat pe axa centrală.

$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O'' + \mathbf{M}_O^\perp, \mathbf{M}_O'' = \mathbf{o} (\parallel, \perp \text{ în raport cu } \mathbf{R}); P \in a.c., \mathbf{M}_P = \mathbf{M}_P'' = \mathbf{o}$

c)  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \mathbf{M}_O \neq \mathbf{o} (\mathbf{R} = \mathbf{o})$  sistemul este echivalent cu un cuplu de moment  $\mathbf{M}_O$ .

d)  $\mathbf{R} = \mathbf{o}, \mathbf{M}_O = \mathbf{o}$  sistemul este echivalent cu zero.

Un sistem de vectori alunecători paraleli:  $\forall v_j \in (S), \exists v_j \text{ a.i. } v_j = v_j \mathbf{u}$

$$\mathbf{R} = \sum_{j=1}^n v_j = \left( \sum_{j=1}^n v_j \right) \mathbf{u}; \quad \mathbf{M}_O = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \times v_j = \left( \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{x}_j \right) \times \mathbf{u}; \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$$

$\mathbf{x}_G = \left( \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{x}_j \right) / \left( \sum_{j=1}^n v_j \right), G$  - centrul sistemului de vectori paraleli având rezultantă nenulă.



**1.3.1.** Să se calculeze torsorul și să se găsească axa centrală pentru sistemul de vectori alunecători din figura 1.3.1:  $OA = a$ ,  $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V_3 = V$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_2 = V\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{V}_3 = -V(\sqrt{3}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = V(-\sqrt{3}\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{V}_2 = a\mathbf{t}_1 \times V\mathbf{t}_2 = aV\mathbf{t}_3$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{0};$$

sistemul este echivalent cu un vector egal cu  $\mathbf{R}$  situat pe axa centrală

Ecuția axei centrale:

$$\frac{x^3 V}{-V\sqrt{3}} = \frac{x^3 V\sqrt{3}}{V} = \frac{aV - x^1 V - x^2 V\sqrt{3}}{0} \Rightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ x^1 + x^2\sqrt{3} = a \end{cases}$$

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

- $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_4$  situat pe paralela prin B la OA;
- $\mathbf{V}_4$  traslatat în C;
- $\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4 = \mathbf{R}$  aplicat în A.

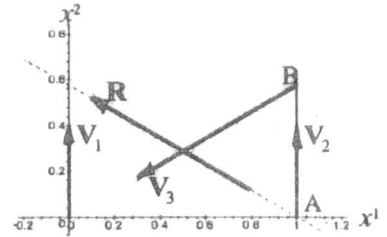


Figura 1.3.1.

**1.3.2.** Să se calculeze torsorul și să se găsească axa centrală pentru sistemul de vectori alunecători din figura 1.3.2: latura cubului  $a$ ,  $V_1 = V_2 = V_3 = V$ ,  $V_4 = V_5 = 2V$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = -\mathbf{V}_2 = V\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{V}_3 = -V\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{V}_4 = -\mathbf{V}_5 = -2V\mathbf{t}_3$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = -V\mathbf{t}_3$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{V}_2 + \overrightarrow{OC} \times \mathbf{V}_4 + \overrightarrow{OD} \times \mathbf{V}_5 =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & 0 & a \\ -V & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & -2V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2V \end{vmatrix} = aV\mathbf{t}_2$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{0}$$

sistemul este echivalent cu un vector egal cu  $\mathbf{R}$  situat pe axa centrală

Ecuția axei centrale:

$$\frac{x^2 V}{0} = \frac{aV - x^1 V}{0} = \frac{0}{-V} \Rightarrow \begin{cases} x^1 = a \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

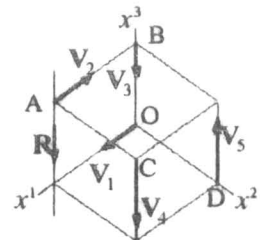


Figura 1.3.2.

- a)  $\mathbf{V}_3$  glisat în O,  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 = V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3) = \mathbf{V}_6$  glisat în H;
- b) în B se introduce sistemul echivalent cu zero  $\{-2V\mathbf{t}_2, 2V\mathbf{t}_2\}$ ,  
 $\mathbf{V}_4 - 2V\mathbf{t}_2 = -2V(\mathbf{t}_3 + \mathbf{t}_2) = \mathbf{V}_7$  glisat în E,  $2V\mathbf{t}_2 = \mathbf{V}_8$  glisat în A;
- c) în G se introduce sistemul echivalent cu zero  $\{2V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2), -2V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2)\}$ ,  
 $\mathbf{V}_5 + 2V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = 2V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3) = \mathbf{V}_9$  glisat în A,  $-2V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2) = \mathbf{V}_{10}$  glisat în E;
- d) sistemul a fost transformat într-un sistem echivalent format din vectorii
- în A:  $\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_8 = V\mathbf{t}_1 + 2V\mathbf{t}_3 = \mathbf{V}_{11} + \mathbf{V}_{12}$ ,  $V_{11} = V\mathbf{t}_1 + V\mathbf{t}_3$ ,  $\mathbf{V}_{12} = V\mathbf{t}_3$ ,
- în E:  $\mathbf{V}_7 + \mathbf{V}_{10} = -2V\mathbf{t}_1 - 2V\mathbf{t}_3$ ,
- în H:  $\mathbf{V}_6 = V\mathbf{t}_1 - V\mathbf{t}_3 = \mathbf{V}_{13} + \mathbf{V}_{14}$ ,  $\mathbf{V}_{13} = V\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{V}_{14} = -V\mathbf{t}_3$ ;
- e) vectorii  $\mathbf{V}_{11}$  în A împreună cu  $\mathbf{V}_6$  în H (suporturi concurente într-un punct pe axa  $Ox^1$ ) și  $\mathbf{V}_{13}$  în E dau o rezultantă nulă;
- f) vectorii  $\mathbf{V}_{12}$ ,  $\mathbf{V}_{14}$ ,  $\mathbf{V}_7 + \mathbf{V}_{10}$  au suport AE și rezultantă  $\mathbf{R}$ .

**1.3.3.** Să se calculeze torsorul pentru sistemul de vectori alunecători din figura 1.3.3: latura cubului  $a$ ,  $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$ ,  $V_5 = V_6 = V\sqrt{2}$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_4 = -V\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{V}_2 = V\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{V}_3 = V\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{V}_5 = -V\mathbf{t}_1 + V\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{V}_6 = V\mathbf{t}_2 - V\mathbf{t}_3$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 0 & a & 0 \\ V & -V & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & a & 0 \\ 0 & -V & V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & 0 & a \\ -V & 2V & -V \end{vmatrix} =$$

$$= -aV\mathbf{t}_1 - aV\mathbf{t}_2$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{R} = \mathbf{0};$$

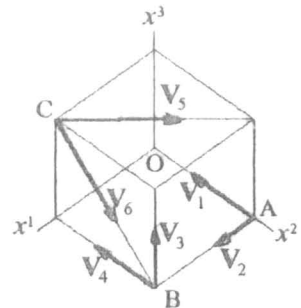


Figura 1.3.3.

sistemul este echivalent cu un cuplu de moment  $\mathbf{M}_O$ .

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

- a)  $\mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 + \mathbf{V}_6 = \mathbf{0}$ ;
- b)  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = -\mathbf{V}_5 = \mathbf{V}_7$ ;
- c)  $\mathbf{V}_5$  și  $\mathbf{V}_7$  alunecă pe suporturile lor până în centrele bazelor, momentul cuplului fiind
- $$a\mathbf{t}_3 \times (-V\mathbf{t}_1 + V\mathbf{t}_2) = -aV(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2) = \mathbf{M}_O.$$

**1.3.4.** Să se calculeze torsorul sistemului de vectori alunecători din figura 1.3.4:  $OA = a$ ,  $V_1 = V_2 = V$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = -V\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{V}_2 = V\mathbf{t}_1$$

Rezultanta :

$$\mathbf{R} = V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3).$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{V}_2 = a \mathbf{t}_2 \times V \mathbf{t}_1 = -aV \mathbf{t}_3$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = aV^2 \neq 0;$$

sistemul este echivalent cu un vector egal cu  $\mathbf{R}$  de-a lungul axei centrale și un cuplu de moment dirijat după axa centrală având mărimea  $\frac{aV^2}{V\sqrt{2}} = aV\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

după axa centrală având mărimea  $\frac{aV^2}{V\sqrt{2}} = aV\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Ecuția axei centrale:

$$\frac{x^2 V}{V} = \frac{-x^3 V - x^1 V}{0} = \frac{-aV + x^2 V}{-V} \Rightarrow \begin{cases} x^1 + x^3 = 0 \\ 2x^2 = a \end{cases}$$

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

a) se descompun vectorii  $\mathbf{V}_1$  și  $\mathbf{V}_2$  în planele verticale care îi conțin după direcțiile bisectoarelor axelor

$$\mathbf{V}_1 = -V \mathbf{t}_3 = \frac{1}{2}V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3) - \frac{1}{2}V(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3) = \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4$$

$$\mathbf{V}_2 = V \mathbf{t}_1 = \frac{1}{2}V(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3) + \frac{1}{2}V(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3) = \mathbf{V}_5 + \mathbf{V}_6$$

b) vectorii  $\mathbf{V}_3$  și  $\mathbf{V}_5$  se compun ca la problema 1.3.2 b) și dau un vector de-a lungul axei centrale egal cu  $\mathbf{R}$ ;

c) vectorii  $\mathbf{V}_4$  și  $\mathbf{V}_6$  constituie un cuplu de moment în lungul axei centrale  $\mathbf{M}_B = \frac{aV}{2}(\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_3)$

Observație: aducerea la formă canonică nu înseamnă neapărat număr minim de vectori, în acest exemplu sistemul format din doi vectori s-a transformat într-un sistem format din trei vectori (rezultanta și cuplul).

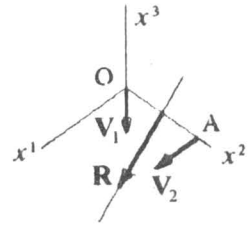


Figura 1.3.4.

**1.3.5.** Să se calculeze torsorul sistemului de vectori alunecători din figura 1.3.5: latura cubului este  $a$ ,  $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_3 = -V \mathbf{t}_3, \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_4 = V \mathbf{t}_3$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & 0 & a \\ 0 & 0 & -V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 0 & a & a \\ 0 & 0 & -V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & V \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

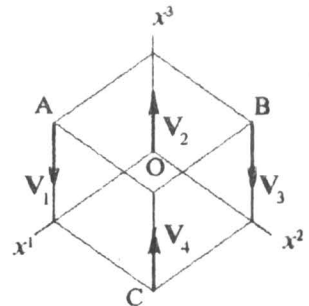


Figura 1.3.5.

deci sistemul este echivalent cu zero.

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

a) vectorii  $\mathbf{V}_1$  și  $\mathbf{V}_3$  se compun ca la problema 1.3.2 b) și dau un vector de-a lungul axei de simetrie a cubului

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 = -2V \mathbf{t}_3 = \mathbf{V}_5;$$

b) vectorii  $\mathbf{V}_2$  și  $\mathbf{V}_4$  se compun ca la problema 1.3.2 b) și dau un vector de-a lungul axei de

simetrie a cubului

$$\mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4 = 2V\mathbf{t}_3 = \mathbf{V}_6;$$

c) rezultanta vectorilor  $\mathbf{V}_5$  și  $\mathbf{V}_6$  este nulă.

**1.3.6.** Să se calculeze torsorul sistemului de vectori alunecători din figura 1.3.6:  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, 2a, 0)$ ,  $C(a, 2a, b)$ ,  $V_1 = V_3 = V_4 = V_5 = V$ ,  $V_2 = 2V$ . Să se aducă sistemul la forma canonică prin operații de echivalență.

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_4 = -\mathbf{V}_3 = V\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{V}_2 = -2V\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{V}_5 = V\mathbf{t}_1$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = V(\mathbf{t}_1 + 2\mathbf{t}_2 + \mathbf{t}_3)$$

Momentul rezultant în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2V & V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 0 & 2a & 0 \\ V & 0 & V \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ a & 2a & b \\ 0 & 0 & -V \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0, \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{0};$$

sistemul este echivalent cu un vector egal cu  $\mathbf{R}$  în lungul axei centrale.

Ecuatia axei centrale:

$$\frac{2x^3V - x^2V}{V} = \frac{x^1V - x^3V}{2V} = \frac{x^2V - 2x^1V}{V} \Rightarrow 2x^3 - x^2 = x^1 - x^3 = x^2 - x^1$$

dreapta OD,  $D(a, 2a, a)$ .

Aducerea sistemului la forma canonică prin operații de echivalență:

- vectorii  $\mathbf{V}_1$  și  $\mathbf{V}_2$  se compun și dau un vector  $\mathbf{V}_6$  al cărui suport trece prin D;
- vectorii  $\mathbf{V}_4$  și  $\mathbf{V}_5$  se compun și dau un vector  $\mathbf{V}_7$  al cărui suport trece prin D;
- vectorii  $\mathbf{V}_3$ ,  $\mathbf{V}_6$  și  $\mathbf{V}_7$  se compun și dau un vector egal cu  $\mathbf{R}$  al cărui suport este OD.

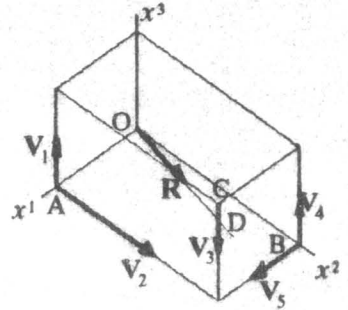


Figura 1.3.6.

**1.3.7.** Să se calculeze torsorul sistemului de vectori alunecători din figura 1.3.7: latura cubului este 2 u.m.,  $V_1 = 10$  u.m.,  $V_2 = V_3 = 12\sqrt{2}$  u.m.

$$\mathbf{V}_1 = 10\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{V}_2 = 12(-\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3), \quad \mathbf{V}_3 = 12(\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_3)$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = 10\mathbf{t}_2 + 12\mathbf{t}_3$$

Momentul rezultant în raport cu punctul O:

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -12 & 0 & 12 \end{vmatrix} = \\ = 24\mathbf{t}_1 - 24\mathbf{t}_2 + 44\mathbf{t}_3$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = -240 + 1056 = 816 \neq 0, \quad \mathbf{R} \neq \mathbf{0}$$

deci sistemul este echivalent cu un vector dirijat după axa centrală și un cuplu de moment în lungul axei centrale.

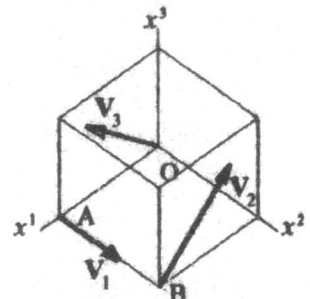


Figura 1.3.7.

1.3.8. Să se calculeze torsorul sistemului de vectori alunecători din figura 1.3.8:  $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$ . Să se discute aducerea sistemului la forma canonică.

Aplicație numerică:  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 4 \text{ m}$ ,  $c = 3 \text{ m}$ ,  $P = 2 \text{ N}$ ,  $Q = -1 \text{ N}$ ,  $S = 2 \text{ N}$ .

$$\mathbf{P} = P\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{Q} = Q\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{S} = S\mathbf{t}_1$$

Rezultanta:

$$\mathbf{R} = S\mathbf{t}_1 + P\mathbf{t}_2 + Q\mathbf{t}_3.$$

Momentul rezultat în raport cu punctul O:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= a\mathbf{t}_1 \times P\mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}_2 \times Q\mathbf{t}_3 + c\mathbf{t}_3 \times S\mathbf{t}_1 = \\ &= bQ\mathbf{t}_1 + cS\mathbf{t}_2 + aP\mathbf{t}_3. \end{aligned}$$

Invariantul torsorului:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = bQS + cSP + aPQ.$$

Forme canonice posibile:

1° sistem echivalent cu zero

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O = \mathbf{0} \Leftrightarrow P = Q = S = 0;$$

2° sistem echivalent cu un vector nenul egal cu rezultanta, de-a lungul axei centrale

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P^2 + Q^2 + S^2 \neq 0 \\ bQS + cSP + aPQ = 0 \end{cases};$$

axa cenrală se determină din

$$\frac{bQ - x^2Q + x^3P}{S} = \frac{cS - x^3S + x^1Q}{P} = \frac{aP - x^1P + x^2S}{Q};$$

există două situații posibile:

- sistemul inițial este format dintr-un singur vector nenul, de exemplu  $P \neq 0, Q = S = 0$ ; axa centrală a sistemului este dreapta suport a vectorului nenul, pentru exemplul considerat  $x^1 = a$ ;

- sistemul inițial este format din doi vectori nenuli, de exemplu  $P \neq 0, Q \neq 0, S = 0$ ; axa

centrală este dreapta 
$$\begin{cases} x^1 = \frac{P^2}{P^2 + Q^2} \\ x^2Q - x^3P = bQ \end{cases};$$

3° sistem echivalent cu un cuplu

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_O \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} P = Q = S = 0 \\ (bQ)^2 + (cS)^2 + (aP)^2 \neq 0 \end{cases};$$

această situație este imposibilă, condițiile fiind incompatibile;

4° sistem echivalent cu un vector nenul egal cu rezultanta, de-a lungul axei centrale și un cuplu de moment dirijat după axa centrală

$$\mathbf{R} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P^2 + Q^2 + S^2 \neq 0 \\ bQS + cSP + aPQ \neq 0 \end{cases}$$

axa cenrală se determină din

$$\frac{bQ - x^2Q + x^3P}{S} = \frac{cS - x^3S + x^1Q}{P} = \frac{aP - x^1P + x^2S}{Q}$$

momentul cuplului este 
$$\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O}{\|\mathbf{R}\|^2} \mathbf{R} = \frac{bQS + cSP + aPQ}{P^2 + Q^2 + S^2} (S\mathbf{t}_1 + P\mathbf{t}_2 + Q\mathbf{t}_3).$$

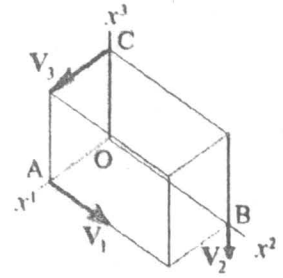


Figura 1.3.8.



Pentru aplicația numerică:

$$\mathbf{R} = 2\mathbf{t}_1 + 2\mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_3 \text{ (N)}, \mathbf{M}_O = -4\mathbf{t}_1 + 6\mathbf{t}_2 + 4\mathbf{t}_3 \text{ (Nm)}, \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$$

deci sistemul este echivalent cu un vector unic egal cu rezultanta situat pe axa centrală

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + 4x^3 = 10 \\ 4x^1 - 5x^2 - 2x^3 = 4 \end{cases}$$

**1.3.9.** Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu în raport cu care momentul resultant al sistemului este minim.

1° Rezultanta sistemului este nulă. În acest caz momentul resultant este același în orice punct din spațiu. Locul geometric este întreg spațiul.

2° Rezultanta sistemului este nenulă. Momentul în raport cu un punct se descompune în două componente: una paralelă cu rezultanta, alta ortogonală pe aceasta

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_O'' + \mathbf{M}_O^\perp, \mathbf{M}_O'' = \mathbf{o}(\parallel, \perp \text{ în raport cu } \mathbf{R})$$

Invariantul sistemului se va explicita prin

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O''$$

deci componenta paralelă are mărime constantă și cum  $\|\mathbf{M}_O\|^2 = \|\mathbf{M}_O''\|^2 + \|\mathbf{M}_O^\perp\|^2$ , momentul resultant este minim în punctele în care componenta ortogonală este nulă; așadar locul geometric căutat este locul geometric al punctelor în care momentul resultant este paralel cu rezultanta, prin urmare locul geometric este axa centrală.

**1.3.10.** Să se determine locul geometric al punctelor din spațiu în raport cu care momentul resultant al sistemului are mărime dată  $M$ .

1° Rezultanta sistemului este nulă. În acest caz momentul resultant este același în orice punct din spațiu. Dacă mărimea momentului resultant este  $M$ , atunci locul geometric este întreg spațiul; dacă mărimea momentului resultant este diferită de  $M$ , atunci locul geometric este mulțimea vidă.

2° Rezultanta sistemului este nenulă. Fie  $(\Delta)$  axa centrală a sistemului și  $A$  un punct al locului geometric căutat.

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_{\min} - \overrightarrow{OA} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_{\min} - \mathbf{x}^\perp \times \mathbf{R} \left( \overrightarrow{OA} = \mathbf{x}'' + \mathbf{x}^\perp \hat{\text{ în raport cu } \mathbf{R}} \right).$$

Dar

$$M^2 = \|\mathbf{M}_{\min}\|^2 + \|\mathbf{x}^\perp \times \mathbf{R}\|^2 = \|\mathbf{M}_{\min}\|^2 + d^2 \|\mathbf{R}\|^2 \Rightarrow d^2 = \frac{M^2 - M_{\min}^2}{\|\mathbf{R}\|^2} = \text{const.}$$

Locul geometric este o suprafață cilindrică cu generatoarele paralele cu axa centrală a sistemului și având curbă directoare cercul de rază  $d$  cu centrul pe axa centrală.

## §1.4. Baze reciproce. Coordonate curbilini

### 1.4.1. Fie

$$\epsilon_{jkl} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & l \end{pmatrix} \text{ permutare par\u0103} \\ -1 & \text{pentru } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & l \end{pmatrix} \text{ permutare impar\u0103} \\ 0 & \text{pentru } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & l \end{pmatrix} \neq \text{permutare} \end{cases}$$

S\u0103 se arate c\u0103

$$\epsilon_{jkl} \in^{pqr} = \det \begin{bmatrix} \delta_j^p & \delta_j^q & \delta_j^r \\ \delta_k^p & \delta_k^q & \delta_k^r \\ \delta_l^p & \delta_l^q & \delta_l^r \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{jkl} \in^{jqr} = \delta_k^q \delta_l^r - \delta_k^r \delta_l^q; \quad \epsilon_{jkl} \in^{jkr} = 2\delta_l^r; \quad \epsilon_{jkl} \in^{jkl} = 6.$$

Fie matricea unitate  $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , av\u00e2nd determinantul  $\det I = 1$ . Prin formarea

unei matrice noi din liniile \u015fi coloanele matricei  $I$ , determinantul acestuia va fi  $+1$  dac\u0103 cu liniile sau coloanele s-au efectuat permut\u0103ri pare,  $-1$  dac\u0103 cu liniile sau coloanele s-au efectuat permut\u0103ri impare \u015fi  $0$  dac\u0103 nu s-au men\u015finut toate liniile sau coloanele matricei unitate. Acest rezultat este scris prescurtat \u00een prima rela\u0162ie.

$$\begin{aligned} \epsilon_{jkl} \in^{jqr} &= \det \begin{bmatrix} \delta_j^j & \delta_j^q & \delta_j^r \\ \delta_k^j & \delta_k^q & \delta_k^r \\ \delta_l^j & \delta_l^q & \delta_l^r \end{bmatrix} = \\ &= 3(\delta_k^q \delta_l^r - \delta_l^q \delta_k^r) - \delta_j^q (\delta_k^j \delta_l^r - \delta_k^r \delta_l^j) + \delta_j^r (\delta_k^j \delta_l^q - \delta_k^q \delta_l^j) = \delta_k^q \delta_l^r - \delta_k^r \delta_l^q \\ \epsilon_{jkl} \in^{jkr} &= \delta_k^k \delta_l^r - \delta_k^r \delta_l^k = 2\delta_l^r; \quad \epsilon_{jkl} \in^{jkl} = 2\delta_l^l = 6 \end{aligned}$$

1.4.2. S\u0103 se arate c\u0103 dac\u0103  $\{e_j\}_{j=1,2,3}$  este o baz\u0103 \u00een  $V$ , atunci exist\u0103 o baz\u0103 unic\u0103 \u00een  $V$ ,  $\{e^k\}_{k=1,2,3}$ , cu proprietatea  $e_i \cdot e^k = \delta_i^k$ .

Fie  $k = 1$ . Vectorul  $e^1$  trebuie s\u0103 verifice rela\u0162iile

$$e_1 \cdot e^1 = 1, \quad e_2 \cdot e^1 = 0, \quad e_3 \cdot e^1 = 0.$$

Din ultimele dou\u0103 rela\u0162ii rezult\u0103 c\u0103  $e^1$  este ortogonal pe  $e_2, e_3$ , deci este colinear cu produsul lor vectorial

$$e^1 = \alpha e_2 \times e_3,$$

coeficientul de propor\u0162ionalitate determin\u00e2ndu-se din prima rela\u0162ie

$$\alpha = 1/(e_1, e_2, e_3).$$

Proced\u00e2nd analog cu ceilal\u0162i indici, se ob\u0162ine sistemul unic de vectori

$$e^j = \frac{1}{2(e_1, e_2, e_3)} \epsilon^{jkl} e_k \times e_l$$

pentru care

$$(e^1, e^2, e^3) = 1/(e_1, e_2, e_3)$$

relație care înseamnă linear independența sistemului de vectori  $\{e^k\}_{k=1,2,3}$ .

Două baze  $\{e_j\}_{j=1,2,3}$  și  $\{e^k\}_{k=1,2,3}$  ai căror vectori verifică relațiile  $e_j \cdot e^k = \delta_j^k$  se numesc *baze reciproce*.

### 1.4.3. Să se determine expresiile analitice ale operațiilor cu vectori în baze reciproce.

Un vector poate fi descompus în oricare dintre cele două baze reciproce

- ca vector contravariant

$$v = v^j e_j, \quad v^j = v \cdot e^j;$$

- ca vector covariant

$$v = v_k e^k, \quad v_k = v \cdot e_k.$$

Relațiile între componentele contravariante și cele covariante (relații de transformare sau relații de ridicare respectiv coborâre a indicilor) sunt

$$v^j = v_k (e^j \cdot e^k), \quad v_m = v^p (e_m \cdot e_p).$$

Expresiile analitice ale operațiilor cu vectori sunt:

- adunarea a doi vectori

$$a + b = (a^j + b^j) e_j = (a_k + b_k) e^k$$

(vectorii se consideră de același tip, suma este de același tip cu termenii);

- înmulțirea unui vector cu un scalar

$$\alpha a = (\alpha a^j) e_j = (\alpha a_k) e^k;$$

- produs scalar a doi vectori

$$a \cdot b = a^j b_j = a_k b^k = a^m b^p (e_m \cdot e_p) = a_r b_s (e^r \cdot e^s)$$

(expresia este mai simplă dacă se consideră vectorii de tipuri diferite);

- produs vectorial a doi vectori

$$a \times b = (e_1, e_2, e_3) \begin{vmatrix} e^1 & e^2 & e^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(produsul a doi vectori contravarianți/covarianți este un vector covariant/contravariant);

- produsul mixt a trei vectori

$$(a, b, c) = (e_1, e_2, e_3) \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{(e_1, e_2, e_3)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

### 1.4.4. Să se determine relațiile dintre componentele co- și contravariante la schimbarea bazelor.

Fie în  $V$  două baze  $\{e_j\}_{j=1,2,3}$  și  $\{e'_k\}_{k=1,2,3}$ ; bazele reciproce corespunzătoare  $\{e^m\}_{m=1,2,3}$  și  $\{e'^n\}_{n=1,2,3}$ . Au loc relațiile

$$\begin{aligned} e_j &= \alpha_j^k e'_k & \alpha_j^k &= e_j \cdot e'^k & e'_m &= \alpha'^n_m e_n & \alpha'^n_m &= e'_m \cdot e^n \\ e^p &= \beta^p_q e'^q & \beta^p_q &= e^p \cdot e'^q & e'^r &= \beta'^s_r e^s & \beta'^s_r &= e'^r \cdot e^s \end{aligned}$$

Seturile de coeficienți considerați nu sunt funcționali independenți; din expresiile lor rezultă

$$\beta_q^p = \alpha_q'^p, \quad \beta_r^s = \alpha_s^r; \quad \alpha_j^k \alpha_k'^p = \delta_j^p, \quad \alpha_k'^p \alpha_p^j = \delta_k^j,$$

adică matricele  $A = [\alpha_j^k]$  și  $A' = [\alpha_k'^j]$  sunt matrice inverse, cu

$$\det A = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)}.$$

Componentele unui vector în bazele considerate sunt legate prin

$$v^j = v'^k \alpha_k'^j, \quad v'^k = v^j \alpha_j^k,$$

$$v_s = v_r' \alpha_s^r, \quad v_r' = v_s \alpha_r'^s.$$

Relațiile se mai pot scrie matriceal (formal)

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]^T = A[\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3]^T$$

$$[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3]^T = A^{-1}[\mathbf{e}'^1, \mathbf{e}'^2, \mathbf{e}'^3]^T$$

$$[v^1, v^2, v^3]^T = A^{-T}[v'^1, v'^2, v'^3]^T$$

$$[v_1, v_2, v_3]^T = A^T[v'_1, v'_2, v'_3]^T$$

#### 1.4.5. Transformare de coordonate curbilinii. Suprafață de coordonate, linii de coordonate.

Se numește *transformare de coordonate curbilinii* aplicația

$$\mathbf{x} : D \rightarrow V, \quad D - \text{domeniu convex}$$

$$x^k = x^k(q^1, q^2, q^3) \quad k = 1, 2, 3$$

bijectivă, diferentiabilă, cu jacobian nenul

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \neq 0.$$

Se numește *suprafață de coordonate*

$$q^k = q^{j*} = \text{const.}$$

suprafața

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3) \Big|_{q^l = q^{l*}}$$

*Linie de coordonate* ( $q^k$ ) este curba aflată la intersecția suprafețelor de coordonate corespunzătoare celorlalți doi indici

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3) \Big|_{q^l = q^{l*}, q^m = q^{m*}}.$$

#### 1.4.6. Vectorii $\mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} = \frac{\partial x^k}{\partial q^j} \mathbf{i}_k$ $j = 1, 2, 3$ formează în fiecare punct o bază.

Produsul mixt al celor trei vectori este chiar jacobianul transformării

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} = J \neq 0$$

deci ei formează un sistem linear independent de trei vectori adică o bază. Baza  $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1,2,3}$  se numește *bază locală naturală*. Baza definită este calculată în fiecare punct, de aceea se

numește locală. In cazul particular al transformării identice, baza  $\{\mathbf{t}_j\}_{j=1,2,3}$  verifică definiția bazei locale; acest fapt justifică denumirea de bază naturală.

1.4.7. Baza  $\{\mathbf{g}^m\}_{m=1,2,3}$  fiind reciproca bazei locale naturale  $\{\mathbf{g}_j\}_{j=1,2,3}$  și notând

$$\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k = g_{jk}, \quad \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}^n = g^{mn} \quad (g_{jk} = g_{kj}, \quad g^{mn} = g^{nm})$$

să se arate că

$$\mathbf{g}_j = g_{jm} \mathbf{g}^m, \quad \mathbf{g}^p = g^{ps} \mathbf{g}_s.$$

Rezultă direct din modul de obținere a componentelor unui vector într-o bază (v.pb.1.4.3).

1.4.8. Să se arate că matricile  $[g_{jk}]_{j,k=1,2,3}$ ,  $[g^{mn}]_{m,n=1,2,3}$  sunt matrice inverse

$$\delta_l^j = \mathbf{g}^j \cdot \mathbf{g}_l = \mathbf{g}^j \cdot (g_{lm} \mathbf{g}^m) = g_{lm} g^{mj} = g^{jm} g_{ml}$$

1.4.9. Să se arate că  $J^2 = g$ ,  $g = \det [g_{jk}]$ .

$$J^2 = \left( \det \left[ \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \right] \right)^2 = \det \left[ \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \right] \cdot \det \left[ \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \right]^T = \det \left[ \frac{\partial x^j}{\partial q^k} \frac{\partial x^j}{\partial q^m} \right] = \det [g_{km}] = g.$$

*Observație.* Se pot considera numai transformări cu jacobian pozitiv; dacă jacobianul nu este pozitiv, cum el nu se anulează, păstrează același semn și printr-o renumerotare a coordonatelor se poate aduce la o transformare cu jacobian pozitiv.

$$J = \sqrt{g}.$$

1.4.10.  $\{g_{jk}\}_{j,k=1,2,3}$  definesc proprietățile metrice în  $\mathbf{x}(D)$ .

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} dq^j = \mathbf{g}_j dq^j$$

- Lungimi

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{g}_j dq^j) \cdot (\mathbf{g}_k dq^k) = g_{jk} dq^j dq^k;$$

- arii

$$d_j \mathbf{x} = \mathbf{g}_j dq^j \quad (\text{fără sumare după } j)$$

$$d_j \mathbf{x} \times d_k \mathbf{x} = \epsilon_{jkl} g^l (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) dq^j dq^k \quad (\text{fără sumare după } j, k)$$

$$|d_j \mathbf{x} \times d_k \mathbf{x}| = |\epsilon_{jkl}| \sqrt{g g^{ll}} dq^j dq^k \quad (\text{fără sumare după } j, k)$$

$$|d_1 \mathbf{x} \times d_2 \mathbf{x}| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} dq^1 dq^2 \quad \text{etc.};$$

- volume

$$(d_1 \mathbf{x}, d_2 \mathbf{x}, d_3 \mathbf{x}) = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3$$

1.1. Să se obțină componentele fizice ale unui vector.

Coordonatele curbilinii pot fi lungimi sau unghiuri. Vectorii bazei naturale corespunzătorii coordonatelor lungimi vor fi adimensionali, iar cei corespunzătorii coordonatelor unghiuri vor avea dimensiunea unei lungimi

$$[q^j] = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ} \quad [g_j] = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ}$$

$$[q^j] = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ} \quad [g_j] = M^{\circ}L^{\circ}T^{\circ}$$

Din acest motiv componentele unui vector sau ale unui tensor nu vor avea neaparat dimensiunea acestuia. De aceea se asociază fiecărei componente o mărime numită componenta fizică obținută prin adimensionalizarea bazei

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{g}_j = \sum_{j=1}^3 \left( v^j \sqrt{g_{jj}} \right) \frac{\mathbf{g}_j}{\sqrt{g_{jj}}} = v_k \mathbf{g}^k = \sum_{k=1}^3 \left( v_k \sqrt{g^{kk}} \right) \frac{\mathbf{g}^k}{\sqrt{g^{kk}}}$$

$$v^{j(\text{fiz})} = v^j \sqrt{g^{jj}}, \quad v_k^{(\text{fiz})} = v_k \sqrt{g^{kk}} \quad (\text{fără sumare după } j, k)$$

În cazul coordonatelor curbilinii *ortogonale* ( $g_{jk} = 0$  pentru  $j \neq k$ ) aceste relații devin

$$v^{j(\text{fiz})} = v^j \sqrt{g^{jj}}, \quad v_k^{(\text{fiz})} = \frac{v_k}{\sqrt{g^{kk}}} \quad (\text{fără sumare după } j, k)$$

1.4.12. Fie coordonatele curbilinii introduse prin relațiile

$$\mathbf{x} : D \rightarrow V \quad x^j = f^j(q^1, q^2, q^3) \quad j = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{x} : D' \rightarrow V \quad x^j = f'^j(q'^1, q'^2, q'^3) \quad j = 1, 2, 3$$

cu proprietățile menționate în definiția transformărilor de coordonate. Aceste proprietăți permit definirea unei transformări de coordonate

$$q : D' \rightarrow D \quad q^j = Q^j(q'^1, q'^2, q'^3) \quad j = 1, 2, 3$$

cu aceleași proprietăți. Să se obțină relațiile între vectorii bazelor locale naturale asociate și dintre componentele vectorilor în bazele respective.

Relațiile între vectorii bazelor locale naturale asociate și dintre componentele vectorilor în bazele respective

$$\mathbf{g}_j = \frac{\partial q^k}{\partial q^j} \mathbf{g}'_k \quad \mathbf{g}'_m = \frac{\partial q^n}{\partial q'^m} \mathbf{g}_n$$

$$\mathbf{g}^p = \frac{\partial q^p}{\partial q'^s} \mathbf{g}'^s \quad \mathbf{g}'^r = \frac{\partial q^r}{\partial q'^h} \mathbf{g}^h$$

$$\mathbf{v} = v^j \mathbf{g}_j = v_k \mathbf{g}^k = v'^m \mathbf{g}'_m = v'_p \mathbf{g}'^p$$

$$v^j = \frac{\partial q^j}{\partial q'^m} v'^m \quad v'^m = \frac{\partial q^m}{\partial q^j} v^j$$

$$v_p = \frac{\partial q'^r}{\partial q^p} v'_r \quad v'_r = \frac{\partial q^s}{\partial q'^r} v_s$$

Prin compararea relațiilor de schimbare a componentelor unui vector cu relațiile de schimbare a bazelor locale naturale asociate schimbării de coordonate curbilinii, se poate da o justificare a denumirilor date la pb. 1.4.3:

- vector contravariant: relațiile conțin derivatele coordonatelor în sens contrar,

- vector covariant: relațiile conțin derivatele coordonatelor în același sens.

1.4.13. Se consideră o transformare de coordonate de clasă  $C^2$ . Să se arate că

$$\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} = \Gamma_{kj}^s \mathbf{g}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial q^k} = -\Gamma_{kr}^p \mathbf{g}^r$$

$$\Gamma_{jk}^s = \Gamma_{kj}^s; \quad \Gamma_{jk}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left[ \frac{\partial g_{rk}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^r} \right]$$

$\Gamma_{jk}^s$  - simbolurile lui Christoffel de speța a doua.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} = \Gamma_{kj}^s \mathbf{g}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial q^k} = B_{kr}^p \mathbf{g}^r$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} \right) = \frac{\partial}{\partial q^j} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^k} \right) = \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j} \Rightarrow \Gamma_{jk}^s = \Gamma_{kj}^s$$

$$\Gamma_{jk}^s = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}^s = \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \cdot g^{sr} \mathbf{g}_r = \frac{1}{2} g^{sr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_r + \frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_r \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{sr} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_r}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_j + \frac{\partial g_{kr}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_r}{\partial q^j} \cdot \mathbf{g}_k \right) = \frac{1}{2} g^{sr} \left( \frac{\partial g_{jr}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{rk}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_k}{\partial q^r} \cdot \mathbf{g}_j - \frac{\partial g_j}{\partial q^r} \cdot \mathbf{g}_k \right) =$$

$$= \frac{1}{2} g^{sr} \left( \frac{\partial g_{kr}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^r} \right)$$

$$B_{kr}^p = \frac{\partial \mathbf{g}^p}{\partial q^k} \cdot \mathbf{g}_r = \frac{\partial}{\partial q^k} (\mathbf{g}^p \cdot \mathbf{g}_r) - \mathbf{g}^p \cdot \frac{\partial \mathbf{g}_r}{\partial q^k} = \frac{\partial g_r^p}{\partial q^k} - \Gamma_{kr}^p = 0 - \Gamma_{kr}^p = -\Gamma_{kr}^p.$$

1.4.14. Fie câmpul diferențiabil  $\mathbf{v}$  și o transformare de coordonate de clasă  $C^2$ . Să se arate că

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^k} = v^j{}_{,k} \mathbf{g}_j = v_{m;k} \mathbf{g}^m; \quad v^j{}_{,k} = \frac{\partial v^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j v^r; \quad v_{m;k} = \frac{\partial v_m}{\partial q^k} - \Gamma_{km}^p v_p$$

Relațiile rezultă din regulile de derivare ale produselor și rezultatele stabilite în propoziția precedentă

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} (v^j \mathbf{g}_j) = \frac{\partial v^j}{\partial q^k} \mathbf{g}_j + v^j \frac{\partial \mathbf{g}_j}{\partial q^k} = \left( \frac{\partial v^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j v^r \right) \mathbf{g}_j = v^j{}_{,k} \mathbf{g}_j$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q^k} = \frac{\partial}{\partial q^k} (v_m \mathbf{g}^m) = \frac{\partial v_m}{\partial q^k} \mathbf{g}^m + v_m \frac{\partial \mathbf{g}^m}{\partial q^k} = \left( \frac{\partial v_m}{\partial q^k} - \Gamma_{km}^p v_p \right) \mathbf{g}^m = v_{m;k} \mathbf{g}^m$$

1.4.15. Fie coordonatele cilindrice definite prin

$$\begin{cases} x^1 = q^1 \cos q^2 \\ x^2 = q^1 \sin q^2 \\ x^3 = q^3 \end{cases} \quad D = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (-\infty, +\infty)$$

(în notații obișnuite  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = z$ ). Să se determine  
a) jacobianul transformării;

- a) suprafețele de coordonate, liniile de coordonate;
- b) vectorii bazei locale naturale și ai reciprocei;
- c) relațiile pentru componente fizice;
- d) formulele de derivare.

a) Jacobianul transformării este

$$J = \begin{vmatrix} \cos q^2 & \sin q^2 & 0 \\ -q^1 \sin q^2 & q^1 \cos q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = q^1.$$

b) Suprafețele de coordonate

- $q^1 = q^{1*}$  supr.cilindrică de generatoare paralelă cu  $\mathbf{t}_3$ , curbă directoare cerc de rază  $q^{1*}$ ;
- $q^2 = q^{2*}$  semiplan prin axa  $\mathbf{t}_3$ , care face cu direcția  $\mathbf{t}_1$  unghiul  $q^{2*}$ ;
- $q^3 = q^{3*}$  planul normal la  $\mathbf{t}_3$ ,  $x^3 = q^{3*}$ .

Liniile de coordonate

- $q^2 = q^{2*}, q^3 = q^{3*}$  dreaptă în plan normal la  $\mathbf{t}_3$ ,  $z = q^{3*}$ , care face cu  $\mathbf{t}_1$  unghiul  $q^{2*}$ ;
- $q^3 = q^{3*}, q^1 = q^{1*}$  dreaptă în plan normal la  $\mathbf{t}_3$ ,  $z = q^{3*}$ , tangenta la cercul din plan cu centrul pe axa  $Ox^3$  de rază  $q^{1*}$ ;
- $q^1 = q^{1*}, q^2 = q^{2*}$  cerc în plan normal la  $\mathbf{t}_3$ , cu centrul pe axa  $Ox^3$

c) Bazele locale

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} = \cos q^2 \mathbf{t}_1 + \sin q^2 \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} = q^1 (-\sin q^2 \mathbf{t}_1 + \cos q^2 \mathbf{t}_2) \\ \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^3} = \mathbf{t}_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = \cos q^2 \mathbf{t}_1 + \sin q^2 \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{g}^2 = \frac{1}{q^1} (-\sin q^2 \mathbf{t}_1 + \cos q^2 \mathbf{t}_2) \\ \mathbf{g}^3 = \mathbf{t}_3 \end{cases}$$

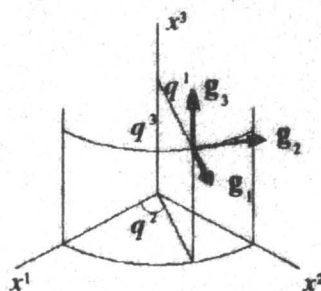


Figura 1.4.15.

$$[g_{\mu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (q^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [g^{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(q^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Coordonatele cilindrice considerate sunt ortogonale.

d)  $v_r = v^1 = v_1, v_\theta = q^1 v^2 = \frac{1}{q^1} v_2, v_z = v^3 = v_3.$

Coordonatele fiind ortogonale există un singur set de componente fizice.

e) Simbolurile lui Christoffel de speța a doua nenuli sunt

$$\Gamma_{22}^1 = -q^1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{q^1}$$

Rezultă

$$v^1_{;1} = \frac{\partial v^1}{\partial q^1}, \quad v^2_{;1} = \frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{12}^2 v^2, \quad v^3_{;1} = \frac{\partial v^3}{\partial q^1},$$

$$v^1_{;2} = \frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2, \quad v^2_{;2} = \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{21}^2 v^1, \quad v^3_{;2} = \frac{\partial v^3}{\partial q^2},$$



$$\begin{aligned}
 v_{1;3}^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^3}, \quad v_{2;3}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial q^3}, \quad v_{3;3}^3 = \frac{\partial v^3}{\partial q^3}, \\
 v_{1;1}^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1}, \quad v_{2;1}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial q^1} - \Gamma_{21}^2 v_2, \quad v_{3;1}^3 = \frac{\partial v^3}{\partial q^1}, \\
 v_{1;2}^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^2} - \Gamma_{12}^1 v_2, \quad v_{2;2}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial q^2} - \Gamma_{22}^2 v_1, \quad v_{3;2}^3 = \frac{\partial v^3}{\partial q^2}, \\
 v_{1;3}^1 &= \frac{\partial v^1}{\partial q^3}, \quad v_{2;3}^2 = \frac{\partial v^2}{\partial q^3}, \quad v_{3;3}^3 = \frac{\partial v^3}{\partial q^3}.
 \end{aligned}$$

#### 1.4.16. Fie coordonatele sferice definite prin

$$\begin{aligned}
 x^1 &= q^1 \sin q^2 \cos q^3 \\
 x^2 &= q^1 \sin q^2 \sin q^3 \\
 x^3 &= q^1 \cos q^2
 \end{aligned} \quad D = (0, +\infty) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi)$$

(în notații obișnuite  $q^1 = r$ ,  $q^2 = \theta$ ,  $q^3 = \varphi$ ). Să se determine

- Jacobianul transformării;
- suprafețele de coordonate, liniile de coordonate;
- vectorii bazei locale naturale și ai reciprocei;
- relațiile pentru componente fizice;
- formulele de derivare.

a) Jacobianul transformării este

$$J = \begin{vmatrix} \sin q^2 \cos q^3 & \sin q^2 \sin q^3 & \cos q^2 \\ q^1 \cos q^2 \cos q^3 & q^1 \cos q^2 \sin q^3 & -q^1 \sin q^2 \\ -q^1 \sin q^2 \sin q^3 & q^1 \sin q^2 \cos q^3 & 0 \end{vmatrix} = (q^1)^2 \sin q^2$$

b) Suprafețele de coordonate

- $q^1 = q^{1*}$  suprafața sferică cu centrul în origine și de rază  $q^{1*}$ ;
- $q^2 = q^{2*}$  suprafața conică (con circular) cu vârful în origine și deschidere la vârf  $2q^{2*}$ ;
- $q^3 = q^{3*}$  semiplan prin axa  $Ox^3$ , care face unghiul  $q^{3*}$  cu direcția  $\mathbf{t}_1$ .

Liniile de coordonate

- $q^2 = q^{2*}, q^3 = q^{3*}$  dreaptă prin origine (generatoarea conului);
- $q^3 = q^{3*}, q^1 = q^{1*}$  cerc cu centrul pe axa  $Ox^3$ , normal la această axă (cerc paralel pe sfera de rază  $q^{1*}$ );
- $q^1 = q^{1*}, q^2 = q^{2*}$  semicerc cu centrul în origine, având un diametru pe direcția  $\mathbf{t}_3$  (cerc meridian pe sfera de rază  $q^{1*}$ ).

c) Bazele locale

$$\begin{cases} \mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} = \sin q^2 \cos q^3 \mathbf{t}_1 + \sin q^2 \sin q^3 \mathbf{t}_2 + \cos q^2 \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} = q^1 (\cos q^2 \cos q^3 \mathbf{t}_1 + \cos q^2 \sin q^3 \mathbf{t}_2 - \sin q^2 \mathbf{t}_3) \\ \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^3} = q^1 \sin q^2 (-\sin q^3 \mathbf{t}_1 + \cos q^3 \mathbf{t}_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{g}^1 = \sin q^2 \cos q^3 \mathbf{t}_1 + \sin q^2 \sin q^3 \mathbf{t}_2 + \cos q^2 \mathbf{t}_3 \\ \mathbf{g}^2 = \frac{1}{q^1} (\cos q^2 \cos q^3 \mathbf{t}_1 + \cos q^2 \sin q^3 \mathbf{t}_2 - \sin q^2 \mathbf{t}_3) \\ \mathbf{g}^3 = \frac{1}{q^1 \sin q^2} (-\sin q^3 \mathbf{t}_1 + \cos q^3 \mathbf{t}_2) \end{cases}$$

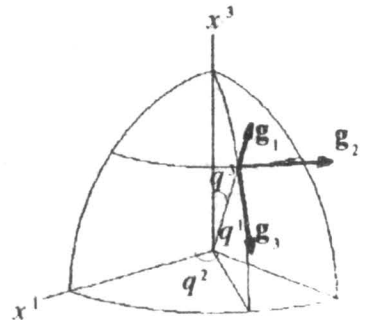


Figura 1.4.16

$$[g_{jk}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (q^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (q^1 \sin q^2)^2 \end{bmatrix}; [g^{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{q^1}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{q^1 \sin q^2}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Coordonatele cilindrice considerate sunt ortogonale.

d) 
$$v_r = v^1 = v_1, v_\theta = q^1 v^2 = \frac{1}{q^1} v_2, v_\varphi = q^1 \sin q^2 v^3 = \frac{1}{q^1 \sin q^2} v_3.$$

Coordonatele fiind ortogonale există un singur set de componente fizice.

e) Simbolurile lui Christoffel de speța a doua nenuli sunt

$$\Gamma_{22}^1 = -q^1, \Gamma_{33}^1 = -q^1 \sin^2 q^2, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{q^1}, \Gamma_{33}^2 = -\sin q^2 \cos q^2, \Gamma_{23}^3 = -\operatorname{ctg} q^2$$

Rezultă

$$\begin{aligned} v^1_{;1} &= \frac{\partial v^1}{\partial q^1}, v^2_{;1} = \frac{\partial v^2}{\partial q^1} + \Gamma_{12}^2 v^2, v^3_{;1} = \frac{\partial v^3}{\partial q^1} + \Gamma_{13}^3 v^3, \\ v^1_{;2} &= \frac{\partial v^1}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^1 v^2, v^2_{;2} = \frac{\partial v^2}{\partial q^2} + \Gamma_{21}^2 v^1, v^3_{;2} = \frac{\partial v^3}{\partial q^2} + \Gamma_{23}^3 v^3, \\ v^1_{;3} &= \frac{\partial v^1}{\partial q^3} + \Gamma_{33}^1 v^3, v^2_{;3} = \frac{\partial v^2}{\partial q^3} + \Gamma_{33}^2 v^3, v^3_{;3} = \frac{\partial v^3}{\partial q^3} + \Gamma_{31}^3 v^1 + \Gamma_{32}^3 v^2, \\ v_{1;1} &= \frac{\partial v_1}{\partial q^1}, v_{2;1} = \frac{\partial v_2}{\partial q^1} - \Gamma_{21}^2 v_2, v_{3;1} = \frac{\partial v_3}{\partial q^1} - \Gamma_{13}^3 v_3, \\ v_{1;2} &= \frac{\partial v_1}{\partial q^2} - \Gamma_{12}^2 v_2, v_{2;2} = \frac{\partial v_2}{\partial q^2} - \Gamma_{22}^1 v_1, v_{2;3} = \frac{\partial v_2}{\partial q^3} - \Gamma_{23}^3 v_3, \\ v_{1;3} &= \frac{\partial v_1}{\partial q^3} - \Gamma_{13}^3 v_3, v_{2;3} = \frac{\partial v_2}{\partial q^3} - \Gamma_{23}^3 v_3, v_{3;3} = \frac{\partial v_3}{\partial q^3} - \Gamma_{33}^1 v_1 - \Gamma_{33}^2 v_2. \end{aligned}$$

# MECANICA NEWTONIANA A SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

## PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE ([10], [19])

i) *Spațiul este suportul materiei. Spațiul fizic*

- are trei dimensiuni;
- este absolut și independent de materie - omogen și izotrop - spațiul euclidian  $E_3$ .

*Timpul este universal, absolut,*

- transmisia semnalelor se face instantaneu;
- evenimentele sunt fie simultane, fie succesive;
- timpul are o singură dimensiune, este omogen;
- timpul este ireversibil.

ii) *Mișcarea unui sistem material față de altul înseamnă modificarea, în timp, a distanțelor punctelor acestui sistem material față de punctele unui alt sistem material.*

*Reper* - sistem de referință - este un sistem rigid format din cel puțin trei puncte necolineare.

Mișcarea și repausul pot fi considerate absolute, raportând la un reper presupus fix, sau relative, raportând la un reper mobil.

Elementele care caracterizează mișcarea în raport cu un reper sunt *vectorul de poziție, viteza și accelerația* ca funcții de timp și constituie obiectul *cinematicii*.

iii) *Axiomele masei :*

- oricărui sistem material  $i$  se asociază o mărime de stare numită *masa* sistemului
- masa este o mărime reală pozitivă;
- masa unui sistem material este constantă în timp;
- masa este aditivă (pentru o diviziune a sistemului, masa sistemului este suma maselor subsistemelor);
- pentru un sistem de puncte materiale  $\{P_j, m_j\}_{j=1,n}$ , există un punct unic  $C$ , numit *centru de masă* sau *centru de inerție*, cu proprietatea

$$\sum_{j=1}^n m_j \overrightarrow{CP_j} = \mathbf{0}.$$

iv) *Forța este aspectul interacțiunii sistemelor materiale care determină mișcarea lor. Mecanica nu studiază natura forțelor și le presupune date.*

*Axiomele forței:*

- forța aplicată unui punct al unui sistem material este un vector legat;
- acțiunea a două forțe asupra aceluiași punct material poate fi înlocuită cu acțiunea unei singure forțe corespunzând diagonalei paralelogramului asociat forțelor date; acțiunea unei forțe într-un punct poate fi înlocuită cu acțiunea a două forțe reprezentate de laturile unui paralelogram a cărui diagonală este forța dată.

v) *Principiul inerției*: există un sistem inerțial în care orice punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atâta timp cât asupra lui nu acționează nici o forță.

vi) *Principiul acțiunii forțelor* (legea a doua a lui Newton, în formularea dată de Newton): Variația mișcării este proporțională cu forța motoare imprimată și este dirijată după linia dreaptă în lungul căreia este imprimată forța

$$ma = F$$

(F rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material).

Pentru un sistem discret de puncte materiale  $\{P_j, m_j\}_{j=\overline{1,N}}$  acest principiu se aplică fiecărui punct material al sistemului

$$m_j a_j = F_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N F_{jk} \quad j = \overline{1, N}.$$

$F_j$  fiind rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra punctului  $P_j$ , iar  $F_{jk}$  forța interioară, cu care punctul  $P_k$  acționează asupra lui  $P_j$ .

vii) *Principiul acțiunii și reacțiunii*: Acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrare:  $P_1, P_2$  puncte materiale

$$F_{12} + F_{21} = 0, \quad F_{12} \parallel P_1 P_2.$$

viii) *Principiul condițiilor inițiale*: Starea inițială ( $r^o, x^o, v^o$ ) a unui punct material determină starea ulterioară a acestuia. (Soluția problemei lui Cauchy asociată legii de mișcare există și este unică)

- Condițiile care asigură existența și unicitatea soluției, asigură și dependența continuă de datele inițiale pe un interval finit de timp.

- Problema dependenței soluției de datele inițiale pe un interval infinit de timp este problema stabilității mișcării.

ix) *Principiul newtonian al relativității*: Fie reperele  $\{O, \{I_j\}_{j=1,2,3}\}$  și  $\{o, \{i_k\}_{k=1,2,3}\}$  Legile mecanicii newtoniene în raport cu cele două repere sunt invariante la transformările din grupul lui Galilei

$$X = X_o + V_o t + x_j t_j, \quad T = T_o + t$$

$X_o, V_o$  nu depind de timp.

Capitolul 2  
**CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL**

Fie un reper fix  $\{o, \{\mathbf{t}_j\}_{j=1,2,3}\}$  și  $\mathbf{x}$  vectorul de poziție al unui punct material în raport cu acest reper, funcție vectorială de timp

$$\mathbf{x} : I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow V$$

de clasă  $C^2$  ( $I$  - interval, momentul inițial  $t_0 \in I$ ). Se definesc  
- viteza punctului material în raport cu reperul considerat

$$(1) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

- accelerația punctului material în raport cu reperul considerat

$$(2) \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}.$$

Dacă reperului considerat i se asociază diferite sisteme de coordonate, se obțin reprezentările:

- în coordonate carteziene ortogonale

$$(3) \quad \mathbf{x} = x^j(t)\mathbf{t}_j, \quad \mathbf{v} = \dot{x}^j(t)\mathbf{t}_j, \quad \mathbf{a} = \ddot{x}^j(t)\mathbf{t}_j; \quad \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{t}_k = \delta_{jk};$$

- în coordonate cilindrice

$$(4) \quad \mathbf{x} = r\mathbf{t}_r + z\mathbf{t}_z, \quad \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{t}_r + r\dot{\theta}\mathbf{t}_\theta + \dot{z}\mathbf{t}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{t}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} - r\ddot{\theta})\mathbf{t}_\theta + \ddot{z}\mathbf{t}_z.$$

Pe triedrul lui Frenet  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}\}$  asociat traiectoriei punctului material

$$(5) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(s); \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{ds}, \quad \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \dot{s}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\boldsymbol{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{v}.$$

Pe triedrul lui Darboux  $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{m}, \mathbf{n}\}$  asociat suprafeței pe care se mișcă punctul material

$$(6) \quad \mathbf{v} = v\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a} = \dot{v}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho_n}\mathbf{n} + \frac{v^2}{\rho_g}\mathbf{m}$$

*Mișcarea relativă.* Fie un reper fix  $\{O, \{\mathbf{I}_j\}_{j=1,2,3}\}$  și un reper mobil  $\{o, \{\mathbf{t}_k\}_{k=1,2,3}\}$ . Mișcarea este caracterizată prin

$$(7) \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \mathbf{x}; \quad \mathbf{X} = X^j\mathbf{I}_j, \quad \mathbf{X}_o = X_o^j\mathbf{I}_j, \quad \mathbf{x} = x^k\mathbf{t}_k$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}$$

$\mathbf{V}$  - viteza absolută  $\mathbf{V} = \dot{X}^j\mathbf{I}_j$ ,  $\mathbf{v}$  - viteza relativă  $\mathbf{v} = \dot{x}^k\mathbf{t}_k$

$\mathbf{v}_t$  - viteza de transport  $\mathbf{v}_t = \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$

$$\mathbf{V}_o = \dot{X}_o^j\mathbf{I}_j$$

$$\frac{d\mathbf{t}_k}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_k, \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \epsilon^{klm} \left( \frac{d\mathbf{t}_l}{dt} \cdot \mathbf{t}_m \right) \mathbf{t}_k \quad (\text{formulele lui Poisson})$$

$$(8) \quad \mathbf{A} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c + \mathbf{a}$$

$\mathbf{A}$  - accelerația absolută  $\mathbf{A} = \dot{X}^j\mathbf{I}_j$ ,  $\mathbf{a}$  - accelerația relativă  $\mathbf{a} = \ddot{x}^k\mathbf{t}_k$

$\mathbf{a}_t$  - accelerația de transport  $\mathbf{a}_t = \mathbf{A}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{A}_o = \dot{X}_o^j\mathbf{I}_j$

$\mathbf{a}_c$  - accelerația Coriolis  $\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$

## §2.1. Cinematica mișcării rectilinii și circulare

**2.1.1.** Să se găsească legea de mișcare pe traiectorie știind că la momentul  $t = 0$  mobilul se află în punctul A,  $s = s_A$  și la un moment oarecare  $t$ , mărimea vitezei este

- a)  $v = ks$ ,  $[k] = L^0 M^0 T^{-1}$  ;  
 b)  $v = k\sqrt{s}$ ,  $[k] = L^{1/2} M^0 T^{-1}$  ;  
 c)  $v = ks^2$ ,  $[k] = L^{-1} M^0 T^{-1}$  ;  
 d)  $v = k/s$ ,  $[k] = L^2 M^0 T^{-1}$  ;

$k$  constant.

Știind că  $v = \frac{ds}{dt}$ , din ecuațiile diferențiale corespunzătoare rezultă

- a)  $\dot{s} = ks \Rightarrow s = s_A \exp(kt)$  ;  
 b)  $\dot{s} = k\sqrt{s} \Rightarrow s = (\sqrt{s_A} + \frac{1}{2}kt)^2$  ;  
 c)  $\dot{s} = ks^2 \Rightarrow s = \frac{s_A}{1 - s_A kt}$  ;  
 d)  $\dot{s} = k/s \Rightarrow s = \sqrt{2kt + s_A^2}$  .

Observație. Rezultatele nu depind de traiectoria punctului material.

**2.1.2.** Să se determine mișcarea a două mobile pe o circumferință de rază  $r$  știind că mobilele pornesc, la momentul  $t = 0$ , din două puncte A și B diametral opuse și au la fiecare moment viteze dirijate în sensuri de circulație opuse, egale în mărime, valoarea comună fiind proporțională cu distanța dintre cele două mobile.

Poziția celor două mobile pe circumferință este dată de unghiurile la centru  $\theta_1$  și  $\theta_2$  ( $\theta_1 < \theta_2$ ). Modulul vitezelor în mișcarea circulară va fi

$$v_1 = r\dot{\theta}_1, v_2 = -r\dot{\theta}_2$$

$$v_1 = v_2 = 2kr \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

Având în vedere poziția inițială  $\theta_1^0 = 0, \theta_2^0 = \pi$ , și că  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ , rezultă

$$\dot{\theta}_1 = 2k \cos \theta_1$$

și deci

$$\ln \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2} \right) \right) = -2kt$$

sau

$$\theta_1 = 2 \operatorname{arctg}(\operatorname{th}(kt)).$$

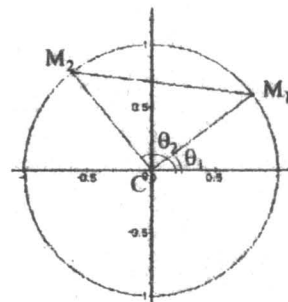


Figura 2.1.2

**2.1.3.** Să se studieze mișcările rectilinii oscilatorii

- a)  $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$  ;  
 b)  $x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$  .

a) Notând

$$A = a \sin \varphi, B = a \cos \varphi, a = \sqrt{A^2 + B^2},$$

ecuația de mișcare se rescrie

$$x = a \sin(\omega t + \varphi)$$

care arată că  $x$  oscilează între  $-a$  și  $+a$ ,  $a$  fiind amplitudinea oscilației,  $\omega t + \varphi$  faza și  $x$  elongația. Prin derivare, se obține viteza

$$\dot{x} = a\omega \cos(\omega t + \varphi), \quad v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

și accelerația

$$\ddot{x} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

Mișcarea este periodică cu perioada

$$\tau = 2\pi/\omega.$$

b) Conform definițiilor vitezei și accelerației se obține

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda e^{-\lambda t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \omega e^{-\lambda t}(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) \\ \ddot{x} &= (\lambda^2 - \omega^2)e^{-\lambda t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) - 2\lambda\omega e^{-\lambda t}(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) \end{aligned}$$

Momentele în care viteza se anulează sunt în progresie aritmetică cu rația  $\tau = 2\pi/\omega$ , iar elongațiile corespunzătoare acestor momente sunt în progresie geometrică cu rația  $e^{-\lambda t}$ .

Rezultate numerice și diagrame pentru asemenea mișcări sunt date în paragraful §3.8.

**2.1.4.** Un mobil parcurge, cu o viteză  $v$  a cărei mărime  $v = f(t)$ ,  $f$  se presupune derivabilă, pe o traiectorie compusă dintr-o porțiune rectilinie și un arc de cerc de rază  $r$  care se racordează în A. Care este variația accelerației când mobilul trece prin punctul de racordare A?

În porțiunea rectilinie a traiectoriei, accelerația are direcția suportului traiectoriei și mărimea  $f'(t)$ .

Pe porțiunea de traiectorie circulară accelerația are o componentă tangentă la traiectorie egală cu  $f'(t)$  și o componentă normală egală cu  $f^2(t)/r$ .

Deci accelerația în A are o variație corespunzătoare componente normale în A.

**2.1.5.** După ce lege se mișcă un punct pe o circumferință încât accelerația sa să fie proporțională cu viteza?

Fie  $\theta$  unghiul razei vectoare cu o direcție fixă. Notând

$$\dot{\theta} = \varepsilon$$

rezultă

$$\varepsilon^4 + \dot{\varepsilon}^2 = k^2 \varepsilon^2$$

de unde

$$\dot{\varepsilon}^2 = \varepsilon^2(k^2 - \varepsilon^2),$$

$k$  fiind o constantă de proporționalitate. Se deduc două soluții:

1° integrala generală

$$t - t_0 = -\frac{1}{k} \ln \left[ \frac{k}{\varepsilon} - \sqrt{\frac{k^2}{\varepsilon^2} - 1} \right];$$

$$\varepsilon = k, \theta = kt + k_1$$

aceasta corespunzând unei mișcări uniforme, ceea ce era evident a priori.

**2.1.6.** Un punct descrie o circumferință de rază  $r$  astfel încât viteza la fiecare moment să fie măsurată prin același număr ca și distanța punctului  $M$  la un punct fix  $O$  pe circumferință. La momentul inițial  $t = 0$  punctul se găsește în  $O'$  diametral opus lui  $O$ . Să se determine legea de mișcare și accelerația mobilului.

Fie  $C$  centrul cercului și  $\theta$  unghiul razei  $CM$  cu  $CO$  și mișcarea are loc în sens trigonometric de la  $\theta = \pi$  la  $\theta = 0$ . Atunci (din(4)<sub>1</sub>) rezultă

$$v = r\dot{\theta} = 2kr \sin \frac{\theta}{2}$$

$k$  fiind constantă unitară ( $[k]=T^{-1}$ ), de unde

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{4} = e^{-kt}$$

Componentele accelerației sunt (din(4)<sub>2</sub>)

$$r\ddot{\theta} = k^2 r \sin \theta, \quad r\dot{\theta}^2 = 4k^2 r \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^2.$$

Punctul are o mișcare asimptotică spre  $O'$ .

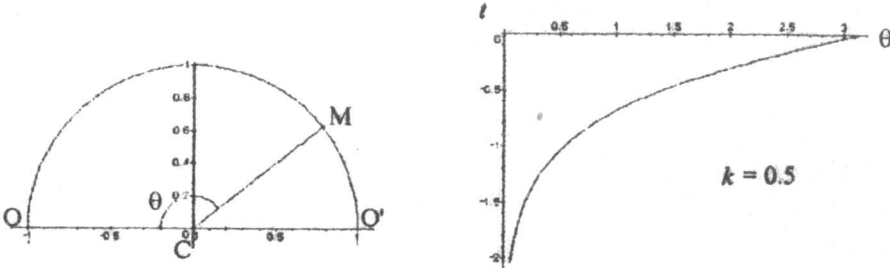


Figura 2.1.6

**2.1.7.** Două mobile încep mișcarea simultan din  $A$  cu viteza inițială  $v_0$ . Unul dintre mobile se mișcă pe o circumferință de diametru  $2r$  cu accelerația tangențială  $a_1$ , celălalt mobil parcurge diametrul  $AB$  uniform accelerat cu accelerația  $-a_1$ . Ele ajung simultan în  $B$ .

- După ce interval de timp se întâlnesc cele două mobile?
- Care este accelerația  $a_1$ ?
- Să se determine accelerația primului mobil în  $B$  și unghiul pe care îl face cu viteza în  $B$ .

Mișcarea celui de al doilea mobil va fi caracterizată prin

$$v_2 = v_0 - ta_1, \quad x_2 = tv_0 - \frac{1}{2}t^2 a_1.$$

Intrucât accelerația tangențială a primului mobil este constantă, el va avea o viteză

$$v_1 = v_0 + ta_1$$



și va parcurge arcu

$$s = tv_o + \frac{1}{2}t^2 a_t.$$

În intervalul de timp  $t_*$ , după care mobilele se întâlnesc, ele parcurg respectiv

$$2r = t_* v_o - \frac{1}{2}t_*^2 a_t$$

$$\pi r = t_* v_o + \frac{1}{2}t_*^2 a_t$$

Rezultă că întâlnirea are loc după intervalul de timp

$$t_* = \frac{(\pi + 2)r}{2v_o}$$

deci accelerația tangențială trebuie să fie

$$a_t = \frac{\pi - 2}{(\pi + 2)^2} \cdot \frac{4v_o^2}{r}$$

Accelerația normală în mișcarea primului mobil pe circumferință va fi

$$a_n = \frac{(v_o + ta_t)^2}{r}$$

deci unghiul accelerației primului mobil cu viteza sa în punctul B va fi dat de

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{a_n}{a_t} \right)_B = \frac{(3\pi - 2)^2}{4(\pi - 2)}.$$

**2.1.8.** Din A pornesc două puncte materiale, pe un cerc, cu aceeași viteză inițială  $v_o$ , în sensuri opuse. Punctele materiale au mișcare uniform accelerată cu accelerațiile  $a_t$ , respectiv  $-a_t$ . Ele se întâlnesc în poziția B în care punctul material cu mișcare uniform încetinită se întoarce. Cât de mare trebuie să fie  $v_o$ ? Ce unghi fac accelerațiile celor două mobile în B?

Cunoscând accelerațiile tangențiale în mișcarea celor două puncte materiale, rezultă vitezele și legile de mișcare

$$v_1 = v_o + ta_t, \quad s_1 = tv_o + \frac{1}{2}t^2 a_t$$

$$v_2 = v_o - ta_t, \quad s_2 = tv_o - \frac{1}{2}t^2 a_t$$

Viteza celui de al doilea mobil se anulează pentru

$$t_* = \frac{v_o}{a_t}.$$

Lungimile arcelor parcurse, corespunzător acestui moment, au suma  $2\pi r$ , deci

$$a_t = \frac{v_o^2}{\pi r}.$$

Unghiul celor două accelerații în B este dat de

$$\operatorname{tg} \varphi = \left( \frac{a_{n1}}{a_t} \right)_B = \frac{4v_o^2/r}{v_o^2/\pi r} = 4\pi.$$

**2.1.9.** Aceeași problemă cu  $a_t$  arbitrar dată. După cât timp se vor întâlni mobilele? Ce unghi fac accelerațiile în punctul de întâlnire?

Primele relații din problema precedentă rămân valabile. În momentul întâlnirii

$$s_1 + s_2 = 2\pi r;$$

timpul corespunzător este

$$t_s = \frac{\pi r}{v_o}.$$

Unghiul dintre accelerații este dat de

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= a_{t1} a_{t2} + a_{n1} a_{n2} \\ a_{t1} = -a_{t2} &= a_t, \quad a_{n1} = \frac{(v_o + \pi r a_t / v_o)^2}{r}, \quad a_{n2} = \frac{(v_o - \pi r a_t / v_o)^2}{r} \end{aligned}$$

**2.1.10.** Un punct material descrie un semicerc. Proiecția mișcării pe diametru este o mișcare uniformă cu viteza  $c$ . Să se găsească viteza și accelerația punctului ca funcții de poziție și direcția accelerației.

Fie  $R$  raza semicercului și  $\theta$  unghiul ce caracterizează poziția punctului material. Viteza punctului material va fi

$$v = R\dot{\theta} = \frac{c}{\sin \theta}.$$

Accelerația va avea componentele

$$a_t = \dot{v} = \frac{c^2 \cos \theta}{R \sin^3 \theta}, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{c^2}{R \sin^2 \theta}$$

deci

$$\|a\| = \frac{c^2}{R \sin^3 \theta}, \quad \cos(a, x) = \frac{a_n}{\|a\|} = \sin \theta.$$

**2.1.11.** Un punct material descrie un cerc cu accelerația trecând prin punctul A al cercului. Viteza areolară este  $c/2$ . Să se găsească viteza și accelerația punctului material (Newton).

Considerând coordonate polare cu polul în A și notând  $a$  raza cercului, ecuația parametrică a cercului va fi

$$r = 2a \cos \theta;$$

viteza va avea componentele

$$v_r = \dot{r} = -2a\dot{\theta} \sin \theta, \quad v_\theta = r\dot{\theta} = 2a\dot{\theta} \cos \theta;$$

mărime a vitezei va fi

$$v^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 = 4\frac{a^2 c^2}{r^2} \quad (r^2\dot{\theta} = c)$$

iar accelerația

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -4a\dot{\theta}^2 \cos \theta - 2a\ddot{\theta} \sin \theta$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -4a\dot{\theta}^2 \sin \theta + 2a\ddot{\theta} \cos \theta$$

deci mărimea accelerației este

$$\|a\| = 2a \sqrt{4\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2} = \frac{8a^2 c^2}{r^3}.$$

## §2.2. Cinematica mișcării pe o curbă în coordonate carteziene

**2.2.1.** Un punct material se mișcă pe un lănișor  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ , cu viteză constantă  $c$ . Să se găsească componenta accelerației punctului material  $a_y$  în funcție de  $y$ .

Componenta pe axa Oy a vitezei este

$$v_y = \dot{y} = \dot{x} \operatorname{sh} \frac{x}{a};$$

condiția ca mișcarea pe curbă să fie uniformă dă

$$c = \dot{x} \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Deci

$$v_y = c \operatorname{th} \frac{x}{a} \quad \text{și} \quad a_y = \dot{v}_y = \frac{c^2}{a \operatorname{ch}^3 \frac{x}{a}}$$

sau

$$a_y = \frac{c^2 a^2}{y^3}.$$

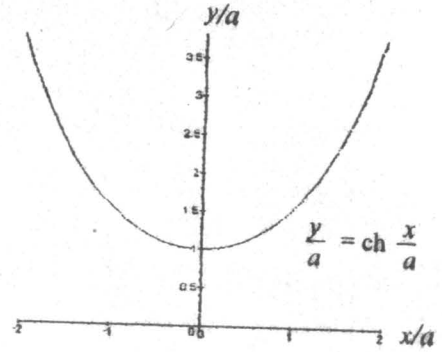


Figura 2.2.1

**2.2.2.** Un punct material descrie lănișorul  $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$  cu viteză constantă  $c$ . Să se determine accelerația ca funcție de  $x$  și  $y$  și direcția accelerației.

În problema precedentă am obținut

$$\dot{x} = \frac{ca}{y};$$

rezultă

$$\ddot{x} = -\frac{c^2 a^2}{y^3} \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \quad \ddot{y} = \frac{c^2 a^2}{y^3}.$$

Prin urmare

$$\|a\| = \frac{c^2 a}{y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}} = -\frac{1}{\operatorname{sh} \frac{x}{a}} = -\frac{\dot{x}}{\dot{y}}.$$

**2.2.3.** Un punct material descrie elipsa  $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ , cu accelerația orientată în direcția  $y$  negativ. Poziția inițială  $x = 0, y = b$ , viteza inițială  $v_0$ . Să se determine accelerația într-o poziție arbitrară (Newton).

Punctul material descriind elipsa, între componentele vitezei sale există relația

$$\frac{x\dot{x}}{a^2} + \frac{y\dot{y}}{b^2} = 0.$$

Accelerația va fi caracterizată prin

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \operatorname{const.} = v_0$$

$$\dot{y} = -\frac{v_0^2 b^2}{a^4 y^3}.$$

**2.2.4.** Un punct material, inițial în repaus în poziția  $x = a, y = b$ , descrie parabola  $y^2 = \frac{b^2 x}{a}$ . Știind că  $a_y = -k^2 y, k = \text{const.}$ , se cer  $x, y, v$  ca funcții de timp și  $a_x$  ca funcție de  $x$ . Unde este următoarea poziție de repaus? Cât timp îi trebuie punctului material pentru a se deplasa între cele două poziții de repaus?

Intre componentele vitezei există relația

$$2yv_y = \frac{b^2 v_x}{a}.$$

Se știe că

$$v_y = -k^2 y$$

relație care duce la

$$v_y dv_y = -k^2 y dy$$

deci, ținând seama și de condițiile inițiale

$$v_y^2 = k^2(b^2 - y^2) \quad \text{sau} \quad v_y = -k\sqrt{b^2 - y^2}$$

de unde

$$\dot{y} = -k\sqrt{b^2 - y^2}$$

și prin urmare

$$y = b \cos kt, \quad x = a \cos^2 kt$$

$$v = k \sin kt \sqrt{b^2 + 4a^2 \cos^2 kt}, \quad a_x = -2k^2(2x - a)$$

Poziția de repaus se obține pentru  $v = 0$ , adică pentru

$$t_* = \pi/k$$

și

$$x = a, \quad y = -b.$$

**2.2.5.** Un punct material, având poziția inițială  $x = 0, y = b$  și viteza inițială  $v_o$  în direcția  $x$ , are accelerația dirijată după direcția  $y$  și  $a = k^2 y$ . Să se găsească ecuația traiectoriei punctului și viteza sa ca funcție de timp. Când intersectează traiectoria axa  $x$ ? Când se găsește punctul material la distanța maximă de această axă? (Riccati)

Intrucât

$$a_x = 0, \quad a_y = k^2 y, \quad v_{x0} = v_o, \quad v_{y0} = 0$$

procedând la fel ca în problema precedentă, rezultă

$$v_x = v_o, \quad v_y = k\sqrt{b^2 - y^2}, \quad x = v_o t, \quad y = b \cos kt$$

de unde

$$v^2 = v_o^2 + k^2 b^2 \sin^2 kt$$

$$y = b \cos \frac{kx}{v_o}.$$

Traiectoria intersectează axa  $x$  la momentele

$$t_p = \frac{2p-1}{2k} \pi, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

Punctul material se află la distanța maximă de axa  $x$  la momentele

$$t_q = \frac{2q}{k} \pi, \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

## §2.3. Cinematica în coordonate polare

2.3.1. Să se studieze mișcarea plană descrisă în coordonate polare prin

a)  $r = at, \theta = bt, a > 0, b > 0;$

b)  $r = a(t+k), \theta = \frac{b}{t+k}, a > 0, b > 0.$

a) Traiectoria

$$r = \frac{a}{b}\theta$$

este spirala lui Archimede. Viteza are componentele (din (4)<sub>1</sub>)

$$v_r = a, v_\theta = abt,$$

componenta radială fiind constantă, iar cea circumferențială este proporțională cu timpul.

Accelerația are componentele (din (4)<sub>2</sub>)

$$a_r = -ab^2r < 0, a_\theta = 2ab.$$

b) Traiectoria este curba

$$r = \frac{ab}{\theta}$$

Componentele vitezei și accelerației sunt respectiv (din (4))

$$v_r = a, v_\theta = -\frac{ab}{t+k}$$

$$a_r = -\frac{ab^2}{(t+k)^2} < 0, a_\theta = 0,$$

accelerația este mereu orientată spre O (accelerație centrală). Viteza areolară este nulă.

Exemple de traiectorii de tipul celor considerate mai sus (spirale) sunt prezentate în figura 2.3.1.

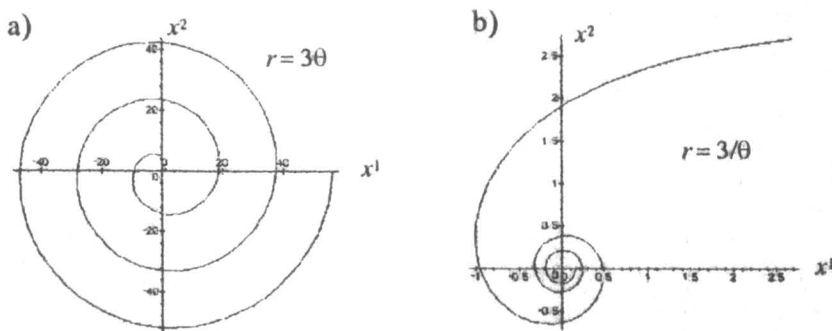


Figura 2.3.1

2.3.2. Un mobil M descrie o curbă plană cu viteză areolară constantă în jurul unui punct O din plan; să se calculeze accelerația sa.

Fie

$$f(r, \theta) = 0$$

ecuația traiectoriei ( $r = OM$ ). Conform enunțului

$$r^2\dot{\theta} = C = \text{constant};$$

deci componenta  $a_\theta$  este nulă; accelerația este centrală și

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2.$$

Alegând  $\theta$  drept variabilă independentă, se obține

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

(formula lui Binet).

Cazuri particulare:

a) Traiectoria este o dreaptă

$$\frac{1}{r} = a \cos \theta + b \sin \theta$$

care dă

$$a_r = 0$$

adică o mișcare rectilinie care are loc conform legii ariilor este uniformă.

b) Traiectoria este o conică având un focar în  $O$  cu concavitatea spre  $O$  (elipsă, parabolă, ramură de hiperbolă concavă spre  $O$ )

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_*)}$$

$p$  parametru,  $e$  excentricitate ( $0 < e < 1$  elipsă,  $e = 1$  parabolă,  $e > 1$  hiperbolă). Rezultă

$$a_r = \frac{C^2}{pr^2}.$$

c) Traiectoria este un cerc trecând prin  $O$

$$r = a \cos(\theta - \theta_*).$$

Rezultă

$$a_r = -\frac{2C^2 a^2}{r^5}.$$

Pentru alte cazuri v. §3.4.

**2.3.3.** Să se găsească traiectoria unui punct știind că accelerația sa este centrală și invers proporțională cu pătratul distanței.

$$a_r = \frac{\alpha}{r^2}, \quad a_\theta = 0.$$

Din formula lui Binet

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 a_r}{C^2}$$

rezultă

$$\frac{1}{r} = -\frac{\alpha}{C^2} + A \cos \theta + B \sin \theta$$

$A, B$  fiind constante; deci traiectoria este o conică.

**2.3.4.** Să se găsească traiectoria unui punct știind că accelerația sa este centrală și invers proporțională cu cubul distanței.

$$a_r = \frac{\alpha}{r^3}, \quad a_\theta = 0, \quad \alpha > 0.$$

Formula lui Binet devine

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( 1 + \frac{\alpha}{C^2} \right) \frac{1}{r} = 0$$

ecuație diferențială lineară, cu coeficienți constanți, omogenă.

Dacă  $0 < 1 + \frac{\alpha}{C^2} = k^2$  atunci  $\frac{1}{r} = A \cos k\theta + B \sin k\theta.$

Dacă  $0 > 1 + \frac{\alpha}{C^2} = -k^2$  atunci  $\frac{1}{r} = A e^{k\theta} + B e^{-k\theta}.$

Dacă  $1 + \frac{\alpha}{C^2} = 0$  atunci  $\frac{1}{r} = A + B\theta.$

Exemple de traiectorii sunt prezentate în figura 2.3.4.

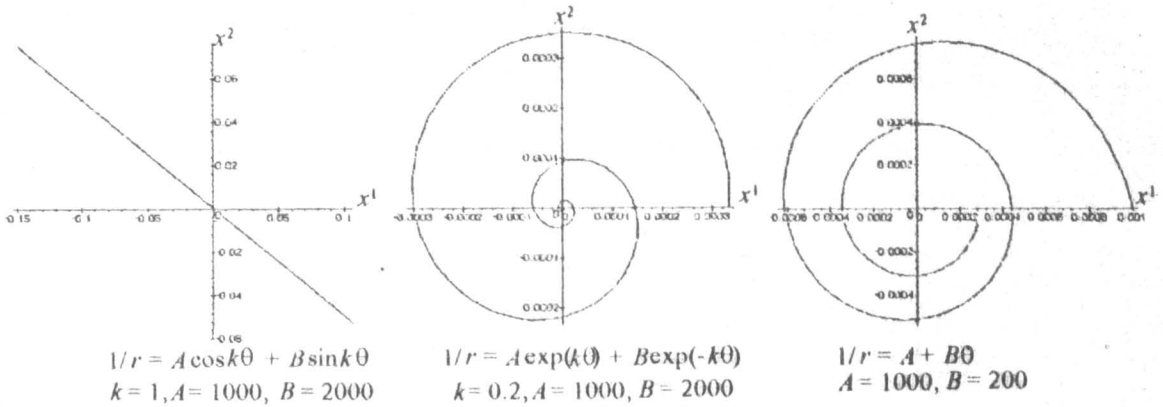


Figura 2.3.4

**2.3.5.** Un punct material parcurge lemniscata  $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$  cu viteză de mărime constantă  $v_0$ , numeric egală cu  $a$  ( $v_0 = ka$ ,  $[k] = T^{-1}$ ,  $[a] = L$ ). Să se exprime coordonatele punctului în funcție de timp și să se calculeze accelerația.

Fie arcul  $s$  pe traiectorie, măsurat de la  $\theta = 0$

$$v_0 t = s = - \int_{a/\sqrt{2}}^r \frac{2a^2 dr}{\sqrt{(2a^2 + r^2)(2a^2 - r^2)}}$$

de unde

$$r = a\sqrt{2} \operatorname{cn} kt, \quad \cos \theta = \operatorname{dn} kt, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sn} kt$$

$\operatorname{cn}$ ,  $\operatorname{dn}$ ,  $\operatorname{sn}$  fiind funcții eliptice (v. Anexa 1). Rezultă

$$x^1 = a\sqrt{2} \operatorname{cn} kt \operatorname{dn} kt, \quad x^2 = a \operatorname{cn} kt \operatorname{sn} kt.$$

Calculând raza de curbură a lemniscatei

$$\frac{1}{\rho} = \frac{3r}{2a^2}$$

se obține componenta normală a accelerației (singura nenulă)

$$a_v = \frac{3r}{2}.$$

**2.3.6.** Un punct material descrie un cerc cu accelerație centrală cu polul C interior cercului. În poziția inițială A viteza este  $v_0$ . Să se calculeze viteza într-o poziție oarecare, în particular în B, diametral opus lui A.

Fie  $a$  raza cercului și  $e = OC$  distanța de la centrul cercului la polul C. Ecuația parametrică a traiectoriei va fi

$$r^2 - 2re \cos \theta + e^2 = a^2.$$

Viteza punctului material rezultă din

$$v^2 = c^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right], c = r^2 \dot{\theta}, u = \frac{1}{r}$$

adică

$$c = (a+e)v_0$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{re \sin \theta}{r - e \cos \theta}$$

$$v^2 = c^2 \left[ u^2 + u^4 \frac{r^2 e^2 \sin^2 \theta}{(r - e \cos \theta)^2} \right] = \frac{a^2 c^2}{r^2 (r - e \cos \theta)^2}$$

deci

$$v = \frac{2av_0(a+e)}{r^2 - e^2 + a^2}.$$

În B viteza are valoarea

$$v_B = v_0 \frac{a+e}{a-e} > v_0.$$

**2.3.7.** Un punct material descrie o spirală logaritmică  $r = k \exp(a\theta)$  cu accelerație centrală. Poziția inițială  $r = r_0$ , viteza inițială  $v = v_0$ . Să se determine viteza și accelerația într-o poziție oarecare.

Notând cu  $c/2$  viteza areolară și  $u = \frac{1}{r}$ , în mișcarea centrală

$$v^2 = c^2 [u^2 + (u')^2], a_c = c^2 u^2 [u'' + u].$$

Ținând seama de ecuația parametrică a traiectoriei, rezultă

$$v = \frac{c \sqrt{a^2 + 1}}{r}; a_c = \frac{c^2 (a^2 + 1)}{r^3}.$$

Din datele inițiale se obține

$$c = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0| = \frac{r_0 v_0}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

și deci

$$v = \frac{v_0 r_0 \sqrt{a^2 + 1}}{r}; a_c = \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3}.$$



**2.3.8.** Intr-o mișcare centrală un punct material descrie lemniscata  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ . Viteza areolară este  $c/2$ . Să se determine accelerația și timpul necesar pentru a parcurge o buclă a traiectoriei.

Utilizând același procedeu ca și în problema precedentă, se obține

$$u = \frac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}}, \quad u' = -\frac{\sin 2\theta}{a\sqrt{\cos^3 2\theta}}, \quad u'' = \frac{2 + \sin^2 2\theta}{a\sqrt{\cos^5 2\theta}}$$

și în final

$$a_c = \frac{3c^2 a^4}{r^7}.$$

Timpul necesar parcurgerii unei bucle va fi

$$t_* = \frac{1}{c} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2c} \sin 2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{a^2}{c}.$$

**2.3.9.** Intr-o mișcare centrală, viteza variază după legea  $v = \frac{a}{r}$ . Să se determine  $r$  și  $\theta$  ca funcții de timp, ecuația traiectoriei și accelerația. Poziția inițială  $\theta_0 = 0$ ,  $r = r_0$ . Viteza areolară este  $c/2$  (Riccati).

În mișcare centrală,, viteza fiind dată de relația

$$v^2 = c^2 \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right], \quad c = r^2 \dot{\theta}, \quad u = \frac{1}{r}$$

rezultă ecuația diferențială pentru  $u$

$$\frac{du}{d\theta} = \varepsilon \frac{u\sqrt{a^2 - c^2}}{c}$$

$\varepsilon$  fiind semnul lui  $\left( \frac{du}{d\theta} \right)_0$ .

Având în vedere datele inițiale, se obține ecuația parametrică a traiectoriei

$$r = r_0 \exp \left( -\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \theta \right).$$

Asociind cu relația între viteza areolară, rază și viteza unghiulară,

$$ct = \int_0^\theta r_0^2 \exp \left( -2\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \theta \right) d\theta$$

rezultă

$$\theta = -\frac{c}{2\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \left[ 1 - 2\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{r_0^2} t \right],$$

$$r^2 = r_0^2 - 2\sqrt{a^2 - c^2} t.$$

Dacă  $c > 0$ , atunci  $\varepsilon = 1$ , dacă  $c < 0$ , atunci  $\varepsilon = -1$ .

Accelerația se calculează din

$$a_c = c^2 [u'' + u] \Rightarrow a_c = \frac{a^2}{r^3}.$$

## §2.4. Cinematica mișcării relative

**2.4.1.** Un punct material  $M$  descrie spirala logaritmică  $r = k \exp(a\theta)$ . Raza  $r$  se rotește uniform cu viteza unghiulară  $\omega$  în jurul centrului  $O$  al spiralei.  $P$  este proiecția punctului  $M$  pe axa polară  $Ox$ . Să se arate că între abscisa  $x$  a punctului  $P$ , viteza  $v_x$  și accelerația  $a_x$  există o relație lineară.

Abscisa punctului  $P$  este

$$x = k \exp(a\theta) \cos \theta;$$

corespunzător viteza și accelerația sa vor fi

$$v_x = \dot{x} = r\omega(a \cos \theta - \sin \theta)$$

$$a_x = \ddot{x} = r\omega^2[(a^2 - 1)\cos \theta - 2a \sin \theta]$$

$$(\dot{\theta} = \omega = \text{const.})$$

Între aceste mărimi există relația lineară

$$a_x - 2a\omega v_x + (a^2 + 1)\omega^2 x = 0.$$

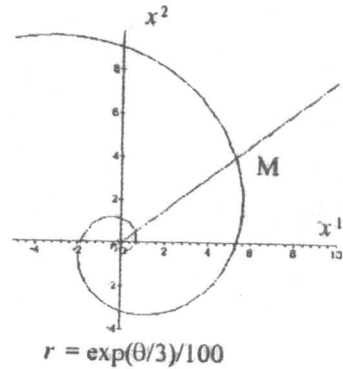


Figura 2.4.1

**2.4.2.** O dreaptă se rotește în plan, în jurul unui punct  $O$  al ei, cu viteza unghiulară constantă și taie un cerc fix ce trece prin  $O$ , de rază  $r$  în punctul  $M$ . Ce mișcare are  $M$  pe cerc și pe dreaptă? Să se calculeze vitezele și accelerațiile.

Reperul fix are originea în  $O$ , axa  $Ox^1$  după diametrul cercului,  $Ox^2$  tangenta la cerc în  $O$ ,  $Ox^3$  perpendiculară pe plan. Reperul mobil are originea în  $O$ ,  $Ox^1$  în lungul dreptei,  $Ox^2$  perpendiculară pe dreaptă în plan,  $Ox^3 = Ox^3$ .

$$r = 2r \cos \theta_{11}, \quad \omega = \dot{\theta}_{13} = \omega_{13}$$

$$v = -2r\omega \sin \theta_{11}, \quad v_t = \omega_{13} \times 2r \cos \theta_{11} = 2r\omega \cos \theta_{12}$$

$$a = -2r\omega^2 \cos \theta_{11}, \quad a_t = \omega_{13} \times 2r\omega \cos \theta_{12} = -2r\omega^2 \cos \theta_{11}$$

$$a_c = 2\omega_{13} \times (-2r\omega \sin \theta_{11}) = -4r\omega^2 \sin \theta_{12}$$

$$V = 2r\omega(-\sin \theta_{11} + \cos \theta_{12}) = 2r\omega I_2$$

$$A = -2r\omega^2 \cos \theta_{11} - 2r\omega^2 \cos \theta_{11} - 4r\omega^2 \sin \theta_{12} = -4r\omega^2 I_1.$$

Mișcarea punctului material pe dreaptă este caracterizată de  $r$ ,  $v$ ,  $a$ , mărimile vectorilor respectivi fiind

$$\|r\| = \xi = 2r \cos \theta, \quad \|v\| = \omega \sqrt{4r^2 - \xi^2}, \quad \|a\| = \omega^2 \xi.$$

Pe cerc, punctul are o mișcare uniformă cu viteza unghiulară  $2\omega$ , viteza și accelerația punctului au mărimile

$$\dot{s} = 2\omega r, \quad a_\tau = \ddot{s} = 0, \quad a_v = \frac{\dot{s}^2}{r} = 4\omega^2 r.$$

Mișcarea absolută a punctului  $M$  se realizează cu viteză și accelerație constante.

**2.4.3.** O dreaptă se rotește în plan, în jurul unui punct al ei  $F$ , cu viteza unghiulară constantă și taie în  $M$  o elipsă fixă, de semiaxe  $a$  și  $b$  și cu unul din focare în  $F$ . Cu ce viteză se mișcă  $M$  pe elipsă?

Reperul fix are originea în centrul elipsei, axele din plan orientate după semiaxele elipsei. Reperul mobil cu originea în F are axa  $Fx^1$  în lungul drepteii, axa  $Fx^2$  perpendiculară în plan pe aceasta.

$$r = FM = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\omega = \dot{\theta} \mathbf{t}_3 = \omega \mathbf{t}_3$$

$$\mathbf{r} = r \mathbf{t}_1$$

$$\mathbf{v} = \frac{pe\omega \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \mathbf{t}_1, \quad \mathbf{v}_t = \omega \mathbf{t}_3 \times r \mathbf{t}_1 = r\omega \mathbf{t}_2.$$

$$\mathbf{R} = c \mathbf{I}_1 + r(\cos \theta \mathbf{I}_1 + \sin \theta \mathbf{I}_2)$$

$$\mathbf{V} = pe\omega \{ [(1 - e)\cos \theta - 1] \sin \theta \mathbf{I}_1 + [1 + \cos \theta - (1 - e)\cos^2 \theta] \mathbf{I}_2 \}$$

$$\|\mathbf{V}\| = \frac{r\omega}{b} \sqrt{r(2a - r)}$$

**2.4.4.** O dreaptă se mișcă perpendicular pe direcția ei cu viteza constantă  $c$ . Ea taie un cerc fix în M. Să se determine viteza și accelerația în mișcarea pe cerc și pe dreaptă.

Reperul fix are originea în centrul cercului, cel mobil în punctul de pe dreaptă în mijlocul coardei. Versorii  $\mathbf{I}_1$  și  $\mathbf{t}_1$  au direcția drepteii, versorii  $\mathbf{I}_2$  și  $\mathbf{t}_2$  sunt perpendiculari pe ea.

$$\mathbf{R}_o = (r_o + ct) \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{r} = \sqrt{r^2 - (r_o + ct)^2} \mathbf{I}_1$$

$$\mathbf{v} = \frac{-c(r_o + ct)}{\sqrt{r^2 - (r_o + ct)^2}} \mathbf{I}_1 = -ctg\varphi \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{v}_t = c \mathbf{I}_2$$

$$\sin \varphi = \frac{r_o + ct}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - (r_o + ct)^2}}{r}$$

$$\mathbf{a} = -\frac{c^2 r^2}{\sqrt{[r^2 - (r_o + ct)^2]^3}} \mathbf{I}_1 = -\frac{c^2}{r \cos^3 \varphi} \mathbf{I}_1, \quad \mathbf{a}_t = \mathbf{a}_c = \mathbf{0}.$$

Mișcarea pe dreaptă are loc cu viteza  $v$  și accelerația  $a$ . Pe cerc viteza are mărimea

$$r\dot{\varphi} = \frac{c}{r \cos \varphi}.$$

Componenta tangențială a accelerației este

$$r\ddot{\varphi} = \frac{c^2 \sin \varphi}{r \cos^3 \varphi},$$

iar componenta normală

$$r\dot{\varphi}^2 = \frac{c^2}{r \cos^2 \varphi},$$

mărimea accelerației fiind

$$\|\mathbf{a}\| = \frac{c^2}{r \cos^3 \varphi}.$$

**2.4.5.** Două cercuri egale se rotesc în jurul punctului comun O cu viteze unghiulare constante egale, în sensuri opuse. Ce viteză și accelerație are al doilea punct de intersecție pe cercuri și pe coarda comună?

Mișcarea punctului pe fiecare cerc este caracterizată de viteza unghiulară constantă  $2\omega$ , în sensuri opuse. Așadar viteza va avea mărimea

$$\|v\| = 2\omega r,$$

iar accelerația, numai normală

$$\|a\| = 4\omega^2 r.$$

Pe dreaptă poziția punctului va fi dată de

$$OM = x = 2r \sin \theta, \quad \theta = \omega t,$$

deci mișcarea se va efectua cu viteza

$$\dot{x} = 2\omega r \cos \theta = \omega \sqrt{4r^2 - x^2}$$

și accelerația

$$\ddot{x} = -\omega^2 x.$$

**2.4.6.** Două cercuri de raze  $r_1$  și  $r_2$  având punctul O comun, fix, se rotesc în sensuri opuse cu viteze unghiulare constante  $\omega_1$  și  $\omega_2$ . Cu ce viteze  $v_1$  și  $v_2$  se mișcă al doilea punct de intersecție M pe fiecare dintre cercuri?

Fie  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  unghiurile diametrelor cu OM;

$$\varphi_1 + \varphi_2 = -(\omega_1 + \omega_2)t = -\theta$$

Notând  $v_1$  și  $v_2$  vitezele punctului M pe cele două cercuri, se pot scrie relațiile

$$v_1 = 2r_1 \dot{\varphi}_1, \quad v_2 = 2r_2 \dot{\varphi}_2$$

$$r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \sin \varphi_1 = v_2 \varphi_2.$$

Se obține

$$v_1 = -2(\omega_1 + \omega_2) \frac{r_1 r_2 \sin \varphi_2}{r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2}.$$

Utilizând relațiile geometrice scrise, rezultă

$$v_1 = -2r_1 r_2 (\omega_1 + \omega_2) \frac{r_2 + r_1 \cos \theta}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta}$$

$$v_2 = -2r_1 r_2 (\omega_1 + \omega_2) \frac{r_1 + r_2 \cos \theta}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta}.$$

**2.4.7.** Două drepte se rotesc cu viteze unghiulare constante  $\omega_1$  și  $\omega_2$  în jurul punctelor fixe  $O_1$ , respectiv  $O_2$  (aflate pe drepte, la distanța  $a$ ). Să se găsească ecuația diferențială a traiectoriei punctului M de intersecție al dreptelor și punctele în care aceasta intersectează axa  $O_1 O_2$ .

În triunghiul  $O_1 O_2 M$  au loc relațiile

$$a + r_1 \cos \theta_1 = r_2 \cos \theta_2$$

$$r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2$$

$$r_1 \sin (\theta_1 - \theta_2) = a \sin \theta_2.$$

Derivând în raport cu timpul în ultima relație și exprimând funcțiile lui  $\theta_2$  prin cele ale lui  $\theta_1$ , se obține ecuația diferențială a traiectoriei

$$a\omega_1 \sin \theta_1 \frac{dr_1}{d\theta_1} + (\omega_2 - \omega_1)r_1(r_1 + a \cos \theta_1) = a\omega_1(a + r_1 \cos \theta_1):$$

Intersecțiile cu axa  $O_1 O_2$  se obțin pentru

$$\theta_1 = 0, \theta_1 = -\frac{r_1}{a} \left( \frac{dr_1}{d\theta_1} = 0 \right)$$

adică

$$r_1 = \frac{a\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \text{ respectiv } r_1 = a.$$

În plus

$$\sin \theta_1 \frac{dr_1}{d\theta_1} = a \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ pentru } r_1 = 0.$$

## §2.5. Probleme diverse

**2.5.1.** Să se determine componentele vitezei și accelerației în coordonate curbilinii.

Fie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(q^1, q^2, q^3), \mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \Delta \subset V$$

o transformare bijectivă, diferențiabilă cu jacobian nenul. Baza locală naturală corespunzătoare coordonatelor curbilinii considerate este

$$\mathbf{g}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} \quad j = 1, 2, 3$$

și fie

$$q^j : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ de clasă } C^2.$$

Componentele contravariante ale vitezei sunt  $\dot{q}^j$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^j} \cdot \frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j \mathbf{g}_j.$$

Pentru a calcula accelerația, presupunând transformarea de clasă  $C^2$ , se obțin componentele contravariante ale accelerației

$$\mathbf{a} = \left[ \ddot{q}^j + \Gamma_{kh}^j \dot{q}^k \dot{q}^h \right] \mathbf{g}_j$$

$$\mathbf{g}_{jk} = \mathbf{g}_j \cdot \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_{jk} \mathbf{g}^{kl} = \delta_j^l; \Gamma_{kh}^j = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{jm} \left[ \frac{\partial \mathbf{g}_{mh}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathbf{g}_{km}}{\partial q^h} - \frac{\partial \mathbf{g}_{kh}}{\partial q^m} \right]$$

Componentele covariante ale accelerației

$$a_j = \mathbf{g}_j \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

se pot scrie sub forma

$$a_j = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j} \right] - \frac{\partial T}{\partial q^j} \text{ unde } T = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{g}_{jk} \dot{q}^j \dot{q}^k.$$

**2.5.2.** Să se aplice rezultatele de mai sus în cazul coordonatelor cilindrice.

Transformarea de coordonate cilindrice:

$$\begin{aligned}x^1 &= q^1 \cos q^2 & q^1 > 0 & & q^1 &= r \\x^2 &= q^1 \sin q^2 & q^2 \in [0, 2\pi) & & q^2 &= \theta \\x^3 &= q^3 & q^3 \in \mathbb{R} & & q^3 &= z\end{aligned}$$

Componentele contravariante ale vitezei sunt

$$v^1 = \dot{r}, \quad v^2 = \dot{\theta}, \quad v^3 = \dot{z},$$

iar componentele covariante ale accelerației cu

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

sunt

$$a_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_2 = 2r\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta}, \quad a_3 = \ddot{z}.$$

Coordonatele cilindrice fiind ortogonale, se definește baza ortonormată

$$l_r = \frac{g_1}{\sqrt{g_{11}}} = \cos\theta l_1 + \sin\theta l_2; \quad l_\theta = \frac{g_2}{\sqrt{g_{22}}} = -\sin\theta l_1 + \cos\theta l_2; \quad l_z = \frac{g_3}{\sqrt{g_{33}}} = l_3$$

și trecând la componentele fizice rezultă

$$\begin{aligned}v_r &= \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_z = \dot{z} \\a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 2r\dot{\theta} - r^2\ddot{\theta}, \quad a_z = \ddot{z}.\end{aligned}$$

**2.5.3.** Să se găsească rezultatele din problema precedentă utilizând relațiile din cinematica mișcării relative.

Fie reperul fix  $OX^1 X^2 X^3$  și reperul mobil cu originea în  $O$  și axele  $Ox^1$  după direcția  $l_r$ ,  $Ox^2$  după direcția  $l_\theta$ ,  $Ox^3$  coincidând cu  $OX^3$ . În acest caz

$$\omega = \dot{\theta} l_z$$

și

$$x = r l_r + z l_z$$

$$v = \dot{r} l_r + \dot{z} l_z, \quad v_i = \dot{\theta} l_z \times (r l_r + z l_z) = r\dot{\theta} l_\theta$$

$$V = \dot{r} l_r + r\dot{\theta} l_\theta + \dot{z} l_z$$

$$a = \ddot{r} l_r + \ddot{z} l_z$$

$$a_i = \dot{\theta} l_z \times (r l_r + z l_z) + \dot{\theta} l_z \times [\dot{\theta} l_z \times (r l_r + z l_z)] = r\dot{\theta} l_\theta - r\dot{\theta}^2 l_r$$

$$a_c = 2\dot{\theta} l_z \times (\dot{r} l_r + \dot{z} l_z) = 2\dot{r}\dot{\theta} l_\theta$$

$$A = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) l_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) l_\theta + \ddot{z} l_z.$$

**2.5.4.** Să se obțină viteza și accelerația în mișcarea circulară din relațiile de mai sus și utilizând formulele lui Frenet.

În cazul mișcării circulare

$$z = 0, \quad r = \text{const.}$$

și deci

$$V = r\dot{\theta} l_\theta, \quad A = -r\dot{\theta}^2 l_r + r\ddot{\theta} l_\theta.$$

Versorii triedrului lui Frenet sunt

$$\tau = l_\theta, \quad \nu = -l_r, \quad \beta = l_z$$

iar raza de curbură este

$$\rho = r$$

așadar

$$v = \dot{s} = r\dot{\theta} \quad (s = r\theta)$$

$$a_t = \ddot{s} = r\ddot{\theta}, \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = r\dot{\theta}^2$$

coincizând cu rezultatele anterioare.

### 2.5.5. Să se determine viteza și accelerația în coordonate sferice.

Coordonatele sferice sunt introduse prin

$$\begin{aligned} x^1 &= q^1 \sin q^2 \cos q^3 & q^1 > 0 & & q^1 &= r \\ x^2 &= q^1 \sin q^2 \sin q^3 & q^2 \in [0, \pi] & & q^2 &= \theta \\ x^3 &= q^1 \cos q^2 & q^3 \in [0, 2\pi] & & q^3 &= \varphi. \end{aligned}$$

Se obține

$$v^1 = \dot{r}, \quad v^2 = \dot{\theta}, \quad v^3 = \dot{\varphi}$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

$$a_1 = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \quad a_2 = r^2 \ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$a_3 = r^2 \ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta$$

Coordonatele sferice sunt ortogonale și deci se obțin componentele fizice

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta$$

### 2.5.6. Să se găsească rezultatul din problema precedentă utilizând relațiile din cinematica mișcării relative.

Reperul fix are originea în  $O$  și axele după direcțiile  $\mathbf{I}_j$ . Reperul mobil are originea în  $O$  și axele după direcțiile  $\mathbf{t}_r, \mathbf{t}_\theta, \mathbf{t}_\varphi$ .

$$\mathbf{t}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{I}_1 + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{I}_2 + \cos \theta \mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{t}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{I}_1 + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{I}_2 - \sin \theta \mathbf{I}_3$$

$$\mathbf{t}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{I}_1 + \cos \varphi \mathbf{I}_2.$$

Din relațiile lui Poisson se determină

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\cos \theta \mathbf{t}_r - \sin \theta \mathbf{t}_\theta) + \dot{\theta} \mathbf{t}_\varphi.$$

Deci

$$\mathbf{x} = r \mathbf{t}_r$$

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{t}_r, \quad \mathbf{v}_t = r\dot{\theta} \mathbf{t}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{t}_\varphi$$

$$\mathbf{V} = \dot{r} \mathbf{t}_r + r\dot{\theta} \mathbf{t}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{t}_\varphi$$

$$\mathbf{a} = \ddot{r} \mathbf{t}_r$$

$$\mathbf{a}_t = \left( -r\dot{\varphi}^2 \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \right) \mathbf{t}_r + \left( r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{t}_\theta + \left( r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{t}_\varphi$$

$$\mathbf{a}_c = 2i\dot{\theta} \mathbf{t}_\theta + 2i\dot{\varphi} \sin \theta \mathbf{t}_\varphi$$

$$\mathbf{A} = \left( \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta - r\dot{\theta}^2 \right) \mathbf{t}_r + \left( r\ddot{\theta} + 2i\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \right) \mathbf{t}_\theta + \left( r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2i\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta \right) \mathbf{t}_\varphi$$

**2.5.7.** Presupunând că un mobil  $M_1$  se deplasează rectiliniu și uniform cu viteza constantă  $v_1$ , să se determine traiectoria plană a unui mobil  $M_2$ , ce se deplasează uniform cu viteza  $v_2$  constantă orientată mereu spre  $M_1$ .

Fie planul determinat de traiectoria rectiline a mobilului  $M_1$  și poziția inițială a lui  $M_2$ ; fie în acest plan un reper cu originea  $O$  în poziția inițială a mobilului  $M_1$  și axa  $OX$  chiar dreapta pe care se mișcă  $M_1$ . Atunci poziția mobilelor va fi caracterizată prin

$$X_1 = v_1 t, Y_1 = 0$$

$$X_2 = v_1 t + x, Y_2 = y$$

iar componentele vitezei lui  $M_2$  sunt date de relațiile

$$\dot{y} = -\frac{v_2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, v_1 + \dot{x} = -\frac{v_2 x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Cu substituția

$$x = uy$$

sistemul devine

$$\dot{y} = -\frac{v_2}{\sqrt{1+u^2}}, u\dot{y} = -v_1$$

Se obține ecuația diferențială

$$\frac{dy}{du} = \frac{v_2}{v_1} \cdot \frac{y}{\sqrt{1+u^2}}$$

care are soluția

$$u = \frac{1}{2} \left[ (cy)^{v_1/v_2} - (cy)^{-v_1/v_2} \right], c = \left( u^0 + \sqrt{1+(u^0)^2} \right)^{v_2/v_1} t y^0, u^0 = x^0/y^0$$

Presupunând  $v_1 \neq v_2$ , din  $\frac{dy}{dt} = -\frac{2v_2}{(cy)^{v_1/v_2} + (cy)^{-v_1/v_2}}$  se deduce

$$t = t_* - \frac{1}{2c} \left[ \frac{(cy)^{1+v_1/v_2}}{v_1+v_2} - \frac{(cy)^{1-v_1/v_2}}{v_1-v_2} \right], t_* = \frac{1}{2c} \left[ \frac{(cy^0)^{1+v_1/v_2}}{v_1+v_2} - \frac{(cy^0)^{1-v_1/v_2}}{v_1-v_2} \right]$$

unde  $t_*$  se obține din condiția inițială.

Se estimează limitele

$$\lim_{y \rightarrow 0} x(y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} t(y) = t_*, \quad \text{dacă } v_1 < v_2$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} x(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0} t(y) = +\infty \quad \text{dacă } v_1 > v_2$$

adică mobilele se întâlnesc la momentul  $t = t_*$  dacă  $v_1 < v_2$  și nu se întâlnesc dacă  $v_1 > v_2$ . În acest din urmă caz, distanța minimă dintre mobile



$$\frac{1}{c} \cdot \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}} \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^{v_2/2v_1}$$

este realizată la  $t = t_0$ .

Dacă  $v_1 = v_2$ , din  $\frac{dy}{dt} = -\frac{2v_2}{cy + (cy)^{-1}}$  se obține

$$t = t_0 - \frac{[(cy)^2 + 2 \ln(cy)]}{4cv_1}, \quad t_0 = \frac{[(cy^0)^2 + 2 \ln(cy^0)]}{4cv_1}$$

și

$$\lim_{y \rightarrow 0} x(y) = -\frac{1}{2c}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} t(y) = -\infty$$

adică "întâlnirea" este realizată asimptotic în trecut.

Rezultatele de mai sus sunt exemplificate în figura 2.5.7. Au fost considerate mai multe cazuri de raporturi ale vitezelor  $k = \frac{v_2}{v_1}$  ( $k = 0.5, 1, 1.5$ ) precum și de condiții inițiale ( $y^0 < 0, y^0 > 0$ ).

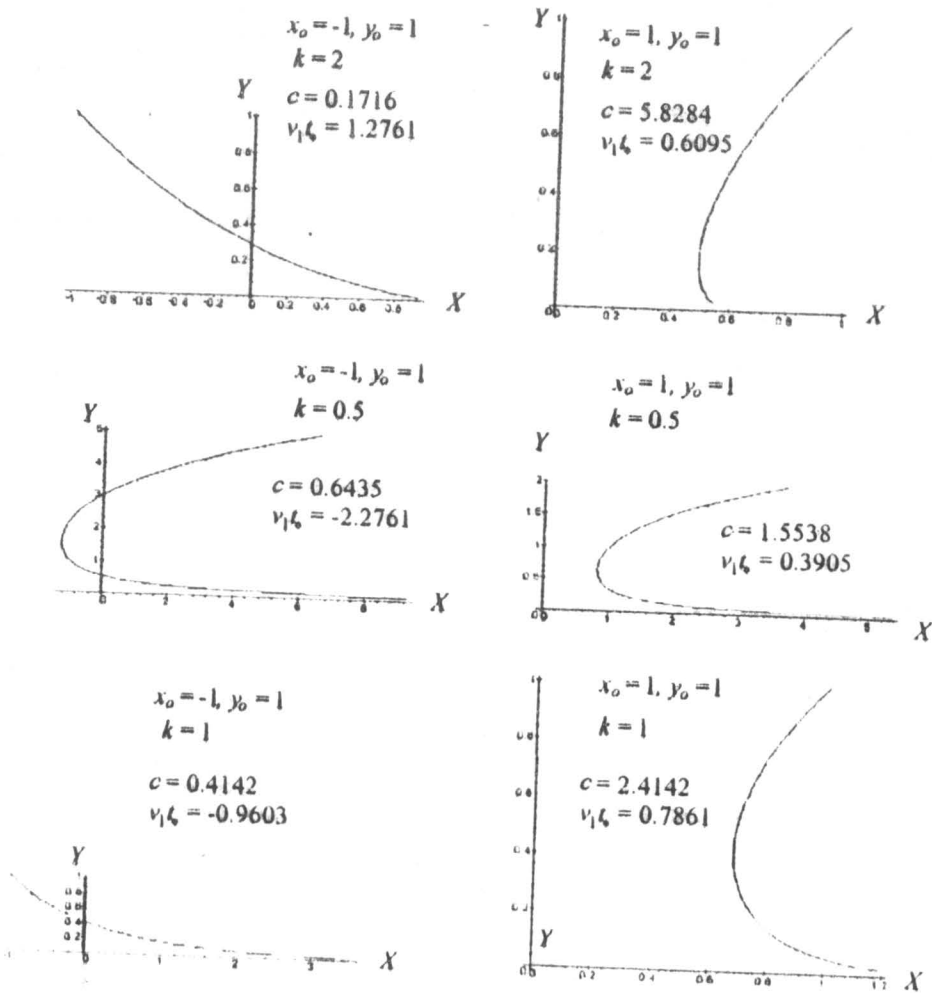


Figura 2.5.7

Pentru determinarea traiectoriilor din cazurile considerate s-a utilizat programul

```
> with(plots):
  Cazul vitezelor inegale ( $k < 1$ )
> u0:=x0/y0: c:=(u0+sqrt(1+u0^2))^k/y0: ct:=((c*y0)^(1+1/k)/(1+k)-(c*y0)^(1-1/k)/(1-k))/c/2:
> u:=((c*y)^(1/k)-(c*y)^(-1/k))/2: tv1:=ct-((c*y)^(1+1/k)/(1+k)-(c*y)^(1-1/k)/(1-k))/c/2:
> fc:=unapply(c,x0,y0,k): ftc:=unapply(ct,x0,y0,k): cx:=tv1+u*y: fx:=unapply(cx,y,x0,y0,k):
> evalf(fc(-1,1,2)); evalf(ftc(-1,1,2));
```

.1715728749

1.276142376

```
> plot([fx(y,-1,1,2),y,y=0..1]);
> evalf(fc(1,1,2)); evalf(ftc(1,1,2));
```

5.828427123

.6094757085

```
> l:=plot([0,0]): tr:=plot([fx(y,1,1,2),y,y=0..1]): display({tr,l});
> evalf(fc(-1,1,0.5)); evalf(ftc(-1,1,0.5));
```

.6435942526

-2.276142378

```
> plot([fx(y,-1,1,0.5),y,y=0..5]);
> evalf(fc(1,1,0.5)); evalf(ftc(1,1,0.5));
```

1.553773974

.3905242917

```
> tra:=plot([fx(y,1,1,0.5),y,y=0..2]): la:=plot([0,0]): display({tra,la});
  Cazul vitezelor egale ( $k=1$ )
```

```
> u0:=x0/y0: c:=(u0+sqrt(1+u0^2))/y0: ct:=((c*y0)^2+2*ln(c*y0))/c/4:
> u:=(c*y-1/(c*y))/2: tv1:=ct-((c*y)^2+2*ln(c*y))/c/4:
```

```
> c:=unapply(c,x0,y0): ftc:=unapply(ct,x0,y0): cx:=tv1+u*y: fx:=unapply(cx,y,x0,y0):
> evalf(fc(-1,1)); evalf(ftc(-1,1));
```

.414213562

-9.9603586453

```
> plot([fx(y,-1,1),y,y=0..1]);
> evalf(fc(1,1)); evalf(ftc(1,1));
```

2.414213562

.7860918373

```
> tr:=plot([fx(y,1,1),y,y=0..1]): l:=plot([0,0]): display({tr,l});
```

**2.5.8.** Să se determine o mișcare plană în care accelerația are mărime constantă și face un unghi constant cu viteza.

Din cele două condiții rezultă că atât componenta tangențială cât și cea normală sunt constante; fie  $a \geq 0$  și  $b \geq 0$  aceste constante. Atunci

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a, \quad \frac{v^2}{\rho} = b$$

Admițând că la  $t = 0$  se ia  $s = 0$ ,  $v = 0$ , se obține

$$s = at^2/2, \quad v = at$$

$$\rho = 2as/b$$

Dacă  $a > 0$ ,  $b > 0$  această curbă este o spirală logaritmică  $x = k \exp\left(\frac{2a}{b}t\right) \mathbf{e}_r$  (v. figura 2.4.1).

Cazuri particulare:

$a = 0, b > 0$  curba este un cerc parcurs uniform;

$a > 0, b = 0$  curba este o dreaptă parcursă uniform accelerat.

**2.5.9.** Să se studieze mișcarea plană a unui punct material, ale cărui proiecții pe două axe ortogonale sunt două mișcări oscilatorii simple având aceeași perioadă.

Conform enunțului

$$x^1 = a \cos(\omega t + \varphi_1), \quad x^2 = b \sin(\omega t + \varphi_2)$$

( $a > 0, b > 0, \omega > 0$ ), de unde prin eliminarea timpului între relațiile

$$x^1 = a(\cos \omega t \cos \varphi_1 - \sin \omega t \sin \varphi_1) \quad |b \cos \varphi_2| - b \sin \varphi_2$$

$$x^2 = b(\cos \omega t \sin \varphi_2 + \sin \omega t \cos \varphi_2) \quad |a \sin \varphi_1| \quad a \cos \varphi_1$$

rezultă

$$bx^1 \cos \varphi_2 + ax^2 \sin \varphi_1 = ab \cos \omega t \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$-bx^1 \sin \varphi_2 + ax^2 \cos \varphi_1 = ab \sin \omega t \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

încât traiectoria punctului este elipsa

$$b^2(x^1)^2 + a^2(x^2)^2 + 2abx^1x^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = a^2b^2 \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Se spune că punctul este animat de o mișcare oscilatorie eliptică. Elipsa este tangentă la dreptele  $x^1 = \pm a, x^2 = \pm b$ . Elipsa este descrisă într-o perioadă  $\tau = 2\pi/\omega$ . Poziția elipsei depinde de diferențele de fază. Dacă

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$$

ecuația se reduce la

$$b^2(x^1)^2 + a^2(x^2)^2 - 2abx^1x^2 = 0,$$

oscilația devine rectilinie (segment de dreaptă dublu)

$$(bx^1 - ax^2)^2 = 0$$

diagonală a dreptunghiului  $x^1 = \pm a, x^2 = \pm b$ . Dacă

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2n\pi$$

oscilația rectilinie se efectuează pe o dreaptă simetrică cu prima în raport cu axa  $x^1$

$$(bx^1 + ax^2)^2 = 0.$$

Elipsa este raportată la axele sale dacă

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2n+1}{2}\pi$$

când ecuația devine

$$b^2(x^1)^2 + a^2(x^2)^2 = a^2b^2;$$

mai mult, dacă amplitudinile sunt egale  $a = b$  traiectoria este un cerc

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = a^2;$$

se spune că oscilația este circulară.

Calculând accelerația în caz general, din (3)<sub>2</sub>,  $\ddot{x}^1 = -\omega^2 x^1, \ddot{x}^2 = -\omega^2 x^2$ , rezultă că ea trece mereu prin O, dirijată după raza vectorială proporțională cu aceasta. Viteza areolară este constantă

$$\frac{1}{2}(x^1 \dot{x}^2 - x^2 \dot{x}^1) = \frac{1}{2}ab\omega \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Dacă  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) < 0$  atunci mișcarea se efectuează în sens invers trigonometric, iar dacă  $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) > 0$  mișcarea se efectuează în sens trigonometric.

Dacă mișcarea se consideră cu proiecții pe trei direcții reciproc ortogonale, accelerația punctului este centrală și proporțională cu distanța OM; din acest motiv mișcarea este plană (v. § 3.4).

**2.5.10.** Un punct material M se mișcă uniform cu viteza  $v_o$  (valoare algebrică) pe o elice circulară. Cunoscând raza  $r$  a cilindrului și panta  $\alpha$  a elicei, să se studieze mișcarea punctului în coordonate carteziene, cilindrice și intrinseci.

Ecuatiile parametrice ale elicei sunt

$$\begin{cases} x^1 = r \cos \theta \\ x^2 = r \sin \theta \\ x^3 = r \theta \operatorname{tg} \alpha \end{cases} .$$

Componentele vitezei în coordonate carteziene

$$\dot{x}^1 = -r\dot{\theta} \sin \theta, \quad \dot{x}^2 = r\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{x}^3 = r\dot{\theta} \operatorname{tg} \alpha;$$

din condiția de mișcare uniformă rezultă

$$v_o^2 = r^2 \dot{\theta}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \Rightarrow \dot{\theta} \equiv \dot{\theta}_o = \frac{v_o}{r} \cos \alpha = \text{const.}$$

$$\theta = \theta_o + \frac{v_o}{r} t \cos \alpha.$$

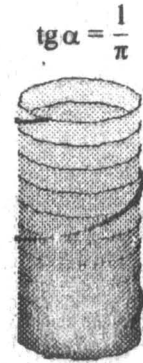


Figura 2.5.10

Componentele accelerației în coordonate carteziene vor fi

$$\ddot{x}^1 = -r\dot{\theta}^2 \cos \theta, \quad \ddot{x}^2 = -r\dot{\theta}^2 \sin \theta, \quad \ddot{x}^3 = 0,$$

deci accelerația este paralelă cu raza OM,

$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2 (\cos \theta \mathbf{t}_1 + \sin \theta \mathbf{t}_2).$$

În coordonate cilindrice, având în vedere rezultatul de la pb.2.5.2, se obține

$$v_r = 0, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_z = r\dot{\theta} \operatorname{tg} \alpha$$

$$v_o^2 = r^2 \dot{\theta}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \Rightarrow \dot{\theta} \equiv \dot{\theta}_o = \frac{v_o}{r} \cos \alpha = \text{const.}$$

$$a_r = -r\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = 0, \quad a_z = 0; \quad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2 \mathbf{t}_r.$$

Triedrul lui Frenet asociat elicei este definit prin

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx^1}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{d\theta}\right)^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{ds}{d\theta} = \varepsilon \frac{r}{\cos \alpha}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}/d\theta}{ds/d\theta} = \varepsilon \cos \alpha (-\sin \theta \mathbf{t}_1 + \cos \theta \mathbf{t}_2 + \operatorname{tg} \alpha \mathbf{t}_3)$$

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 \alpha} > r, \quad \mathbf{v} = -(\cos \theta \mathbf{t}_1 + \sin \theta \mathbf{t}_2)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v} = -\varepsilon \sin \alpha (-\sin \theta \mathbf{t}_1 + \cos \theta \mathbf{t}_2 - \operatorname{ctg} \alpha \mathbf{t}_3)$$

Condiția de mișcare uniformă dă

$$\dot{s} = v_o = \text{const.}$$

Din formulele (5) rezultă

$$\mathbf{v} = v_o \boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{a} = \frac{v_o^2}{\rho} \boldsymbol{\nu}.$$

**2.5.11.** Un vapor se mișcă pe suprafața oceanului cu viteză constantă, viteza făcând cu meridianul un unghi constant  $\alpha$ . Să se determine traiectoria vaporului.

Pământul este presupus sferic, cu raza  $R$ . Utilizând coordonate sferice și rezultatele de la pb.2.5.5, se obține

$$v_r = 0, v_\theta = R\dot{\theta}, v_\varphi = R\dot{\varphi} \cos \theta$$

dar

$$v_\theta = v \cos \alpha, v_\varphi = v \sin \alpha.$$

Prin urmare ecuația diferențială a traiectoriei este

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \cos \theta \operatorname{ctg} \alpha.$$

Integrând cu condițiile inițiale  $t = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0$ ,

se obține

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \exp(\varphi \operatorname{ctg} \alpha).$$

Traiectoria numită *loxodromă* este prezentată în figura 2.5.11.

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = -\frac{2}{\pi} \ln(3)$$

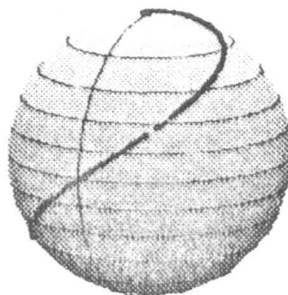


Figura 2.5.11

## DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

### §3.1. Consecințe ale principiilor fundamentale

**3.1.1. Un punct material în repaus este în echilibru.**

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0 \Rightarrow \mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{0}, \mathbf{a}(t) \equiv \mathbf{0}$$

Legea de mișcare a lui Newton:  $\mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}.$$

**3.1.2. Un punct material în echilibru îi păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă (principiul inerției).**

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{v}_0; \mathbf{F} \equiv \mathbf{0}$$

Legea a mișcare a lui Newton:  $m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0 t$$

Dacă  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$  atunci punctul material rămâne în repaus. Dacă  $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{0}$  punctul material descrie dreapta ce trece prin poziția inițială  $\mathbf{x}_0$  și are direcția vitezei  $\mathbf{v}_0$  (mișcare rectilinie uniformă).

Observație. Principiul inerției nu este independent, el este o consecință a principiului acțiunii forțelor (legea de mișcare) și al principiului condițiilor inițiale.

**3.1.3. Dacă viteza inițială și forța la orice moment sunt paralele cu un plan (fix), atunci traiectoria este plană (în plan paralel cu planul considerat).**

Condiția de paralelism cu un plan fix se poate formula prin condiție de ortogonalitate pe un versor fix (normala la plan)

$$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad | \cdot \mathbf{n} |$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0; \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{n}$$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$  ecuația unui plan trecând prin poziția inițială și având normala  $\mathbf{n}$ .

**3.1.4. Dacă viteza inițială și forța la orice moment sunt paralele cu aceeași dreaptă (au direcție fixă), atunci mișcarea este rectilinie (pe o dreaptă paralelă cu direcția considerată).**

$$\mathbf{v}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{F} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} \quad | \times \mathbf{u} |$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{v}_0 \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}; \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{u} = \mathbf{x}_o \times \mathbf{u}$$

$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$  ecuația dreptei care trece prin poziția inițială și are direcția  $\mathbf{u}$ .

### 3.1.5. Forța care acționează asupra unui punct material izolat este constantă.

Fie legea de mișcare în raport cu un reper inerțial

$$m\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(T, \mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}})$$

Ecuția trebuie să fie invariantă față de transformările grupului lui Galilei

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + \mathbf{V}_o t + \mathbf{x}; T = T_o + t \text{ oricare ar fi } \mathbf{X}_o, \mathbf{V}_o, T_o;$$

deci

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(T_o + t, \mathbf{X}_o + \mathbf{V}_o t + \mathbf{x}, \mathbf{V}_o + \dot{\mathbf{x}})$$

trebuie să se reducă la

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}).$$

Prin urmare dependența de argumentele implicate nu poate avea loc, adică forța trebuie să fie constantă (v. și pb.3.1.6)

### 3.1.6. Forțele care acționează asupra unui sistem discret de puncte materiale pot depinde numai de vectorii de poziție relativă și de viteze relative.

Ecuțiile de mișcare

$$m_j \ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{F}_j(T, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, \dot{\mathbf{X}}_1, \dots, \dot{\mathbf{X}}_n) \quad j = \overline{1, n}$$

trebuie să fie invariante la transformările grupului lui Galilei. Considerând transformări care implică numai translații de timp, cerința de invarianță conduce la faptul că timpul nu poate apare explicit în expresia forțelor. Pentru ca să nu apară elementele arbitrare  $\mathbf{X}_o$  și  $\mathbf{V}_o$ , dependența de vectorii de poziție și viteze poate fi prezentă numai prin diferențele

$$\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k, \mathbf{V}_j - \mathbf{V}_k$$

deci

$$m_j \ddot{\mathbf{X}}_j = \mathbf{f}_j(\{\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_l\}_{k,l=\overline{1,n}}, \{\dot{\mathbf{X}}_k - \dot{\mathbf{X}}_l\}_{k,l=\overline{1,n}}) \quad j = \overline{1, n}.$$

### 3.1.7. Fie rotația sistemelor de referință (ortonormate)

$$\mathbf{X}_j = \mathbf{Q}\mathbf{x}_j \quad j = \overline{1, n}, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \text{ (Q transformări ortogonale),}$$

atunci

$$\mathbf{F}_j(\{\mathbf{Q}\mathbf{x}_l\}_{l=\overline{1,n}}, \{\mathbf{Q}\dot{\mathbf{x}}_l\}_{l=\overline{1,n}}) = \mathbf{Q}\mathbf{F}_j(\{\mathbf{x}_l\}_{l=\overline{1,n}}, \{\dot{\mathbf{x}}_l\}_{l=\overline{1,n}}) \quad j = \overline{1, n}$$

Rezultatul se bazează pe

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{Q}\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{x}}.$$

**3.1.8.** Să se arate că un sistem izolat format dintr-un singur punct material are viteza nulă într-un reper inerțial.

Intr-adevăr, din problema 3.1.5 rezultă că forța care acționează asupra punctului este constantă. Problema 3.1.7 cere ca vectorul forță să fie invariant la rotații, deci el trebuie să fie nul. Atunci ecuația de mișcare împreună cu condițiile inițiale dau

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^0.$$

**3.1.9.** Să se studieze mișcările rectilinii sub acțiunea unor forțe care depind numai de timp, numai de poziție sau numai de viteză.

Conform problemei precedente, dacă sistemul este format dintr-un singur punct izolat, forța trebuie să fie nulă. În multe cazuri de sisteme cu mai multe puncte materiale, se presupune cunoscută mișcarea punctelor materiale ale sistemului cu excepția unuia singur și prin înlocuirea elementelor privind mișcarea cunoscută în ecuația acestui punct material, se obține o ecuație de mișcare în care în membrul drept "forța" poate depinde de timp, poziție și viteză. În acest sens este formulată această problemă și toate problemele din următoarele paragrafe ale acestui capitol.

a) Forța depinde numai de timp

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) \\ x = x^0 \\ \dot{x} = v^0 \end{array} \right\} \Rightarrow x(t) = x^0 + v^0 t + \frac{1}{m} \int_0^t \left( \int_0^\tau F(s) ds \right) dt.$$

b) Forța depinde numai de poziție

$$t = 0 \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \\ x = x^0 \\ \dot{x} = v^0 \end{array} \right\}; \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x) \Leftrightarrow m \frac{d\dot{x}}{dt} = F(x)$$

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F(x) \Big| \cdot \dot{x} \Rightarrow m \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} = F(x) \frac{dx}{dt}$$

$$m \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} = F(x) \frac{dx}{dt} \Big| \int_0^t \langle \rangle dt \Rightarrow m \int_{v^0}^{\dot{x}} \dot{x} d\dot{x} = \int_{x^0}^x F(x) dx$$

$$\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - v^{02}) = \Phi(x) - \Phi(x^0), \quad \Phi'(x) = F(x)$$

$$\dot{x} = \varepsilon \sqrt{v^{02} + \frac{2}{m} [\Phi(x) - \Phi(x^0)]}; \quad \varepsilon = \begin{cases} +1 & \text{pentru } v^0 > 0 \\ -1 & \text{pentru } v^0 < 0 \\ +1 & \text{pentru } v^0 = 0, \Phi(x) > \Phi(x^0) \quad (x > x^0) \\ -1 & \text{pentru } v^0 = 0, \Phi(x) < \Phi(x^0) \quad (x < x^0) \end{cases}$$

$$t = \varepsilon \int_{x^0}^x \frac{dx}{\sqrt{v^{02} + \frac{2}{m} [\Phi(x) - \Phi(x^0)]}}$$



Integrarea se efectuează atât timp cât funcția de sub radical este pozitivă; din momentul  $x = x^*$  în care funcția de sub radical se anulează, urmează integrarea pe un nou interval începând din  $x^*$ , cu schimbarea semnului din fața radicalului.

Exemplu: mișcarea punctului material în câmp central (forța elastică, forța de atracție universală etc.) (§3.4).

c) Forța depinde numai de viteză

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(\dot{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} = v \\ m \frac{dv}{dt} = F(v) \\ t = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x^0 \\ \dot{x} = v^0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \Big|_0^t \int_0^t \langle \rangle dt \Rightarrow t = \int_{v^0}^v \frac{m}{F(v)} dv$$

$$x = x^0 + \int_{v^0}^v v dt(v) \Rightarrow x = x^0 + \int_{v^0}^v \frac{mv}{F(v)} dv.$$

Exemplu: mișcarea punctului material greu în mediu rezistent (§3.3).

## §3.2. Statica punctului material

Condiția necesară și suficientă de echilibru a unui punct material este ca rezultanta forțelor date și de legătură să fie nulă

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^m \mathbf{R}_k = \mathbf{0}$$

Observație. Cazul echilibrului punctului material, fără și cu frecare, pe o curbă sau pe o suprafață, va fi considerat în §3.5 respectiv §3.6.

\*\*\*

**3.2.1.** De un fir elastic vertical se suspendă o greutate  $G$ . La ce distanță de punctul de fixare al firului rămâne greutatea în echilibru, știind că  $l_0$  este lungimea inițială a firului și coeficientul de elasticitate este  $k$ .

Asupra punctului material acționează forța de greutate  $G$  (verticală, descendentă) și forța elastică (verticală, ascendentă), proporțională cu alungirea  $F = k \frac{l - l_0}{l_0}$ . Condiția de echilibru dă

$$k \frac{l - l_0}{l_0} = G \Rightarrow l = l_0 \left( 1 + \frac{G}{k} \right).$$

Mișcarea punctului material sub acțiunea acestor forțe este considerată în §3.8.

**3.2.2.** Un punct material liber, de masă  $m$ , este atras de două mase punctiforme, fixe  $m_1$  și  $m_2$ , conform legii lui Newton. La ce distanță  $x$  de masa  $m_1$  rămâne  $m$  în echilibru, dacă  $a$  este distanța dintre  $m_1$  și  $m_2$ ?

Pentru a se putea afla în echilibru, masa  $m$  trebuie să se găsească între celelalte două mase punctiforme (forțele trebuie să aibă sensuri contrare pe același suport). Atunci condiția de echilibru revine la

$$f \frac{mm_1}{x^2} - f \frac{mm_2}{(a-x)^2} = 0$$

Pentru  $x$  se obține ecuația algebrică

$$(m_1 - m_2)x^2 - 2m_1ax + m_1a^2 = 0$$

Soluția ecuației va fi

$$x = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2}} \text{ pentru } m_1 \neq m_2$$

$$x = \frac{a}{2} \text{ pentru } m_1 = m_2$$

Pentru  $m_1 \neq m_2$ , ecuația are o singură rădăcină  $x < a$ .

**3.2.3.** Un punct material de masă  $m$  este atras de două puncte fixe  $m_1$  și  $m_2$  aflate la distanța  $a$ , de  $m_1$  invers proporțional cu distanța, de  $m_2$  direct proporțional cu distanța. Coeficienții de proporționalitate sunt  $k_1$  și respectiv  $k_2$ . În ce poziție este  $m$  în echilibru? Să se arate că pentru  $\frac{k_1}{k_2} > \frac{a^2}{4}$  nu există poziție de echilibru.

Forțele trebuie să aibă sensuri contrare pe același suport. Condiția de echilibru se scrie

$$\frac{k_1}{x} - k_2(a-x) = 0$$

Ecuația de gradul al doilea care se obține

$$k_2x^2 - k_2ax + k_1 = 0$$

are o singură rădăcină mai mică decât  $a$  ( $k_1 > 0, k_2 > 0$ )

$$x = a - \sqrt{a^2 - 4\frac{k_1}{k_2}}$$

Poziția de echilibru este reală dacă  $\frac{a^2}{4} \geq \frac{k_1}{k_2}$ .

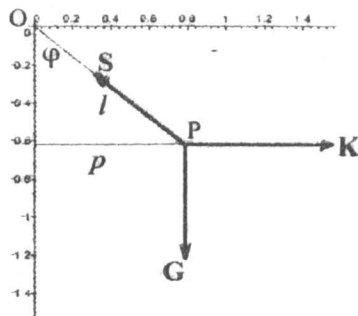


Figura 3.2.4

**3.2.4.** Un punct material având greutatea  $G$  atâră de un fir de lungime  $l$  fixat în  $O$  și este respins, în direcție perpendiculară pe un perete vertical prin  $O$ , cu o forță având mărimea  $K = G \frac{l}{p}$ ,  $p$  fiind distanța punctului la perete. Sub ce unghi  $\varphi$  are loc echilibrul? Care este mărimea tensiunii  $S$  în fir?

Condiția de echilibru

$$\mathbf{G} + \mathbf{K} + \mathbf{S} = \mathbf{0}$$

dă în proiecție pe direcțiile orizontală și respectiv verticală

$$\begin{cases} S \sin \varphi - K = 0 \\ S \cos \varphi - G = 0 \end{cases}$$

Ca ecuații algebrice în  $S$ , cele două ecuații sunt compatibile dacă

$$\sin \varphi - \frac{1}{p} \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos^2 \varphi + \cos \varphi - 1 = 0$$

Rezultă

$$\cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in (0, 1)$$

(cealaltă rădăcină a ecuației  $u^2 + u - 1 = 0$  este mai mică decât  $-1$ ) și

$$S = G \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

**3.2.5.** Trei puncte fixe de mase  $m_1, m_2, m_3$  atrag un punct material  $m$ , proporțional cu masele și distanțele la acesta. Să se determine poziția de echilibru a punctului  $m$ .

Fie  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  vectorii de poziție ai punctelor materiale de mase  $m_1, m_2, m_3$  și  $\mathbf{x}$  vectorul de poziție al punctului material de masă  $m$ . Condiția de echilibru se scrie

$$\sum_{j=1}^3 m_j (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = \mathbf{0}$$

și dă

$$\mathbf{x} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Poziția de echilibru este centrul de masă al sistemului format din punctele fixe.

**3.2.6.** Trei puncte materiale fixe de mase egale  $m$  se află la distanțe egale  $a$  pe o dreaptă fixă. Un punct material  $M$  este atras de punctele fixe cu forțe invers proporționale cu pătratul distanței și proporționale cu masa, iar de punctul din mijloc este respins după aceeași lege. Să se determine poziția de echilibru a punctului  $M$ .

Având în vedere datele problemei, poziția de echilibru se va găsi în planul median al dreaptaei fixe considerate. Fie  $x$  distanța punctului  $M$  în acest plan la dreapta fixă. Condiția de echilibru se scrie

$$\frac{1}{r_1^3} (x \mathbf{t}_r - a \mathbf{t}_z) - \frac{1}{x^2} \mathbf{t}_r + \frac{1}{r_2^3} (x \mathbf{t}_r + a \mathbf{t}_z) = \mathbf{0} \text{ unde } r_1^2 = r_2^2 = a^2 + x^2$$

sau

$$2 \frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} = 0$$

de unde

$$2x^3 = (a^2 + x^2)^{3/2} \Leftrightarrow \sqrt{2} x = \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow (\sqrt{4} - 1)x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{\sqrt{4} - 1}}$$

**3.2.7.** Peste doi scripeți netezi  $A$  și  $B$  ( $AB$  orizontală) trece un fir de care se atârână greutatea  $P$  în  $A$ ,  $Q$  în  $B$  și  $G$  în  $D$ , pe verticala punctului  $C$  ( $C$  între  $A$  și  $B$ ). În ce raport sunt  $AC$  și  $CB$  pentru echilibru?

Fie  $\alpha = \angle(AC,AD)$ ,  $\beta = \angle(CB,DB)$ . Condiția de echilibru  $\mathbf{P}' + \mathbf{G} + \mathbf{Q}' = \mathbf{0}$  dă în proiecții pe direcțiile orizontală și verticală

$$\begin{cases} P \cos \alpha - Q \cos \beta = 0 \\ P \sin \alpha + Q \sin \beta = G \end{cases}$$

Dar

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CD}, \operatorname{tg} \beta = \frac{CB}{CD} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

$$Q^2 = P^2 + G^2 - 2PG \sin \alpha$$

$$P^2 = Q^2 + G^2 - 2QG \sin \beta$$

de unde

$$\frac{AC}{CB} = \frac{G^2 + P^2 - Q^2}{G^2 - P^2 + Q^2}$$

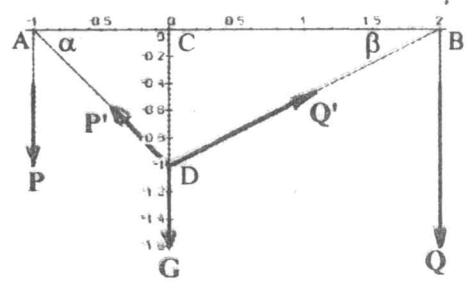


Figura 3.2.7

**3.2.8.** Un fir legat în A trece în B (AB orizontal) peste un scripete neted și are atârnate în C și D greutatea  $P$  și  $Q$  (C pe mediatoarea segmentului AB). Să se determine raportul acestor greutăți pentru ca echilibrul să aibă loc pentru  $AB = a$ ,  $AC = b$ .

Fie  $2\alpha = \angle(AC,CB)$ . Atunci condiția de echilibru  $\mathbf{P}' + \mathbf{P}'' + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$  dă  $P = 2Q \cos \alpha$ ;

dar

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}$$

de unde

$$\frac{P}{Q} = \sqrt{4 - \frac{a^2}{b^2}}$$

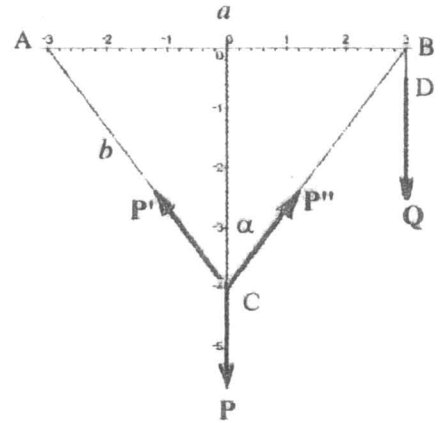


Figura 3.2.8

**3.2.9.** Punctul material  $m$  este atras de trei puncte materiale de mase egale aflate în vârfurile unui triunghi isoscel, după legea atracției universale, și se găsește în echilibru la jumătatea înălțimii corespunzătoare bazei triunghiului. În ce raport trebuie să fie baza  $a$  și înălțimea  $h$ ?

Condiția de echilibru

$$\frac{1}{r_A^3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{r_B^3} \overrightarrow{MB} + \frac{1}{r_C^3} \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$$

dă

$$2 \frac{\cos \alpha}{r_B^2} = \frac{1}{r_C^2}, r_A^2 = \frac{1}{4}(a^2 + h^2), r_C^2 = \frac{1}{4}h^2, \cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

de unde

**3.2.10.** Un punct material este atras de trei puncte materiale fixe proporțional cu distanța. Coeficienții de proporționalitate sunt  $k_1 = k$ ,  $k_2 = 2k$ ,  $k_3 = 3k$ . Să se determine distanțele  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  la vârfurile triunghiului când punctul material este în echilibru.

Condiția de echilibru  $k_1 \overrightarrow{MA} + k_2 \overrightarrow{MB} + k_3 \overrightarrow{MC} = \mathbf{0}$  se proiectează pe direcția laturii BC și pe direcție ortogonală la aceasta.

$$B(0, 0), C(a, 0), A\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right), M(x, y)$$

$$\begin{cases} k\left(x - \frac{1}{2}a\right) + 2kx + 3k(x - a) = 0 \\ k\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) + 2ky + 3ky = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{12}a \\ y = \frac{\sqrt{3}}{12}a \end{cases}$$

Rezultă

$$r_1 = a \sqrt{\left(\frac{7}{12} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \dots$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{19}}{6}a, r_2 = \frac{\sqrt{13}}{6}a, r_3 = \frac{\sqrt{7}}{6}a.$$

**3.2.11.** Un punct material de greutate  $G$  este prins cu două fire AB și AC (A,B,C în același plan vertical, BC nu este orizontal) care fac unghiurile  $\alpha$  respectiv  $\beta$  cu verticala. Să se determine tensiunea în fire în poziția de echilibru.

Condiția de echilibru  $G + T_1 + T_2 = \mathbf{0}$  proiectată pe direcțiile orizontală și verticală dă

$$\begin{cases} T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = 0 \\ T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \beta = G \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} T_1 = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} G \\ T_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} G \end{cases}$$

**3.2.12.** Să se determine poziția de echilibru a unui punct material de greutate  $G$  legat prin două fire trecute peste doi scripeți netezi de care sunt atârinate greutatea  $P$  respectiv  $Q$  (în același plan vertical).

Fie  $\alpha$  respectiv  $\beta$  unghiurile firelor cu orizontala. Condiția de echilibru dă

$$\begin{cases} P \cos \alpha - Q \cos \beta = 0 \\ P \sin \alpha + Q \sin \beta = G \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{P^2 + G^2 - Q^2}{2PG} \\ \sin \beta = \frac{Q^2 + G^2 - P^2}{2GQ} \end{cases}$$

Soluția are sens dacă au loc inegalitățile

$$G < P + Q, P < G + Q, Q < P + G$$

### §3.3. Mișcarea punctului material greu la suprafața Pământului

3.3.1. Să se studieze mișcarea punctului material greu liber, la suprafața Pământului, neglijând rezistența mediului ("în vid").

Mișcarea punctului material greu la suprafața Pământului (nu se ia în considerație variația accelerației gravitaționale) în vid este descrisă de ecuația

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g}.$$

Se alege referențialul inerțial astfel încât planul  $Ox^1x^2$  să fie planul vertical, cu  $Ox^2$  verticala ascendentă, care trece prin poziția inițială și conține suportul vitezei inițiale, adică la momentul inițial  $t = 0$  condițiile inițiale se scriu

$$\mathbf{x}_o = x_o^1 \mathbf{t}_1 + x_o^2 \mathbf{t}_2, \quad \mathbf{v}_o = v_o \cos \alpha \mathbf{t}_1 + v_o \sin \alpha \mathbf{t}_2.$$

Intrucât forța este continuă în planul  $Ox^1x^2$ , rezultă că mișcarea se desfășoară în acest plan vertical (cf.pb.3.1.3) și mai departe se vor scrie numai ecuațiile diferențiale de mișcare în plan  $Ox^1x^2$

$$\ddot{x}^1 = 0, \quad \ddot{x}^2 = -g.$$

Rezultă

$$v^1 = v_o \cos \alpha, \quad v^2 = v_o \sin \alpha - gt$$

$$x^1 = x_o^1 + v_o \cos \alpha t, \quad x^2 = x_o^2 + v_o \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Din aceste relații se pot trage următoarele concluzii:

- traiectoria este o parabolă

$$x^2 = x_o^2 + (x^1 - x_o^1) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} (x^1 - x_o^1)^2;$$

- punctul material atinge înălțimea maximă

$$x_{\max}^2 = x_o^2 + \frac{v_o^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

la momentul

$$t_* = \frac{v_o \sin \alpha}{g}$$

când

$$x^1 = x_o^1 + \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g};$$

înălțimea cea mai mare se realizează pentru  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (aruncarea pe verticală); locul geometric al punctelor de înălțime maximă este un arc de elipsă (jumătate de elipsă)

$$(x^1 - x_o^1)^2 + \left(x^2 - x_o^2 - \frac{v_o^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_o^4}{4g^2};$$

- bătaia ( $x^2 = 0$ ) este

$$x_{\max}^1 = x_o^1 + \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

realizată la momentul

$$t_{**} = \frac{2v_o \sin \alpha}{g} = 2t_*;$$

bătăi egale se obțin pentru două valori ale unghiului vitezei inițiale cu orizontala:  $\alpha$  și  $\pi/2 - \alpha$ ; cea mai mare bătaie se realizează pentru  $\alpha = \pi/4$ ;

- în tot timpul mișcării componenta orizontală a vitezei este constantă, unghiul vitezei cu orizontala descrescând continuu

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{v_1^2} = \operatorname{tg} \alpha - g \frac{x^1 - x_0^1}{v_0^2 \cos^2 \alpha};$$

- indiferent de unghiul de lansare, mobilul se va afla numai în interiorul parabolei de siguranță (înfașurătoarea familiei de traiectorii)

$$x^2 - x_0^2 = \frac{v_0^2}{2g} - g \frac{(x^1 - x_0^1)^2}{2v_0^2};$$

- din teorema de bilanț al energiei

$$v_1^2 - v_2^2 = 2g \cdot (x_1 - x_2)$$

rezultă că vitezele în două puncte de pe traiectorie aflate la aceeași înălțime sunt egale.

Rezultatele de mai sus sunt ilustrate prin o serie de diagrame. S-au utilizat variabile adimensionale pentru a nu mai fi necesară o particularizare a unora dintre datele inițiale.

Pentru obținerea acestor diagrame s-a utilizat programul

> with(plots):

Introducerea datelor

> a1:=Pi/12: a2:=Pi/6: a3:=Pi/4: a4:=Pi/3: a5:=5\*Pi/12:

Trajectoriile cu aceeasi viteza initiala, unghiuri diferite

> f1:=plot(x\*tan(a1)-x^2/2/cos(a1)^2,x=0..sin(2\*a1)):

> f2:=plot(x\*tan(a2)-x^2/2/cos(a2)^2,x=0..sin(2\*a2)):

> f3:=plot(x\*tan(a3)-x^2/2/cos(a3)^2,x=0..sin(2\*a3)):

> f4:=plot(x\*tan(a4)-x^2/2/cos(a4)^2,x=0..sin(2\*a4)):

> f5:=plot(x\*tan(a5)-x^2/2/cos(a5)^2,x=0..sin(2\*a5)):

> g:=implicitplot(x^2+4\*(y-1/4)^2=1/4,x=0..1/2,y=0..1/2,style=line,linestyle=3):

> h:=plot((1-x^2)/2,x=0..1,style=line,linestyle=2):

> k:=plot([0.75,0.5,1,0.5],style=line,linestyle=3):

> l:=plot([0.75,0.4,1,0.4],style=line,linestyle=2):

> display({f1,f2,f3,f4,f5,g,h,k,l});

Trajectoriile pentru acelasi unghi, viteze initiale diferite

> f1:=proc(x) x-x^2 end: g1:=plot(f1(x),x=0..1):

> f2:=proc(x) x-x^2/4 end: g2:=plot(f2(x),x=0..4):

> f3:=proc(x) x-x^2/9 end: g3:=plot(f3(x),x=0..9):

> f4:=proc(x) x-x^2/16 end: g4:=plot(f4(x),x=0..16):

> f5:=proc(x) x-x^2/25 end: g5:=plot(f5(x),x=0..25):

> display({g1,g2,g3,g4,g5});

Variatia energiei cinetice, potentiale, totale

> ec:=proc(t,a) (cos(a)^2+(sin(a)-t)^2)/2 end:

> ep:=proc(t,a) sin(a)\*t-t^2/2 end: et:=proc(t,a) ec(t,a)+ep(t,a) end:

> et:=proc(t,a) ec(t,a)+ep(t,a) end:

> tf:=proc(a) 2\*sin(a)end:

> plot({ec(t,Pi/3),ep(t,Pi/3),et(t,Pi/3)},t=0..tf(Pi/3));

Hodograful miscarii

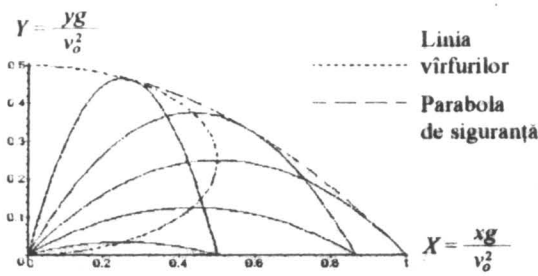
> implicitplot(x-1=0,x=0..1,y=-1..1);

Variatia unghiului vitezei cu orizontala

> plot(arctan(1-2\*x),x=0..1);

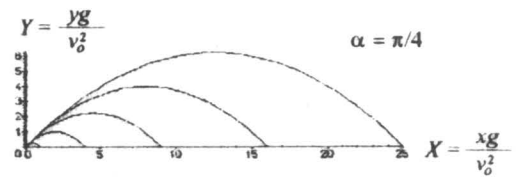
Variatia vitezei

> plot(1-2\*x+2\*x^2,x=0..1);



$\alpha = \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$

Figura 3.3.1 a



$\frac{v_{init}}{v_0} = 1, 2, 3, 4, 5$

Figura 3.3.1 b

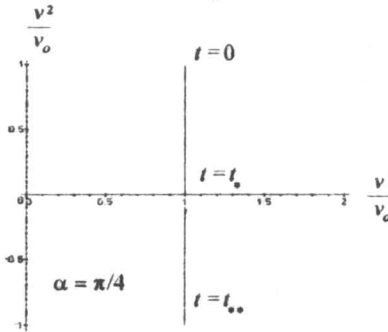


Figura 3.3.1 c

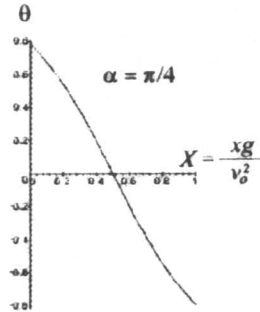


Figura 3.3.1 d

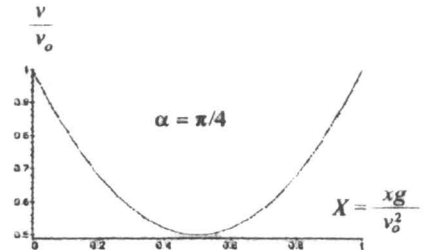


Figura 3.3.1 e

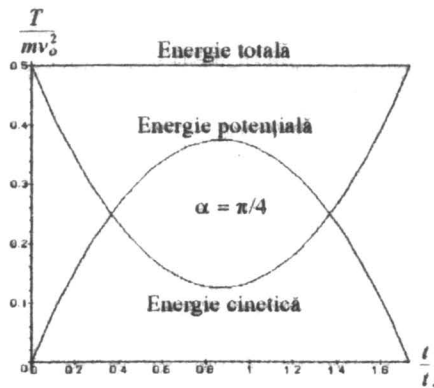


Figura 3.3.1 f

Figura 3.3.1

În figura 3.3.1a sunt prezentate traiectoriile corespunzând aceleși viteze inițiale  $v_0$  dar cu diferite unghiuri inițiale  $\alpha = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$ . Sunt trasate și locul geometric al vîrfurilor și parabola de siguranță. În figura 3.3.1b sunt trasate traiectoriile corespunzând unghiului inițial  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , pentru viteze inițiale proporționale cu 1, 2, 3, 4, 5. Se observă că înălțimile maxime sunt proporționale cu aceste numere în timp ce bătăile variază proporțional cu pătratele lor 1, 4, 9, 16, 25.

În figura 3.3.1c este prezentat hodograful micării pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  care pune în evidență componenta orizontală constantă a vitezei (proprietatea nu depinde de  $\alpha$ ). În figura 3.3.1d este prezentată variația unghiului  $\theta$  al vitezei cu orizontala în timpul micării tot pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ . Graficul oglindete proprietatea de simetrie a traiectoriei în raport cu verticala înălțimii



maxime (proprietatea nu depinde de  $\alpha$ ). Variația mărimii vitezei (minim la înălțimea maximă) în timpul micării, pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  este schițată în figura 3.3.1e.

Proprietatea de conservare a energiei totale pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  este prezentată în figura 3.3.3f (proprietatea nu depinde de  $\alpha$ ).

**3.3.2.** Să se studieze mișcarea punctului material greu, la suprafața Pământului, dacă rezistența mediului este proporțională cu viteza.

Se alege referențialul inerțial la fel ca în problema precedentă (demonstrația planeității traiectoriei este dată în pb.3.3.4); datele inițiale vor avea exprimare identică.

Considerând rezistența mediului

$$\mathbf{R} = -mgk^2\mathbf{v} \quad ([k^2] = \text{M}^{-1}\text{L}^{-1}\text{T}^1)$$

ecuația de mișcare a punctului material

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} - mgk^2\dot{\mathbf{x}}$$

admite soluția reprezentând mișcarea plană și în acest caz (rezultat direct din ecuații; v.și problema 3.3.4)

$$\begin{aligned} x^1 &= x_o^1 + \frac{v_o \cos \alpha}{k^2 g} [1 - \exp(-k^2 g t)] \\ x^2 &= x_o^2 + \frac{k^2 v_o \sin \alpha + 1}{k^4 g} [1 - \exp(-k^2 g t)] - \frac{1}{k^2} t. \\ x^3 &= 0 \end{aligned}$$

Prin eliminarea timpului rezultă ecuația traiectoriei

$$x^2 = x_o^2 + \frac{k^2 v_o + 1}{k^4 g v_o \cos \alpha} (x^1 - x_o^1) - \frac{1}{k^4 g} \ln \frac{x^1 - x_o^1}{v_o \cos \alpha};$$

traiectoria admite asimptotă verticală

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} x^1 &= x_o^1 + \frac{v_o \cos \alpha}{k^2 g} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x^2 &= -\infty. \end{aligned}$$

Punctul material se ridică pînă la înălțimea maximă ( $v^2 = 0$ )

$$x_{\max}^2 = x_o^2 + \frac{v_o \sin \alpha}{k^2 g} - \frac{1}{k^4 g} \ln(1 + k^2 v_o \sin \alpha)$$

pentru

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + k^2 v_o \sin \alpha) \\ x^1 &= x_o^1 + \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g(1 + k^2 v_o \sin \alpha)}. \end{aligned}$$

Bătaia se obține rezolvând ecuația

$$x_o^2 + \frac{k^2 v_o + 1}{k^4 g v_o \cos \alpha} (x^1 - x_o^1) - \frac{1}{k^4 g} \ln \frac{x^1 - x_o^1}{v_o \cos \alpha} = 0.$$

Determinarea numerică a înălțimii maxime și a timpului de urcare, precum și a bății și timpului total este exemplificată în programul de mai jos pentru  $v_o^1 = v_o^2 = 10$  u.m. și  $b = k^2 = 1$  u.m. Cu același program sunt obținute și reprezentările grafice din figura 3.3.2.

> with(plots):  
 > x1:=v01\*(1-exp(-b\*g\*t))/b/g: x2:=-t/b+(1+b\*v02)\*(1-exp(-b\*g\*t))/b^2/g:  
 Calculul componentelor vitezei  
 > v1:=diff(x1,t); v2:=diff(x2,t);

$$v1 := v01 e^{(-b g t)}$$

$$v2 := -\frac{1}{b} + \frac{(1 + b v02) e^{(-b g t)}}{b}$$

Proprietati ale miscari: cazul limita b=0 al miscarii in vid  
 > limit(v1,b=0); limit(v2,b=0);

$$v01$$

$$-g t + v02$$

> limit(x1,b=0); limit(x2,b=0);

$$v01 t$$

$$-\frac{1}{2} g t^2 + t v02$$

Proprietati ale miscarii: valorile limita ale vitezei, existenta asimptotei  
 > assume(b>0,g>0):  
 > limit(v1,t=infinity); limit(v2,t=infinity);

$$0$$

$$-\frac{1}{b}$$

> limit(x1,t=infinity); limit(x2,t=infinity);

$$\frac{v01}{b}$$

$$-\infty$$

> g:=9.8:

> X1:=unapply(x1,v01,b,t): X2:=unapply(x2,v02,b,t):

> V1:=unapply(v1,v01,b,t): V2:=unapply(v2,v02,b,t):

Determinarea bataii si a inaltimii maxime  
 > tb:=solve(X2(10,1,t),t); xb:=X1(10,1,tb);

$$tb := 1.122430229, 0$$

$$xb := 1.020391117$$

> tu:=solve(V2(10,1,t),t); h:=X2(10,1,tu);

$$tu := .2446831911$$

$$h := .7757249719$$

> plot((limit(V2(0,b,t),b=0),V2(0,1,t),V2(0,10,t)),t=0..1);  
 > animate(V2(0,b,t),t=0..1,b=0..10);  
 > plot3d(V2(0,b,t),t=0..1,b=0..10,orientation=[-60,75],axes=framed);  
 > plot((limit(X1(10,b,t),b=0),limit(X2(10,b,t),b=0),t=0..2],[X1(10,0.1,t),X2(10,0.1,t),t=0..2],[X1(10,0.5,t),X2(10,0.5,t),t=0..2],[X1(10,1,t),X2(10,1,t),t=0..2]));

In figura 3.3.2a este reprezentată variația componenteii verticale a vitezei pentru câteva valori ale parametrului  $b = k^2$  și viteză inițială nulă. Aceeași variație este prezentată

global în figura 3.3.2b. În figura 3.3.2c sunt prezentate traiectoriile pentru câteva valori ale parametrului  $b$  pentru o viteză inițială  $v_o^1 = v_o^2 = 10$  u.m.

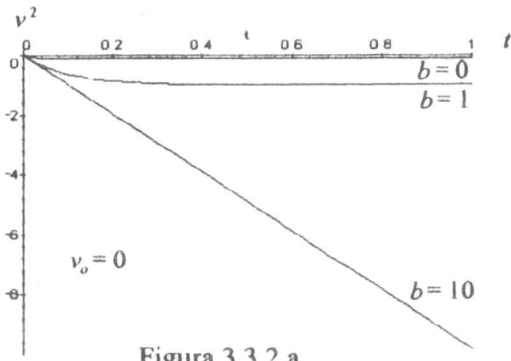


Figura 3.3.2.a

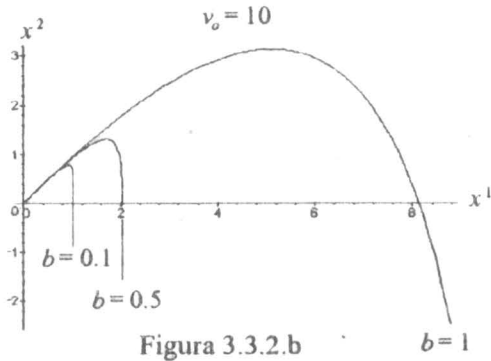


Figura 3.3.2.b

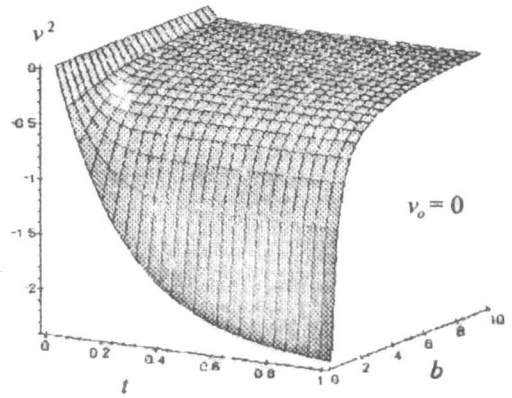


Figura 3.3.2.c

Figura 3.3.2

**3.3.3.** Să se studieze mișcarea pe verticală a unui punct material greu, la suprafața Pământului, dacă rezistența mediului este proporțională cu pătratul vitezei.

Mișcarea pe verticală se realizează în cazul în care viteza inițială este verticală (v.problema 3.3.4), mișcarea fiind descendentă sau ascendentă urmată de o mișcare descendentă după sensul vitezei inițiale.

Rezistența mediului în acest caz are expresia

$$\mathbf{R} = -mgk^2 \mathbf{v} \mathbf{v} \quad ([k^2] = \text{M}^0 \text{L}^{-2} \text{T}^2).$$

Fie  $Ox^2$  axa pe care se va desfășura mișcare.

Mișcarea ascendentă.

Fie la momentul  $t = 0$

$$\mathbf{x}_o = y_o \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{v}_o = v_o \mathbf{i}_2.$$

Intrucât în mișcarea ascendentă

$$\mathbf{x} = x^2 \mathbf{i}_2, \quad \dot{\mathbf{x}} = v \mathbf{i}_2$$

ecuația de mișcare

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} - mgk^2 \mathbf{v} \mathbf{v}$$

conduce la ecuația diferențială de ordinul întâi

$$\dot{v} = -g(1 + k^2 v^2)$$

având soluția

$$v = \frac{1}{k} \operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(kv_0) - kgt].$$

Înălțimea la care se va afla punctul material, în funcție de viteza sa rezultă din integrarea ecuației

$$\dot{y} = v$$

asociind-o cu ecuația diferențială anterioară

$$y = y_0 + \frac{1}{2gk^2} \ln \frac{1 + k^2 v_0^2}{1 + k^2 v^2}.$$

Legea de variație a vitezei în timp arată că aceasta scade până la zero într-un interval de timp dat de

$$t_{urc} = \frac{1}{kg} \operatorname{arctg}(kv_0) > \frac{v_0}{g}$$

când atinge înălțimea maximă

$$y_{\max} = y_0 + \frac{1}{2k^2 g} \ln(1 + k^2 v_0^2) < y_0 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Timpul cât punctul material urcă în mediul rezistent este mai mare decât timpul în vid, iar înălțimea maximă pe care o atinge este mai mică decât cea în vid.

### Miscarea descendentă.

Fie la momentul  $t = t_1$

$$\mathbf{x}_1 = y_1 \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{v}_1 = -v_1 \mathbf{i}_2, \quad v_1 > 0.$$

În acest caz

$$\mathbf{x} = y \mathbf{i}_2, \quad \dot{\mathbf{x}} = -v \mathbf{i}_2$$

și ecuația diferențială a mișcării va fi

$$\dot{v} = g(1 - k^2 v^2)$$

având soluția

$$v = \frac{1}{k} \cdot \frac{C \exp(2k(t - t_1)) - 1}{C \exp(2k(t - t_1)) + 1}, \quad C = \frac{1 + kv_1}{1 - kv_1}.$$

Înălțimea la care se află punctul material este dată de

$$y = y_1 - \frac{1}{2k^2 g} \ln \frac{1 - k^2 v_1^2}{1 - k^2 v^2}.$$

### Miscare ascendentă urmată de mișcare descendentă.

În mișcarea ascendentă fie  $y_0 = 0$ . Legile mișcării sunt cele prezentate mai sus. Datele inițiale pentru mișcarea descendentă ce urmează mișcării ascendente sunt valorile finale ale acesteia, adică

$$t_1 = \frac{1}{kg} \operatorname{arctg}(kv_0)$$

$$v_1 = \frac{1}{k} \ln(1 + k^2 v_0^2), \quad v_1 > 0.$$

Legile mișcării se particularizează din relațiile de la mișcarea descendentă. Viteza la coborâre - cea pentru care  $y = 0$  - va fi

$$v_{cob}^2 = \frac{v_o^2}{1 + k^2 v_o^2} < v_o^2.$$

Timpul de coborâre - cel la care  $v = v_{cob}$  - va fi

$$t_{cob} = \frac{1}{kg} \ln \left[ kv_o + \sqrt{1 + k^2 v_o^2} \right] > \frac{v_o}{g}.$$

Pentru valori foarte mici ale parametrului  $k$ , prin dezvoltare în serie în jurul valorii  $k = 0$ , rezultă relațiile

$$t_{urc} = \frac{v_o}{g} \left[ 1 - \frac{1}{3} v_o^2 k^2 + \dots \right]; \quad y_{\max} = \frac{v_o^2}{2g} \left[ 1 - \frac{1}{3} v_o^2 k^2 + \dots \right]$$

$$t_{cob} = \frac{v_o}{g} \left[ 1 - \frac{1}{6} v_o^2 k^2 + \dots \right]; \quad v_{cob}^2 = v_o^2 \left[ 1 - v_o k + v_o^2 k^2 + \dots \right].$$

care arată că pentru valori mici ale parametrului  $k$  se poate considera mișcarea cu neglijarea rezistenței mediului.

Pentru o viteză inițială  $v_o = 111,11$  m/s și valoarea parametrului  $k^2 = 8 \cdot 10^{-5}/g$ , sunt reprezentate grafic variația vitezei și a înălțimii în timp și calculate mărimile caracteristice corespunzătoare mișcării pe verticală cu rezistența proporțională cu pătratul vitezei și comparate cu cele pentru micarea în vid (timp de urcare, timp de coborâre, viteza de coborâre, înălțimea maximă). Programul utilizat este

> with(plots):

Introducerea datelor, calculul unor parametri

> g:=9.81; lb:=8\*10^(-5)/g; v0:=111.11; k:=sqrt(lb);

k := .002855686246

> t0:=v0/g; t1:=arctan(k\*v0)/(k\*g); t2:=ln(k\*v0+sqrt(1+k^2\*v0^2))/(k\*g);

t0 := 11.32619776

t1 := 10.96753273

t2 := 11.14427802

> v2:=sqrt(v0^2/(1+k^2\*v0^2));y0:=v0^2/g; y1:=ln(1+k^2\*v0^2)/(2\*k^2\*g);

v2 := 105.9066763

y0 := 1258.453833

y1 := 599.5300965

Variatia vitezei in timp

> vu:=proc(t) tan(arctan(k\*v0)-k\*g\*t)/k end;

> vc:=proc(t) (exp(2\*k\*g\*(t-t1))-1)/(exp(2\*k\*g\*(t-t1))+1)/k end;

> ga:=plot(vu(t),t=0..t1):

> gd:=plot(vc(t),t=t1..t1+t2):

> display({ga,gd});

Variatia inaltimii in timp

> yu:=proc(v) ln((1+k^2\*v0^2)/(1+k^2\*v^2))/(2\*g\*k^2) end;

> yc:=proc(v) y1+ln(1-k^2\*v^2)/(2\*g\*k^2) end;

> tu:=proc(v) (arctan(k\*v0)-arctan(k\*v))/(k\*g) end;

> tc:=proc(v) t1+ln((1+k\*v)/(1-k\*v))/(2\*k\*g) end;

> fu := plot({tu(v),yu(v),vc(v),vu(v)});

> fc := plot({tc(v),yc(v),v2,v0});

> display({fu,fc});

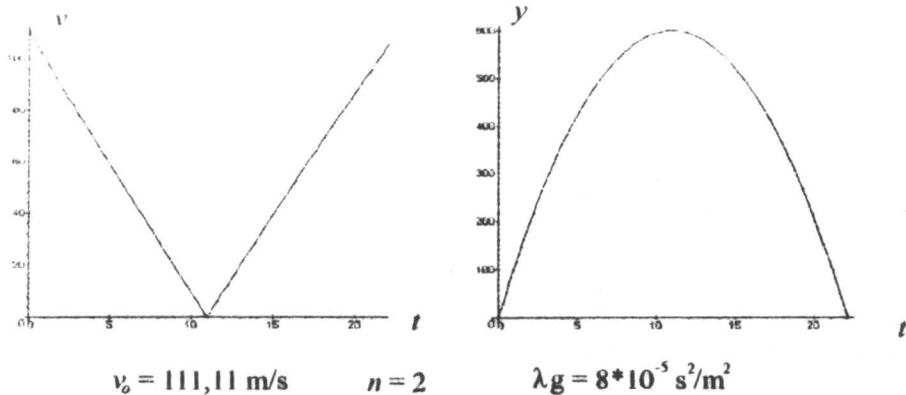


Figura 3.3.3

**3.3.4.** Se consideră mișcarea unui punct material greu la suprafața Pământului, presupunând că el întâmpină o rezistență

$$\mathbf{R} = -mgf(v)\frac{\mathbf{v}}{v}, \quad v = \|\mathbf{v}\|$$

unde  $f(v)$  are următoarele proprietăți pentru  $0 < v < v_{..}$ :

- este nenegativă
  - este monoton crescătoare
  - este derivabilă
  - ecuația  $f(v) = 1$  are soluție  $v_{..}$ .
- a) Să se arate că traiectoria este plană /rectilinie.
- b) Să se deducă ecuația hodografului (ecuația fundamentală a balisticii exterioare).
- c) Să se arate că viteza este limitată inferior și superior.
- d) Să se arate că traiectoria admite asimptotă verticală. Să se studieze disimetria dintre ramura ascendentă și cea descendentă a traiectoriei.

a) Fie un referențial inerțial ales astfel încât planul  $Ox^1 x^2$  să treacă prin poziție inițială și să conțină suportul vitezei inițiale, deci la momentul  $t = 0$

$$x^1 = x_0^1, x^2 = x_0^2, x^3 = 0$$

$$\dot{x}^1 = v_0 \cos \alpha, \dot{x}^2 = v_0 \sin \alpha, \dot{x}^3 = 0.$$

În raport cu referențialul ales mișcarea este descrisă de ecuațiile diferențiale de ordinul al doilea

$$\ddot{x}^1 = -gf(v)\frac{\dot{x}^1}{v}$$

$$\ddot{x}^2 = -gf(v)\frac{\dot{x}^2}{v} - g \quad v = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$$

$$\ddot{x}^3 = -gf(v)\frac{\dot{x}^3}{v}$$

Acestea admit, în condițiile inițiale date, soluție unică verificând ecuațiile diferențiale

$$\ddot{x}^1 = -gf(u)\frac{\dot{x}^1}{u}$$

$$\ddot{x}^2 = -gf(u)\frac{\dot{x}^2}{u} - g \quad u = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$$

$$\ddot{x}^3 = 0.$$

Dacă viteza inițială este verticală, atunci mișcarea are loc pe verticala poziției inițiale ( $v_0 \parallel g$ ).

b) Notând cu  $\theta$  unghiul vitezei cu  $Ox^1$ , ecuațiile mișcării în planul  $Ox^1x^2$  se scriu

$$\begin{aligned} \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta &= -gf(v) \cos \theta \\ \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta &= -gf(v) \sin \theta - g \end{aligned}$$

sau aduse la forma normală

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -g \sin \theta - gf(v) \\ v \dot{\theta} &= -g \cos \theta. \end{aligned}$$

Eliminând timpul, se obține ecuația hodografului sau a fundamentală a balisticii exterioare

$$\frac{dv}{d\theta} = v \left[ \operatorname{tg} \theta + \frac{f(v)}{\cos \theta} \right].$$

Rezultă ecuațiile parametrice ale traiectoriei și legea de variație a unghiului  $\theta$  în timp

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{v(\theta)}{\cos \theta} d\theta \\ x^1 &= x_0^1 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} v^2(\theta) d\theta \\ x^2 &= x_0^2 - \frac{1}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} v^2(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta \end{aligned}$$

Intrucât mișcarea are loc pentru  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ , unghiul vitezei cu horizontala descrește în timp.

c) Fie  $\theta_0 > 0$ . Pentru  $\frac{\pi}{2} > \theta > 0$  viteza crește  $\left(\frac{dv}{d\theta} > 0\right)$  și deci  $0 < v(0) < v < v_0$ . În intervalul următor de variație a lui  $\theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$  dacă viteza descrește în continuare, ea rămâne inferioară lui  $v_0$ . Dacă ea crește, atunci

$$\sin \theta + f(v) < 0 \Rightarrow f(v) < -\sin \theta < 1;$$

funcția  $f$  fiind monoton crescătoare și  $f(v_*) = 1$  rezultă  $v < v_*$ . Deci viteza este limitată superior

$$v < \max(v_0, v_*).$$

În intervalul  $0 < \theta < \theta_0$  viteza este superioară valorii  $v(0)$ . În intervalul  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  viteza poate fi mai mare decât  $v_*$ , atunci și  $v(0) > v_*$  și  $v_*$  este limita inferioară a lui  $v$  pe  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ . Să admitem că există un interval  $[\theta_2, \theta_1] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  în care  $v < v_*$ . Dacă  $\theta_1 = 0$  atunci  $v(0) < v_*$ . Dacă  $\theta_1 < 0$  atunci  $v > v_*$  pentru  $\theta \in (\theta_1, 0)$ . Pentru  $\theta \in [\theta_2, \theta_1]$

$$\frac{1}{v \cos \theta} \cdot \frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{f(v)}{\cos \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

sau

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \ln(v \cos \theta) + \ln \left( \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right) \right] < 0$$

de unde prin integrare între  $\theta$  și  $\theta_1$  ( $v(\theta_1) = v_*$ ) se obține

$$\ln \frac{v(\theta_1)(1 - \sin \theta_1)}{v(\theta)(1 - \sin \theta)} < 0$$

deci

$$v(\theta_1)(1 - \sin \theta_1) < v(\theta)(1 - \sin \theta).$$

Prin urmare

$$v(\theta) > v(\theta_1) \frac{1 - \sin \theta_1}{1 - \sin \theta} > v(\theta_1) \frac{1 - \sin \theta_1}{2} > \frac{v(\theta_1)}{2}.$$
$$1 - \sin \theta < 2 \quad 1 - \sin \theta_1 > 0$$

În concluzie

$$v > \min\left(\frac{v_*}{2}, \frac{v(\theta)}{2}\right).$$

O discuție similară se poate face dacă  $\theta_0 < 0$ .

d) Din ecuațiile parametrice ale traiectoriei și din legea de variație a unghiului  $\theta$  în timp se obțin limitele

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x^1 = \frac{1}{g} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} v^2(\theta) d\theta < +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} x^2 = -\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} t = +\infty$$

deci traiectoria admite asimptotă verticală.

Fie două puncte aflate la aceeași înălțime  $x^2$ , unghiurile vitezei cu orizontala fiind  $\theta_1$  respectiv  $\theta_2$  ( $x^1 < x^2$ ). Relația între  $x^2$  și  $\theta$  se poate scrie sub forma

$$-\frac{g}{v^2(\theta)\cos^2\theta} dx^2 = \operatorname{tg}\theta d(\operatorname{tg}\theta)$$

de unde

$$\operatorname{tg}^2\theta_1 = -2g \int_{x_{\max}^2}^{x^2} \frac{1}{v^2(\theta)\cos^2\theta} dx^2$$

$$\operatorname{tg}^2\theta_2 = -2g \int_{x_{\max}^2}^{x^2} \frac{1}{v^2(\theta)\cos^2\theta} dx^2$$

dar cum

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = v f(v) > 0$$

produsul  $v \cos \theta$  scade și deci

$$\operatorname{tg}^2\theta_1 < \operatorname{tg}^2\theta_2.$$

Din teorema energiei cinetice, în intervalul corespunzător punctelor aflate la aceeași înălțime, se obține

$$v_2^2 - v_1^2 = -2g \int_{t_1}^{t_2} v f(v) dt < 0$$

de unde

$$0 < v_2 < v_1.$$

**3.3.5.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu la suprafața Pământului, considerând rezistența mediului proporțională cu o putere a vitezei.



$$f(v) = kv^n.$$

Ecuția fundamentală a balisticii exterioare se scrie sub forma

$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = k \frac{(v \cos \theta)^{n+1}}{(\cos \theta)^{n+1}}.$$

Integrând această ecuație cu variabile separabile se obține

$$u_n(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}; \quad \varphi_n(\theta) = u_n(0) - u_n(\theta_0)$$

$$v(\theta)\cos\theta = \frac{v_0\cos\theta_0}{[1 - nk\varphi_n(\theta)(v_0\cos\theta_0)^n]^{1/n}}$$

$$x^1 = x_0^1 - \frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g} \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta[1 - nk\varphi_n(\theta)(v_0\cos\theta_0)^n]^{2/n}}$$

$$x^2 = x_0^2 - \frac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g} \int_{\theta_0}^\theta \frac{\operatorname{tg}\theta d\theta}{\cos^2\theta[1 - nk\varphi_n(\theta)(v_0\cos\theta_0)^n]^{2/n}}$$

$$t = -\frac{v_0\cos\theta_0}{g} \int_{\theta_0}^\theta \frac{d\theta}{\cos^2\theta[1 - nk\varphi_n(\theta)(v_0\cos\theta_0)^n]^{1/n}}$$

În cazul vitezelor foarte mici se poate lua  $n = 1$  (legea lui Stokes); pentru viteze sub 250 m/s o evaluare mai bună se obține cu  $n = 2$ ; pentru  $250 \text{ m/s} < v < 500 \text{ m/s}$  se ia  $n = 3$ ; dacă  $500 \text{ m/s} < v < 700 \text{ m/s}$  se ia  $n = 5$ . Pentru  $700 \text{ m/s} < v < 1200 \text{ m/s}$  se adoptă valoarea  $n = 1.7$  [v.C.Iacob].

**3.3.6.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu la suprafața Pământului, considerând rezistența mediului proporțională cu pătratul vitezei.

Procedând ca la problema precedentă, cu notațiile

$$q = -\operatorname{tg}\theta, \quad q_0 = -\operatorname{tg}\theta_0, \quad u_2(\theta) = -\frac{1}{2}F(q), \quad F(q) = q\sqrt{1+q^2} + \ln\left(q + \sqrt{1+q^2}\right)$$

rezultă

$$v^2 = \frac{1}{k} \frac{1+q^2}{C+F(q)-F(q_0)}, \quad C = \frac{1+q_0^2}{kv_0^2}$$

$$x^1 = x_0^1 - \frac{1}{kg} \int_{q_0}^q \frac{dq}{C+F(q)-F(q_0)}, \quad x^2 = x_0^2 + \frac{1}{kg} \int_{q_0}^q \frac{q dq}{C+F(q)-F(q_0)}$$

$$t = \frac{1}{g\sqrt{k}} \int_{q_0}^q \frac{dq}{\sqrt{C+F(q)-F(q_0)}}$$

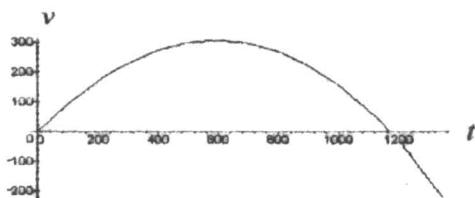
În figura 3.3.6 sunt prezentate traiectoria și variația mărimii vitezei în timp pentru  $k^2 = \frac{8 \cdot 10^{-5}}{g}$ ,  $v_0 = 111.11 \text{ m/s} = 400 \text{ km/h}$ ,  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ .

Reprezentările grafice precum și calculul elementelor caracteristice (timp de urcare, timp de coborâre, viteza la sfârșitul urcării, înălțimea maximă, bătaia, poziția asimptotei, viteza limită) sunt realizate cu programul

```

> with(plots):
> v0:=111.11: g:=9.81: lb:=8*10^(-5)/g:
> unghi0:=Pi/4: q0:=-tan(unghi0): a:=(1+q0^2)/lb/v0^2:
> unghif:=-Pi/3: qf:=-tan(unghif):
> n:=ceil((Pi/2-unghi0)*72/Pi)+35: pas:=Pi/72:
> F:=proc(q) q*sqrt(1+q^2)+ln(q+sqrt(1+q^2)) end:
> G:=proc(q) a+F(q)-F(q0) end:
> v:=proc(q) sqrt((1+q^2)/G(q)/lb) end:
> fx:=proc(q) 1/G(q)/lb/g end: fy:=proc(q) -q/G(q)/lb/g end:
> ft:=proc(q) 1/sqrt(lb*G(q))/g end:
> xa:=evalf(int(fx(q),q=q0..infinity));
                                     xa := 4594.671409
> vu:=evalf(v(0)); tu:=evalf(int(ft(q),q=q0..0));
                                     vu := 74.38622783
                                     tu := 7.776720775
> h:=evalf(int(fy(q),q=q0..0)); xu:=evalf(int(fx(q),q=q0..0));
                                     h := 302.0614191
                                     xu := 593.4281849
> vf:=sqrt(g*10^5/8);
                                     vf := 350.1785259
> traiect:=[seq([evalf(int(fx(q),q=q0..-tan(unghi0-i*pas))),evalf(int(fy(q),q=q0..-tan(unghi0-i*pas))
> ]),i=0..40)];
> plot(traiect);
> viteza:=[seq([evalf(int(ft(q),q=q0..-tan(unghi0-i*pas))),v(-tan(unghi0-i*pas))],i=0..n)];
> plot(viteza);

```



$$v_0 = 111,11 \text{ m/s}$$

$$n = 2$$

$$\lambda_g = 8 \cdot 10^{-5} \text{ s}^2/\text{m}^2$$

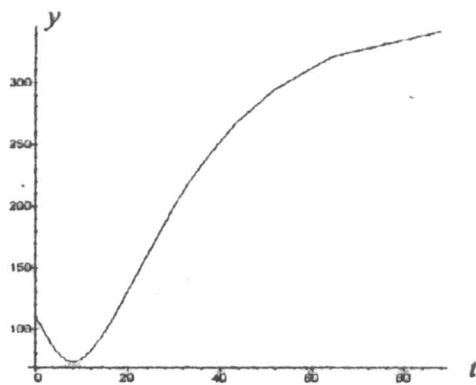


Figura 3.3.6

### §3.4. Mișcarea punctului material în câmp central. Mișcarea kepleriană

Mișcarea punctului material P în câmp central de centru O

$$\mathbf{F} = F(r)\frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}\|, \quad (\mathbf{x} = \mathbf{OP})$$

este caracterizată de următoarele legi:

- traiectoria se află în planul care trece prin poziția inițială  $\mathbf{x}_0$  și conține suportul vitezei inițiale  $\mathbf{v}_0$  de la momentul  $t_0$ ; în acest plan poziția punctului va fi precizată prin coordonatele sale polare  $r$  și  $\theta$ ;
- în timpul mișcării viteza areolară este constantă

$$C = |\mathbf{x} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{x}_0 \times \mathbf{v}_0| = r_0 v_0 \sin \alpha;$$

- traiectoria  $r = r(\theta)$  rezultă din ecuația lui Binet

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F(r)}{mC^2}.$$

Mișcarea în câmp central este o prezentare simplificată a unui sistem izolat format din două puncte materiale în absența forțelor exterioare (v.L.Dragoș și problema 4.5).

\*\*\*

**3.4.1.** Să deducă legile mișcării punctului material în câmp central din legea lui Newton scrisă în coordonate sferice.

Fie  $Ox^1 x^2 x^3$  un reper inerțial și  $r, \theta, \varphi$  coordonatele sferice asociate

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \varphi & r &\in (0, +\infty) \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \varphi & \theta &\in [0, \pi] \\ x^3 &= r \cos \theta & \varphi &\in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Ecuatia vectorială de mișcare

$$m\mathbf{a} = F(r)\frac{\mathbf{x}}{r}$$

în proiecție pe triedrul  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  conduce la ecuațiile scalare (v.problema 2.40)

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = F(r)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta) = 0$$

$$m(r\ddot{\varphi} \sin \theta + \dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta) = 0$$

Ultima ecuație se mai scrie

$$\frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0.$$

Dacă referențialul inerțial este astfel ales încât planul  $\varphi = 0$  să fie planul determinat de poziția inițială și suportul vitezei inițiale, atunci  $\dot{\varphi}_0 = 0, \ddot{\varphi}_0 = 0$  și deci

$$r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta = 0$$

de unde

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = 0$$

adică mișcarea este plană în planul determinat de poziția inițială și suportul vitezei inițiale.

Din a doua ecuație rezultă

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow r^2\dot{\theta} = C$$

(conservarea vitezei areolare). Prima ecuație prelucrată acum la fel ca și în cazul utilizării coordonatelor polare conduce la ecuația lui Binet.

**3.4.2.** Să se studieze mișcarea punctului material sub acțiunea unei forțe elastice  $F = -kx$ ,  $k > 0$ .

Fie în planul determinat de poziția inițială și suportul vitezei inițiale, în coordonate polare, condițiile inițiale

$$r_o, \theta_o, \dot{r}_o = v_o \cos \alpha, r_o \dot{\theta}_o = v_o \sin \alpha.$$

Ecuația lui Binet scrisă în raport cu  $u = \frac{1}{r}$

$$u'' + u = -\frac{k}{mC^2 u^3}$$

unde

$$C = r_o v_o \sin \alpha,$$

admite integrala primă

$$u'^2 + u^2 = \frac{k}{mC^2 u^2} + 2C_1$$

cu  $C_1$  rezultând din datele inițiale

$$u_o = \frac{1}{r_o}, u'_o = -\frac{\text{ctg} \alpha}{r_o}; \quad 2C_1 = \frac{1}{r_o^2 \sin^2 \alpha} - \frac{kr_o^2}{mC^2}.$$

Multiplicând cu  $u^2$ , aceasta se scrie

$$(u^2)' = 2 \sqrt{\frac{k}{mC^2} + C_1^2 - (u^2 - C_1)^2},$$

ecuație ce admite soluția

$$2(\theta - \theta_o) = \arccos \frac{u^2 - C_1}{C_2} - \arccos \frac{u^2 - C_1}{C_2}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{k}{mC^2} + C_1^2}.$$

Problema va fi reluată prin integrare directă în §3.8.

**3.4.3.** Un punct material se mișcă pe o circumferință de diametru  $2a$  sub acțiunea unei forțe de atracție din partea unui punct fix  $O$  al circumferinței. Să se deducă expresia forței centrale care determină această mișcare și viteza în punctul  $A$  diametral opus lui  $O$  pentru care mișcarea să fie posibilă.

Fie  $OA$  axa  $Ox^1$ . Datele inițiale ale problemei (cu  $A$  poziție inițială) sunt

$$r_o = 2a, \theta_o = 0, v_o \text{ cu } \alpha = \frac{\pi}{2}, C = 2av_o.$$

Reprezentarea parametrică a traiectoriei fiind

$$r = 2a \cos \theta,$$

din ecuația lui Binet rezultă

$$F(r) = -\frac{8mC^2a^2}{r^3};$$

prin urmare forța care determină mișcarea are expresia

$$F(r) = -\frac{mk}{r^3}, k > 0$$

dacă viteza inițială  $v_o$  este astfel încât  $k = 8C^2a^2$  adică

$$v_o = \frac{1}{2a^2} \sqrt{\frac{k}{2}}.$$

Punctul material ajunge din A în O după un interval de timp ce se obține din legea ariilor

$$4a^2\dot{\theta} \cos^2\theta = 2av_o$$

adică

$$t = \frac{2a}{v_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta = \frac{\pi a}{2v_o}.$$

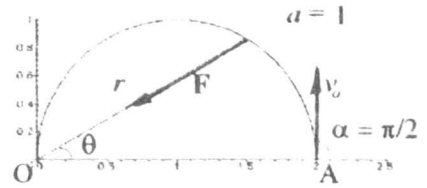


Figura 3.4.3

Dacă viteza în A ar avea altă valoare, punctul ar avea altă traiectorie ca la problema 3.4.11.

**3.4.4.** Un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale pe lemniscata  $r^2 = a \cos 2\theta$ . Să se deducă expresia forței care determină această mișcare și relația ce trebuie să existe între datele inițiale și mărimea forței.

Poziția inițială a punctului material este caracterizată prin

$$r_o = \sqrt{a \cos 2\theta_o}, \theta_o$$

(dacă  $a > 0$  atunci  $\theta_o \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  sau  $\theta_o \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ).

Viteza inițială fiind  $v_o$ , unghiul ei cu  $x_o$  se poate determina

$$\cos \alpha = \cos(\mathbf{x}_o, \mathbf{v}_o) = -\frac{2 \sin 2\theta_o}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 2\theta_o}}.$$

Ținând seama de reprezentarea parametrică a traiectoriei, din ecuația lui Binet rezultă

$$F(r) = -\frac{3mC^2a^2}{r^7},$$

deci expresia forței centrale care determină această mișcare este

$$F(r) = -\frac{mk}{r^7}, k > 0.$$

Mișcarea sub acțiunea unei asemenea forțe

are loc pe curba dată numai dacă viteza inițială a punctului material are valoarea

$$v_o = \sqrt{\frac{k}{3a^3 \cos^3 2\theta_o}}.$$

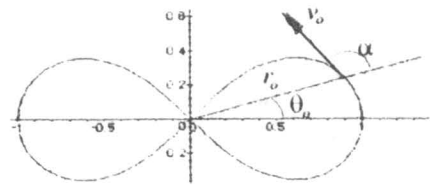


Figura 3.4.4

Traectoria punctului material sub acțiunea forței centrale de tipul considerat pentru o viteză inițială diferită de cea determinată este obținută la problema 3.4.9.

**3.4.5.** Un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale pe spirala logaritmică  $r = a \exp(\lambda\theta)$ . Să se deducă expresia forței care determină această mișcare și relația ce trebuie să existe între datele inițiale și mărimea forței.

Poziția inițială a punctului material este caracterizată prin

$$r_o = a \exp(\lambda\theta_o), \theta_o.$$

Viteza inițială fiind  $v_o$ , unghiul ei cu  $x_o$  se poate determina

$$\cos \alpha = \cos(\mathbf{x}_o, \mathbf{v}_o) = \frac{\lambda \cos \theta_o - \sin \theta_o}{\sqrt{\lambda^2 + 1}}.$$

Ținând seama de reprezentarea parametrică a traiectoriei, din ecuația lui Binet rezultă

$$F = -\frac{mC^2(\lambda^2 + 1)}{r^3},$$

deci expresia forței centrale care determină această mișcare este

$$F = -\frac{mk}{r^3}, \quad k > 0.$$

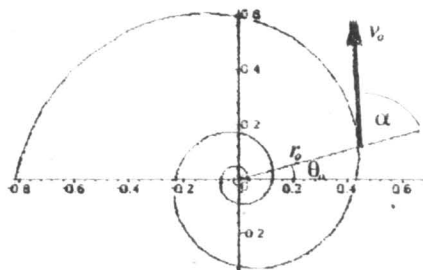


Figura 3.4.5

Mișcarea sub acțiunea unei asemenea forțe

are loc pe curba dată numai dacă viteza inițială a punctului material are valoarea

$$v_o = \sqrt{\frac{k}{r_o^2} \frac{1}{\lambda \sin \theta_o + \cos \theta_o}}.$$

Traectoria punctului material sub acțiunea forței centrale de tipul considerat pentru o viteză inițială diferită de cea determinată este obținută la problema 3.4.10.

**3.4.6.** Să se studieze mișcarea unui punct material sub acțiunea forței de atracție universală

$$F(r) = -f \frac{Mm}{r^2}$$

din partea unui punct de masă  $M$  ( $f = 6.67 \cdot 10^{-11}$  S.I.).

a) Traectoria unui punct material supus acțiunii forței de atracție universală este o conică. Natura conicei depinde de condițiile inițiale:

- traectoria este elipsă dacă  $r_o v_o^2 < 2fM$  ( $e < 1$ )

- traectoria este parabolă dacă  $r_o v_o^2 = 2fM$  ( $e = 1$ )

- traectoria este hiperbolă dacă  $r_o v_o^2 > 2fM$  ( $e > 1$ ).

Intr-adevăr, formula lui Binet devine în cazul forței de atracție universală

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{fM}{C^2}$$

și are soluția

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{fM}{C^2}$$

Condițiile inițiale  $(r_o, \theta_o)$ ,  $(\dot{r}_o = v_o \cos \alpha, r\dot{\theta}_o = v_o \sin \alpha)$ . Ele urmează să fie utilizate în determinarea constantelor  $A$  și  $B$  din expresiile lui  $\frac{1}{r}$ ,  $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$  pentru  $\theta = \theta_o$ . Dar

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \dot{\theta}$$

Prin urmare

$$\begin{cases} A \cos \theta_o + B \sin \theta_o + \frac{fM}{C^2} = \frac{1}{r_o} \\ -A \sin \theta_o + B \cos \theta_o = -\frac{v_o \cos \alpha}{C} \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} A = \left(\frac{1}{r_o} - \frac{fM}{C^2}\right) \cos \theta_o + \frac{v_o \cos \alpha}{C} \sin \theta_o \\ B = \left(\frac{1}{r_o} - \frac{fM}{C^2}\right) \sin \theta_o - \frac{v_o \cos \alpha}{C} \cos \theta_o \end{cases}$$

Soluția se scrie sub forma

$$(*) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}$$

unde

$$(**) \quad p = \frac{C^2}{fM} = \frac{r_o^2 v_o^2 \sin^2 \alpha}{fM}, \quad e \cos(\theta_o - \theta_1) = \frac{p}{r_o} - 1, \quad e \sin(\theta_o - \theta_1) = \frac{p \cos \alpha}{r_o \sin \alpha}$$

$$e^2 = 1 + \frac{p}{r_o} \left( \frac{p}{r_o \sin^2 \alpha} - 2 \right) = 1 + \frac{p}{r_o} \left( \frac{r_o v_o^2}{fM} - 2 \right), \quad \text{tg}(\theta_o - \theta_1) = \frac{r_o v_o^2 \sin \alpha \cos \alpha}{r_o v_o^2 \sin^2 \alpha - fM}$$

(\*) arată că traiectoria este o conică, cu centrul atractiv în focar, iar din (\*\*), rezultă natura conice.

Același rezultat se putea obține utilizând integrala primă a energiei

$$V = -\frac{fMm}{r}$$

$$\frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + V(r) = h$$

$$\frac{1}{2}m \left\{ C^2 \left[ \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{C^2}{r^2} \right\} - \frac{fMm}{r} = h$$

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{C^2} \left\{ \frac{2}{m} (h + fMm u) - u^2 \right\}$$

$$\left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 = \left\{ \frac{1}{C^2} \left[ \frac{2h}{m} + (fM)^2 \right] - (u - fM)^2 \right\}$$

$$u = fM - \sqrt{\frac{2h}{mC^2} + \left( \frac{fM}{C} \right)^2} \cos(\theta - \theta_1)$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}$$

$$p = \frac{C^2}{fM}, e = \sqrt{1 + \frac{2hmC^2}{(fM)^2}}, h = \frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{fMm}{r_o}$$

Exemple de conice depinzând de condițiile inițiale sunt date în figura 3.4.6, pentru aceeași poziție inițială  $r_o$  (alesă drept unitate de lungime) și pentru o viteză inițială a cărei mărime verifică relația  $k = \frac{r_o v_o^2}{fM} = 1.7, 2, 2.5$  (elipsă, parabolă, hiperbolă) și care face cu direcția inițială  $\theta_o = 0$  un unghi  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  respectiv  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

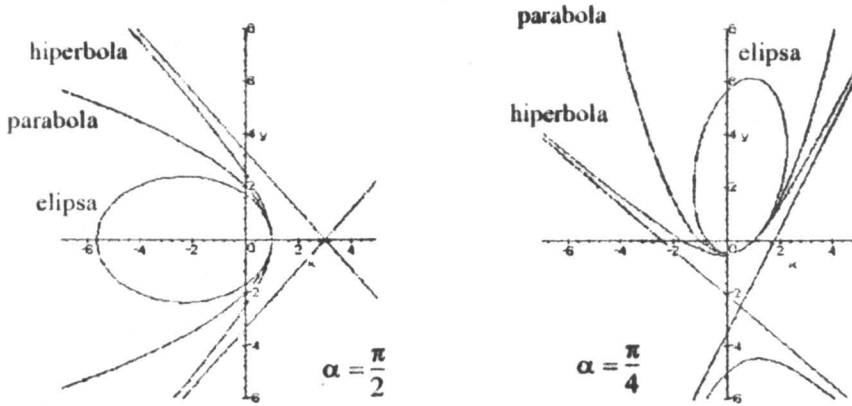


Figura 3.4.6

Reprezentările grafice sunt realizate cu programul

> with(plots):

Ecuatia conicei functie de parametrul k

> r:=k\*sin(a)^2/(1+(k\*sin(a)^2-1)\*cos(u)-k\*sin(a)\*cos(a)\*sin(u));

> R:=unapply(r,u,a,k):

Reprezentările pentru doua unghiuri ale vitezei initiale cu pozitia initiala

> xs:=-7: xd:=5: yj:=-6: ys:=8:

> elp1:=plot([R(u,Pi/2,1.7),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> par1:=plot([R(u,Pi/2,2),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> hip1:=plot([R(u,Pi/2,2.5),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> display({elp1,par1,hip1});

> elp2:=plot([R(u,Pi/4,1.7),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> par2:=plot([R(u,Pi/4,2),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> hip2:=plot([R(u,Pi/4,2.5),u,u=-Pi..Pi],x=xs..xd,y=yj..ys,coords=polar):

> display({elp2,par2,hip2});

b) Dacă traiectoria este elipsă, se definesc apsidele pentru  $\theta = \theta_1, \theta = \theta_1 + \pi$ :

$$a = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right) = \frac{p}{1-e^2}, b = a \sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

Perioada mișcării rezultă din

$$\tau = \frac{\pi ab}{C}$$

Se obține legea a III-a a lui Kepler: raportul dintre pătratul perioadei și cubul semiaxei mari nu depinde de punctul material în câmpul de atracție al aceluiași centru



$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{(\pi a^2 \sqrt{1-e^2})^2}{a^3 C^2} = \frac{\pi^2 a(1-e^2)}{C^2} = \frac{\pi^2 p}{C^2} = \frac{\pi^2}{fM} = \text{const.}$$

c) Dacă sunt adevărate legile lui Kepler

I - traiectoria punctului material este o elipsă

II - raza vectoare mătură arii egale în intervale de timp egale (viteză areolară constantă)

III - raportul dintre pătratul perioadei și cubul semiaxei mari este constant

atunci mișcarea are loc sub acțiunea forței de atracție universală, trecând prin focarul elipsei.

Trajectoria fiind elipsă este plană. În coordonate polare ecuația traiectoriei este

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad e < 1.$$

Legea a doua în coordonate polare

$$r^2 \dot{\theta} = C.$$

Ecuatiile de mișcare în coordonate polare

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta$$

Din ecuația a doua și legea a doua a lui Kepler, rezultă  $F_\theta = 0$ , deci mișcarea se efectuează sub acțiunea unei forțe centrale trecând prin focar. Aplicând formula lui Binet, se obține

$$F = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{mC^2}{r^2} \left[ -\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1 + e \cos \theta}{p} \right] = -\frac{mC^2}{pr^2} = -\frac{mC^2}{p} \frac{1}{r^2}$$

Trebuie demonstrat că  $\frac{C^2}{p}$  este constantă independentă de punctul material. Prin calculul anterior se obținuse

$$\frac{\tau^2}{a^3} = \frac{\pi^2 p}{C^2} = \text{const.}$$

de unde cerința formulată.

**3.4.7.** Să se determine potențialul forțelor de atracție universală în următoarele cazuri:

- un singur punct material de masă  $m$  atras de punctul material de masă  $M$ ;
- un singur punct material de masă  $m$  atras de un sistem discret de puncte materiale ;
- un singur punct material de masă  $m$  atras de corp sferic omogen cu densitatea de masă  $\mu$ .

a) 
$$\mathbf{F} = -f \frac{Mm \mathbf{x}}{r^2 r}, \quad r = \|\mathbf{x}\|$$

$$\begin{aligned} P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} &= -f \frac{Mm \mathbf{x}}{r^2 r} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -f \frac{Mm}{r^3} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \right) = -f \frac{Mm}{r^3} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} r^2 \right) = -f \frac{Mm}{r^3} r \frac{dr}{dt} \\ &= -f \frac{Mm}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dr} \left( f \frac{Mm}{r} \right) \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left( f \frac{Mm}{r} \right) \end{aligned}$$

Deci potențialul forței de atracție universală (pentru un punct material atractiv) este

$$U(r) = f \frac{Mm}{r}.$$

b) Potențialul forței de atracție universală a unui punct material atras de un sistem de puncte materiale  $\{m_j, \mathbf{x}_j\}_{j=1, n}$  este

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f \frac{m_j m}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|}.$$

c) Potențialul newtonean al unui corp rigid continuu, cu masa specifică  $\mu(y)$  este

$$U(\mathbf{x}) = f m \iiint_D \frac{\mu(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\omega_y.$$

Potențialul newtonean al unui corp sferic omogen este egal cu potențialul unui punct material, în care ar fi concentrat masa totală, plasată în centrul sferei.

$$U(\mathbf{x}) = f m \mu_o \iiint_D \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} d\omega_y = f \frac{M m}{\|\mathbf{x}\|}$$

$$D = \{(x^1, x^2, x^3), (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq R^2\}, M = \frac{4}{3} \pi \mu_o R^3.$$

Fie punctul material de masă  $m$  situat pe axa  $Ox^3$ , la distanța  $z > R$  de centrul sferei. Utilizând coordonate sferice

$$\begin{cases} x^1 = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 = \rho \cos \theta \end{cases}$$

domeniul sferic este acum caracterizat prin

$$D = \{(x^1, x^2, x^3), \rho \in [0, R], \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= f m \mu_o \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R \left( \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z \cos \theta}} \rho^2 \sin \theta d\theta \right) d\rho \right] d\varphi = \\ &= f m \mu_o \cdot 2\pi \int_0^R \frac{\rho}{z} \left( \sqrt{\rho^2 + z^2 + 2\rho z} - \sqrt{\rho^2 + z^2 - 2\rho z} \right) d\rho = \\ &= f m \mu_o \cdot \frac{2\pi}{z} \int_0^R \rho [|\rho + z| - |\rho - z|] d\rho = f m \mu_o \cdot \frac{2\pi}{z} \int_0^R 2\rho^2 d\rho = f m \mu_o \cdot \frac{4\pi R^3}{z} = f \frac{M m}{z} \end{aligned}$$

**3.4.8.** Să se studieze condițiile de satelizare.

a) La suprafața Pământului, forța de atracție universală este egală cu greutatea punctului material

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

$$f \frac{M m}{R^2} = m g \Rightarrow f M = g R^2.$$

b) Viteza de lansare a satelitelui de la distanța  $r_o > R$  trebuie să fie astfel încât

$$r_o v_o^2 < 2gR^2.$$

Intr-adevăr, traiectoria "punctului material" atras trebuie să fie o elipsă, pentru ca acesta să fie satelit. Deci

$$r_o v_o^2 < 2fM = 2gR^2.$$

c) Condițiile de satelizare sunt

$$r_o^2 \sin^2 \alpha > R^2$$

$$(*) \quad \frac{2gR^2}{r_o} \frac{R(r_o - R)}{r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2} < v_o^2 < \frac{2gR^2}{r_o}.$$

Traectoria satelitului (elipsa) nu trebuie să intersecteze suprafața Pământului, prin urmare

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, p = \frac{r_o^2 v_o^2 \sin^2 \alpha}{fM}, e^2 = 1 + \frac{p}{r_o} \left( \frac{r_o v_o^2}{fM} - 2 \right)$$

$$r > R \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow r_{\min} > R \Rightarrow \frac{p}{1+e} > R$$

$$(**) \quad \frac{p}{1+e} > R \Rightarrow \frac{p}{R} > 1+e \Rightarrow \left( \frac{p}{R} - 1 \right)^2 > e^2 \Rightarrow$$

$$\frac{p^2}{R^2} - 2\frac{p}{R} + 1 > 1 + \frac{p}{r_o} \left( \frac{r_o v_o^2}{fM} - 2 \right) \Rightarrow \frac{p}{R^2} - \frac{v_o^2}{fM} > 2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_o} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{v_o^2}{fM} \left( \frac{r_o^2 \sin^2 \alpha}{R^2} - 1 \right) > 2 \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{r_o} \right); r_o > R \Rightarrow r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2 > 0$$

↓

$$v_o^2 > fM \frac{r_o - R}{Rr_o} \frac{R^2}{r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2} \Rightarrow v_o^2 > \frac{2gR^2}{r_o} \frac{R(r_o - R)}{r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2}.$$

Pentru ca  $\left( \frac{p}{R} - 1 \right)^2 > e^2 \Rightarrow \frac{p}{R} - 1 > e$  trebuie ca  $p > R$ . Din (\*) se obține

$$gR^3 < \frac{2gR^3 r_o (r_o - R) \sin^2 \alpha}{r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2} < v_o^2 r_o^2 \sin^2 \alpha$$

prima inegalitate rezultând din

$$2r_o \sin^2 \alpha (r_o - R) > r_o^2 \sin^2 \alpha - R^2 \Leftrightarrow (r_o \sin \alpha - R)^2 + 2r_o R \sin \alpha (1 - \sin \alpha) > 0.$$

d) Dacă intrarea pe trajectorie se face sub unghi  $\alpha = \pi/2$ , atunci

$$\frac{2gR^2}{r_o} \frac{R}{r_o + R} < v_o^2 < \frac{2gR^2}{r_o}.$$

Rezultatul este evident din c).

e) Dacă lansarea se realizează aproximativ de la suprafața Pământului, atunci

$$gR < v_o^2 < 2gR.$$

Rezultatul se obține din d) pentru  $r_o \approx R$ .

Mărimea  $\sqrt{gR} \approx 7.29 \text{ km/s}$  reprezintă prima viteză cosmică, iar mărimea  $\sqrt{2gR} \approx 11.2 \text{ km/s}$  reprezintă a doua viteză cosmică. Orice corp lansat de la suprafața Pământului, perpendicular pe raza vectoare, cu o viteză cuprinsă între cele două viteze cosmice, devine satelit al Pământului. Pentru a evita efectele frecării cu atmosfera, se ia  $r_o$  încât să includă și grosimea atmosferei (intrarea pe orbită la limita superioară a atmosferei); în acest caz vitezele cosmice se modifică ușor.

f) Studiul condițiilor de satelizare. Fie variabilele adimensionale

$$X = \frac{r_o}{R} > 1, Y = \frac{v_o}{\sqrt{gR}} > 0.$$

Condițiile de satelizare se scriu

$$XY^2 < 2, \quad Y^2(X^2 \sin^2 \alpha - 1) > 2\left(1 - \frac{1}{X}\right).$$

Aceste relații sugerează considerarea în plan  $(X, Y)$  a curbelor

$$\begin{cases} \Gamma_1: & Y = \sqrt{\frac{2}{X}} \\ \Gamma_2: & Y = \sqrt{\frac{2(X-1)}{X(X^2 \sin^2 \alpha - 1)}} \end{cases}$$

Domeniul de satelizare este  $D = D_1 \cap D_2(\alpha)$ , domeniul  $D_1$  fiind delimitat inferior de axa  $OX$ , la stânga de dreapta  $X = 1$  și superior de curba  $\Gamma_1$ , iar  $D_2(\alpha)$  inferior de curba  $\Gamma_2$ , la stânga de dreapta  $X = 1/\sin \alpha$ .

Utilizând programul

> with(plots):

Introducerea datelor, calcularea unor parametri

> xo:=5.5: vo:=0.4: cond:=(2\*(xo-1)/xo/vo^2+1)/xo^2: cd:=sqrt(cond/(1-cond)):

> alinf:=arctan(cd): alsup:=Pi-alinf;

*alinf* := .6550771348

*alsup* :=  $\pi$  - .6550771348

> alo:=Pi/2: ali:=Pi/4:

Trasarea unor orbite posibile

> l:=1/(xo\*vo\*sin(a))^2+(1/xo-1/(xo\*vo\*sin(a))^2)\*cos(u)-sin(u)\*cot(a)/xo:

> cx:=cos(u)/l: cy:=sin(u)/l:

> u:=`u`: a:=`a`:

> Cx:=unapply(cx,u,a): Cy:=unapply(cy,u,a):

> cc:=plot([cos(u),sin(u),u=0..2\*Pi],numpoints=360,style=line,linestyle=1,thickness=2):

> co:=plot([Cx(u,alo),Cy(u,alo),u=0..2\*Pi],numpoints=360,style=line,linestyle=1):

> cinf:=plot([Cx(u,alinf),Cy(u,alinf),u=0..2\*Pi],numpoints=360,style=line,linestyle=3):

> csup:=plot([Cx(u,alsup),Cy(u,alsup),u=0..2\*Pi],numpoints=360,style=line,linestyle=3):

> ci:=plot([Cx(u,ali),Cy(u,ali),u=0..2\*Pi],numpoints=360,style=line,linestyle=2):

> display({cc,co,cinf,csup,ci});

Domeniile condițiilor de satelizare

> f:=proc(x,a) 2\*(x-1)/x/(x^2\*sin(a)^2-1) end:

> f1:=proc(x) sqrt(2/x) end:

> f2:=proc(x,a) sqrt(f(x,a)) end:

> f3:=proc(x) sqrt(2/x/(x+1)) end:

> a1:=Pi/6: a2:=Pi/4: a3:=Pi/3: x1:=1/sin(a1)^2: x2:=1/sin(a2)^2: x3:=1/sin(a3)^2:

> c1:=plot(f1(x),x=0.2..6,style=line,linestyle=1):

> c21:=plot(f2(x,a1),x=x1..6,style=line,linestyle=3):

> c22:=plot(f2(x,a2),x=x2..6,style=line,linestyle=3):

> c23:=plot(f2(x,a3),x=x3..6,style=line,linestyle=3):

> c3:=plot(f3(x),x=0.2..6,style=line,linestyle=1):

> ca:=plot([1,u,u=0..3],style=line,linestyle=5):

> pp:=plot(0,x=0..1):

> display({c1,c21,c22,c23,c3,ca,pp});

în figura 3.4.8a s-au reprezentat curba  $\Gamma_1$  și curbe  $\Gamma_2$  pentru  $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ , iar în figura 3.4.8b orbite posibile pentru o aceeași poziție inițială, dar cu viteze inițiale diferite: orbitele limită tangente la cercul reprezentând Pământul, orbita circulară corespunzând unghiului  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  și orbita pentru  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

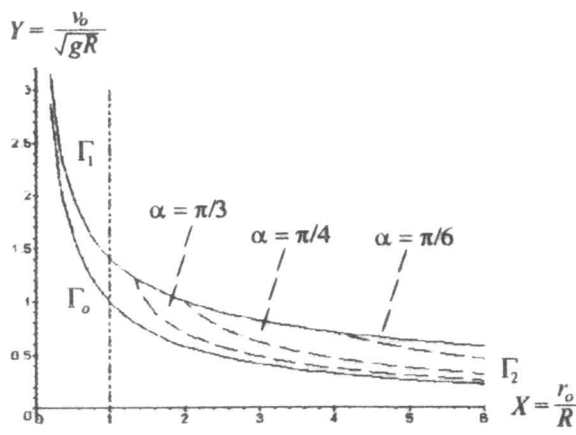


Figura 3.4.8 a

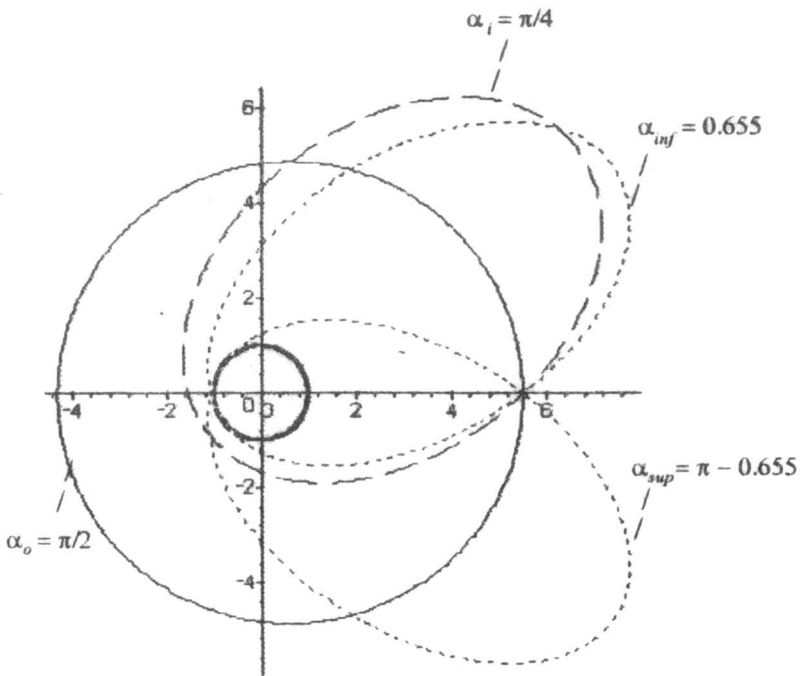


Figura 3.4.8 b

Figura 3.4.8

3.4.9. Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = \frac{mk}{r^3}$$

Ecuția lui Binet se scrie în acest caz

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \left( 1 + \frac{k}{C^2} \right) \frac{1}{r} = 0,$$

soluția ecuației depinzând de datele inițiale și prin intermediul coeficientului  $1 + \frac{k}{C^2}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ . Asemenea curbe au fost prezentate la problema 2.3.4.

În cazul în care  $1 + \frac{k}{C^2} = 0$ , soluția ecuației lui Binet este

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0}(\theta - \theta_0) \operatorname{ctg} \alpha.$$

În cazul în care  $1 + \frac{k}{C^2} > 0$ , soluția ecuației lui Binet este

$$\frac{1}{r} = A \cos(\omega\theta) + B \sin(\omega\theta), \quad \omega = \sqrt{1 + \frac{k}{C^2}}$$

$$A = -\frac{1}{\omega r_0} [\omega \cos(\omega\theta_0) + \sin(\omega\theta_0) \operatorname{ctg} \alpha], \quad B = -\frac{1}{\omega r_0} [\omega \sin(\omega\theta_0) - \cos(\omega\theta_0) \operatorname{ctg} \alpha]$$

În cazul în care  $1 + \frac{k}{C^2} < 0$ , soluția ecuației lui Binet este

$$\frac{1}{r} = A \exp(\lambda\theta) + B \exp(-\lambda\theta), \quad \lambda = \sqrt{\left|1 + \frac{k}{C^2}\right|}$$

$$A = -\frac{1}{2\lambda r_0} (\operatorname{ctg} \alpha - \lambda) \exp(-\lambda\theta_0), \quad B = \frac{1}{2\lambda r_0} (\operatorname{ctg} \alpha + \lambda) \exp(\lambda\theta_0).$$

Problema 3.4.5 se încadra în acest din urmă caz (cu notațiile corespunzătoare, pentru condiții inițiale care dau  $a = A, B = 0$ ).

**3.4.10.** Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = \frac{mk}{r^4}.$$

Integrala primă a energiei în acest caz

$$v^2 - v_0^2 = \frac{2k}{3} \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right)$$

se poate scrie sub forma

$$r'^2 + r^2 = \frac{2k}{3C^2} r^4 \left( \frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3} \right) + \frac{v_0^2}{C^2} r^4$$

cu  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ , sau utilizând mărimea dimensională  $w = \frac{r}{r_0}$

$$w'^2 = \frac{2k}{3C^2 r_0} (w^4 - w^2) + \frac{v_0^2 r_0^2}{C^2} w^4 - w^2$$

Integrarea ecuației, cu condițiile inițiale  $w_0 = 1$ ,  $w'_0 = -\operatorname{ctg} \alpha$ , conduce la integrale eliptice conform formulelor din Anexa 1.

**3.4.11.** Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = \frac{mk}{r^5}.$$

Integrala primă a energiei în acest caz se poate scrie sub forma

$$r'^2 + r^2 = \frac{k}{2C^2} \left( \frac{r^4}{r_0^4} - 1 \right) - \frac{v_0^2}{C^2} r^4$$

cu  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ , sau utilizând mărimea dimensională  $w = \frac{r}{r_0}$

$$w'^2 = \frac{k}{2C^2 r_0^2} (w^4 - 1) + \frac{v_0^2 r_0^2}{C^2} w^4 - w^2.$$

Integrarea ecuației, cu condițiile inițiale  $w_0 = 1$ ,  $w'_0 = -\operatorname{ctg} \alpha$ , conduce la integrale eliptice conform formulelor din Anexa 1.

**3.4.12.** Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = \frac{mk}{r^7}.$$

Integrala primă a energiei în acest caz se scire sub forma

$$r'^2 + r^2 = \frac{k}{3C^2} r^4 \left( \frac{1}{r_0^6} - \frac{1}{r^6} \right) + \frac{v_0^2}{C^2} r^4$$

cu  $r' = \frac{dr}{d\theta}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ , sau utilizând mărimea adimensională  $w = \frac{r^2}{r_0^2}$ ,

$$\frac{1}{4} w'^2 = \frac{k}{3C^2 r_0^4} (w^3 - 1) + \frac{v_0^2 r_0^2}{C^2} w^3 - w^2$$

Integrarea ecuației, cu condițiile inițiale  $w_0 = 1$ ,  $w'_0 = -\operatorname{ctg} \alpha$ , conduce la integrale eliptice conform formulelor din Anexa 1.

**3.4.13.** Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = mkr^3.$$

Integrala primă a energiei

$$v^2 - v_0^2 = \frac{k}{2} (r^4 - r_0^4)$$

în acest caz se scire sub forma

$$C^2 (u'^2 + u^2) = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{u^4} - \frac{1}{u_0^4} \right) + v_0^2$$

cu  $u = \frac{1}{r}$ ,  $u' = \frac{du}{d\theta}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ , sau încă, utilizând mărimea adimensională  $w = \frac{u^2}{u_0^2}$

$$\frac{1}{4} w^2 w'^2 = \frac{k}{2C^2 u_0^6} (1 - w^2) + \frac{v_0^2}{C^2} w^2 - w^4.$$

Integrarea ecuației, cu condițiile inițiale  $w_0 = 1$ ,  $w'_0 = -2 \operatorname{ctg} \alpha$ , conduce la integrale eliptice conform formulelor din Anexa 1.

**3.4.14.** Să se studieze mișcarea unui punct material în câmp central dat de

$$F = mkr^5.$$

Integrala primă a energiei

$$v^2 - v_0^2 = \frac{k}{3} (r^6 - r_0^6)$$

în acest caz se scire sub forma

$$C^2 (u'^2 + u^2) = \frac{k}{3} \left( \frac{1}{u^6} - \frac{1}{u_0^6} \right) + v_0^2$$

cu  $u = \frac{1}{r}$ ,  $u' = \frac{du}{d\theta}$ ,  $C = r_0 v_0 \sin \alpha$ , sau încă, utilizând mărimea adimensională  $w = \frac{u^2}{u_0^2}$

$$\frac{1}{4} w^2 w'^2 = \frac{k}{3C^2 u_0^8} (1 - w^3) + \frac{v_0^2}{C^2 u_0^2} w^3 - w^4$$

Integrarea ecuației, cu condițiile inițiale  $w_0 = 1$ ,  $w'_0 = -2 \operatorname{ctg} \alpha$ , conduce la integrale eliptice conform formulelor din Anexa 1.

### §3.5. Mișcarea unui punct material pe o suprafață, fără și cu frecare

În mișcarea sau echilibrul unui punct material pe o suprafață materială rigidă, pe lângă forța efectivă  $\mathbf{F}$  apare interacțiunea dintre punctul material și suprafața materială

$$\varphi(x^1, x^2, x^3, t) = 0,$$

care se traduce conform principiului iv) printr-o forță de legătură  $\mathbf{R}$  (reacțiune); această forță se descompune în două componente: una normală la suprafață și alta tangențială  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \Phi$ .

Informații despre aceste componente se obțin din experiență. De exemplu, *legile frecării uscate* pe o suprafață rigidă, date de Coulomb:

*In cazul echilibrului*

- raportul dintre modulele componentelor tangențială și normală nu poate depăși coeficientul de frecare de aderență

$$\frac{\|\Phi\|}{\|\mathbf{N}\|} \leq f_o, \quad [f_o] = L^0 M^0 T^0 \text{ (adimensional);}$$

- direcția și sensul forței de frecare sunt opuse tendinței de mișcare;

- coeficientul de frecare de aderență depinde numai de natura corpurilor în contact, nu depinde de masa și dimensiunile corpurilor.

*In cazul mișcării*

- raportul dintre componenta tangențială și componenta normală este constant în timpul mișcării și egal cu coeficientul de frecare de alunecare

$$\|\Phi\| = f\|\mathbf{N}\|;$$

- componenta tangențială este opusă vitezei relative a punctului material P

$$\Phi = -\|\Phi\| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|}$$

- coeficientul de frecare de alunecare depinde numai de natura corpurilor în contact, nu depinde de masa și dimensiunile corpurilor în contact sau de viteza relativă a punctului material.

Ecuatiile de echilibru cu frecare ale punctului material pe o suprafață fixă sunt

$$\begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi = \mathbf{0} \\ \varphi(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ \|\Phi\| \leq f_o \|\mathbf{N}\| \end{cases}$$

Necunoscutele problemei sunt pozițiile de echilibru ale punctului material și componentele forței de legătură. Întrucât ultima relație este o inegalitate, există o regiune de echilibru pe suprafața fixă.

$$\mathbf{n} = \text{vers grad } \varphi, \quad \mathbf{N} = N\mathbf{n}, \quad \Phi = -(\mathbf{F} + \mathbf{N})$$

$$\Phi^2 = (\mathbf{F} + \mathbf{N})^2 \leq f_o^2 N^2, \quad F_n + N = 0; \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = F_n N$$

$$F^2 + 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + N^2 \leq f_o^2 N^2 \quad \Rightarrow \quad F^2 \leq (1 + f_o^2) N^2.$$

Deci regiunea de echilibru pe suprafață este fefinită de condiția

$$F^2 \leq (1 + f_o^2)(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})^2$$

în care intră numai elemente date.

$$f_o = \text{tg } \varphi_o, \quad 0 < \varphi_o < \frac{\pi}{2}, \quad \varphi_o \text{ unghi de frecare; } \frac{F_n}{F^2} = \cos^2 \chi \geq \frac{1}{\text{tg}^2 \varphi_o + 1} = \cos^2 \varphi_o;$$

prin urmare unghiul pe care îl face forța dată  $\mathbf{F}$  cu normala  $\mathbf{n}$  la suprafață trebuie să fie mai mic, cel mult egal cu unghiul de frecare; suportul forței trebuie să se găsească în interiorul



conului circular de frecare, cu vârful în P, cu axa normală la suprafață și semideschiderea  $\varphi_0$ .

Ecuțiile care descriu mișcarea cu frecare a punctului material P {m, x}

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi \\ \varphi(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \\ \|\Phi\| = f\|\mathbf{N}\| \\ \Phi = -\|\Phi\| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \\ \mathbf{v}_{rel} = \dot{\mathbf{x}} - \left[ \mathbf{v}_{O_1}(t) + \omega(t) \times \overrightarrow{O_1P} \right] \quad O_1 \text{ punct al suprafeței} \end{array} \right.$$

Ecuțiile se pot reduce la

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + N\mathbf{n} - f\|\mathbf{N}\| \frac{\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v}_t}{\|\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v}_t\|}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{O_1} + \omega \times \overrightarrow{O_1P} \\ \varphi(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \\ \mathbf{n} = \text{vers grad } \varphi \end{array} \right.$$

Câteva valori ale coeficientului de frecare (v.V.Vâlcovici ș.a.)

Natura materialelor în contact	Coeficient de frecare
lemn/lemn	0.36 - 0.50
țier/țier	0.30 - 0.50
lemn/metal	0.42 - 0.60
piatră/lemn	0.40 - 0.50
piatră/piatră	0.50 - 0.70
oțel/ghiață	0.014
oțel/oțel	0.10 - 0.20

\*\*\*

**3.5.1.** Să se determine zonele de echilibru ale unui punct material greu de masă  $m$  pe o sferă fixă, de rază  $a$ , coeficientul de frecare fiind  $f_0$ .

Fie originea referențialului centrul sferei O,  $Ox^3$  verticala ascendentă. În acest caz elementele caracteristice problemei sunt

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - a^2 = 0$$

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{t}_3, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad F_n = -mg\frac{x^3}{a}$$

$$m^2g^2 \leq (1 + f_0^2)m^2g^2\left(\frac{x^3}{a}\right)^2$$

Deci regiunile de echilibru sunt definite de

$$\frac{a}{\sqrt{1 + f_0^2}} \leq x^3 \leq a \quad \text{dacă punctul este așezat pe fața exterioară a sferei}$$

$$-a \leq x^3 \leq -\frac{a}{\sqrt{1 + f_0^2}} \quad \text{dacă punctul este așezat pe partea interioară a sferei}$$

Observație. Dacă frecarea se neglijează, pozițiile de echilibru sunt acelea în care forța  $\mathbf{F}$  este normală la suprafață, adică  $x^3 = \pm a$ .

**3.5.2. Pendul sferic.** Pendulul sferic este constituit de un punct material greu mobil fără frecare pe o sferă fixă de rază  $l$ . Să se studieze mișcarea.

Se alege ca origine a referențialului centrul sferei  $O$  și  $Ox^3$  verticala descendentă. În coordonate cilindrice, ecuația sferei va fi

$$r^2 + z^2 = l^2$$

Punctul material este supus acțiunii forței de greutate și reacțiunii normale la sferă; prin urmare teorema energiei dă

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = m \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}}_{=0(l)} \Rightarrow v^2 = 2gz + h,$$

iar teorema momentului cinetic

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{x} \times m\mathbf{g} + \underbrace{\mathbf{x} \times \mathbf{N}}_{=0(l)} \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C$$

Pentru a obține variația cotei  $z$  în timp se efectuează următoarele calcule

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = 2gz + h$$

$$r = \sqrt{l^2 - z^2}; \quad \frac{dr}{dz} = -\frac{z}{\sqrt{l^2 - z^2}}; \quad \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{l^2 - z^2};$$

$$l^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2; \quad \varphi(z) = (2gz + h)(l^2 - z^2) - C^2$$

$$t = \varepsilon l \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}; \quad \varepsilon = \begin{cases} \text{sgn}(\dot{z}_0) & \text{pentru } \dot{z}_0 \neq 0 \\ +1 \text{ sau } -1 & \text{pentru } \dot{z}_0 = 0, \text{ astfel încât } P_3(z) \geq 0 \end{cases}$$

Integrala ariilor arată că mișcarea se face în același sens dacă  $C \neq 0$ ; în cazul  $C = 0$ , unghiul  $\theta$  rămâne constant și pendulul devine un pendul simplu. Unghiul  $\theta$  se determină prin

$$\theta = \theta_0 + Cl \varepsilon \int_{z_0}^z \frac{dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{P_3(z)}}$$

Integralele care au apărut au sens pentru valori pozitive ale polinomului  $P_3(z)$

$z$	$-\infty$	$\gamma$	$-l$	$\beta$	$z_0$	$\alpha$	$l$	$+\infty$
$P_3(z)$	+	+	0	-	-	0	-	-

Intrucât  $\gamma(\alpha + \beta) + \alpha\beta = -l^2$  sau  $\gamma(\alpha + \beta) = -(l^2 + \alpha\beta)$ , iar cum  $\gamma > 0$ ,  $l^2 + \alpha\beta > 0$ , rezultă  $\alpha + \beta > 0$  și deci  $\alpha > 0$ . Pe sferă punctul material descrie o curbă cuprinsă între paralele  $z = \alpha$  și respectiv  $z = \beta$ , fiind tangentă la acestea. Intervalul de timp necesar să parcurgă arcul de traiectorie între două puncte de tangență succesive dar pe paralele diferite este același, indiferent de paralela de plecare  $l \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}$ .

Fie două poziții succesive pe aceeași paralelă, caracterizate de unghiurile  $\theta'$  și respectiv  $\theta''$  și  $\theta_1$ ,  $\theta' < \theta_1 < \theta''$  unghiul situat pe paralela  $z = \alpha$ . Se obține simetria arcelor de traiectorie

$$\theta_1 - \theta' = Cl \int_z^{\alpha} \frac{dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{P_3(z)}}; \quad \theta'' - \theta_1 = -Cl \int_{\alpha}^z \frac{dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{P_3(z)}} \Rightarrow \theta_1 - \theta' = \theta'' - \theta_1$$

timpii necesari pentru parcurgerea celor două arce fiind egali  $l \int_z^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{P_3(z)}}$ .

Alte informații despre mișcarea punctului material se pot obține din studiul proiecției traiectoriei în plan  $xy$ . Sunt posibile două cazuri:

1°. Paralele extreme sunt în emisfera inferioară. Cercul cel mai de jos  $z = \alpha$  se proiectează în interiorul cercului  $z = \beta$ . Nu există puncte de inflexiune. Unghiul între razele trecând prin punctele de tangență este obtuz. Traiectoria este prezentată în figura 3.5.2a.

2°. Paralele extreme sunt de o parte și de cealaltă a planului ecuatorial. Cercul cel mai de jos  $z = \alpha$  se proiectează în interiorul cercului  $z = \beta$  ( $\alpha + \beta > 0$ ). Traiectoria trebuie să fie tangentă și la cercul ecuatorial. Pot exista puncte de inflexiune. Unghiul între razele trecând prin punctele de tangență este obtuz. Traiectoria este prezentată în figura 3.5.2b.

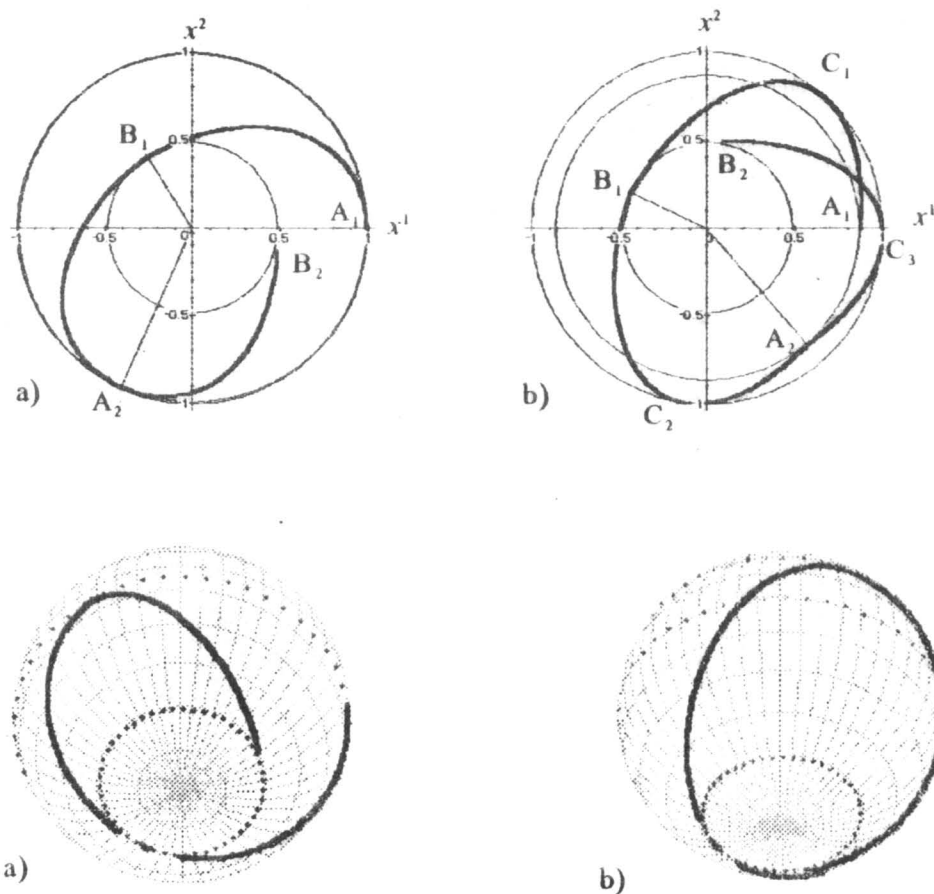


Figura 3.5.2

Demonstrația faptului că unghiul BOA este obtuz a fost dată de Puiseux (1842).

$$\Psi = \text{mes}(\angle BOA)$$

$$\Psi = Cl \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{P_3(z)}}$$

$$P_3(z) = 2g(\alpha - z)(z - \beta)(z - \gamma) = \frac{2g}{\alpha + \beta}(\alpha - z)(z - \beta)[(\alpha + \beta)z + l^2 + \alpha\beta]$$

$$-C^2 = \frac{2g}{\alpha + \beta}(\alpha - l)(l - \beta)[(\alpha + \beta)l + l^2 + \alpha\beta] = \frac{2g}{\alpha + \beta}(\alpha - l)(l - \beta)(l + \alpha)(l + \beta)$$

$$A = \sqrt{(l - \alpha)(l - \beta)}, B = \sqrt{(l + \alpha)(l + \beta)}, C = AB \sqrt{\frac{2g}{\alpha + \beta}}$$

$$A^2 = -(\alpha + \beta)l + l^2 + \alpha\beta \leq (\alpha + \beta)z + l^2 + \alpha\beta \leq (\alpha + \beta)l + l^2 + \alpha\beta = B^2$$

$$Bl \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}} < \Psi < Al \int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}}$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} \frac{dz}{(l^2 - z^2)\sqrt{(\alpha - z)(z - \beta)}} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{B}{A} \right) < \Psi < \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{A}{B} \right)$$

Se poate demonstra că  $\Psi$  nu poate depăși valoarea  $\pi$ .

Programul utilizat pentru obținerea figurii 3.5.2 pentru cazul 1° este

```
> with(plots): with(linalg):
  Introducerea datelor
> g:=9.8: l:=1:
> z1:=7*l/8: z2:=l/8:
> h:=2*g*(l^2-z1^2-z2^2-z1*z2)/(z1+z2):
> c2:=2*g*l*(l^2-z1^2)*(l^2-z2^2)/(z1+z2): c:=sqrt(c2):
> z3:=- (l^2+z1*z2)/(z1+z2):
> v22:=2*g*(l^2-z1^2)/(z1+z2): v2:=sqrt(v22):
> r1:=sqrt(l^2-z1^2): r2:=sqrt(l^2-z2^2):
> nn:=80: pas:=(z1-z2)/nn: nm:=nn-1:
> rz:=vector(nn): tz:=vector(nn): zz:=vector(nn): cx:=vector(nn): cy:=vector(nn): dx:=vector(nn):
> dy:=vector(nn): ex:=vector(nn): ey:=vector(nn):
> p3:=proc(z) -2*g*(z-z1)*(z-z2)*(z-z3) end:
> f1:=proc(z) -z/sqrt(l^2-z^2) end:
> f2:=proc(z) c*l/(l^2-z^2)/sqrt(p3(z)) end:
> u1:=evalf(int(f2,z=z2..z1)):
  Integrarea numerica a ecuatiilor de miscare
> eq1:=diff(r(z),z)=f1(z): eq2:=diff(u(z),z)=f2(z):
> s1:=dsolve({eq1,r(z2)=r2},r(z),type=numeric,method=dverk78,output=listprocedure):
  s1 := [z = proc(dverk78_t) ... end, r(z) = proc(dverk78_t) ... end]
> s2:=dsolve({eq2,u(z2+pas)=0},u(z),type=numeric,method=dverk78,output=listprocedure):
  s2 := [z = proc(dverk78_t) ... end, u(z) = proc(dverk78_t) ... end]
> sr:=subs(s1,r(z)): su:=subs(s2,u(z)):
  Pregatirea datelor pentru reprezentarile grafice
> for k from 1 to nm do zz[k]:=z2+k*pas od:
> for k from 1 to nm do rz[k]:=sr(zz[k]): tz[k]:=su(zz[k]) od:
> for k from 1 to nm do cx[k]:=rz[k]*cos(tz[k]): cy[k]:=rz[k]*sin(tz[k]) od:
> for k from 1 to nm do dx[k]:=rz[k]*cos(2*u1-tz[k]): dy[k]:=rz[k]*sin(2*u1-tz[k]) od:
> for k from 1 to nm do ex[k]:=rz[k]*cos(2*u1+tz[k]): ey[k]:=rz[k]*sin(2*u1+tz[k]) od:
  Reprezentarea proiectiei traiectoriei in plan ecuatorial
> cb1:=[[cx[j],cy[j]] $j=1..nm]: cb2:=[[cx[nm],cy[nm]],[r1*cos(u1),r1*sin(u1)],[dx[nm],dy[nm]]]: cb3:
> :=[[dx[j],dy[j]] $j=1..nm]: cb4:=[[dx[1],dy[1]],[r2*cos(2*u1),r2*sin(2*u1)],[ex[1],ey[1]]]: cb5:=[[ex[j]
> ],ey[j]] $j=1..nm]:
> tr1:=plot(cb1,style=line,thickness=3): tr2:=plot(cb2,style=line,thickness=3): tr3:=plot(cb3,style
> =line,thickness=3): tr:=plot(cb4,style=line,thickness=3): tr5:=plot(cb5,style=line,thickness=3):
> cerc1:=plot([r1*cos(v),r1*sin(v),v=0..2*Pi]): cerc2:=plot([r2*cos(v),r2*sin(v),v=0..2*Pi]): cerc3:
> =plot([l*cos(v),l*sin(v),v=0..2*Pi]): d1:=plot([[0,0],[r1*cos(u1),r1*sin(u1)]],style=line): d2:=plot([[
> 0,0],[r2*cos(2*u1),r2*sin(2*u1)]],style=line):
> display({tr1,tr2,tr3,tr4,tr5,cerc1,cerc2,cerc3,d1,d2});
```

**Reprezentarea traiectoriei pe sfera (rotita in desen fata de reperul utilizat)**

```
> cbs1:=[[-cx[j],[-cy[j],[-zz[j]] $j=1..nm]: cbs2:=[[-cx[nm],[-cy[nm],[-zz[nm]],[-r1*cos(u1),-r1*sin(u1),-z1],[-dx[nm],[-dy[nm],[-zz[nm]]]: cbs3:=[[-dx[j],[-dy[j],[-zz[j]] $j=1..nm]: cbs4:=[[-dx[1],[-dy[1],[-zz[1]],[-r2*cos(2*u1),-r2*sin(2*u1),-z2],[-ex[1],[-ey[1],[-zz[1]]]: cbs5:=[[-ex[j],[-ey[j],[-zz[j]] $j=1..nm]:
> trs1:=spacecurve(cbs1,thickness=3,color=black): trs2:=spacecurve(cbs2,thickness=3,color=black): trs3:=spacecurve(cbs3,thickness=3,color=black): trs4:=spacecurve(cbs4,thickness=3,color=black): trs5:=spacecurve(cbs5,thickness=3,color=black):
> scerc1:=spacecurve([-r1*cos(v),-r1*sin(v),-z1],v=0..2*Pi,style=point,thickness=2,color=black):
> scerc2:=spacecurve([-r2*cos(v),-r2*sin(v),-z2],v=0..2*Pi,style=point,thickness=2,color=black):
> :
> sfera:=plot3d([l,u,v],u=0..Pi,v=0..2*Pi,coords=spherical,style=hidden,color=grey):
> display({trs1,trs2,trs3,trs4,trs5,scerc1,scerc2,sfera},orientation=[98,153],scaling=constrained);
```

*Calculul reacțiunii normale:* Din proiecția ecuației de mișcare pe direcția razei se obține

$$N = \frac{mv^2}{R} - F_n = \frac{m}{l}(2gz + h) + \frac{mgz}{l} = \frac{m}{l}(3gz + h)$$

Reacțiunea normală este lineară în  $z$ . Dacă legătura este unilaterală, la anularea reacțiunii normale, legătura încetează și punctul are în continuare o mișcare de punct material greu în "vid". Dacă legătura este bilaterală, proiecția traiectoriei în plan orizontal prezintă punct de inflexiune la anularea reacțiunii normale. Această situație nu poate apare pentru  $\beta > 0$  ( $\frac{mv^2}{l} + \frac{mgz}{l} > 0$ ).

*Integrarea prin funcții eliptice*

$$t = -l \int_{\alpha}^z \frac{dz}{\sqrt{2g(\alpha - z)(z - \beta)(z - \gamma)}}$$

**Schimbare de variabilă**

$$\alpha - z = (\alpha - \beta)u^2$$

$$\frac{\sqrt{2g}}{l} t = \frac{2}{\sqrt{\alpha - \gamma}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} \quad \text{cu} \quad 0 < k^2 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma} < 1$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{2g(\alpha - \gamma)}}{2l}; \quad \lambda t = F(\arcsin u, k)$$

$$u = \text{sn}(\lambda t); \quad z = \alpha - (\alpha - \beta)\text{sn}^2(\lambda t)$$

$z$  admite perioada reală

$$\tau = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

$$\sqrt{\alpha - z} = \sqrt{\alpha - \beta} \text{sn}(\lambda t), \quad \sqrt{z - \beta} = \sqrt{\alpha - \beta} \text{cn}(\lambda t), \quad \sqrt{z - \gamma} = \sqrt{\alpha - \gamma} \text{dn}(\lambda t)$$

$$x + iy = \sqrt{l^2 - z^2} \exp\left(i \int \frac{C dt}{l^2 - z^2}\right)$$

Hermite a demonstrat că  $x$  și  $y$  sunt funcții uniforme de timp.

**Teorema lui Greenhill:** Dacă pendulul este lansat orizontal la nivelul centrului sferei, există o combinație lineară a integralelor ce dau  $\theta$  și  $t$  care este o integrală pseudoeliptică (se poate exprima prin funcții elementare).

Fie la momentul inițial  $t = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  și  $v_o$  viteza inițială orizontală

$$C = lv_o, h = v_o^2$$

$$\theta = \int_0^z \frac{l^2 v_o dz}{(l^2 - z^2) \sqrt{z[2g(l^2 - z^2) - v_o^2 z]}}, \quad t = \int_0^z \frac{ldz}{\sqrt{z[2g(l^2 - z^2) - v_o^2 z]}};$$

cele două relații dau

$$\theta - \frac{v_o}{2l} t = \arcsin \frac{v_o \sqrt{z}}{\sqrt{2g(l^2 - z^2)}}.$$

**Mici oscilații (oscilați linearizate):** Ecuațiile de mișcare ale pendulului sunt

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N\frac{x}{l} \\ m\ddot{y} = -N\frac{y}{l} \\ m\ddot{z} = mg - N\frac{z}{l} \end{cases}.$$

Prin dezvoltare în serie Taylor

$$z = \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = l \left( 1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots \right)$$

neglijând termenii de ordinul al doilea, rezultă

$$z \cong l,$$

iar a treia ecuație de mișcare dă

$$N = mg$$

Procedând analog, primele două ecuații devin

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{g}{l}x \\ \ddot{y} = -\frac{g}{l}y \end{cases}$$

și cu condițiile inițiale

$$t = 0: \quad x = x_o, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_o$$

admit soluția

$$\begin{cases} x = x_o \cos \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \\ y = v_o \frac{l}{g} \sin \left( t \sqrt{\frac{g}{l}} \right) \end{cases}.$$

Traectoria în plan tangent este o elipsă, parcursă cu perioada

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

**3.5.3.** Să se studieze echilibrul și mișcarea cu frecare a unui punct material greu pe un plan înclinat  $\Pi$  cu unghiul  $\alpha$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) față de planul orizontal.

Se alege referențialul inerțial cu  $Ox$  intersecția planului  $\Pi$  cu solul (plan orizontal),  $Oy$  dreapta de pantă maximă (ortogonală la  $Ox$ ),  $Oz$  normală la plan. Ecuația planului  $\Pi$  este

$$z = 0$$

Se presupune că punctul are viteză inițială nulă. Condiția de echilibru

$$mg + N + \Phi = 0 \quad (g(0, -g \sin \alpha, -g \cos \alpha); N(0, 0, N), N > 0)$$

duce la

$$1 \leq (1 + f_o^2) \cos^2 \alpha \quad \text{sau} \quad \cos^2 \alpha \geq \cos^2 \varphi_o,$$

deci dacă  $\alpha$  nu depășește unghiul de frecare  $\varphi_o$  punctul se află în echilibru în orice poziție.

Dacă condiția de echilibru nu este satisfăcută sau, mai general, dacă viteza inițială este nenulă, mișcarea punctului material este caracterizată de

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{x}} = mg + N - fN \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} \\ z = 0 \end{cases}$$

Se obține

$$N = mg \cos \alpha; \quad \begin{cases} m\ddot{x} = -fmg \cos \alpha \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ m\ddot{y} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \end{cases}$$

Trecând la variabilele  $v$  și  $\theta = \angle(\mathbf{v}, Ox)$

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos \theta \\ \dot{y} = v \sin \theta \end{cases}$$

rezultă

$$\begin{cases} \dot{v} \cos \theta - v\dot{\theta} \sin \theta = -fg \cos \alpha \cos \theta \\ \dot{v} \sin \theta + v\dot{\theta} \cos \theta = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{v} = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha \sin \theta) \\ v\dot{\theta} = -g \sin \alpha \cos \theta \end{cases}$$

$$\frac{dv}{d\theta} = v \left( \operatorname{tg} \theta + f \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\cos \theta} \right)$$

ecuația hodografului care admite soluția

$$v \cos \theta = v_o \cos \theta_o \exp \left( f \operatorname{ctg} \alpha \int_{\theta_o}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right) = v_o \cos \theta_o \left| \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_o}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)} \right|^{f \operatorname{ctg} \alpha}$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{2}} v = \begin{cases} \infty & \text{pentru } f \operatorname{ctg} \alpha < 1 \\ 0 & \text{pentru } f \operatorname{ctg} \alpha > 1 \end{cases} \quad \left( \theta_o < \frac{\pi}{2} \right)$$

Rezultă reprezentarea parametrică a traiectoriei

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{v^2}{g \sin \alpha}, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\frac{v^2}{g \sin \alpha} \operatorname{tg} \theta$$

$$x = x_o - \frac{1}{g \sin \alpha} \int_{\theta_o}^{\theta} v^2(\theta) d\theta, \quad y = y_o - \frac{1}{g \sin \alpha} \int_{\theta_o}^{\theta} v^2(\theta) \operatorname{tg} \theta d\theta \quad -\frac{\pi}{2} < \theta \leq \theta_o.$$

### §3.6. Mișcarea punctului material pe o curbă, fără și cu frecare

În mișcarea sau echilibrul unui punct material pe o curbă materială rigidă

$$\begin{cases} \varphi(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \\ \psi(x^1, x^2, x^3, t) = 0 \end{cases}$$

pe lângă forța efectivă  $\mathbf{F}$  apare interacțiunea dintre punctul material și curba materială, care se traduce printr-o forță de legătură (reacțiune)  $\mathbf{R}$ , această forță se descompune în două componente: una normală la curbă și alta tangențială  $\mathbf{R} = \mathbf{N} + \Phi$ . Ca și în cazul mișcării sau echilibrului pe o suprafață, pentru componenta tangențială se adoptă de obicei legile frecării uscate (Coulomb).

*In cazul echilibrului pe o curbă fixă*

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{F}(x^1, x^2, x^3) \\ \mathbf{N} = \mathbf{N}(x^1, x^2, x^3) ; \\ \Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3) \end{cases} \begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi = \mathbf{0} \\ \|\Phi\| \leq f_0 \|\mathbf{N}\| \\ \begin{cases} \varphi(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ \psi(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Necunoscutele problemei sunt pozițiile de echilibru ale punctului material și componentele forței de legătură. Există o regiune de echilibru pe curbă

$$\begin{cases} \Phi + F_t = 0 \\ N + F_n = 0 \end{cases} ; \Phi^2 = F_t^2 \leq f_0^2 N^2 = f_0^2 F_n^2, F^2 = F_t^2 + F_n^2 \Rightarrow \underline{\underline{F^2 \leq (1 + f_0^2) F_n^2}}$$

forța efectivă  $\mathbf{F}$ , aplicată în  $M$ , trebuie să aibă suportul exterior conului de rotație cu vârful în  $M$ , cu semideschidere  $\frac{\pi}{2} - \varphi_0$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_0 = f_0$ , având drept axă tangenta în  $M$ .

*In cazul mișcării*

$$\begin{cases} \mathbf{F} = \mathbf{F}(x^1, x^2, x^3, t) \\ \mathbf{N} = \mathbf{N}(x^1, x^2, x^3, t) ; \\ \Phi = \Phi(x^1, x^2, x^3, t) \end{cases} \begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi = \mathbf{0} \\ \|\Phi\| = f \|\mathbf{N}\|, \Phi = -\|\Phi\| \frac{\mathbf{v}_{rel}}{\|\mathbf{v}_{rel}\|} \\ \begin{cases} \varphi(x^1, x^2, x^3) = 0 \\ \psi(x^1, x^2, x^3) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Necunoscutele problemei sunt legea de mișcare pe curbă și componentele reacțiunii normale.

\*\*\*

**3.6.1. Pendulul matematic.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu, de masă  $m$ , pe o circumferință de rază  $l$ , în plan vertical:

a) deducerea legii de mișcare a punctului material, utilizând

- legea lui Newton în proiecție pe axele referențialului inerțial cartezian;
- legea lui Newton în proiecție pe triedrul lui Frenet;
- teorema momentului cinetic;
- teorema energiei cinetice.

b) integrala primă a energiei; mărimea forței de legătură;

c) tipuri de mișcări ale punctului material greu pe circumferința verticală, discuție după condițiile inițiale.

Frecarea și rezistența mediului se neglijează.

a) *Deducerea legii de mișcare a punctului material*

Se consideră referențialul inerțial  $Ox^1 x^2 x^3$ , având originea în centrul circumferinței verticale, planul vertical al circumferinței fiind planul  $Ox^1 x^2$ , cu  $Ox^1$  verticala descendentă (figura 3.6.1a). Asupra punctului material acționează forța de greutate  $mg$  și forța de legătură (reacțiunea) normală la circumferință  $\mathbf{N}$ .



*Legea lui Newton în proiecție pe axele referențialului inerțial cartezian*

Legea lui Newton

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N}$$

conduce prin proiecție pe direcțiile referențialului ales la

$$\begin{cases} m\ddot{x}^1 = N^1 + mg \\ m\ddot{x}^2 = N^2 \\ 0 = N^3 \end{cases}$$

Observație: Reacțiunea normală este în planul vertical al circumferinței. În continuare se va lucra numai în planul  $Ox^1x^2$ .

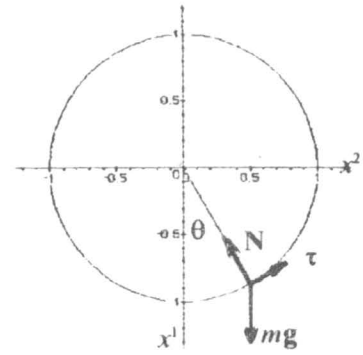


Figura 3.6.1a

Întrucât direcția reacțiunii este cunoscută, ecuațiile de mișcare se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} m\ddot{x}^1 = -N\frac{\dot{x}^1}{l} + mg \\ m\ddot{x}^2 = -N\frac{\dot{x}^2}{l} \end{cases}$$

Trecând la coordonate polare

$$\begin{cases} x^1 = l \cos \theta \\ x^2 = l \sin \theta \end{cases}$$

ecuațiile de mișcare devin

$$\begin{cases} ml(-\ddot{\theta} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \cos \theta) = -N \cos \theta + mg \\ ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = -N \sin \theta \end{cases}$$

Prin eliminarea lui  $N$ , rezultă ecuația pendulului matematic

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0,$$

și mărimea algebrică a forței de legătură

$$N = mg \cos \theta + m l \dot{\theta}^2.$$

Observație: Pentru forța de legătură normală la traiectorie - în absența frecării - se putea scrie

$$N = \lambda \frac{\text{grad}((x^1)^2 + (x^2)^2 - l^2)}{|\text{grad}((x^1)^2 + (x^2)^2 - l^2)|} + \mu \frac{\text{grad} x^3}{|\text{grad} x^3|} = \lambda \left( \frac{x^1}{l} \mathbf{t}_1 + \frac{x^2}{l} \mathbf{t}_2 \right) + \mu \mathbf{t}_3$$

deci  $\lambda = N$ ,  $\mu = 0$ . Multipliatorul  $N$  nu este o constantă ci depinde de poziție (prin intermediul vitezei) (dacă  $N$  ar fi fost constant, ecuațiile diferențiale în coordonate carteziene ar fi fost lineare, ușor integrabile, în contradicție cu ceea ce se întâmplă cu ecuația pendulului matematic).

*Legea lui Newton în proiecție pe triedrul lui Frenet*

Legea lui Newton în proiecție pe triedrul lui Frenet dă

$$\begin{cases} (\tau) \quad m\dot{v} = -mg \sin \theta \\ (\nu) \quad m\frac{v^2}{l} = -mg \cos \theta + N \end{cases}$$

Având în vedere că

$$v = l\dot{\theta}$$

se obțin imediat ecuația de mișcare

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

și mărimea forței de legătură

$$N = mg \cos \theta + ml\dot{\theta}^2.$$

#### *Teorema momentului cinetic*

Momentul cinetic al punctului material este în acest caz

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{x} \times m\mathbf{v} = l\mathbf{e}_r \times ml\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta = ml^2\dot{\theta}\mathbf{e}_z,$$

iar momentul rezultat al forțelor dată și de legătură

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{x} \times (m\mathbf{g} + \mathbf{N}) = \mathbf{x} \times m\mathbf{g} = -mgl \sin \theta \mathbf{e}_z.$$

Teorema momentului cinetic

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O$$

conduce direct la ecuația de mișcare

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Observație: Prin teorema momentului cinetic se obține direct ecuația de mișcare, dar nu mai sunt informații despre forța de legătură.

#### *Teorema energiei cinetice*

Energia cinetică a punctului material este

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,$$

iar puterea mecanică a forțelor dată și de legătură

$$P = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{g} + \mathbf{N}) = \mathbf{v} \cdot m\mathbf{g} = mg\dot{x}^1 = -mgl\dot{\theta} \sin \theta.$$

Teorema energiei cinetice

$$\frac{dT}{dt} = P$$

conduce, din nou, direct, la ecuația de mișcare

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

Observația precedentă se menține.

b) Ecuația de mișcare admite integrala primă

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = \text{const.},$$

care este integrala primă a conservării energiei totale, constanta fiind determinată din condițiile inițiale.

c) *Tipuri de mișcări ale punctului material greu pe circumferința verticală*

Caracteristicile mișcării punctului material greu pe circumferința verticală vor fi determinate de condițiile inițiale impuse

$$t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_0 \quad \text{sau} \quad t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = \dot{\theta}_0.$$

### 1. Mici oscilații

Dacă poziția inițială și viteza inițială sunt astfel încât punctul material să rămână în vecinătatea poziției de echilibru stabile  $\theta = 0$ , atunci ecuația de mișcare se poate lineariza

$$\sin \theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Soluția ecuației de mișcare linearizate, cu condițiile inițiale considerate, este

$$\theta = \theta_o \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t + \dot{\theta}_o \sqrt{\frac{l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

sau

$$\theta = \sqrt{\theta_o^2 + \frac{l}{g} \dot{\theta}_o^2} \cos \left( \sqrt{\frac{g}{l}} t + \alpha \right), \cos \alpha = \frac{\theta_o}{\sqrt{\theta_o^2 + \frac{l}{g} \dot{\theta}_o^2}}, \sin \alpha = \frac{\dot{\theta}_o \sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt{\theta_o^2 + \frac{l}{g} \dot{\theta}_o^2}}.$$

Condiția ca linearizarea să aibă sens ( $\theta < \theta_* = 5^\circ$ ) este ca

$$\theta_o^2 + \frac{l}{g} \dot{\theta}_o^2 \leq \theta_*^2.$$

Observație. Linearizarea nu are sens în vecinătatea poziției de echilibru  $\theta = \pi$  (poziție de echilibru instabilă)

Integrala primă de conservare a energiei totale, cu condițiile inițiale considerate, se explicitază

$$l^2 \dot{\theta}^2 = 2gl \cos \theta + h, \quad h = v_o^2 - 2gx_o^1.$$

Fie  $x_A^1$  o abscisă definită prin

$$x_A^1 = x_o^1 - \frac{v_o^2}{2g},$$

astfel încât integrala primă se scrie sub forma

$$l^2 \dot{\theta}^2 = 2g(l \cos \theta - x_A^1).$$

Această relație arată că în cursul mișcării

$$x_A^1 \leq x^1 \leq l.$$

### 2. Cazul $-l < x_A^1$ (mișcare oscilatorie)

În acest caz există pe circumferință două puncte A și A' cu abscisa  $x_A^1$  și se poate nota

$$x_A^1 = l \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi$$

și ecuația de mișcare devine

$$l \dot{\theta} = \pm \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \alpha)}.$$

Punând

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

se obține ecuația diferențială

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Fie  $\dot{\theta}_o > 0$ . Din ecuația de mai sus, în care se ia semnul "+", rezultă că  $\theta$  va crește până la valoarea  $\alpha$  când  $\dot{\theta}$  se anulează. Luând apoi semnul "-" în fața radicalului, se vede că  $\theta$  va scădea până la valoarea  $-\alpha$ , când iarăși  $\dot{\theta}$  se anulează etc.

Intervalul de timp în care  $\theta$  și  $\dot{\theta}$  revin la aceeași valoare este *perioada* de oscilație

$$\tau_o = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-u}^u \left[ \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^{-1/2} d\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Notând

$$\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2}$$

se exprimă  $\tau_o$  sub forma integralei eliptice

$$(*) \quad \tau_o = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

(forma normală Legendre), unde parametrul

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} < 1$$

depinde de condițiile inițiale.

Pentru calculul numeric al lui  $\tau_o$  se poate folosi dezvoltarea în serie

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2u^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1.3}{2.4}k^4u^4 + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}k^{2n}u^{2n} + \dots$$

valabilă pentru  $k^2u^2 < 1$ , urmată de integrarea termen cu termen a seriei uniform convergente.

Dar

$$\int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

și prin urmare

$$(**) \quad \tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{2^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \dots + \left( \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

In cazul oscilațiilor mici

$$(***) \quad \sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2} \quad \text{deci} \quad \tau_o \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{16} \alpha^2 \right).$$

Dacă și  $\alpha^2$  este neglijabil, atunci se regăsește formula lui Galileu

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

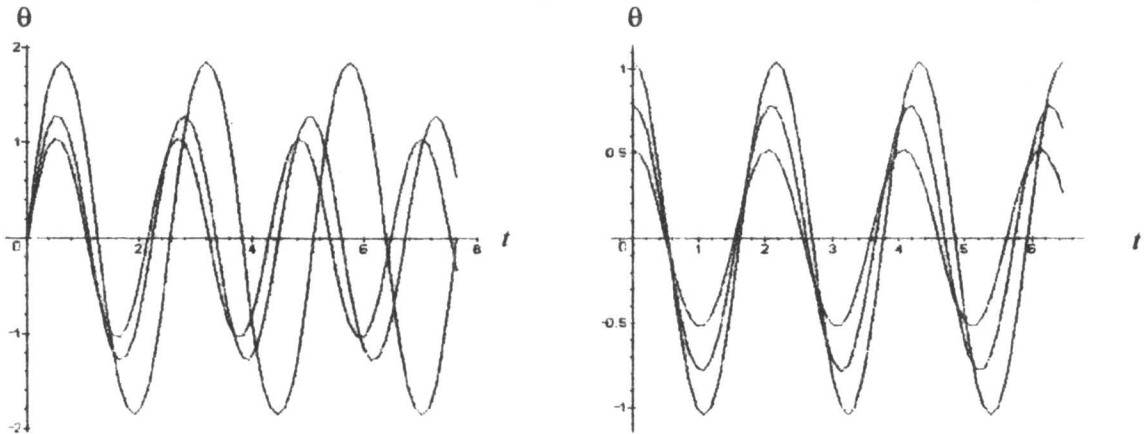


Figura 3.6.1b

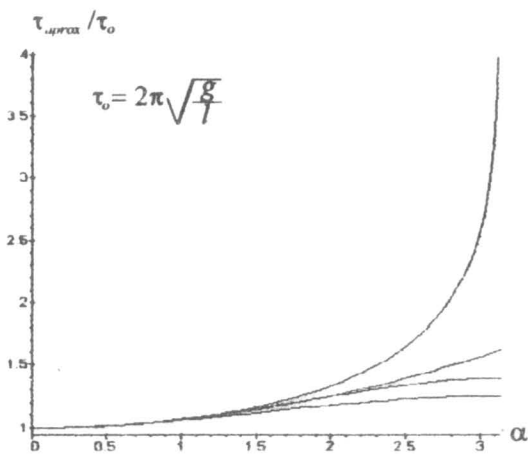


Figura 3.6.1c

În figura 3.6.1b este prezentată variația unghiului  $\theta$  în timp pentru două seturi de condiții inițiale

$$\theta_0 = 0, \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{4gl}} \in \{0.5, 0.6, 0.8\}$$

respectiv

$$\theta_0 \in \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right\}, \dot{\theta}_0 = 0.$$

În figura 3.6.1c este prezentat comparativ calculul perioadei cu formula lui Galileu, cu aproximația (\*\*\*) sau oprind doi respectiv trei termeni în (\*\*), precum și cu formula completă (\*).

Observație: Acest caz presupune o limitare superioară a vitezei

$$v_0^2 < 2g(x_0^1 + l).$$

Punctele A și A' între care oscilează punctul material pe circumferință au abscisa mai mică decât aceea a poziției inițiale. Dacă  $v_0 = 0$ , atunci  $x_A^1 = x_0^1$ .

### 3. Cazul $x_A^1 < -l$ (mișcare de rotație)

În acest caz

$$v_0^2 > 2g(x_0^1 + l)$$

și punctul descrie complet circumferința în același sens, impus de semnul lui  $\dot{\theta}_0$ . Ecuația diferențială care descrie mișcarea este

$$l\dot{\theta} = \pm \sqrt{2g(l - x_A^1) \left( 1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}$$

unde

$$k_1^2 = \frac{2l}{l - x_A^1} < 1.$$

Intervalul de timp în care punctul plecat din poziția  $\theta_0$  revine în aceeași poziție cu  $\theta = \theta_0 + 2\pi$  este dat de

$$\tau_0 = \frac{l}{\sqrt{2g(l - x_A^1)}} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{2l}{\sqrt{2g(l - x_A^1)}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k_1^2 u^2)}}.$$

Variația unghiului  $\theta$  în timp pentru condițiile inițiale  $\theta_0 = 0, \frac{\dot{\theta}_0}{\sqrt{4gl}} \in \{1.2, 1.5, 2\}$  este prezentată în figura 3.6.1e.

### 4. Cazul $x_A^1 = -l$ (mișcare asimptotică)

Pentru realizarea acestui caz, pur teoretic, ar trebui ca

$$v_0^2 = 2g(x_0^1 + l).$$

În această ipoteză, se aplică formulele din cazul 2., cu  $\alpha = +\pi$ . Alegând, de exemplu, semnul "+"

$$l\dot{\theta} = \sqrt{2gl(\cos \theta + 1)}$$

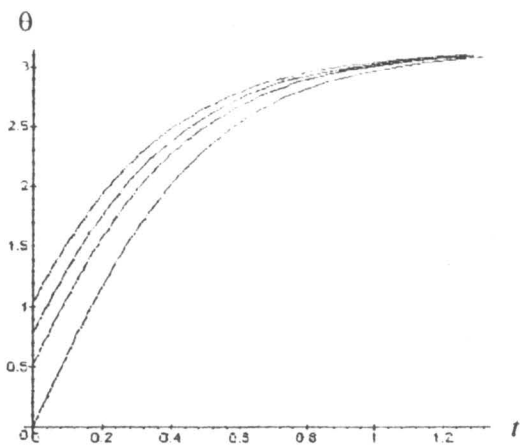


Figura 3.6.1d

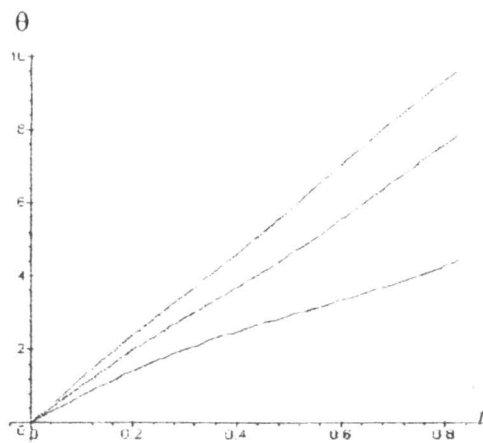


Figura 3.6.1e

și prin integrare, după separarea variabilelor

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \left[ \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}\right) \right]_{0_0}^\theta.$$

Mobilul se mișcă în sensul în care  $\theta$  crește; el ajunge în punctul  $\theta = \pi$  într-un timp infinit

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} t(\theta) = +\infty.$$

Variația unghiului  $\theta$  în timp pentru pozițiile inițiale  $\theta_0 \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$  este prezentată în figura 3.6.1d.

Variația unghiului  $\theta$  în timp pentru diferite cazuri de condiții inițiale precum și al perioadei respective în cazul mișcărilor oscilatorii sau de rotație s-a obținut cu programul

```
> with(DEtools):
```

```
> g:=9.8: l:=1: p:=sqrt(4*g*l): fct:=4*sqrt(l/g):
```

Cazul miscarii oscilatorii pornind din pozitia de echilibru

```
> ko1:=0.5: ko2:=0.6: ko3:=0.8: pero1:=evalf(fct*LegendreKc(ko1)); pero2:=evalf(fct*LegendreKc(ko2)); pero3:=evalf(fct*LegendreKc(ko3)); t1:=3*pero3:
```

```
pero1 := 2.153972792
```

```
pero2 := 2.237031152
```

```
pero3 := 2.549504370
```

```
> DEplot(diff(u(t),t$2)+g*sin(u(t))/l=0,[t,u],0..t1,[[0,0,0.5*p],[0,0,0.6*p],[0,0,0.8*p]],stepsize=pero3/20);
```

Cazul miscarii oscilatorii pentru viteza initiala nula

```
> ko4:=sqrt((1-cos(Pi/6))/2): ko5:=sqrt((1-cos(Pi/4))/2): ko6:=sqrt((1-cos(Pi/3))/2): pero4:=evalf(fct*LegendreKc(ko4)); pero5:=evalf(fct*LegendreKc(ko5)); pero6:=evalf(fct*LegendreKc(ko6)); t2:=3*pero6:
```

```
pero4 := 2.042030945
```

```
pero5 := 2.087320017
```

```
pero6 := 2.153972792
```

```
> DEplot(diff(u(t),t$2)+g*sin(u(t))/l=0,[t,u],0..t2,[[0,Pi/6,0],[0,Pi/4,0],[0,Pi/3,0]],stepsize=pero6/20);
```

Cazul miscarii asimptotice

```
> fa:=proc(u,u0) fct/4*ln(tan((u+Pi)/4)/tan((u0+Pi)/4)) end:
> ma1:=plot([fa(u,0),u,u=0..Pi]): ma2:=plot([fa(u,Pi/6),u,u=Pi/6..Pi]): ma3:=plot([fa(u,Pi/4),u,u=Pi/4..Pi]):
> ma4:=plot([fa(u,Pi/3),u,u=Pi/3..Pi]):
> display({ma1,ma2,ma3,ma4});
```

Cazul miscarii de rotatie pornind din pozitia de echilibru

```
> kr1:=5/6: kr2:=3/5: kr3:=1/2: perr1:=evalf(2*I*kr1/p*LegendreKc(kr1)): perr2:=evalf(2*I*kr2/p*L
> egendreKc(kr2)): perr3:=evalf(2*I*kr3/p*LegendreKc(kr3)): t3:=1.5*perr1:
```

$$perr1 := .5503003040$$

$$perr2 := .3355546727$$

$$perr3 := .2692465990$$

```
> DEplot(diff(u(t),t$2)+g*sin(u(t))/l=0,[t,u],0..t3,[[0,0,p/kr1],[0,0,p/kr2],[0,0,p/kr3]],stepsize=perr3
> /20);
```

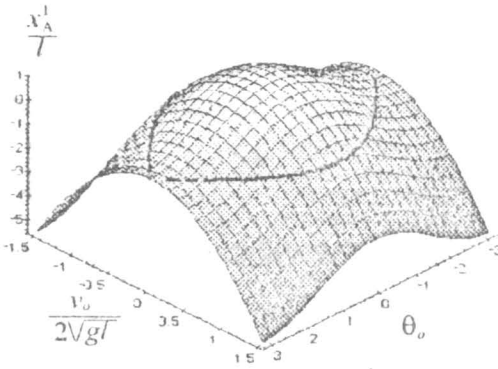


Figura 3.6.1f

Dependența cazurilor analizate de condițiile inițiale este prezentată grafic în figura 3.6.1f, pe abscisă fiind reprezentată poziția inițială, pe ordonată este dat raportul vitezei inițiale la viteza critică, iar cota reprezentând raportul  $\frac{x_A^1}{l}$ . Pe suprafața astfel obținută s-a trasat curba corespunzând cazului mișcărilor asimptotice.

**3.6.2.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu, de masă  $m$ , pe o circumferință de rază  $l$ , în plan vertical, cu rezistența mediului proporțională cu viteza.

Rezistența mediului, în general cu proprietățile enumerate în §3.3, este în acest caz

$$\mathbf{R} = -2mkv, \quad k > 0.$$

Ecuția de mișcare

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{R},$$

proiectată pe direcția tangentei în sensul mișcării, dă

$$\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Această ecuație diferențială, lineară cu coeficienți constanți, are soluție de forma

$$\theta = e^{\lambda t}$$

unde  $\alpha$  este rădăcină a ecuației caracteristice

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

adică

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \frac{g}{l}}$$

Dacă rezistența este slabă, atunci, notând

$$\mu^2 = \frac{g}{l} - k^2,$$

soluția pentru condițiile inițiale  $t = 0, \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$  este

$$\theta = \theta_0 e^{-k t} \left( \cos \mu t + \frac{k}{\mu} \sin \mu t \right).$$

Pornind din poziția inițială  $M_0$ , punctul material descrie un arc de cerc până în  $M_1$ , poziția în care viteza se anulează, la momentul  $t_1 = \frac{\pi}{\mu}$ , continuă mișcarea în sens opus până în poziția  $M_2$ , unde din nou viteza se anulează la momentul  $t_2 = \frac{2\pi}{\mu}$  ș.a.m.d. Oscilațiile sunt izocrone ca și în cazul precedent, dar durata oscilațiilor este puțin mai mare

$$\tau = \frac{2\pi}{\mu} > 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Amplitudinile corespunzătoare variază în progresie geometrică cu rația  $\exp\left(-\frac{k\pi}{\mu}\right)$

$$|\theta_0| > |\theta_1| = \left| -\theta_0 \exp\left(-\frac{k\pi}{\mu}\right) \right| > |\theta_2| = \left| \theta_0 \exp\left(-\frac{2k\pi}{\mu}\right) \right| > \dots$$

Mișcarea (linearizată) de acest tip este studiată în §3.8, problema 3.8.2.

**3.6.3.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu, de masă  $m$ , pe o circumferință de rază  $l$ , în plan vertical, cu rezistența mediului proporțională cu pătratul vitezei.

În acest caz rezistența mediului este

$$\mathbf{R} = -\frac{mk^2}{l} v \mathbf{v},$$

Ecuția de mișcare

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{R},$$

proiectată pe direcția tangentei în sensul ascendent al mișcării, dă

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - k^2 \dot{\theta}^2.$$

Luând ca nouă variabilă

$$u = \dot{\theta},$$

ecuația de mișcare devine

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{d\theta} + k^2 u^2 = -\frac{g}{l} \sin \theta.$$

Soluția generală a acestei ecuații va fi

$$u^2 = A \exp(-2k^2\theta) + \frac{2g}{l(1+4k^4)} \cos \theta - \frac{4k^2g}{l(1+4k^4)} \sin \theta.$$

$t$  în funcție de  $\theta$  se obține prin cuadratură, care se poate efectua în cazul amplitudinilor foarte mici prin funcții elementare sau eliptice (prin păstrarea termenilor de grad 1 sau 2 - funcții elementare, prin păstrarea termenilor de ordinul 3 sau 4 - funcții eliptice).

**3.6.4.** *Pendul cicloidal.* Să se studieze mișcarea fără frecare a unui punct material greu, de masă  $m$ , pe o cicloidă cu baza orizontală, situată în plan vertical, cu concavitățile în sus.



Se alege un reper  $Ox^1 x^2 x^3$  cu originea în punctul cel mai de jos,  $Ox^1 x^2$  planul vertical cu axa  $Ox^2$  verticala ascendentă. Fie  $a$  raza cercului generator.

Câteva proprietăți geometrice ale cicloidei: fie o poziție a cercului generator cu  $M$  punctul curent de pe cicloidă; normala la curbă este  $MB$ , centrul de curbură în  $E$ , simetricul lui  $M$  față de  $B$ ; locul lui  $E$  este o cicloidă egală cu cicloida considerată, având vârfurile în  $A$  și  $A'$ ; tangenta  $MC$  este jumătate din arcul  $OM$ , notat cu  $s$ . În triunghiul dreptunghic  $\triangle BMC$

$$MC^2 = BC \cdot CP,$$

adică

$$\frac{s^2}{4} = 2ax^2 \quad \text{de unde} \quad \frac{dx^2}{ds} = \frac{s}{4a}.$$

Aceste proprietăți se pot demonstra pornind de la reprezentarea parametrică a cicloidei

$$\begin{cases} x^1 = a(\theta + \sin \theta) \\ x^2 = a(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

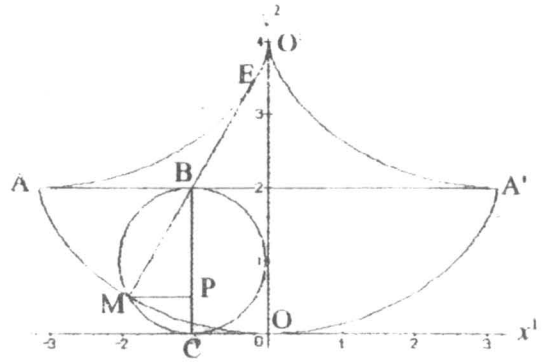


Figura 3.6.4

Proiecția greutății pe tangentă este  $-mg \frac{dx^2}{ds} = -mg \frac{s}{4a}$ . Deci ecuația de mișcare

$$m\ddot{x} = mg$$

în proiecție pe tangentă va fi

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a}s.$$

Soluția acestei ecuații este

$$s = s_0 \cos\left(t \sqrt{\frac{g}{4a}}\right)$$

dacă mobilul este lăsat liber (viteză inițială nulă) din poziția inițială. Timpul necesar mobilului să ajungă în  $O$  este independent de poziția inițială

$$\tau_0 = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

deci mișcarea este tautocronă (v. §3.7).

Reacțiunea normală rezultă din proiecția ecuației de mișcare pe direcția normalei principale

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cdot v + N$$

cu

$$v^2 = 2g(x_0^2 - x^2), \quad \rho = 2MB, \quad mg \cdot v = -mg \cos \alpha = -mg \frac{2a - x^2}{MB},$$

adică

$$N = \frac{mg(x_0^2 - x^2)}{MB} + \frac{mg(2a - x^2)}{MB}.$$

Dacă

$$x_0^2 = 2a$$

atunci (Euler)

$$N = -2mg \cdot v$$

**3.6.5.** Să se studieze mișcarea unui punct material greu pe o curbă într-un plan vertical, cu rezistență a mediului și frecare.

Fie o curbă a cărei concavitate este orientată în sus și punctul material se mișcă în sensul pozitiv al arcului  $s$ . Fie  $\alpha$  unghiul făcut cu direcția orizontală din planul vertical considerat de tangenta la curbă, în sensul arcului  $s$  pozitiv.

Forțele care acționează asupra mobilului sunt forța de greutate  $mg$ , reacțiunea normală  $N$ , forța de frecare  $T$ ,  $\|T\| = f\|N\|$  și rezistența mediului  $R$ ,  $\|R\| = m\varphi(v)$ , aceste ultime două forțe fiind orientate în sens opus vitezei.

Ecuatiile intrinseci de mișcare sunt

$$m\ddot{s} = -mg \sin \alpha + fN + m\varphi(v)$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = N - mg \cos \alpha.$$

Eliminând  $N$  între cele două ecuații și înlocuind  $\ddot{s}$  cu  $\dot{v} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds}$ , se obține ecuația

$$\frac{dv^2}{ds} = -2g(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 2f\frac{v^2}{\rho} + 2\varphi(v).$$

În lungul curbei,  $\alpha$  și  $\rho$  sunt funcții cunoscute de  $s$ , se obține ecuația diferențială de primul ordin care dă  $v$  în funcție de  $s$ . Odată găsită această funcție, se obține  $t$  în funcție de  $s$  prin cuadratură.

Dacă rezistența mediului este nulă sau proporțională cu pătratul vitezei  $\varphi(v) = kv^2$ , ecuația este lineară în  $v^2$  și calculele se pot finaliza.

Punctul de pe curbă pentru care  $\sin \alpha - f \cos \alpha$  se anulează este poziție de echilibru limită (presupunând egali coeficienții de frecare în repaus și în mișcare).

**3.6.6.** Un punct material obligat să se miște pe o circumferință este atras sau respins de un punct al circumferinței. Să se găsească legea de forță pentru ca reacțiunea normală să fie constantă.

Fie în planul circumferinței un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea în centrul cercului și cu axa  $Ox^1$  în lungul diametrului determinat de  $O$  și punctul atractiv sau repulsiv  $A$  de pe circumferință,  $AO$  în sensul pozitiv al axei. Ecuația de mișcare a punctului material  $P$

$$m\ddot{x} = F(\theta)\text{versPA} + N$$

în proiecție pe triedrul lui Frenet dă

$$mr\ddot{\theta} = -F(\theta)\sin \frac{\theta}{2} \quad (s = r\theta)$$

$$mr\dot{\theta}^2 = F(\theta)\cos \frac{\theta}{2} + N.$$

Eliminând  $F(\theta)$  între cele două ecuații, rezultă legea de mișcare

$$mr\ddot{\theta} = -\left(mr\dot{\theta}^2 - N\right)\text{tg} \frac{\theta}{2}$$

care scrisă sub forma

$$\frac{mr\ddot{\theta}\dot{\theta}}{mr\dot{\theta}^2 - N} = -\frac{\dot{\theta} \sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}}$$

se integrează ușor

$$m\dot{\theta}^2 = N + C \cos^2 \frac{\theta}{2}.$$

Înlocuind în a doua ecuație de mișcare, se obține

$$F(\theta) = C \cos \frac{\theta}{2}$$

(mișcare centrală cu centrul A:  $F(\theta) = \tilde{F}(AP) = C \sqrt{1 - \frac{AP^2}{r^2}}$ ).

**3.6.7.** Să se determine o curbă în plan vertical, astfel încât în mișcarea unui punct material greu pe aceasta, reacțiunea normală să fie în raport constant  $k$  cu componenta normală a greutății. ( $k = 1$  pentru dreaptă,  $k = 2$  pentru cicloidă, ...)

Fie  $Ox^1 x^2$  un reper în planul vertical al curbei cu  $Ox^1$  verticala ascendentă și fie în raport cu acest reper reprezentarea curbei

$$x^2 = f(x^1).$$

Pentru curba plană astfel reprezentată, se obține

$$\tau = \frac{1 + f' t_2}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$v = \text{sgn}(f'') \frac{t_2 - f' t_1}{\sqrt{1 + f'^2}}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{|f''|}{(\sqrt{1 + f'^2})^3}.$$

Ecuația de mișcare

$$m\ddot{x} = mg + N$$

în proiecție pe triedrul lui Frenet dă

$$\frac{dv^2}{dx^1} = -2gf' \Rightarrow v^2 = -2gf \quad (\text{constanta de integrare inclusă în } f)$$

$$\frac{f''}{1 + f'^2} v^2 = -(1 - k)g$$

de unde ecuația diferențială pentru determinarea funcției  $f$

$$\frac{2f''}{1 + f'^2} = \frac{1 - k}{f}.$$

Această ecuație admite integrala primă

$$1 + f'^2 = C f^{1-k}.$$

Integrarea acestei ecuații depinde de valoarea lui  $k$ .

Pentru  $k = 1$  se obține

$$f' = a \Rightarrow f(x^1) = ax^1 + b,$$

deci curba este o dreaptă.

Pentru  $k = 2$  se obține

$$1 + f'^2 = \frac{C}{f};$$

cu substituția  $f = C \sin^2 \theta$ , ecuația diferențială devine

$$\frac{df}{dx^1} = \sqrt{\frac{C}{f} - 1} \Rightarrow \frac{dx^1}{d\theta} = C(1 - \cos \theta)$$

și deci curba este cicloida

$$\begin{cases} x^1 = \frac{C}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ x^2 = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

**3.6.8.** Un punct material greu este lăsat liber pe partea superioară a unei parabole situată într-un plan vertical și având axa orizontală. Să se determine momentul în care mobilul părăsește parabola.  $h$  fiind înălțimea inițială deasupra axei parabolei, să se arate că ordonata  $y$  în poziția căutată este rădăcină a ecuației

$$y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0$$

$p$  fiind parametrul parabolei.

Fie  $Ox^1 x^2$  un reper în planul vertical al parabolei cu  $Ox^2$  verticala ascendentă și fie în raport cu acest reper reprezentarea parabolei

$$(x^2)^2 = 2px^1.$$

Din teorema energiei, ținând seama de datele inițiale, rezultă

$$v^2 = 2g(h - x^2).$$

Proiecția ecuației de mișcare

$$m\ddot{x} = mg + N$$

pe direcția normalei principale

$$m \frac{v^2}{\rho} = mg \cdot v + N$$

se concretizează în acest caz (se utilizează relații care particularizează pe cele din problema precedentă)

$$N = \frac{mg}{\left((x^2)^2 + p^2\right)^{3/2}} \left[ 2p^2(h - x^2) - x^2 \left( (x^2)^2 + p^2 \right) \right].$$

Punctul material părăsește parabola în momentul în care reacțiunea normală (forța de legătură) se anulează. Notând cu  $y$  ordonata corespunzătoare,  $y$  este rădăcină a ecuației

$$y^3 + 3p^2y - 2p^2h = 0.$$

Ecuația are o singură rădăcină reală,  $0 < y < h$ .

Integrala energiei se rescrie sub forma

$$\left( \frac{(x^2)^2}{p^2} + 1 \right) \left( \frac{dx^2}{dt} \right)^2 = 2g(h - x^2)$$

de unde momentul în care punctul material părăsește parabola este dat de

$$t_* = \frac{-1}{\sqrt{2gp}} \int_h^y \sqrt{\frac{(x^2)^2 + p^2}{h - x^2}} dx^2$$

**3.6.9.** Un punct material greu alunecă fără frecare pe o curbă netedă ( $C$ ) în plan vertical, de la o înălțime  $h$ , fără viteză inițială, intrând apoi pe partea interioară a unei circumferințe în același plan vertical, de rază  $r$ . Să se determine  $h$  astfel încât după ce părăsește circumfe-

rința, punctul material în mișcare liberă să descrie o parabolă ce trece prin centrul circumferinței.

Fie un reper  $Ox^1 x^2$  în planul vertical al circumferinței și curbei (C), cu O centrul circumferinței,  $Ox^2$  verticala ascendentă.

Fie A punctul în care curba (C) și circumferința se racordează. Viteza punctului material în A nu depinde de forma curbei ci numai de diferența de nivel  $h$ . Într-adevăr, scriind integrala energiei în mișcarea pe (C), între poziția inițială M și poziția finală A, se obține

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg(x_M^2 - x_A^2) \Rightarrow v_A^2 = 2gh.$$

Pe circumferință legea de mișcare în proiecție pe direcția razei se scrie

$$m\frac{v^2}{r} = mg \sin \theta + N;$$

la acestea se adaugă integrala primă a energiei

$$v^2 = v_A^2 - 2gr(1 + \sin \theta).$$

Punctul B în care mișcarea pe circumferință

încetează este punctul în care reacțiunea normală este nulă. Poziția și viteza în acest punct se obțin din

$$\begin{cases} v_B^2 = gr \sin \theta_B \\ v_B^2 = v_A^2 - 2gr(1 + \sin \theta_B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3gr \sin \theta_B = v_A^2 - 2gr \\ v_B^2 = \frac{1}{3}(v_A^2 - 2gr) \end{cases}$$

Din B începe mișcarea liberă a punctului material greu, cu condițiile inițiale stabilite mai înainte. Conform problemei 3.3.1, traiectoria punctului este

$$x^2 = r \sin \theta_B + (x^1 - r \cos \theta_B) \operatorname{tg} \left( \theta_B + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{g}{2v_B^2 \cos^2 \left( \theta_B + \frac{\pi}{2} \right)} (x^1 - r \cos \theta_B)^2$$

Pentru ca această parabolă să treacă prin centrul circumferinței, trebuie să fie satisfăcută relația

$$v_B^2 = \frac{gr}{2} \cdot \frac{\cos^2 \theta_B}{\sin \theta_B}$$

de unde

$$\sin \theta_B = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad h = r \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

**3.6.10.** Care trebuie să fie înclinarea  $\varphi$  a unui acoperiș, de deschidere  $a$ , astfel încât apa de ploaie, ce cade cu viteză având componenta  $v_0$  în lungul pantei acoperișului, să se scurgă într-un timp minim.

Fie în planul vertical de pantă maximă a acoperișului, un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea pe coama acoperișului și cu  $Ox^1$  în lungul pantei maxime.

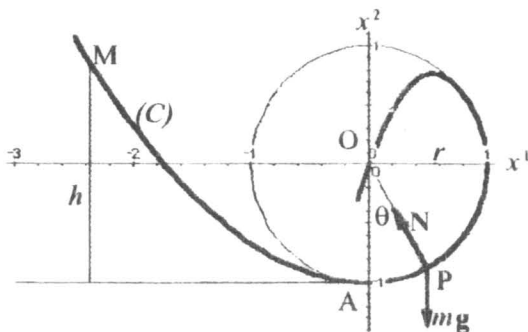


Figura 3.6.9

Mișcarea unei picături de ploaie în lungul acoperișului este caracterizată prin

$$\ddot{x}^1 = g \sin \varphi, \dot{x}^1 = v_0 + gt \sin \varphi, x^1 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \sin \varphi.$$

Timpul în care picătura parcurge acoperișul va fi dat de

$$\frac{a}{2 \cos \varphi} = v_0 t_* + \frac{1}{2} g t_*^2 \sin \varphi$$

sau

$$t_* = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + a g \operatorname{tg} \varphi}}{g \sin \varphi}.$$

Inclinarea  $\varphi$  pentru care acest timp este minim rezultă din

$$\frac{dt_*}{d\varphi} = 0 \quad \text{sau} \quad (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 = 4 \frac{v_0^2}{ag} \operatorname{tg} \varphi.$$

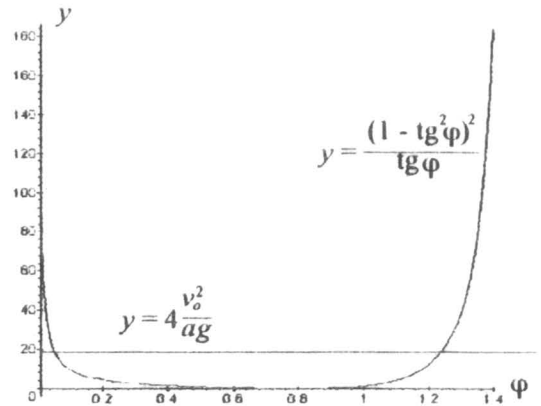


Figura 3.6.10

Așa cum se vede pe graficul din figura 3.6.10, problema are, pentru viteză inițială dată nenulă, două soluții, una mai mică decât  $\pi/4$  și alta mai mare decât  $\pi/4$ .

**3.6.11.** Să se studieze echilibrul și mișcarea cu frecare a unui punct material greu pe o curbă fixă.

Fie curba fixă a cărei reprezentare parametrică este

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u) \quad u \in I \subseteq \mathbb{R}$$

Echilibrul cu frecare (coeficient de frecare de aderență  $f$ ) a punctului material de masă  $m$  sub acțiunea forței  $\mathbf{F}$  pe curba considerată este caracterizat prin

$$\begin{cases} \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi = \mathbf{0} \\ \|\Phi\| \leq f \|\mathbf{N}\| \end{cases}$$

$\mathbf{N}$  fiind reacțiunea normală,  $\Phi$  reacțiunea tangențială (forța de frecare). Proiectând ecuația de echilibru pe treidrul lui Frenet asociat curbei, se obține

$$\begin{cases} (\tau) \quad \mathbf{F} \cdot \tau + \Phi \cdot \tau = 0 \\ (\nu) \quad \mathbf{F} \cdot \nu + \mathbf{N} \cdot \nu = 0 \\ (\beta) \quad \mathbf{F} \cdot \beta + \mathbf{N} \cdot \beta = 0 \end{cases}$$

Zonele de echilibru sunt definite de inegalitatea

$$|\mathbf{F} \cdot \tau| \leq f \sqrt{(\mathbf{F} \cdot \nu)^2 + (\mathbf{F} \cdot \beta)^2}$$

sau încă

$$|\tau \cdot \operatorname{vers} \mathbf{F}| \leq \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}.$$

În cazul mișcării cu frecare a punctului material de masă  $m$  sub acțiunea forței  $\mathbf{F}$  pe curba considerată, rezultă sistemul

$$\begin{cases} m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{N} + \Phi \\ \Phi = -f \|\mathbf{N}\| \tau \end{cases}$$

( $\tau$  în sensul mișcării) sau în proiecție pe triedrul lui Frenet

$$\begin{cases} (\tau) & m \frac{dv}{dt} = F \cdot \tau - f \sqrt{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})^2 + (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} \\ (\nu) & m \frac{v^2}{\rho} = F \cdot \nu + \mathbf{N} \cdot \mathbf{v} \\ (\beta) & 0 = F \cdot \beta + \mathbf{N} \cdot \beta \end{cases}$$

Dacă parametrul  $u$  este chiar abscisa curbilinie  $s$ , mișcarea rezultă din

$$m \frac{dv^2}{ds} = F \cdot \tau(s) - f \sqrt{\left[ m \frac{v^2}{\rho(s)} - F \cdot \nu(s) \right]^2 + [F \cdot \beta(s)]^2}$$

sau dacă parametrul  $u$  este oarecare din

$$m \frac{dv^2}{du} = F \cdot \frac{d\mathbf{x}}{du} - f \frac{ds}{du} \sqrt{\left[ m \frac{v^2}{\rho(u)} - F \cdot \nu(u) \right]^2 + [F \cdot \beta(u)]^2}$$

Ecuaiilor de mișcare li se adaugă condițiile inițiale

$$t = t_o : \begin{cases} s = s_o & \text{respectiv} & u = u_o \\ v = v_o & & v = v_o \end{cases}$$

Pentru viteză inițială nulă  $v_o = 0$ , ecuațiile de mișcare îi pierd valabilitatea dacă poziția inițială se găsește în interiorul unei zone de echilibru.

Dacă singura forță efectivă care acționează asupra punctului material este forța de greutate, zonele de echilibru se definesc prin condiția

$$|\mathbf{t}_3 \cdot \boldsymbol{\tau}| \leq \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \quad \text{sau} \quad \left| \frac{dx^3}{ds} \right| \leq \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

iar ecuația de mișcare se înlocuiește prin

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{ds} = \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau}(s) - f \sqrt{\left[ \frac{v^2}{\rho(s)} - \mathbf{g} \cdot \nu(s) \right]^2 + [\mathbf{g} \cdot \beta(s)]^2}$$

În acest caz, întucât puterea forței de frecare este negativă

$$\Phi \cdot \mathbf{v} = -f \|\mathbf{N}\| \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} = -f \|\mathbf{N}\| v < 0$$

din teorema energiei cinetice rezultă

$$\frac{1}{2} m (v^2 - v_o^2) + mg(x^3 - x_o^3) < 0$$

( $\mathbf{t}_3$  verticala ascendentă), ceea ce arată că punctul se poate ridica până la o înălțime aflată sub un nivel determinat de condițiile inițiale

$$|x^3|_{v=0} < x_o^3 + \frac{v_o^2}{2g}$$

### Cazul unei curbe în plan orizontal

În cazul punctului material greu aflat pe o curbă în plan orizontal ( $\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{t}_3 = \mathbf{0}$ ), echilibrul poate fi realizat în orice punct de pe curbă, iar reacțiunile corespunzătoare în orice punct de pe curbă sunt

$$\mathbf{N}_{ech} = -mg, \quad \|\Phi_{ech}\| \leq fmg$$

Ecuția de mișcare a punctului material greu pe o curbă în plan orizontal și condițiile inițiale corespunzătoare sunt

$$\begin{cases} \frac{dv^2}{ds} = -2f \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho(s)}\right)^2 + g^2} \\ t = t_o : \begin{cases} s = s_o \\ v = v_o > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Fără a integra ecuația, se obțin următoarele rezultate

i) viteza descrește de la valoarea  $v_o$  până la zero când punctul se oprește (poziție de echilibru);

ii) forța de frecare

$$\|\Phi_{din}\| = fm \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + g^2} \geq fmg \geq \|\Phi_{ech}\|$$

valoarea maximă a forței de frecare de echilibru este valoarea minimă a forței de frecare în mișcare și este atinsă în momentul opririi;

iii) poziția de repaus este atinsă după un interval finit de timp, mai mare decât cel corespunzător mișcării fără frecare

$$t - t_o = \int_{s_o}^s \frac{ds}{v(s)} = \int_{v_o}^v \frac{1}{v} \frac{dv^2}{-2f \sqrt{\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2 + g^2}} \leq \frac{v_o - v}{fg}$$

### Cazul unei curbe în plan vertical

În cazul punctului material greu aflat pe o curbă în plan vertical ( $\beta \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ ), zonele de echilibru sunt definite de inegalitatea

$$\left| \frac{dx^3}{ds} \right| \leq \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} \quad \text{sau} \quad \left| \frac{dx^3}{dx^1} \right| \leq f.$$

Ecuația de mișcare a punctului material greu pe o curbă în plan vertical și condițiile inițiale corespunzătoare sunt

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\tau} + f \left( \frac{v^2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \right) \\ t = t_o : \begin{cases} s = s_o \\ v = v_o > 0 \end{cases} \end{cases}$$

semnul fiind astfel ales încât  $+f \left( \frac{v^2}{\rho} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \right) < 0$ , adică în funcție de datele inițiale și geometria curbei. Variația vitezei este dată de soluția ecuației lineare

$$\frac{dv^2}{ds} = +2f \frac{v^2}{\rho(s)} + \mathbf{g} \cdot [\boldsymbol{\tau}(s) \pm f\mathbf{v}(s)]$$

adică

$$v^2(v_o, s_o, f; s) = \exp \left[ +2f \int_{s_o}^s \frac{ds_1}{\rho(s_1)} \right] \left\{ v_o^2 + 2\mathbf{g} \cdot \int_{s_o}^s [\boldsymbol{\tau}(s_2) \pm f\mathbf{v}(s_2)] \exp \left[ +2f \int_{s_o}^{s_2} \frac{ds_3}{\rho(s_3)} \right] ds_2 \right\}$$

Din această relație rezultă

$$\frac{dv^2}{dv_o^2}(v_o, s_o, f; s) = \exp \left[ +2f \int_{s_o}^s \frac{ds_1}{\rho(s_1)} \right] > 0,$$

ceea ce arată că mărimea vitezei este funcție crescătoare de viteza inițială pentru o aceeași poziție inițială. Variația mărimii vitezei în funcție de poziția inițială depinde de geometria curbei



$$\frac{\partial v^2}{\partial s_o}(v_o, s_o, f; s) = -2 \exp \left[ -2f \int_{s_o}^s \frac{ds_1}{\rho(s_1)} \right] \left\{ \mathbf{g} \cdot [\boldsymbol{\tau}(s_o) \pm f \mathbf{v}(s_o)] + f \frac{v_o^2}{\rho(s_o)} \right\}.$$

Fie ecuația curbei

$$z = z(x).$$

și pentru fixarea ideilor se presupune  $z''(x) > 0$  și mișcarea având loc de la stânga spre dreapta. Există cel mult o zonă de echilibru definită de

$$|z'(x)| \leq f.$$

Ecuația de mișcare devine

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx} = -gz' - f \left( \frac{z''}{1+z'^2} v^2 + g \right)$$

având soluția

$$v^2(v_o, x_o, f; x) = \exp[-2f \operatorname{arctg} z'(x)] \times \\ \times \left\{ v_o^2 \exp[2f \operatorname{arctg} z'(x_o)] - 2g \int_{x_o}^x [z'(x) + f] \exp[2f \operatorname{arctg} z'(x)] dx \right\}.$$

Afirmațiile de mai sus privind dependența mărimii vitezei de condițiile inițiale rămân valabile. Pentru că

$$\frac{\partial v^2}{\partial f}(v_o, x_o, f; x) = -2[\operatorname{arctg} z'(x) - \operatorname{arctg} z'(x_o)] v^2(v_o, x_o, f; x) + \\ -2g \int_{x_o}^x [1 + 2(z'(\xi) + f)][\operatorname{arctg} z'(\xi) - \operatorname{arctg} z'(x_o)] \exp[2f(\operatorname{arctg} z'(\xi) - \operatorname{arctg} z'(x))] d\xi < 0$$

mărimea vitezei se micșorează cu creșterea coeficientului de frecare.

Reacțiunea normală la curbă are mărimea

$$N = m \left| \frac{z''}{(1+z'^2)^{3/2}} v^2 + \frac{g}{(1+z'^2)^{1/2}} \right|$$

Presupunând că punctul material pornește din zona de echilibru ( $|z'(x_o)| \leq f$ ) viteza lui va descreește de la valoarea  $v_o$ , întrucât

$$\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = - \left[ f \frac{z''}{1+z'^2} v^2 + g(z' + f) \right] < 0.$$

Fie  $x_*$  poziția în care viteza se anulează

$$v^2(v_o, x_o, f; x_*) = 0$$

sau

$$v_o^2 = 2g \int_{x_o}^{x_*} [z'(x) + f] \exp[2f(\operatorname{arctg} z'(x) - \operatorname{arctg} z'(x_o))] dx.$$

Această relație arată că  $x_*$  depinde de condițiile inițiale și este vizibil că  $x_* > x_o$ . Dacă

$$z'(x_*) < f$$

punctul se va opri în  $x_*$ , în zona de echilibru. Dacă

$$z'(x_*) > f$$

punctul va ieși din zona de echilibru; din  $x_*$  va urma o mișcare de la dreapta la stânga cu viteză inițială nulă, la momentul  $t = t_*$ . Pentru a ieși din zona de echilibru, viteza inițială  $v_o$  trebuie să depășească viteza critică

$$v_{o,cr}^2(x_o) = 2g \int_{x_o}^{x_{e,d}} [z'(x) + f] \exp [2f(\arctg z'(x) - \arctg z'(x_o))] dx, \quad z'(x_{e,d}) = f$$

Punctul de oprire sau întoarcere  $x$ , este atins după intervalul de timp

$$t_* - t_o = \int_{x_o}^{x_*} \frac{\sqrt{1 + z'^2(x)}}{v(v_o, x_o, f; x)} dx < \frac{v_o}{2g} \frac{\sqrt{1 + z'^2(x_o)}}{z'(x_o) + f}$$

Dacă punctul nu pornește inițial dintr-o poziție de echilibru, adică  $|z'(x_o)| > f$ , dar tot de la stânga la dreapta, atunci, sau  $z'(x_o) < -f$  și punctul material se va mișca spre zona de echilibru în care va intra cu viteză

$$v_{e,s}^2 = \exp [-2f(\arctg z'(x_{e,s}) - \arctg z'(x_o))] \times \left\{ v_o^2 - 2g \int_{x_o}^{x_{e,s}} [z'(x) + f] \exp [2f(\arctg z'(x) - \arctg z'(x_o))] dx \right\} > 0$$

și va urma apoi o mișcare din zona de echilibru, sau  $z'(x_o) > f$  și punctul material se va mișca spre dreapta cu o viteză ce va descreește la zero într-un interval finit de timp, după care va urma o mișcare de la dreapta la stânga de tipul celei de dinainte cu viteză inițială nulă. În prima situație ( $z'(x_o) < -f$ ), viteza va crește la început și apoi va descreește sau va descreește chiar de la început după cum poziția inițială  $x_o$  se va afla la stânga sau la dreapta punctului pentru care s-ar putea atinge maximul ( $\frac{\partial v^2}{\partial x} = 0$ ).

Știind că în mișcarea fără frecare, viteza corespunzătoare aceluiași date inițiale este

$$V^2(v_o, x_o; x) = v_o^2 - 2g[z(x) - z(x_o)]$$

iar timpul de atingere a unei poziții va fi

$$T(x) - t_o = \int_{x_o}^x \frac{\sqrt{1 + z'^2(\xi)}}{V(v_o, x_o; \xi)} d\xi,$$

din comparația cu mărimile corespunzătoare mișcării cu frecare rezultă

$$\lim_{f \rightarrow 0} v^2(v_o, x_o, f; x) = V^2(v_o, x_o; x), \quad v^2(v_o, x_o, f; x) \leq V^2(v_o, x_o; x)$$

$$\lim_{f \rightarrow 0} t(x) = T(x), \quad t(x) \geq T(x).$$

În condițiile în care s-a studiat mișcarea (de la stânga la dreapta), forța de frecare are mărimea

$$\|\Phi(v_o, x_o, f; x)\| = mf \left[ \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} v^2(v_o, x_o, f; x) + \frac{g}{(1 + z'^2(x))^{1/2}} \right]$$

Studiul variației acestei mărimi este strâns legat de studiul variației vitezei în funcție de condițiile inițiale, întrucât

$$\frac{\partial \|\Phi(v_o, x_o, f; x)\|}{\partial (v_o^2)} = mf \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial (v_o^2)}$$

$$\frac{\partial \|\Phi(v_o, x_o, f; x)\|}{\partial (x_o)} = mf \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} \cdot \frac{\partial (v^2)}{\partial (x_o)}$$

$$\frac{\partial \|\Phi(v_o, x_o, f; x)\|}{\partial f} = mf \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} \frac{\partial (v^2)}{\partial f} + m \left[ \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} v^2 + \frac{g}{(1 + z'^2(x))^{1/2}} \right]$$

În pozițiile de echilibru, forța de frecare corespunzătoare satisface inegalitatea

$$\|\Phi_{ech}(x)\| = \frac{mg|z'(x)|}{(1+z'^2(x))^{1/2}} \leq \frac{mgf}{(1+z'^2(x))^{1/2}} = \|\Phi(v_o, x_o, f, x)\|_{v=0} \leq \|\Phi(v_o, x_o, f, x)\|_{v>0}.$$

În poziția de oprire  $x_*$ , forța de frecare are mărimea nenulă  $\frac{mgf}{(1+z'^2(x_*))^{1/2}}$  și își va schimba sensul.

**3.6.12. Problema lui Abel.** Să se determine într-un plan vertical o curbă ( $C$ ), trecând prin punctul  $O$ , astfel încât un punct material greu, abandonat fără viteză inițială pe curba ( $C$ ) de la o poziție  $M_o$  situată la înălțimea  $h$  deasupra lui  $O$ , să ajungă în  $O$  într-un interval de timp, care să fie o funcție continuă  $T(h)$ , pentru  $0 \leq h \leq a$ . Frecarea se neglijează. Caz particular  $T(h) \equiv k = \text{const}$ .

Fie un sistem de referință cartezian cu originea în  $O$ , axa  $Ox^2$  verticala ascendentă. Din teorema energiei cinetice, ținând seama de condițiile inițiale ( $t = 0, x^2 = h, v = 0$ ) rezultă

$$v^2 = 2g(h - x^2) \quad [x^2 \leq h]$$

sau

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{2g(h - x^2)} = \varphi'(x^2) \frac{dx^2}{dt},$$

presupunând că abscisa curbilinie se poate exprima sub forma

$$s = \varphi(x^2).$$

De aici

$$T(h) = \int_0^h \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{2g(h-y)}} dy \quad (0 \leq h \leq a).$$

Trebuie determinată din această ecuație integrală funcția necunoscută  $\varphi(x^2)$ , de clasă  $C^1([0, a])$  și care se anulează în origine. Lui Abel i se datorează următoarea succesiune de prelucrări ale ecuației

$$\sqrt{2g} \int_0^u \frac{T(h)}{\sqrt{u-h}} dh = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u-h}} \left( \int_0^h \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{h-y}} dy \right) dh = \iint_D \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{(u-h)(h-y)}} dh dy$$

$$\iint_D \frac{\varphi'(y)}{\sqrt{(u-h)(h-y)}} dh dy = \int_0^u \varphi'(y) \left( \int_y^u \frac{1}{\sqrt{(u-h)(h-y)}} dh \right) dy$$

$$\int_y^u \frac{1}{\sqrt{(u-h)(h-y)}} dh = \pi$$

$$\sqrt{2g} \int_0^u \frac{T(h)}{\sqrt{u-h}} dh = \pi \int_0^u \varphi'(y) dy$$

Astfel se determină din ecuația stabilită de Abel

$$\varphi(x^2) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^{x^2} \frac{T(h)}{\sqrt{x^2-h}} dh \quad 0 \leq x^2 \leq a.$$

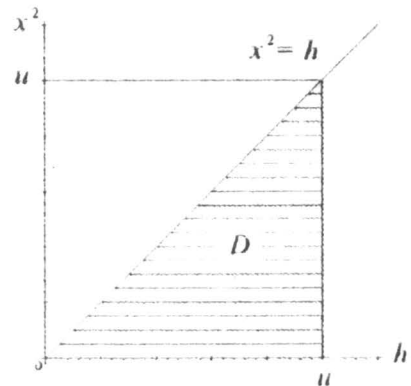


Figura 3.6.12

În cazul particular  $T(h) = k = \text{const}$ , se obține ușor

$$\varphi(x^2) = \frac{2k\sqrt{2g}}{\pi} \sqrt{x^2}.$$

Fie  $\theta$  unghiul tangentei la curbă cu axa  $Ox^1$ , se calculează

$$\frac{dx^1}{ds} = \cos \theta, \quad \frac{dx^2}{ds} = \sin \theta, \quad \frac{ds}{dx^2} = \frac{k\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{x^2}} = \frac{2k^2g}{\pi^2 s}$$

$$k_1^2 = \frac{4k^2g}{\pi^2}, \quad \frac{ds}{d\theta} = \frac{k_1^2}{2} \cos \theta$$

$$\frac{dx^1}{d\theta} = \frac{dx^1}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \frac{k_1^2}{2} \cos^2 \theta, \quad \frac{dx^2}{d\theta} = \frac{dx^2}{ds} \frac{ds}{d\theta} = \frac{k_1^2}{2} \sin \theta \cos \theta$$

Prin urmare

$$\begin{cases} x^1 = \frac{k_1^2}{2} \int_0^\theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{k_1^2}{8} (2\theta + \sin 2\theta) \\ x^2 = \frac{k_1^2}{2} \int_0^\theta \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{k_1^2}{8} (1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

aceste relații reprezintă ecuațiile parametrice ale unei cicloide. Proprietatea de tautocronism a cicloidei a fost pus în evidență de Huygens.

### §3.7. Mișcări tautocrone

Se spune că o curbă este tautocronă, dacă există un punct pe această curbă, numit punct de tautocronism, astfel încât în mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe date, cu viteză inițială nulă, timpul necesar să ajungă în punctul de tautocronism să fie același independent de poziția inițială. O asemenea mișcare se numește tautocronă.

\*\*\*

**3.7.1.** Să se determine legea de forță, depinzând numai de poziție, astfel încât o mișcare rectilinie să fie tautocronă (metoda lui Puiseux).

Fie un reper având originea în punctul de tautocronism  $O$  și axa  $Ox$  în lungul traiectoriei rectilinii, astfel încât abscisa inițială să fie pozitivă.

Teorema energiei cinetice dă

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int_{x_0}^x X(x)dx,$$

forța  $X$  fiind evident negativă pentru  $x > 0$ , deci forța este dirijată mereu spre  $O$ . Notând

$$\varphi(x) = -\int_{x_0}^x X(x)dx, \quad \varphi'(x) > 0, \quad \varphi(0) = 0$$

integrala energiei se scrie

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2[\varphi(x_0) - \varphi(x)]$$

deci timpul necesar mobilului să ajungă în  $O$  va fi

$$t_* = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{x_1^0} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x_1^0) - \varphi(x)}}.$$

Notând

$$\varphi(x) = z, \quad \varphi(x_0) = z_0, \quad x = \psi(z)$$

$\psi$  fiind funcția inversă lui  $\varphi$ , se obține

$$t_* = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{z_0} \frac{\psi'(z)dz}{\sqrt{z_0 - z}}.$$

Pentru ca mișcarea să fie tautocronă este necesar și suficient ca  $t_*$  să nu depindă de  $x_1^0$  adică de  $z_0$  și prin urmare derivata în raport cu  $z_0$  să fie nulă

$$z = z_0 u$$

$$t_* = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi'(z_0 u) \sqrt{z_0}}{\sqrt{1-u}} du$$

$$\frac{dt_*}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{\psi''(z_0 u) z_0 u + \frac{1}{2} \psi'(z_0 u)}{\sqrt{z_0} \sqrt{1-u}} du$$

sau revenind la variabila  $z$

$$\frac{dt_*}{dz_0} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^{z_0} \frac{z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z)}{z_0 \sqrt{z_0 - z}} dz = 0 \quad \forall z_0$$

Aceasta se întâmplă dacă  $\psi$  este soluție a ecuației diferențiale

$$z\psi''(z) + \frac{1}{2}\psi'(z) = 0$$

sau

$$\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + \frac{1}{2z} = 0 \Rightarrow \psi(z) = 2C\sqrt{z} + C'$$

$$\psi(0) = 0 \Rightarrow \psi(z) = 2C\sqrt{z}$$

$$x = 2c\sqrt{z} \Rightarrow \varphi(x) = \frac{x^2}{4C^2}$$

Deci

$$X(x) = -\varphi'(x) = \frac{-x}{2C^2}$$

adică o atracție proporțională cu distanța (v. forțe centrale §3.4).

**3.7.2.** Să se determine legea de forță, depinzând numai de poziție și viteză, astfel încât o mișcare rectilinie să fie tautocronă.

Fie un reper având originea în punctul de tautocronism  $O$  și axa  $Ox$  în lungul traiectoriei rectilinii, astfel încât abscisa inițială să fie pozitivă.

Teorema energiei cinetice dă

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = v f(x, v) \text{ sau } \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = f(x, v)$$

Aici vor fi examinate două cazuri particulare

a) Ecuația diferențială este omogenă în  $v$  și  $x$

$$\frac{dv}{dx} = \psi\left(\frac{v}{x}\right)$$

$$v = xu$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\psi(u) - u}{x} \Rightarrow \ln \frac{x}{x_0} = \int_0^u \frac{du}{\psi(u) - u} \Rightarrow u = \frac{v}{x} = \chi\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

Timpul necesar mobilului să ajungă în  $O$  va fi

$$t_* = \int_{x_0}^0 \frac{dx}{x\chi\left(\frac{x}{x_0}\right)} = \int_{x=x_0\xi}^0 \frac{d\xi}{\xi\chi(\xi)}$$

și nu depinde de  $x_0$ , deci mișcarea este tautocronă.

Exemplu

$$\psi\left(\frac{v}{x}\right) = -k^2 \frac{x}{v} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -k^2 \frac{x}{v} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$$

adică atracție proporțională cu distanța (coincide cu situația de la problema 3.7.1).

b) Ecuația este lineară în  $v^2$

$$\frac{dv^2}{dx} = p(x)v^2 + q(x)$$

Notății

$$P(x) = \exp\left(-\int_0^x p(x)dx\right), \quad Q(x) = -\int_0^x q(x)P(x)dx.$$

Soluția ecuației diferențiale care se anulează în  $x_0$  este

$$v^2 P(x) = Q(x_0) - Q(x).$$

Timpul necesar mobilului să ajungă în O va fi

$$t_* = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{P(x)}{Q(x_0) - Q(x)}} dx.$$

Notând

$$Q(x) = z, \quad Q(x_0) = z_0, \quad \sqrt{P(x)} dx = \psi'(z) dz$$

se obține

$$t_* = \int_0^{z_0} \frac{\psi'(z)}{\sqrt{z_0 - z}} dz$$

acesta trebuind să fie independent de  $z_0$ . Printr-un calcul analog celui de la problema 3.7.1, rezultă

$$\psi'(z) = \frac{C}{\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{P(x)Q(x)} = CQ'(x) \text{ sau } \sqrt{P(x)Q(x)} = -q(x)P(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q(0) = 0 \\ P(0) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow q(0) = 0 \text{ (punctul de tautocronism este poziție de echilibru)}$$

$$P'(x) = -p(x)P(x), \quad Q'(x) = -q(x)P(x), \quad Q''(x) = -q(x)P'(x) - q'(x)P(x)$$

$$Q = C^2 q^2 P \Rightarrow Q' = C^2 \left( \frac{2Q'Q''}{P} - \frac{Q'^2 P'}{P^2} \right) \Rightarrow 1 = C^2 \left( \frac{2Q''}{P} - \frac{Q'P'}{P^2} \right)$$

$$\Rightarrow pq - 2 \frac{dq}{dx} = \frac{1}{C^2}$$

Deci ecuația de mișcare va avea forma

$$\frac{dv^2}{dx} = \left[ 2 \frac{q'(x)}{q(x)} + \frac{1}{C^2 q(x)} \right] v^2 + q(x), \quad q(x) \text{ arbitrar.}$$

**3.7.3.** Să se determine curba pe care mișcarea fără frecare a unui punct material sub acțiunea unei forțe depinzând numai de poziție, să fie tautocronă.

Fie un reper a cărui origine este punctul de tautocronism O. Fie

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$$

curba tautocronă cu abscisa curbilinie măsurată de la punctul de tautocronism O.

Legea de mișcare

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{N}$$

dă în proiecție pe tangenta la curbă

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dx}{ds} \cdot F(x(s)).$$

Ecuția este similară celei care a descris mișcarea rectilinie tautocronă la problema 3.7.1. Deci mișcarea este tautocronă dacă și numai dacă

$$\frac{dx}{ds} \cdot F(x(s)) = -k^2 s, \quad k^2 \text{ arbitrar.}$$

Pentru rezolvarea completă a problemei trebuie să se adauge și alte condiții. De exemplu, se poate presupune că proprietatea de tautocronism are loc cu același punct de tautocronism pentru două legi de forță. Atunci se formează sistemul

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} \cdot F(x(s)) = -k^2 s \\ \frac{dx}{ds} \cdot F_1(x(s)) = -k_1^2 s \\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Similar se tratează problema în cazul dependenței forței de poziție și viteză.

**3.7.4.** Să se determine o curbă în plan vertical, astfel încât mișcarea fără frecare a unui punct material greu să fie tautocronă.

Fie în planul vertical un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea în punctul de tautocronism și axa  $Ox^2$  verticala ascendentă. Condiția de tautocronism devine

$$-mg \frac{dx^2}{ds} = -mg k^2 s$$

Rezultă

$$x^2 = \frac{1}{2} k^2 s^2.$$

Cum

$$\left(\frac{dx^1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 1$$

se obține

$$x^1 = \frac{1}{2} s + \frac{\sin(2k^2 s)}{4k^2}.$$

Deci curba este o cicloidă cu baza orizontală și vârful în origine. (v. problema 3.6.4).

**3.7.5.** Să se determine o curbă în plan vertical, astfel încât mișcarea unui punct material greu, fără frecare cu rezistență a mediului proporțională cu pătratul vitezei, să fie tautocronă.

Fie în planul vertical un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea în punctul de tautocronism și axa  $Ox^2$  verticala ascendentă.

Ecuția de mișcare

$$m\ddot{x} = mg + N - mk^2 v^2$$

în proiecție pe tangenta la curbă

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \frac{dx^2}{ds} + mk^2 v^2$$



sau

$$\frac{dv^2}{ds} = -2g \frac{dx^2}{ds} + 2k^2 v^2.$$

Ținând seama de rezultatul de la problema 3.7.2, condiția pentru tautocronism se scrie

$$4g \frac{d^2 x^2}{ds^2} - 4gk^2 \frac{dx^2}{ds} = \frac{1}{C^2}$$

de unde

$$\frac{dx^2}{ds} = \frac{-1}{4gk^2 C^2} [1 - \exp(-k^2 s)] \quad \left( \frac{dx^2}{ds}(0) = 0 \right)$$

Notând

$$\frac{dx^2}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{dx^1}{ds} = \cos \alpha$$

se obțin ecuațiile

$$\frac{dx^2}{d\alpha} = \frac{-4gC^2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + 4gk^2 C^2 \sin \alpha}, \quad \frac{dx^1}{d\alpha} = \frac{-4gC^2 \cos^2 \alpha}{1 + 4gk^2 C^2 \sin \alpha}$$

din care  $x^1$  și  $x^2$  rezultă prin cuadraturi.

**3.7.6.** Să se determine o curbă în plan vertical, astfel încât mișcarea unui punct material greu, cu frecare fără rezistență a mediului proporțională cu pătratul vitezei, să fie tautocronă.

Fie în planul vertical un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea în punctul de tautocronism și axa  $Ox^2$  verticala ascendentă.

Ecuația de mișcare

$$m\ddot{x} = mg + N - fN \frac{v}{v}$$

în proiecție pe triedrul lui Frenet dă

$$\begin{cases} m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \frac{dx^2}{ds} + fN \\ m \frac{v^2}{\rho} = -mg \frac{dx^1}{ds} + N \end{cases}$$

de unde prin eliminarea lui  $N$  se obține

$$\frac{dv^2}{ds} = -2g \left( \frac{dx^2}{ds} - f \frac{dx^1}{ds} \right) + 2f \frac{v^2}{\rho}$$

Comparând cu rezultatul de la problema 3.7.2, se obține condiția de tautocronism

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{dx^2}{ds} - f \frac{dx^1}{ds} \right) - \frac{f}{\rho} \left( \frac{dx^2}{ds} - f \frac{dx^1}{ds} \right) = \frac{1}{4gC^2}$$

Dacă  $\alpha$  este unghiul tangentei la curbă cu horizontala, atunci

$$\frac{dx^1}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dx^2}{ds} = \sin \alpha, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

condiția de tautocronism dă

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\alpha} &= 4gC^2(1+f^2)\cos \alpha \\ \Rightarrow s &= 4gC^2(1+f^2)(\sin \alpha - \sin \alpha_0), \quad \text{tg } \alpha_0 = f \end{aligned}$$

Această relație este caracteristică pentru o cicloidă (v.problema 3.7.4). Punctul de tautocronism  $O$  este poziția de echilibru caracterizată de unghiul  $\alpha_0$ .

Curbe în spațiu cu proprietatea de tautocronism pentru mișcarea punctului material greu, se pot obține prin înfășurarea curbei plane pe un cilindru.

**3.7.7.** Să se determine o curbă plană, astfel încât mișcarea fără frecare a unui punct material în câmp central să fie tautocronă.

Fie un reper  $Ox^1 x^2$  cu originea în centrul forțelor și  $r, \theta$  coordonatele polare asociate. Fie forța centrală

$$\mathbf{F} = F(r)\frac{\mathbf{x}}{r}, \quad r = \|\mathbf{x}\|.$$

Condiția de tautocronism, așa cum a rezultat la problema 3.7.3, este

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(s)) = -k^2 s$$

Dar cum

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}(s)) = F(r)\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = F(r)\frac{dr}{ds} = \frac{d}{ds}U(r(s)) \text{ unde } U(r) = \int F(r)dr$$

condiția de tautocronism devine

$$U(r) = U(r_0) - \frac{1}{2}k^2 s^2$$

unde  $r_0$  caracterizează punctul de tautocronism (arcul  $s$  se măsoară de la punctul de tautocronism). De aici

$$ks = \sqrt{2[U(r_0) - U(r)]}$$

$$k^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] = \left( \frac{F(r)}{\sqrt{2[U(r_0) - U(r)]}} \right)^2$$

și  $\theta$  ca funcție de  $r$  se obține prin cuadratură.

Exemplu:

$$\mathbf{F} = -\mu^2 \mathbf{x}, \quad U(r) = -\frac{1}{2}\mu^2 r^2$$

$$ks = \mu \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

$$k^2 \left[ 1 + \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \right] = \left( \frac{-\mu r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \right)^2 \Rightarrow \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 = \frac{\mu^2}{k^2} \frac{r^2}{r^2 - r_0^2} - 1$$

Aceste curbe sunt sau cicloide sau spirale (Puisseux). Pentru  $k = \mu$ , curba este dreaptă și punctul de tautocronism este piciorul perpendicularei din  $O$  pe dreaptă.

În cazul în care se ține seama de frecare se obțin aceleași tipuri de curbe (Darboux).

Curbe în spațiu cu proprietatea de tautocronism pentru mișcarea punctului material în câmp central, se pot obține prin înfășurarea curbei plane pe un con cu vârful în  $O$ .

**3.7.8.** Să se determine o curbă tautocronă atât pentru mișcarea fără frecare a unui punct material greu cât și pentru mișcarea punctului material atras cu intensitate  $\mu$  constantă de o axă verticală.

Fie un reper astfel încât axa verticală care atrage punctul să fie axa  $Ox^3$  verticala ascendentă, iar punctul de tautocronism  $A$  să fie pe axa  $Ox^1$  ( $A(a, 0, 0)$ ).

În cazul forței de greutate, condiția de tautocronism este

$$-gx^3 = -\frac{1}{2}k^2s^2 \quad (s = 0 \text{ pentru } x_3 = 0).$$

În cazul forței de atracție  $-\mu \frac{x^1 u_1 + x^2 u_2}{r}$ ,  $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ , condiția de tautocronism este

$$-\mu r = -\frac{1}{2}h^2s^2 - \mu a \quad (s = 0 \text{ pentru } r = a).$$

Curba tautocronă se află pe suprafața obținută prin eliminarea lui  $s$  între cele două condiții de tautocronism

$$r = a + \frac{g h^2}{\mu k^2} x^3.$$

această suprafață este un con de revoluție în jurul lui  $Ox^3$ .

Pentru determinarea completă a curbei se formează sistemul

$$x^3 = \frac{\mu k^2}{g h^2} (r - a)$$

$$s = \sqrt{\frac{2\mu}{h^2} (r - a)}$$

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dr}\right)^2$$

de unde

$$\theta = \sqrt{1 + \left(\frac{\mu k^2}{g h^2}\right)^2} \int_a^r \sqrt{\frac{\alpha - r}{r - a}} \frac{dr}{r}$$

$$\alpha = \frac{\mu}{2h^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{\mu k^2}{g h^2}\right)^2} + a \left[ 1 + \left(\frac{\mu k^2}{g h^2}\right)^2 \right] > a > 0.$$

Proiecția orizontală a curbei este cuprinsă între circumferințele  $r = a$  și  $r = \alpha$ , tangentă la prima și normală la cea de a doua, unde are punct de întoarcere. Integrarea se efectuează prin substituția

$$\frac{\alpha - r}{r - a} = u^2$$

$$\theta = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{\mu k^2}{g h^2}\right)^2} \left[ \arctg \sqrt{\frac{\alpha - r}{r - a}} - \sqrt{\frac{\alpha}{a}} \arctg \sqrt{\frac{a}{\alpha} \cdot \frac{\alpha - r}{r - a}} \right].$$

### §3.8. Mișcări oscilatorii

**3.8.1.** Să se studieze mișcarea unui punct material de masă  $m$ , sub acțiunea unei forțe elastice  $F = -kx$ ,  $k > 0$ . Rezistența mediului se neglijează.

Ecuția de mișcare este

$$m\ddot{x} = -kx \quad (m > 0, k > 0).$$

Se consideră condițiile inițiale generale

$$t = 0, x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0.$$

Ecuția de mișcare, cu notația  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , devine

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

și are soluția

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$$

Mișcarea are loc în planul determinat de  $x_0, \dot{x}_0$  dacă  $x_0 \times \dot{x}_0 \neq 0$  sau este rectilinie pe direcția  $x_0$  dacă  $x_0 \times \dot{x}_0 = 0$  (v.pb.3.4.2). Traectoria este o elipsă raportată la doi diametrii conjugăți. Elipsa degenerază într-un segment de dreaptă în cazul mișcării rectilinii. Mișcarea oscilatorie nu apare atunci când  $x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0$ . Punctul material rămâne în repaus/echilibru.

Mărimi caracteristice

$\omega_0$  - frecvența (unghiulară), nu depinde de condițiile inițiale;

$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$  - perioada, nu depinde de condițiile inițiale.

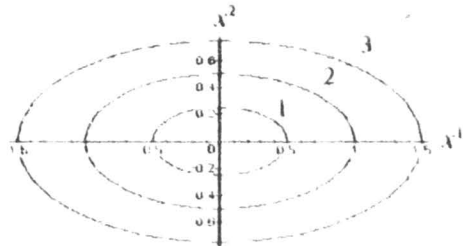
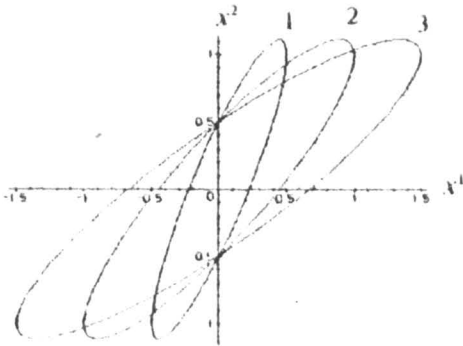
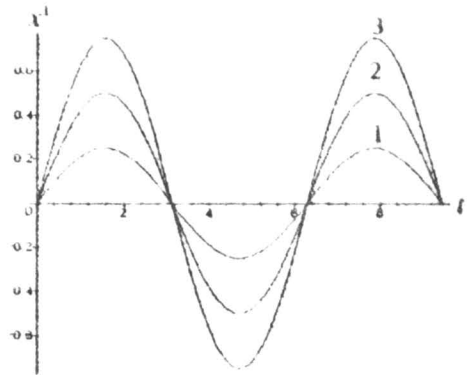
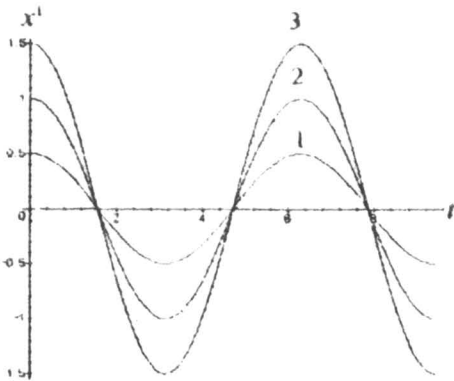


Figura 3.8.1a

Figura 3.8.1b

In figura 3.8.1 este prezentată variația în timp a componentei  $x^1$  din planul  $Ox^1 x^2$  al traiectoriilor, precum și traiectoriile corespunzătoare, pentru  $\omega_o = 1$  și următoarele condiții inițiale:

Nr.crt.	$x_o^1$	$x_o^2$	$\dot{x}_o^1$	$\dot{x}_o^2$	Nr.crt.	$x_o^1$	$x_o^2$	$\dot{x}_o^1$	$\dot{x}_o^2$
1	0.50	1.00	0	0.50	1	0.50	0	0	0.25
2	1.00	1.00	0	0.50	2	1.00	0	0	0.50
3	1.50	1.00	0	0.50	3	1.50	0	0	0.75

**3.8.2.** Să se studieze mișcarea unui punct material sub acțiunea unei forțe elastice  $F = -kx$ ,  $k > 0$ , cu rezistența mediului proporțională cu viteza  $R = -bv$ ,  $b > 0$ .

Ecuția de mișcare este

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (m > 0, k > 0, b > 0).$$

Sunt posibile mai multe situații:

*Proces oscilator amortizat:*  $b > 0, k > 0, b^2 - 4km < 0$ .

Se consideră condițiile inițiale generale

$$t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_o.$$

Ecuția de mișcare, cu notațiile  $2h = \frac{b}{m}, \omega_o^2 = \frac{k}{m}, \omega^2 = \omega_o^2 - h^2$ , devine

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$$

și are soluția

$$\mathbf{x} = e^{-ht} \left( \mathbf{x}_o \cos \omega t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o + h\mathbf{x}_o}{\omega} \sin \omega t \right)$$

Mișcarea are loc în planul determinat de  $\mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}}_o$  dacă  $\mathbf{x}_o \times \dot{\mathbf{x}}_o \neq 0$  sau este rectilinie pe direcția  $\mathbf{x}_o$  dacă  $\mathbf{x}_o \times \dot{\mathbf{x}}_o = 0$ . Traiectoria este o spirală. Traiectoria degenerază într-un segment de dreaptă în cazul mișcării rectilinii. Mișcarea oscilatorie nu apare atunci când  $\mathbf{x}_o = 0, \dot{\mathbf{x}}_o = 0$ . Punctul material rămâne în repaus/echilibru.

Mărimi caracteristice

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$  - perioada convențională, nu depinde de condițiile inițiale (Funcția

$\mathbf{x}(t)$  nu este periodică, deci în acest sens mișcarea nu este periodică; dar intervalul de timp între două treceri consecutive ale sistemului prin poziția de echilibru, în același sens, este constant și egal cu  $\tau$ );

$d = h\tau = \frac{2\pi h}{\omega}$  - decrement logarithmic de amortizare;

$h$  - exponent de amortizare, depinde de alegerea inițială a unității de

timp  $e^{ht} = \exp\left(\frac{2\pi h}{\omega}\right)$ .

Mișcarea este *oscilatorie amortizată*, cu lege exponențială de amortizare (numai pentru acest caz are sens noțiunea de decrement logarithmic de amortizare).

In figura 3.8.2a este prezentată variația în timp a componentei  $x^1$  din planul  $Ox^1 x^2$  al traiectoriilor, precum și traiectoriile corespunzătoare, pentru  $\omega_o = \sqrt{3}, h = 0.25$  și următoarele condiții inițiale:

Nr.crt.	$x_o^1$	$x_o^2$	$\dot{x}_o^1$	$\dot{x}_o^2$
1	2.00	1.75	3.00	0

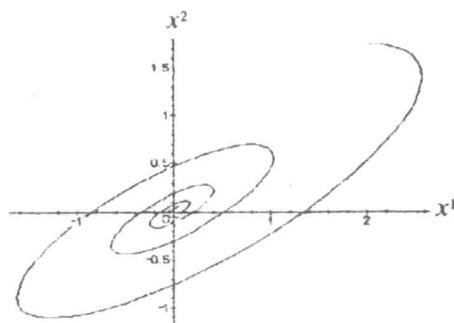
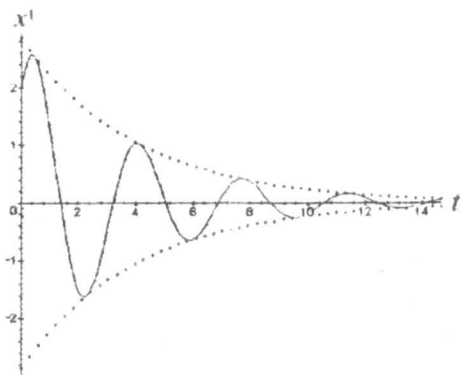


Figura 3.8.2a

*Proces aperiodic amortizat.*  $b > 0, k > 0, b^2 - 4km > 0.$

Se consideră condițiile inițiale generale

$$t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_o.$$

Notând

$$h = \frac{b}{m}, \omega_o^2 = \frac{k}{m}, q = \sqrt{h^2 - \omega_o^2};$$

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_o^2 = 0, \lambda_1 = -h + q = -q_1, \lambda_2 = -h - q = -q_2, 0 < q_1 < q_2,$$

ecuația de mișcare devine

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2h\dot{\mathbf{x}} + \omega_o^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

și are soluția

$$\mathbf{x} = \frac{\dot{\mathbf{x}}_o + q_2\mathbf{x}_o}{q_2 - q_1} e^{-q_1 t} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o + q_1\mathbf{x}_o}{q_1 - q_2} e^{-q_2 t}$$

sau

$$\mathbf{x} = e^{-ht} \left( \mathbf{x}_o \operatorname{ch} qt + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o + h\mathbf{x}_o}{q} \operatorname{sh} qt \right).$$

Mișcarea are loc în planul determinat de  $\mathbf{x}_o, \dot{\mathbf{x}}_o$  dacă  $\mathbf{x}_o \times \dot{\mathbf{x}}_o \neq \mathbf{0}$  sau este rectilinie pe direcția  $\mathbf{x}_o$  dacă  $\mathbf{x}_o \times \dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{0}$ . Mișcarea oscilatorie nu apare atunci când  $\mathbf{x}_o = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{x}}_o = \mathbf{0}$ . Punctul material rămâne în repaus/echilibru.

Mișcarea se amortizează pentru că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{0}.$$

Mișcarea este *aperiodică*.

*Observație.* Sensul fizic al condiției  $b > 0$ : dacă starea sistemului fără frecare este stabilă, atunci adăugarea frecării pozitive dă sistemului o stabilitate absolută.

În figura 3.8.2b este prezentată variația în timp a componentei  $x^1$  din planul  $Ox^1 x^2$  al traiectoriilor, precum și traiectoriile corespunzătoare, pentru  $\omega_o = \sqrt{3}, h = 2$  și următoarele condiții inițiale (alese pentru cele trei situații posibile de amortizare, cu și fără puncte de extrem):

Nr.crt.	$x_o^1$	$x_o^2$	$\dot{x}_o^1$	$\dot{x}_o^2$
1	2.00	1.75	-15.00	-8.00
2	2.00	1.75	-2.00	-0.20
3	2.00	1.75	4.00	0.05

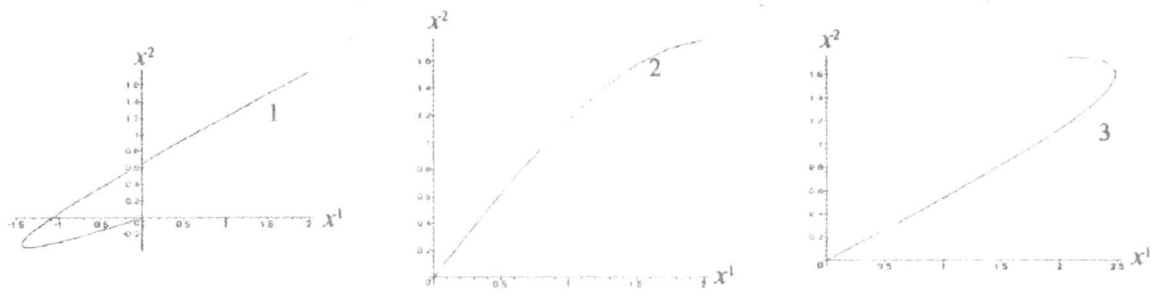
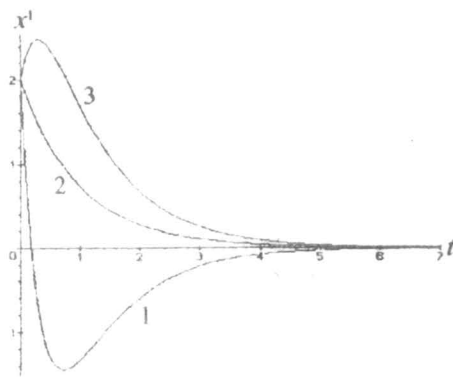


Figura 3.8.2b

Proces cu amortizare critică:  $b > 0, k > 0, b^2 - 4km = 0$ .  
 Se consideră condițiile inițiale generale

$$t = 0, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_0.$$

Notând

$$2h = \frac{b}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}, h^2 = \omega_0^2.$$

ecuația de mișcare devine

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2h\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

și are soluția

$$\mathbf{x} = e^{-ht} [\mathbf{x}_0 + (\dot{\mathbf{x}}_0 + h\mathbf{x}_0)t].$$

Mișcarea are loc în planul determinat de  $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$  dacă  $\mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$  sau este rectilinie pe direcția  $\dot{\mathbf{x}}_0$  dacă  $\mathbf{x}_0 \times \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ .

Acest caz nu poate fi realizat într-un sistem fizic și nu are valoare decât ca graniță între cele două tipuri de procese amortizate: oscilator și aperiodic.

**3.8.3.** Să se studieze mișcarea unui punct material supus unei forțe  $\mathbf{F} = -\mathbf{C}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{C}$  fiind un tensor de ordinul al doilea simetric pozitiv definit.

Ecuția de mișcare este

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\mathbf{C}\mathbf{x}.$$

Fie  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$  direcțiile principale ale tensorului  $\mathbf{C}$  și  $k_1, k_2, k_3$  valorile principale, adică

$$\mathbf{C} = \sum_{j=1}^3 k_j \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_j \quad (k_j > 0, j = 1, 2, 3).$$

Atunci

$$C\mathbf{x} = \sum_{j=1}^3 k_j x^j \mathbf{m}_j.$$

Deci ecuațiile scalare de mișcare sunt

$$m\ddot{x}^j = -k_j x^j \quad j = 1, 2, 3$$

sau

$$\ddot{x}^j + \omega_j^2 x^j = 0, \quad \omega_j^2 = \frac{k_j}{m} \quad j = 1, 2, 3$$

și admit soluțiile

$$x^j = x_o^j \cos \omega_j t + \frac{\dot{x}_o^j}{\omega_j} \sin \omega_j t \quad j = 1, 2, 3$$

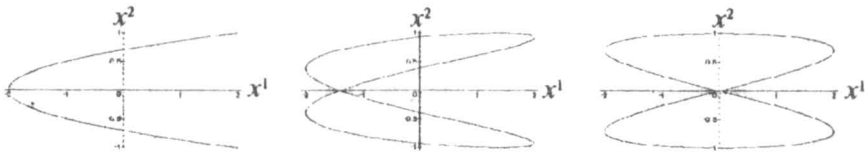
sau

$$x^j = A^j \cos(\omega_j t - \alpha_j) \quad j = 1, 2, 3$$

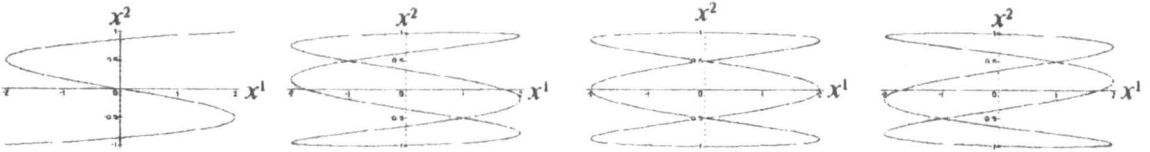
$$A^j = \sqrt{(x_o^j)^2 + \left(\frac{\dot{x}_o^j}{\omega_j}\right)^2}, \quad \cos \alpha_j = \frac{x_o^j}{A^j}, \quad \sin \alpha_j = \frac{\dot{x}_o^j}{\omega_j A^j} \quad j = 1, 2, 3$$

Forma soluțiilor indică faptul că mișcarea este mărginită, traiectoriile sunt cuprinse în interiorul unui paralelipiped, centrat în origine, cu laturile  $2A^j$ . Mișcarea este periodică numai dacă există numerele naturale  $n_1, n_2, n_3$  astfel încât

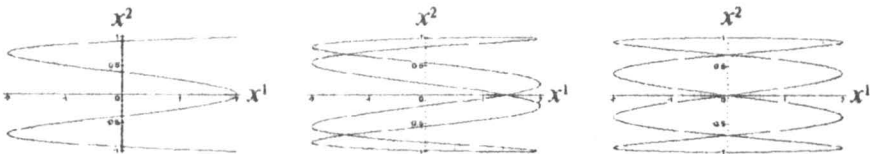
$$\frac{n_1}{\omega_1} = \frac{n_2}{\omega_2} = \frac{n_3}{\omega_3}.$$



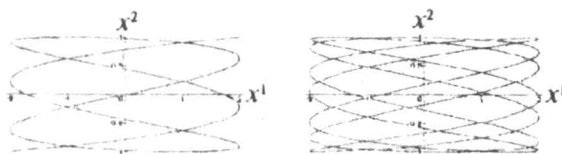
$$\omega_1/\omega_2 = 2$$



$$\omega_1/\omega_2 = 3$$



$$\omega_1/\omega_2 = 4$$



$$\omega_1/\omega_2 = 7/3$$

Figura 3.8.3



Curbele obținute se numesc curbe Lyssajous. În caz bidimensional, în figura 3.8.3 sunt prezentate traiectoriile pentru câteva perechi de rapoarte ale frecvențelor și defazaje inițiale:

Nr.crt.	$\omega_1$	$\omega_2$	$A^1$	$A^2$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1	2	1	2.00	1.00	0	0
2	2	1	2.00	1.00	$\pi/4$	0
3	2	1	2.00	1.00	$\pi/2$	0
4	3	1	2.00	1.00	0	0
5	3	1	2.00	1.00	$\pi/3$	0
6	3	1	2.00	1.00	$\pi/2$	0
7	3	1	2.00	1.00	$2\pi/3$	0
8	4	1	2.00	1.00	0	0
9	4	1	2.00	1.00	$\pi/4$	0
10	4	1	2.00	1.00	$\pi/2$	0
11	7	1	2.00	1.00	0	0
12	7	3	2.00	1.00	0.40	0

**3.8.4.** Să se studieze mișcarea unui punct material de masă  $m$ , sub acțiunea unei forțe elastice  $F = -k \mathbf{x}$ ,  $k > 0$  și a unei forțe periodice de timp  $m\mathbf{P}\cos pt$ . Rezistența mediului se neglijează (oscilații forțate ale oscilatorului armonic).

Ecuția de mișcare

$$m\ddot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = m\mathbf{P}\cos pt \quad \text{sau} \quad \ddot{\mathbf{x}} + \omega_o^2\mathbf{x} = \mathbf{P}\cos pt, \quad \omega_o^2 = \frac{k}{m}$$

Condiții inițiale

$$t = 0 \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_o, \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_o$$

Soluția particulară a acestei ecuații se ia de forma  $C\cos pt$ . Rezultă

$$\mathbf{x} = \left( \mathbf{x}_o - \frac{\mathbf{P}}{\omega_o^2 - p^2} \right) \cos \omega_o t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t + \frac{\mathbf{P}}{\omega_o^2 - p^2} \cos pt$$

Ea reprezintă suprapunerea a două oscilații armonice, una de frecvență  $\omega_o$  și alta de pulsație  $p$ . Această suprapunere se numește *interferență*. Mișcarea de pulsație proprie  $\omega_o$  se numește *oscilație proprie*, iar cea de pulsație  $p$  se numește *oscilație forțată* (constrânsă).

Dacă frecvența forței perturbatoare este foarte apropiată de frecvența proprie,  $p = \omega_o + \varepsilon$ , soluția devine

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_o \cos \omega_o t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t + \frac{\mathbf{P}}{\omega_o^2 - (\omega_o + \varepsilon)^2} [\cos (\omega_o + \varepsilon)t - \cos \omega_o t] = \\ &= \mathbf{x}_o \cos \omega_o t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t - \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon(2\omega_o + \varepsilon)} \left[ \underbrace{\cos \omega_o t \cos \varepsilon t}_{\approx 1} - \sin \omega_o t \sin \varepsilon t - \cos \omega_o t \right] \cong \\ &\cong \mathbf{x}_o \cos \omega_o t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t + \frac{\mathbf{P}}{(2\omega_o + \varepsilon)} \cdot \frac{\sin \varepsilon t}{\varepsilon} \sin \omega_o t \cong \\ &\cong \mathbf{x}_o \cos \omega_o t + \frac{\dot{\mathbf{x}}_o}{\omega_o} \sin \omega_o t + \frac{\mathbf{P}}{2\omega_o} t \sin \omega_o t \end{aligned}$$

ultimul termen fiind dominant față de ceilalți.

Dacă frecvența forței perturbatoare este egală cu frecvența proprie,  $p = \omega_0$ , ecuația de mișcare devine

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = P \cos \omega_0 t$$

soluția particulară se caută de forma  $Ct \sin \omega_0 t$ . Se obține

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{P}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Apar deviații foarte mari de la poziția de echilibru ( $x = 0$ ). Acest fenomen se numește *rezonanță*.

Situațiile semnalate pentru cazul unidimensional sunt exemplificate în figura 3.8.4, în care sunt prezentate oscilațiile proprii și forțate corespunzătoare aceluiași condiții inițiale ( $x_0^1 = 0, \dot{x}_0^1 = 1$ ).

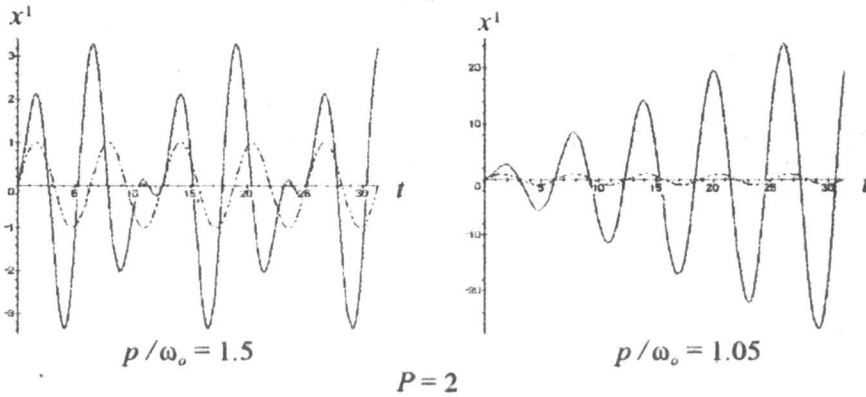


Figura 3.8.4

**3.8.5.** Să se studieze mișcarea unui punct material de masă  $m$ , sub acțiunea unei forțe elastice  $F = -kx$ ,  $k > 0$  și a unei forțe periodice de timp  $mP \cos pt$ , cu rezistența mediului proporțional cu viteza  $R = -bv$ ,  $b > 0$ ,  $b^2 - 4km > 0$  (oscilații forțate ale oscilatorului amortizat)

Ecuția de mișcare

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = mP \cos pt \quad \text{sau} \quad \ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = P \cos pt, \quad 2h = \frac{b}{m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Condiții inițiale

$$t = 0 \quad x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0.$$

Soluția particulară a acestei ecuații se ia de forma  $C \cos pt + D \sin pt$ . Rezultă

$$x = \left[ x_0 - \frac{\omega_0^2 - p^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} P \right] e^{-ht} \cos \omega t + \left[ \frac{\dot{x}_0 + h x_0}{\omega} - \frac{h}{\omega} \frac{\omega_0^2 + p^2}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} P \right] e^{-ht} \sin \omega t + \frac{1}{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2} P [(\omega_0^2 - p^2) \cos pt + 2hp \sin pt].$$

Primii doi termeni reprezintă oscilația amortizată, care va fi rapid dominată de oscilația forțată

$$x_{forat} = A \cos (pt - \varphi)$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 4h^2 p^2}} P, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - p^2}{\|A\|}, \quad \sin \varphi = \frac{2hp}{\|A\|}$$

Amplitudinea oscilației forțate  $A$  și diferența de fază  $\varphi$  sunt funcții de frecvențele  $\omega_o$  și  $p$ .

Dacă frecvența forței perturbatoare este egală cu frecvența proprie  $p = \omega_o$ , diferența de fază devine egală cu  $\pi/2$ , iar amplitudinea  $A = \frac{P}{2h\omega_o}$ . Această amplitudine, pentru o frecare redusă ( $h$  mic), ia valori foarte mari, rezultatul suprapunerii oscilației amortizate și oscilației forțate va fi o oscilație cu amplitudine foarte mare. Fenomenul se numește *rezonanță*.

În figura 3.8.5 sunt prezentate, în caz unidimensional, oscilațiile amortizate și oscilațiile forțate pentru aceleași condiții inițiale, precum și variația amplitudinii  $A$  în funcție de frecvența  $p$ . Valoarea maximă a amplitudinii se obține pentru

$$p = \sqrt{\omega_o^2 - 2h^2}$$

pentru  $h$  destul de mic, valoarea este apropiată de  $\omega_o$ . Valoarea amplitudinii maxime va fi

$$A_{\max} = \frac{P}{2h\sqrt{\omega_o^2 - h^2}}$$

Se obțin aproximațiile (prin neglijarea puterilor lui  $h$  superioare puterii a treia)

$$p \cong \omega_o - \frac{h^2}{\omega_o}, \quad A_{\max} \cong \frac{P}{2h\omega_o} \left( 1 + \frac{h^2}{2\omega_o^2} \right)$$

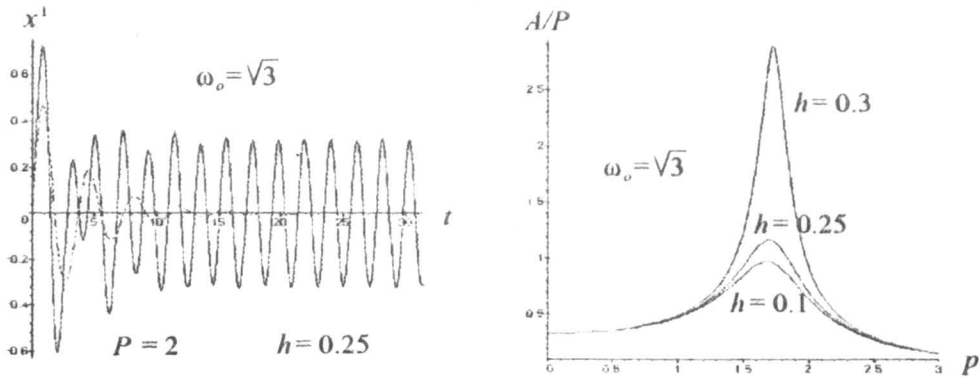


Figura 3.8.5

**3.8.6.** **Punctul material de masă  $m$  este situat în poziție de echilibru în mijlocul  $O$  al firului  $AA'$ ; asupra sa lucrează tensiunile  $T_o$  și  $T'_o$  (se neglijează greutatea proprie). Dacă se deplasează mobilul din  $O$  în  $P$  pe normala  $Ox$  în  $O$  la  $AA'$ , atunci asupra mobilului vor lucra tensiunile  $T$  și  $T'$  în lungul firelor  $PA$  și respectiv  $PA'$ , din motive de simetrie tensiunile sunt egale în valoare absolută. Să se studieze oscilațiile neliniare în jurul poziției  $O$  de echilibru, ale punctului material, lăsat liber în  $P$ .**

Pentru a scrie ecuația de mișcare, trebuie determinată forța (rezultantă)  $F$  care lucrează asupra punctului material în poziția  $P$

$$F = -F_t = -2T \sin \alpha_t, \quad \alpha = \angle OAP.$$

Admițând că tensiunea  $T$  în fir este funcție lineară de lungire

$$T = T_o + k(l - a) \quad (a = OA, l = PA)$$

$k$  - coeficient de elasticitate ( $k > 0$ ), rezultă

$$F = 2[T_o + k(l-a)]\sin\alpha = 2\left[T_o + k\left(\sqrt{x^2 + a^2} - a\right)\right]\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= 2kx + 2(T_o - ka)\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Ecuția de mișcare este deci

$$m\ddot{x} + F(x) = 0.$$

Prin dezvoltare în serie (pentru  $x$  mic în raport cu  $a$ ) se obține

$$F = 2T_o\frac{x}{a} + (ka - T_o)\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \frac{3}{4}(T_o - ka)\left(\frac{x}{a}\right)^5 + \dots$$

În cazul normal  $T_o > 0$  și  $ka - T_o > 0$ .

Dacă se ia pentru  $F$  aproximația a doua (nelineară) ecuația de mișcare devine

$$(*) \quad \ddot{x} + \omega^2 x + \mu x^3 = 0 \quad \text{unde} \quad \omega^2 = \frac{2T_o}{m}, \mu = \frac{ka - T_o}{ma^3}.$$

Pentru  $\mu$  foarte mic, se caută soluția ecuației sub forma unei serii de puteri în  $\mu$

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

unde  $x_0, x_1, x_2 \dots$  sunt funcții de două ori derivabile în raport cu timpul. Se va considera pentru  $\omega$  o dezvoltare de forma

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \dots$$

constantele  $C_1, C_2$  fiind deocamdată nedeterminate. Introducând în (\*) și ordonând după  $\mu$  se obține

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 + \mu[\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + C_1 x_0 + x_0^3] + \mu^2[\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + C_1 x_1 + C_2 x_0 + 3x_0^2 x_1] + \dots = 0.$$

De unde

$$(i) \quad \ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0$$

$$(ii) \quad \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + C_1 x_0 + x_0^3 = 0$$

$$(iii) \quad \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + C_1 x_1 + C_2 x_0 + 3x_0^2 x_1 = 0$$

Ecuția (i) cu condițiile inițiale

$$x_0(0) = l, \dot{x}_0(0) = 0$$

admite soluția

$$x_0(t) = l \cos \omega_0 t.$$

Introducând această soluție în (ii) rezultă

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -C_1 l \cos \omega_0 t - l^3 \cos^3 \omega_0 t$$

sau încă

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -l\left(C_1 + \frac{3}{4}l^2\right)\cos \omega_0 t - \frac{1}{4}l^3 \cos 3\omega_0 t.$$

Pentru a elimina rezonanța introdusă de primul termen (termeni în soluție de forma  $t \cos \omega_0 t$ ), trebuie să se ia

$$C_1 = -\frac{3}{4}l^2.$$

Ecuția (ii) devine

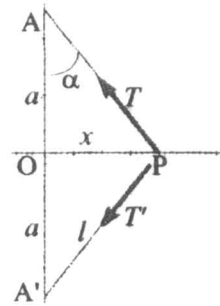


Figura 3.8.6

$$\ddot{x}_1 + \omega_o^2 x_1 = -\frac{1}{4}l^3 \cos 3\omega_o t$$

Cu condiții inițiale nule

$$x_1(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0$$

ea are soluția

$$x_1(t) = \frac{l^3}{32\omega_o^2} (\cos 3\omega_o t - \cos \omega_o t).$$

Dacă se consideră suficientă această aproximație se ia

$$\omega_o^2 = \omega^2 + \frac{3}{4}l^3 \mu.$$

Dacă se dorește o aproximație mai bună se continuă cu determinarea lui  $x_2$  din (iii) în care se introduc componentele determinate

$$\ddot{x}_2 + \omega_o^2 x_2 = \left( -C_2 l + \frac{3l^5}{128\omega_o^2} \right) \cos \omega_o t - \frac{3l^5}{128\omega_o^2} \cos 5\omega_o t$$

$$C_2 = \frac{3l^4}{128\omega_o^2}$$

$$x_2 = \frac{l^5}{1024\omega_o^4} (\cos 5\omega_o t - \cos \omega_o t) \text{ etc.}$$

### §3.9. Mișcarea relativă a punctului material

Fie  $OX^1 X^2 X^3$  un reper cartezian ortogonal inerțial (fix) și  $ox^1 x^2 x^3$  un reper cartezian ortogonal mobil. Mișcarea reperului mobil în raport cu reperul inerțial este dată de mișcarea originii reperului mobil  $X_0 = X_0(t)$  și de rotația axelor reperului mobil în raport cu cele ale reperului inerțial, caracterizată de vectorul viteză unghiulară  $\omega = \omega(t)$  (v. capitolul 2).

Mișcarea unui punct material de masă  $m$ , sub acțiunea forței  $F$ , în raport cu reperul mobil, este descrisă de ecuația

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c,$$

unde forțele complementare de transport  $F_t$  și Coriolis  $F_c$  sunt date de relațiile

$$\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t = -m(\ddot{\mathbf{X}}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{x} + \omega \times (\omega \times \mathbf{x}))$$

$$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c = -2m\omega \times \dot{\mathbf{x}}$$

\*\*\*

**3.9.1.** Să se studieze influența mișcării de revoluție a Pământului (neglijând influența mișcării de rotație a acestuia), asupra mișcării unui punct material la suprafața Pământului.

Se consideră drept reper inerțial *sistemul heliocentric Copernic* cu originea în centrul Soarelui (presupus sferic) și cu axele îndreptate spre trei stele presupuse fixe. Reperul mobil, solidar cu Pământul, cu originea în centrul acestuia (presupus sferic) cu axele de direcție fixă ( $\omega = \mathbf{o}$ , reprezintă neglijarea influența mișcării de rotație a Pământului).

Ecuația de mișcare a unui punct material P la suprafața Pământului este în acest caz

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{X}}_0$$

$\mathbf{F}$  fiind rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material: forțele atracție din partea Soarelui, Lunei, Pământului etc., precum și alte forțe, forța de transport  $\mathbf{F}_t = -m\ddot{\mathbf{X}}_0$  fiind determinată din atracția universală pe care Soarele, de masă  $M$ , o exercită asupra Pământului

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 = -f \frac{M_S}{R_S^3} \mathbf{X}_0, \quad R_S = \|\mathbf{X}_0\|.$$

Fie mai întâi considerată influența atracției Soarelui asupra punctului material

$$\mathbf{F} = -f \frac{M_S m}{R^3} \mathbf{X}, \quad R = \|\mathbf{X}\|.$$

Ecuația de mișcare devine

$$\ddot{\mathbf{x}} = -f \frac{M_S}{R^3} (\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}) + f \frac{M_S}{R_S^3} \mathbf{X}_0.$$

Proiectând pe direcția  $Oo$  și pe direcție ortogonală pe aceasta în plan  $OoP$ , se obține

$$a_{//} = fM_S \left( \frac{1}{R_S^3} - \frac{1}{R^3} \right) R_S - fM_S \frac{r \cos \lambda}{R^3}, \quad a_{\perp} = -fM_S \frac{r \sin \lambda}{R^3},$$

$\lambda$  fiind latitudinea punctului material. Intrucât  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{x}$ , rezultă

$$R^2 = R_S^2 + r^2 + 2rR_S \cos \lambda$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R_S^2} \left( 1 + 2 \frac{r}{R_S} \cos \lambda + \frac{r^2}{R_S^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{R_S^2} \left( 1 - 3 \frac{r}{R_S} \cos \lambda + \dots \right)$$

termenii nescriși fiind de ordinul raportului  $\left( \frac{r}{R_S} \right)^2$ . Atunci componentele accelerației devin

$$a_{//} = \frac{fM_S r}{R_S^3} (2 \cos \lambda + \dots), \quad a_{\perp} = -\frac{fM_S r \sin \lambda}{R_S^3} \left( 1 - 3 \frac{r}{R_S} \cos \lambda + \dots \right).$$

Efectele forței de atracție din partea Soarelui sunt sesizabile la punctele care nu sunt solidare cu Pământul (particulele de fluid). Pentru marile întinderi de ape acest fenomen este cunoscut sub denumirea de *maree*. Influența este maximă la ecuator ( $\lambda = 0, \lambda = \pi$ ), pentru punctele de pe partea dinspre Soare se exercită atracție, pentru cele din partea opusă Soarelui respingere, componenta  $a_{\perp} = 0$ . La pol efectul este nul,  $a_{\parallel} \approx 0, |a_{\perp}| \approx fM_S r R_S^{-3}$ . Fenomenul marilor se produce de două ori în 24 de ore, la trecerea Soarelui la meridianul locului și la meridianul opus.

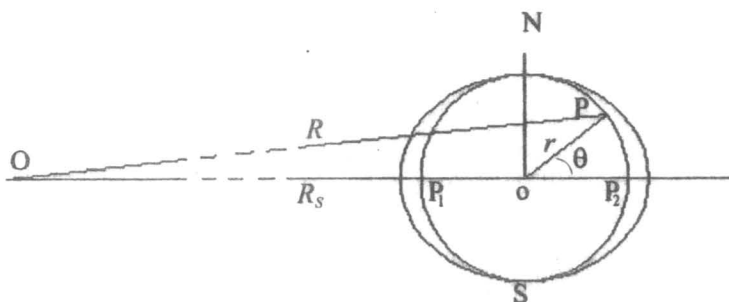


Figura 3.9.1

Efectul forței de atracție din partea Lunii se studiază asemănător, înlocuind masa soarelui  $M_S$  masa Lunii  $M_L$ , distanța  $R_S$  cu distanța  $R_L$ . Intrucât  $R_S \cong 25000r, R_L \cong 60r$  și  $32M_S = 10^9 M_L$ , se obține

$$\frac{\|F_L\|}{\|F_S\|} \approx \frac{2fM_L r}{R_L^3} : \frac{2fM_S r}{R_S^3} = \frac{M_L}{M_S} \cdot \left(\frac{R_S}{R_L}\right)^3 \cong 2.32.$$

Mișcarea unui punct material greu, ținând seama de influența atracției Soarelui și Lunii, va fi descrisă de ecuația

$$m\ddot{x} = F^* + ma_T(P) + m[a_S(P) - a_S(o)] + m[a_L(P) - a_L(o)]$$

unde  $F^*$  desemnează rezultanta forțelor de altă natură decât atracția universală din partea Soarelui și Lunii, ceilalți termeni provenind din atracția din partea Soarelui și respectiv Lunii asupra punctului material și influența asupra Pământului ca forță complementară de transport.

**3.9.2.** Să se studieze influența mișcării de rotație a Pământului în jurul axei sale asupra mișcării unui punct material.

Se va considera drept reper inerțial sistemul *geocentric*, având originea O în centrul Pământului, axa  $OX^3$  orientată după linia polilor, axele  $OX^1$  și  $OX^2$  în plan ecuatorial orientate spre două stele presupuse fixe. Reperul mobil, solidar cu Pământul are originea în punctul o de pe suprafața Pământului, axa  $ox^3$  după direcția razei (Pământul presupus sferic, de rază R),  $ox^1$  tangentă la meridianul prin o, iar  $ox^2$  tangentă la cercul paralel prin o.

Latitudinea punctului o fiind  $\lambda$ , iar longitudinea  $\varphi$ , vectorii bazei reperului mobil sunt definiți prin

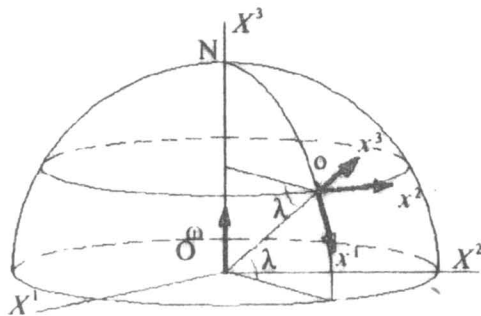


Figura 3.9.2.

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1 = \sin \lambda \cos \varphi \mathbf{I}_1 + \sin \lambda \sin \varphi \mathbf{I}_2 - \cos \lambda \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{t}_2 = -\sin \varphi \mathbf{I}_1 + \cos \varphi \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{t}_3 = \cos \lambda \cos \varphi \mathbf{I}_1 + \cos \lambda \sin \varphi \mathbf{I}_2 + \sin \lambda \mathbf{I}_3 \end{cases}$$

Mișcarea de rotație a reperului mobil este definită de vectorul  $\omega$

$$\omega = \omega \mathbf{I}_3 = \omega(-\cos \lambda \mathbf{t}_1 + \sin \lambda \mathbf{t}_3), \quad \omega = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{86164} = 0.729 \cdot 10^{-4} \text{ rad/sec} = \text{const.}$$

Forța complementară de transport este

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t &= -m[\mathbf{A}_o + \omega \times (\omega \times \mathbf{x})] = -m[\omega \times (\omega \times \mathbf{X}_o) + \omega \times (\omega \times \mathbf{x})] = \\ &= -m\omega^2[-R \cos \lambda (\sin \lambda \mathbf{t}_1 + \cos \lambda \mathbf{t}_2) - ((x^1 \sin \lambda + x^3 \cos \lambda) \sin \lambda \mathbf{t}_1 + x^2 \mathbf{t}_2 + (x^1 \sin \lambda + x^3 \cos \lambda) \mathbf{t}_3)] \end{aligned}$$

iar forța complementară Coriolis

$$\mathbf{F}_c = -2m\omega \times \dot{\mathbf{x}} = -2m\omega[x^2 \sin \lambda \mathbf{t}_1 - (x^1 \sin \lambda + x^3 \cos \lambda) \mathbf{t}_2 - x^2 \cos \lambda \mathbf{t}_3].$$

Mișcarea punctului material va fi descrisă de ecuația

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^* + m\mathbf{g} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c$$

sau

$$\begin{cases} m\ddot{x}^1 = F^{*1} + m\omega^2 \sin \lambda [(R + x^3) \cos \lambda + x^1 \sin \lambda] + 2m\omega \dot{x}^2 \sin \lambda \\ m\ddot{x}^2 = F^{*2} + m\omega^2 x^2 - 2m\omega (\dot{x}^1 \sin \lambda + \dot{x}^3 \cos \lambda) \\ m\ddot{x}^3 = F^{*3} - mg + m\omega^2 \cos \lambda [(R + x^3) \cos \lambda + x^1 \sin \lambda] + 2m\omega \dot{x}^2 \cos \lambda \end{cases}$$

Pentru integrarea sistemului se poate utiliza metoda parametrului mic

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o(t) + \omega \mathbf{x}_1(t) + \omega^2 \mathbf{x}_2(t) + \dots$$

Se obțin sistemele de ecuații

$$\begin{cases} m\ddot{x}_o^1 = F^{*1} \\ m\ddot{x}_o^2 = F^{*2} \\ m\ddot{x}_o^3 = F^{*3} - mg \end{cases};$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1^1 = 2\dot{x}_o^2 \sin \lambda \\ \ddot{x}_1^2 = -2(\dot{x}_o^1 \sin \lambda + \dot{x}_o^3 \cos \lambda) \\ \ddot{x}_1^3 = 2\dot{x}_o^2 \cos \lambda \end{cases};$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_2^1 = \sin \lambda [(R + x_o^3) \cos \lambda + x_o^1 \sin \lambda] + 2\dot{x}_1^2 \sin \lambda \\ \ddot{x}_2^2 = x_o^2 - 2(\dot{x}_1^1 \sin \lambda + \dot{x}_1^3 \cos \lambda) \\ \ddot{x}_2^3 = \cos \lambda [(R + x_o^3) \cos \lambda + x_o^1 \sin \lambda] + 2\dot{x}_1^2 \cos \lambda \end{cases}; \dots$$

care se integrează cu condițiile inițiale

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^o, \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{v}^o \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \mathbf{x}_o(0) = \mathbf{x}^o, \quad \dot{\mathbf{x}}_o(t) = \mathbf{v}^o \\ \mathbf{x}_j(0) = \mathbf{o}, \quad \dot{\mathbf{x}}_j(0) = \mathbf{o} \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

În absența altor forțe ( $\mathbf{F}^* = \mathbf{o}$ ), prima aproximație corespunde neglijării influenței rotației Pământului

$$x_o^1 = x^{1o} + v^{1o}t, \quad x_o^2 = x^{2o} + v^{2o}t, \quad x_o^3 = x^{3o} + v^{3o}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

iar următoarele aproximații sunt

$$x_1^1 = v^{2o}t^2 \sin \lambda, \quad x_1^2 = -(v^{1o} \sin \lambda + v^{3o} \cos \lambda)t^2 + \frac{1}{3}gt^3 \cos \lambda, \quad x_1^3 = v^{2o}t^2 \cos \lambda;$$



$$\left\{ \begin{array}{l} x_2^1 = \sin \lambda \left[ \left( \frac{1}{2}(R + x^{3_0})t + \frac{1}{6}v^{3_0}t^2 - \frac{1}{24}gt^4 \right) \cos \lambda + \left( \frac{1}{2}x^{1_0}t^2 + \frac{1}{6}v^{1_0}t^3 \right) \sin \lambda \right] + \\ \quad + 2 \sin \lambda \left[ -\frac{1}{3}(v^{1_0} \sin \lambda + v^{3_0} \cos \lambda)t^3 + \frac{1}{12}gt^4 \right] \\ \quad \quad \quad x_2^2 = \frac{1}{2}x^{2_0}t^2 - \frac{1}{2}v^{2_0}t^3 \quad ; \dots \\ x_2^3 = \cos \lambda \left[ \left( \frac{1}{2}(R + x^{3_0})t + \frac{1}{6}v^{3_0}t^2 - \frac{1}{24}gt^4 \right) \cos \lambda + \left( \frac{1}{2}x^{1_0}t^2 + \frac{1}{6}v^{1_0}t^3 \right) \sin \lambda \right] + \\ \quad + 2 \cos \lambda \left[ -\frac{1}{3}(v^{1_0} \sin \lambda + v^{3_0} \cos \lambda)t^3 + \frac{1}{12}gt^4 \right] \end{array} \right.$$

Cazuri particulare cu neglijarea termenilor de ordinul lui  $\omega^2$  (se neglijează efectul forței de transport):

- căderea liberă pe verticală

$$x^1 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda, \quad x^3 = -\frac{1}{2}gt^2,$$

efectul mișcării de rotație fiind o deviație spre est ( $x^2 > 0$ );

- lansarea unui proiectil în planul meridianului: deviația de la acest plan este

$$x^2 = -(v^{1_0} \sin \lambda + v^{3_0} \cos \lambda)\omega t^2 + \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda;$$

lansarea după tangenta la meridian spre nord în emisfera nordică va atrage devierea spre est (tendința apelor din emisfera nordică ce curg spre nord de a eroda malul estic).

Efectele forței de transport

$$F_t = -mR\omega^2 \cos \lambda (\sin \lambda i_1 + \cos \lambda i_3)$$

cuprinde, prin componenta  $F_t^1$ , abaterea direcției verticalei (direcția unui fir cu plumb) spre sud în emisfera nordică, cu valoare maximă pentru  $\lambda = \pi/4$  și prin componenta  $F_t^3$  tendința de micșorare a greutateii punctului material (această componentă este maximă la ecuator și minimă - nulă - la poli).

**3.9.3.** Să se studieze echilibrul unui punct material greu suspendat printr-un fir (devierea firului cu plumb).

Reperul inerțial și cel mobil se aleg la fel ca în problema precedentă.

În cazul echilibrului relativ, pentru un punct material greu P atârnat printr-un fir în punctul A, condiția de echilibru este

$$m_g \mathbf{g}' + \mathbf{T} + \mathbf{F}_t = \mathbf{0}$$

$m_g$  fiind masa grea,  $\mathbf{g}'$  - accelerația teoretică, orientată după direcția razei Pământului presupus sferic (v. §3.4),  $\mathbf{T}$  tensiunea în fir, echilibrând greutatea practică  $\mathbf{T} = m_g \mathbf{g}$ , iar forța de transport fiind, conform problemei precedente  $\mathbf{F}_t = -m_i R \omega^2 (\sin \lambda i_1 + \cos \lambda i_3) \cos \lambda$ ,  $m_i$  - masa inertă. Condiția de echilibru revine la

$$m_g (\mathbf{g}' - \mathbf{g}) + m_i r \omega^2 \cos \lambda (\sin \lambda i_1 + \cos \lambda i_3) = \mathbf{0}$$

sau

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}' + kR\omega^2 \cos \lambda (\sin \lambda i_1 + \cos \lambda i_3), \quad k = \frac{m_i}{m_g}$$

de unde se poate evalua accelerația practică

$$g^2 = g'^2 + k^2 + k^2 R^2 \omega^4 \cos^2 \lambda - 2g' k R \omega^2 \cos^2 \lambda$$

Pentru diferite înălțimi  $h$ , înlocuind  $R$  prin  $R + h$ , se obține aproximația

$$g = g' \left\{ 1 - \frac{k(R+h)}{g'} \omega^2 \cos^2 \lambda + \dots \right\}.$$

Devierea verticalei

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{g^2 + g'^2 - k^2 R^2 \omega^4 \cos^2 \lambda}{2gg'} = \\ &= \frac{g'^2 - g'kR\omega^2 \cos^2 \lambda}{gg'} = \frac{g' - kR\omega^2 \cos^2 \lambda}{g} \\ \sin \alpha &= \frac{kR\omega^2 \cos \lambda \sin \lambda}{g} \\ \frac{\omega^2 R}{g} &= \frac{\omega^2 R^3}{fM} \approx \frac{1}{289} \end{aligned}$$

Devierea verticalei depinde de latitudine, este nulă la ecuator și la poli, este maximă pentru latitudinea  $\lambda = \pi/4$  având valoarea  $\alpha \approx 6'$ .

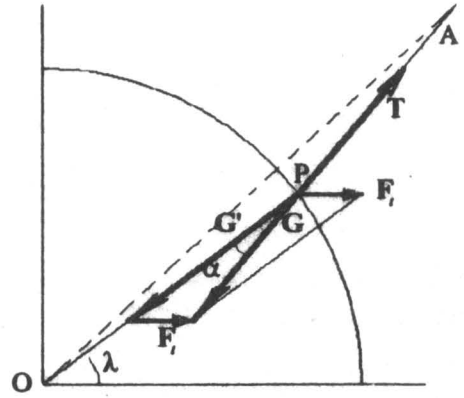


Figura 3.9.3

**3.9.4. Pendul Foucault.** Să se studieze influența mișcării de rotație asupra unui pendul sferic de lungime  $l$ .

Se consideră reperul inerțial  $OX^1 X^2 X^3$  cu originea în centrul Pământului, cu  $OX^3$  orientată după linia polilor de la sus la nord și axele  $OX^1, OX^2$  în planul ecuatorial, orientate spre două stele presupuse fixe (reperul geocentric). Reperul mobil  $ox^1 x^2 x^3$ , solidar cu Pământul, la latitudinea  $\lambda$ , are o mișcare de rotație definită de vectorul constant  $\omega$  orientat după axa polilor.

Ecuția mișcării relative a punctului material de masă  $m$  și vector de poziție  $\mathbf{x}$  este dată de

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} - mN\frac{\mathbf{x}}{l} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}(-\cos \lambda \mathbf{e}_1 + \sin \lambda \mathbf{e}_3), \quad \omega = \dot{\phi} = \frac{2\pi}{86164} = 0.729 \cdot 10^{-4} \text{ rad/sec} = \text{const.}$$

În proiecție pe axele reperului mobil, neglijând termenii de ordinul lui  $\omega^2$ , se obține

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = -N\frac{x^1}{l} + 2\omega\dot{x}^2 \sin \lambda \\ \ddot{x}^2 = -N\frac{x^2}{l} - 2\omega(\dot{x}^1 \sin \lambda + \dot{x}^3 \cos \lambda), & (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = l^2 \\ \ddot{x}^3 = -N\frac{x^3}{l} - g + 2\omega\dot{x}^2 \cos \lambda \end{cases}$$

Înmulțind ecuațiile așa cum indică relațiile următoare

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = -N\frac{x^1}{l} + 2\omega\dot{x}^2 \sin \lambda & |x^1| & |x^2 \\ \ddot{x}^2 = -N\frac{x^2}{l} - 2\omega(\dot{x}^1 \sin \lambda + \dot{x}^3 \cos \lambda) & |x^2| & |-x^1 \\ \ddot{x}^3 = -N\frac{x^3}{l} - g + 2\omega\dot{x}^2 \cos \lambda & |x^2| & |0 \end{cases}$$

și sumând, se obține integrala primă a energiei

$$(\dot{x}^1)^2 + (\dot{x}^2)^2 + (\dot{x}^3)^2 = -2g(x^3 + h),$$

iar ținând seama și că  $x^3 \cong -l, \dot{x}^3 \cong 0, \left(\frac{x^1}{l}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{x^2}{l}\right)^2 \ll 1$ , integrala primă a ariilor

$$\dot{x}^1 x^2 - \dot{x}^2 x^1 = \omega \left[ (x^1)^2 + (x^2)^2 \right] \sin \lambda + C,$$

constantele  $h$ ,  $C$  determinându-se din condiții inițiale. Utilizând coordonatele polare  $r$ ,  $\theta$  în planul  $ox^1 x^2$  integralele prime de mai sus se rescriu

$$\begin{cases} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = 2g(l-h) \\ r^2 \dot{\theta} + r^2 \omega \sin \lambda = C \end{cases}$$

Fie în planul  $ox^1 x^2$  axele  $o\xi$ ,  $o\eta$  rezultând prin rotație uniformă cu viteza unghiulară  $\omega_1 = \omega \sin \lambda$  în sens est-sud-vest-nord și coordonatele polare  $\rho$ ,  $\alpha$  în raport cu aceste axe

$$\begin{cases} x^1 = \xi \cos \omega_1 t - \eta \sin \omega_1 t \\ x^2 = \xi \sin \omega_1 t + \eta \cos \omega_1 t \end{cases}, \quad \begin{cases} r = \rho \\ \theta = \alpha - \omega_1 t \end{cases}$$

Integralele prime se rescriu

$$\begin{cases} \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\alpha}^2 + \rho^2 \omega_1^2 = 2g(l-h) - 2\omega_1 C \\ \rho^2 \dot{\alpha} = C \end{cases}$$

Această formă a integralelor prime coincide cu cele corespunzătoare, scrise în coordonatele polare  $\rho$ ,  $\alpha$ , în cazul oscilatorului linear. Rezultă că, în raport cu axele care se rotesc, punctul material descrie o traiectorie eliptică. În particular, dacă punctul material este lăsat să oscileze fără viteză inițială în plan  $o\xi x^3$ , el pendulează tot timpul în acest plan, acesta rotindu-se cu viteza unghiulară  $\omega_1$ .

	$\lambda$	$l$ (m)	$m$ (kg)	$\xi_o$ (m)	
Foucault Paris, 1851	48°50'	67	28	-	$\frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{86164}{\sin \lambda} \text{ sec} \approx 32 \text{ ore}$
Garthe Cologne	50°50'30"	50	17	3	$\alpha_{ora \text{ obs}} = 11'6280$ $\alpha_{ora \text{ calc}} = 11'6475$
București	~45°				$\frac{2\pi}{\omega_1} \approx 34 \text{ ore}$

**3.9.5.** Să se studieze mișcarea fără frecare a unui punct material de masă  $m$ , de-a lungul unei drepte ( $d$ ) care se rotește uniform într-un plan fix, în jurul unui punct fix  $O$  al dreptei.

Se consideră reperul fix determinat de axele  $OX^1$ ,  $OX^2$  din plan și normala  $OX^3$  la acesta. Reperul mobil este determinat de dreapta ( $d$ ) ca axă  $Ox^1$ , perpendiculara  $Ox^2$  la  $Ox^1$  în planul fix și normala la plan. Mișcarea relativă a punctului material este descrisă de ecuația

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{N} + \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_c$$

$\mathbf{N}$  fiind reacțiunea normală la dreaptă (frecerea este neglijată), iar forțele complementare sunt

$$\mathbf{F}_t = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad \mathbf{F}_c = -2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_o \mathbf{t}_3$$

Această ecuație vectorială are proiecții doar în planul fix

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \omega_o^2 x^1 \\ 0 = N - 2m\omega_o \dot{x}^1 \end{cases}$$

Pentru condițiile inițiale  $t = 0$ :  $\mathbf{x} = x_o \mathbf{t}_1$ ,  $\dot{\mathbf{x}} = v_o \mathbf{t}_1$ , se obține

$$\begin{aligned} x_o^1 &= x_o \operatorname{ch} \omega_o t + \frac{v_o}{\omega_o} \operatorname{sh} \omega_o t \\ N &= 2m\omega_o^2 \left( x_o \operatorname{sh} \omega_o t + \frac{v_o}{\omega_o} \operatorname{ch} \omega_o t \right) \end{aligned}$$

### 3.9.6. Aceeași problemă pentru un punct material greu în plan vertical.

Cele două repere se aleg la fel ca în problema precedentă.

Ecuția care descrie mișcare a relativă

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_o \mathbf{t}_3$$

dă în proiecție pe axele din plan ale reperului mobil

$$\begin{cases} \ddot{x}^1 = \omega_o^2 x^1 - g \sin \omega_o t \\ 0 = N - 2m\omega_o \dot{x}^1 - mg \cos \omega_o t \end{cases}$$

Pentru aceleași condiții inițiale ca la problema precedentă, se obține

$$\begin{aligned} x^1 &= x_o \operatorname{ch} \omega_o t + \left( \frac{v_o}{\omega_o} - \frac{g}{2\omega_o^2} \right) \operatorname{sh} \omega_o t + \frac{g}{2\omega_o^2} \sin \omega_o t \\ N &= 2m\omega_o^2 \left[ x_o \operatorname{sh} \omega_o t + \left( \frac{v_o}{\omega_o} - \frac{g}{2\omega_o^2} \right) \operatorname{ch} \omega_o t + \frac{g}{\omega_o^2} \cos \omega_o t \right] \end{aligned}$$

### 3.9.7. Dreapta ( $d$ ) trece printr-un punct fix $O$ și formează cu verticala un unghi constant $\theta_o$ . Această dreaptă se rotește uniform în jurul verticalei prin $O$ . Să se studieze mișcarea unui punct material greu situat pe dreapta ( $d$ ).

Se alege reperul fix astfel încât axa  $Ox^3$  să fie verticala ascendentă, iar reperul mobil astfel încât axa  $Ox^3$  să coincidă cu dreapta ( $d$ ), iar axa  $Ox^1$  este orizontală.

Mișcarea relativă a punctului material greu

$$m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_o (\sin \theta_o \mathbf{t}_2 + \cos \theta_o \mathbf{t}_3)$$

conduce prin proiecție pe axele reperului mobil la

$$\begin{cases} 0 = -2m\omega_o \dot{x}^3 \sin^2 \theta_o + N^1 \\ 0 = -m\omega_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o x^3 - mg \sin \theta_o + N^2 \\ \ddot{x}^3 = \omega_o^2 x^3 - g \cos \theta_o \end{cases}$$

Integrând cu condițiile inițiale  $t = 0 : \mathbf{x} = z_o \mathbf{t}_3, \dot{\mathbf{x}} = v_o \mathbf{t}_3$ , rezultă

$$x^3 = \left( z_o - \frac{g \cos \theta_o}{\omega_o^2 \sin^2 \theta_o} \right) \operatorname{ch}(\omega_o t \sin \theta_o) + \frac{v_o}{\omega_o \sin \theta_o} \operatorname{sh}(\omega_o t \sin \theta_o) + \frac{g \cos \theta_o}{\omega_o^2 \sin^2 \theta_o}$$

$$N^1 = 2m\omega_o^2 \sin^3 \theta_o \left\{ \left( z_o - \frac{g \cos \theta_o}{\omega_o^2 \sin^2 \theta_o} \right) \operatorname{sh}(\omega_o t \sin \theta_o) + \frac{v_o}{\omega_o \sin \theta_o} \operatorname{ch}(\omega_o t \sin \theta_o) \right\}$$

$$N^2 = m\omega_o^2 \sin \theta_o \cos \theta_o \left\{ \left( z_o - \frac{g \cos \theta_o}{\omega_o^2 \sin^2 \theta_o} \right) \operatorname{ch}(\omega_o t \sin \theta_o) + \frac{v_o}{\omega_o \sin \theta_o} \operatorname{sh}(\omega_o t \sin \theta_o) \right\} + \frac{g}{\sin \theta_o}$$

### 3.9.8. Să se determine pozițiile de echilibru relativ ale unui punct material greu de masă $m$ , care alunecă fără frecare pe o circumferință de rază $l$ ce se rotește uniform în jurul diametrului său vertical fix cu viteză unghiulară $\omega_o$ .

Reperul fix este ales astfel încât axa  $Ox^3$  este orientată descendent după diametrul vertical,  $O$  fiind centrul circumferinței. Reperul mobil are aceeași origine cu cel fix, axa  $ox^3$  coincizând cu axa  $Ox^3$ , iar axa  $Ox^1$  orizontală.

Ecuția de echilibru relativ este

$$\mathbf{0} = m\mathbf{g} + \mathbf{N} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_o \mathbf{t}_3$$

Intrucât

$$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) = -x^1 \omega_o^2 \mathbf{t}_1$$

toți vectorii se găsesc în planul circumferinței. Se obține

$$\begin{cases} 0 = -N \frac{x^1}{l} + m x^1 \omega_o^2 \\ 0 = mg - N \frac{x^3}{l} \end{cases}, \quad (x^1)^2 + (x^3)^2 = l^2$$

Fie

$$x^1 = l \sin \theta, \quad x^3 = l \cos \theta.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \sin \theta \left( \cos \theta - \frac{g}{l \omega_o^2} \right) &= 0 \\ N &= m l \omega_o^2 \left( \sin^2 \theta + \frac{g}{l \omega_o^2} \cos \theta \right). \end{aligned}$$

Așadar, oricare ar fi  $\omega_o$ , totdeauna  $\theta = 0$  este poziție de echilibru relativ și

$$N \Big|_{\theta=0} = mg.$$

Dacă  $\omega_o < \sqrt{\frac{l}{g}}$ ,  $\theta = 0$  este singura poziție de echilibru relativ. Dacă însă  $\omega_o > \sqrt{\frac{l}{g}}$ , atunci există și alte două poziții de echilibru relativ, simetrice față de diametrul vertical, date de

$$\cos \theta_* = \frac{g}{l \omega_o^2},$$

pentru aceste poziții

$$N \Big|_{\theta=\theta_*} = m l \omega_o^2.$$

**3.9.9.** Intr-un vas cilindric circular se află un lichid în repaus. Imprimându-se vasului o micare de rotație uniformă cu viteza unghiulară  $\omega_o$ , în jurul axei sale verticale, să se determine forma suprafeței libere a lichidului.

În cazul mișcării considerate, pe suprafața liberă stabilizată a lichidului viscos altfel nu s-ar antrena prin frecare straturile de fluid) o particulă fluidă se află în echilibru relativ sub acțiunea greutății proprii, reacțiunii normale la suprafață și a forței complementare de transport. Reperul fix are originea în punctul O pe axa vasului și axa  $Ox^3$  verticala ascendentă. Reperul mobil are originea tot în O, axa  $Ox^3$  tot verticala ascendentă, axa  $Ox^1$  în orizontala din planul vertical ce conține particula considerată

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_o \mathbf{t}_3, \quad \mathbf{x} = x^1 \mathbf{t}_1 + x^3 \mathbf{t}_3$$

Ecuatia de echilibru relativ

$$\mathbf{0} = mg + \mathbf{N} - m \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})$$

proiectată pe tangenta meridiană la suprafață în punctul considerat conduce la

$$-mg \sin \alpha + m x^1 \omega_o^2 \cos \alpha = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dx^3}{dx^1}$$

de unde

$$\frac{dx^3}{dx^1} = \frac{\omega_o^2}{g} x^1.$$

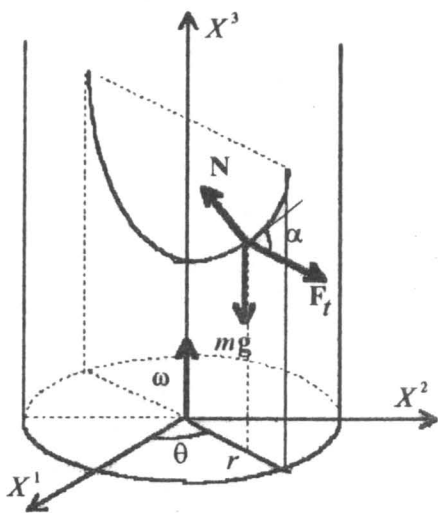


Figura 3.9.9

Prin integrare rezultă curba de intersecție a suprafeței libere cu planul meridian

$$x^3 = \frac{\omega_o^2}{2g}(x^1)^2 + C,$$

prin urmare suprafața liberă este un paraboloid de rotație.

Constanta de integrare  $C$  se determină egalând volumul lichidului în repaus (suprafața liberă plană, înălțimea lichidului  $h$ ) cu cea cuprinsă între fundul vasului și paraboloidul de rotație obținut

$$\begin{aligned} \pi R^2 h &= \iiint_D dx^1 dx^2 dx^3 = \int_0^R \left( \int_0^{z(r)} \left( \int_0^{2\pi} r d\theta \right) dz \right) dr = \\ &= 2\pi \int_0^R r z(r) dr = 2\pi \int_0^R r \left( \frac{\omega_o^2}{2g} r^2 + C \right) dr = \\ &= 2\pi \left( \frac{\omega_o^2}{2g} \frac{R^3}{4} + C \frac{R^2}{2} \right) \Rightarrow C = h - \frac{\omega_o^2 R^2}{4g} \end{aligned}$$

Deci ecuația paraboloidului de rotație reprezentând suprafața liberă a lichidului este

$$X^3 = \frac{\omega_o^2}{2g} \left[ (X^1)^2 + (X^2)^2 - \frac{R^2}{2} \right] + h.$$

Forma suprafeței libere a lichidului (paraboloid de rotație, cu coeficientul  $\frac{\omega_o^2}{2g}$ ) nu depinde de forma vasului; forma vasului influențează numai valoarea constantei  $C$  (determinarea acesteia a fost exemplificată pentru cazul vasului cilindric circular).

## DINAMICA SISTEMELOR DISCRETE DE PUNCTE MATERIALE

Fie un reper inerțial  $\{O, \{t_1, t_2, t_3\}\}$  și sistemul de puncte materiale  $\{P_j(m_j, \mathbf{x}_j)\}_{j=\overline{1, N}}$ , asupra căruia acționează forțele exterioare (efective și de legătură)  $\{\mathbf{F}_j\}_{j=\overline{1, N}}$  și forțele interioare (efective și de legătură)  $\{\mathbf{F}_{jk}\}_{j,k=\overline{1, N}}$ ,  $\mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{0}, j, k = \overline{1, N}$ . Mișcarea sistemului este descrisă de ecuațiile

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{F}_j + \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{jk} \quad j = \overline{1, N}$$

*Teorema de bilanț al impulsului total.* Mișcarea sistemului de puncte materiale se desfășoară astfel încât la fiecare moment derivata impulsului total este egală cu rezultanta forțelor exterioare

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{H} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

*Teorema de mișcare a centrului de masă al sistemului.* Centrul de masă  $C$  al sistemului se mișcă ca și cum în el ar fi concentrată masa totală  $M$  a sistemului și asupra lui ar acționa rezultanta forțelor exterioare

$$M \ddot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{F}, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j, \quad M \mathbf{x}_C = \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{F} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j.$$

*Teorema de bilanț al momentului cinetic total în raport cu punctul  $O$ .* Mișcarea sistemului se desfășoară astfel încât la fiecare moment derivata momentului cinetic total în raport cu punctul  $O$  este egală cu momentul resultant în raport cu punctul  $O$  al forțelor exterioare

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O, \quad \mathbf{K}_O = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \times m_j \dot{\mathbf{x}}_j, \quad \mathbf{M}_O = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}_j \times \mathbf{F}_j.$$

*Teorema de bilanț al momentului cinetic total în raport cu centrul de masă.* Mișcarea sistemului are loc astfel încât la fiecare moment derivata momentului cinetic în raport cu centrul de masă este egal cu momentul resultant în raport cu centrul de masă al forțelor exterioare

$$\frac{d\mathbf{K}'_C}{dt} = \mathbf{M}'_C, \quad \mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_C \quad j = \overline{1, N}, \quad \mathbf{K}'_C = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}'_j \times m_j \dot{\mathbf{x}}'_j, \quad \mathbf{M}'_C = \sum_{j=1}^N \mathbf{x}'_j \times \mathbf{F}_j$$

*Teorema de bilanț al energiei cinetice totale.* Mișcarea sistemului se desfășoară astfel încât la fiecare moment derivata energiei cinetice totale este egală cu suma dintre puterea mecanică a forțelor exterioare și puterea mecanică a forțelor interioare

$$\frac{dT}{dt} = P_{ext} + P_{int}, \quad T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N m_j \dot{\mathbf{x}}_j^2, \quad P_{ext} = \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \cdot \dot{\mathbf{x}}_j, \quad P_{int} = \sum_{j,k=1}^N \mathbf{F}_{jk} \cdot \dot{\mathbf{x}}_j$$

\*\*\*

**4.1.** Să se arate că un sistem izolat format din două puncte materiale, având viteze inițiale nule (într-un reper inerțial) se mișcă pe dreapta care le unea la momentul inițial.

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, ecuațiile de mișcare ale sistemului, în raport cu reperul inerțial considerat, sunt

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \end{cases}$$

El admite integralele prime

$$\begin{cases} m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0} & (\text{conservarea impulsului total}) \\ \mathbf{x}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{x}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0} & (\text{conservarea mom.cinetic total}) \end{cases}$$

Inmulțind prima integrală primă cu  $\mathbf{x}_1$  respectiv cu  $\mathbf{x}_2$  și combinând cu a doua integrală primă, se obțin relațiile

$$\begin{cases} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{0} \\ (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \times \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{0} \end{cases}$$

care arată că vitezele sunt colineare cu vectorul  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ , același lucru punctându-se spune despre diferența lor, adică

$$\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = \alpha(t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$$

Rezultă

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = (\mathbf{x}_1^o - \mathbf{x}_2^o) \exp\left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right).$$

De aici și din integrala primă de conservare a impulsului rezultă

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\mathbf{x}_1 = m_1 \mathbf{x}_1^o + m_2 \mathbf{x}_2^o + m_1 (\mathbf{x}_1^o - \mathbf{x}_2^o) \exp\left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right) \\ (m_1 + m_2)\mathbf{x}_2 = m_1 \mathbf{x}_1^o + m_2 \mathbf{x}_2^o - m_2 (\mathbf{x}_1^o - \mathbf{x}_2^o) \exp\left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau\right) \end{cases}$$

deci mișcarea punctelor este rectilinie pe dreapta determinată de pozițiile inițiale.

**4.2.** Să se arate că oricare ar fi datele inițiale, există un reper inerțial, astfel încât un sistem izolat format din două puncte materiale să se deplaseze într-un plan fix.

Fie un reper inerțial cu originea în  $O$ . Ecuațiile de mișcare în raport cu acest reper sunt, ca și la problema precedentă

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = -f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \end{cases}$$

Centrul de masă al sistemului va avea o micare rectilinie uniformă

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\mathbf{x}}_C) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_C = \mathbf{x}_C^o + \dot{\mathbf{x}}_C^o t$$

și poate fi considerat originea unui reper inerțial cu axe paralele cu cele ale reperului inițial. In raport cu acest reper, condiția de centru de masă și integrala primă de conservare a momentului cinetic total se scriu

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{x}'_1 + m_2 \mathbf{x}'_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}'_1 \times m_1 \dot{\mathbf{x}}'_1 + \mathbf{x}'_2 \times m_2 \dot{\mathbf{x}}'_2 = \mathbf{K}_C^o \end{cases}$$

Combinând aceste integrale prime rezultă

$$(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) \times (\dot{\mathbf{x}}'_1 - \dot{\mathbf{x}}'_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \mathbf{K}_C^o$$

Relația de mai sus dă



$$\mathbf{K}_C^o \cdot (\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) = 0.$$

Cum din relația precedentă rezultă paralelismul vectorilor  $\mathbf{x}'_1 // \mathbf{x}'_2$ ,

$$\mathbf{K}_C^o \cdot \mathbf{x}'_1 = 0, \quad \mathbf{K}_C^o \cdot \mathbf{x}'_2 = 0$$

ceea ce arată că mișcarea punctelor materiale este plană, efectuându-se în plan trecând prin centrul de masă al sistemului și având normala definită de vectorul moment cinetic la momentul inițial.

**4.3.** Să se arate că un sistem format din trei puncte materiale, având viteze inițiale nule (într-un reper inerțial) se mișcă în planul care le conținea la momentul inițial.

Fie reperul inerțial în raport cu care sunt date condițiile inițiale. În raport cu acest reper ecuațiile de mișcare ale sistemului sunt

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{23} \\ m_3 \ddot{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32} \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{F}_{jk} \times (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{F}_{jk} = \mathbf{F}_{jk}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2, \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_3, \dot{\mathbf{x}}_3 - \dot{\mathbf{x}}_1) \quad (j, k = 1, 2, 3)$$

Rezultă ca și la problemele precedente, că centrul de masă al sistemului poate fi originea unui reper inerțial, axele acestuia fiind paralele cu cele ale reperului inerțial inițial. În raport cu acest reper se obțin integralele prime (cu aceeași semnificație)

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{x}'_1 + m_2 \mathbf{x}'_2 + m_3 \mathbf{x}'_3 = \mathbf{0} \\ m_1 \dot{\mathbf{x}}'_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}'_2 + m_3 \dot{\mathbf{x}}'_3 = \mathbf{0} \\ m_1 \mathbf{x}'_1 \times \dot{\mathbf{x}}'_1 + m_2 \mathbf{x}'_2 \times \dot{\mathbf{x}}'_2 + m_3 \mathbf{x}'_3 \times \dot{\mathbf{x}}'_3 = \mathbf{0} \end{cases}$$

Eliminând  $\mathbf{x}'_3, \dot{\mathbf{x}}'_3$  între aceste integrale prime, se obține

$$m_1(M - m_2)\mathbf{x}'_1 \times \dot{\mathbf{x}}'_1 + m_2(M - m_1)\mathbf{x}'_2 \times \dot{\mathbf{x}}'_2 + m_1 m_2 (\mathbf{x}'_1 \times \dot{\mathbf{x}}'_2 + \mathbf{x}'_2 \times \dot{\mathbf{x}}'_1) = \mathbf{0}$$

Înmulțind scalar această relație respectiv cu  $\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2$ , rezultă sistemul algebric

$$\begin{cases} m_1(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_1) + (M - m_1)(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_2) = 0 \\ (M - m_2)(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_1) + m_2(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_2) = 0 \end{cases}$$

având determinant nenul

$$\Delta = m_1 m_2 - (M - m_1)(M - m_2) = M m_3 \neq 0$$

deci având soluție unică nulă

$$(\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_1) = 0, \quad (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_2) = 0$$

Punctul  $P_3$  se află totdeauna în planul determinat de  $C, P_1, P_2$ . Normala la acest plan este definită de

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x}'_1 \times \mathbf{x}'_2, \quad \|\mathbf{n}\| = 1$$

Se obține

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \times (\dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^3}$$

$$\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}}{\|\mathbf{u}\|^2}, \quad \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_2)\dot{\mathbf{x}}'_1 \times \mathbf{x}'_2 + (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \dot{\mathbf{x}}'_1)\mathbf{x}'_1 \times \dot{\mathbf{x}}'_2 = \mathbf{0}$$

Prin urmare

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{n} \times \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{n} \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$$

adică normala la planul  $(C, P_1, P_2)$  nu variază în timp și deci sistemul se mișcă într-un plan trecând prin punctul fix  $C$  și având normala  $\mathbf{n} = \mathbf{x}_1^{\prime 0} \times \mathbf{x}_2^{\prime 0}$ .

**4.4. Problema celor două corpuri.** Să se studieze mișcarea unui sistem izolat format din două puncte materiale. În particular se va considera că masa unuia dintre puncte este mult mai mare decât masa celuilalt.

Fie sistemul izolat de puncte materiale  $P_1 \{m_1, \mathbf{x}_1\}$  și  $P_2 \{m_2, \mathbf{x}_2\}$  (vectorii de poziție sunt considerați în raport cu un referențial inerțial). Mișcarea lor este descrisă prin ecuațiile

$$(i) \quad \begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) \\ \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{21} = F \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} \end{cases}$$

Teorema de mișcare a centrului de masă al sistemului arată că acesta are o mișcare rectilinie și uniformă

$$(ii) \quad \begin{aligned} m &= m_1 + m_2, \quad m \mathbf{x}_C = m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 \\ m \dot{\mathbf{x}}_C^0 &= m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^0 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^0, \quad m \ddot{\mathbf{x}}_C = m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2 \\ \frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{x}}_C) &= \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}_C = \mathbf{x}_C^0 + \dot{\mathbf{x}}_C^0 t \end{aligned}$$

Înmulțind prima ecuație cu  $m_2$  și a doua cu  $m_1$  și scăzând, se obține

$$(iii) \quad \begin{aligned} \mu \ddot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \\ \mu &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{21}. \end{aligned}$$

Studiul mișcării se reduce la integrarea ecuației diferențiale precedente, similară ecuației de mișcare a punctului material în câmp central.

În final va rezulta

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_C^0 + \dot{\mathbf{x}}_C^0 t + \frac{m_2}{m} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2^0 - \mathbf{x}_1^0, \dot{\mathbf{x}}_2^0 - \dot{\mathbf{x}}_1^0) \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_C^0 + \dot{\mathbf{x}}_C^0 t - \frac{m_1}{m} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_2^0 - \mathbf{x}_1^0, \dot{\mathbf{x}}_2^0 - \dot{\mathbf{x}}_1^0) \end{cases}$$

Dacă  $m_1 \gg m_2$  sau  $\frac{m_2}{m_1} \ll 1$ , atunci

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cong m_2 \\ \mathbf{x}_C &= \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \mathbf{x}_1 + \frac{m_2}{m_1} \mathbf{x}_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \cong \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

adică ecuația obținută ar aproxima mișcarea în jurul centrului de masă al sistemului. Oricum în prima ecuație de mișcare (i), pentru punctul material  $P_1$ , masa fiind foarte mare, mărimea  $F_{12}/m_1$  este foarte mică și primul punct material poate fi considerat practic în mișcare rectilinie uniformă, ecuația de mișcare (iii) poate fi deci considerată în raport cu un referențial inerțial.

Exemplu: raportul maselor în cazul Pământ/Soare  $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{332952}$ .

În acest mod poate fi considerată mișcarea punctului material în câmp central, în particular sub acțiunea forței de atracție universală (§3.4). Mișcarea este plană conform problemei 4.2.

Aplicând teorema de bilanț al momentului cinetic total, rezultă integrala primă

$$\frac{d}{dt}(m_1 \mathbf{x}_1 \times \dot{\mathbf{x}}_1 + m_1 \mathbf{x}_2 \times \dot{\mathbf{x}}_2) = \mathbf{0} \Rightarrow m_1 \mathbf{x}_1 \times \dot{\mathbf{x}}_1 + m_1 \mathbf{x}_2 \times \dot{\mathbf{x}}_2 = m_1 \mathbf{x}_1^o \times \dot{\mathbf{x}}_1^o + m_1 \mathbf{x}_2^o \times \dot{\mathbf{x}}_2^o$$

Această integrală primă are aceeași expresie dacă este scrisă în raport cu un reper cu originea în centrul de masă al sistemului și axe paralele cu cele ale reperului inerțial.

Dacă forțele interioare nu depind decât de distanța dintre punctele sistemului material

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = F(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}$$

atunci puterea mecanică se poate exprima ca derivată a unui potențial

$$\begin{aligned} P_{int} &= \mathbf{F}_{12} \cdot \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{F}_{21} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2 = -F(\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|) \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1) = -F(r) \frac{dr}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \left( -\int F(r) dr \right) \quad r = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \end{aligned}$$

și din teorema de bilanț al energiei, rezultă integrala primă de conservare a energiei totale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^2) \right] &= \frac{dU}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^2) - \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^{o2} + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^{o2}) &= -\int_{r_0}^r F(r) dr. \end{aligned}$$

#### 4.5. Problema celor $N$ corpuri. Să se studieze mișcarea unui sistem izolat format din $N$ puncte materiale.

Mișcarea sistemului material este descrisă de sistemul de ecuații diferențiale

$$m_j \ddot{\mathbf{x}}_j = \sum_{k=1}^N \mathbf{F}_{jk} \quad j = \overline{1, N}$$

$$\mathbf{F}_{jk} = \mathbf{F}_{jk}(\{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\}_{a,b=\overline{1,N}}, \{\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b\}_{a,b=\overline{1,N}}), \quad \mathbf{F}_{jk} + \mathbf{F}_{kj} = \mathbf{0} \quad j, k = \overline{1, N}.$$

Fiind vorba de un sistem material izolat (închis) teoremele de bilanț al impulsului total și al momentului cinetic total conduc la următoarele integrale prime

- conservarea impulsului total

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k^o;$$

- mișcarea rectilinie și uniformă a centrului de masă al sistemului (obținută din precedenta)

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k \right) = \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k^o \Rightarrow \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k = \left( \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k^o \right) + \left( \sum_{k=1}^N m_k \dot{\mathbf{x}}_k^o \right) t;$$

- conservarea momentului cinetic total

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k \times \dot{\mathbf{x}}_k \right) = \mathbf{0} \Rightarrow \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k \times \dot{\mathbf{x}}_k = \sum_{k=1}^N m_k \mathbf{x}_k^o \times \dot{\mathbf{x}}_k^o.$$

Aceste integrale prime vectoriale (echivalente cu 9 integrale prime scalare) nu sunt suficiente pentru rezolvarea problemei. Chiar dacă se ține seama că sistemul este autonom (se consideră sistemul de integrale prime echivalent cu 10 integrale prime scalare) și chiar în

cazul în care se poate adăuga la acestea integrala primă de conservare a energiei totale (v. problema precedentă) (cum se întâmplă de exemplu în cazul atracției universale între punctele sistemului material), integralele prime scalare nu pot înlocui, în condiții inițiale oarecare, sistemul de  $3N$  ecuații diferențiale de ordinul al doilea pentru a reduce problema la rezolvarea unor ecuații algebrice.

**4.6.** Două puncte materiale grele de mase egale se mișcă într-un plan orizontal astfel încât distanța dintre ele rămâne constantă. Să se studieze mișcarea sistemului.

Fie reperul inerțial cu originea la jumătatea distanței între punctele  $P_1$  și  $P_2$  la momentul inițial, axa  $Ox^1$  pe direcția acestor puncte,  $Ox^2$  ortogonală pe prima în planul mișcării și  $Ox^3$  normală la plan. Ecuațiile de mișcare vor fi

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{x}}_1 &= m\mathbf{g} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{12}, & \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{t}_3 &= 0 \\ m\ddot{\mathbf{x}}_2 &= m\mathbf{g} + \mathbf{N}_2 - \mathbf{F}_{12}, & \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{t}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Reacțiunile normale își fac echilibrul cu greutatea (condiția de mișcare în plan orizontal). Centrul de masă al sistemului are o mișcare rectilinie uniformă

$$m\ddot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_C \cdot \mathbf{t}_3 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_C = \mathbf{v}_C^o t, \quad \mathbf{v}_C^o \cdot \mathbf{t}_3 = 0 \quad (\mathbf{x}_C^o = \mathbf{0})$$

Dacă distanța constantă între puncte este  $2l$ , atunci vectorii de poziție ai celor două puncte se pot reprezenta sub forma

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_C + l(\cos\theta\mathbf{t}_1 + \sin\theta\mathbf{t}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_C - l(\cos\theta\mathbf{t}_1 + \sin\theta\mathbf{t}_2).$$

Teorema de bilanț al momentului cinetic total dă

$$\frac{d}{dt} [2l(\cos\theta\mathbf{t}_1 + \sin\theta\mathbf{t}_2) \times l\dot{\theta}(-\sin\theta\mathbf{t}_1 + \cos\theta\mathbf{t}_2)] = \mathbf{0} \quad \text{sau} \quad l^2\ddot{\theta}\mathbf{t}_3 = \mathbf{0}$$

de unde rezultă rotația direcției  $P_1P_2$  în jurul punctului  $C$

$$\theta = \dot{\theta}^o t.$$

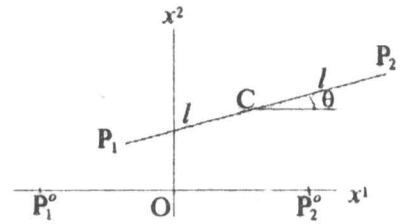


Figura 4.6

**4.7.** Două puncte materiale de aceeași masă  $m$  alunecă fără frecare pe două axe ortogonale, în același plan. Aceste puncte se atrag invers proporțional cu pătratul distanței dintre ele. Să se găsească mișcarea lor și curba descrisă de centrul de masă al sistemului format din cele două puncte.

Se consideră reperul inerțial determinat de cele două axe pe care se mișcă punctele materiale ale sistemului și axa ortogonală pe ele prin punctul lor de intersecție. În raport cu acest reper, punctele materiale au vectorii de poziție

$$\mathbf{x}_1 = x_1\mathbf{t}_1, \quad \mathbf{x}_2 = y_1\mathbf{t}_2$$

Forțele interioare vor avea expresia

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = \frac{km}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \quad k > 0$$

iar forțele de legătură

$$\mathbf{N}_1 = N_1\mathbf{t}_2, \quad \mathbf{N}_2 = N_2\mathbf{t}_1$$

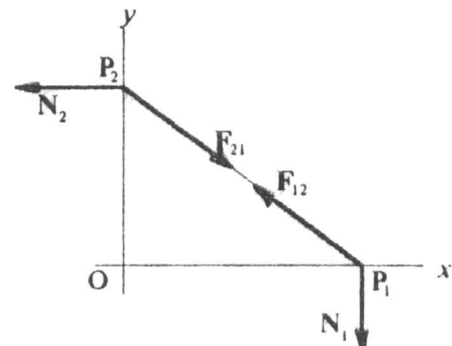


Figura 4.7

### Ecuatiile vectoriale de mișcare

$$m\ddot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{F}_{12}, \quad m\ddot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_{21}$$

dau următoarele ecuații diferențiale (scalare) de mișcare

$$\ddot{x} = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

și relațiile care determină forțele de legătură

$$N_1 = -\frac{kmy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad N_2 = -\frac{kmx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Ecuatiile diferențiale de mișcare au aceeași formă cu ecuațiile care caracterizau mișcarea punctului material în câmp central. Notând

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

mișcarea va fi dedusă din ecuațiile diferențiale în  $r, \theta$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{k}{C^2} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)}$$

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \Rightarrow t = \int_{\theta_0}^{\theta} \left[ \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_1)} \right]^2 d\theta$$

unde

$$r_o^2 = x_o^2 + y_o^2, \quad \cos \theta_o = \frac{x_o}{r_o}, \quad \sin \theta_o = \frac{y_o}{r_o}, \quad \dot{r}_o = \frac{x_o \dot{x}_o + y_o \dot{y}_o}{r_o}, \quad C = r_o^2 \dot{\theta}_o = x_o \dot{y}_o - y_o \dot{x}_o$$

$$p = \frac{C^2}{k}, \quad A = \left( \frac{1}{r_o} - \frac{k}{C^2} \right) \cos \theta_o + \frac{\dot{r}_o}{C} \sin \theta_o, \quad B = \left( \frac{1}{r_o} - \frac{k}{C^2} \right) \sin \theta_o - \frac{\dot{r}_o}{C} \cos \theta_o$$

$$e = p \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \theta_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \theta_1 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Centrul de masă al sistemului material  $\mathbf{x}_C = \frac{1}{2}(x_{11} + y_{12})$  va descrie o conică, cu focar în O, a cărei natură este determinată prin condițiile inițiale.

**4.8.** Într-un plan orizontal, două puncte materiale  $P_1$  și  $P_2$ , de mase  $m_1$  și  $m_2$ , sunt obligate să se miște pe două circumferințe concentrice de raze  $r_1$  și  $r_2$  și se atrag cu forțe proporționale cu distanța dintre ele.

- Să se scrie teorema de bilanț al momentului cinetic total și să se determine o integrală primă.
- Să se scrie teorema de bilanț a energiei cinetice totale și să se determine o integrală primă.
- Să se determine reacțiunile în punctele  $P_1$  și  $P_2$ .
- Să se determine legea de mișcare dacă la momentul inițial punctele de află pe aceeași rază și este satisfăcută și relația

$$m_1 \mathbf{x}_1^o \times \dot{\mathbf{x}}_1^o + m_2 \mathbf{x}_2^o \times \dot{\mathbf{x}}_2^o = \mathbf{0}$$

Se consideră reperul inerțial cu originea în centrul cercului și axele  $Ox^1$  și  $Ox^2$  în planul circumferințelor. Fie  $\varphi_1$  și  $\varphi_2$  unghiurile polare ce caracterizează poziția celor două puncte

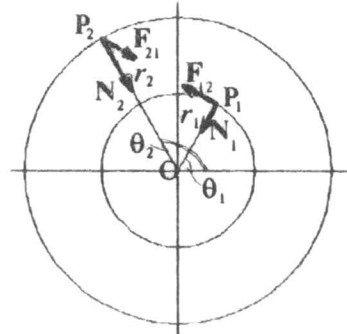


Figura 4.8

$$\mathbf{x}_1 = r_1(\cos \varphi_1 \mathbf{t}_1 + \sin \varphi_1 \mathbf{t}_2), \quad \mathbf{x}_2 = r_2(\cos \varphi_2 \mathbf{t}_1 + \sin \varphi_2 \mathbf{t}_2).$$

Forțele de legătură, respectiv forțele interioare sunt

$$\mathbf{N}_1 = N_1 \frac{\mathbf{x}_1}{r_1}, \quad \mathbf{N}_2 = N_2 \frac{\mathbf{x}_2}{r_2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = k^2 m_1 m_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$$

a) Momentul cinetic total al sistemului, în raport cu punctul O este

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{x}_1 \times m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{x}_2 \times m_2 \dot{\mathbf{x}}_2 = (m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2) \mathbf{t}_3;$$

momentul rezultat al forțelor de legătură (singurele forțe exterioare) este nul

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{x}_1 \times N_1 \frac{\mathbf{x}_1}{r_1} + \mathbf{x}_2 \times N_2 \frac{\mathbf{x}_2}{r_2} = \mathbf{0}.$$

Deci din teorema de bilanț al momentului cinetic total

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O$$

rezultă integrala primă

$$m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 = \text{const.}$$

b) Energia cinetică totală a sistemului este

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2^2) = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2)$$

iar puterea mecanică

$$P_{ext} = N_1 \frac{\mathbf{x}_1}{r_1} \cdot \dot{\mathbf{x}}_1 + N_2 \frac{\mathbf{x}_2}{r_2} \cdot \dot{\mathbf{x}}_2 = 0,$$

$$P_{int} = \mathbf{F}_{12} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2) = \frac{d}{dt} \left[ -\frac{k^2}{2} m_1 m_2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 \right] =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[ -\frac{k^2}{2} m_1 m_2 (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \right]$$

Prin urmare, teorema de bilanț al energiei cinetice totale

$$\frac{dT}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

conduce la integrala primă

$$m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 = -k^2 m_1 m_2 (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + \text{const.}$$

c) Forțele de legătură rezultă din principiul de bilanț al impulsului total

$$\frac{d}{dt} (m_1 \dot{\mathbf{x}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{x}}_2) = N_1 \frac{\mathbf{x}_1}{r_1} + N_2 \frac{\mathbf{x}_2}{r_2}$$

care în proiecție pe axe dă

$$\frac{d}{dt} [-m_1 r_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - m_2 r_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2] = -N_1 \cos \varphi_1 - N_2 \cos \varphi_2$$

$$\frac{d}{dt} [m_1 r_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + m_2 r_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2] = -N_1 \sin \varphi_1 - N_2 \sin \varphi_2$$

de unde

$$N_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -m_1 r_1 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + m_1 r_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 r_2 \ddot{\varphi}_2$$

$$- N_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -m_2 r_2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - m_2 r_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) - m_1 r_1 \ddot{\varphi}_1$$

d) Condițiile inițiale considerate sunt

$$t = 0 : \begin{cases} \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \\ m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 = 0 \end{cases}$$

Prima integrală primă (conservarea momentului cinetic total)

$$m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1 + m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2 = 0,$$

în condițiile inițiale considerate, conduce la o altă integrală primă

$$m_1 r_1^2 \varphi_1 + m_2 r_2^2 \varphi_2 = 0 \quad \text{sau} \quad \varphi_2 = -\frac{m_1 r_1^2}{m_2 r_2^2} \varphi_1$$

Atunci integrala primă reprezentând conservarea energiei total devine

$$m_1 r_1^2 \left( 1 + \frac{m_1 r_1^2}{m_2 r_2^2} \right) \dot{\varphi}_1^2 = 2k^2 m_1 m_2 r_1 r_2 \cos \left[ \left( 1 + \frac{m_1 r_1^2}{m_2 r_2^2} \right) \varphi_1 \right] + \text{const.}$$

sau notând

$$\theta = \left( 1 + \frac{m_1 r_1^2}{m_2 r_2^2} \right) \varphi_1$$

se obține ecuația

$$\ddot{\theta} + k^2 \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{r_1 r_2} \sin \theta = 0,$$

ecuație similară ecuației pendulului matematic.

## INTEGRALE SI FUNCTII ELIPTICE

Definiție.

## 1. Integrala eliptică de speța întâi

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

forma normală
forma normală  
trigonometrică
Legendre

## 2. Integrala eliptică de speța a doua

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \int_0^{\sin \varphi} \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

forma normală
forma normală  
trigonometrică
Legendre

## 3. Integrala eliptică de speța a treia

$$E(\varphi, n, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{(1 + n \sin^2 \alpha) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{dx}{(1 + nx^2) \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

forma normală
forma normală  
trigonometrică
Legendre

$$4. \quad D(\varphi, k) = \frac{F(\varphi, k) - E(\varphi, k)}{k^2} = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

5.  $k$  - modul,  $k'$  - modul complementar

$$k'^2 = 1 - k^2$$

## 6. Integrale eliptice complete

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$$

Variația integralelor sub forma normală Legendre, pentru parametrul  $k = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$ , precum și variația integralelor eliptice complete în funcție de parametrul  $k$  sunt prezentate în figura A.

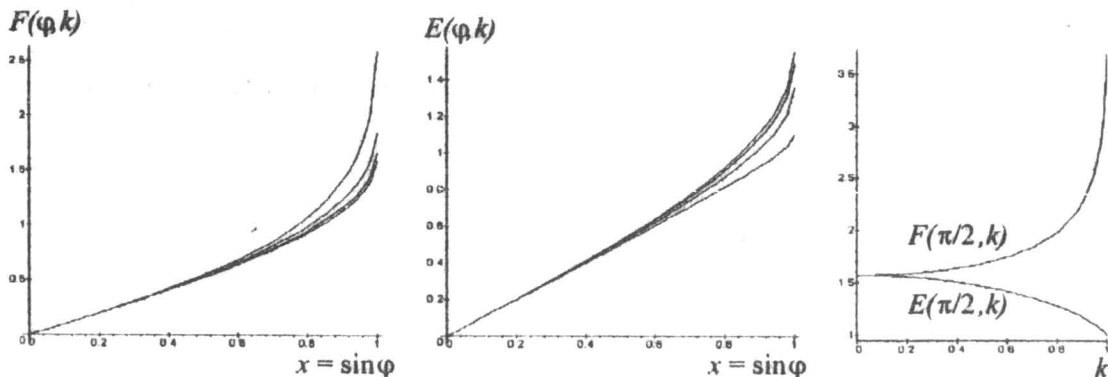


Figura A



### Serii trigonometrice

Pentru valori mici ale lui  $k$  și  $\varphi$ , se pot folosi seriile

$$1. \quad F(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left( a_0 + \frac{2}{3} a_1 \sin^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a_2 \sin^4 \varphi + \dots \right)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - 1, a_n = a_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k^{2n}$$

$$2. \quad E(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \left( b_0 + \frac{2}{3} b_1 \sin^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b_2 \sin^4 \varphi + \dots \right)$$

$$b_0 = 1 - \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - 1, b_n = b_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}$$

Pentru valori  $k$  apropiat de 1, se pot folosi seriile

$$1. \quad F(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left( a'_0 - \frac{2}{3} a'_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} a'_2 \operatorname{tg}^4 \varphi \dots \right)$$

$$a'_0 = \frac{2}{\pi} F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) - 1, a'_n = a'_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 k'^{2n}$$

$$2. \quad E(\varphi, k) = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \left[ b'_0 - \frac{2}{3} b'_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} b'_2 \operatorname{tg}^4 \varphi - \dots \right]$$

$$b'_0 = \frac{2}{\pi} E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) - 1, b'_n = b'_{n-1} - \left[ \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} \right]^2 \frac{k'^{2n}}{2n-1}$$

### Relații funcționale între integralele eliptice

$$1. \quad F(-\varphi, k) = -F(\varphi, k); E(-\varphi, k) = -E(\varphi, k)$$

$$F(n\pi \pm \varphi, k) = 2nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \pm F(\varphi, k); E(n\pi \pm \varphi, k) = 2nE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \pm E(\varphi, k).$$

2. Formule de transformare

$$\operatorname{tg}(\psi - \varphi) = k' \operatorname{tg} \varphi$$

$$F\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = (1+k')F(\varphi, k)$$

$$E\left(\psi, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{2}{1+k'} [E(\varphi, k) + k'F(\varphi, k)] - \frac{1-k'}{1+k'} \sin \psi$$

$$\sin \psi = \frac{(1+k)\sin \varphi}{1+k\sin^2 \varphi}$$

$$F\left(\psi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)F(\varphi, k)$$

$$E\left(\psi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1}{1+k} [2E(\varphi, k) - k'^2 F(\varphi, k)] + 2k \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{1+k\sin^2 \varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 \varphi}$$

### Definiții. Funcții eliptice Jacobi

$$1. \quad u = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2 \alpha}}$$

amplitudine

$$\varphi = \operatorname{am} u$$

(funcție complexă infinit multiformă de  $u$ , cu perioada  $4iF\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ , cu puncte de ramificație

$$u = 2mF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) + (2n+1)F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right)$$

argument

$$u = \arg \varphi$$

$$2. \quad \text{sinus eliptic (sinusul amplitudinii)} \quad \text{sn } u = \sin \text{am } u$$

$$\text{cosinus eliptic (cosinusul amplitudinii)} \quad \text{cn } u = \cos \text{am } u$$

$$\text{delta amplitudinii} \quad \text{dn } u = \Delta \varphi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{du}$$

$$u = \int_0^{\text{sn } u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}}$$

$$u = \int_1^{\text{cn } u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2 + k^2 t^2)}}$$

$$u = \int_1^{\text{dn } u} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2 - k'^2)}}$$

Funcții eliptice Jacobi (funcții complexe biperiodice, având în paralelogramul perioadelor două poluri ordinare)

### Relații funcționale între funcțiile eliptice

$$1. \quad \text{sn}^2 u = \frac{1 - \text{cn } 2u}{1 + \text{dn } 2u}, \quad \text{cn}^2 u = \frac{\text{cn } 2u + \text{dn } 2u}{1 + \text{dn } 2u}, \quad \text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$$

$$\text{dn}^2 u = \frac{\text{dn } 2u + k^2 \text{cn } 2u + k'^2}{1 + \text{dn } 2u}, \quad \text{dn}^2 u + k^2 \text{cn}^2 u = 1$$

$$2. \quad \frac{1 - \text{dn } 2u}{1 + \text{dn } 2u} = k^2 \frac{\text{sn}^2 u \text{cn}^2 u}{\text{dn}^2 u}, \quad \frac{1 - \text{cn } 2u}{1 + \text{cn } 2u} = \frac{\text{sn}^2 u \text{dn}^2 u}{\text{cn}^2 u}$$

$$3. \quad \text{sn}(u \pm v) = \frac{\text{sn } u \text{cn } v \text{dn } v \pm \text{sn } v \text{cn } u \text{dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$\text{cn}(u \pm v) = \frac{\text{cn } u \text{cn } v \text{dn } v \mp \text{sn } u \text{sn } v \text{dn } u \text{dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$\text{dn}(u \pm v) = \frac{\text{dn } u \text{dn } v \mp k^2 \text{sn } u \text{sn } v \text{cn } u \text{cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}$$

$$4. \quad \text{sn} \frac{u}{2} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1 - \text{dn } u}{1 + \text{cn } u}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{cn } u}{1 + \text{dn } u}}$$

$$\text{cn} \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\text{cn } u + \text{dn } u}{1 + \text{dn } u}} = \pm \frac{k'}{k} \sqrt{\frac{1 - \text{dn } u}{\text{dn } u - \text{cn } u}}$$

$$\text{dn} \frac{u}{2} = \pm \sqrt{\frac{\text{cn } u + \text{dn } u}{1 + \text{cn } u}} = \pm k' \sqrt{\frac{1 - \text{cn } u}{\text{dn } u - \text{cn } u}}$$

$$5. \quad \frac{d}{du} \text{sn } u = \text{cn } u \text{dn } u; \quad \frac{d}{du} \text{cn } u = -\text{sn } u \text{dn } u; \quad \frac{d}{du} \text{dn } u = -k^2 \text{sn } u \text{cn } u$$

6. Funcțiile eliptice Jacobi sunt soluțiile următoarelor ecuații diferențiale

$$\frac{d}{du} \text{sn } u = \sqrt{(1 - \text{sn}^2 u)(1 - k^2 \text{sn}^2 u)}$$

$$\frac{d}{du} \text{cn } u = -\sqrt{(1 - \text{cn}^2 u)(k'^2 + k^2 \text{cn}^2 u)}$$

$$\frac{d}{du} \text{dn } u = -\sqrt{(1 - \text{dn}^2 u)(\text{dn}^2 u - k'^2)}$$

Radicali de ordinul doi din polinoame de gradul trei

$$1. \quad \int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} F\left(\arccos \frac{u-1-\sqrt{3}}{u-1+\sqrt{3}}, \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} F\left(\arccos \frac{\sqrt{3}+1-u}{\sqrt{3}-1+u}, \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} F\left(\arccos \frac{\sqrt{3}-1+u}{\sqrt{3}+1-u}, \sin \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} F\left(\arccos \frac{1-u-\sqrt{3}}{1-u+\sqrt{3}}, \sin \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$2. \quad \gamma < \beta < \alpha$$

$$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{u-\gamma}}, \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \alpha < u$$

$$\int_\alpha^u \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{u-\alpha}{u-\beta}}, \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \alpha < u$$

$$\int_u^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-u}{\alpha-\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \beta < u < \alpha$$

$$\int_\beta^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(u-\beta)}{(\alpha-\beta)(u-\gamma)}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \beta < u < \alpha$$

$$\int_u^\beta \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-u)}{(\beta-\gamma)(\alpha-u)}}, \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \gamma < u < \beta$$

$$\int_\gamma^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(x-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{u-\gamma}{\beta-\gamma}}, \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}\right) \quad \gamma < u < \beta$$

$$\int_u^\gamma \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\gamma-u}{\beta-u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) \quad u < \gamma$$

$$\int_{-\infty}^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) \quad u < \gamma$$

$$3. \quad \gamma < \beta < \alpha$$

$$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right)$$

$$\int_u^\infty \frac{dx}{(\alpha+x)\sqrt{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)}} = \frac{2}{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha-\gamma}} \left\{ F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -E\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) \Big\} \\
 \int_u^\infty \frac{dx}{(\beta+x)\sqrt{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)}} &= \frac{2\sqrt{\alpha-\gamma}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} E\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) + \\
 & -\frac{2}{(\alpha-\beta)\sqrt{\alpha-\gamma}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right) - \frac{2\sqrt{\gamma+u}}{(\beta-\gamma)\sqrt{(\alpha+u)(\beta+u)}} \\
 \int_u^\infty \frac{dx}{(\gamma+x)\sqrt{(\alpha+x)(\beta+x)(\gamma+x)}} &= \frac{2}{\beta-\gamma} \sqrt{\frac{\beta+u}{(\alpha+u)(\gamma+u)}} + \\
 & -\frac{2}{(\beta-\gamma)\sqrt{\alpha-\gamma}} E\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+u}}, \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}\right)
 \end{aligned}$$

4.  $0 < u < 1$

$$\begin{aligned}
 \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} &= 2F(\arcsin \sqrt{u}, k) \\
 \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(k'^2+k^2x)}} &= 2F(\arccos \sqrt{u}, k) \\
 \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(x-k'^2)}} &= 2F\left(\arcsin \frac{\sqrt{1-u}}{k}, k\right) \\
 \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+k'^2x)}} &= 2F(\operatorname{arctg} \sqrt{u}, k) \\
 \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{x[1+x^2+2(k'^2-k^2)x]}} &= F(2\operatorname{arctg} \sqrt{u}, k) \\
 \int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{x[k'^2(1+x^2)+2(1+k^2)x]}} &= F\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} \sqrt{u}, k\right)
 \end{aligned}$$

5.  $p = \sqrt{(m-\alpha)^2 + n^2}$

$$\begin{aligned}
 \int_\alpha^u \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)[(x-m)^2+n^2]}} &= \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u-\alpha}{p}}, \sqrt{\frac{p+m-\alpha}{2p}}\right) \quad \alpha < u \\
 \int_u^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)[(x-m)^2+n^2]}} &= \frac{1}{\sqrt{p}} F\left(2\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\alpha-u}{p}}, \sqrt{\frac{p-m+\alpha}{2p}}\right) \quad u < \alpha
 \end{aligned}$$

6.  $\int_1^u \sqrt{2(1+k^2)-k'^2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \frac{dx}{(1-x)^2} = E\left(2\operatorname{arctg} \sqrt{u} - \frac{\pi}{2}, k\right) \quad 1 < u$

$$\int_0^u \frac{\sqrt{1+x^2+2(k'^2-k^2)x}}{(1+x^2)\sqrt{x}} = E(2\operatorname{arctg} \sqrt{u}, k) \quad 0 < u < 1$$

Radicali de ordinul doi din polinoame de gradul patru

1.

$$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F \left( \arccos \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1+u^4}}, 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) \right)$$

$$\int_u^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F \left( \arccos \frac{u^2-1}{u^2+1}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} F \left( \arccos \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F \left( \arccos \frac{1}{u}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\int_u^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} F \left( \arccos u, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

2.

$\delta < \gamma < \beta < \alpha$

$$\int_\alpha^u \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(u-\alpha)}{(\alpha-\delta)(u-\beta)}}, \sqrt{\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \right) \quad \alpha < u$$

$$\int_u^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\alpha-u)}{(\alpha-\beta)(u-\delta)}}, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \right) \quad \beta < u < \alpha$$

$$\int_\beta^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(u-\beta)}{(\alpha-\beta)(u-\gamma)}}, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \right) \quad \beta < u < \alpha$$

$$\int_u^\beta \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(x-\gamma)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-u)}{(\beta-\gamma)(\alpha-u)}}, \sqrt{\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \right) \quad \gamma < u < \beta$$

$$\int_\gamma^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(x-\gamma)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F \left( \arcsin \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(u-\gamma)}{(\beta-\gamma)(u-\delta)}}, \sqrt{\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \right) \quad \gamma < u < \beta$$

$$\int_u^\gamma \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\beta-\delta)(\gamma-u)}{(\gamma-\delta)(\beta-u)}}, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}\right) \quad \delta < u < \gamma$$

$$\int_{\delta}^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)(x-\delta)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(u-\delta)}{(\gamma-\delta)(\alpha-u)}}, \sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}\right) \quad \delta < u < \gamma$$

$$\int_u^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(\beta-x)(\gamma-x)(\delta-x)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\delta-u)}{(\alpha-\delta)(\gamma-u)}}, \sqrt{\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}}\right) \quad u < \delta$$

3.

$$\delta < \gamma < \beta < \alpha$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\operatorname{arctg} \frac{u}{\beta}, \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_u^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2+\beta^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\operatorname{arctg} \frac{u}{\alpha}, \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2+\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} F\left(\arcsin \frac{u\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2+u^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \quad \alpha > u > 0$$

$$\int_u^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2+\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} F\left(\arccos \frac{u}{\alpha}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \quad \alpha > u > 0$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2-\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} F\left(\arccos \frac{\beta}{u}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_u^{\delta} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+\alpha^2)(x^2-\beta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} F\left(\arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+u^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(\beta^2-x^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\arcsin \frac{u}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad \alpha > \beta > u > 0$$

$$\int_u^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(\beta^2-x^2)}} = \frac{1}{\beta} F\left(\arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2-u^2}}{\alpha\sqrt{\beta^2-u^2}}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \beta > \alpha > u > 0$$

$$\int_{\beta}^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2-\beta^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\arcsin \frac{\alpha\sqrt{u^2-\beta^2}}{u\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}, \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > u > \beta > 0$$

$$\int_u^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2-x^2)(x^2-\beta^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\alpha^2-u^2}{\alpha^2-\beta^2}}, \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > u > \beta > 0$$

$$\int_{\beta}^u \frac{dx}{\sqrt{(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)}} = \frac{1}{\beta} F\left(\arccos \sqrt{\frac{\beta^2-\alpha^2}{u^2-\alpha^2}}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad u > \beta > \alpha > 0$$

$$\int_u^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2)}} = \frac{1}{\alpha} F\left(\arcsin \frac{\alpha}{u}, \frac{\beta}{\alpha}\right) \quad u > \alpha > \beta > 0$$

$$4. \quad \int_0^u \frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{(\beta^2 + x^2)^3} dx = \frac{\alpha}{\beta^2} E\left(\operatorname{arctg} \frac{u}{\beta}, \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_u^{\infty} \frac{\sqrt{\beta^2 + x^2}}{(\alpha^2 + x^2)^3} dx = \frac{1}{\alpha} E\left(\operatorname{arcctg} \frac{u}{\alpha}, \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha}\right) \quad \alpha > \beta > 0$$

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)(\beta^2 + x^2)^3}} = \frac{1}{\beta^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} E\left(\arcsin \frac{u \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha \sqrt{u^2 + \beta^2}}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \quad \alpha > u > 0$$

$$\int_u^{\alpha} \frac{\sqrt{\beta^2 + x^2}}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} dx = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} E\left(\arccos \frac{u}{\alpha}, \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \quad \alpha > u > 0$$

$$\int_{\alpha}^u \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{\beta^2 + x^2}{x^2 - \alpha^2}} dx = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha^2} E\left(\arccos \frac{\alpha}{u}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \quad u > \alpha > 0$$

$$\int_u^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{\beta^2 + x^2}{x^2 - \alpha^2}} dx = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} E\left(\arcsin \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\beta^2 + x^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right) \quad u > \alpha > 0$$

$$\int_0^u \sqrt{\frac{\beta^2 - x^2}{\alpha^2 - x^2}} dx = \beta E\left(\arcsin \frac{u}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \beta > \alpha > u > 0$$

$$5. \quad \int_u^{\alpha} \frac{dx}{\sqrt{(\alpha^2 - x^2)(\beta^2 - x^2)}} = \frac{1}{\beta(\beta^2 - \alpha^2)} E\left(\arcsin \frac{\beta \sqrt{\alpha^2 - u^2}}{\alpha \sqrt{\beta^2 - u^2}}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad \beta > \alpha > 0$$

$$\int_{\alpha}^u \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 - \alpha^2)(\beta^2 - x^2)}} = \frac{1}{\alpha^2 \beta} E\left(\arcsin \frac{\beta \sqrt{u^2 - \alpha^2}}{u \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}, \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}\right) \quad \beta > u > \alpha > 0$$

$$\int_u^{\beta} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha^2)(\beta^2 - x^2)}} = \beta E\left(\arcsin \frac{\sqrt{\beta^2 - u^2}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}, \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\beta}\right) \quad \beta > u > \alpha > 0$$

$$\int_u^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - \alpha^2)^2 (x^2 - \beta^2)}} = \frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} E\left(\arccos \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\sqrt{u^2 - \alpha^2}}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad u > \beta > \alpha > 0$$

$$\int_u^{\infty} \sqrt{\frac{x^2 - \alpha^2}{x^2 - \beta^2}} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\beta} E\left(\arcsin \frac{\beta}{u}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad u > \beta > \alpha$$

$$6. \quad p^2 = (m - \alpha)^2 + n^2, q^2 = (m - \beta)^2 + n^2, \alpha + \beta \neq 2m$$

$$\int_{\alpha}^u \frac{dx}{\sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)[(x - m)^2 + n^2]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{pq}} F \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q(u-\alpha)}{p(u-\beta)}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p+q)^2 + (\alpha-\beta)^2}{pq}} \right) \quad \beta < \alpha < u$$

$$\int_{\beta}^u \frac{dx}{\sqrt{(\alpha-x)(x-\beta)[(x-m)^2+n^2]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{pq}} F \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q(\alpha-u)}{p(u-\beta)}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p-q)^2 + (\alpha-\beta)^2}{pq}} \right) \quad \beta < u < \alpha$$

$$\int_u^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)[(x-m)^2+n^2]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{pq}} F \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q(\beta-u)}{p(\alpha-u)}}, \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(p+q)^2 + (\alpha-\beta)^2}{pq}} \right) \quad u < \beta < \alpha$$

$$7. \quad p^2 = (m_1 - m)^2 + (n_1 + n)^2, p_1^2 = (m_1 - m)^2 + (n_1 - n)^2, \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{\frac{(p+p_1)^2 - 4n^2}{4n^2 - (p-p_1)^2}}$$

$$\int_{m-n \operatorname{tg} \alpha}^u \frac{dx}{\sqrt{[(x-m)^2+n^2][(x-m_1)^2+n_1^2]}} =$$

$$= \frac{2}{p+p_1} F \left( \alpha + \operatorname{arctg} \frac{u-m}{n}, \frac{2\sqrt{pp_1}}{p+p_1} \right) \quad m - n \operatorname{tg} \alpha < u < m + n \operatorname{tg} \alpha$$



## BIBLIOGRAFIE

1. T.Angheluță. Exerciții și probleme de Analiză, Teoria funcțiilor și Mecanică rațională (cu prefață de P.Montel), Ed.Universității Cluj, 1927
2. P.Appell. Traité de Mécanique rationnelle, vol.I-V, ed.5., Gauthier-Villars, Paris, 1926
3. V.Arnold. Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Ed.Mir, Moscova, 1976
4. Șt.Bălan. Culegere de probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1972, 1977
5. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul vectorial cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 1976
6. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 1977
7. I.Beju, E.Soós, P.P.Teodorescu. Tehnici de calcul spinorial și tensorial neeuclidian cu aplicații, Ed.Tehnică, București, 197
8. P.Brădeanu, I.Pop, D.Brădeanu. Probleme și exerciții de mecanică teoretică, Ed.Tehnică, București, 1979
9. N.Ciorănescu. Ecuatiile mecanicii analitice, Ed.Academiei Române, Monografii științifice, vol.I, 1938
10. L.Dragoș. Principiile mecanicii analitice, Ed.Tehnică, București, 1976
11. C.Iacob. Mecanică teoretică, Ed.didactică și pedagogică, București, 1971, 1980
12. A.G.Ioachimescu. Mecanica rațională (reeditare de G.Țițeica, Al.Stoenescu), Imprimeria Națională, București, 1947
13. D.Massier. Indrumar pentru efectuarea lucrărilor de laborator la mecanică, Tipografia Universității București, 1986
14. I.V.Mechtcherski. Recueil de problèmes de mécsnique rationnelle, Ed.Mir, Moscova, 1968
15. I.I.Plăcișteanu. Mecanică vectorială și analitică, Ed.Tehnică, București, ed.2, 1958
16. A.Radu. Probleme de mecanică, Centrul de multiplicare al Universității "Al.I.Cuza", Iași, 1975
17. E.Rogai. Culegere de probleme de mecanică (pentru studenții de la secția matematică-fizică), Tipografia Universității București, 1987
18. A.Stan, M.Grumăzescu. Probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1973
19. P.P.Teodorescu. Sisteme mecanice - modele clasice, vol.1,2,3, Ed.Tehnică, București, 1984, 1988, 1997
20. V.Vâlcovici și colab. Mecanică teoretică, Ed.Tehnică, București, 1959, 1968
21. R.Voinaroski. Mecanică teoretică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1968
22. R.Voinea și colab. Probleme de mecanică, Ed.Didactică și pedagogică, București, 1963
23. F.Wittenbauer. Aufgaben aus der technischen Mechanik, Springer Verlag, Berlin, 1929
24. M.Yvon. Problèmes de Mécanique rationnelle

VERIFICAT  
2007

VERIFICAT  
2017



LIBRĂRII  
UNIVERSITĂȚII  
BUCUREȘTI

---

Tiparul s-a executat sub c-da nr. 442/1998,  
la Tipografia Editurii Universității din București

---



**ISBN 973 - 575 - 238 - 7**

**Lei 11620**