MARIN ȚURLEA

L. WITTGENSTEIN, ANTI-FILOSOF AL MATEMATICII?

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1996

MARIN ȚURLEA

L. WITTGENSTEIN, ANTI-FILOSOF AL MATEMATICII?

II

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
1996

Referenţi ştiinţifici :

Prof. dr. ALEXANDRU SURDU, membru al Academiei Române

Prof. dr. ALEXANDRU BOBOC, membru corespondent al Academiei Române

ISBN 973-575-060-0

Dedicată fiicei mele, Despina

Lucrarea a fost elaborată urmare a unui stagiu de documentare (iunie, iulie 1995), în cadrul Programului *Tempus,* la Universitatea La Sapienza din Roma.

CUPRINS

CONTENTS

L. WITTGENSTEIN IS AN ANTI-PHILOSOPHER OF MATHEMATICS ?

1. FILOSOFIA, MATEMATICA ŞI LOGICA ; FILOSOFIA EXACTĂ ŞI WITTGENSTEIN

Prima facie, literatura de specialitate înregistrează în principal două concepte de *„filosofie a matematicii“,* unul în sens restrâns, ca cel prezent în cartea lui B. Russell [1] şi în studiul lui G. Kreisel [1] ; altul, în sens larg, şi, oarecum indefinit, care rezidă în „diferitele maniere de a da matematicii un loc privilegiat în studiul filosofiei“, conform remarcii lui H. Wang [1]. În opinia ultimului autor citat, conceptele matematicii (şi logicii) conţin aspecte interesante filosofic, credinţa lui fiind că, în actualul stadiu al cunoaşterii, matematica este în mod special mai adecvată pentru discuţii generale despre gândirea conceptuală şi suficient de relevantă pentru concepte, probleme şi teme din filosofia cunoaşterii (H. Wang [2]). Desigur, sunt autori care privesc sceptic aplicaţiile logicii la filosofie, considerând că recent logica s-a constituit tot mai mult ca o *ramură a matematicii,* dobândind un statut mai definit, însoţit însă, din nefericire, de caracterul de a fi filosofic mai puţin relevantă. Din această perspectivă aplicaţiile fructuoase ale logicii (matematice) s-ar circumscrie ariei *fundamentelor matematicii.* Există o categorie de gânditori care recomandă studiul matematicii, al activităţii matematice, din punctul de vedere al aspectelor mai *universale* ale acestei ştiinţe, care inspiră introducerea, în virtutea analogiei, a altor elemente care permit elaborarea unei scheme conceptuale, perspective filosofice apte să ne ofere o înţelegere mai largă a cunoaşterii. Hao Wang pare să sugereze, în ciuda ezitării explicite, că filosofiile lui Wittgenstein şi Ramsey ar putea fi considerate de acest tip. În ceea ce îl priveşte pe H. Wang [1] [2], impresionat de bogăţia conceptelor şi practicilor matematicii, a propus să folosim studiul filosofic al acestora ca un *model* în investigarea conceptelor şi practicilor din alte arii ale cunoaşterii. Oricum, *interacţia matematică-filosofie* este complexă, încât putem distinge mai multe ipostaze ale ei : i) matematica poate oferi *date,* adică subiecte (concepte, probleme, teme) pentru filosofie, exerciţiile *analitic, reflexiv* şi *interpretativ* ale acesteia, explicitând şi relevând *„substanţa filosofică“* subiacentă *datelor* oferite de matematică ; ii) studiul structurilor abstracte ale cunoaşterii matematice poate inspira, prin *semnificaţiile universale* obţinute, scheme conceptuale şi perspective de abordare mai eficientă a unor arii ale cunoașterii; ar semnifica o *„fortificare“ epistemologică* a analizei filosofice; iii) în fine, locul privilegiat al matematicii (și mai recent al logicii matematice) a inspirat o orientare, mai radicală, cu privire la natura, statutul și funcția filosofiei, și care propune o *„remodelare“* a filosofiei după matematică. Originile tendinței se așează istoric în *teoria universaliilor* a lui Platon, continuă peste secole cu *„Etica“* lui B. Spinoza și atinge apogeul în lucrările lui K. Gödel, cu ceea ce s-a numit filosofia ca *„teorie exactă“* sau *„noua filosofie exactă“*. Este sensul restrâns al conceptului de *filosofie a matematicii,* credem consonant cu utilizările și din lucrările menționate ale lui Russell și Kreisel. L. Wittgenstein este interesant de explorat relativ la ambele sensuri enunțate.

Ne întoarcem la un succint excurs în istoria filosofiei (și a științei) care ne va permite să identificăm relația *matematică-filosofie* în ipostazele menționate, constituite din impactul matematicii asupra, în primul rând, a filosofiilor filosofilor; (punctele *i)* și *ii)* acoperă *sensul larg* al termenului *filosofie a matematicii,* iar *iii)* convine *sensului restrâns* al termenului). Ilustrarea primei ipostaze (respectând diferențele dintre i) și ii) ne este mai la îndemână, excursul nostru istoric relevându-ne, sperăm, locul și rolul important pe care matematica l-a avut în filosofia lui Pitagora, Platon, Descartes, Spinoza, Leibniz și Kant. După B. Russell [2], conexiunile filosofiei cu matematica sunt așezate istoric în opera lui Pitagora: „Matematica, în sensul de argument deductiv-demonstrativ, începe cu Pitagora și la el este intim conectată cu o formă particulară de misticism. Influența matematicii asupra filosofiei parțial datorată lui, a fost din timpul său, atât profundă cât și nefastă“. În ceea ce îl privește pe Platon, se știe că *cine nu știa geometrie nu intra în Academia sa.* Această *deviză* ar putea fi comentată în sensul că cunoașterea matematicii este necesară pentru *„filosofia fundamentală“*, iar, mai târziu, K. Gödel va afirma că pentru studiul filosofiei sunt necesare măcar *„rudimente“ de știință,* în primul rând de matematică, deși rămâne de discutat ce a avut în vedere el atunci când a spus *„rudimente“*, în interpretarea lui H. Wang fiind vorba, mai curând, de o cunoaștere suficient de avansată a matematicii. Opera lui Platon privind relația *matematică-filosofie* a fost interpretată nu numai în sensul că matematica oferă *date* pentru filosofie (vezi *i)),* prin referire la *„teoria universalelor“* s-a spus că este aici vorba de o tentativă de modelare a filosofiei după matematică (conform ii)), încât opera platoniciană, cu privire la acest aspect (matematică-filosofie) este simultan o *filosofie a științei* (a matematicii) și o *filosofie științifică* (matematică), contrazicând opiniile unor autori după care filosofia științei a existat de când există știința, dar o filosofie științifică este de dată mai recentă (secolul XX). legată de un *program de reformă* a ei, ce are ca precursori pe Kant *(Cum este posibilă metafizica ca știință?)* și Husserl *(filosofia ca știință riguroasă).* Spinoza a găsit că *modul geometric* este cel mai potrivit pentru a-și expune *„Etica“*, recunoscând, astfel, relevanța matematicii (aici *via* geometria-*more geometrico)* pentru alte discipline ale cunoașterii. Să mai amintim programul *Mathesis universalis,* direcția modernă la care s-au angajat Descartes și Leibniz, ei înșiși creatori de geniu în matematică, primul în *geometrie*, al doilea în *analiză*. În esență, ideea leibniziană de *mathesis universalis* (unificarea logicii și matematicii sub stindardul filosofiei) consta nu numai în sistemul de semne, *„ideografie"*, ci și în *„logica inventia"* sau *„ars inveniendi"*, care pornind de la relații simple ca identități și fapte primitive generează (și ne oferă) toate adevărurile. Avantajele erau de prețuit: un limbaj exact, superior celui obișnuit, valabil pentru toate științele, facilitând stabilirea relațiilor generale între conceptele științifice și obținerea adevărurilor noi în științele exacte. În fine, *mathesis universalis* era intenționată pentru rolul de *„ars iudicandi"* în disputele privind problemele metafizice sau etice, deoarece oferea, în viziunea filosofului german, l-am numit pe Leibniz, o procedură de decizie pur formală și complet exactă. Caracterul cvasimecanic al acestei proceduri permitea să detectăm și să eliminăm erorile, slujind drept un adevărat *„fir al Ariadnei"* în complicatele procese mentale ale diferitelor științe (apud. M. Țurlea [1, p. 73]). Se știe că Leibniz era preocupat de proiectul unei *„Enciclopedii"* — ansamblu sistematic al cunoștințelor vremii, care în viziunea sa presupunea pentru realizare un *limbaj (characteristica universalis*, un sistem fundamental de semne), un sistem de *reguli de deducție (calculus ratiocinator)*, în terminologie actuală un *sistem de forme de demonstrație*, și o *ars combinatoria*, adică o *teorie a definiției*. Elementele constitutive ale programului leibnizian *induc* explicit rolul *logicii* în construcția fundamentului științei unificate. S-a spus că dacă logica este dominanta gândirii sale în prima fază a evoluției sale intelectuale, ulterior *idealul matematic* „acaparează" eforturile sale metodologice, deoarece el pretindea, aspira mai curând, ca opera sa să fie expusă în forma demonstrativă a *„Elementelor"* lui Euclid, *Limbajul filosofic* al lui Leibniz urma să asigure o cooperare intelectuală rodnică, o mai bună înțelegere între oameni, și în final, un progres intelectual și științific remarcabil. Opera lui Leibniz asigura logicii și matematicii un rol privilegiat și efectul este că, pe de o parte obținem o filosofie a matematicii (și logicii) în sens larg, mai precis în sensul *ii)*, iar, pe de altă parte, avem, mai mult decât *„in nuce"* o *filosofie matematică*, care nu mai este atât a matematicii (și a logicii) cât o *filosofie a cunoașterii, o filosofie fundamentală*, posibil de expus în formă exactă. Oricum, coerent cu această linie de interpretare identificăm *„productivitatea teoretică"* a ideilor leibniziene în *filosofia* ca *„teorie exactă"* a lui K. Gödel. Despre filosofia ca o *teorie exactă*, aplicație specială a *realismului conceptual godelian*, însuși autorul ei a spus că este în acord, privind trăsăturile ei generale, cu *sistemul metafizic al monadologiei lui Leibniz*, un aspect ce-l vom explicita atunci când, ulterior, vom discuta despre filosofia lui Gödel. Kant face parte din categoria filosofilor care în preocupările lor au fost provocați, interesați de anumite subiecte din matematică sau filosofia matematicii. Cercetările sale filosofice au fost stimulate de caracterul *sintetic a priori* al propozițiilor matematice. Celebra sa distincție conceptuală *„analitic-sintetic"*, centrală în epistemologia sa generală, distincție ce viza *natura* sau/și *structura* cunoștințelor, a fost completată relevant cu conceptul de *„sintetic a priori"*, care i-a permis elaborarea unor explicații remarcabile în sfera filosofiei matematicii. Și, chiar mai mult, Kant spera să poată oferi fundamente *sintetice a priori* și pentru alte discipline ca fizica, etica și estetica; este evident că orientarea kantiană privind inter-relația *filosofie și matematică* se regăsește sub ii). Ulterior, o vastă și importantă literatură epistemologică a fost consacrată acestui subiect, care a parcurs un *„scenariu“* de la contestare la negare și justificare. Amintim că *„Cercul de la Viena“* și-a *„focalizat“* analiza asupra a ceea ce a fost numită dogmă a *„sinteticului a priori“*, în intenția expres și explicit declarată a *„dizolvării“* ei, și avem în vedere studiile lui R. Carnap, urmând ca datorită lui Quine [1] să se vorbească, ulterior, despre *„statuata teoretic“ distincție* (dihotomie) *„analitic-sintetic“* ca despre o veritabilă dogmă a empirismului (logic). Iar, în final, J. Hintikka [1], în urma investigațiilor întreprinse în domeniul logicii cuantificării, să ne restituie un *„Kant justificat“*, adică să ne ofere o *„reabilitare“* logico-epistemologică a conceptului de *„sintetic a priori“*.

În timpurile mai recente s-a produs un fenomen interesant, o *„mișcare dinspre matematică spre filosofie“* datorată unor mari gânditori, care și-au început activitatea intelectuală ca matematicieni și apoi s-au îndreptat spre filosofie, o tendință *„aplicată“* și *fructuoasă* în filosofia matematicii, excelent ilustrată de Frege, Husserl, Russell, Ramsey și Gödel. Astfel, este vorba de un mod de gândire conform căruia *matematica* este *„cea mai bună cale spre filosofie“*, o instruire competentă în matematică este cea mai bună *„preparare“ spirituală* pentru studiul filosofiei. În decembrie 1912, B. Russell [3], într-o scrisoare adresată lui Lady Ottoline Morrell, scria: „Eu cred că un anumit sort de matematicieni au de departe o capacitate filosofică mai mare decât cei care se ocupă de filosofie, ...aceștia atrași de filosofie sunt cei cărora le plac marile generalizări care toate sunt greșite, așa că puțini oameni cu mințile exacte adoptă filosofia ca subiect al preocupărilor lor...“. Și consecvent cu această credință, filosoful englez și-a rostuit în consecință viața și preocupările. B. Russell [4, p. 28] mărturisea că majoritatea timpului său a fost luat de matematică și că studiul său al matematicii a fost în mare măsură dominat de încercările sale de a accede la gândirea filosofică. Și chiar dacă unii interpreți ai operei russelliene vorbesc de o anumită *ambiguitate* a rolului matematicii în filosofie (vezi Werner Block [1]), în viziunea filosofului englez asemenea accente sunt, totuși, dominante: „Eu am crezut că matematica este sursa principală a credinței în adevărul *etern* și *exact* tot așa ca în lumea inteligibilă suprasensibilă... matematicianul pur este un *creator liber* al lumii sale de o frumusețe ordonată“. Aceste splendide evocări ale lui Russell sunt importante aici prin *excelența* a doua idei: *certitudine necondiționată* și *creație liberă*, ambele vis-à-vis de nobila idee-pivot *„adevărul“*, prima justificându-l, după ce poate, a doua *îl constituie*. În acest context, ambele dimensiuni sunt specifice matematicii ca specie a cunoașterii și formă a culturii. Dar, s-a întâmplat ca Frege, care crezuse că prin *„teoria sa a claselor“* a oferit *fundamente ultime* matematicii — în urma descoperirii de către Russell a paradoxului din teoria mulțimilor, care îi poartă numele acestuia —, să-și vadă *ruinată* baza universului pe care îl construise, sau mai în acord cu metafora russelliană, *„pe care îl crease liber“*. Unde era de găsit mult râvnita certitudine a matematicii? Puțin mai târziu, D. Hilbert [1] care văzuse în matematică, mai exact în aritmetică, un *model de certitudine*, (în legătură- cu *problema infinitului*, conexă relevant cu cea a *creației (libere) matematice)*, avea să exclame : „Din paradisul creat de Cantor nu ne va alunga nimeni... în general, este nevoie să se producă aceeași *certitudine* pentru raționament așa cum există în aritmetica elementară, de care nimeni nu se îndoiește, și unde contradicțiile și paradoxurile apar numai datorită neatenției noastre".

Apariția paradoxurilor în teoria mulțimilor (la sfârșitul secolului trecut) a declanșat o profundă *criză fundațională* a matematicii, un prilej excelent pentru o intervenție radicală a filosofiei în dezvoltarea matematicii, intervenție mediată de logică (cea simbolică, matematică), și care a marcat o *„mutație"* în relația dintre matematică și filosofie, o *„transmutație"* care a condus spre o *filosofie riguroasă* care își adjudecă logica ca instrument al analizei, făcându-se utilă și eficace matematicii aflată în impas ; este calea pe care ne apropiem nu numai de filosofie într-un sens restrâns, ci de sensul restrâns al conceptului de filosofia matematicii. Așadar, logica a *descoperit* paradoxurile și prin aceasta ea a produs un efect distructiv, dar problema era ce poate să pună pozitiv în loc. Opinăm că logica formală modernă, fără „bagheta" filosofiei, nu ar fi putut identifica singură calea, modalitatea, de depășire a *crizei fundaționale* în care s-a găsit matematica la sfârșitul secolului trecut. Logica matematică rămâne doar un *„auxiliar tehnic"* al filosofiei în interacția acesteia cu matematica, mai cu seamă când ne interesează, săgeata acestei relații de la filosofie la matematică, adică implicarea primeia în soluționarea acestor probleme generate de situația gravă provocată de *paradoxuri*. K. Gödel, probabil, cel mai mare logician al secolului nostru, a scris, explicit despre rolul jucat de concepțiile filosofice în lucrările sale de logică consacrate fundamentelor matematicii, în special rolului *sistemelor formale*, și mai precis *completitudinii, incompletitudinii* acestora. El a subliniat importanța *atitudinii epistemologice* în abordările logic formale, care orientează direcțiile cercetării tehnicologice, funcția euristică a concepțiilor filosofice. Deoarece vom expune mai pe larg asemenea idei când vom discuta ideea lui K. Gödel de *filosofie* ca o *„teorie exactă"*, aici menționăm, pentru ilustrare : el a afirmat că concepția sa *obiectivistă* despre matematică și metamatematică, în particular despre raționamentul transfinit a fost fundamentală în lucrările sale de logică ; iar cu privire la consistența *ipotezei continuului*, el a explicat eșecul abordării hilbertiene, prin eroarea filosofică conținută în perspectiva pe care matematicianul german a formulat-o în studiul său *„Despre infinit"*. Abordările Gödel și Hilbert sunt asemănătoare *tehnic*, (am spune noi), în sensul că ambii definesc în termenii numerelor ordinale un sistem de funcții (mulțimi) pentru care *ipoteza continuului* este adevărată. Diferențele sunt însă în mod esențial de ordin filosofic căci în timp ce pentru Gödel numerele ordinale sunt considerate ca date *(atitudine platonistă !)*, Hilbert încearcă să le construiască *(constructivism)* ; Hilbert admite numai funcții (sau mulțimi) recursiv definite, Gödel permite definiții neconstructive (prin cuantificare). Eroarea filosofică a lui Hilbert n-a constat în acceptarea *constructivismului*, el nu a fost un constructivist în sensul respingerii totale a demonstrațiilor neconstructive ; această eroare (filosofică, poate, mai corect epistemologică) a constat în aserţiunea că *metamatematica non-constructivă* nu este de nici un folos şi că *metamatematica constructivă* va conduce la soluţia problemei.

Revenind la *„interacţiunea matematică-filosofie“*, notăm că după opinia lui W. Block [1] am putea considera logica şi matematica ca două componente, ştiinţe analitice, ale sferei cercetării filosofice luate ca filosofie în sens restrâns (şi ca filosofie a matematicii în sens restrâns). S-a produs o *„interacţie fructuoasă* matematică-logică-filosofie“, un proces evolutiv în care matematica a devenit tot mai logică, logica tot mai matematică iar filosofia, filosofie matematică. Într-adevăr, această *filosofie matematică,* simultan o filosofie a matematicii, datorează acest *statut* impactului produs asupra ei de logica matematică (formală, simbolică) la care au contribuit G. Boole [1], Peano [1], Frege [1] [2], Russell (şi Whithead) [1], Hilbert şi alţii. Iată o explicaţie a acestui demers complex „matematică-logică-filosofie“ ca şi a naturii acestei filosofii matematice) oferită de B. Russell [1, p. 194] : „Matematica şi logica, istoric vorbind, au fost studii în întregime distincte. Matematica a fost conectată cu ştiinţa, logica cu grecii. Dar ambele s-au dezvoltat în timpurile moderne : logica a devenit mai matematică şi matematica a dvenit mai logică. Consecinţa este că acum a devenit imposibil să tragem o linie între ele ; în fapt cele două sunt una. Ele diferă ca tânărul şi bătrânul : logica este tinereţea matematicii, şi matematica este maturitatea logicii. Această concepţie este indezirabilă pentru logicienii care îşi petrec timpul studiind texte clasice, fiind incapabili să urmărească un raţionament simbolic, dar şi pentru matematicienii care au învăţat o tehnică fără să se preocupe de investigarea semnificaţiei ei sau a justificării. Ambele tipuri sunt acum mai rare. Activitatea matematică modernă este evident la graniţa cu logica şi tot aşa logica modernă este simbolică şi formală (adică matematică)...“. Activitatea care include matematica şi logica aparţine teoriei cunoaşterii şi deci filosofiei. Dacă ştiinţa *construieşte,* filosofia *analizează* (folosind termenii lui Imm. Kant) utilizând metodele ştiinţifice, îndeosebi cele oferite de logica modernă. Filosofia devine *ştiinţifică,* însă nu ştiinţă, permanent legată de evoluţiile acesteia şi în acord cu ea. În acelaşi timp în actualul stadiu de dezvoltare a cunoaşterii, matematica se dovedeşte ca tipul de ştiinţă cel mai adecvat şi relevant în discuţiile general-filosofice despre gândirea conceptuală, suficient de bogată în implicaţii pentru ilustrarea temelor şi conceptelor semnificative ale filosofiei generale. Impactul profund exercitat de matematică şi logică asupra filosofiei a provocat transformări semnificative ale *„stilului de filosofare“*, ale *„discursului filosofic“*, încât s-a vorbit de un *program de reformă a filosofiei,* care a vizat o *„metamorfoză“* autentică a acesteia, în stare să acopere *sintagma* (nu atât o *„filosofie a ştiinţei“* cât o) *„filosofie ştiinţifică“*. Această orientare este opusă celei exprimate de Ed. Husserl : *filosofia ca ştiinţă riguroasă,* un program care propune o filosofie ca o ştiinţă universală riguroasă obţinută prin folosirea metodei fenomenologice. După Husserl, ştiinţa nu este suficient de ştiinţifică, ea putând deveni astfel numai după ce a fost construită o filosofie ştiinţifică, pe baza căreia să se efectueze o reconstrucţie a ştiinţelor. Programul huserlian a conţinut prospecte şi promisiuni impresionante intelectual, dar practic, unii autori, ca H. Wang [2, p. 6], privesc cu scepticism fezabilitatea lui. Se consideră că supraevaluarea realizărilor ştiinţifice, caracteristică a *programului husserlian,* nu ar fi în acord cu specificul cunoaşterii actuale, care pare să corecteze o anumită „păgubire“ a filosofiei generale ; rămâne meritul programului, sublinierea importanţei datelor pentru filosofie oferite de ştiinţele exacte. Un *factualism substanțial* ar elimina unele ambiguităţi ale formulării programului, rezultatul putând fi o acomodare a unei forme de fenomenologii la datele cunoaşterii contemporane.

B. Russell [3] continuă scrisoarea sa către Lady Ottoline Morrell (decembrie 1912) cu gândurile : „...A fost unul dintre visurile mele să întemeiez o mare şcoală de filosofi instruiţi matematic, însă eu nu ştiu dacă voi realiza vreodată acest lucru... Wittgenstein, desigur, este visul meu...“. Aşadar, credinţa lui Russell era că L. Wittgenstein reprezenta *candidatul ideal* pentru această şcoală, orientare, direcţie pe care Russell dorea s-o întemeieze.

Spuneam cu câteva pagini în urmă că există o categorie de autori care studiază matematica, activităţile matematice pentru relevanţa *aspectelor lor mai universale,* care completate cu alte elemente analoage, ar putea fi configurate într-o perspectivă filosofică asupra cunoaşterii. şi că în textul lui H. Wang [1] ar exista, în ciuda ezitărilor, o sugestie conform căreia, Wittgenstein şi Ramsey ar putea fi incluşi aici. După Wright şi alte surse declarate de H. Wang [1], L. Wittgenstein în jurul anului 1908 era preocupat de matematica pură şi filosofia matematicii, ceea ce l-a orientat spre Russell [5], în acest sens fiind sfătuit de Frege să meargă la Cambridge pentru a studia cu Russell însuşi. Filosoful a apreciat întâlnirea în cuvintele : „Wittgenstein a fost un mare eveniment în viaţa mea...“. L. Wittgenstein a formulat un *proiect de corectare* a demonstraţiilor mai vechi din *„Principia Mathematica“* (autori Whitehead şi Russell [1]), găsite de el inexacte, fapt ce i-a schimbat interesele şi preocupările din sfera matematicii în cea a logicii, accentul fiind pus pe elaborarea unei noi definiţii a *formei logice.* Wittgenstein în această perioadă timpurie este reprezentat de *„Tractatus“,* în mod esenţial centrat pe subiecte şi abordări logice şi în care se spune puţin despre matematică (6.01-6.031 ; 6.-6.24). H. Wang [1] vede în lucrarea lui Wittgenstein [1] un model idealizat despre *limbaj* şi *realitate* care operează cu un *univers definit şi finit.* Wittgenstein a contribuit semnificativ — pe linia de gândire Frege, Russell — la constituirea *filosofiilor lingvistice* ale secolului nostru (a limbajelor simbolice ideale în Wittgenstein [1] a limbii naturale, Wittgenstein [2] ; se mai spune Wittgenstein I şi, respectiv, Wittgenstein II). În Wittgenstein [1] avem simultan o *filosofie a limbajului* (Kant s-a preocupat de marcarea *limitelor gândirii,* Wittgenstein s-a ocupat de *limitele limbajului)* şi o *filosofie a logicii.* Alături de Frege, Russell şi Ramsey, Wittgenstein este unul dintre cei mai interesanţi filosofi recenţi, fapt explicabil prin interesul lor profund pentru fundamentele matematicii şi logicii. Impactul logicii matematice asupra filosofiei a schimbat cursul acesteia, iar Wittgenstein a contribuit remarcabil la aceasta, efectul fiind abaterea filosofiei de la drumul larg al *metafizicii speculative, excesiv verbale,* spre cel al *ana-*

lizei (finale) care are la bază principiul *atomismului logic,* poziție conform căreia termenii care nu referă pot fi eliminați *(sensul* fiind formulat în termenii *referinței,* iar aceasta în termenii *obiectelor simple.* Azi știm că una dintre greșelile făcute de Wittgenstein [1] a vizat *propozițiile atomare.* Atât el cât și Russell au spus că „propozițiile *non-atomare*" pot fi *„analizate",* descompuse, în unele *atomare,* dar au recunoscut caracterul obscur al termenului *„analiză",* nefiindu-le clar ce anume semnifică el, iar azi concepția actuală apreciază că nu are sens să vorbim despre *„analiza finală".* Filosofia, având ca *„instrument pivotal" analiza* și-a schimbat în mod esențial statutul și menirea,a bandonând pretenția de *„a prinde" „realitatea ultimă",* renunțând la elaborarea teoriilor (în general speculative) despre univers, așa cum se întâmplase în tradiția marilor sisteme filosofice speculative, în special a „idealismelor" speculative din secolul al XIX-lea. O concepție reductivă despre *natura* și *statutul* filosofiei își face loc prin acest *credo* din *„Tractatus" :* „Obiectul filosofiei este clarificarea logică a gândurilor. Filosofia nu este o teorie (doctrină), ci o activitate. Opera filosofică se compune în esența din elucidări. Rezultatul filosofiei nu este un număr de propoziții filosofice, ci clarificarea. Filosofia trebuie să clarifice și să delimiteze cu strictețe gândurile, care, altfel, ar fi rămas opace și difuze". Programul de reformă a filosofiei cu sorgintea în *„Tractatus"-ul* lui Wittgenstein va fi însușit de reprezentanții *școlii analitice, ramura formală* constituită în cadrul *„Cercului de la Viena",* în această direcție lucrările lui Carnap [1] fiind marcante. Acum materialul filosofiei nu mai este lumea așa cum este ea și nici transformată în perspectivele artei, religiei, politicii și moralității. Materialul filosofiei este *știința,* iar sarcina ei este *analiza* metodelor, termenilor și legilor științei, astfel încât să facă clare structura ei logică și conținutul ei empiric. În noua concepție, filosofia nu se mai referă la *obiecte,* ci la *modul nostru de a vorbi despre obiecte.* Problemele tradiționale ale filosofiei (ontologice, gnoseologice, etice etc.) sunt reformulate ca probleme ce nu vizează *natura lucrurilor,* ci *structura discursului nostru* despre lucruri, *modul* nostru *lingvistic* de a ne raporta la lucruri. Dacă Wittgenstein reduce filosofia (lingvistică) la epistemologie, Carnap merge mai departe, considerând că filosofia se mai poate legitima doar ca *„logică a științei",* a cărei menire este analiza logică a celor mai relevante gânduri, care sunt conținute în enunțurile științei, a căror structură logică este făcută explicită.

Așadar, materialul filosofiei este știința, dar filosofia științei într-o formă sau alta, este tot atât de veche ca și filosofia însăși, cel puțin în cultura occidentală. Într-adevăr, presocraticii s-au ocupat (și au făcut) speculații cosmologice cu relevanță ontologică. Numai cu câteva secole în urmă, științele s-au diferențiat ca atare, *„filosofia naturii"* a fost înlocuită de fizică, chimie și altele. Ceea ce este nou acum — deși nimic în istoria ideilor nu este fără precedent, sau în alți termeni, diferența importantă față de interesele științifice ale lui Aristotel sau Kant constă în aceea că acum este vorba nu atât de o *filosofie a științei,* ci de o radicală *filosofie științifică* (Kaplan [1]). Kant formulase, într-adevăr, problema de ce știința s-a dezvoltat atât de mult, iar filosofia atât de puțin ? El a explorat posibilitățile aplicării metodei științei la probleme filosofice. În această privință, el este cel mai important precursor al mișcării filosofice moderne, deși influența lui D. Hume a fost, poate, mai directă. Același autor, Kaplan [1], comentează : „În orice caz, filosofia însăși a început să devină o știință și prin aceasta să-și redobândească respectabilitatea pe care comunitatea intelectuală i-a negat-o un timp".

Claritatea devine idealul noii filosofii ; *metafora,* care, cum spunea și L. Blaga, poate și *ilumina* dar și *întuneca conceptul,* și alte resurse ale retoricii nu-și mai află locul în discursul filosofic. *„Dialogurile"* lui Platon sunt considerate capodopere literare, dar ele nu pot servi ca model pentru filosof. L. Wittgenstein a formulat *principiul-slogan :* „Tot ceea ce poate fi spus, poate fi spus clar". El a spus, de asemenea, că anumite lucruri nu pot fi spuse deloc. În acest sens, propoziția ultimă din *„Tratat"* este revelatoare : „Despre ceea ce nu poți vorbi, treci sub tăcere", cu alte cuvinte „a nu vorbi nimic în afară de ceea ce poate fi spus, adică în afară de propozițiile științelor naturii", fiind aici implicată ideea imposibilității de transcendere a limbajului, sau a imposibilității metalimbajului. În această interpretare funcția filosofiei este aceea de delimitare a *„exprimabilului"* prin metoda analizei logice a limbajului, prin care se obține clarificarea propozițiilor și eliminarea *„propozițiilor lipsite de sens" (propozițiile metafizice),* acesta fiind principiul de bază al filosofiei analitice. Un *limbaj ideal* urma să fie cadrul de analiză a tuturor conceptelor, propozițiilor, principiilor științei și filosofiei ; un asemenea limbaj ideal nu a fost construit niciodată, deși un timp s-a crezut că limbajul din *„Principia Mathematica"* (și procedeele logice din această carte) vor permite realizarea acestui ideal. Procedura analizei ar fi constat în *„traducerea"* propozițiilor științei și filosofiei în acest limbaj logic ideal, traducere ce urma să evidențieze structura lor logică, în fapt dacă enunțurile lor au sau nu sens. Această concepție despre filosofie ca *„sintaxă logică a limbajului"* a fost formulată de R. Carnap [1] în deplin acord cu ideea wittgensteiniană că problemele filosofice rezidă în *„confuzii de limbaj",* sunt reductibile, în ultimă analiză, la probleme de limbaj, sau cum spune, mai precis, Carnap, la probleme de sintaxă a limbajului. Dar însuși Carnap a recunoscut, în ultima perioadă a vieții sale că asemenea limbaje ideale, perfecte rămân mai degrabă ceva de proiectat sau intenționat, decât ceva fezabil. În ceea ce îl privește pe L. Wittgenstein din *„ultima perioadă"* va abandona ideea limbajelor simbolice ideale pe care le va înlocui cu *„jocurile de limbaj",* proprii limbii naturale. *„Jocurile de limbaj"* sunt asemănătoare *sistemelor formale :* ambele au funcția unor modele simplificate care ne asistă în încercările noastre de a explica, elucida fundamentele gândirii. Un *joc formal* poate fi considerat un *sistem formal sui generis,* presupunând, simplificând extrem, o *situație concretă, cuvintele* și *inferențele* folosite în legătură cu această situație ; pe scurt, un *model,* un *caz paradigmatic* de *uz original* al cuvintelor, *uzul familiar „de acasă"* al lor. Wittgenstein [2] va afirma larga aplicabilitate a *„jocurilor de limbaj"* în studiul problemelor filosofice, dar se recunoaște și sistemelor formale calitatea lor de instrumente puternice care produc rezultate profunde și durabile ; eficacitatea sistemelor formale este sesizată în situații când un concept are o vastă aplicație ; un uz excesiv al sistemelor formale în abordarea unei familii de concepte ca un concept singular asociindu-și inevitabil o eroare filosofică, după cum eroare filosofică constituie și antipatia față de tratarea unui concept de largă aplicație ca o familie de concepte ; sistemele formale se dovedesc fecunde în studiul conceptelor matematice.

Sistemele formale și *jocurile de limbaj* deși stau într-o relație de *„omologie“*, în sensul că ultimele sunt omoloagele primelor la nivelul limbajelor naturale, *relevanța* lor este oarecum *complementară*, dar le leagă profunde conexiuni cu logica și filosofia și, în final, cu filosofia matematicii. Se impune remarca următoare : *sistemele formale* pot fi considerate un element de contact între logica matematică și filosofia matematicii. Logica matematică le construiește și le studiază *„productivitatea“* lor teoretică, o cercetare în mod esențial cu caracter tehnic ; filosofia (prin diferite concepții) formulează direcții care orientează activitatea *„tehnică“* și încearcă să ofere o justificare a sistemelor formale existente, contribuind la ceea ce se numește *înțelegerea* fundamentelor. *Interacția „dintre matematică și filosofie“* se dovedește fertilă în domeniul fundamentelor matematicii. H. Wang [2] exemplifică această situație invocând cazul lui Brouwer, ale cărui concepții și convingeri, destul de originale și șocante pentru matematicianul clasic, le-a exprimat într-un limbaj personal, prea special, înțeles imperfect de mulți autori. Au fost construite sisteme formale care să reprezinte cât mai fidel concepțiile brouweriene, în vederea unei comunicări adecvate. Apoi a fost studiată *interconexiunea* dintre aceste sisteme și sistemele formale ale unor concepte ale matematicii clasice, investigație motivată de o înțelegere mai potrivită a concepțiilor matematicianului olandez, în sensul asigurării unei mari inteligibilități a acestora. Se consideră că tratarea formală a diferitelor poziții filosofice divergente din filosofia matematicii poate să le explciteze diferențele dar și să le *„dizolve“*. Oricum, se observă amintita interacție : filosofia determină direcțiile activității tehnic-formale (fundaționale) iar aceasta, la rândul ei contribuie, prin clarificări și elucidări la o înțelegere mai bună a motivelor filosofice inițiale. Folosirea sistemelor formale în investigațiile ce țin de filosofia matematicii au devenit *„piatra de încercare“* a oricărui filosof serios în acest domeniu, manipularea lor devenind o *condiție sine qua non*.

Deși Wittgenstein, spre deosebire de Brouwer, nu a fost un bun matematician, așa cum a crezut Russell, această apreciere a formulat-o și Ramsey și o împărtășește și H. Wang, acest fapt nu l-a împiedicat să se intereseze de (și să facă) filosofia matematicii. Dar în cadrul acestui paragraf ne limităm la preocupările lui de filosofia logicii din *„Tratat“*, cu semnificații importante atât pentru filosofia generală, cât și pentru filosofia matematicii. El a vrut să dea o justificare a *„Principiei Mathematica“* relevând caracterul necesar al propozițiilor acestei cărți. S-a spus că Wittgenstein [1] a formulat câteva puncte importante, incitante și provocative despre filosofia logicii și matematicii. Există *obiecte simple* și *fapte atomare* și conform *„teoriei picturale a semnificației“* propozițiile atomare, dacă reprezintă fapte atomare, sunt adevărate.

În conferinţe, 1930—1933, Wittgenstein sub impactul lui Brouwer a recunoscut două greşeli pe care le conţine *„Tratatul“*, dintre care prima se referă la propoziţiile atomare, în legătură cu care şi-a exprimat rezerve faţă de conceptul *„analiză finală“*, considerat fără sens din punctul de vedere al concepţii actuale. Cea de-a doua greşeală a privit analiza cuantorilor, reduşi la conjuncţii şi disjuncţii. G. E. Moore (Mind, vol. 64, pp. 19—55) nota în legătură cu analiza lui Wittgenstein a propoziţiilor generale ca conjuncţii : „El a greşit prin faptul că (x)F(x) poate fi înlocuit prin $Fa \wedge Fb \wedge F \wedge \ldots$ nereuşind să vadă că ultima expresie nu este întotdeauna un produs logic, numai dacă punctele sunt ceea ce el a numit „puncte din comoditate“. Propoziţia 5.54 din Wittgenstein [1] enunţa că *principiul extensionalităţii* se aplică la toate propoziţiile compuse. B. Russell în ediţia secundă a *„Principiei Mathematica“*, împrumutând un principiu al extensionalităţii din *„Tratat“* a încercat să se dispenseze de *axioma reductibilităţii*. Rezultatul face proprietăţile extensionale, şi deci nu mai sunt diferite de clase, fiind admise numai clase predicative. Teoria construită în *„Tratat“* nu face distincţie între domenii *finite* şi domenii *infinite*, care devine aici irelevantă pentru fundamentele matematicii. În sfârşit, un alt merit al lui Wittgenstein [1] este că a influenţat cercetările întreprinse de Ramsey în fundamentele logicii şi matematicii.

Într-un eseu din 1926 (vezi F. P. Ramsey [1]), el a elaborat sub influenţa lui Wittgenstein o reinterpretare a *teoriei simple a tipurilor* enunţând trei greşeli pe care le conţine *„Principia Mathematica“* : i) a dat o definiţie a clasei aplicabilă numai *claselor definibile* ; în raport cu un limbaj formal există clase indefinibile, dar Ramsey pare să sugereze *posibilitatea claselor absolut indefinibile* (H. Wang [2]). Ramsey [1] scrie : „Dacă există clase indefinibile, sau nu, este o chestiune empirică ; ambele posibilităţi sunt perfect conceptibile. Însă chiar dacă, în fapt, toate clasele sunt definibile, noi nu putem în logica noastră, identifica clase cu clase definibile fără să distrugem *aprioritatea* şi *necesitatea* care este esenţa logicii“. ii) A doua greşeală din *„Principia“* este absenţa distincţiei *paradoxuri matematice-paradoxuri semantice* ; iii) interpretarea greşită în tratarea *identităţii*, o observaţie care nu l-a convins pe Russell (Mind vol. 40, 1931). Din punct de vedere filosofic, Ramsey este un *realist* pentru care mulţimile finite şi cele infinite stau pe *„picior de egalitate“*. Aceeaşi poziţie realistă face dispensabilă *axioma reductibilităţii* şi înlocuirea ei cu *axioma comprehensiunii*. Ramsey face consideraţii din acelaşi punct de vedere realist, şi care face irelevantă distincţia *finit-infinit*, şi cu privire la alte două axiome — *axioma alegerii* şi *axioma infinitului*. Vorbind despre remarcile lui Wittgenstein, H. Wang [2] comentează : „Remarcile lui Ramsey au o mică semnificaţie matematică, deoarece ele nu aruncă o lumină asupra faptului cum noi putem demonstra prin mijloace finite că axioma comprehensiunii este consistentă (când există infinit de multe obiecte de un tip dat) sau cum putem pune chestiunea independenţei *axiomei alegerii* relativ la demonstraţii (care nu sunt infinit de complicate) cu privire la axiomele din teoria constructivă; poate fi actual observat că *axioma reducerii* este falsă (deoarece există clase de ordin mai înalt necoextensionale cu clase de ordin mai coborât) și *axioma alegerii* este adevărată (deoarece universul este numărabil și modelul intuitiv asigură posibilitatea selecțiilor prin clase de ordin suficient de înalt)".

Un aspect important în preocupările logice ale lui Wittgenstein și Ramsey îl deține conceptul de *infinit*. *Asumpția fundamentală* în problema formulată în *„Tratat"* este cea a *finitului*: Russell și Ramsey, acesta în prima parte, cred că noi nu putem (re)construi matematica obișnuită dacă nu asumăm existența individualilor în univers, și, mai mult, aceștia să existe *„infinit de mulți"* (Ramsey se confruntă cu *axioma infintului* atunci când are de-a face cu *teoria claselor* și este nevoit să se refere la dimensiunea *„universului"*. Constatarea că este dificil să dăm o explicație a *infinitului* în termenii conceptelor strict logice face teza lui Russell despre *identitatea logică* și *matematică,* să apară dubioasă. Abordarea wittgensteiniană a *formei generale* a propoziției îl confruntă pe autorul *„Tratatului"* cu relația *„finit-infinit"*. Astfel considerăm cuantorii ∀xFx și ∃ xFx care asertează conjuncția respectiv disjuncția tuturor propozițiilor de forma Fa. Când examinăm principiile logice, să spunem „dacă ∀xFx atunci Fa" și „dacă Fa atunci ∃ xFx", observăm că pot fi văzute ca *tautologii* (un concept important în filosofia logicii lui Wittgenstein, esențial pentru latura filosofică a *„Tratatului"*, loc în care el oferă, cum s-a spus, „o explicație atractivă a *tautologiilor verifuncționale* ca adevărate în virtutea semnificației conectivelor propoziționale". Această idee combinată cu teza logicistă a *reductibilității matematice la logică* a permis concluzia că „toate propozițiile matematice adevărate sunt tautologii" (cf. Hao Wang [2, p. 269]); aceste *tautologi,-forme logice (forme generale propoziționale)* ale principiilor logice pot antrena un număr finit sau infinit de propoziții și dacă pentru o mulțime dată putem spune că toate propozițiile sunt false, aceasta se dovedește ca prea generală în cazul că operăm cu infinit de multe propoziții, deoarece vom avea nenumărabil de multe mulțimi de propoziții; o situație în care, după Wang [2, p. 158], nu tratează cazul infinit ca nediferit de cazul finit. Aserțiunile în cauză din Wittgenstein [1], este vorba de 6.126, 6.1262, par să sugereze ideea că *logica* este *decidabilă* (contrazisă de rezultate matematice ulterioare) și care are la bază ideea că nu *există o diferență esențială între finit și infinit.*

În concluzie, Wittgenstein, alături de Russell, a fondat *atomismul logic,* dar între contribuțiile lor există diferențe importante (nu există în *„Tratat"* o înclinare spre date senzoriale sau date nesenzoriale, iar numerele sunt explicate diferit de *procedura lui Russell,* astfel 6.021: „Un număr este exponentul unei operații". A spus puțin despre matematică în ansamblul *Tratatului,* lăsând lui F. P. Ramsey sarcina să tragă concluziile logice din ideea ștergerii diferenței dintre *domenii finite* și *infinite*. Filosofic a rezultat o autentică *filosofie realistă a claselor.* Opțiunea lui Wittgenstein este pentru *asumpția finitistă,* ceea ce s-a numit *greșeala a doua,* este în fapt asumpția de a lucra cu un *domeniu finit* drept *„univers de discurs"*. Supoziția unui domeniu finit ca universul nostru de discurs se dovedește fertilă producând câteva elucidări importante : „nici o propoziție nu poate face un enunț despre ea însăși, deoarece un semn propozițional nu poate fi conținut în el însuși“ (3.332), apreciată drept o propoziție „misterioasă“, (vezi H. Wang [1, p. 23]), ce devine acum inteligibilă. Cuvântul „deoarece“ din această propoziție este interzis de *„construcția lui Gödel“*, dar în cazul domeniilor finite problema nu se mai pune. „Reflectarea“ *metalimbajului* în *limbajul obiect* nu are loc (imposibilitatea uzului metalimbajului). Puțin mai complexă este teza wittgensteiniană : „o funcție nu poate să fie propriul ei argument“ (3.333), atunci când sunt admise domenii infinite și chiar mai mult. Astfel, *conceptul iterativ* de *mulțime* interzice constructe de genul *o mulțime poate să-și aparțină ei însăși,* încât numai *formal* are semnificație că o funcție se poate lua pe ea însăși ca argument. Dar conform *„teoriei conceptului“* a lui Gödel este permis și chiar dezirabil ca un concept să se aplice lui însuși, o teză mai plauzibilă când avem de-a face cu mulțimi finite. Relevanța *asumpției domeniilor finite* este *productivă* și în privința situației axiomelor celebre din teoria mulțimilor *(axioma reducerii)* și a teoriei claselor. Axioma reducerii sau reductibilității este dispensabilă în context deoarece nu mai avem nevoie de *„definiții impredicative“* ca să obținem toate clasele, sau destule clase, conform *teoriei tipurilor.* Mai mult, clasele pot fi eliminate prin *definiții contextuale familiare,* ceea ce dovedește că ele sunt *„ficțiuni logice“*. Rezultatul este formulat de Wittgenstein [1] : „teoria claselor este superfluă în matematică“ (6.031). Dar în ce sens s-a spus că *„asumpția limitării la domenii finite“* a constituit o greșeală a lui Wittgenstein ? Un răspuns posibil l-a dat chiar Ramsey, și anume *cea mai interesantă alternativă nu este limitarea la domenii finite, ci aceea care nu face o distincție fundamentală între finit și infinit :* „Dl. Wittgenstein a perceput că dacă noi acceptăm această explicație (viz. una familiară) a funcțiilor de adevăr... nu există motiv de ce argumentele pentru o funcție de adevăr nu ar trebui să fie infinite în număr. Cum nici un autor anterior n-a considerat funcțiile de adevăr ca fiind capabile de mai mult decât un număr finit de argumente, aceasta este cea mai importantă inovație“ (F. P. Ramsey [1, p. 7]). Concepțiile, credințele lui Wittgenstein au fost susținute *tehnic-formal* de cercetări ale lui Ramsey și recunoscute ca atare de Russell. De exemplu, Wittgenstein [1] scrie : „propoziții ca axioma reductibilității a lui Russell nu sunt propoziții logice... Adevărul lor ar putea fi numai rezultatul unui accident fericit“ (6.1232). Referindu-se la natura și statutul axiomei reductibilității, B. Russel în introducere la ediția secundă a *„Principiei Mathematica“* recunoscând valabilitatea unor criterii formulate de Ramsey scria : „Că axioma reductibilității este o propoziție self-evidentă poate fi cu greu susținut... evidența inductivă în favoarea ei este foarte puternică ; deoarece raționamentele pe care ea le permite și rezultatele la care ea conduce toate apar ca valide“. Influența *„Tratatului“* asupra lui Russell și Ramsey a fost atât de importantă, încât aceștia plecând de la concepțiile și interpretările formualte de Wittgenstein [1] au încercat o reconstrucție a PM (Principia Mathematica), primul renunțând la axioma reductibilității, al doilea, în lumina unei noi interpretări a acestei axiome. „Una din recomandările lui Wittgenstein [1, 5.54 și urm.] are rațiuni filosofice și asumă că funcțiile de propoziții (funcțiile propoziționale) sunt totdeauna funcții de adevăr și că o funcție poate apare într-o propoziție prin(tre) valorile ei... aceasta antrenează o concluzie interesantă și anume că toate funcțiile sunt extensionale" (PM, ediția secundă). Acest curs a condus la *teoria ramificată a tipurilor* care are următoarele inadecvări, pe care însuși Russell le-a enumerat : definiția *identității, inducția matematică, tăieturi-Dedekind, teoria lui Cantor a cardinalilor înalt infiniți* (higher infinite cardinals). Sistemul Σ al lui Hao Wang [3] din *„Formalizarea matematicii"* reține spiritul *„ramificării"*, minus inadecvările menționate. Ramsey asumă o concepție extensională combinată cu propria sa interpretare a celei de-a doua greșeli a lui Wittgenstein, care știm că are forma că distincția dintre finit și infinit nu este fundamentală, în particular nu se pot formula obiecții logice la definiția oricărei mulțimi infinite prin enumerare. În construcția lui Ramsey axioma reductibilității nu mai este necesară, sau este *„absorbită"* în *axioma comprehensiunii*, pe care nu o mai enunță, în virtutea postulării tuturor funcțiilor propoziționale exprimabile și neexprimabile ; *axioma alegerii* este interpretată ca o *tautologie*, un procedeu în acord cu conceptul iterativ de mulțime ; și *axioma infinitului*, în ciuda statutului ei nedeterminat ar putea fi considerată o *tautologie*. Ramsey [1, p. 61] scrie : „Noi nu avem să asumăm că orice mulțime particulară de lucruri, e.g., atomi, este infinită, ci pur și simplu că există un tip infinit pe care noi putem să îl luăm să fie tipul individualilor". „În 1930, comentează Wang [1, p. 25], era uzual să iei numerele naturale ca individuali, sau să începi cu mulțimi finite construite din mulțimea vidă. Dacă noi adoptăm *concepția extensionalistă* a lui Ramsey, dar dăm mai multă atenție la ce este exprimabil și învingem superstiția contra înaintării dincolo de ierarhia infinită inițială, noi ajungem la universul infinibil de mare al conceptului iterativ de mulțime. Și chiar mulțimi mai bogate de axiome decât ale PM pot fi justificate conform conceptului" (pentru o expunere detailată vezi și cap. VI din H. Wang [2]). Wittgenstein [1] a oferit un model familiar al relației dintre limbaj și realitate, dar este controversată aserțiunea că poziția filosofică adoptată ar fi una realistă (a se vedea articolele din volumul lui I. Block [1]) ; însă pare indiscutabil că se asumă o *teorie a adevărului-corespondență*.

Criticile pe care Wittgenstein le-a făcut au fost de pildă pentru Russell de importanță extraordinară : „Eu am văzut că el are dreptate. Eu am văzut că nu mai pot spera să fac iarăși lucrare fundamentală în filosofie... Critica lui mi-a dat un sens al eșecului" spunea Russell.

Să fi crezut Russell că o *lucrare fundamentală* este de așteptat de la Wittgenstein ? În ce măsură erau îndreptățite convingerile sale despre Wittgenstein ca cel mai bun candidat la *„noua filosofie exactă"* ?

Filosofia exactă este un sort de *„filosofie matematică"* și, prin extensie, *„filosofie logică"*, sau, poate, filosofie *„logico-matematică"*. Cum putem raporta demersul wittgensteinian la acest concept de filosofie exactă ? Știm că mai mulți autori nu l-au considerat pe Wittgenstein un bun matematician, o aserțiune care contrastează cu evaluarea elogioasă a calităților sale formulată de Russell. Cel puțin el n-a fost așa bun matematician, când îl comparăm cu Ramsey sau Brouwer, o evaluare făcută de H. Wang. Chiar însuși Ramsey remarca *„handicapul“* în pregătirea matematică a lui Wittgenstein, fapt ce îi stârnea *surprinderea,* să nu zicem *admirația,* în fața remarcilor de filosofia matematicii (și logicii) pe care acesta le-a formulat îndeosebi în *„Tratat“*. Dacă poziția lui Wittgentein [3] declarată era una din *„exteriorul“* și nu din *„interiorul“* matematicii (vezi *„Remarci asupra fundamentelor matemarticii“)* și judecăm ce el a dat în domeniu, atunci calitatea de a fi *„bun matematician“* ca o premisă de a fi un *„filosof serios“ al matematicii* poate fi ignorată“. Accederea la filosofia exactă are, în principal, în interpretarea pe care o reținem aici două *„canale-componente“ :* matematica și logica. Lectura operei lui (Wittgenstein [1], [2], [3]) nu lasă impresia că l-a preocupat *problema fundării matematice,* că el ar fi intenționat să ofere o fundare matematicii. Tot ce știm este că în *„Note asupra logicii“* figurează o aserțiune ca aceasta : „Dacă ar exista o lume creată în care principiile logicii sunt adevărate, în acea lume întreaga matematică s-ar dovedi adevărată“. Este aici exprimată ideea *primatului logicii* în problema fundării, o idee poate de inspirație logicistă, a reducerii matematicii la logică. Hao Wang [1, p. 22] considera că atât Wittgenstein *„timpuriu“* cât și cel *„târziu“* ar fi gândit că odată admise numerele naturale cu proprietățile lor (deși nu se face nici o referire la Peano, asociațiile se pot face, ca de altfel și cu concepția lui Kronecker) restul matematicii nu ridică probleme fundaționale și filosofice. Conexă numerelor naturale este *„aritmetizarea analizei“*, care probabil să-l fi inspirat, dar azi știm că *aritmetizarea* presupune ceva mai mult decât numerele naturale.

Oricum, este susținută ideea că Wittgenstein nu a încercat să ofere o fundare a matematicii, nu a dorit să dea explicație adecvată a naturii matematicii și nu s-a preocupat să o plaseze (este vorba de de matematică) în contextul mai general al filosofiei sale. Și totuși, există o aserțiune șocantă făcută de Wittgenstein referitor la relația dintre filosofie și matematică : „Filosofia și matematica n-au nimic una cu alta ; descoperirea matematică n-are relevanță pentru filosofia matematicii și conversa : nici o opinie filosofică nu poate afecta procedura matematicianului“. Acest pasaj prin ideea sa ar *„obstrucționa definitiv“*, în lumina unei credințe epistemologice programatice, orice accedere la *filosofia exactă* pentru care a pledat așa mult Russell și care vedea în Wittgenstein candidatul ideal chemat să lucreze în ea și pentru ea. Unele *„formulări-interpretări“* care îl prezintă ca ilustrând un sort de *„anti-filosof al matematicii“* sunt probabil revendicate de la această *sursă* — aserțiunea mai sus citată. Și totuși gândurile, reflecțiile sale asupra matematicii au servit ca date sau instrumente pentru clarificarea și dezvoltarea ideilor sale filosofice mai generale despre gândire și limbaj, așa cum acestea sunt configurate în Wittgenstein [2].

Care este atitudinea lui Wittgenstein față de logică ? Wittgenstein a avut inițial preocupări de logică. Ramsey (Mind, 1955, 3) scria : „El a început cu anumite chestiuni ce aparțin analizei propozițiilor care l-au condus la probleme despre *infinit* ce stau la baza controverselor asupra fundamentelor matematicii. La prima vedere eu m-am temut că lipsa unei cunoaşteri şi facilităţi matematice se va dovedi un serios handicap în activitatea lui în acest domeniu". Cum a scris şi Russell (1913) Wittgenstein era animat în acea perioadă de *proiectul corectării demonstraţiilor matematice* mai vechi din PM, găsite de el ca inexacte, în acest sens era influenţat de scrierile lui Frege, de aceea el a *„comutat"* interesul său, preocupările sale din sfera filosofiei matematicii în cea a logicii. De altfel Russell (cu care va începe colaborarea din această perioadă) ajunsese la concluzia, într-o etapă importantă a biografiei sale intelectuale, că logica este instrumentul necesar pentru o *„filosofie serioasă"*.

Există o distincţie între rezultatele activităţii lui Wittgenstein, referitoare la matematică şi logică, am spune chiar o *„asimetrie"*. Chiar dacă Wittgenstein *„târziu"* va spune că logica a făcut atâta rău filosofiei şi matematicii, noi trebuie să separăm aceste declaraţii de impactul real pe care opera sa l-a avut asupra filosofiei, introducând o nouă perspectivă de studiu a *naturii, statutului* şi *ţelurilor filosofiei*. Programul metafilosofic de autentică reformă a filosofiei, pe care l-a elaborat *şcoala analitică,* îşi are originile în *„Tratat"* şi s-a constituit sub impactul wittgensteinian. Dimensiunea logică, antiverbalismul retoric, grija pentru claritate şi rigoare, toate acestea vor conferi o nouă *„statură"* discursului filosofic şi vor face din *filosofie* o *disciplină teoretică respectabilă,* a cărei vocaţie prin excelenţă va fi maximizarea *„înţelegerii"* filosofiei. Dacă nu putem vorbi despre filosofia wittgensteiniană ca despre o *filosofie exactă* în *„sens tare"* (să spunem conform punctului iii)) putem sigur vorbi de ea ca despre o *filosofie „ştiinţifică"*, deci în sensul mai slab al termenului filosofie, teorie exactă, corespunzător lui i) şi ii). Filosofia wittgensteiniană mai are încă o semnificaţie majoră, aceea de a fi inspirat o veritabilă filosofie ca *teorie exactă,* cea (constituită), mai corect, schiţată de Kurt Gödel şi care are certe *„asemănări şi afinităţi arhitecturale"* cu *„Tratatul"*. Încheiem prezentul paragraf cu unele remarci despre *filosofia matematică,* în sensul dezirabilei *filosofii exacte* a lui Kurt Gödel, ghidaţi de ideea că opera unui gânditor se legitimează şi prin *posteritatea ei,* cum ni se pare a fi cazul lui Wittgenstein.

K. Gödel concepe filosofia ca *„teorie exactă"*, în fapt o aplicaţie specială a *realismului* său *conceptual,* care alături de *„obiectivismul" gödelian* este al doilea aspect esenţial al filosofiei sale. Concepţia *obiectivistă* gödeliană despre *natura matematicii* presupune pe lângă acceptarea *demonstraţiilor* matematice şi a *concluziilor* lor, *obiectivitatea* în sensul conceptului de *adevăr* pentru care este valabil *principiul terţului exclus,* care afirmă că fiecare propoziţie matematică sau ea sau negaţia ei este adevărată. Recunoaşterea *obiectivităţii* (legată de *adevăr)* lasă deschisă, însă, problema în ce sens există obiectele matematice. Conform conceptului gödelian de *obiectivitate,* care este mai *„tare"* decât simplul *acord intersubiectiv* la care somează *demonstraţiile* şi *concluziile* lor, trebuie să existe *obiecte matematice,* altfel pare oarecum straniu *„să* *gândim obiectiv fără să gândim despre ceva"*, cf. H. Wang [4, p. 188]. Odată formulată *supoziția existenței* obiectelor matematice, următorul pas ce trebuie făcut este rezolvarea *problemei naturii obiectelor*. Chiar dacă mulți autori sunt de acord cu existența obiectelor matematice, ei par să nu fie totdeauna (sau toți) de acord în *„problema naturii" acestor entități*. Într-o scrisoare către Hao Wang, datată 23 februarie 1976, Paul Bernays a comparat lumea obiectelor matematice cu lumea entităților muzicale și în acest sens avem un concept de obiectivitate pe care trebuie să-l distingem de cel legat de realitatea fizică. Atât Bernays cât și Gödel [1] par să aibă în comun respingerea concepției care consideră obiectele matematice ca *nume* sau *constructe mentale*, și faptul că nu sunt de acord cu acceptarea teoriei clasice a numerelor. De altfel, K. Gödel atunci când își expune *„concepția obiectivistă"* se referă la *teoria numerelor* considerată de matematicieni ca fiind mai familiară și, desigur, mai puțin controversată decât teoria mulțimilor. După opinia lui Hao Wang [4, p. 189] deși K. Gödel pare să vorbească intersanjabil despre *realism matematic* și *realism conceptual*, conotațiile asociate sunt diferite, căci în timp ce *matematica* este considerată ca *studiu* al *mulțimilor (pure)*, *logica* este privită ca fiind *studiul concetpelor (pure)*, un domeniu mai cuprinzător, în virtutea acestui fapt realismul conceptual fiind calificat drept o poziție mai *„tare"* decât realismul matematic, deoarece depășește sfera matematicii. La acestea trebuie adăugată observația următoare : perspectiva lui Bernays este psihologică : „un concept pe de altă parte este ceva original conceput (mia mult sau mai puțin instinctiv) de către o ființă mentală care are impresii și senzații concepute pentru scopul orientării și înțelegerii. Odată ce conceptele au fost introduse, rezultatul este cursul relațiilor dintre ele", un punct de vedere pe care Gödel nu-l împărtășește. Concepte centrale în filosofia sa sunt : *intuiția* ca extensiune a concepției kantiene despre *Anschaung* (sau o extensiune a conceptului de percepție), un *organ fizic* al impresiilor abstracte, *subiect* al neurofiziologiei și altele).

Revenim la anticiparea gödeliană a filosofiei ca o *„teorie exactă"* posibil de realizat aproximativ în următoarea sută de ani, și care în concepția lui Gödel „ar trebui să aibe de-a face cu metafizica tot atât cât Newton a avut de-a face cu fizica". Demersul necesar pentru o astfel de construcție intelectuală presupune determinarea conceptelor C ale metafizicii și găsirea axiomelor A valabile pentru ele ; C satisface A și A sunt implicate în intuiția originală a lui C. Face supoziția că de-a lungul timpului este posibil să adăugăm axiome noi, așa cum noi modificăm fizica newtoniană. Un aspect important al filosofiei lui Gödel este un acord al ei, în ceea ce privește caracteristicile generale, cu sistemul metafizic al monadologiei lui Leibniz.

După unii autori, precum H. Wang [4, p. 192] nu este prea clar ce a înțeles Gödel prin *metafizică*, dar ne-am putea forma o reprezentare după lista de concepte formulată, considerată chiar de Gödel ca incompletă. Între concepte, Gödel menționează : *obiect, concept, substanță, cauză* și câteva altele. Într-o discuție cu Carnap în 1940 (la care face referire H. Wang în lucrarea citată) Gödel a subliniat dezirabilitatea dezvoltării unei teorii care să includă conceptele : *Dumnezeu, suflet* și *idei*, Dumnezeu considerat ca având rolul de *monadă centrală*. Interpretarea sugerată de Hao Wang este că Gödel a preferat să elaboreze filosofia ca o *teorie exactă* inspirându-se dintr-un sort anumit de monadologie. Consideră ca deosebit de semnificativă ideea separării universului în *fapt* și *dorință* (mai general *forță)* și care ar putea fi considerată ideea centrală a filosofiei sale, deși conceptul de *fapt* este unul compus și nu unul primitiv în sensul introdus de el. O altă aserțiune importantă este aceea că el este idealist, o asemenea construcție idealistă (în acord cu idei leibniziene ca : *monadele sunt suflete, materia* și *ființele vii sunt cele mai inferioare forme de suflet)* părându-i mai promițătoare decât una obișnuită.

Ontologia gödeliană include drept categorii fundamentale *obiecte* și *concepte*, după H. Wang și *imagini* importante în viață. Obiectele sunt obiecte matematice, de exemplu *mulțimi „pure“* și altele, dar, într-un sens, mulțimile sunt incluse în concepte, având în vedere supoziția lui Gödel că orice mulțime este *extensiunea* unui concept. Distincția dintre *mulțimi* și *concepte* este distincția dintre *extensiuni* și *intensiuni*. În Gödel [1, p. 262—263] găsim caracterizări relevante ale *„mulțimii“* : o mulțime se obține din *„obiecte bine definite“* prin *aplicația iterată* (inclusiv iterare transfinită) a operației *„mulțime de“* și nu ceva obținut divizând totalitatea obiectelor în două categorii... *mulțimile „pure“* sunt acele mulțimi care rămân dacă toate obiectele care nu sunt mulțimi sunt omise (ignorate), adică o *„mulțime pură“* este ceva care se obține din mulțimea vidă prin aplicația iterată a operației *„mulțime de“*. În concepția lui Gödel *matematica* poate fi definită ca fiind *studiul mulțimilor pure,* iar *logica* este *studiul conceptelor (pure)* unde în mod corespunzător, *relația de apartenență* pentru mulțimi este înlocuită de relația *de partiție,* sau de *„a cădea sub“* sau *instanțiere* a conceptelor. Un lucru A cade sub conceptul C, dacă C se aplică la A (sau A este un caz-instanțiere a lui C). Nu se poate ușor dezvolta o teorie a conceptelor, așa cum facem cu mulțimi, și aceasta se datorează faptului că nu dispunem de o noțiune definită de *„concepte pure“* așa cum avem una de *„mulțimi pure“*.

Din punct de vedere *formal* putem concepe o teorie a conceptelor, dacă modificăm limbajul obișnuit al teoriei mulțimilor, adăugând relația de *subordonare,* sau substituind-o în locul relației de *apartenență,* o ambiguitate emergentă din *conjectura lui Gödel* că orice mulțime este extensiunea unui concept. Situația descrisă are consecințe interesante în *„aria studiilor fundaționale“* ce vizează relația dintre matematică și logică. Mai explicit, dacă *ipoteza lui Gödel* este adevărată, cele două moduri alternative nu sunt așa diferite și adoptând primul mod constatăm că matematica poate fi considerată ca parte a logicii. Explicitări ale concepției lui Gödel se vădesc interesante privind relația dintre logică și matematică : relația dintre logică și concepte (sau conceptul de concept) este analoagă relației dintre matematică și mulțimi (sau conceptul de mulțime). Și, mai mult, opinează Hao Wang [4, p. 194] Gödel a vrut să spună că relația logicii cu metafizica este analoagă relației dintre matematică și fizică. *Teoria conceptelor* la nivelul vizat de Gödel, ar avea după remarca lui H. Wang o *stare primitivă*, favorizând incertitudini privind apartenența unor concepte la logică, ca *substanță, cauză, posibilitate, necesitate* (ultimele primitive sau definibile) și de ce nu o preferință pentru includerea în logică a *„teoriei pure a imaginilor"* sau a *„teoriei imaginilor pure"*. Oricum, indiferent de poziția luată, logica identificată cu teoria mulțimilor sau logica considerată o teorie a conceptelor (cum considera Gödel) sau chiar o logică care include o teorie a imaginilor — sugerează și stimulează dezvoltări care să se constituie ca analog al *„Tratatului"* wittgensteinian, reținând trăsăturile atractive ale logicii limitate la calculul propozițional și care a jucat un rol așa important în lucrarea lui Wittgenstein [1]. Hao Wang [4, p. 195] conchide : „De exemplu, cineva va vrea să spună că „teoria mulțimilor este *adevărată* în *toate lumile posibile"*, în sensul că nu importă ce alte obiecte (dincolo de mulțimi *pure)* sunt, teoria mulțimilor *(pure)* rămâne aceeași. De asemenea, dezirabil va fi un enunț analog despre concepte *„pure"*, o perspectivă generoasă ontologic care pare să faciliteze proiectul unei *„teorii exacte"*.

2. PLATONISMUL ŞI CONSTRUCTIVISMUL : CONSTRUCTIVISMUL RADICAL SAU «STRICT FINITISMUL» LUI L. WITTGENSTEIN

P. Bernays [1, p. 276] scria că date fiind aplicaţiile vaste ale platonismului în matematică, se poate considera că acest curent filosofic este dominant în această ştiinţă. M. Dummett [1, p. 509] observa că falsa dihotomie — *„descriere (picture) platonistă — descriere constructivistă"* domină clandestin filosofia matematicii. Dar *platonismul* este atitudinea dominantă pe care matematicienii moderni o adoptă în practica lor matematică curentă, chiar dacă, adesea, ei o *„deghizează"* luând o poziţie formalistă. Pe de altă parte, *constructivismul,* orientarea filosofică complementară platonismului, are ca *„specii"* intuiţionismul, finitismul (adică formalismulhilbertian), încât s-ar putea spune despre concepţiile platonistă şi constructivistă că *„acoperă"* aproape exhaustiv *spectrul* filosofiei matematicii. Platonismul şi diferitele varietăţi de constructivism pot fi privite ca mijloace de *demarcare* a diferitelor arii ale matematicii, din punctul de vedere al mijloacelor de demonstraţie, dar şi drept concepţii filosofice fundamentale subiacente unor şcoli, curente rivale în filosofia matematicii ; în a doua ipostază, se pune problema filosofică a deciderii care dintre aceste orientări din filosofia matematicii oferă explicaţii corecte şi adecvate. Îndeosebi Wittgenstein [3] este intenţionată ca o contribuţie la activitatea de clarificare a acestui aspect ultim. Şi cum filosofia wittgensteiniană a matematicii (dacă ea există !) a fost calificată *constructivism sever, „finitism strict"* (de G. Kreisel), *„antropologism"* de Hao Wang), constituie pentru noi un motiv să consacrăm acest eseu acestei probleme : *platonism* şi *constructivism.*

Despre platonism se vorbeşte în multe sensuri : *platonism ontologic* şi *platonism metodologic,* iar în ceea ce priveşte platonismul ontologic se disting : *platonismul restricţionat,* care formulează exigenţa că universul matematic este o *„proiecţie ideală a unui domeniu al gândirii",* în timp ce *platonismul absolut* ar consta în interpretarea pe care diferiţi matematicieni o dau metodelor platonismului, şi anume „în sensul *realismului conceptual* care postulează existenţa unei lumi de obiecte ideale care conţine toate obiectele şi relaţiile matematicii"(P. Bernays [1, p. 276]) ; acest gen de platonism s-a dovedit insutenabil în urma descoperirii paradoxurilor, în particular paradoxul lui B. Russell. *Platonismul metodologic,* l-am numi *„platonismul ca ipoteză",* pentru care *existenţa* domeniului matematic este doar o asumpţie, ipoteză ontologică care se dovedește fructuoasă, pare să fie plauzibil și dezirabil pentru că *„salvează“* o serie de concepte fundamentale, cum ar fi *existența matematică, intuiție, adevăr, demonstrabilitate, obiectivitate,* acesta din urmă într-un sens special, cel formulat de G. Kreisel, *ceea ce este important nu este „existența obiectelor matematice,* ci obiectivitatea *enunțurilor matematice“*.

Conform platonismului, următoarea teză este relevantă : Matematica constă în *adevăruri* despre *structuri abstracte,* care există independent de noi și de argumentele logice ce stabilesc adevărurile matematice ; și mai mult, aceste structuri abstracte sunt independente și de construcțiile care întemeiază aceste argumente și de simbolurile prin care sunt exprimate argumentele și adevărurile. Ca un exemplu pentru înțelegerea tezei platoniste luăm *teorema fundamentală a aritmeticii ;* platonistul consideră că există asemenea lucruri ca *numerele naturale* și care există independent de noi, având proprietatea (adevărată) că sunt unic descompuse în factori primi. În *descrierea platonistă* matematicianul în activitatea sa are de-a face cu o varietate bogată de structuri abstracte, care o preced, nefiind create ci doar *„găsite“*, și care alcătuiesc universul matematic ; în timpul *„instrucției“* matematicianul își formează, exersează și rafinează intuiția despre *„lumea matematică“* pe care o *descoperă,* ajutat de predecesorii și colegii lui, urmând ca apoi el însuși să găsească structuri noi, sau/și să formuleze ipoteze noi despre structurile vechi, activitate marcată de construcții, argumente, definiții ale unor concepte noi ; urmează expunerea lor riguroasă și formală, aspecte datorită cărora rezultatele devin public accesibile și verificabile, înglobate, atunci când sunt autentice și majore, în dezvoltarea patrimoniului matematic.

Platonismul este solidar (și subiacent) în cel mai înalt grad *teoriei mulțimilor,* cadrul convenabil și elegant în care se face *matematica pură.* Dar înainte de a expune unele considerații semnificative pentru subiectul nostru, să facem o paranteză și să amintim că începând cu secolul 18 se credea că universul matematic are două categorii de *„locuitori“ : spațiul* și *cantitatea* (adică mărimea), de unde și definiția matematicii — *„știință a cantității“*. În secolul 19 s-a produs o *„descoperire“* (mai degrabă o *construcție,* dar preferăm primul termen pentru a păstra dihotomia *„metafora descoperirii“*, („arheologice“, „geografice“) și *„metafora construcției“*, prima relevantă pentru platonism, a doua evocă spiritul constructivismului. Această *„descoperire“* era cea a *geometriilor neeuclidiene,* care a evidențiat un aspect remarcabil, pentru ontologia matematicii, și anume infirmarea aserțiunii despre *existența unei structuri spațiale unice,* obiect al intuiției noastre matematice ; de altfel intuiția noastră geometrică *„indusă“* de *geometria analitică* este diferită de *intuiția euclidiană,* pentru că în știința modernă a geometriei, spațiul este conceput ca *mulțimea tripletelor ordonată de numere.* Asemănător, concepția intuitivă despre *cantitate (mărime)* a fost *rafinată,* grație contribuțiilor lui Weierstrass, Dedekind, Cantor, care au introdus structuri conceptuale noi ; prin similitudine, și aici, putem spune că *numărul real,* defnit ca o *„tăietură-Dedekind“* nu este ceea ce a înțeles Euler. Aceste mari *transformări conceptuale,* care au marcat istoria matematicii moderne, au condus la o situaţie, numită *„vacuum fundaţional"*, definită, sau mai bine spus, descrisă ca absenţa unei explicaţii sistematice a naturii matematicii, în ultima analiză, a *structurilor* (matematice) cu care operează matematica. Teoria mulţimilor a fost considerată *„cel mai bun candidat"* la depăşirea acestui *impas, vid fundaţional,* concepţia set-teoretică (ansamblistă) — în termenii conceptelor de teoria mulţimilor — asupra fundamentelor matematicii a fost calificată drept *platonism*. Însă, imediat s-a constatat că faptele matematice remarcabile în orizont fundaţional cum sunt *rezultatele de independenţă,* proliferarea *axiomelor cardinalilor mari* şi construcţia de *modele bizare* în domeniul teoriei mulţimilor, au evidenţiat vulnerabilitatea *intuiţiei* noastre *set-teoretice*. *Ipoteza continuului,* în vederea determinării statutului ei, pare să ceară o noţiune nouă de mulţime, dar nimeni nu ştie în ce direcţie trebuie căutată, o problemă care depinde şi de *perspicacitatea intuiţiei noastre*. N. D. Goodman [1] foloseşte expresia de *„platonism liberal"* pentru a desemna o variantă de platonism compatibil cu această situaţie complexă cu semnificaţii ontologice deosebite. Se formulează în acest context sugestia că *nu există un singur univers set-teoretic* (al teoriei mulţimilor), ci mai multe. În unul este adevărată ipoteza continuului, în altul axioma lui Martin, într-un univers există un cardinal măsurabil, în timp ce într-un alt univers, deoarece toate mulţimile sunt constructibile, existenţa unui cardinal măsurabil este imposibilă. N. D. Goodman [1] enunţă o listă de probleme relevante despre universul matematic (şi subliniază faptul că problema cu care ne confruntăm este aceeaşi din 1890) : cum pot interacţiona structurile diferite existente în domeniul matematic ? Ce sunt ele, ca entităţi ? Ce legi guvernează universul matematic ca un întreg dacă nici unul dintre domeniile set-teoretice nu include toate structurile cu care lucrează matematicienii ? Autorul citat afirmă că nici una dintre aceste probleme nu a primit un răspuns accetpabil, şi că se poate spera o *„înflorire"* a matematicii dacă se formulează o *concepţie* despre *structurile diferite* ca aspecte ale unei realităţi, o *„bază comună"* pentru diferitele şcoli rivale din filosofia matematicii ; în absenţa unui *„consens fundaţional"* (dar pe ce criterii ? întrebăm) matematica va fi divizată în şcoli. Dar nu numai teoria mulţimilor a fost *„despicată"* ci şi platonismul a suferit acest proces. Acestor dificultăţi şi altora cu care este confruntat, platonismul îşi adaugă una ce emerge din particularitatea distinctivă a acestei filosofii şi anume *restricţia* că numai *matematica pură* este în mod real *matematică autentică,* o teză argumentată în maniera că din moment ce matematica se defineşte ca o *teorie* (exactă) a *„structurilor abstracte"*, cum ar putea, să spunem, *teoria grupurilor abstracte finite* să ne comunice ceva relevant despre *structura cristalelor,* dacă grupurile se construiesc din mulţimi de mulţimi ? Într-o asemenea perspectivă, cea a unor *fundamente abstracte ale matematicii,* este tăiată orice accedere la lumea fizică şi conexiunea cu ştiinţele naturii subliniată de J. von Neumann [1], iar din partea teoriei mulţimilor nu se poate aştepta reconcilierea matematicii cu ştiinţele naturii. Existenţa unor *„teoreme informative"* despre lumea concretă ar pleda pentru ideea că nu există o graniţă între matematică şi alte ştiinţe şi că ar exista numai o singură ştiinţă ca un întreg, Quine ?) şi filosofia matematicii trebuie înţeleasă numai ca un capitol al unei filosofii mai largi ; toate aceste considerații tratate ca niște consecințe ale *principiului obiectivității*, conform căruia există o lume obiectivă, iar obiectele studiate de matematician, multe nerealizate în realitatea fizică, formează o parte a acestei lumi. Dar o asemenea filosofie nu a fost încă formulată, remarcă N. D. Goodman [1].

Remedii ale platonismului sunt văzute de P. Bernays [1] în modificări ale structurii acestuia constând în eliminarea unor asumpții fundamentale : înlocuirea conceptelor de mulțime, șir, cu unele constructive ; renunțarea la ideea totalității întregilor, un punct de vedere apărat de Kronecker și dezvoltat de Brouwer.

Platonismul, ca filosofie a matematicii, este în esență bazat pe comparația, analogia dintre *„aprehensiunea"* realității matematice, a adevărului matematic și percepția obiectelor, fizice, a universului fizic. Teza principală în context este următoarea : *enunțurile matematice* poartă asupra unei *realități* (matematice) și sunt *adevărate* sau *false* dacă sunt sau nu conforme stării lucrurilor din universul matematic. *Semnificația* enunțurilor matematice rezidă în relația lor cu lucrurile din domeniul entităților matematice, adevărul sau falsitatea lor fiind independente de cunoașterea valorii lor de adevăr. Exemplul „pentru un număr natural n, A(n)", interpretat în spiritul platonismului, nu face referință la capacitatea noastră (de cunoaștere) de a identifica un γ astfel că $'A(\gamma)'$ este adevărat. Esențial este dacă există un membru al domeniului de obiecte matematice, aici numerele naturale, care satisface formula A(x) și, în consecință, face adevărat enunțul în cauză.

M. Dummett [2] găsește nesatisfăcătoare aserțiunea care *„statuează" o analogie* între *aprehensiunea* realității matematice și *percepția*, observația realității fizice : „A descrie, însă, scrie M. Dummett [2], trecerea de la premise la concluzii într-un pas în interiorul argumentului (demonstrativ) deductiv ca un raport mental de observație al conexiunilor logice echivalează cu o estompare a unei distincții valabile. Deci, dacă vorbim de un analog al observației, ca jucând un rol în aprehensiunea adevărului matematic, atunci trebuie căutat altundeva decât în procesul demonstrației matematice". Autorul britanic se întreabă unde trebuie să căutăm atunci analogul observației și găsește, deci, că *calcularea* (computation) nu poate juca acest rol, deoarece nu avem nevoie de o explicație privind statutul adevărurilor verificabile prin calculare și, în context, i se pare mai relevant un răspuns la întrebarea lui Wittgenstein — în ce constă diferența dintre *calculare* și *observație* sau experiment. Dummett face *ipoteza* interesantă și fecundă în *„explorări fundaționale"* și anume că analogul observației ar putea fi *„intuiția"*, cea care ne procura convingerea adevărului asumpțiilor fundamentale ale teoriilor matematice, și tangențial face referire la „încercarea Frege Russell" de a deriva adevărurile matematicii din sfera logicii pure. Mai fecundă i se pare sugestia, pe care momentan nu o analizează, cea a *„regăsirii"* în urmărirea temeiurilor adevărurilor matematice până în *„zona principiilor ne sau/și pre-matematice"*, sau ideea că trebuie să existe adevăruri matematice care nu sunt susceptibile de demonstrație. Și M. Dummett [2] conchide : „ce este mai natural decât să descrii capacitatea noastră de a le recunoaște ca un *analog intelectual* al capacității noastre de a discerne prin simțuri condiția realității fizice externe ?".

O analiză mai eficientă a *platonismului* și *constructivismului* se poate revendica de la o abordare a realismului (știut fiind că *platonismul* este *realism matematic)* și anti-realismului, constructivismul constituindu-se ca o varietate a acestuia. (De altfel, realismului despre obiecte i se opune fenomenalismul, realismului despre entități teoretice ale științei i se opune pozitivismul științific, iar realismului despre enunțuri matematice numit de M. Dummett [3] *platonism,* termen întrebuințat nu suficient de acurat de P. Bernays și Quine, i se opune constructivismul). Disputa dintre realiști și anti-realiști — și M. Dummett are în vedere matematica, i se pare lui, inspirat de celebra frază a lui G. Kreisel : „problema care vizează platonismul nu privește (sau nu este legată de) *existența obiectelor matematice* ci *obiectivitatea enunțurilor matematice* — nu angajează clasa entităților sau clasa termenilor ci *„clasa enunțurilor"*, numită în context *„clasa enunțurilor disputate"*.

Realismul este credința că enunțurile *clasei disputate* au o valoare de adevăr obiectivă, independent de posibilitățile și mijloacele noastre de cunoaștere a ei ; prin urmare, enunțurile sunt adevărate în virtutea unei *realități* independente de noi. Anti-realismul va formula o concepție opusă și anume va susține că enunțurile din clasa disputată vor fi declarate adevărate în virtutea evidenței noastre disponibile relevante. Pentru realist semnificațiile enunțurilor disputate nu sunt legate de felul de evidență de care noi dispunem, ci de stările de lucruri a căror existență nu este dependentă de evidența pe care o avem. Se observă că disputa este centrată pe *noțiunea de adevăr* legată de enunțuri din clasa în cauză, ceea ce înseamnă că, în ultima analiză, disputa privește felul de *semnificație* pe care o posedă enunțurile. Nominaliștii sunt o specie de anti-realiști, care iau atitudinea fiolsofică respectivă atunci când enunțurile angajează termeni *generali,* cărora le contestă caracterul referențial, iar ca entități, *universalii ;* ei vor avea o concepție diferită despre *adevăr* în contextul sugerat. În raport cu enunțurile, aparținând clasei disputate, pe care o identificăm după genul sau natura entităților și termenilor angajați (dacă entitățile sunt obiecte materiale, atunci clasa disputată include enunțuri care conțin termeni pentru acest fel de obiecte) — disputa, privind adevărul, dintre realist și anti-realist se va desfășura dirijată de anumite distincții ; pot fi de acord asupra aspectului că este o chestiune obiectivă dacă criteriile folosite în evaluare sunt satisfăcute. dar diferența care marchează concepțiile lor rezidă în aceea că pentru anti-realist adevărul unui enunț poate consta în *satisfacerea criteriilor,* în timp ce pentru realist enunțul respectiv poate fi adevărat chiar dacă noi nu dispunem, încă, de mijloace pentru a-l identifica ca adevărat, conchide Dummett [3]. În cazul enunțurilor cu termeni generali, după opinia lui Dummett, un nominalist nu se simte angajat, de aceea i se pare improprie sintagma *„realism despre universalii"*.

Considerând că în clasa anti-realiștilor includem nominaliști, constructiviști (cu *„specii"* ca intuiționiști, formaliști și finitiști stricți) și întrucât contextul discuției este cel al matematicii, diferitele noastre formulări vor rămâne „omogene" în principiu, adică în virtutea caracterizărilor operate, încât pentru nuanțări vom invoca „specii" reprezentante ale realismului și anti-realismului.

Așadar, platoniștii și intuiționiștii sunt de acord că enunțurile matematicii poartă asupra (despre) *„ceva“*, care le face sau *adevărate* sau *false*. Divergența care îi separă nu o constituie acest aspect ci genul de lucruri despre care este formulat *discursul matematic*; acel *„ceva“* diferit, este drept, în lumina celor două concepții, este totdeauna, cel puțin în principiu identificat, recunoscut ca atare prin intermediul posibilităților și mijloacelor noastre. Dummett [4, p. 229] arată că s-a încercat să se descrie această situație cu ajutorul a *două metafore* — cea a matematicianului *„ca astronom* (ca și *geograful* care descoperă o realitate preexistentă) și cea a matematicianului *„ca inventator“*, pe care, în final, le găsește irelevante pentru activitățile specifice matematicii : „Nici una dintre cele două metafore nu pare, la prima vedere, în mod particular, mai adecvată decât cealaltă ; activitățile matematicianului par remarcabil diferite de cele ale astronomului ca și de cele ale artistului. Pe ce bază se poate decide care dintre cele două metafore trebuie să fie luată în serios, cum trebuie să fie utilizate imaginile ?“. Sau în altă lucrare (Dummett [5, p. XXV]) scrie : „Matematicianul are un mare grad de libertate în invenția conceptelor pe care le introduce în profilul tipului de structură pe care l-a ales a-l studia, însă el nu poate demonstra orice simplu acel lucru care l-a sedus în a-l demonstra. Cum putem transforma dezacordul într-un dezacord bine determinat și cum putem apoi să-l rezolvăm ?“. Metaforele *„descoperirii“* și *„invenției“* găsite inadecvate sau cel puțin nesatisfăcătoare privind specificul activității matematicianului ne par totuși potrivite pentru cele două specii de filosofi ai matematicii — platoniștii și constructiviștii. Dacă nu existența obiectelor matematice este *„problema litigiu“*, obiect al disputei platoniști-constructiviști, atunci rămâne ca problemă autentică într-o dezbatere legitimă între cele două tabere de filosofi ai matematicii, problema *„statutului ontologic“* al obiectelor matematice. Platoniștii și constructiviștii vor împărtăși două concepții metafizice divergente despre *tipul ontologic* al *entităților matematice*, concepții cu rădăcini în tipul sau *modelul de semnificație* atribuit enunțurilor matematice. Preferința pentru una sau cealaltă *„metaforă“* trimite, în ultima analiză, la un nivel mai fundamental, cel al *teoriei semnificației*. „Chestiunea cunoașterii dacă obiectele matematice sunt *construcții mentale* ai căror autori suntem noi, sau există independent de gândirea noastră este o chestiune care poartă asupra a ceea ce trebuie să fie existența lor ; dezacordul important între platonicieni și intuiționiști nu este afectat de această chestiune metafizică“ (Dummett [5, p. XXVII]). Construcția propusă de Dummett este centrată pe chestiunea dacă *realitatea matematică* este *„complet determinată“*, problema *„exteriorității“* rămâne puțin semnificativă. Însuși Frege [2] scria : „Noi ne ocupăm în aritmetică de obiecte care nu ne sunt cunoscute din exterior prin intermediul simțurilor ca lucruri străine și care sunt imediat date gândirii și care le pot penetra în întregime“. În *interpretarea realistă*, enunțurile au o *semnificație* în virtutea căreia posedă *adevăr*, sau pot fi considerate *false*, și aceasta independent de faptul că noi avem mijloace și șanse să cunoaștem această valoare de adevăr ; o asemenea *imagine platonistă* asupra enunțurilor matematicii justifică aplicarea *principiului bivalenței* și sugerează relevanța *„teoriei adevărului corespondență“*. Dar o asemenea teorie realistă a semnificației enunțurilor matematice sugerează (și este compatibilă cu) imaginea unei *realități exterioare,* așteptând parcă să fie descoperită și care impune (noțiunea de) *adevăr*-ul, atribuit(ă) sau refuzat(ă) enunțurilor, independent de capacitatea noastră de a-l demonstra sau infirma, respinge. *Reprezentarea constructivistă* a universului matematic ne relevă o *realitate* (matematică) ce se vădește mai mult ca un *produs* al gândirii, sau oricum legitimată ca existență numai în momentul în care noi o gândim. Dispunem acum de *două modele concurente ale semnificației* enunțurilor matematice cu relevanță directă pentru teoria cunoașterii (matematice), în ultimă instanță pentru metafizică : M. Dummett [6, p. 314] scrie : „Relația adevărului cu recunoașterea adevărului este *problema fundamentală a teoriei semnificației* sau a *metafizicii ;* căci chestiunea referitoare la natura realității este în egală măsură de a cunoaște ce este noțiunea de adevăr adecvată frazelor limbajului nostru, sau, încă, chestiunea de a ști cum ne reprezentăm realitatea cu ajutorul frazelor". Abordarea problemei realismului îl conduce pe Dummett [5] la ideea că teoria semnificației stă la baza metafizicii, o abordare care generează o problematică distinctă de cea tradițională (centrată pe determinarea enunțurilor aparținând unei categorii ca fiind adevărate sau false prin invocarea unei *realități independente),* problematică specifică grupată în jurul ideii : „chestiunea existenței sau nonexistenței unei realități de genul menționat mai sus are o semnificație secundară și derivată, iar realismul este interpretat ca un răspuns direct la acest gen de chestiune" (Jacques Bouveresse [1]). Realismul în interpretarea lui Dummett ne pare a fi de sorginte fregeană, inspirat de filosofia matematicii și filosofia limbajului a gânditorului german, care atribuie un rol central *teoriei semnificației,* și unde noțiunea de *„condiții"* care trebuie realizate pentru ca o propoziție să fie adevărată este importantă ; acest principiu este incompatibil cu alt principiu care rezultă cel puțin implicit din critica fregeană a psihologismului : „semnificația nu poate transcende uzul" (vezi Dummett [7]). De altfel, Dummett [4, p. 225] scrie textual : „Teoria platoniciană a semnificației nu poate să fie o teorie în care semnificația este determinată complet prin uz". Cele două teorii fregeene — *cea a semnificației* și *cea a comprehensiunii* — cer ca semnificația să fie publică, manifestabilă în comportamentul lingvistic, și cum se știe caracterul social al semnificației este una dintre caracteristicile marcante ale filosofiei limbajului a lui Wittgenstein II, motiv de repudiere a logicii clasice în favoarea celei intuiționiste. Constructivismul propune o teorie a semnificației în care poziția centrală nu o mai are *adevărul* (ca în teoria realistă și deci platonistă) ci *demonstrația,* mai general spus, *verificarea.* Este o restricție pe care constructivismul, vrând să se debaraseze de *psihologismul* cu care era contaminat în varianta intuiționistă, o adoptă pentru a *„depsihologiza* total teoria înțelesului". Dacă verificaționismul pozitivist a avut o formă *„moleculară",* un model care asociază o mulțime de șiruri de experiențe senzoriale asigurând verificări posibile, modelul lui Quine este *molecular,* care asigură falsificări posibile ale frazei ; propozițiilor matematicii și logicii le atribuie un tip diferit de semnificație (a se vedea Dummett [8, p. 379]).

Plauzibilitatea *anti-realismului* sugerează posibilitatea unei *semantici verificaționiste* ca un model rival celui realist, înlocuirea *teoriei realiste a semnificației* cu o *teorie verificaționistă a semnificației*, care implică noțiuni non-epistemice ale *adevărului* și ale *condițiilor de adevăr*. *Teoria semnificației a intuiționiștilor* este un exemplu, dar asta nu înseamnă că orice enunț inteligibil este decidabil. Înțelegerea unui enunț matematic rezidă în capacitatea noastră nu de a descoperi o demonstrație, ci de a o recunoaște atunci când ea există. Ca o generalizare a teoriei intuiționiste la toate enunțurile semnificația este următoarea : nu trebuie totdeauna să fim în măsură să decidem asupra adevărului sau falsului unei propoziții, care are un sens precis și univoc, ci trebuie numai să fim capabili să recunoaștem că propoziția a fost verificată sau falsificată atunci când acest lucru s-a întâmplat ; un enunț ca să fie *inteligibil* nu implică să fie *decidabil*, dar anumite enunțuri indecidabile pot să fie neinteligibile. Divergența dintre *realist* și *verificaționist* în cazul unui enunț matematic poate fi formulată în următorii termeni : realismul consideră verificarea drept recunoaștere a unui *adevăr* independent, în timp ce pentru verificaționist adevărul pare construit ca *„produsul“ verificării*. Pentru realist *realitatea* este *independentă*, determinată în ea însăși, în timp ce verificaționistul operează cu o realitate de alt gen, în sensul că nu este preexistentă, determinată anterior și independentă, ci construită progresiv, produsă de activitatea noastră. Verificaționismul discreditat *epistemologic*, dobândește o *reputație* și o *respectabilitate* nouă prin reintroducerea lui în teoria semnificației.

Wittgenstein [1] justifică necesitatea existenței *obiectelor simple* prin postulatul caracterului determinat al *sensului*, care este corelatul semantic al postulatului caracterului determinat al realității. O altă idee importantă pentru concepția wittgensteiniană se referă la *„armonia“* dintre *limbaj, gândire* și *realitate* și *imaginea „realistă“* a unei realități transcendente în raport cu gândirea și limbajul, realitate independentă de acestea ; într-o anumită manieră produsul limbajului însuși. *Concepția metafizică* despre o lume, care ar putea transcende capacitățile noastre de a o recunoaște, este o simplă proiecție, reflectare a gramaticii în sens wittgensteinian, acest adevăr este un lucru transcendental, comentează J. Bouverrese [1] ; un gen de lucru care se arată dar care nu poate fi spus. „Căci nu există punct de vedere de la care plecând noi putem să dăm o caracterizare care conferă un sens practicii lingvistice, altul decât cel al emersiunii în practică ; și din acest punct de vedere lumea noastră transcendentă în raport cu verificarea este în mod cert în imagine. Dacă teza „reflectării“ („reflet“) autorizează *anti-realismul*, atunci este vorba de un *„anti-realism transcendental“*, un anti-realism care nu intră în coliziune cu o convingere a necesității înrădăcinate (concepția realistă) pentru că noi parvenim la a da un sens a ceea ce noi suntem“ (H. Parret et PJ. Bouveresse (eds) [1]). Privind returnarea poziției lui Wittgenstein, parțial constituită prin abandonarea realismuuli în favoarea *anti-realismului de tip transcendental*, trebuie să concluzionăm că partizanii *anti-realismului semantic* propun o doctrină puțin profundă și relevantă. Realiștii transcedentali afirmă că din perspectiva numită a *„exilului cosmic“* noi discernem relațiile care există între limbaj și o lume concepută în mod realist. Imaginea propusă de anti-realiști este complet diferită, insinuând că concepția realistă ar dispare în măsura în care s-ar recunoaște că ea nu reprezintă nimic mai mult decât efectul unei adeziuni necritice la maniera obișnuită de a vedea lucrurile.

În concluzie la această parte generală, rezumând, putem spune că poziția antirealistă susține că nici un enunț nu are valoarea de adevăr independent de cunoașterea noastră efectivă a lumii. Dummett propune o poziție intermediară : se poate admite că orice enunț are o valoare de adevăr independent de cunoașterea efectivă pe care noi o posedăm în context ; însă valoarea de adevăr nu este independentă de posibilitatea acestei cunoașteri, dacă avem o rațiune de a gândi pe care o presupune determinată. Legea terțului exclus n-ar trebui admisă ca evidentă într-o explicație a limbajului fidel *principiilor epistemologice empiriste*.

Platonismul ca filosofie a matematicii oferă un anumit *„tablou“* al enunțurilor matematice, acestea fiind despre o *„realitate obiectivă externă“* și având calitatea de a fi adevărate sau false. În ce constă și ce natură are această *„realitate matematică“*, este o componentă fundamentală în *teoria adevărului corespondență*, relevantă în „perspectiva realistă“ pentru clasa enunțurilor matematice. În limbaj matematic modern vom spune că locuitorii acestei *existențe matematice* sunt *„structurile abstracte“ atemporale* și *imuabile*, distincte de structurile fizice, concrete. *Statutul ontologic* al obiectelor matematice poate fi caracterizat prin apel la *„obiecte abstracte“*, platonismul fiind o filosofie prin excelență care crede în (și postulează) existența obiectelor abstracte, diferența *„abstract-concret“* fiind necesară, în mod special, când vrem să operăm demarcări ale filosofiilor matematice fundamentale : *platonismul* și *nominalismul*. Un obiect concret are proprietatea că ne afectează simțurile, referința lui are loc în termenii impactului senzorial și, mai mult, poate fi implicat în *„interacțiunea cauzală“* cu alte obiecte ; poate fi cauza schimbării, pare destul de plauzibil, însă eza că acesta nu poate fi subiectul schimbării este problematică“. Și el se întreabă : poate fi *„formă“* un obiect al schimbării ? nu poate numărul oilor pe un deal să crească ? În ceea ce privește al doilea subiect abstract — *numărul* — Dummett invocă răspunsul dat de G. Frege, anume că nu există un număr care este totdeauna (at all times) numărul oilor pe un deal, dar care acum este mai mare, acum mai mic, acum dispare ; mai curând, continuă Dummett[9, p. 491], schimbarea constă în faptul că numărul care este numărul oilor pe deal la un moment dat este mai mic decât numărul oilor pe un deal la un moment ulterior (exemplul original al lui Frege este numărul locuitorilor Berlin-ului). Utilizând *„procedura lui Frege“* am putea lua *„mărimea populației Londrei“* ca numele unui *număr veritabil*, dar ne confruntăm cu inconveniența că *„numerele variabile“* nu pot fi identificate cu numere care aparțin *„sistemelor matematice de numere“ ;* acest sort de numere (variabile) conform metodei lui Frege sunt superfluu (și deci eliminabile). Vorbind despre *culori* și *forme* comentariul lui Dummett [9, p. 492] reține distincția : primele sunt obiecte concrete, ultimele sunt abstracte, culorile sunt obiecte posibile ale *ostensiunii*, ceea ce înseamnă să aibe o poziție și în consecință să fie subiecte ale schimbării. Dummett [9, p. 492] scrie : „Deși argumentul lui Frege poate respinge cazuri de schimbări al căror subiect sunt obiectele abstracte, încă nu arată de ce ele nu pot fi subiecte ale altor schimbări. Admis că, atunci când (prima) oaie se rătăcește pe deal nu există număr care a crescut, nu este încă cazul că numărul 30 a suferit o schimbare diferită, anume de la a fi numărul oilor pe (un) deal la un număr mai mic al oilor pe (un) deal? Inspirați de succesul anterior, putem încerca să argumentăm că nu a apărut nici o schimbare: 30 a fost și încă este numărul oilor care erau pe deal la un moment dat, și nu este și niciodată nu a fost numărul oilor care sunt pe (un) deal la un moment ulterior... dar prin acest mijloc am putea stabili că nici o schimbare nu va lua locul vreodată... Dacă schimbarea este analizată cum a sugerat Russell, anume *că posesiunea a diferite valori de adevăr de către enunțuri care diferă intern numai în ceea ce privește referințele temporale,* atunci presumabil *o schimbare* într-un obiect va fi analizată, similar, ca o *diferență în valoarea de adevăr* dintre două enunțuri care conțin un termen care referă (la) obiectul respectiv, și care diferă intern numai privind referințele lor; și în acest caz, exemplul de mai sus ilustrează felul de schimbare pe care un număr îl poate suferi". Dummett crede că putem descrie o *„schimbare internă"* ca fiind una astfel că cele două enunțuri ale lui Russell n-au conținut referința la sau cuantificarea peste orice alte obiecte. Acesta va fi prea strict; „există în mod cert *schimbări relaționale* care sunt totuși schimbări în obiect". Exemplele date de Dummett *sunt un om căsătorit, devenit tată,* semnifică schimbări al căror subiect este omul respectiv; iar cazul paradigmatic este cel al schimbării poziției spațiale; este prea strict să admitem numai schimbări relaționale care acompaniază o schimbare internă și prea slab să pretindem ca schimbarea relațională să fie răspunzătoare pentru una internă. Concluzia pe care o trage Dummett este că o *„schimbare"* implică o *„interacțiune cauzală"* dintre obiect și altceva și că *„obiectele abstracte"* nu pot participa la interacțiuni cauzale. Este legitimă întrebarea: de ce obiectele abstracte nu sunt implicate în interacțiunea cauzală; interacțiunile cauzale antrenează schimbări interne ale obiectelor implicate în ele. Dar la o asemenea imagine a interacțiunii cauzale putem găsi contraexemple și unul îl reprezintă cazul atracției gravitaționale.

În discuția despre *obiecte abstracte* nu este atât de importantă linia de demarcație dintre ele și obiectele concrete, modul în care o trasăm, depinde de limbajul nostru, în ultima analiză de faptul cât de fină este structura lui. Dacă nu există nici un motiv pentru a formula o *distincție severă,* trebuie totuși să concedem că ea are o anumită relevanță privind relația dintre referință și nume (sensul unui nume propriu este modul prin care noi recunoaștem un obiect ca referentul lui). Un obiect ales prin intermediul *ostensiunii* poate fi identificat ca purtătorul numelui; dar putem lărgi conceptul de *ostensiune* încât să includă referința la un obiect și altfel decât prin simțul văzului, și operant pentru obiecte care nu pot fi văzute (unele prea mari sau prea mici). Spre deosebire de obiectele concrete, cele abstracte pot fi *„referite"* cu ajutorul unor expresii verbale *(„forma acestuia"),* cu statut de valoarea unei funcții pentru un obiect concret. Avem situații în care ne *„confruntăm"* cu un obiect și deci obiectul este identificat cu purtătorul numelui, chiar deși acesta este uneori prea vag. Dar, ferm, nici o confruntare cu un obiect abstract nu este posibilă, el nefiind localizat spațio-temporal, și deci neperceptibil senzorial. Tendința *„in nuce“* aici ar fi excluderea acestor entități (abstracte) din *ontologie,* pe care Frege a dezavuat-o în *„Grundlagen“* (Frege [2]), ostilitatea sa vizând nu atât *nominalismul* (refuzul obiectelor abstracte) cât *psihologismul,* care consideră că termenii pentru obiecte abstracte stau pentru *„imagini mentale“*. Critica fregeană surprinde geneza psihologismului ca rezidând într-o incorectă interpretare a semnificației unui nume ca luată izolată de context, cum tot așa procedează *nominalismul,* referitor la semnificația numelui unui obiect abstract, confruntarea cu imaginea mentală fiind reiterată și în această modalitate, inclusiv în eroarea modernă că numele nu are nici o referință ; Frege cere explicit ca analiza semnificației unui nume să ia în considerare contextul propoziției. Dictonul că un cuvânt are semnificație numai în contextul unei propoziții a fost intenționat ca o *teză despre sens,* uzul dictonului fiind intenționat ca o justificare pentru *„definiția contextuală“* (a numelui) ; cum prin definiția contextuală nu obținem un răspuns la problema care este *referința* numelui, putem interpreta dictonul (un cuvânt are semnificație numai în context) și ca o *teză despre referință :* este nelegitim să presupunem că putem totdeauna să pretindem să fie arătat obiectul care este purtătorul unui nume, cf. M. Dummett [9, p. 496]. Faptul că o expresie este sau nu un nume nu depinde de cunoașterea sensului ei ci de *rolul ei logic,* în propoziție, stabilit pe criterii formale, legat parțial de aspecte sintactice ale contextului în care expresia este meaningfully (complet semnificativă), și de validitatea anumitor patternuri de infererntă descriptibile în termenii unor simple transformări ale propozițiilor care conțin expresia respectivă. Dictonul (un nume are semnificație numai în contextul unei propoziții) conduce la respingerea concepției despre un sens filosofic special al *„existenței“* ce ne va permite să afirmăm că, în acest sens special, numerele nu există în mod real, dar continuăm să asertăm enunțuri existențiale ale aritmeticii, ca de exemplu că există un număr între 5 și 20. Dispunem acum de un singur sens al cuvântului *există* și anume cel dat de cuantificatorul existențial, în virtutea căruia condiții de adevăr determinate pentru un enunț existențial se dorește a fi adevărat, implicând că există „ceva“ care satisface condiția formulată în enunț. Această procedură nu-l incomodează pe nominalist, el va respinge doar cuantificarea pe obiecte abstracte, cum sunt numerele. În lumina liniei de gândire fregeene despre noțiunile de *nume proprii* și *obiect* trebuie recunoscută distincția dintre obiecte abstracte și obiecte concrete dar nu ca una esențială. Acum, dacă sensul unui nume nu este dat (sau nu poate fi dat totdeauna) în forma criteriului privind identificarea unui obiect ca purtătorul unui nume, atunci unde trebuie căutat și găsit ? (în cazul enunțurilor aritmetice, cum specificăm condițiile de adevăr, dacă nu începem cu referințele termenilor constituienți ?) Ne confruntăm cu o problematică dificilă : „care este evoluția realismului încorporat în uzul relației nume-purtător ca prototip al referinței și în principiul că referenții cuvintelor noastre sunt ce noi vorbim despre ? În ce sens presupunem că obiectele abstracte sunt constituienți ai unei realităţi externe, când posesiunea referinţei de către numele lor a fost interpretată ca o chestiune în întregime internă limbajului ?" (M. Dummett [9, p. 499]). Ne aflăm în acest punct în faţa unei observaţii relevante şi anume există o *„tensiune"* considerabilă între *realismul* lui Frege şi *„doctrina semnificaţiei numai în context"*. După Frege, nume ale obiectelor abstracte au referinţă exact în acelaşi sens ca numele pentru obiecte concrete. Pentru numele obiectelor abstracte de anumite genuri păstrăm explicaţia sensului unui nume constând în criteriul pentru identificarea *„purtătorului"*; pentru numerele naturale putem alege numerele dintr-un sistem particular de notaţie. Conflictul dintre *teoria realistă a referinţei* şi *doctrina contextului* i-a inspirat lui Frege drept soluţie definiţia explicită a expresiei funcţionale în termenii *claselor*; el va construi concepte ca *numere* sau/şi *direcţii* ca *clase*, încercând să facă plauzibil faptul că numele numerelor şi direcţiilor pot fi considerate ca având o referinţă. M. Dummett în lucrarea citată comentează : „reducerea tuturor obiectelor abstracte la clase nu produce o schimbare esenţială în situaţie ; înseamnă că există numai un fel de obiecte abstracte în loc de multe feluri, subsumând clasele noţiunii, mai generale, de *„domenii de valori"*, ca în Frege [3]. Sensul unui nume al unui obiect abstract rezidă în criteriul pentru adevărul *„enunţurilor-identitate"* care conectează un nume cu un nume preferat să spunem *numeralele*. Putem explica atribuirea referinţei numelor obiectelor abstracte ? Cum s-o facem ? Şi, mai mult, observă Dummett [9], putem realmente justifica aserţiunea că obiectele abstracte sunt constituienţi ai realităţii, în acelaşi mod în care sunt cele concrete ? O problemă care depinde de *tipul criteriului* pentru *existenţa obiectelor abstracte*. M. Dummett include în expunerea sa două concepţii divergente, având ca reprezentanţi pe Aristotel şi Strawson. Posesiunea referinţei redată printr-o descripţie definită a unui individual este contingentă, după Strawson ; există descripţii definite ale universalilor, care admit o referinţă *(culoarea intermediară* între galben şi roşu). Aristotel a susţinut că existenţa a *ceva* într-o categorie alta decât substanţa, va depinde de faptul că există o substanţă în care acel lucru a fost sau poate fi predicat (în exemplul dat, există un obiect material sau vizual care are culoarea intermediară între galben şi roşu). Invocând criteriul de existenţă al lui Aristotel, este un fapt contingent, deşi cunoscut că există o *culoare intermediară* între galben şi roşu, deoarece despinde de faptul că există un obiect cu această proprietate. Succint, Strawson formulează un *criteriu de existenţă* care garantează numai o *existenţă posibilă*, iar Aristotel un criteriu mai complex după care matematica are de-a face cu o existenţă atât posibilă cât şi actuală ; realismul lui Frege adoptă crteriul aristotelic de existenţă : matematica vizează o existenţă actuală. Frege nu acceptă următoarea concepţie despre *infinitatea* numerelor naturale : „pentru orice n, ar putea să existe n + 1 obiecte" ; în spirit fregean următoarea formulare este preferată : „pentru orice n, există un fel de F obiecte, astfel încât să existe actualmente n + 1 F obiecte". Prin analogie cu noţiunea de *mulţime pură*, Frege identifica *obiecte abstracte pure* a căror existenţă o numeşte *analitică ;* obiectele abstracte pure au o existenţă recunoscută ca independentă de existenţa obiectelor concrete şi de orice observaţie efectuală asupra lumii. Felurile de obiecte ale existenței depind (când vrem să le identificăm) de structura limbajului nostru, discriminarea lor este legată de abilitatea noastră de a folosi expresii, nume, termeni generali. Ideea fregeană că numele proprii au sens în baza criteriului de identitate ar putea fi în acord cu propoziția din Wittgenstein [1]: „Lumea este totalitatea faptelor, nu lucruri"; dar interpretând literal acest enunț în perspectiva fregeană constatăm o eroare, deoarece faptele aparțin domeniului *sensului* și *nu referinței*; nu lumea vine spre (la) noi, ci noi, prin uzul limbajului nostru impunem o structură asupra ei (M. Dummett [9, p. 504]). Criteriul fregean (de fapt, aristotelic) al existenței obiectelor face ca existența obiectelor abstracte de anumite feluri să fie contingentă, astfel teoria mulțimilor practică cuantificarea pe *obiecte posibile* fără să apeleze la noțiuni modale.

În problema *„obiectelor abstracte pure"* concepția realistă a referinței este confruntată cu grave dificultăți, căci apare imposibil să le considerăm constituienți ai realității externe. M. Dummett [9, p. 505] comentează statutul ontologic al obiectelor abstracte pure: „Obiectele abstracte pure nu sunt mai mult decât *reflecții* ale anumitor expresii lingvistice care se comportă, în virtutea criteriilor formale simple, într-o manieră analoagă numelor proprii ale obiectelor, însă al căror sens nu poate reprezentat constând în capacitatea noastră de a identifica obiecte ca purtătorii lor". Analogia *procedurii identifcării* unui obiect concret ca purtătorul unui nume ne ajută să explicăm analogia dintre rolul logic al numelor proprii ale obiectelor concrete și termenii abstracți. Dar când invocăm *imaginea realistă* (descrierea, tabloul) analogia respectivă devine inoperantă deoarece, să spunem, „recunoatșerea adevărului unei ecuații numerice nu poate fi descrisă ca identificarea unui obiect exterior nouă ca referent al unui termen... nu ne cere să discernem numerele printre constituienții lumii externe" (M. Dummett [9]).

Platonismul (realism matematic) postulează existența unei *realități* (abstracte) în virtutea căreia enunțurile matematice sunt adevărate sau false, această existență abstractă constând în structuri, obiecte abstracte imuabile nelocalizate spațio-temporal; am încercat s-o descriem (e vorba de realitatea abstractă) din perspectivă realistă invocând în mod deosebit concepțiile lui Frege. *„Metafora descoperirii"* acestei *existențe matematice corespunde* pe deplin acestui enunț fregean: „matematicianul nu poate crea mai mult decât geograful; el poate numai să descopere ce există și îi dă un nume". Enunțurile matematice sunt obiectiv determinate ca adevărate sau false independent de mijloacele noastre de demonstrație sau respingere a lor, aidoma enunțurilor factual relevante despre universul fizic. Teza de mai sus indică conceperea unei teorii într-o corespondență (similară unui izomorfism) cu numai o structură matematică, modelul intenționat al teoriei. O asemenea situație — existența unei *structuri unice* — nu întâlnim în teoria mulțimilor; aici avem enunțuri set-teoretice, cum este *ipoteza continuului* despre care știm că nu este nici adevărată, dar nici absolut falsă; în ansamblu, știm că unele enunțuri set-teoretice sunt adevărate în unele *modele* și false în altele. În acord cu *„tabloul platonist"* (descrierea platonistă) al matematicii, dacă este realizat consensul asupra *noțiunii intuitive*, de exemplu, *cea de număr natural*, care are o extensiune determinată, atunci, conform concepţiei platoniste, enunţurile teoriei matematice (care este formulată) dspre noţiunea intuitivă, (structurile respective) pot fi adevărate sau false, independent de faptul că noi le putem demonstra sau respinge. Vom vedea că o concepţie opusă au elaborat constructiviştii, dar mai întâi facem o digresiune despre *formalism,* înţeles ca o varietate a constructivismului.

Deşi se consideră că există similitudini între *platonism* şi *constructivism* (să luăm intuiţionismul ca o varietate a acestuia din urmă) atunci când le interpretăm în *„perspectiva realistă“ : platonismul* calificat drept *realism matematic,* iar constructivismul, intuiţionismul drept *„realism mental“* (realismul constructelor şi construcţiilor), la o analiză mai atentă identificăm similitudini şi între *platonism* şi *formalism* (acesta într-o versiune mai puţin strictă, aceea care acceptă noţiunea clasică de *model* sau *interpretare);* în lumina acestei varietăţi de formalism, o teorie matematică este considerată a fi derivarea, în interiorul logicii predicatelor de ordinul întâi, sau de ordin mai înalt, consecinţelor unei mulţimi fixate de formule (axiome), constantele logice au semnificaţii fixate, cele clasice, şi constantele nelogice care aparţin unor categorii de vorbire. Asumpţiile platoniste îşi găsesc *„travesti-*ul“ în *teoria modelelor (semantica logică),* modalitatea prin care realismul (platonismul) se „infiltrează“ în formalism. Mai precis, formalismul este diferit de platonism în sensul că neagă existenţa unui *model* determinat pentru o teorie matematică considerată ; pe de altă parte, formaliştii sunt de acord cu platoniştii referitor la modul în care valoarea de adevăr a unei propoziţii (dintr-o teorie matematică) este determinată relativ la un model dat al teoriei respective. În acest punct este de remarcat faptul cine este mai justificat în aserţiunile făcute, platonistul sau formalistul ? Mai concret, *platoniştii* afirmă că axiomele teoriei determină până la *„izomorfism“* structura modelului intenţionat, există un asemenea model pe care îl avem în minte, în timp ce *formaliştii* susţin ideea *relevanţei egale* a tuturor modelelor sistemului de axiome, sau într-o formulare mai precisă, interesul nostru trebuie orientat în mod egal spre studiul tuturor modelelor admise, prin interpretare, de sistemul axiomatic formal construit. *Poziţia platonistă,* via acest gen de formalism, care nu este strict, este considerabil *„slăbită“* în sensul că *„conţinutul-semantic-ontologic“* al unei aserţiuni matematice are caracter *„condiţional“* formulat în termenii : „dacă există o structură care satisface axiomele analizei matematice (sau teoriei numerelor, sau teoriei mulţimilor), atunci cutare teoremă este valabilă desprea cea structură“ (M. Dummett [2]). Formaliştii formulează *„interpretări ipotetice“* ale teoremelor recurgând la formulări : „Dacă există un model R de numere reale, atunci pentru orice model Q de numere raţionale, teorema T are loc (este valabilă) în Q“. Platonistul va accepta teorema respectivă ca adevărată despre numerele raţionale, deoarece este convins de existenţa numerelor reale, procedând *(necritic)* el va considera *„existenţa numerelor reale“* ca un fapt şi nu ca o ipoteză ; am folosit cuvântul *„necritic“* pentru a sugera un sort de *„scepticism“* subiacent unei *„înclinaţii constructiviste“* care suspectează inteligibilitatea propoziţiilor despre *„totalităţi ne-numărabile“*. Atitudinea formalistă faţă de *existenţa structurilor,* studiate de disciplinele fundamentale ale matematicii (teoria numerelor, analiza, teoria mulțimilor) se dovedește implauzibilă și ineficientă, pentru cercetările matematice, cu atât mai mult cu cât structurile studiate de acestea, fiind fundamentale, au o relevanță amplă pentru întreaga matematică ; într-adevăr, existența unei structuri pe un domeniu numărabil nu mai este problematică (ca în perspectiva formalistă) din moment ce *existența numerelor naturale* este postulată și asumată ; conceptul *„infinit de mulți“* își găsește în structura acestor entități matematice — numerele naturale — *„sursa generatoare“*, după cum conținutul numerelor reale constituie sursa noțiunii de *„infiniți (infinități) mai înalți“*. Teoria mulțimilor și analiza comportă axiomatizări în cadrul logicii de ordinul logicii de ordinul întâi și conform teoremei Löwenheim-Skolem au modele numărabile, dacă au, iar în ceea ce privește modele nenumărabile apar interesante prin descoperirile și consecințele ce le sugerează. Observăm din abordarea comparativă a platonismului și formalismului că platonismul este fructuos matematic și *„generos“ ontologic*. Atât platoniștii cât și formaliștii consideră că valoarea de adevăr a unui enunț matematic este independentă de cunoașterea noastră, de demonstrație. Prestigiul platonismului, aflat în creștere, oferă o înțelegere a matematicii împărtășită de un procent semnificativ al matematicienilor : postulează o existență matematică (structuri ale obiectelor matematice), pe care noi o aprehendăm cu ajutorul facultății intuiției intelectuale, fiind, față de aceste entități abstracte, analogul puterilor percepției pentru obiectele fizice. Dar cât *„capturează“* sistemele axiomatice formale din această existență matematică ? *„Paradoxul lui Skolem“* contestă fundarea pentru matematică oferită de teoria axiomatizată a mulțimilor, care în virtutea teoremei Löwenheim-Skolem, este incapabilă să restituie (reconstituie) axiomatico-formal comprehensiunea teoriei mulțimilor, știut fiind că numerele cardinale transfinite — creație a lui Cantor, această *„domesticire“ a transfinitului, „paradis“* al lui Cantor, cum a numit-o Hilbert, din care nu acceptă să ne alunge paradoxurile — fac parte din subiectul ei specific ; într-adevăr, argumentul Löwenheim-Skolem relevă acest fapt : dacă teoria mulțimilor este complet axiomatizată, atunci are un *model numărabil* (și admise fiind tehnicalitățile despre modele tranzitive) teoria axiomatizată a mulțimilor nu poate conține ceva *nenumărabil“* (M. Țurlea [2, p. 154]). După W. D. Hart [1] argumentul lui Skolem conține următoarele aspecte semnificative : i) dacă există un *„adevăr absolut“*, existența ierarhiei set-teoretice cantoriene a infinitului, atunci trebuie să dăm un enunț matematic exact al acestui adevăr, precum și justificarea lui ; ii) a da acest enunț precis echivalează cu a putea specifica un limbaj formalizat în care să putem da demonstrația lui, limbajul formalizat va fi un formalism de ordinul întâi și numărabil, iar ca enunțul acestui *„adevăr absolut“* (existența ierarhiei set-teoretice a infinitului) să fie *neambiguu* și să poată fi justificat, acest *formalism* trebuie să satisfacă exigența de categoricitate ; iii) punctele i) și ii) și *adevărul absolut* că există ierarhia cantoriană a infinitului, care din punct de vedere al teoriei modelelor implică faptul că teoria formală a mulțimilor admite un model nenumărabil, se arată incompatibile cu teorema lui Löwenheim-Skolem. Acum, dacă luăm ca asumpții teorema Löwenheim-Skolem, i) și ii) obținem *negația* adevărului că există în mod absolut ierarhia cantoriană a infinitului ; de aici nu decurge încă *„existența relativă“* a acestei structuri de entități. S-au propus de către exegeți clarificări și interpretări : de ce neambiguitatea (precizia) enunțului respectiv se obține numai în *formalismul de ordinul întâi numărabil ?* de ce consecințele extrase din (prin) argument să nu vizeze *„puterea de expresie“ a formalismului* și nu contestarea existenței absolute a *nenumărabilității ? Numărabilitatea* formalismului, la care se recurge, ar fi relevantă pentru ființe raționale, facilitând o „manipulare“ cu entitățile matematice respective și pare dezirabilă din *punct de vedere constructivist* (la care Skolem a aderat ca unul ce a pledat pentru *„modul recursiv de gândire“* (vezi Skolem [1]). De altfel cerința de *numărabilitate* pentru formalismul ales și inseparabilitatea *„relativității“* conceptelor din teoria mulțimilor de axiomatizare este formulată expres în Skolem [2] : „Că această *relativitate* trebuie să fie inseparabil legată de orice axiomatizare este clar : pentru că ea se bazează pe teoremele generale ale logicii matematice menționate mai sus. Cu scopul să obținem ceva absolut nenumărabil noi vom avea un număr infinit absolut nenumărabil de axiome sau o axiomă care ar putea produce un număr absolut numărabil de propoziții de ordinul întâi. Însă aceasta va conduce în toate cazurile la o introducere circulară a infinităților mai înalți ; adică, pe baze axiomatice, infiniții mai înalți există numai într-un sens relativ“.

Dilema noțiunii de *nenumărabilitate* are unele analogii aplicabile *continuului*. Explicitând teoria formală a mulțimilor observăm că posedă un *model numărabil* în mulțimea (sistemul) de numere întregi, adică o corelație între fiecare mulțime din teoria formală și un întreg care o reprezintă în model. După Myhill [1] *a fortiori* există o corelație între mulțimile particulare care formează *„continuul“*, cu care operează teoria formală a mulțimilor, și o submulțime a întregilor. Urmează de aici o consecință dezagreabilă și anume că teoria formală a mulțimilor operează cu un *„continuu rău“*, deoarece se asertează, în acest mod, că este *numărabil*, ceea ce contrazice teza sistemului formal al mulțimilor, conform căreia continuul este nenumărabil, adică nu poate fi enumerat de nici o corelație existentă. Se impune inferența că această situație descrisă relevă incapacitatea teoriei axiomatice formale a mulțimilor de a exprima adecvat conceptele de *nenumărabilitate* și *continuu. „Paradoxul lui Skolem“* conține semnificații filosofice importante : „sau considerăm conceptul de submulțime (central în teorema lui Löwenheim-Skolem și în *„paradoxul lui Skolem“)* ca pe o *„realitate platonică“* și nenumărabilitatea devine *existență absolută,* dar în acest caz „paradoxul“ lui Skolem interzice axiomatizarea și sugerează revenirea la teoria *„naivă“* a mulțimilor, cu riscurile apariției paradoxurilor ; sau acceptăm diferite grade de axiomatizare, iar noțiunile din teoria mulțimilor comportă *„relativitatea“*, urmând să vorbim după Skolem, de *relativizarea* cardinalilor (cf. A. Fraenkel, Y. Bar Hillel [1, p. 108]) ; semnificația importantă a acestei *„dileme“* enunțate constă în introducerea unei *„distincții de natură“* între *o teorie intuitivă* și o *teorie formală,* în particular teoria mulțimilor a lui Cantor este mai *comprehensivă* în subiectul ei specific, adică, de exemplu, conține mulțimi ne-numărabile admise în mod absolut (în sens platonician) care nu sunt *„reconstituite (restituite)* în teoria axiomatic-formală a mulțimilor“ (M. Țurlea [2, p. 155—156]).

Divergențele dintre *platoniști* și *constructiviști* apar în legătură cu problema unor noțiuni (entități, structuri) ca *nenumărabilitatea, continuu, mulțimea putere a unei mulțimi* etc. Convingerea platoniștilor este că *asemenea structuri matematice există*, iar în investigarea prin teoriile matematice se dovedește incapacitatea noastră de a formula o *caracterizare formal determinată* a acestor *„entități-structuri"*, ceea ce înseamnă că *„înțelegerea"* noastră a acestor *structuri* depășește abilitatea noastră de a le descrie, nu este *„acoperită"* de recunoașterea și stabilirea adevărului axiomelor, de validitatea metodelor de demonstrație. Pentru constructivist a vorbi despre *realitatea matematică*, înseamnă a vorbi despre una *determinată*, prin mijloace disponibile matematicianului, pentru constructivist, care susține că toate totalitățile determinate sunt numărabil finite sau numărabile, *ne-numărabilitatea* continuului înseamnă că orice metodă de specificare a *totalității mulțimilor* (sau șirurilor infinite) de *numere naturale* trebuie să ofere un mijloc de specificare a *extensiunii* pentru o astfel de totalitate mai cuprinzătoare. Platonismul afirmă că există o *„supertotalitate"* care include toate mulțimile și șirurile de atins printr-o reiterare a unui proces de extindere, sau există o operație de reiterare, astfel că după un număr transfinit suficient de reiterări nu se mai produce (atinge) ceva nou (cf. M. Dummett [2]). Adică, platonistul procedează astfel : presupune ca fiind date 0 și operația *succesor*, există o totalitate determinată de numere naturale, deci un concept de *„finit"* cu ajutorul căruia determinăm în mod definit orice obiect prin modailtatea „atingerii" lui, pornind de la 0, prin *„finit de multe"* aplicații ale operației succesor. Noțiunea de *„mulțime de numere naturale"* descrie un asemenea *„obiect-structură"* (al existenței matematice) numit *mulțimea numerelor naturale*. În perspectiva platonistă se va afirma că dispunem de o concepție despre o *totalitate determinată* conținând toate mulțimile de numere naturale pe care le vizăm clar și putem să formulăm condiții de adevăr nete pentru propozițiile care implică cuantificarea pe ele înțeleasă ca o conjuncție infinită sau o disjuncție (infinită ?). Renunțând la această asumpție, *descrierea constructivistă* a subiectului îi ia locul. Formalismul (ca varietate a constructivismului) se dovedește ineficace în surprinderea *„formală"* a existenței matematice la care accedem cu ajutorul *intuiției* (platoniciene) ; noi nu putem surprinde și caracteriza precis totalitatea numerelor naturale, pentru care dispunem de o intuiție dacă nu precisă, oricum relevantă ; *caracterizare precisă,* se înțelege, prin mijloace formale. Cum nu se realizează aceasta, înseamnă că aprehensiunea înțelegerii noastre a acestei structuri abstracte (e vorba de mulțimea numerelor naturale) nu este reductibilă la o pur și simplu manipulare formală a simbolurilor. Formalizarea, pe care noi o formulăm pentru investigarea (și redarea) unei *structuri abstracte* permite, pe lângă modelul intenționat (avut în minte) să descrie respectiva realitate abstractă matematică și alte modele ; această situație nu este prea fericită pentru formalizare, ea nu dă descriere adecvată nici a realității matematice respective și nici a modelului construit prin rafinarea intuiției noastre despre acea realitate, obiect, structură matematică. Asemenea situații *„induc"* (și *„ispitesc"* la) o interpretare platonistă a conceptului semantic de *model*. *Incompletitudinea* sistemelor formale propuse pentru matematică a indicat existența *„modelelor non-standard"*, în care unele enunțuri aritmetice sunt arătate ca false, în timp ce erau adevărate în modelul standard. Din punctul de vedere platonistic, sistemul formal era menit să formalizeze *„înțelegerea noastră intuitivă"* a unor structuri abstracte (modelul standard, intenționat) și cum *sistemul formal* eșuează în acest demers de *„capturare completă"* a intuiției noastre despre aceste structuri, ne confruntăm cu referința la *structuri deviante*, comentează Dummett [2], și pe această cale ajungem la *modele non-standard*, a căror caracteristică esențială este *inexprimabilitatea* în interiorul sistemului formal. Așadar, ce nu poate face sistemul formal (relevarea completă a realității matematitce investigate) face *intuiția intelectuală* prin capacitatea ei *„ocultă"*. *Caracterul determinat al realității matematice* asupra căreia poartă o teorie matematică se constituie prin stipularea condițiilor de adevăr și fals, sau a condițiilor de demonstrabilitate (model intuitiv, demonstrație intuitivă). Modelul intuitiv înseamnă *„jumătate"* din concepția despre cum determinăm condițiile de adevăr pentru o clasă dată de propoziții, și nu reprezintă o garanție ultimă a consistenței și nici produsul unei facultăți speciale de achiziționare a *înțelegerii* matematice, spune M. Dummett [2]. Intuiția nu este o sursă specială, inefabilă a înțelegerii, ci o idee în stadiul *embrionar*, în raport cu „înțelegerea articulată" a situației matematice în cauză.

Pentru *constructivist* noțiunea de *enunț adevărat* se identifică cu posesiunea unei demonstrații. Poziția constructivistă identifică *adevărul* cu *demonstrabilitatea intuitivă*, aceasta realizată într-un mod corect. Poziția platonistă ia conceptul de *demonstrație intuitiv corectă* drept complet definit, dacă pentru orice enunț dat sau există o demonstrație a lui sau nu există, și aceasta are loc independent de faptul dacă noi cunoaștem existența unei asemenea demonstrații, sau a unui mijloc de o construi ; iar descoperirea ulterioară a unei demonstrații are pentru platonist semnificația că *ea a existat dintotdeauna*, și noi am fost capabili s-o efectuăm numai *acum*. Platoniștii și consttructiviștii, în egală măsură, nu vor pune semnul de *identitate* între *adevăr* și *demonstrabilitate intuitivă* : „dacă enunțul că există o demonstrație a unei propoziții date posedă o valoare de adevăr independent de cunoașterea noastră, atunci enunțul că există un număr natural care are o proprietate definită trebuie, de asemenea, să posede o valoare de adevăr, independent de faptul că noi o cunoaștem sau chiar am putea-o ști" (Dummett [3]). Platonistul susține că orice enunț matematic posedă o valoare de adevăr definită ; el formulează în context pretenția : domeniul variabilelor este atribuit în mod definit, se aplică predicatelor primitive, și după aceasta toate enunțurile formate din aceste predicate prin intermediul operatorilor propoziționali și ai cuantificării pe domeniul respectiv achiziționează o valoare definită, *adevărat* sau *fals*. Lucrurile stau convenabil pentru teoria numerelor și analiză, dar situația devine problematică când intrăm în sfera teoriei mulțimilor, unde domeniul variabilelor nu este atribuit de o manieră complet determinată, un prilej remarcabil să întâlnim enunțuri care nu comportă o valoare de adevăr definită și în această ipostază se află *ipoteza continuului*.

Antirealismul, în raport cu care *constructivismul*, în special cel *matematic* reprezintă o varietate, asumă un model de inspirație *intuiționistă*; intră în discuție problema validității argumentelor deductive care conțin enunțuri ale *„clasei disputate“*; respingerea *terțului exclus* cere introducerea unei valori de adevăr de mijloc (middle truth-value). Cum se raportează intuiționiștii, în manieră constructivistă, la realism (și deci la *platonism* ca *realism matematic*)? *Esența realismului*: pentru orice enunț care are un sens definit trebuie să existe *ceva*, în virtutea căruia afirmația sau negația (enunțului) este adevărată. Intuiționiștii (constructiviștii) consideră justificată aserțiunea unei disjuncții numai când există o metodă cu ajutorul căreia se asertează ca adevărat un membru (particular), al disjuncției. Pentru ei *nu există ceva* (în sensul platonismului) care face enunțul adevărat sau fals, bunăoară adevărurile logice sunt o excepție de la teza realist-platonistă. Platonistul consideră justificată asertarea lui [P sau non P] pe baza faptului că trebuie să existe ceva care determină că sau P sau non P să fie adevărat, și prin urmare enunțul [P sau non P] este adevărat. *Intuiționismul* respinge explicația platonistă (există *„ceva“* în virtutea căruia un enunț este adevărat sau fals); de exemplu, concepția realistă clasică reprezentată de Frege și Wittgenstein [1] cu privire la *forma generală a explicației sensului unui enunț* constă în stipularea *condițiilor de adevăr*, sensul operatorilor propoziționali fiind explicat prin *„tablourile de adevăr“*, iar prin referință la acestea se justifică considerarea unor forme ca *„forme logic adevărate“*. Intuiționiștii (constructiviștii) admit ca formă fundamentală a explicației semnificației enunțurilor enunțarea *criteriului* că justificarea aserțiunii unui enunț este conferită de *„posesiunea* (efectivă) *a unei demonstrații“*. Explicăm criteriul pentru aserțiunea enunțului complex în termenii criteriului pentru asertarea constituienților lui; în cazul enunțului [P sau non P] aserțiunea luieste justificată numai în cazul când suntem justificați să asertăm sau P sau non P. Referința la asemenea explicații justifică asertarea unui enunț de o anumită formă.

Există diferențe semnificative între concepția lui Wittgenstein și concepția intuiționiștilor. El susține că depinde de noi ca un enunț să fie *necesar*, odată făcută această alegere, prin aceasta determinăm parțial sensul cuvintelor conținute în enunțul respectiv, le atașăm sensul pe care îl dorim (Wittgenstein [3, v, 23, p. 179]). (Am văzut că o asemenea concepție cu privire la „determinarea completă *ulterioară*“ a sensurilor cuvintelor nu este admisă în concepții ca cele ale lui Frege și Wittgenstein [3]).

M. Dummett [1] consideră implauzibilă și chiar greșită această idee wittgensteiniană după care justificarea aserțiunii (asertării) unui enunț nu are legătură cu „uzul cuvintelor“, afirmând că dacă Wittgenstein ar avea dreptate *comunicarea* s-ar afla în pericolul unui *„colaps“*; o asemenea *„decizie“* wittgensteiniană ar afecta nu numai enunțul de acea formă particulară ci și toate celelalte sorturi de enunțuri (având în vedere că o explicație relevantă a uzului limbajului ar evidenția că este imposibil să dăm explicația *oricărui* enunț fără a da o explicație a sensului fiecărui enunț. *„Diferența în înțelegere“* a anumitor forme ale cuvintelor este înalt relevantă pentru procesul comunicării și odată descoperită trebuie să încercăm s-o remediem printr-o altă alegere a formei cuvintelor pe care oponentul (interlocutorul) o înțelege și care exprimă ce noi așteptăm. Întrebat cum el înțelege enunțul el poate oferi o explicație ca și a noastră, dar acest element nu poate constitui o „garanție“ că el înțelege ceea ce noi înțelegem ; atunci când el recunoaște anumite forme ca *logic adevărate* pe care noi nu le recunoaștem înseamnă că a construit argumente care conduc la enunțul dat ca o concluzie, cu premise pe care le acceptăm, deși n-ar trebui să acceptăm argumentul. El va aserta enunțul în împrejurări în care noi nu o facem. Dummett ilustrează această idee cu următoarea situație : o discuție între un matematician clasic și unul intuiționist despre *cuantificatorul existențial*. Matematicianul clasic formulează aserțiuni existențiale pe care cel intuiționist nu le acceptă deoarece primul a invocat argumente pe care al doilea nu le admite. Cele două *„semnificații“* privind semnificațiile enunțurilor sunt diferite : referința la *„condiții de adevăr“* și referința la *„condiții de asertabilitate“*, prima relevantă pentru matematicianul clasic, care de regulă, aderă la realismul matematic (platonism), a doua pentru cel intuiționist (constructivist).

Atitudinea lui Wittgenstein în problema *necesității logice* pare să explice ceea ce Dummett a numit *„ambivalența“* lui Wittgenstein față de legea *terțului exclus în matematică*, considerat expresia unei concepții platoniste despre matematică și pe care o respinge ; și implicit respinge forma generală a explicației semnificației unui enunț (de exemplu, P sau non P) în termenii *„condițiilor de adevăr“ ;* conform acestei teze pentru un enunț matematic care are un sens definit trebuie să existe ceva care face enunțul adevărat sau fals. Dar în următorul context Wittgenstein justifică utilizarea legii terțului exclus în raționamente matematice. Dacă P, atunci Q non P, atunci Q, prin urmare Q. Matematicianul este îndreptățit să procedeze așa dacă el a decis să considere P sau non P ca *formă necesară.*

Convenționalismul lui Wittgenstein este evident : deciderea a ce este luat ca formă necesară a cuvintelor, pentru a considera un enunț ca necesar și în care noi (autorii crietriului) avem responsabilitatea pentru sensul acordat cuvintelor conținute în enunțul respectiv. Ceea ce s-a numit „convenționalism modificat“, foarte răspândit, a considerat că *„necesitatea“* deriva din convenții lingvistice pe care le adoptăm ; unele enunțuri necesare sunt „înregistrări ale convențiilor“ iar altele sunt consecințe ale convențiilor. Comentând amplu celebrul enunț : $5 + 7 = 12$ (unde Wittgenstein merge în direcția unui *full-blooded conventionalism,* și unde rezultatele primesc interpretări diferite în lumina criteriilor adoptate) M. Dummett [1] afirmă că Wittgenstein [3] „pare să fi fost obsedat de o filosofie empiristă a matematicii ; chiar dacă n-a dorit să accepte explicația empiristă, el a fost totuși puternic ademenit de ea“ ; problema care revine obsesiv este „care este diferența dintre calculare și experiment“, pe fundalul permanent al exemplului citat $7 + 5 = 12$. Astfel Wittgenstein (3, III, 44) spune că o regularitate empirică stă în spatele unei legi matematice, legea matematică nu asertează ce regularitatea realizează, nu o tratăm ca pe o aserțiune a faptului empiric ci ca un enunț necesar regularitatea empirică obține ca legea să aibe aplicații folositoare. După opinia lui Dummett autorul *„Remarcilor“* n-a reușit să explice relația dintre *regularitate* și *demonstrație.*

Constructivismul wittgensteinian este mult mai *„extrem"* decât cel al intuiţioniştilor, căci dacă aceştia susţin că în legătură cu orice număr natural noi putem spune că este prim sau compus, deoarece avem o metodă de decidere, Wittgenstein neagă faptul că noi avem o asemenea metodă. „Ciurul lui Erathostene" a constituit o asemenea metodă, care însă devine inoperantă când avem de-a face cu un număr mare şi când suntem nevoiţi să apelăm la criterii mai puternice; acum chestiunea poate fi considerată una practică, ţinând de „scurtimea" vieţii noastre. Dar, imaginându-ne un om care ar persevera fanatic în a dovedi cu ajutorul „ciurului" caracterul de a fi prim al unui număr foarte mare (demonstrat cu mijloace mai puternice ca fiind realmente un număr prim) iar rezultatul ar fi că numărul este compus, noi nu ar trebui să abandonăm *demonstraţia* ci mai curând să suspectăm ca în *calculările* efectuate s-a strecurat o eroare. Testul mai avansat al demonstraţiei reprezintă pentru noi criteriul şi nu „ciurul", teorema devine standardul în lumina căruia evaluăm calculările, acestea devenind cazuri speciale ale ei. Teorema *„este pusă în arhivă"* şi are proprietatea de a fi reprodusă pe când noi nu putem să facem acelaşi cu *experimentul;* rezultate diferite ale unor experimente ne sugerează să găsim diferenţe relevante în condiţiile experimentelor, dar pentru asta nici nu dispunem de o concepţie clară înainte. Sensul în care Wittgenstein vorbeşte de proprietatea demonstraţiei, cea din urmă, contra distinctă de experiment — de a fi „reprodusă" pare a nu fi suficient de clar (s-o copieze pe cea scrisă şi depusă în *„arhivă"* sau s-o refacă, înţelegând-o în articulaţiile ei deductive, fără referire la demonstraţia originală). Amintita calculare (cu ajutorul *„ciurului lui Erathostene"* în vederea stabilirii caracterului de a fi prim pentru un număr mare) reprezintă nu o *demonstraţie* ci un *experiment.* Sensul cuvintelor (prim, compus, perfect, impar, par etc.) nu este dată odată pentru totdeauna (să spunem prin intermediul „ciurului") şi nici criteriile adoptate nu au aplicaţii universale, oricând găsindu-se un număr, ca să dăm un exemplu, pentru care criteriul în cauză este inoperant. Aceste consideraţii aruncă o *„lumină"* (care clarifică şi elucidează) asupra remarcii wittgensteiniene că *sensul unui enunţ matematic este determinat de (prin) demonstraţia (sau infirmarea) lui.* (Wittgenstein [3, v, 7]), efectul fiind interesant şi anume găsirea unei demonstraţii *„alterează"* conceptul în cauză, analiza se poate purta în legătură cu enunţul „un număr impar perfect", despre care cineva ar gândi că sensul lui era determinat anterior formulării demonstraţiei lui. Presupunând că enunţul a fost exemplificat prin identificarea unui *„număr particular impar perfect",* fiind, să zicem, foarte mare, metoda *„ciurul lui Erathostene"* de descompunere în factori şi adunarea lor se dovedeşte neaplicabilă. Apelul la demonstraţie va indica alte metode, modalităţi pentru determinarea sensului cuvintelor, ca *„perfect",* şi această nouă metodă va deveni acum *criteriul* relevant pentru ceea ce noi considerăm *număr perfect,* criteriu ce delimitează domeniul de aplicabilitate a predicatului *„perfect".*

Constructivismul wittgensteinian, considerat ca mai sever decât orice versiune constructivistă, a fost numit de G. Kreisel *finitism strict, antropologism* de Hao Wang. P. Bernays [1] a caracterizat acest sort de constructivism ca centrat mai curând asupra posibilităţilor practice decât asupra posibilităţii teoretice. Diferitele forme radicale de constructivism neagă că orice noţiune matematică intuitivă are o extensiune bine determinată, cu excepţia celor finite. Finitismul strict (ultraintuiţionismul) apărat de Essenin-Volpin, atribuit lui Wittgenstein, mai cu seamă datorită *„Remarcilor asupra fundamentelor matematicii"*, deja ne-am referit la *predicatul aritmetic*, e.g. *„este prim"*, care este dat nu printr-o *metodă folosită „în principiu"* pentru determinarea extensiunii corespunzătoare, ci prin criteriul pe care îl adoptăm şi-l aplicăm în *practică*; aceasta sugerează ideea „posibilităţii practice" la care face referire Bernays [1] atunci când caracterizează finitismul strict (sau antropologismul) lui Wittgenstein. Deoarece există numere prea mari, pentru orice predicat aritmetic considerat, sensul acestuia la un moment dat obţinut prin aplicaţia unui criteriu, nu este determinat pentru întregul domeniu al numerelor naturale. Consecinţa radicală a constructivismului wittgensteinian este că noi nu avem dreptul să presupunem despre un enunţ aritmetic arbitrar că este determinat ca fiind adevărat sau fals, o idee care atacă esenţa concepţiei platoniste privind *schema bivalentă a adevărului* enunţurilor matematice, fundamentul logic oferit de legea terţului exclus.

Noţiunea de *„număr natural"* n-are deci în viziunea antropologistă a lui Wittgenstein o extensiune bine şi clar determinată în virtutea (a ceea ce am numit cu sintagma lui Bernays) — *„posibilităţii noastre practice"* — (şi nu atât *„teoretice")*. Dimpotrivă, *noţiunea* intuitivă de *număr natural* are o *extensiune complet determinată* nu numai *din punct de vedere platonist*, ci şi *din punct de vedere intuiţionist*. Numerele naturale sunt din punct de vedere intuiţionist *„construcţii mentale"*, iar totalitatea (mulţimea) numerelor naturale, ca orice *totalitate infinită* este numai *potenţială* (nu putem executa infinit de multe construcţii) şi deci este o *totalitate complet determinată"* de altfel în virtutea procedurii de generare a numerelor naturale, este determinat dinainte ce este şi ce nu este un număr natural. Similar, sensul unui *predicat aritmetic* este dat din punct de vedere intuiţionist printr-o metodă care în principiu poate fi folosită în deciderea aplicaţiilor predicatului, cu condiţia să existe o atare metodă. Criteriile folosite practic derivă din procedura originală de decizie, în termenii căreia sensul predicatului a fost determinat. Respingerea de către intuiţionişti *„a valorilor de adevăr determinate"* pentru enunţuri aritmetice este bazată pe explicaţia verificaţionistă a semnificaţiei, îndeosebi în contextul limbajului matematicii; (nu contează atât interpretarea termenilor numerici, nici a predicatelor aritmetice primitve (decidabile) ci *„modurile de formare a propoziţiilor"*, în primul rând *cuantificarea*, scrie Dummett în *„Abstract Objects"*. Nu are importanţă statutul numerelor naturale ca *obiecte abstracte, care există etern şi independent de cunoaşterea noastră* despre ele; cuantificarea pe obiecte abstracte ca numerele nu produce în fiecare caz un enunţ determinat ca adevărat sau fals; problema se pune numai *în termenii capacităţii noastre* de recunoaştere a unui enunţ ca adevărat sau fals. Altcineva poate considera numerele naturale drept *„construcţii mentale"*, produsul proceselor gândirii noastre şi să accepte interpretarea cuantificării în termenii *sumei logice* şi *produsului logic* infinite ca producând enunțuri adevărate sau false independent de capacitatea noastră de a demonstra sau nu acest fapt. După Dummett important este *modelul corect al semnificației*, ce inventăm când folosim limbajul nostru; un model mai natural ne îndeamnă să aderăm la *tabloul* (picture) *obiectelor* din domeniul cuantificării *„ca existând etern“*, iar un altul spre a ne lăsa ademeniți de tabloul obiectelor ca *„entități mentale“*. În prima interpretare, cea *platonistă*, a enunțurilor matematice, semnificația lor este oferită prin specificarea *condițiilor de adevăr*, și că în legătură cu aceste enunțuri avem o noțiune de *adevăr*, fiecare enunț în mod determinat este adevărat sau fals, altfel *„imaginea realistă“* nu are sens. Cum a spus și Kreisel, importantă nu este existența obiectelor matematice, ci *obiectivitatea* enunțurilor matematice. Tabloul platonist conține aspectele: *„structuri matematice“* (domeniul entităților matematice), *„aprehensiunea intuitivă“* a lor de către matematicieni, a cărei rafinare o constituie un *model* care, toate, „călăuzesc“ formularea *sistemului de axiome“*; în unele cazuri este postulată o *structură unică* pe care sistemul de axiome trebuie s-o descrie; (de fapt avem o structură la nivelul ontic al matematici, este vorba de obiectele matematice și relațiile dintre ele care alcătuiesc domeniul de discurs al teoriei și avem o structură intuitivă — în mintea noastră — sau „model“, „replică“ a celei reale, care facilitează aprehensiunea noastră a structurilor, (obiecte, relații matematice).

Platonismul și *constructivismul* nu trebuie considerate opuse, deoarece mai natural este să le considerăm *„descrieri diferite“* ale aceluiași lucru. Ideea de *construcție mentală*, proprie intuiționismului, nu trebuie identificată cu „operații externe cu simboluri“ și nici *demonstrația intuitivă* nu coincide cu „demonstrația formală în sisteme formale“, teorema de incompletitudine (Gödel) ar părea să fie în avantajul *intuiționismului versus formalism*. Ideea *obiectivității* enunțurilor matematice (și irelevanta existenței obiectelor matematice) din cunoscutul slogan al lui Kreisel merită unele comentarii privind disputa platonism-constructivism ca și atitudinile lui Wittgenstein în acest context.

Platoniștii interpretează obiectivitatea enunțurilor matematice ca fiind primordial *obiectivitatea adevărului matematic*, care angajează logic, epistemologic, ontologic concepte la care nu poate renunța matematicianul lucrător, fie el „imun“ la orice filosofie; într-adevăr, demersul angajează concepte ca *realitate, intuiție, demonstrație (demonstrabilitate), model, sistem, formal* și altele, cadrul indispensabil al activităților matematice. Fără existența *realității matematice bine determinate, adevărul* matematic nu este bine fundat; aceeași realitate este cerută de *intuiția* matematică (care trebuie să fie intuiție, *percepție a ceva*, dar și de *model* și *sistem formal*, instrumentele obișnuite ale practicii matematice; și demonstrația (adevărului matematic) este „ghidată“ de intuiții și sugestii ale realității matematice.

Intuiționiștii înțeleg *obiectivitatea* enunțurilor matematice în sensul obiectivității *demonstrației matematice*; obiectele matematice în sens intuiționist sunt constructe, entități mentale, dacă acest mentalism n-ar ascunde un gen de subiectivism, atunci considerând *„construcțiile intuitive“* ale intuiționiștilor un gen de obiecte abstracte cu un statut ontologic asemănător obiectelor matematice în perspectivă platonistă; s-ar înțelege enunțul lui Kreisel despre irelevanța existenței obiectelor matematice că nu acest aspect separă *„taberele"* ; problema litigioasă ar fi obiectivitatea enunțurilor matematice, care, cum am văzut, primește interpretări diferite ; după cum accentul cade pe „adevăr" (concepția platonistă), sau cade pe „demonstrație" (concepția constructivistă, intuiționistă). Intuiționiștii afirmă că nu putem delimita anterior domeniul demnostrațiilor intuiționiste valide posibile, dar putem fi siguri dacă anumite demonstrații particulare sau principii particulare de demonstrație sunt corecte din punct de vedere intuiționist. Această atitudine vizează ceea ce Wittgenstein a numit *MOTLEY of matematics*. Independent de *problema obiectivității demonstrației matematice*, este problema dacă o demonstrație dată ne constrânge s-o acceptăm și dacă conceptul de demonstrație validă poate fi făcut precis. Intuiționiștii consideră că forma generală a explicației semnificației, în particular a operatorilor logici, este un enunț nu al *„condițiilor de adevăr"*, ci al *„condițiilor de asertabilitate"*. Noi învățăm semnificația operatorilor logici instruindu-ne în exercțiul uzului lor, învățând să asertăm enunțuri complexe în anumite feluri de situație, și de aici extragem ideea (învățătura) că până ce nu avem de-a face cu „o clasă de enunțuri decidabile", nu are sens să vorbim despre noțiunile de adevăr și fals în descrierea instruirii primite. Prin urmare, pe această cale, a recursului la conceptele de adevăr și fals, și a altor valori de adevăr nu obținem o formă corectă a explicației semnificației. Conexiunea cu doctrina lui Wittgenstein că *„semnificația* este uzul" (cuvintelor, limbajului), Wittgenstein [2] conțineau deja o respingere a explicației realiste a lui Frege și din „Tratat" care se rezumă astfel : forma generală a explicației semnificației este un enunț al condițiilor de adevăr ; vezi în acest sens Wittgenstein [3, I, App. I, 6]. Considerații despre *semnificație* și considerații despre *demonstrație*, acceptând pe primele și respingând pe ultimele nu înseamnă că aderăm coerent la imaginea, constructivistă despre matematică. Evidențierea *„erorii realiste"* despre relația gândire-realitate nu ar trebui să conducă la idealismul subiectiv cu a lui teză că noi creăm lumea. *Dihotomia platonism-constructivism* nu acoperă exhaustiv domeniul și gândirea matematică. Dummett [1] scrie : „Cred că ar trebui să interpolăm între cele două tablouri (pictures) platonist și constructivist un tablou intermediar, să spunem despre obiecte care se ivesc în existență ca răspuns la explorarea noastră (în response to our probing). Noi nu facem obiectele, trebuie să le acceptăm cum le găsim (aceasta corespunde demonstrației care se impune nouă), dar ele sunt deja pentru ca enunțurile noastre să fie adevărate sau false înainte ca să facem investigații, care să le aducă în existență..." această soluție ar neantiza falsa dihotomie platonism și constructivism care domină clandestin, după formularea autorului englez, gândirea despre filosofia matematicii. Concepția lui Wittgenstein are o poziție singulară dacă specificul ei în această problemă poate fi rezumată astfel : „Motivul principal al lui Wittgenstein pentru negarea obiectivității adevărului matematic (până aici respingerea platonismului ! M. Ț.) este negarea obiectivității demonstrației matematice, ideea lui că o demonstrație nu ne constrânge la acceptarea ei" (M. Dummett [1]) ; poziția lui Wittgenstein excede dihotomiei în cauză și pare a sugera o situație a ei în cadrul liniei intermediare de gândire propusă de Dummett.

3. WITTGENSTEIN VERSUS ALTE FILOSOFII ALE MATEMATICII

3.1. Wittgenstein versus logicism

Logicismul ca *filosofie a matematicii* a fost cel mai adesea caracterizat prin teza că *matematica este logică;* astfel explicitată „*esența*“ logicismului, matematica este reductibilă la logică, poate fi derivată din *principiile logicii pure*“. Dar o înțelegere profundă a intențiilor și procedurilor logiciste obligă la : a) o discuție despre ce a înțeles Russell prin logică ; b) evaluări asupra impactului pe care l-au avut studiile în *fundamentele teoriei mulțimilor* bazate pe enunțul „Russell și Whitehead au arătat că matematica este reductibilă la logică“. Pentru Russell „*logica*“ include reguli elementare de deducție (teoria cuantificării) și asumpții pe care Russell le-a făcut cu privire la anumite entități, numite „*funcții propoziționale*“. „*Universul de discurs*“ al logicii russelliene este multi-sortat : colecția tuturor individualilor (nivel zero), plus colecția tuturor funcțiilor propoziționale care iau individualii ca argumente (nivelul unu), plus colecția tuturor funcțiilor propoziționale care admit ca argumente funcții propoziționale de nivelul unu (formează nivelul doi) plus... Însă ce este o *funcție propozițională ?* Astăzi, abordarea russelliană a funcțiilor propoziționale încorporează două simplificări : 1) *funcțiile propoziționale* ale lui Russell sunt identificate cu predicate ; F(x) înseamnă : x are proprietatea F. 2) două predicate sunt identice dacă au aceeași extensiune *(axioma extensionalității),* o asumpție falsă în interpretarea clasică a predicatului ca „*universal luat în intensiune*“, deoarece *roșu* și *pătrat* sunt diferite în sens clasic, chiar dacă toate pătratele sunt roșii, și numai pătratele sunt roșii. Atunci predicat înseamnă mulțime. H. Putnam [1, 273] scrie : Efectul net al ambelor revizuiri luate împreună revine la aceasta : F(x) acum înseamnă „x aparține mulțimii F“. Funcțiile propoziționale ale lui Russell au fost pentru un timp luate să fie mulțimi de individuali, mulțimi de mulțimi de individuali, mulțimi de mulțimi de mulțimi...“.

O asemenea interpretare a funcției propoziționale este contrară enunțurilor din *Principia care,* la limită, înseamnă că universul de discurs propriu logicii este sistemul tuturor mulțimilor. Mai explicit „*logica este teoria mulțimilor*“, o concepție pe care B. Russell a respins-o. Dar când introducem entități matematice speciale și axiome care le guvernează comportamentul, altele decât aixomele teoriei cuantificării, de ce n-am introduce *direct*, să spunem, *numerele*, în loc să introducem mulțimile ca apoi să reducem numerele la mulțimi. „De ce nu redefinim *„logica“* să includă teoria numărului *prin stipulare?* Atunci *„matematica“* (teoria numerelor) va fi într-adevăr o parte a „logicii“, dar numai prin stipulare lingvistică. Aceasta va fi în van — dar pare de asemenea inutil să redefinim logica ca să includem teoria mulțimilor, ceea ce în fapt s-a întâmplat. Russell a dorit să facă ceva, definitiv, diferit : „el a dorit să reducă *teoria numerelor* la *teoria mulțimilor*, și *teoria mulțimilor in turn* la *„logică“* în sensul lui — teoria funcțiilor propoziționale“ (H. Putnam [1, p. 274]). De ce această decizie a lui Russell privind uzul cuvântului *logică* ca să includă numai *teoria funcțiilor propoziționale* și nu și *teoria mulțimilor* sau chiar *teoria numerelor?* Ce este o funcție propozițională? Este exact ce sugerează numele și anume o funcție ale cărei valori (nu argumente) sunt propoziții. Funcțiile propoziționale sunt corelate, biunivoc, cu predicate (în sensul de universalii luate în intensiune). Și H. Putnam [1, p. 274] comentează : „corespunzător predicatului albastru noi avem funcția propozițională x este albastru — adică funcția a cărei valoare aplicată oricărui x este propoziția că x este albastru. Oricum, apar unele dificultăți conceptuale. Considerăm funcția propozițională *„x a scris Waverely“*. Presupunem că x se întâmplă să fie individualul cunoscut ca Walter Scott, și de asemenea cunoscut ca «autorul lui Waverley». Atunci care este valoarea funcției *x a scris Waverley* cu acest x particular ca argument? este propoziția «Walter Scott a scris Waverley» sau propoziția «Autorul lui Waverley a scris Waverley»? Noi putem rezolva dificultatea acceptând prima (dară nu a doua) dintre simplificările în abordarea lui Russell menționate mai înainte, luând funcția propozițională ca identică cu predicatul corespunzător. Deci, orice argument care ar putea fi oferit pentru a considera logica să fie teoria funcțiilor propoziționale (în sensul lui Russell) ar putea fi tot atât de bine oferit ca un argument pentru a lua logica în sensul de teoria predicatelor în intensiune.

Logicismul a fost confruntat cu dificultăți autentice, iar cele care provin din *„inacuratețea“* formalizării date în *Principia* au fost ținta obiecțiilor și criticilor formulate de L. Wittgenstein. Începem cu cele care sunt proprii construcției lui G. Frege, prima fiind legată de noțiunea de *extensiune*. Frege a preferat termenilor *„clasă“* sau *„mulțime“* expresia *„extensiunea unui concept“*, inspirat din tendința de a privi predicatele unui limbaj ca stând pe locuri cuantificabile. Ideea sau tendința a doua este, în ultimă analiză, aceea a derivării *termenilor singulari abstracți* din *termeni generali* care referă *proprietăți* sau *atribute ;* aceste două tendințe pot fi separate. Frege a considerat că predicatele referă dar nu concepte ci obiecte și a privit predicatele și conceptele ca *entități „nesaturate“*, deoarece numai împreună cu argumentul (în cazul unui predicat, un nume propriu) acestea stau pentru ele însele, să spunem *de sine stătător*. Notația *calculului predicatelor de ordinul doi* ar exprima concepția fregeană în care concluzia următorului raționament : Ion este din București (bucureștean), Radu este din București (bucureștean) : *Ion și Radu au ceva în comun* poate fi redată simbolic (∃ F) [F(Ion) & F (Radu)]. Din punct de vedere sintactic, o expresie adecvată pentru denotarea unui obiect nu poate denota un concept și viceversa. Atunci ce este extensiunea unui concept? este obiectul asociat conceptului de așa manieră, că dacă două concepte se aplică acelorași obiecte, ele au aceeași extensiune.

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \equiv (x)(Fx \equiv Gx)$$

unde $\hat{x}Fx$ este exensiunea conceptului F; este cunoscuta axioma a V-a din Frege [vol. II] al lucrării [2].

În 1901 Russell deduce din această axiomă o *contradicție (paradox)*, un fapt ce a declanșat cunoscuta *criză fundațională* a matematicii. *Begriffschrift*-ul fregean (1879) a fost contemporan cu teoria mulțimilor a lui Cantor, pe care a vrut s-o formalizeze. Responsabil de criza fundamentelor matematicii a fost a *V-a axiomă cunoscută sub numele de „axioma comprehensiunii nelimitate"*:

$$\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow P(x)).$$

Predicatul P din axiomă poate să însemne $x \bar{\in} x$ ceea ce antrenează imediat o contradicție, atunci când se operează substituirea lui y în locul lui x. Russell a propus ca *soluție-remediu* a noii situații conceptuale apărute celebra sa *teorie a tipurilor* (simple sau ramificate), construită pe baza unei ierarhii a predicatelor (sau a funcțiilor, funcțiilor de funcții etc. (de) pe variabile individuale), *ordonate* conform *teoriei simple* după *tipul* sau *rangul* teoriei și în plus după *ordin* sau nivelul de generare pentru teoria tipurilor ramificate. Maniera este următoarea pentru construcția ierarhiei. Primul tip (notat 0) este cel corespunzător *indivizilor* (sau *individualilor)*, tipul al doilea (notat 0) revine mulțimii de indivizi (sau individuali) și relațiilor (predicatelor) sau operațiilor (funcțiilor) dintre indivizi. *Ierarhia tipurilor* este acompaniat de o *ierarhie* corespunzătoare a *ordinelor* care va permite să definim ordinul funcțiilor cuantificate. Următorul exemplu va face mai inteligibilă această idee; fie $\forall\Phi(\psi(\Phi,y))$ aici Φ este o funcție de ordinul întâi, ψ va avea ordinul doi, deoarece Φ este *legată* și ψ apare ca o funcție de funcție. Deci, noțiunea de *ordin* este necesară ordonării *variabilelor legate* ale unei funcții de un tip dat.

Ca și proiectul fregean și soluția russelliană a paradoxurilor asumă aceeași teză „logicistă", cea care a configurat programul *reducerii* matematicii la logică. Cum se știe baza logicistă a fost profund afectată, în ceea ce privește *„acuratețea"*, prin introducerea axiomelor: *a infinitului, a alegerii* și *a reductibilității*, primele neavând caracter logic, ultima având chiar un caracter artificial. Astăzi se consideră că *teoria tipurilor* prezintă numai un caracter istoric.

În 1908 E. Zermelo [1] formulează prima sa cunoscută versiune axiomatică, care a avut un succes remarcabil, intenționată, după propria mărturisire a autorului, pentru scopurile matematicienilor *„activi"*, *„lucrători"* în sfera matematicii efective și mai puțin preocupați de *„problema fundamentelor"*. Zermelo înlocuiește *axioma ilimitativă* a lui Frege cu o *axiomă limitativă, axioma separării* (Aussonderung):

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge A(z))$$

Semnificația acestui enunț formal este: pentru orice mulțime x există o mulțime y ale cărei elemente sunt acele elemente ale lui x care satisfac formula A (proprietatea x în formulare de ordinul al doilea).

Astăzi teoria axiomatică a mulțimilor, elaborată de Zermelo, și completată de Fraenkel, cunoscută ca *sistemul axiomatic ZF* (Zermelo-Fraenkel), a devenit o *teorie fundațională* a matematicii moderne și contemporane.

Dar cum se notează în *Encyclopédie Philosophique Universelle*, p. 542, *intuiționismul* și *teoria categoriilor* sunt doi rivali redutabili ai *bătrânei* teorii (este vorba de *teoria mulțimilor*), autorii menționatelor teorii au încercat însă fără succes să o înlocuiască.

În *direcția „set-teoretică“* trebuie să menționăm teoriile von Neumann și Gödel care s-au constituit pe temeiul teoriei Zermelo-Fraenkel; în aceste teorii se face distincție între *„clase proprii“* și *„clase improprii“*, acestea fiind *mulțimi* și astfel se rezolvă *paradoxul „mulțimii mulțimilor“*. Teoria mulțimilor expusă de Quine [2] în care apare distincția dintre *formule „stratificate“* și *formule „nestratificate“* (ca $x \in x$ sau $x \bar{\in} x$) și ea are azi mai mult o importanță istorică

Raportarea lui Wittgenstein la logicism poate fi urmărită pe două planuri: i) un plan *ontologic*, în mod esențial relevant filosofic și ii) un alt plan, l-am numi *metodologic*, care asumă un punct de vedere formal privind realizarea dezideratului logicist ca o *construcție logicistă“* a matematicii. i) Din punct de vedere *ontologic, logicismul* este *platonism, entitățile matematice* sunt sorturi speciale de *entități logice* (clase, mulțimi, extensiuni, ale conceptelor). Dacă urmăm această interpretare, criticile wittgensteiniene la adresa platonismului privesc în egală măsură *logicismul*, Wittgenstein a negat *existența (obiectivă)* a *entităților matematice*, independente de gândirea umană și de sistemul matematic care le descrie. El a contestat orice *funcție referențială* a matematicii, în sensul că *termenii matematicii nu denotă*, iar *propozițiile matematice nu spun ceva*, această știință oferindu-ne doar o *„structură lingvistică“*, un cadru pentru inferența unei propoziții din altele; nu există o *realitate matematică „pre-existentă“*, ea se construiește „pas cu pas“ în demersul matematic, iar adevărul matematic nu poate fi descris în termenii *„teoriei corespondenței“*, specifică și ea platonismului, ci în termenii „derivării corecte“ în interiorul respectivului sistem matematic, aici corect, însemnând conform uzului standard acceptat în sistem.

Dar nu numai aceste două noțiuni *existență* și *adevăr, relevante* pentru modul de gândire platonist, sunt reconsiderate în perspectiva lui Wittgenstein; este vorba și de o a treia noțiune — *obiectivitatea*, cu pregnante conotații. Wittgenstein vorbește de un concept al *„obiectivității matematice“*, care nu mai este legată de existența (obiectivă) a obiectelor matematice, ca în platonism, și deci în logicism ci de un concept care este acum relevant pentru *natura demonstrației matematice*. În Wittgenstein [2, p. 143] [3, A II 7] asemenea enunțuri reprezintă puternice atacuri la adresa platonismului, și, conform interpretării la care am aderat anterior, la adresa logicismului: „nu există sistemul numerelor iraționale... nici o mulțime a numerelor iraționale... sau infinități de ordin mai înalt...“, nu există, după Wittgenstein, o mulțime a numerelor distinctă de numeralele însele, el neagă că numeralele denotă numere abstracte, dacă acestea există ele sunt numeralele fizice, semnele pe hârtie. Credem că aici se poate identifica o concepţie ontologică aidoma celei a *formalismului*. Atacul *anti-platonism* este pregnant în Wittgenstein [2] şi cum observă W. H. Klenk [1, p. 9] „O mare parte a *Investițiilor filosofice* este consacrată arătării faptului că cuvintele care par să refere la anumite stări mentale nu e nevoie totuşi să refere ci sunt aplicate într-o largă varietate de circumstanţe şi au criterii de aplicaţie deosebit de complexe... similar *„cuvintele-număr“* nu e nevoie să refere ceva. Mai curând funcţia lor este asemănătoare aceleia a adjectivelor şi oferă mecanismul lingvistic pentru a face observaţii detaliate şi descrieri ale lumii fizice“. Ţinta criticilor wittgensteiniene o constituie *funcţia referenţială* a cuvintelor, o greşeală tipic platonistă apărută din nevoia distingerii rolurilor diferitelor cuvinte (culorile se referă la obiecte fizice, numerele se referă la procese), ceea ce în final conduce la postularea unui *domeniu al obiectelor matematice*.

Wittgenstein [3, I 110] vorbind despre *statutul propoziţiilor* şi *axiomelor matematice*, face succinte evaluări prin comparaţie cu *statutul aserţiunilor empirice*, primele neformulând enunţuri despre fapte ci având, cum spune în alt loc, *„demnitatea“ unor reguli*. Axiomele matematice sunt nu numai certe ci au şi un rol diferit, de cel al aserţiunilor empirice, în limbajul nostru : „Ceva este o axiomă, nu deoarece noi o acceptăm ca extrem de probabilă, adică certă, ci deoarece îi atribuim o funcţie particulară şi una care este în conflict cu aceea a unei propoziţii empirice“ (Wittgenstein [3, III 5]). Dacă propoziţiile matematice ar fi despre fapte empirice, *generalizarea* şi *certitudinea* ca proprietăţi specifice ale lor ar fi puse sub semnul întrebării ; un enunţ matematic este valabil în toate cazurile. În ceea ce priveşte principala entitate matematică — *numărul*, ceea ce putem spune despre numere rezultă din proprietatea lor de a fi în calitate de părţi ale unui *sistem* (de numere), adică este vorba de proprietăţi şi relaţii ale numerelor care nu sunt absolute, adică intriseci naturii lor proprii, ci care decurg din apartenenţa numerelor la o *structură*, din locul, poziţia în şirul numerelor naturale (atunci când le studiem pe acestea) ; 7 este suma lui 2 şi 5, deci numerele sunt subiect la anumite reguli, în cazul de faţă al adunării ; numerele au proprietăţi în calitatea lor de elemente ale unui sistem şi ca subiect al regulilor (Wittgenstein [3, I 83]).

Punctul esenţial al concepţiei wittgensteiniene despre matematică este considerarea acesteia ca un *cadru lingvistic* în care derivăm propoziţii, propoziţiile matematice reprezintă un autentic model al efectuării *inferenţelor*. Wittgenstein [3, II 27] consideră că matematica este în mod esenţial un „proces de inferenţă“, de transformare a expresiilor, demonstraţia fiind „un semn că noi transformăm simbolurile într-un astfel de mod...“. Aceste inferenţe nu sunt garantate de nimic, de nici o realitate matematică, noţiunea de adevăr este redundantă. Nu contează decât aceste transformări în sinea lor, aceste inferenţe logice cărora nu le corespunde un adevăr, care, oricum, nu ar adăuga ceva la *înţelegerea* matematicii (Wittgenstein [3, I 5]). Nu dispunem de standarde absolute, ideale pentru măsurarea corectitudinii şi rigorii inferenţelor, care se desfăşoară doar conform regulilor, fără vreo referire la vreo mulţime de obiecte logice sau matematice, ceea ce ar constitui o *realitate matematică pre-existentă*. Abordarea problemei adevărului ocupă un spațiu important în opera lui Wittgenstein. Comentariile wittgensteiniene resping *„teoria corespondenței“ a adevărului* și *„explorează“* teorema de *incompletitudine* a lui Gödel. *Adevărul* nu este mai mult decât *demonstrabilitatea într-un sistem* (Wittgenstein [3, A 16, 8]). Întrebarea : adevărul unei propoziții ? răspunsul este la sfârșitul uneia dintre demonstrațiile lui Russell. *„Adevărat în sistemul lui Russell“* înseamnă cum este zis : demonstrat în sistemul lui Russell“. Prin urmare, propozițiile matematice nu sunt adevărate în virtutea *corespondenței* cu o *realitate „suprasistemică“*, obiecte, proprietăți și relații absolute și eterne cum cred logiciștii *via* platonism.

Antiplatonismul wittgensteinian este pregnant cu viză directă la problema *creativității* în matematică. Pentru Wittgenstein *numerele,* ca să ne referim la principala entitate matematică, nu există *„undeva“* așteptând ca matematicianul să le *„descopere“*, dimpotrivă, mai curând decât „descoperă“ relații preexistente între obiecte și proprietăți preexistetne matematicianul face prin demonstrație conexiuni noi și *„creează“* conceptual aceste conexiuni. Wittgenstein [3, I 31] spune că demonstrația nu stabilește că ele *(conexiunile)* există acolo, până ce nu le face“ ; sau „demonstrația nu explorează esența a două figuri...“ matematicianul *creează* „esența“. *Aversiunea* lui Wittgenstein [3, V 34] *față de platonism,* a cărei esență este *descoperirea* faptelor matematice preexistente, este evidentă cu ocazia discutării unor subiecte speciale ca demonstrația cantoriană prin metoda diagonalei a *„nenumărabilității* numerelor reale“, «tăieturile». Dedekind, terțul exclus, *„expansiunea“ numerelor iraționale.* În lumina filosofiei wittgensteiniene [3, p. 47] matematicianul este un *„inventator“* nu *„descoperitor“,* explorator (ca în viziunea platonistă), greșeala platonismului constând în considerarea matematicii ca un analog al fizicii. Avertismentul wittgensteinian este că propozițiile matematicii nu ne oferă un gen de *„istorie naturală“* a obiectelor matematice (Wittgenstein [3, II, 10]). Încă în Wittgenstein [1] afirmase că propozițiile matematice nu sunt enunțuri despre obiecte matematice. În Wittgenstein [1, 4.0312] citim că o propoziție este un *tablou* al stării faptelor, noțiunea de *tablou* fiind bazată pe noțiunea de *reprezentare* a obiectelor prin semne ; constantele logice nu reprezintă, iar logica faptelor nu poate fi reprezentată. Propozițiile logicii nu au o natură *„reprezentațională“* și cum propozițiile logicii și matematicii sunt înrudite se poate afirma același lucru și despre acestea din urmă. *Matematica* este fundamental un fel de *logică ;* Wittgenstein [1, 6.22] scrie : „logica lumii pe care propozițiile logicii o arată în tautologii, matematica o arată în ecuații“ ; sau alte reflecții relevante pentru ideea pe care o susținem : propozițiile logicii sunt vide, așa cum enunțurile matematice sunt pseudo-propoziții și nu exprimă gânduri“ (Wittgenstein [1, 6,2, 6.21]). Iar în Wittgenstein [2] găsim remarci ca : propozițiile logicii și matematicii sunt vide de conținut factual, ele nu tratează despre nimic. Concluzionând, putem să-l invocăm iarăși pe Wittgenstein [3, II 47] care scrie : „creativitatea nu este o chestiune despre noi obiecte ci în mod simplu despre tehnici noi ; o conexiune nouă între ce obiecte ? între tehnica numărării factorilor și tehnica multiplicării“.

Wittgenstein respinge ideea că matematica posedă conţinut factual şi când afirmă că *axioma infinitului* nu trebuie interpretată ca un enunţ construit despre obiecte, sugestia este explicită ; *statutul axiomei* este considerat ca un gen de *comentariu* asupra sintaxei limbajului numelor sau termenilor. Respingerea ideii conţinutului factual este premisa respingerii *„teoriei corespondenţei“* care în context echivalează cu respingerea entităţilor abstracte, matematice, şi în final a existenţei universului matematic ; urmează că corespondenţa cu un set de obiecte matematice nu constituie un *„ingredient“* al definiţiei *„corectitudinii“* inferenţei logice, principalul instrument al transformărilor simbolurilor şi expresiilor „autentica-esenţă“ a matematicii din perspectiva filosofiei lingvistice wittgensteiniene, care consideră matematica drept un cadru lingvistic. Inferenţa şi calcularea după anumite pattern-uri sunt esenţiale în matematică. Uniformitatea în calculare este garanţia împotriva confuziilor, calcularea nefiind garantată de percepţia noastră a unui domeniu matematic ; rezultatele diferite ale calculării se explică prin *„hiatusul“*, conflictul dintre *regulă* şi *aplicaţia* ei, o situaţie specifică platonismului. Iată unele aserţiuni semnificative : „Dacă există confuzie în operaţiile noastre, dacă cineva calculează, diferit în diferite momente, aceasta nu este ocalculare... este esenţial pentru calculare că oricine calculează corect parcurge acelaşi pattern al calculării“ (Wittgenstein [3, V 2, V 24]). Relevante rămân supunerea la regulă, aordul practic cu paradigma şi nu existenţa unei realităţi în spatele practicii reprezintă garanţia corectitudinii inferenţei logico-matematice. Corectitudinea inferenţei este temeiul *obiectivităţii matematice*, în sensul că concluzia inferenţei ne „forţează“, ne *„somează“* la acceptarea ei şi nu prezenţa *obiectelor matematice. Obiectivitatea matematicii* nu este o funcţie a obiectelor matematice ci a practicii matematice. Aşadar, *natura normativă* a matematicii relevată de conformitatea inferenţei la regulă, se transmite asupra *obiectivităţii.*

Revenim, acum, la al doilea aspect al problemei ; (este vorba de teza logicistă *„matematica este logică“*, aspectul construcţiei logiciste a matematici, care are un caracter predominant *„metodologic-tehnic-formal“*. Acest aspect l-a putut descrie prin enunţul *„invazia logicii“ în matematică şi fundamentele matematicii.*

L. Wittgenstein a parcurs o gamă largă de atitudini faţă de logică, un *„traseu“* corespunzător fazelor sale de evoluţie (Wittgenstein I, Wittgenstein II sau Wittgenstein timpuriu, Wittgenstein cel târziu), a trecut de la admiraţie la scepticism, critică şi contestare, unele idei în această privinţă le-am expus deja în celelalte eseuri. Deoarece referirile la Wittgenstein [1] au fost mai prezente în celelalte eseuri, încât ne-am putut face o imagine despre opinia lui Wittgenstein cu privire la *relaţia* dintre *logică* şi *matematică*, în cele ce urmează vom invoca mai mult concepţiile sale din Wittgenstein [3].

Wittgenstein [3, p. 145—146] spune textual : „Invazia dezastruoasă“ a matematicii de către logică... Lucrul cel mai funest în legătură cu tehnicile logicii este că logica face să uităm tehnicile matematice speciale, în timp ce tehnica logică este numai o tehnică auxiliară în matematică. De exemplu ea fixează anumite conexiuni între tehnici diferite“.

Wittgenstein este convins că logica nu este numai „contra-productivă" ci şi irelevantă: „Blestemul invaziei logicii matematice în matematica este că acum orice propoziţie poate fi reprezentată în simbolism matematic şi aceasta ne face să ne simţim obligaţi să-l înţelegem. Deşi această metodă de scriere nu este nimic decât traducerea prozei obişnuite vagi". (Wittgenstein [3, p. 155]). Iar ceva mai încolo, Wittgenstein [3] adaugă: „Logica matematică a deformat complet gândirea matematicienilor şi a filosofilor instalând o interpretare superficială a formelor limbajului obişnuit ca o analiză a structurii faptelor. Desigur aceasta a fost continuată pe logica aristotelică".

Activitatea lui Wittgenstein privind investigarea acestei probleme, *relaţia dintre matematică şi logică,* văzută de el ca o „invazie dezastruoasă a logicii matematice în matematică", este înţeleasă de el în sensul următor: Activitatea mea nu este să atac logica lui Russell *dinăuntru* ci *din afară.* Adică, nu o atac matematic, altfel ar trebui să fac matematică ci să atac în ceea ce priveşte poziţia, oficiul ei. Activitatea mea nu este să vorbesc despre demonstraţia lui Gödel, de exemplu, ci să o ocolesc". (Wittpenstein [3, p. 174]).

Următoarea schemă de abordare ne pare a fi indusă de aceste şi încă alte aserţiuni wittgensteiniene între care cea privind deformarea gândirii matematicienilor şi filozofilor, consecinţă a „invaziei logicii matematice" îmi pare a avea o poziţie centrală: i) logică şi matematică, sau „pervertirea matematicii" şi matematicienilor; ii) deformarea gândirii filozofilor; iii) fundamentele matematicii azi şi remarcile wittgensteiniene în *„problema fundării".*

i) Aici avem trei aspecte: a) Trebuie succint notată pretenţia lui Frege şi Russell de a reduce matematica la logică, de a explica şi înţelege natura şi statutul matematicii cu ajutorul logicii; b) pretenţia *„teoriei demonstraţiei"* a lui Hilbert de a oferi cu ajutorul instrumentelor logicii matematice o definiţie sigură a matematicii, acest punct va fi abordat cu ocazia expunerii paragrafului *Wittgenstein versus formalism;* c) importanţa exagerată acordată limbajelor logice în studiul problemelor matematice, abuzul în utilizarea calculului predicatelor de ordinul întâi.

Cum se ştie în procesul *reducţiei matematicii la logică,* aritmetica a avut o poziţie centrală, avem în vedere fundamentele formulate de Frege şi Russell pentru *teoria numărului.* În ceea ce priveşte pe Wittgenstein, el a avut rezerve serioase faţă de construcţia celor doi: „calculul logic are rolul unor volănaşe (de podoabă accesorie, M. Ţ.) pentru calculul aritmetic". Dacă noi înţelegem bine, Bernays [2, p. 523] nu împărtăşeşte în întregime rezervele lui Wittgenstein, când afirmă că nu se poate nega că tentativa de a încorpora aritmetica în logistică a avut un anumit succes. Adică, s-a demonstrat că este posibil să formulăm propoziţii aritmetice, în special cele numerice, în termeni pur logici şi apoi să le demonstrăm înăuntrul logisticii în virtutea acestei formulări. Este o problemă deschisă dacă acest rezultat produce o *înţelegere filosofică* a propoziţiilor aritmetice. Dar Bernays comentează demonstraţia logistică a ecuaţiei numerice $3 + 7 = 10$, specificând „pasul" când *intră în lucru* aparatul logic („podoaba", frills- — în engleză, folosind termenul wittgensteinian) şi concluzia la care ajunge este următoarea: „Când aceasta s-a realizat clar, apare că propoziția teoriei logice a predicatelor este validă, deoarece $3 + 7 = 10$, și nu vice-versa. Interpretarea formulată de Bernays [2, p. 523] este interesantă, și, în ciuda unor nuanțe și diferențe vis-à-vis de punctul de vedere wittgensteinian, pare să-l confirme parțial: „Astfel în ciuda posibilității de încorporare a aritmeticii în logistică (logica matematică, M. Ț.), aritmetica constituie schema cea mai abstractă (cea mai pură); și aceasta apare paradoxal dintr-un punct de vedere tradițional nejustificat după care generalitatea logică este în orice privință cea mai înaltă generalitate“ (Bernays [2, p. 523]). Critica wittgensteiniană a *încorporării* aritmeticii în logica corectă dar nu în sensul că el recunoaște ideea că teoremele aritmetice enunță fapte *sui generis*, dimpotrivă, observă Bernays [2], tendința lui să nege că asemenea teoreme exprimă fapte. Wittgenstein va recunoaște *calcularea* găsită de el un fel de *„esență“* relevantă a aritmeticii și poate și a matematicii, ca o îndemânare cu utilitate practică și va căuta pe această cale să explice într-o manieră *sui generis* ce este «factual» în matematică, în intenția, riscăm să opinăm, de *a releva prin ce aritmetica (matematica)* excede *sfera „logicității“*, o idee a *„rezistenței“* la demersul logicist. Cu privire la aspectul c) ne limităm să-l invocăm pe G. Kreisel [2, p. 179] care spune că Wittgenstein a avut dreptate, un punct de vedere corect atunci când a susținut că logica în forma calculului predicatelor de ordinul întâi a invadat matematica și anume partea ei care tratează procedurile de decizie, și este just să se afirme că a făcut o alegere a problemelor inutile și infructuoase. Totuși, după Kreisel, a vorbi de o *„invazie dezastruoasă“ a logicii în matematică* este o exagerare, permsiă doar ca o ironie subtilă la adresa lui Frege și Russell, a căror logică a găsit-o, oricum nefolositoare în elaborarea *fundării* pentru aritmetică (Wittgenstein [3, p. 171]).

ii) „deformarea“ completă a gândirii filosofilor. În esență este problema „relevanței *formalizării*“; Russell a redus limbajul natural la *„forma“* sau *„structura“*, *„obiect-predicat“*, o „îmbrăcăminte“ formală prea strâmtă pentru acest limbaj: oricum, începând cu Frege, Peano și continuând cu Russell, Hilbert, limbajul natural a parcurs semnificative stadii ale dezvoltărilor formalizării, la care logica matematică și lingvistica contemporană au contribuit în mod esențial. Ținta acestui demers a fost obținerea unei *clarități maxime*, asupra problemelor filozofice, grație formalizării într-un limbaj simbolic, ce a marcat încercări de realizare a vechiului *„calculemus“* leibnizian. Dacă Wittgenstein credea și spera, fascinat de construcțiile fregeene și russelliene, în înfăptuirea acestui deziderat, el, însuși, prin *Tratat* introducând o perspectivă radical nouă, o reformă a filosofiei (vezi în acest sens eseul...) ulterior își va rezuma concepția în deconcertanta propoziție: „nici un calcul nu poate rezolva o problemă filosofică“. (Wittgenstein [4]).

În M. Țurlea [3, p. 8] am făcut referire la „rolul formalizării și axiomatizării în discursul filosofiei care ne propun o înțelegere adecvată a fundamentelor matematicii, mai în general a *naturii* și *semnificației* matematicii, potențând remarcabil analiza și dezbatere filosofiei“. Am urmat aici unele sugestii din Suppes [1], dar avem cunoștință și de opinii contrare, ca cea a lui Hempel [1], după care nimic relevant nu se obţine în urma formalizării dincolo de ceea ce deja am achiziţionat în plan neformal.

Şi totuşi o voce autorizată în domeniu, l-am numit pe Hao Wang (From Mathematics to Philosophy, p. 56), avertizează : „Nu trebuie să uităm că sistemele formale sunt instrumente şi numai instrumente în studiul filosofic. Ca şi alte instrumente, ele sunt folositoare pentru anumite scopuri. Ele nu sunt *piatra filosofală* care poate rezolva toate problemele pentru noi. Când sunt aplicate nedescriminatoriu la toate chestiunile ele pot cauza irosire şi cel mai rău dezastru. Uzul sistemelor formale în studierea filosofiei matematicii s-a demonstrat fructuos şi astăzi nimeni nu poate spera să devină filosof serios al matematicii dacă nu dispune de o dexteritate apreciabilă în manipularea sistemelor formale". Textul din Hao Wang '974 conturează suficient de explicit că este firească reacţia împotriva logicii matematice, atunci când avem de-a face cu o aplicaţie nepotrivită a sistemelor formale în filosofie. Nu tot ce este bun, în sensul de valabil, în filosofia matematicii este bun pentru întreaga filosofie sau orice filosofie. Dar, şi asemenea gânduri, atunci când sunt exagerate conduc la credinţa nejustificată că logica matematică n-ar avea nici o relevanţă pentru filosofie.

Hao Wang [2, p. 56, 57] continuă reflecţiile sale : Punctul meu de vedere este că prin poziţia centrală pe care filosofia logicii şi matematicii o ocupă în teoria cunoaşterii, logica matematică şi concepţiile asupra ei pot indirect configura întreaga filosofie elaborată de un autor... Gânditori ca Frege, Russell, Wittgenstein şi Ramsey nu e întâmplător că sunt cei mai interesanţi filosofi recenţi şi nu este un accident că s-au ocupat profund de studiul fundamentelor matematicii" (am zice noi locul de interferenţă al logicii şi matematicii, cea mai roditoare „materie primă" pentru analiza filosofică proprie unei filosofii ca *„teorie exactă"* în sensul, poate nu tare, dar sigur în cel slab. Desigur, aceste consideraţii poate nu stau sub *specia eternitas* dar nu numai că stau semnificativ pe o poziţie opusă celei din lucrările lui Wittgenstein „cel târziu", dar sunt mlădiate temporal chiar de însuşi autorul lor, l-am numit pe Hao Wang [2, p. 57] : „Din impactul general al logicii asupra filosofiei (indiferent dacă a fost bun sau rău) datorat lui Frege, Russell, Wittgenstein nu putem infera că logica matematică va continua să deţină o poziţie centrală în filosofie ; nu ştim ce evoluţie intelectuală putea să parcurgă Ramsey dacă ar fi trăit, iar în ceea ce îl priveşte pe Wittgenstein, de la admiraţia faţă de logica modernă exprimată în *Tratat,* a ajuns ca în ultimele scrieri să susţină că logica matematică a avut o influenţă rea asupra filosofiei şi matematicii".

Dar chiar dacă luăm termenul *„filosof"* în sens mai special de *„filosof al matematicii"*, Wittgenstein din ultima perioară a evoluţiei sale intelectuale, acest tip de filosof confruntat cu probleme matematice, el trebuie să procedeze la *înţelegerea* lor nu la *rezolvarea* lor ; el trebuie, să le *„ocolească"*, cum spune Wittgenstein [3, p. 157], mod în care se poate dispensa de logică. De fapt filosofia matematicii este despre ce este *matematica.* „Chiar cu 500 ani în urmă o filosofie a matematicii *posibilă,* era o filosofie a ce era matematica atunci, iar atunci actul de naştere al logicii matematice nu fusese emis".

iii) Wittgenstein în ultimele scrieri cu privire la *problema fundamentelor matematicii* s-a situat de partea matematicienilor *care şi-au exprimat neîncrederea în fructuozitatea folosirii instrumentelor logicii formale (matematice) în cercetările asupra fundamentelor*; aici poate fi aşezat alături de Brouwer şi acei matematicieni care au o *aversiune* instinctivă faţă de *formalizare.*

Referindu-se la *fundarea matematicii,* Wittgenstein [3, p. 171] scrie: „Ce nevoie are matematica de *fundare*. Nu e nevoie de nici una, eu cred, mai mult decât pentru propoziţiile despre obiecte fizice, sau impresii senzoriale că propoziţiile matematicii au nevoie de o *analiză.* Propoziţiile matematicii au nevoie de o *clarificare* a gramaticii lor exact ca celelalte propoziţii. Problemele *matematice* despre ce este numit *„fundamente"* nu sunt mai mult pentru noi o fundare „decât the painted rock is the support of painted tower".

Chiar dacă *tentativa fregeano-russelliană* a *fundării matematicii* a eşuat, *problema fundării,* rămâne încă incitantă din perspectiva a două importante *„teorii-mamă" : „bătrâna teorie a mulţimilor"* şi *mai „tânăra teorie a categoriilor"*. Desigur, speranţa găsirii unei teorii care să ofere o bază pentru întreaga matematică pare să se fi năruit odată cu *demonstraţia de independenţă a ipotezei continuului* (Cohen 1963), dată de la care a început să nu se mai poată vorbi de *o singură* şi *adevărată teorie a mulţimilor* ci de o mulplicitate de teorii ale mulţimilor; o serie de analogii referitoare la efectul acestui *rezultat de independenţă* (în plan set-teoretic) cu cel al *postulatului paralelelor"* au fost făcute şi au fost analizate matematic, logic şi epistemologic într-o vastă literatură de specialitate.

În 1967 Mostowski [1, p. 32] comenta această situaţie semnificativă din matematică: „Dar există o multitudine de teorii ale mulţimilor şi nici una nu poate reclama un loc central în matematică. Numai nucleul lor central comun poate conţine axiome necesare pentru reducerea matematicii la teoria mulţimilor". De altfel S. Mac Lane a formulat ideea unor *fundamente multiple* pentru matematică pe care o comentam în Ţurlea [1, p. 223] astfel: „Practica matematică (a realităţii matematice) nu mai poate fi reconstituită formal de nici un singur sistem fundaţional, nu mai privilegiază vreun sistem fundaţional, sugerând, cum observă S. Mac Lane [1], ideea *„sisteme multiple pentru fundamente"*, (în sensul de „luate colectiv"), care comportă particularitatea că obiectele cu care are de-a face matematicianul care lucrează în practică (working mathematician) nu pot fi interpretate în nici unul dintre aceste sisteme luate izolat".

Aşadar, noua teorie cu *statură fundaţională — teoria categoriilor —* a contribuit pe de o parte la practica matematică şi, pe de altă parte, aspiră la un *„statut fundaţional"* semnificativ pe măsura efectelor, realizărilor ce le-a produs în activitatea matematică efectivă. Hatcher [1, p. 374] comentează noua situaţie constituită odată cu apariţia teoriei categoriilor: „întrucât alegebra categorială a reuşit să reducă un mare număr de concepte teoretice (ansambliste, adică de teoria mulţimilor) la concepte relative la compuneri de funcţii, acesta sugerează în mod natural ideea că ar fi posibilă o fundamentare a matematicii pe noţiuni diferite de cele de *mulţimi* şi *apartenenţă"*.

Lawvere [1] va spune în „spirit categorial" „chiar în fundamente, nu *substanța* ci *forma invariată* este purtătorul informației matematice relevante. Așadar, *concepția logicistă* asupra matematicii, esențialmente *platonistă* „a favorizat", în orizontul sistemelor fundaționale, teoria mulțimilor cu ale ei concepte obiect, element, apartenență, ori critica wittgensteiniană a logicismului își găsește în teoria categoriilor un *„aliat"* în *„erodarea" ontologică* a *„paradigmei ansambliste"*, sau set-teoretice. S-ar putea spune că teoria categoriilor asumă un spirit wittgensteinian, ale cărui considerații îndepărta în plan secund noțiunea de *obiect*, reliefând importanța noțiunii de *structură (sistem)*, a se vedea paragrafele anterioare ale eseului de față), un sort de entitate matematică, oricum, *„anti-substanțială"*, refractară spiritului platonist, implicit, cel puțin, în logicism. Spiritul wittgensteinian *„anti-obiectualist"*, *„anti-substanțialist"* este regăsit, recuperat în teoria categoriilor, în care *„obiectul"* este restituit prin *morfism* (identitate) ; favorizând termenul *„structură"*, Wittgenstein se întâlnește cu limbajul morfismelor, functorilor, transformărilor naturale. Ar trebui să remarcăm că atitudinea lui Wittgenstein refractară *„fundării"* matematicii pare contrazisă de *„starea actuală"* a cercetărilor fundaționale, unde se petrec evenimente care nicidecum nu-l confirmă pe autorul *Remarcilor,* cel puțin în sensul că problema *fundării* ar fi o *„pseudo-problemă"*. Atare situație atestă legitimitatea acestui *„câmp de cercetare"*, care pare să fi fost recunoscut astfel și de Wittgenstein în unele remarci făcute asurpa matematicii (a se vedea și Carlo Penco [1]). Wittgenstein are dreptate când spune că este „o opinie eronată să se considere *calculul* (subl. M. Ț.) ca o *fundare a matematicii"*, cu condiția să completăm că acest cadru nu poate suplini rolul fundamentelor filosofice ale matematicii (a se vedea *Philosophische Grammatik).* Să amintim teze wittgensteiniene ca : „conceptele matematice nu sunt în sine cunoaștere" (Wittgenstein [3, V 2]) ; propozițiile matematice (contradistincte de cele empirice) au demnitatea (statutul) regulilor", toate acestea sintetizate în teza că *„matematica nu vorbește despre nimic"*. Vom înțelege spiritul *filosofiei lingvistice a matematicii, înțelegerea matematicii* ca o *structură,* ca un *cadru lingvistic,* unde contează acordul cu regulile. Această *filosofie lingvistică* refuză *relevanța sistemelor formale* pentru *fundamentele matematicii,* condamnarea lor pentru că conduc la contradicții emergente din structura fundamentală a acestor sisteme ; în ciuda observațiilor critice wittgensteiniene, Bernays [2, p. 522] vorbește despre importanța contradicțiilor. În acest câmp legitim al fundamentelor matematicii, Wittgenstein discută despre semnificațiile *demonstrațiilor de consistență, „tăieturile" lui Dedekind,* concepte de *infinit, numărabilitate, aritmetizare* și altele, și chiar mai mult, abordarea teoriei mulțimilor capătă chiar un caracter matematic pronunțat.

„Anti-fundaționalismul" lui Wittgenstein ar putea fi azi asimilat cu respingerea *pretențiilor fundaționaliste* prea *ortodoxe,* de tipar vechi (de regulă inspirate din teoria mulțimilor). Wittgenstein scria : „nu putem da nici o fundație (excepție cea biologică și cea istorică sau ceva de acest gen) ; tot ce se poate este stabilirea acordului sau dezacordului între uzul cuvintelor și reguli" (Wittgenstein [4]). Analog, Hao Wang vorbind de *fundarea matematicii,* afirmă : o fundare profundă este faptul

sociologic că este acceptată. Şi acest fapt sociologic implică o varietate de factori diferiţi : „printre ei cei biologici şi psihologici care sunt elemente ultime decisive. Aceste observaţii trimit la remarcile lui Wittgenstein [3, I 118, IV 13] asupra fundamentelor biologice şi psihologice ale matematicii ; dar această perspectivă de abordare a *problemei fundării* în filosofia ştiinţei este numită *„externă“*, în care *disciplinele, auxiliar* în studiul ştiinţei în cauză, aici matematica, sunt istoria ştiinţei, sociologia ştiinţei, psihologia ştiinţei şi chiar biologia ştiinţei.

3.2. Wittgenstein versus intuiotionism

Intuiţionismul (matematic) repreznită o varietate de *constructivism*, acesta din urmă având drept caracteristică esenţială respingerea completă a platonismului. De altfel, constructivismul nu trebuie considerat ca un *„produs“* creat de *„situaţia-criză“* a matematicii generată de paradoxuri, el reprezentând, mai curând, un spirit care a fost prezent, practic, în toată istoria acestei ştiinţe. În acest sens, originile constructivismului pot fi identificate în opera lui Aristotel ; analiza noţiunii de *infinit* este revelatorie în această privinţă. Desigur, şi filosofia kantiană poate fi interpretată în spiritul constructivismului, însă în sens strict matematic, actual, constructivismul matematic este prezent în opera lui Leopold Kronecker — precursor ilustru al intuiţionismului matematic olandez întemeiat de Brouwer, din a cărui şcoală menţionăm pe A. Heyting, Rootselaar, Troelstra şi alţii. Idei constructiviste au cultivat şi şcoala franceză prin reprezentanţi ca Emile Borel, H. Poincaré şi Henri Lebesque ; dacă particularitatea şcolii franceze o constituie accentul pus pe ideea de *predicativitate*, a celei olandeze rezidă în importanţa atribuită ideii de *constructivitate*. În intuiţionism ideea de *construcţie*, şi cea a posibilităţilor idealizate de construcţie ocupă un loc central şi configurează o perspectivă specială în lumina căreia sunt interpretate *existenţa matematică* şi *adevărul*.

Construcţiile matematice sunt *mentale*, subliniază consistent Brouwer, iar posibilităţile de construcţie sunt derivate din percepţiile noastre ale obiectelor externe care sunt atât fizice cât şi mentale. Demersul trecerii de la *actualitate* la *posibilitate* îşi are sursa în *intenţionalitatea* gândirii care face abstracţie de eixstenţă şi determinaţiile ei concrete, şi în *abstracţia* de limitările generării şirurilor. În matematica constructivă, intuiţionistă regulile prin care şirurile infinite sunt generate nu reprezintă pur şi simplu un instrument în cunoaşterea noastră ci o parte componentă a realităţii (matematice) despre care vorbeşte matematica. Ilustrarea concepţiilor de mai sus o putem face invocând subiectul matematic tipic relevant : *care este statutul aserţiunilor despre infinit ?* Generarea unui şir de simboluri este ceva despre care construcţia numerelor naturale este o *idealizare*, un proces în timp care nu este niciodată complet. În matematica intuiţionistă *infinitul* este *potenţial*, nu *actual* : fiecare număr natural poate fi construit, dar nu există construcţia care conţine în ea însăşi întregul şir al numerelor naturale (a se vedea *The Encyclopedia of Philosophy*.

In aceeaşi lucrare pe care am citat-o, avem o explicaţie a conexiunii dintre *constructivitate* şi *intuiţie*: „Probabil ideea că aritmetica se bazează pe timp ca o formă de intuiţie stă în spatele insistenţei lui Brouwer asupra constructivităţii interpretate în acest mod. Un aspect al sensibilităţii din care noi nu abstragem în trecere de la percepţia concretă la forma ei este caracterul ei finit... Astfel poziţia lui Brouwer este bazată pe o limitare, în principiu, asupra cunoaşterii noastre: constructivismul este implicat de postulatul că nici o propoziţie nu este adevărată până ce noi nu am cunoscut-o într-un mod nemiraculos să fie adevărată". (The Encyclopedia of Philosophy, p. 204).

Deoarece poziţia filosofică a lui Luitzen Egbertus Jan Brouwer a fost derivată din explicaţiile filosofice ale *intuiţiei matematice*, el a numit-o *intuiţionism*. Matematica intuiţionistă a acceptat caracterul *potenţial* (şi a respins caracterul *actual*) al infinitului, dar noi nu putem renunţa în practică la aserţiuni despre *„toate numerele naturale"* sau despre *clase infinite*. În acest caz, vom spune că „o propoziţie despre toate numerele naturale poate fi adevărată numai dacă este determinată să fie adevărată prin legea conform căreia şirul numerelor naturale este generat" (The Encyclopedia of Philosophy, p. 204), Brouwer susţine că acest lucru este echivalent cu posesiunea unei demonstraţii.

Teoria intuiţionistă a *continuului* este fundată pe *teoria generală a infinitului potenţial*. Ideea generală de *continuu* este de natură *geometrică*, însă tentativele de a-l defini cu ajutorul numerelor au dus la *conceptul de continuu aritmetic*. Dar dacă în concepţia lui Cantor conceptul de continuu mai avea determinaţii geometrice, spaţiale, Brouwer promovează un concept de *continuu aritmetic, temporal*, relevat de *„curgerea timpului"*. Alexandru Surdu [1, p. 13] comentează această distincţie în termenii: „Imaginea cantoriană, spaţială a continuului aritmetic a determinat o interpretare *statică* a matematicii, limitată la succesiuni de entităţi matematice infinite *predeterminate*, la ceva dat, care chiar dacă nu a fost cunoscut încă ar putea fi conceput de către un eventual „Înţelept Suprem". Problemele referitoare la aceste entităţi ar exista şi ele în sine şi ar fi gata rezolvate, urmând să fie doar *descoperite*. Determinaţiile spaţiale ale continuului aritmetic cantorian permit interpretarea succesiunilor de entităţi matematice drept succesiuni *actual* infinite, pe când determinaţia temporală nu permite decât o interpretare *potenţial* infinită a succesiunilor de entităţi matematice. În termeni aristotelici, elementele continuului cantorian sunt *concomitente*, deci *date* simultan; elementele continuului brouwerian nu pot fi decât *consecutive*, deci urmând să fie date". În viziune intenţionată există „succesiuni care înaintează *ad infinitum*, pe baza unor legi de formare a elementelor. Printr-o astfel de lege poate fi determinat orice element al şirului, în funcţie de elementul precedent. În genere, legea garantează înaintarea succesiunii la infinit, oferind în acelaşi timp o metodă prin care poate fi construit întotdeauna un element pe baza celor construite deja Practic aceste succesiuni nu sunt infinite, ci *tind* către infinit". (A. Surdu [1, p. 15]. Dar există şi succesiuni infinite nedeterminante, care iau naştere treptat prin *acte libere* de alegere a elementelor, o astfel de mulţime este numit *„mediu al devenirii libere"*, relevantă în situaţia prelungirii unor operaţii matematice, ca cea de obţinere a zecimalelor lui π sau prin alegeri libere arbitrare, care la rândul lor pot fi mai mult sau mai puţin libere.

Ideea de *constructivitate* în sens intuiţionist mai poate fi conturată prin consideraţii asupra semnificaţiilor *propoziţiilor existenţiale.* O demonstraţie constructivă are proprietate că dacă conţine menţiunea despre existenţa a ceva, atunci oferă o metodă de *„găsire"* sau *„construire"* a acelui obiect. Conform punctului de vedere constructivist-intuiţionist un obiect matematic *există* numai dacă poate fi *construit.* Un exemplu luat din *Encyclopedia of Philosophy* va ilustra aceste consideraţii : există un număr natural x astfel că Fx înseamnă mai devreme sau mai târziu în procesul de generare a şirului numerelor naturale va fi produs astfel că Fx. In cazul că x depinde de parametrul y, atunci x va fi determinat plecând de la y pe baza legilor de construcţie a numerelor şi a construcţiilor presupuse de F. Demonstrarea unei formule $(\exists x)Fx$ înseamnă să indicăm cum construim x, astfel că demonstraţia este completă odată ce x a fost construit. A demonstra $(y)\ \exists xFx$ înseamnă să oferim o metodă generală pentru găsirea lui x pe baza lui y.

Construcţia intuitivă constituie garanţia *existenţei matematice,* ceea ce nu poate fi construit intuitiv, mediat sau imediat este lipsit de sens. Matematicienii intuiţionişti îşi propun *„curăţarea"* matematicii clasice de nonsensuri, care, după opinia formaliştilor „mutilează" matematica. St. Korner ilustrează nonsensurile în care abundă matematica pre- şi neintuiţionistă : concepte matematice neintuitive sau ideale, cum sunt infinităţile actuale ale lui Cartor, ca numerele transfinite şi care în plan intuitiv n-au corespondent intuitiv ; propoziţii, legi sau axiome ideale ca de exemplu propoziţii care descriu infinităţi actuale, axioma alegerii, legi ca *tertium non datur* şi negaţia duplex, inferenţe sau raţionamente ideale.

Deci, *construcţia intuitivă* reprezintă garanţia existenţei matematice, şi de aici teza fundamentală a matematicii intuiţioniste, care este în mod evident opusă formalismului : *„existenţa matematică* (concepută intuitiv) implică întotdeauna *noncontradicţie logică,* dar *necontradicţia logică* nu implică întotdeauna *existenţa matematică efectivă.* În mod concret, această teză a determinat atitudinea permanent negativă a intuiţionismului faţă de încercările formaliste de axiomatizare a teoriei mulţimilor". (A. Sundu [1, p. 18]).

Intuiţioniştii nu au respins logica în general, ci logica matematică în accepţia logicistă sau formalistă. Una dintre tezele intuiţioniste este : *Tertium non datur* şi *duplex negatio* nu pot fi universal valabile în cadrul unei logici corecte, dar nu pot fi nici false. Intuiţionistic este justificată folosirea unei logici în forma calculului cu condiţia ca să nu fie întrebuinţată pentru *fundamentarea matematicii* (aşa cum procedează logiciştii) şi nici pentru *construcţia ei formală* (conform poziţiei formaliste). Poziţia intuiţionistă, dimpotrivă, consideră că matematicile constituie fundamentul logicii.

Neointuiţionismul, ca doctrină filosofică, este oarecum izolat, dar unele direcţii intuiţioniste, între care una inaugurată de A. Heyting, conduc spre *logica intuiţionistă,* căreia mulţi matematicieni intuiţionişti nu i-au acordat atenție; această logică, partea accesibilă și acceptabilă pentru matematicieni și logicieni de diferite orientări; trebuie să pomenim aici și numele marelui logician K. Gödel. Această *logică intuiționistă* este tot mai mult prezentată în veșminte formaliste, maniera formalistă, fiind folosită pentru a fundamenta matematica intuiționistă. Heyting care a contribuit remarcabil la progresele formalizării logicii intuiționiste a susținut că acest proces al formalizării nu are relevanță pentru matematica intuiționistă. Problema actuală rămâne construirea unei logici intuiționiste în care să fie respectat postulatul că matematica este independentă nu numai de logica formalistă obișnuită ci și de logica formalist-neointuiționistă. Între particularitățile logicii intuiționiste reținem critica făcută negației și terțului exclus. Putem aserta „p" numai dacă avem o demonstrație. Explicația lui „$\neg(x)Fx$ ca $(x)Fx$ nu poate fi demonstrată" nu satisface condiția. O demonstrație a lui p este o construcție care produce o absurditate din supoziția unei demonstrații a lui „p". Interpretarea în cauză face dubios terțul exclus. Fiind dată o propoziție „p" nu există un motiv să presupunem că vom fi în posesia sau a unei demonstrații a lui „p" sau a unei deducții unei absurdități din „p". Dacă enunțul terțului exclus este luat ca o aserțiune matematică, o demonstrație a lui va produce o metodă generală pentru soluționarea tuturor problemelor matematice, dar Brouwer a respins această posibilitate (vezi The Encyclopedia..., p. 205). Consecința acestei interpretări, derivată din logica intuiționistă, este o serie de schimbări ale matematicii și în special ale fundamentelor analizei, în acest ultim caz ne referim la *„bar theorem"*, un principiu obținut analizând cerința că dacă o funcție este definită pentru toate șirurile trebuie să existe o demonstrație constructivă a acestui fapt, ceea ce este echivalent cu propoziția că dacă o ordonare este bine fundată *inducția transfinită* are loc cu privire la ea(vezi op. cit anterior). Oricum, punctul de vedere intuiționist nu a produs o dezvoltare așa bogată ca matematica clasică și nici nu oferă motive suficiente pentru renunțarea la filosofia platonistă subiacentă ei.

Atitudinea lui L. Wittgenstein față de intuiționism ne apare ca un gen de „specializare" (sau „specificare") a ideii de *„corespondență cu obiectele matematice"* care justifică procedurile matematice. Punctul de vedere wittgensteinian despre natura și statutul propozițiilor matematice exprimat în ceea ce este numit *caracterul non-referențial* al acestora și în declararea lor ca *„forme de inferență"*, folosite în derivarea unei propoziții din alta nu este limitat numai la suspectarea și negarea entităților abstracte matematice, ci vizează orice credință în vr-un gen de entități ce ar justifica ideea de *corespondență* cu obiecte matematice. Pe scurt, obiecțiile wittgensteiniene vizează și credința intuiționiștilor că matematica este studiul unui anumit sort de *entitate mentală, construcție matematică mentală*. Intuiționismul consideră că matematica are ca subiect propriu, specific acestei construcții mentale, cum spune Heyting [1], teoremele matematice enunță că asemenea construcții au fost efectuate. Noi descoperim proprietățile obiectelor matematice printr-un fel de *contemplație interioară* a acestor construcții (Heyting [2, p. 2]).

Sau, în concepția fondatorului intuiționismului matematic, Brouwer [1, p. 78], matematica este caracterizată ca proces „al deducerii teoremelor exclusiv prin intermediul construcției introspective". Pentru înțelegerea unei propoziții matematice este nevoie de o *intuiție interioară* a acestor obiecte, procesul interior rămânând totdeauna relevant, în timp ce *sistemul formal* este incidental, cu rol de auxiliar pentru activitatea matematică autentic intuiționistă. În Heyting [2, p. 42] avem expres exprimată ideea că „un astfel de acompaniament lingvistic nu este o reprezentare a matematicii, cu atât mai puțin matematica însăși". Iar întemeietorul intuiționismului, Brouwer [2, p. 70] afirmă că „nici limbajul obișnuit, nici orice limbaj simbolic nu poate avea alt rol decât să servească ca un auxiliar non-matematic". Heyting [1, p. 4] oferă următoarea explicație a atitudinii intuiționiștilor față de limbaj: *„ambiguitatea fundamentală"* a limbajului, faptul că semnificația unui cuvânt nu este suficient de precis fixată ca să excludă posibilitatea neînțelegerii, aceasta este rațiunea incertitudinii noastre privind relevanța sistemelor formale în raport cu gândurile noastre matematice. Gândurile intelectuale individuale sunt marcate de mințile noastre individuale, nu pot fi transcrise pe hârtie, și de aceea niciodată nu vom fi siguri că sistemul formal reprezintă construcțiile noastre (matematice) interioare, ori tocmai această *construcție matematică mentală* contează realmente în matematică, conchide Heyting [1, p. 8].

Dacă în privința *programului intuiționist* Wittgenstein nutrește o anumită *simpatie*, în ceea ce privește *fundamentele filosofice* ale acestui *program*, atitudinea lui a fost de totală respingere, critica lui vehementă vizând în mod deosebit aserțiunea intuiționistă că esențial în matematică este *„starea mentală internă"*, iar manifestările ei externe, *„acompaniamentele lingvistice"*, sunt irelevante. Referința la *stări mentale* (autenticele surse ale *ontologiei* matematice intuiționiste) nu oferă o bază pentru *„obiectivitatea inferenței matematice"*. Deși aserțiunile wittgensteiniene nu sunt făcute într-un context polemic cu intuiționiștii sau cu alte filosofii ale matematicii, remarcile sale asupra *„relevanței imaginilor mentale"* pentru matematică sunt în mod cert în conflict cu ideea intuiționistă a relevanței construcțiilor mentale interne. Atacă ideea că *„criteriul înțelegerii"* în matematică îl reprezintă faptul că posedăm stări sau imagini mentale, ceea ce echivalează cu respingerea aserțiunii intuiționiste că a cunoaște o propoziție matematică, sau a face matematică înseamnă să contempli o imagine (mentală) generată de enunțul propoziției sau/și să fii angajat în procesul construcției mentale matematice. Dimpotrivă, (Wittgenstein [2, 199]) pentru *înțelegerea* în matematică fundamental este ca noi să aplicăm *„corect"* propoziția matematică respectivă, să știm s-o folosim; „a înțelege o propoziție înseamnă a înțelege un limbaj. A înțelege un limbaj înseamnă a fi un *master of a technique"*. Wittgenstein a negat că *inferența matematică* este un proces care urmează conexiuni percepute intern dintre propoziții, o activitate specifică ce s-ar substitui *înțelegerii* veritabile. Mai curând, inferența este un mod simplu de *„writing down"* o propoziție după altă propoziție, și să facem aceasta în mod corect, aici acest cuvânt nefiind definit în termenii stărilor interne (conform doctrinei intuiţioniste) ci în termenii comportamentului colectiv al celor care folosesc *„regula"*.

„Teoria imaginii mentale" a înţelegerii, specifică *intuiţionismului,* este sever criticată în remarcile 138—184 din Wittgenstein [2]. Argumentul wittgensteinian este centrat pe ideea că *„imaginile mentale"* nu sunt nici necesare, nici suficiente pentru a explica *„înţelegerea"* noastră a propoziţiilor matematice, a matematicii însăşi ; invocă imposibilitatea unei „stări mentale *unice"* conexă înţelegeri unei propoziţii matematice, că de fapt *imaginea* sau *tabloul* (picture) mental nu garantează înţelegerea noastră a unui cuvânt, propoziţie etc. şi că este *necesară „aplicaţia"* imaginii. *Imaginea* şi *aplicaţia* sunt diferite, şi dacă *imaginea* poate semnifica lucruri diferite, atunci ea nu poate fi deci suficientă să ne dea semnificaţia cuvântului şi nu poate fi deci suficientă pentru înţelegerea lui. Când învăţăm şirul numerelor naturale, apariţia unei imagini mentale rămâne irelevantă pentru înţelegerea acestui concept. În Wittgenstein [2, 146] citim referitor la *înţelegere :* „înţelegerea însăşi este o stare care este sursa uzului corect". Prin urmare concepţia wittgensteiniană în problema înţelegerii este aceasta : „aplicaţia este un criteriu al înţelegerii". *Starea internă* presupusă a fi sursa aplicaţiei va fi ceva asemănător intuirii (grasping) unei formule algebrice, formula având în sine mai mult decât o aplicaţie. Atunci când apare o *imagine mintală,* în absenţa unei *aplicaţii,* nu dispunem de un criteriu suficient pentru înţelegere. Dacă sunt posibile mai multe aplicaţii, trebuie să avem un mod de a determina care este *aplicaţia corectă ;* tocmai uzul public actual despre ce se imaginează, reprezintă criteriul pentru o aplicaţie corectă, în timp ce stările mentale prin ele însele nu sunt suficiente pentru, să spunem, înţelegerea unei formule. Mai mult, chiar dacă admitem că tabloul, imaginea (the picture) joacă un rol în *înţelegere,* nu este necesar să fie o imagine mentală, cu alte cuvinte este neimportant dacă apelăm la imaginaţie sau la un model ce stă în faţa noastră (afirmă Wittgenstein [2, 141]). Wittgenstein consideră drept criteriu al *înţelegerii* nu *„starea internă"* ci *„comportamentul",* de unde etichetarea concepţiei sale ca *behaviorism.* Cunoaşterea noastră văzută ca un aparat dispoziţional intern ar putea să ne explice manifestările comportamentale ale cunoaşterii noastre. După Wittgenstein o explicaţie a aparenţelor comportamentale invocând ipoteza unui *„aparat interior ascuns"* nu este convingătoare, deoarece rămâne legitimă întrebarea : cum putem şti că starea internă identificată reprezintă înţelegerea ? Chiar dacă am găsit ceva (mental) care s-a întâmplat în toate acele cazuri de înţelegere — de ce acest proces ar trebui să fie înţelegere (Wittgenstein [2, 133] ; poate fi alt acompaniament mai degrabă decât înţelegerea. În aceeaşi lucrare citată, Wittgenstein arată că această încurcătură (the muddle) este relevată de confuzia noastră privind posibilitatea observării directe a înţelegerii, căci cum poate fi ascuns procesul de înţelegere când noi spunem : „Acum eu înţeleg deoarece am înţeles !" Concluzia wittgensteiniană este că înţelegerea nu este exact o stare mentală care stă în spatele aplicaţiei corecte, să spunem, a formulelor matematice. Înţelegerea este dovedită prin capacitatea de a face

ceva, iar criteriul înțelegerii este *comportamentul public* al celui ce înțelege ; înțelegerea este invederată de aplicații proprii, altfel spus, sintetic, *cunoașterea înseamnă a face*.

Și în problema *inferenței matematice*, remarcile wittgensteiniene vin în conflict direct cu aserțiunile intuiționiste, deoarece în timp ce intuiționiștii consideră *„inferarea"* o activitate mentală specială, un proces mental care urmează *conexiunea* dintre premise și concluzie, Wittgenstein o analizează în termeni comportamentali. El respinge ideea că inferența este un proces intern inaccesibil observatorului, considerând-o *„writing down"* o propoziție după alta conform paradigmei acceptate. În Wittgenstein [3, I 6] afirmă că inferarea este o activitate specifică, un proces în mediul înțelegerii... „o *tranziție* de la o propoziție la alta *via* alte propoziții" ; poate fi prezent un acompaniament *mental* al acestui proces inferențial, dar acest aspect este neesențial. În *Remarci*... Wittgenstein insistă asupra naturii inferenței în termenii : „inferența este fundamental o derivare a unei propoziții din alta conform unei reguli ; aceasta poate să se producă pe hârtie, oral sau în cap" ; apariția unei stări mentale particulare este total irelevantă pentru procesul inferenței matematice.

Imaginile mentale și construcțiile mentale invocate de intuiționiști după o *fundare* pentru inferența matematică sunt contestate, cel puțin în spirit wittgensteinian, dacă nu criticate, deoarece nu oferă un mod pentru a decide dacă inferența efectuată este corectă. Wittgenstein a susținut că matematica este *normativă* și acest lucru se constată ușor citind *Remarcile,* observațiile consacrate conceptului de *regulă,* conformitatea cu regula rămânând în viziunea sa criteriul corectitudinii inferențiale. În viziunea intuiționiștilor, o inferență este corectă dacă corespunde procesului mental interior, *regulei* aprehendate intern. Dar, deoarece noi nu suntem siguri că sistemul formal extern constituie o reprezentare adecvată a procesului mental interior, nu avem nici certitudinea că inferența exprimată (public) coincide cu cea interioară. După o interpretare, dacă noi împărtășim punctul de vedere al intuiționiștilor în această problemă, adică acceptăm *„starea interioară" mentală* ca criteriu a ceea ce este corect în matematică, noi nu vom ști într-un caz dat dacă răspunsul este corect ; după Wittgenstein aceasta va fi sfârșitul matematicii. Dificultățile generate de adoptarea poziției intuiționiste sunt chiar mai grave ca cele care le comportă acceptarea platonismului, și aceasta datorită posibilității aprehendării diferite a ceea ce a fost aprehendat. În Wittgenstein [3, II 69] posibilitatea determinării lui *„wrong-right"* (corect-incorect) devine problematică, dacă, de exemplu, nu se respectă că „multiplicarea corectă este *pattern*-ul în care toți lucrăm la fel nu dispunem de determinația a ce este *corect*. Cum mai spune (în Wittgenstein [3, V 24] : „calcularea corectă" nu înseamnă calcularea cu înțelegere clară ci înseamnă calculare ca aceasta ; un „pas inferențial corect" își are temeiul și criteriul nu în *procese interioare (intuiționiste)* ci în rezultate publice (overt results), încât criteriul lui *corect* și *greșit* rezidă în (sau este bazat pe) comportamentul colectiv al utilizatorilor *regulilor* inferenței matematice. Deci, *„acordul (agreement)* *public"*, şi nu *„stări mentale private"*, este esenţial şi relevant în matematică. În ultimă analiză, polemica presupusă, deschis declarată sau subiacentă, a lui Wittgenstein cu intuiţioniştii este axată pe două *„concepte-pivot"* : *intuiţia* şi *limbajul*, despre care a scris încă în *Tratat* (6.233) : intuiţia este într-adevăr necesară pentru probleme matematice, dar *aspectul public* al matematicii este realizat de limbaj, o concepţie mai ponderată decât a adversarilor săi în acest context, dar, desigur, nu se poate ignora o anumită *„favorizare"* a celui de al doilea concept *(limbajul)*.

Wittgenstein a respins *metafizica* şi *epistemologia* intuiţionistă, dar după unele interpretări, el şi-a însuşti mult din acestea şi chiar a fost considerat, uneori, *„intuiţionist"*. El are comun cu intuiţioniştii ideii ca : respingerea ideii *realităţii matematice* independentă de orice gândire, matematicienii fiind descoperitori ai unor entităţi pre-existente (anti-platonism, anti-logicism) ; Wittgenstein a considerat că agentul uman este determinant în matematică, o idee cu puncte de contact cu cea brouweriană a *subiectului „care gândeşte"*, *„care creează"*, matematicianul fiind un *creator* şi nu un *descoperitor*, el caută noi căi inferenţiale şi nu urmează fidel conexiuni predeterminate (în mod platonician). A avut o anumită neîncredere în demonstraţiile non-constructive şi puternice rezerve privind valabilitatea universală a *terţului exclus*, puncte de simpatie a doctrinei intuiţioniste. El a împărtăşit convingerea intuiţionistă despre ***caracterul neesenţial şi irelevant al „demonstraţiilor*** *de conssistenţă"* ca şi credinţa că matematica nu poate fi fundată pe logică.

Dar Wittgenstein a respins *fundarea filosofică* a credinţelor intuiţioniste (inclusiv a celor acceptate de el) susţinând ideea irelevanţei *stărilor mentale* şi a *construcţiilor interioare*. Pentru el *criteriul cunoaşterii şi înţelegerii* matematice rămâne *uzul public al regulilor,* manifestările externe sunt baza inferenţelor matematice corecte şi proceselor interioare inaccesibile şi de aici şi importanţa acordată limbajului matematic, ca de altfel oricărui limbaj, ceea ce face din Wittgenstein unul dintre întemeietorii remarcabili ai *filosofiei lingvistice.*

3.3. Wittgenstein versus formalism

Dacă cineva găseşte mai satisfăcătoare *concepţiile constructiviste* asupra matematicii, atunci când le compară cu cele platoniste, atunci, ca o consecinţă a acestei atitudini, ar trebui să renunţe la o parte semnificativă a matematicii clasice. Dar ce se poate face din *punct de vedere constructiv* cu această matematică clasică ? I se poate da un sens constructiv, o justificare constructivă ? Este intuiţionismul unica posibilă dezvoltare constructivistă a matematicii ? Există forme mai slabe de constructivism ?

Alături de *logicism* şi *intuiţionism* există un *al treilea „curent-program"* în filosofia matematicii, este vorba de *formalismul* lui D. Hilbert, care a încercat să investigheze şi alte posibilităţi de expunere şi dezvoltare a matematicii. Posibilitatea investigată de Hilbert și școala sa (Bernays, Ackermann, Herbrand, von Neumann) a fost inspirată de fenomenul real al *formalizării,* deși nu complete, a matematicii. Odată ce matematica este formalizată există posibilitatea de a face abstracție de semnificatia fixată, atribuită enunțurilor clasice și de a considera combinațiile de simboluri și formulele în sine. De exemplu, demonstrația unei anumite teoreme în sistemul axiomatic ZF (Zermelo-Fraenkel) poate acum să fie reprezentată ca o *„configurație" de simboluri* conform anumitor reguli. Conceptele de care ne servim aparțin matematicii finitiste (finitare), bunăoară *consistența* sistemului formal este arătată prin propoziția că nu putem avea o configurație care este o demonstrație cu proprietatea că nu va avea *a last line* de o anumită formă, de exemplu A & ~ A. Deși în studiul matematic noi facem abstracție de *interpretarea intenționată* a sistemului, o folosim ca ghid privind chestiunile care sunt interesante.

Matematica clasică este prin excelență *platonistă;* Hilbert a vrut, apelând la formalizare, să-i ofere *fundamente ferme,* consistența formalismului, în care urma să fie *„turnată"* matematica clasică, se intenționa să fie asigurată prin *„mijloace finitare".* Acum se opera cu *sistemul formal* care reprezenta un *sistem* de enunțuri și în acest context *problema consistenței* are sens. Dacă concepțiile platoniste se caracterizează printr-un pregnant caracter nedeterminat introducerea lor se face în enunțuri conform unei analogii cu enunțuri *„reale", finitare,* scopul fiind păstrarea noțiunilor de *adevăr* și *fals* și a legilor logicii. Interesul lui Hilbert pentru *problema consistenței* a fost motivat de faptul că matematica platonistă este o *„extensie"* a extrapolării plecând de la matematica finitistă (conform „The Encyclopedia", p. 206). Formulele formalismului încorporează anumite noțiuni combinatoriale elementare și exprimă *„elementele reale",* în timp ce *enunțurile ideale* (analogul elementelor ideale din geometria proiectivă) au rolul de a produce *„rotunjirea"* construcțiilor, simplitate, eleganță etc. Relațiile deductive au loc între *„enunțurile reale"* și este dezagreabil și chiar indezirabil să identificăm o formulă a sistemului, constatată falsă, prin calculare, și totuși demonstrabilă. În demonstrațiile de consistență trebuie să arătăm că nu se întâmplă asemenea cazuri. „Astfel, presupunem că noi extindem teoria recursivă a numerelor liberă de cuantificatori adăugând cuantificatori și poate cuantificatori de ordinul al doilea. O demonstrație a consistenței sistemului care rezultă va arăta că nici o formulă numerică falsă (enunțând o relație recursivă a întregilor particulari) nu va fi demonstrabilă. În fapt va produce o demonstrație constructivă a oricărei formule a sistemului original demonstrabilă în extensie, în acest sens arătând uzul *elementelor «ideale»* ca eliminabil. Deoarece Hilbert a schițat că multe rezultate ulterioare relevante pentru înțelegerea matematicii nonconstructive dintr-un punct de vedere constructivist pot fi obținute din demonstrații de consistență" (The Encyclopedia, p. 206).

Hilbert a fost intens preocupat de problema fundamentelor matematicii, el dorea o rezolvare *„o dată pentru totdeauna"* a acestor chestiuni, care în ultimă analiză însemna asigurarea unor baze ferme, solide metodelor platoniste. In acest sens el spera *codificarea matematicii* (sau cel puţin a analizei) într-un singur sistem formal, iar consistenţa acestui sistem să fie demonstrată prin metode elementare nechestionabile. După cum se ştie Gödel şi-a publicat teoremele de incompletitudine în 1931, eveniment care a produs o profundă dezamăgire în şcoala lui Hilbert. Această direcţie în investigaţii fundaţionale a continuat să producă rezultate, experienţa în domeniu indicând *limitări* ale *formalismului*; rezultate importante s-au obţinut chiar în *teoria finitista a demonstraţiei*.

L. Wittgenstein *a respins* orice *sistem de obiecte mentale*, sau de *obiecte abstracte, matematice* şi a fost mai curând în consens cu Hilbert că matematica are ca subiect propriu *semnele, inferenţa matematică* fiind definită ca *transformare*, chiar *manipulare* de *semne*, iar *adevărul matematic* fiind tratat în termenii *demonstrabilităţii* în cadrul sistemului formal respectiv. Ca şi formaliştii a fost interesat de exemple şi proceduri finitare, şi a suspectat şi a cerut prudenţă privind folosirea *terţului exclus* şi apelul la *demonstraţii neconstructive*.

Dar simpatia lui Wittgenstein pentru *semne* şi *limbaj* nu coincide cu *doctrina formalistă*, în acest sens el respingând considerarea matematicii ca *„manipulare de simboluri fără semnificaţie"*, opunându-se *„mecanizării matematicii"*, în acest punct întâlnindu-se de aceeaşi parte a baricadei cu intuiţioniştii; a respins tratarea inferenţei matematice ca procedură mecanică, automată, independentă de subiectul uman. Relevanţa *„agentului uman"* în concepţia lui Wittgenstein în contextul evocat al formalizării matematicii priveşte definiţia sistemului matematic, care nu trebuie definit în termenii axiomelor şi regulilor ci definiţia trebuie să ţină seamă de aspectul *cum sunt folosite regulile*, cum oamenii produc infernţe, o teoremă se consideră demonstrată dacă a fost acceptata de cei ce agreează asupra sistemului formal respectiv. Antipatia faţă de *relevanţa demonstraţiilor de consistenţă* îl separă pe Wittgenstein de formalişti, cum de altfel îl desparte de ei considerarea inferenţei ca un *„simplu şi pur joc de simboluri"*, cum reiese din următorul citat din Johann von Neumann [2, p. 51]: „noi trebuie să privim matematica clasică ca un joc combinatorial jucat cu simboluri primitive", aici simbolurile primitive n-au semnificaţie intuitivă, fiind definite implicit prin axiome şi reguli. Formaliştii atribuie conţinut intuitiv numai *„aritmeticii finitare"*, în timp ce enunţurile despre infinit sunt structuri ideale care n-au semnificaţie reală şi propoziţiile logicii sunt vide de semnificaţie, cum spune Hilbert (Despre infinit) „formulele calculului logic sunt enunţuri ideale care nu semnifică nimic în ele însele". Wittgenstein [3, II 67] [3, II 34] consideră că această concepţie este un non sens: „matematica nu este un simplu joc, propoziţiile matematice nu sunt poziţii într-un joc", matematicianul care joacă un joc *nu inferă*. Aşadar, semnele logicii şi matematicii nu sunt lipsite de semnificaţie cum afirmă formaliştii, simbolurile acestor ştiinţe au o semnificaţie în afara sistemului axiomatic, de exemplu „constantele au o semnificaţie în limbaj, aplicaţiile familiare ale lui „V" şi „∼" sunt relevante în acest sens şi demonstraţia capătă sensul şi importanţa ei pornind de la ele; prin urmare conceptele matematicii nu-şi pot asigura semnificaţia exclusiv prin definiţii implicite. Inferenţele matematice constau în transformări ale semnelor, dar aceste transformări au aplicaţii importante, ceea ce le distinge de *simplele mişcări* ale unui *„joc"*, în sensul că funcţia matematicii rezidă în furnizarea formelor de inferenţă care ne facilitează contactul cu lumea materială; desigur, după Wittgenstein, unele părţi ale matematicii nu au o explicaţie imediată.

Dar atacurile wittgensteiniene mai importante vizează ceea ce se numeşte *fundamentele programului formalist*; pe scurt, *formalizarea* teoriilor matematice şi *demonstraţiile de consistenţă* ale sistemelor formale. În ceea ce priveşte *formalizarea,* drumul gândirii wittgensteiniene este contradictoriu: de la fascinaţie (în prima perioadă) la contestare şi negare în a doua perioadă, cea a *„jocurilor de limbaj"*, a regăsirii *„patriei" limbajului comun* (natural) de către *„fiul risipitor"*; şi nu numai contestare şi negare ci şi indignare emoţională vehementă: un limbaj care nu a crescut organic este nu numai nefolositor ci şi *despicable.*

Mai târziu enunţurile despre limbaj din opera lui Wittgenstein au fost greşit înţelese ca enunţuri despre limbajul formalizat simbolic. El era sceptic privind importanţa limbajului simbolic în clarificarea şi corectarea confuziilor în limbajul obişnuit şi în limbajul filosofic, pe care în prima perioadă a evoluţiei gândirii sale le considera cauza *puzzles-uri* filosofice şi a pseudoproblemelor. *Mutatis mutandis,* este uşor să deducem în problema noastră ideea nerelevanţei sistemelor formale pentru teoriile matematice.

Să dezvoltăm mai pe larg a doua latură a problemei, cea a *demonstraţiei de consistenţă* a *sistemelor formale matematice.* Să remarcăm că Wittgenstein [4] are ca obiectiv polemic tentativa formalistă de a da matematicii fundamente prin *calcul matematic.* În Wittgenstein [4, 296] scrie: nici un calcul nu poate decide o problemă filosofică. Un calcul nu ne dă informaţii asupra fundamentelor matematicii. Trebuie să distingem între *„criza fundamentelor"* ca *problemă filosofică* şi problemele fundamentelor matematicii ca probleme matematice, în op. cit. 364 Wittgenstein scrie că în matematică se pun numai probleme matematice, non filosofice. Între problemele matematice figurează şi *problema matematică* a *non contradicţiei* în legătură cu care Hilbert a pretins că va da o nouă *fundare* a matematicii, văzând în propria sa meta-matematică un „tribunal" de control al fiecărei aserţiuni matematice. Pentru Wittgenstein faptul că Hilbert considera *„demonstraţia"* teoriei matematice ca obiect al metamatematicii echivala cu construirea unui alt calcul, un nou joc şi nu un „meta-joc" o matematică şi nu metamatematică. Vorbind sintetic Wittgenstein va critica *„din exterior"* tentativa hilbertiană (în timp ce Gödel în 1931 o criticase, de fapt îi distrusese bazele *„din interior")*, adică el nu se preocupa să demoleze tehnic, matematic fundamentele pretenţiei lui Hilbert.

Referitor la această problemă, şi am numit *problema demonstraţiei consistentei sistemelor formale ale teoriilor matematice,* este de făcut observaţia că Wittgenstein distinge cu claritate şi într-un mod interesant, între *„contradicție"* și *„ideologia meta-matematică" hilbertiană,* al cărei ax obsedant a fost *„certitudinea"*.

Vorbind despre *contradicție* în matematică, Wittgenstein [3, V 28] ia „în răspăr" opiniile și concepțiile curente despre caracterul ei malefic privind *„certitudinea regală"* a acestei științe. El se întreabă ce se întâmplă atunci când un *nou fel* de *certitudine* apare, diferită de cea obișnuită cu care eram familiarizați ? S-ar putea ca această aritmetică conținând acum o contradicție să ne facă (eventual mai târziu) bune servicii. Și atunci nu este mai bine să ne modificăm conceptul de *certitudine,* decât să spunem că aritmetica în cauză este una improprie ? La unele interpretări, precum și cea a lui Turing, după care un calcul conținând o contradicție se dovedește periculos prni aplicații, Wittgenstein a răspuns : presupunem că este o contradicție în calculul nostru pe care n-am notat-o ; scheletul (edificiul) construit făcând uz între altele de calculul respectiv ține, nu se prăbușește. Este greșit calculul nostru ? Sau presupunem că edificiul cade prin concluziile calculului și calculul este contradictoriu dar noi nu vedem contradicția în calcul și tragem concluzii false...

Wittgenstein, desigur, nu neagă faptul că prezența contradicțiilor într-un sistem de calcul poate avea consecințe dezastruoase. Cum remarcă Carlo Penco [1, p. 141] Wittgenstein nu neagă că „contradicția possa creari problemi", ci neagă „che debba creare problemi".

Hilbert a afirmat că demonstrația nonctradicției este *esențială* pentru matematică *(e questione di vita o di morte !),* contradicția logică este *inadmisibilă ;* dar calculul fără contradicții caracterizează o tehnică a noastră particulară, o tehnică a limbajului pe care l-am privilegiat, pare să răspundă Wittgenstein ; și atunci de ce nu poate fi tolerată contradicția ? Am putea imagina o tehnică lingvistică imaginară pentru care contradicția să constituie un instrument teribil, spune Wittgenstein [3, V 8]. Eforturile lui Wittgenstein nu vizează delimitarea tehnică a premisei matematice, a contradicției logice. „Tema (activitatea) noastră nu este aceea de a găsi calcule, ci de a descrie situația prezentă" (Wittgenstein [3, II 81], adică de a arăta legitimitatea ; ori, din această perspectivă, despre contradicție se poate spune că este o configurație a calculului, admisibilă ca și alte configurații, a cărei prezență nu distruge calculul ci îl transformă. Calculul nu devine „fals" ci inutilizabil pentru anumite scopuri practice, dar poate folositor pentru altele, remarcă Wittgenstein [3, III 78]. Și Wittgenstein [3, II 59, 57, 81, 78] indică posibilități de cercetare a contradicției urmărind scopuri diferite : din punct de vedere *estetic* contradicția lui Russell poate fi considerată ca o super-propoziție care tronează ca un monument asupra celorlalte propoziții ale sistemului, în limbajul comun contradicția nu este întotdeauna apreciată negativ (celebrul „bel paradosso" al lui Diderot) ; într-o comandă sau decizie o contradicție produce o stupoare, indecizie, este scopul ei într-un joc lingvistic ; sau pentru unele exprimări de genul în „lumea aceasta totul este incert" etc.

„Punctul de vedere antropologist" al lui Wittgenstein l-a condus la reflecții și remarci originale definindu-l și delimitându-l de cei care l-au

inspirat în prima perioadă a evoluției intelectuale (Frege, Russell, Hilbert).

El a uzat, poate că a și abuzat, de fantezie pentru a sugera posibilități imaginare ale lumii și vieții oamenilor, apreciind viziunea lui Frege și Hilbert despre calcul ca una *relativă*: „Este sigur că lumea nu va vrea să calculeze în alt mod decât al nostru ?" ironia wittgensteiniană de sorginte antropologistă sugerează *„grade de incertitudine"* cf. lui G. Kreisel 1964. Încrederea că calculul necontradictoriu trimite la demonstrația noncontradicției este un element metafizic care se insinuează în gândirea matematică. Atacul wittgensteinian împotriva *„metafizicii noncontradicției"* nu este deci decât o parte a modului de a face filosofie, observă Carlo Penco [1, p. 147].

Acum revenim la importanța demonstrațiilor de consistență din punctul de vedere promovat de Wittgenstein. În *Remarci*... II 82 se întreabă : cât de mult se câștigă realmente prin descoperirea unei demonstrații de consistență ? face ea mai demn de crezare sistemele noastre (formale) ? „Trebuie o demonstrație de consistență... în mod necesar îmi dă o mai mare certitudine decât eu o aveam fără ea ?". De altfel o demonstrație poate fi ea însăși defectuoasă și atunci poate spune că un înger bun va fi totdeauna necesar pentru ceea ce eu fac.

Campania atacurilor contra demonstrațiilor de consistență este una în același timp împotriva ideii *formalizării*, componentă preliminară în cadrul programului formalist, menită să asigure o *fundare sigură și credibilă* a matematicii prin apel la tehnici logice absolut credibile care evită apariția contradicțiilor dezastruoase. Și cum punctul și aici este *„fundarea"* matematicii trebuie să reamintim că Wittgenstein credea că matematica nu are nevoie de nici o fundare, și, chiar dacă ar avea, calculul logic nu poate servi acestui scop. *Formalizarea logică* nu este o *cheie* a fundării pentru matematică, pentru că nu *semnele* contează în demonstrații ca *instituiri umane* ci capacitatea demonstrației de a ne convinge despre ce este presupus să demonstreze. Proprietatea *perspicacității rămâne* relevantă în context, demonstrația trebuind să aibe caracterul unui model.

Calculul logic russellian nu este convingător, procedeul notațiilor simbolice adesea prea lungi pot permite strecurarea erorii ; comparativ cu formalizarea logică care nu are *perspicacitate*, calculul aritmetic elementar este perfect clar, poate fi luat ca criteriu al inferenței corecte și în timp ce demonstrațiile russelliene nu sunt folositoare ca *fundare*, el (calculul aritmetic) este mai potrivit acestei activități (de fundare). Mai general, logica cu fundare a întregii matematici *nu lucrează* (Wittgenstein [3, II 43]) și din cauza lipsei de survezabilitate, încât autorul *Remarcilor* face remarca malițioasă că chiar atunci când dispunem de o demonstrație în calculul-Russell, logica este încă „frills tacked on to the aritmetical calculuos" (Wittgenstein [3, II 4]), deoarece calculul însuși și nu formalizarea logică contează drept criteriu pentru ce este demonstrat. Remarcile critice la adresa sistemului lui Russell privesc deopotrivă orice tentativă de formalizare logică a matematicii, metodă contestată principial de Wittgenstein care stăruie asupra relevanței *agen-*

tului uman în demonstrații, care devin folositoare numai întrucât sunt acceptate de ființe umane (semnificația antropologistă este evidentă). De pe această poziție este respinsă „ideea *mecanizării* matematicii, a modului sistemului axiomatic“ *(Remarci* V 9). Operațiile mașinii, inferențele automate nu sunt, în această perspectivă, autentic matematice ; această perspectivă este cunoscută în literatura de specialitate ca *teoria behaviorală* sau *antropologică* a inferenței matematice, centrată pe importanța agentului uman, în legătură cu care se recunoaște acțiunea decisivă a acestuia în cele mai simple proceduri matematice. Se apreciază că din acest punct de vedere Wittgenstein a fost prea puțin influențat de *„revoluția“ calculatoarelor.*

Deși sunt unele asemănări intre concepția lui Wittgenstein și cea a formaliștilor cum ar fi relevanța *semnelor externe* ale matematicii, în contrast cu relevanța proceselor mentale interne susținută de intuiționiști, același Wittgenstein respinge ideea că matematica este manipulare a semnelor fără semnificație ; uneori el susține că matematica nu este despre nimic, nici chiar despre semne, ci ea constituie paradigma inferenței ; o înrudire cu formaliștii ar reprezenta relevanța exemplelor elementare ceea ce i-a atras considerarea de *finitist,* o emblemă contestată de Charles F. Kielkopf [1, p. 34] unde se consemnează că interesul lui concentrat asupra procedurilor fintare nu este bazat pe credibiltatea lor superioară. Îl leagă de formaliști *negarea entităților matematice mentale* sau *abstracte* și *„transformarea semnelor“*

4. L. WITTGENSTEIN, ANTI-FILOSOF AL MATEMATICII ?

Întrebarea provocativă din titlul prezentului capitol (ca de altfel și din titlul lucrării) ar putea genera mai multe scenarii posibile de abordare. Aici urmăm un demers al cercetării aderent la trei planuri :

i) raportarea lui Wittgenstein la componentele *«cercetării fundaționale»* — a) matematica, propriu-zisă, b) *fundamentele matematicii,* c) *meta-matematică,* d) *filosofia matematicii,* e) *filosofia generală ;* ii) probleme și concepte tipice filosofiei matematicii în viziunea lui Wittgenstein ; iii) examinarea *«declarațiilor»* proprii ale lui Wittgenstein și ale exegeților săi și articularea semnificațiilor *„detectate“* în formularea unei «opinii-răspuns» la întrebarea lansată.

4.1. Wittgenstein și conceptul de matematică

Wittgenstein a fost criticat pe drept, dar și pentru că nu a fost corect înțeles. Conceptul wittgensteinian de *«matematică»* ar putea fi cu dificultate caracterizat : concept «fluu», «fuzzy» etc. Câteva asertțiuni wittgensteiniene sunt, credem, relevante : „Matematica nu este un concept delimitat... Matematica este un amestec pestriț (mothley) de tehnici de demonstrație“ (Wittgenstein [3, IV 46]) ; sau : „Matematica este, apoi, o familie“ (Wittgenstein [3, V-26]).

De altfel, lectura atentă a *Remarcilor* asupra fundamentelor matematici *induce* imediat, deși subtil, că nu trebuie să așteptăm *definiții* ale matematicii și nici „alterări“ ale modului în care este actual făcută matematica, cum ar fi *re-facerea* (re-doing) matematicii în limbajul ideal și tehnicile logicii simbolice. Țelul lui Wittgenstein a fost să *înțeleagă* matematica «cum este actual făcută». Unii comentatori ai lui, ca de exemplu Ch. F. Kielkopf [1], afirmă că Wittgenstein n-a vrut să spună că ce este acum făcut (în matematică) este sau nu realmente matematică ; el a vrut să înțeleagă ceea ce *«matematicienii fac acum»*. Și, chiar mai mult, dacă matematicienii vor face *«ceva» diferit* în viitor, va fi menirea filosofilor acelei perioade *să înțeleagă* ce fac matematicienii lor. Așadar, impresionează *insistența* cu care Wittgenstein accentuează asupra unor concepte (sau termeni, expresii) : *«înțelegere filosofică»* a *«matematicii așa cum este acum»*, *«să lăsăm matematica așa cum este»*, căci dacă noi o schimbăm, atunci vom studia altceva, obținând o *înțelegere* irelevantă a matematicii. Asemenea reflecții sunt prezente și în *Investigații filosofice* si le vom analiza vorbind despre alte componente ale *cercetării fundaționale* — filosofia matematicii și *«filosofia generală»*, în conexiunea lor interactivă cu *«matematica»*, dar și cu *«fundamentele matematicii»* și *«metamatematica»*.

Dar cea mai controversată, disputată aserțiune a lui Wittgenstein este că „matematica este calculare (calculating)". Dacă *«a face matematică»*, „decupată" din mai extensiva propoziție *«matematica este ceea ce matematicienii fac acum»*, este relevantă pentru specificul matematicii, atunci a face matematică înseamnă a demonstra o teoremă matematică, sau *a calcula* valoarea unei funcții. Atunci, interpretarea «calculării» wittgensteiniene poate să nu mai fie peiorativă, deoarece în mod obișnuit «calculare», poate aparține matematicii pure, tot atât de mult ca și demonstrarea *teoremei fundamentale* a aritmeticii. Trebuie privită calcularea, în spirit wittgensteinian (exemplul dat este $15 \times 13 = 195$), ca o parte importantă a *matematicii neaplicabile, pure*. Interpretarea conceptului wittgensteinian, de matematică, în sensul reducerii acesteia la *«proceduri de calculare»*, împărtășită de A. R. Anderson [1], stârnește, în mod evident, puțină simpatie pentru majoritatea matematicienilor care nu regăsesc, sub acest concept reductiv de matematică, algebra abstractă și teoria jocurilor, dar și alte discipline și ramuri ale acestei științe.

S-a vorbit despre eroarea lui Wittgenstein de a identifica *«matematica»* cu *«calculul»* ca despre o eroare că o înțelegere filosofică a calculării, atât aplicate cât și neaplicate, oferă, în final, o *înțelegere filosofică* a întregii matematici. Dar Ch. F. Kielkopf [1] opinează pentru o *înțelegere mai tolerantă* a *conceptului wittgensteinian* de *«matematică»*, un punct de vedere concordant cu cele mai multe aserțiuni din lucrările lui Wittgenstein. Una dintre acestea (Wittgenstein [3.IV 16]), dar și altele, afirmă că matematica este un *«mod de formare a conceptelor»*. Wittgenstein a vorbit despre un *«solid core»* al matematicii pentru toate aceste formații conceptuale, ca un *criteriu* ce le-ar conferi *„marca" de «producții matematice»*. Acest *«solid core»* wittgensteinian al matematicii nu contrazice caracterizarea autorului *Remarcilor*, conform căreia matematica este un *mothley de tehnici de demonstrație*, ci mai curând, cum observă Ch. F. Kielkopf [1], relevă altă *«fațetă»* a gândirii matematice, „inspirată" dintr-una din diversele ramuri ale matematicii ; această perspectivă oferă o generoasă *înțelegere filosofică* a celorlalte ramuri ale matematicii, în context obținându-se o recuperare valabilă a considerării matematicii ca un calcul, ca o calculare. Din această perspectivă, care are ca pivot solid-ul *core* al matematicii, numai studiul atent și obiectiv al examinării filosofice wittgensteiniene a «*calculării*» şi nu simpla focalizare a atenţiei autorului *Remarcilor* asupra acesteia ne permite sau nu aprecierea ei ca o eroare filosofică.

Ch. F. Kielkopf [1] avansează, cum spuneam, o înţelegere mai tolerantă a conceptului wittgensteinian de matematică, constând într-o «*înţelegere mai liberă*» a matematicii, ca fiind ceea ce matematicienii numesc matematică. Este un punct de vedere productiv în demrsul de a reconstitui pertinent încercările lui Wittgenstein de a obţine mult dorita *înţelegere filosofică* a matematicii.

Punctul de vedere interpretativ formulat de autorul citat se dovedeşte fructuos în descoperirea meandrelor gândirii wittgensteiniene despre matematică, mai cu seamă confruntat cu caracterizarea matematicii ca un «*concept de familie*». Astfel, Wittgenstein [3, V-26] afirmă: „Matematica este, atunci, o familie; însă aceasta nu înseamnă că nu vom şti ce este încorporat în ea". Matematica este un „*concept de familie*", în sensul în care «*jocul*» este un concept-familie, fapt notat în *Investigaţii filosofice*. Wittgenstein [2] scrie: „Să considerăm, de exemplu, demersurile pe care le numim *jocuri*. Mă refer la jocuri distractive, jocuri de cărţi, jocuri cu mingea, jocuri olimpice ş.a.m.d. Ce au ele, toate, în comun? Să nu spui: „Trebuie să aibă ceva comun, altfel nu s-ar numi «jocuri», ci priveşte şi vezi dacă există ceva comun tuturor. Căci dacă le priveşti nu vei vedea nimic *comun* tuturor, ci *asemănări,* înrudiri şi o mulţime de asemenea lucruri. Să repetăm: nu gândi, priveşte. Priveşte, de pildă, la jocurile distractive cu multiplele lor înrudiri. Acum treci la jocurile de cărţi; aici vei găsi multe corespondenţe, cu cele din primul grup, dar multe trăsături comune dispar, apărând altele. Când trecem apoi la jocurile cu mingea, mult din ceea ce era comun rămâne, dar se şi pierde mult (...). Şi rezultatul acestei examinări este: vedem o reţea complicată de asemănări complete, alteori asemănări de detaliu". Wittgenstein [2] referindu-se la aceste asemănări scrie: „Nu mă pot gândi la nici o expresie mai bună pentru a caracteriza aceste asemănări decât aceea de «asemănări de familie»; căci variatele asemănări dintre membrii unei familii: statura, trăsăturile, culoarea ochilor, mersul, temperamentul etc., etc. se suprapun parţial şi se încrucişează în acelaşi fel. Şi voi spune că *jocurile* formează o familie". Şi mai departe citim: „Şi de pildă, tipurile de numere formează o familie de acelaşi fel. De ce numim ceva număr? Ei bine, poate că are o înrudire directă cu mai multe lucruri care au fost numite până acum numere".

Este vizată aici *metafora esenţialistă* a «*sâmburelui comun*», care trasează ferm limitele unui concept. Wittgenstein contrapune acestei concepţii propria sa idee despre «*conceptul-familie*», pe care aplicat mai întâi la noţiunea de joc, număr, îl extinde apoi la conceptul de «*matematică*». Un concept este un «*concept-familie*» dacă nu dispunem de o caracteristică necesară care trasează limitele conform cărora entităţile, lucrurile aparţin conceptului respectiv. În particular, referindu-se la matematică, aceasta înseamnă că nu putem identifica o caracteristică comună a ceva care este acum, numit matematică, caracteristică care să aibă rolul de *condiţie necesară* pentru entitatea care este numită matematică. Intră în conflict caracterizarea matematicii ca un concept-familie cu aserțiunea existenței unui «solid core» pentru matematică ? Nu există o incompatibilitate între aceste două caracterizări conceptuale ale matematicii, deoarece, scrie Ch. F. Kielkopf [1], ceea ce oamenii numesc acum matematică poate fi astfel numit fără să existe o condiție necesară pe care ei s-o folosească să numească acest ceva matematică. Activitățile matematice, ca și jocurile și numerele, au niște asemănări de familie, în virtutea cărora le încorporăm în ceea ce numim matematică, dar nu au o trăsătură esențială, comună, în virtutea căreia le apreciem astfel. Dintr-o asemenea perspectivă, noi nu știm ce se va numi în viitor matematică, pentru că activitățile considerate matematică peste 500 de ani nu vor avea caracteristica comună găsită de noi la sfârșitul mileniului al doilea. Atunci vom avea nevoie nu numai, de *o nouă filosofie a matematicii,* ci și de o *nouă definiție a matematicii.* În această perspectivă orice filosofie a matematicii este dependentă de ce este matematica la vremea respectivă, în ultimă analiză dependentă de definiția matematicii, operantă în acea perioadă în *înțelegerea filosofică* a ceea ce efectiv vor face matematicienii atunci. Asupra acestui subiect nu ne pronunțăm noi ci filosofii perioadei respective.

Dar când ne referim la concepția lui Wittgenstein despre matematică, avem în vedere nu numai *«matematica intuitiv creativă»,* în expresia ei clasică expusă în limba naturală (eventual, suplimentată cu termeni tehnici) ci și *«matematica formală»,* o realitate existentă pe vremea lui Wittgenstein prin contribuțiile lui Frege, Peano, Russell, Whitehead, Hilbert și alții. F. Gonseth [1] distinge următoarele trei orizonturi ale matematicii : *matematica* (propriu-zisă), *matematică formală* și *meta-matematică.*

Însuși Wittgenstein [3, p. .155], referindu-se la „invazia logicii în matematică", scria că „orice propoziție poate fi reprezentată într-un simbolism matematic, care ne obligă să-l înțelegem... Desigur această metodă de scriere nu este nimic decât traducerea prozei obișnuite, vagi".

Așadar, limbajele formale, ideale ale matematicii (îndeosebi cel din *Principia Mathematica)* erau o realitate și, cum am mai arătat în eseurile anterioare, însuși Wittgenstein în prima perioadă a evoluției gândirii sale (cea din *Tractatus)* era fascinat de ele, sub influența lui Frege și Russell. Acesta din urmă, cel care a aplicat *teza logicistă* în reconstituirea matematicii scria : „Faptul că întreaga matematică este logică simbolică este una dintre cele mai mari descoperiri ale epocii noastre ; și când acest fapt a fost stabilit, restul principiilor matematicii constă în analiza logicii simbolice însăși (B. Russell [1].

Necesitatea limbajelor formale pentru matematică a mai fost cerută de standardele rigorii în această știință, de exemplu, demonstrațiile pot fi redactate într-unul din sistemele formale ale matematicii, să spunem ale teoriei mulțimilor

Deși noi vorbim neformal, o putem face și în cadrul limbajelor formale, dar atragem atenția asupra interpretării intuitive a formalismului, ceea ce sugerează ideea că sistemul formal întrebuințat are rolul unui limbaj. Referitor la relația dintre limbajul natural (plus unii termeni tehnici) și sistemul formal ca limbaj ideal, cercetătorii avertizează că în limbajul (fragmentul de limbaj) natural se specifică axiomele, regulile, se discută interpretarea și se exprimă că $p \supset p$ este o teoremă a PM etc. Dar la nivel meta-matematic ne pot interesa unele chestiuni despre natura sistemelor formale folosite, cum ar fi consistența, completitudinea etc.

Concluzia este, cum observă H. Curry [1], A. R. Anderson [1], că sistemele formale nu sunt sisteme să demonstreze lucruri «în interior», ele sunt să demonstreze lucruri «despre» aceste demonstrații expuse în limbajul natural, limbajul U, numit de Curry. A. R. Anderson admite că nu este imposibil să folosim sisteme formale ca limbaje. A. Church [1] spune că este un simplu accident istoric că limba engleză are o sintaxă complicată și neregulată și că am putea învăța de la naștere un limbaj cu o structură mai simplă, regulată ca cea a limbajelor artificiale. Procedura, oricum, ne constrânge la enunțarea unor reguli semantice și sintactice explicite într-un limbaj natural. Deci, morala este nu atât să ne îndreptăm către sisteme formale cât o folosire mai prudentă a limbajului neformal vechi, după modelul celui formal. Și, oricum de limbajul natural nu scăpăm, în construirea celor formale, dar numai în sensul considerațiilor expuse, ceea ce nu poate fi conciliat cu remarca lui Wittgenstein că limbajul formal este „o metodă de scriere și traducere și nimic mai mult a prozei obișnuite vagi". Este aici o sugestie care avertizează asupra paralelismelor nejustificate, invocate de Wittgenstein, între *limbajele formale* și *limbajele naturale*, știut fiind că contradicțiile se dovedesc distructive pentru sisteme formale, dar nu și pentru limba naturală; în particular, argumentul lui Epimenide nu are un efect dezastruos asupra limbii engleze. Iată de ce Wittgenstein consideră că evitarea contradicției de către matematicieni este ceva pervers; distrugerea calculului nu privează contradicția de rolul ei rodnic în alt context, ne trebuie puțină imaginație în acest scop.

Știm că Wittgenstein a nutrit o aversiune deosebită față de limbajele formale, rod al logisticii. De altfel R. Blanché [1] remarca faptul că limitările interne ale formailsmului logistic sunt însoțite de limitări externe și că matematica, la care este adaptată în mod special logica matematică, nu este toată știința, știința însăși nu este toată cunoașterea, cunoașterea nu este singura activitate în care se exercită facultățile spiritului, chiar și cele elementare. Acest fapt n-a rămas fără urmări pentru filosofie. V. Tonoiu [1, p. 302] scrie: „Când vorbim într-un sens larg de „meta filosofie logică" (analiza logică a discursului filosofic) nu putem ignora — oricât de mari ar fi dezacordurile logicienilor cu privire la „frontiera" științei lor — că există azi un întreg sistem de discipline logice (vezi G. Enescu [1]) ireductibil la logistica zisă clasică și că unele dintre ele sunt mai bine adaptate sau tind spre o mai bună adaptare la specificul demersului filosofic. Un interes deosebit îl reprezintă printre acestea, cercetările de logica naturală („logică reflexivă") și mai ales de teoria argumentației. Ch. Perelman, care a contribuit într-o măsură considerabilă la renaşterea interesului actual pentru tehnicile justificării și argumentării, reproşează filosofiilor care iau ca model disciplinele ştiinţifice faptul că nu rezervă nici un loc ideii de *decizie rezonabilă*. Orice filosofie care vrea să fie raționalistă și care nu pretinde a limita raționalul la evident, „va trebui, pentru a face posibilă o oarecare tentativă de justificare rațională, să elaboreze în teoria sa, a cunoaşterii normale, și să ofere criteriile unei argumentații convingătoare. O teorie generală a argumentației ni se pare deci a trebui să constituie un prealabil la orice axiologie a acțiunii și gândirii“ (Perelman, Ch. [1]).

Să încercăm acum să strângem într-un mănunchi unele dintre vederile lui Wittgenstein despre matematică.

Matematica este „o tehnică de transformare a semnelor...“. cadru de „forme de inferențe“ ; „este necesar să vedem cum efectuăm inferențe în jocul de limbaj“, inferența elimină elementul reflexiv ; propozițiile matematice sunt opuse celor empirice, pe de altă parte Wittgenstein relevă, în diferite ocazii, aplicabilitatea matematicii, în special a aritmeticii, care se bazează pe condiții empirice. Wittgenstein respinge tendința de a considera aritmetica drept „istoria naturală a domeniului numerelor“ și declara „alchimie matematică“ considerarea enunțurilor matematice ca relevante despre obiecte matematice. Matematica însăși conferă semnificație semnelor. Axiomele matematice nu sunt newtoniene. Când vorbim despre *esență* notăm o convenție. Adâncimii esenței trebuie să-i corespundă o adâncime a convenției. Demonstrația este o procedură care ne constrânge. Imaginația ne învață, aici imaginația are rolul intuiției. Wittgenstein nu privește într-un mod uzual aritmetica, din care ia cele mai multe exemple ; el are în vedere teorii asupra fundamentelor aritmeticii și nu aritmetica însăși, ș.a.m.d.

Oricum, rămâne un fapt cert că cei mai mulți autori consideră că pentru Wittgenstein „*matematica*“ înseamnă „proceduri de calculare“, și că sub acest concept nu regăsim algebra abstractă și teoria jocurilor (A. Anderson [1, p. 482]). De asemenea, G. Kreisel [2] observă că unele contribuții ale lui Wittgenstein țin de aria matematicii procedurilor elementare. Și P. Bernays [2] constata că Wittgenstein s-a preocupat aproape în exclusivitate de matematica elementară. Wittgenstein în mai multe locuri se referă la aplicația conceptelor matematicii (și în acest sens a spus că conceptul de infinit nu are nici o aplicație și deci i-a contestat statutul de *termen matematic* legitim) și în consecință a lăsat posibilitatea interpretării că el nu a considerat matematica pură ca matematică autentică. În ceea ce privește „procedurile de calculare“, interpreți ca Klenk consideră că Wittgenstein a respins interpretările mecanice ale inferențelor matematice. El nu a privilegiat procedurile mecanice finitare în matematică, el nu a luat ca definitive operațiile mașinii, rezultatele lor matematice. Pentru el, omul, matematicianul este cel care trebuie să accepte sau să respingă rezultatele mașinii, el decide ce este considerat ca matematică finitară sau nu, și deci mașina nu are un statut special, și nici procedurile ei.

Matematicianul, și nu mașina, decide ce noi trebuie să considerăm a fi o teoremă matematică și acordul matematicienilor asupra rezultatelor operațiilor matematice garantează adevărul matematic, ca și depozitarea teoremelor în arhive.

Erorile în interpretarea concepției lui Wittgenstein despre matematică sunt datorate, pe de o parte, unor formulări excentrice, derutante, prezente în lucrările lui, dar și faptului că în loc să fie citite unele afirmații wittgensteiniene în contextul general al concepției sale, mai curând au fost absolutizate prin scoatere din context.

4.2. Wittgenstein și fundamentele matematicii

Wittgenstein [3, II-90] notează : „Eu nu am făcut încă clar rolul calculării greșite. Rolul propoziției : «Eu trebuie că am calculat greșit». Aceasta este într-adevăr cheia pentru o înțelegere a «fundamentelor» matematicii“. Interpreți importanți ai filosofiei matematicii a lui Wittgenstein, ca Ch. F. Kielkopf [1], așează aceste rânduri drept motto la lucrarea lor de exegeză a operei filosofului, considerându-le puternic clarificatoare cu privire la ceea ce credea autorul *Tractatus*-ului și *Remarcilor* despre fundamentele matematicii.

În ultima perioadă în literatura din domeniul *filosofiei matematicii* se discută din ce în ce mai analitic despre *structura «fundamentelor matematicii»* și mă refer expres la lucrările lui Kreisel [1], Henkin [1], Mehlberg [1] și alții ; un subiect incitant care ne-a preocupat în lucrările noastre (Țurlea [1] [3]) în intenția explicită a situării *fundamentelor matematicii* în contextul *„cercetării fundaționale a matematicii“*, dar și privind structura acestora. Dacă G. Kreisel [1] insistă asupra distincției *»fundamente matematice — fundamente logice«*, Henkin pune accentul pe *«fundamente matematice»* pentru matematică, estompând, parcă, distincția lui Kreisel ; dar accentul pus de Henkin pe *fundamente matematice*, este mai sigur o replică la fundamentele ortodoxe, tradiționale — *«logiciste, formaliste, intuiționiste»* — despre care am spus (Țurlea [1]) că dincolo de aspectul lor metodologic — metamatematic, ele au o *natură filosofică*, încât le putem numi *„fundamente filosofice“*. Ideea lui Mehlberg [1] de *„formalism metafizic“* — (în alte scrieri, în special de filosofia fizicii (Martin Strauss), având ca echivalent *„formalism ontologic“* ; se poate consulta și lucrarea noastră (Țurlea [3]) — sugerează direct legitimitatea unui al treilea tip de fundamente (alături de cele logice și matematice), este vorba de *fundamente filosofice“*.

Enunțurile din Wittgenstein [3, IV-52] sunt relevante pentru *problema fundării* : „filosoful trebuie să ocolească problemele matematice, activitatea filosofică este inutilă în matematică“, sau cele din Wittgenstein [3, V-13] : „Problemele matematice a ce este numit fundamente nu sunt mai mult fundamentele matematicii pentru noi decât roca pictată suportul unui turn ascuțit“.

Spiritul wittgensteinian în forma acestor «enunțuri — fulgurații» sugerează și fixează un orizont al investigației *fundamentelor filosofice* ale matematicii, care se identifică cu ceea ce în mod curent se numește *filosofia matematicii*. În viziune wittgensteiniană *filosofia matematicii* devine o *secțiune* a *fundamentelor matematicii* și aici se circumscriu filosofului limitele menirii și competenței sale conferite de sintagma *„înțelegere filosofică"* a matematicii. De aici poziția modestă a filosofului, asumată de Wittgenstein, conform căreia activitatea filosofică este una din *„afara matematicii"* și nu *„dinăuntru matematicii"*. (Totuși, Wittgenstein, *timpuriu*, sau *«din prima perioadă»* își aroga competențe și în sfera pură a fundamentelor matematicii, cel puțin la nivelul fundamentelor logice, atunci când procedează la *„igienizarea logică"* a *Principiei Mathematica)*.

Unii exegeți (A. R. Anderson [1]) ai operei de fundamentele matematicii a lui Wittgenstein [3] au făcut remarca malițioasă că este puțin fundamental nou în această lucrare comparativ cu scrierile anterioare, de pildă în raport cu *Investigații filosofice*. Probleme ca semnele conceptelor (marks of concepts), «urmând o regulă», caracterul constrângător al demonstrațiilor, relația dintre calculare și experiment făcuseră obiectul cercetării în lucrările anterioare ale lui Wittgenstein. După autorul citat, ceea ce este mai *nou* este o discuție detaliată a unor rezultate importante în domeniul fundamentelor clasice ale matematicii, este vorba de teorema lui Cantor, teorema lui Gödel și relația dintre logică și matematică.

Să începem cu *ultima problemă*, cea a *relației dintre logică și matematică*. Trebuie să avem în vedere un *«Wittgenstein târziu»* (sau Wittgenstein II) și atunci vom înțelege pozițiile sale contradictorii. De la elogiul și apologia logicii, când se afla sub influența lui Frege și Russell, el trece acum, am zice, la explicații patetice privind deformarea, denaturarea matematicii și matematicienilor (și chiar a filosofilor), un fenomen datorat *„invaziei"* logicii simbolice în matematică. Referitor la chestiuni logice, teza fundamentală a filosofiei lui *Wittgenstein II* (sau *târziu)* exprimată în *„Remarci asupra fundamentelor matematicii"* (p. 181) este următoarea: „Regulile inferenței logice sunt reguli ale jocului de limbaj", dar ea este bine cunoscută și din alte scrieri wittgensteiniene. Dacă în *Investigații filosofice* teza are drept context relevant „logica expresiilor noastre" în contexte cotidiene, acum, în *Remarci*, păstrează același spirit, numai că are în vedere limbaje mai specializate folosite în discuțiile despre fundamentele matematicii, opinează A. R. Anderson [1]. Wittgenstein dezavuează încercările logiciștilor de a funda matematica pe logică, poziția lui, având evidente afinități, dar, poate, motivații diferite, cu concepția lui Brouwer condensată sintetic în enunțul următor: „nici o știință, în particular nici filosofia sau logica nu poate constitui o presupoziție pentru matematică". De acord în atitudinea de respingere a tezei logiciste, motivația lor este diferită căci în timp ce Brouwer considera intuiția fundamentală *„a lui doi în unul"* singura bază autentică a matematicii, Wittgenstein o respinge. Cei doi gânditori mai împărtășesc același punct de vedere și cu privire la legimitatea demonstrațiilor non-constructive de existență, dar argumentează diferit: Brouwer subliniază eșecul acestor demonstrații în stabilirea existenței, Wittgenstein spune că noi nu putem face aceleași lucruri cu ambele tipuri de demonstrații — constructive și neconstructive. Ca să încheiem sumar asupra vederilor wittgensteiniene despre subiectul — *relația dintre logică și matematică,* mai spunem că atât Brouwer cât și Wittgenstein au considerat că logica matematică nu este nimic altceva decât logica studiată, analizată, tratată matematic *(teoria brouweriană a stadiilor gândirii matematice* argumentează convingător poziția gânditorului olandez). Ambii gânditori consideră că aplicarea tehnicilor matematice în studiul sintaxei limbajelor artificiale, de care fac uz logicienii simbolici, nu semnifică realmente o reducere a matematicii la logică. De altfel, problema naturii și statutului logicii matematice, se pare că nu mai este obiect de controversă, dispută, nici chiar între brouwerieni (intuiționiști) și fregeeni (logiciști), de vreme ce un reprezentant marcant contemporan al poziției lui Frege, și l-am numit pe A. Church [2] declara într-o notă de subsol că preferă termenul de *logică matematică* celui de *logică simbolică,* (dovada chiar titlul cărții sale, redutabilă în domeniu), pe care o considera că este logica tratată prin metoda matematică, și în special prin metoda axiomatică sau logistică. Am stăruit asupra acestui aspect pentru că dacă s-a spus că prin *„matematică"* Wittgenstein a înțeles *„proceduri de calculare"* (spunându-se, malițios, că nivelul matematicii investigat de el a fost simplu și elementar), atunci, cu privire la *fundamentele matematicii,* (și avem în vedere *„Remarci asupra fundamentelor matematicii"),* opinia răspândită, și împărtășită și de autorul citat anterior, este că el a înțeles, cel puțin în *contexte polemice,* (sau a avut în vedere) *„Prncipia Mathematica"* (monumentală operă a construcției logiciste a matematicii), eventual sisteme înrudite cu aceasta. Nu am făcut referiri exprese la poziția lui Hilbert din două considerente: la Hilbert logica nu are totuși statut de *„presupoziție"*, ci este vorba mai curând de o *«construcție formală» sui generis* în cadrul căreia logica și matematica se edifică simultan; iar despre Hilbert vom spune ceva mai mult în paragraful *Wittgenstein și metamatematica.* Cât privește atitudinea lui Brouwer față de formalisme logico-matematice și Hilbert, chiar dacă nu ne-am referi la disputa lor, o examinare atentă a *„teoriei stadiilor"* o relevă imediat și convingător.

Lectura *„Remarcilor"* în legătură cu teza logicistă că *matematica este logică,* arată că Wittgenstein nu a fost preocupat de formularea unei *„critici tehnice"* a logicismului, deoarece n-a argumentat că logiciștii pot avea în axiomatizarea matematicii axiome care nu sunt formale universal valide, și nici nu a arătat ca Gödel că nu toate adevărurile matematice sunt consecințe ale unui set de axiome. De fapt în Wittgenstein [3, V-16] recunoaște expres acest lucru: „Activitatea mea nu este să atac logica lui Russsell din *interior,* ci din *afară.* Adică nu s-o atac matematic, altfel ar trebui să fac matematică, ci poziția ei. Activitatea mea este nu să vorbesc despre (e.g.) demonstrația lui Gödel, ci s-o ocolesc". Și Wittgenstein [3] s-a ținut de cuvânt: nu-și bate capul nici cu caracterul universal valid al axiomei infinitului și nici cu incompletitudinea și lipsa unei demonstrații de consistență a axiomatizării logistice (logiciste) a matematicii; (o axiomatizare logistică, logicistă este un sistem care arată că matematica constă în adevăruri logice obținute prin deducție din axiome, care sunt adevăruri logice și toate formulele sunt redactate în notațiile logicii simbolice, formulele neconținând constante non-logice nedefinite). *Axiomatizarea logistică* și-a avut prototipul, paradigma în cea din „Principia Mathematica" și despre ea Wittgenstein a spus că „logica", ca fundarea întregii matematici nu lucrează", frază interpretată în sensul că axiomatizarea logistică din P.M. nu este adecvată ca fundare a matematicii.

Expresia *«fundamentele matematicii»* este cumva ambiguă în cuprinsul *„Remarcilor"* wittgensteiniene, căci se poate înțelege sau *fundamente filozofice* ale matematicii, sau *fundamente matematice* ale matematicii. Atunci cum trebuie să comentăm fraza, pasajul său, că axiomatizarea logistică nu poate fi *„fundare"* pentru matematică? Și lucrurile devin mai complexe, dar să sperăm că nu și mai complicate, dacă considerăm și alte enunțuri wttgensteiniene de genul: „matematica nu necesită fundamente [3, V-13] sau că nu este interesat să atace axiomatizarea ca instrument matematic, adică s-o atace *„din interior"* (Wittgenstein [3, V-16]. Analiza enunțului wittgensteinian cu privire la axiomatizarea logistică și funcția ei de fundare poate fi făcută, în lumina ambiguității uzului expresiei *„fundamentelor matematicii"*, presupunând odată că ea oferă o *fundare matematică*, și a doua oară că reprezintă o *fundare filosofică, remarca* Ch. F. Kielkopf [1].

În prima ipostază, axiomatizarea logistică ca *fundare matematică* s-ar legitima numai dacă ar fi matematică, ce ar excela ca *rigoare* și *claritate*. Dar, cum ea nu este matematică, și chiar una mai bună pentru a-și adjudeca un asemenea *„oficiu"*, ci este logică, stabilirea consistenței ei nu relevă consistența matematicii actuale și cu aceasta nu se obține nimic pozitiv pentru matematica reală, nici în privința clarității noțiunilor și nici a rigorii raționamentului matematic.

În ipostaza a doua — axiomatizarea logistică ca o *fundare filosofică* pentru matematică, deși Wittgenstein o respinge în spirit intuiționist, ea ar putea fi acceptată, opinează autorul anterior citat, pe considerentul că privită nu ca matematică, ci doar *asemănătoare matematicii* (as sufficiently like mathematics), exigență mult slăbită față de cea anterioară, poate oferi răspunsuri la cele 3 grupe de chestiuni relevante pentru *conceptul* de *«filosofie a matematicii»* formulat de S. Körner [1].

Și acum coroborând aserțiunile anterior citate ca relevante pentru concepția lui Wittgenstein despre *fundamente*, putem împărtăși cu Ch. F. Kielkopf [1] ideea despre o *inconsistență* inerentă, explicitată după cum urmează: 1. matematica nu are nevoie de fundamente matematice ; 2. logica nu poate oferi o fundare pentru **matematică**, devine inconsistentă cu restul ansamblului numai dacă el a înțeles „fundamente matematice ale matematicii". Strict — finitismul său — axat pe conectarea conceptelor în uzul empiric, unde relevante sunt demonstrațiile și nu definițiile, în scopuri practice se ignoră și contradicțiile nu-l interesează rigoarea conceptuală, procedarea efectivă, și nu completitudinea matematicii — ar fi responsabil, după unii exegeți, de indiferența lui Wittgenstein față de fundamente matematice.

În concluzie, investigația care l-a preocupat pe Wittgenstein (admisă fiind *structura*, devenită standard, a fundamentelor matematicii : *fundamente matematice + fundamente logice + fundamente filozofice)* a fost întreprinsă, chiar dacă în diferitele lui perioade de evoluție a gândirii sale de pe poziții și cu motivații diferite, în intenția clarificării *fundamenteolr filozofice*, ocolind contradictoriu și excentric *fundamentele matematice* și *logice*. Expresia că discuția se poartă *„din exterior"* și nu *„din interior"* îmi pare suficient de sugestivă dacă o mai adăugăm la rezultatele demersului întreprins. Mărturiile lui că a nutrit puțină simpatie pentru anumite atitudini filosofice față de studiile din fundamentele matematicii (chiar dacă, cum- s-a spus, uneori, le-a înțeles greșit atât conținutul cât și motivația, dar le-a abordat pe larg) vin să se adauge concluziei noastre. De altfel, el însuși a fost clar asupra acestui lucru. A vrut să obțină *înțelegerea filosofică* a matematicii așa cum ea este efectiv făcută de matematicieni, îndemnând pe filosofi (condiție care și-a asumat-o !) nu să ia pieptiș problemele matematice, ci să le ocolească, adică să se pronunțe *„din afară"*, evident dar nu superficial, asupra doar a semnificațiilor rezultatelor cercetărilor fundaționale și a diferitelor atitudini filosofice față de acestea.

Ideea cadru în *„fundamentele matematicii"* care îl călăuzește pe Wittgenstein este respingerea *ipotezei platoniciene* a *„existenței obiectelor matematice"*. El recomanda prudență, astfel încât în interpretarea *rezultatelor fundaționale* să nu se considere că avem fapte despre entități matematice. Numerele nu denotă numere, el respinge ideea că numerele reale sunt o mulțime existentă care poate, sau nu, să fie ordonată într-un anumit mod ; mai explicit, respinge ideea că *„procedura diagonalei"* indică un număr, Wittgenstein pretinde că ea ne arată ceva și anume are sens să vorbim despre un număr real în afara ordinii propuse. Wittgenstein [3, A-3] : „Procedura diagonalei nu ne arată un număr irațional diferit de toate din sistem, ci dă sens propoziției matematice că numărul so-and-so este diferit de toate cele ale sistemului". El avertizează că nu suntem siguri de analogiile dintre numerele reale și numere întregi și raționale. Avem de-a face mai curând cu *concepte* decât cu *obiecte* și noi nu putem compara noțiunea de *număr real* cu cea de *număr natural*, cele două concepte fiind mai puțin analoage decât am crezut. Când se pronunță despre $2X_0 > X_0$ el avertizează că aici avem de-a face cu decizia noastră de a extinde conceptul de mărire în această manieră, în această situație fiind vorba de *formarea conceptelor* și nu descoperirea de fapte despre numere (ca obiecte). Concluzia lui Wittgenstein este : „Numerele reale nu pot fi aranjate într-o serie". Altfel spus, mulțimea (numerelor reale) nu este numărabilă este o chestiune de formarea conceptelor. Un comentariu asemănător avem despre *terțul exclus,* care nu trebuie înțeles ca un enunț despre faptic ci ca regulă, postulat. O altă problemă, cu semnificație fundațională, este *chestiunea axiomelor,* în particular a celor *geometrice* în lumina distincției dintre *a priori* și *empiric;* este vorba de *axioma paralelelor.* El spune că experiența are o parte de rol, dar determinantă este decizia noastră de a o accepta, tot ce este important este cum o folosim. Contează nu că recunoaștem ceva extrem de probabil ca axiomă ci faptul că noi îi atribuim o funcție. Experiența singură nu determină recunoașterea teoretică a unei propoziții (statutul de propoziție teoretică). Un enunț teoretic exact transcende experienței. Principiile mecanicii se bazează pe experiență, spre deosebire de propozițiile matematicii. Geometria se distinge de mecanică este că achiziția lumii conceptelor și a evidenței este în mare parte completă într-un stadiu inconștient al dezvoltării mentale. P. Bernays [2] în comentariile sale asupra *Remarcilor* wittgensteiniene subliniază caracterul fenomenologic al legilor geometriei și în acest sens *intuiția* are un rol decisiv în fundarea lor și mai cu seamă un rol epistemologic. Chestiuni care privesc fundamentele geometriei și axiomele ei aparțin în mod esențial de cercetări din epistemologia generală.

P. Bernays [2] remarca ideea că ceea ce este numit astăzi în sens restrâns *cercetare fundațională matematică* este în principal cu viză spre fundamentele aritmeticii. Se încearcă eliminarea a ceea ce este specific al geometriei prin *„despicarea"* ei într-un aspect *aritmetic* și altul *fizic.* În continuare (Wittgenstein nu s-a ocupat de problema enunțată) să vedem care sunt concepțiile lui despre aritmetică. În primul rând, în spiritul concepției sale generale, nu ne așteptăm ca el să adopte punctul de vedere obișnuit al matematicianului. El se va pronunța asupra teoriilor fundamentale ale aritmeticii, în special asupra teoriei lui Russell. În context este citat exemplul cu *„expansiunea" infinită* a lui π, problema fiind dacă în această expansiune infinită a lui π un anumit șir al numerelor ϕ, astfel la „777" apare. Apelând la concepția lui Brouwer avertizează că la această problemă nu se poate da un răspuns definit și adaugă „...expansiunea ulterioară (pe mai departe) a unui număr irațional este o dezvoltare ulterioară (pe mai departe) a matematicii". P. Bernays [2, p. 519] comentează : „Această formulare este ambiguă. Dacă ea înseamnă pur și simplu că determinarea locului zecimal încă necalculat a unui număr irațional este o contribuție la dezvoltarea matematicii, atunci orice matematician va fi de acord cu aceasta. Dar deoarece aserțiunea este susținută să fie una „strange sounding" (care sună straniu) în mod cert altceva este înțeles poate că cursul dezvoltării matematicii la un moment dat este indecis și că indecizia poate influența de asemenea progresul expansiunii unui număr irațional dat prin definiție, așa că decizia cu privire la al 10.000-lea loc zecimal al lui π va depinde de cursul istoriei gândirii. O asemenea vedere nu este potrivită chiar însăși concepției lui Wittgenstein, pentru că el spune la p. 138 (Remarci): „Chestiunea schimbă statutul ei când devine decidabilă". Concluzia este că concepția despre dezvoltarea ulterioară a matematicii nu contribuie cu ceva la înțelegerea situației în cazul expansiunii lui π.

In contextul vederilor sale despre aritmetică trebuie să menționăm critica pe care el a făcut-o *„teoriei tăieturiolr"* a lui *Dedekind*, căreia i-a reproșat, în principal, mixarea abordării extensionale cu cea intensională. Dacă *„tăieturile"* nu sunt introduse ca simple mulțimi ci ca definind legi aritmetice ale unor astfel de mulțimi atunci sau trebuie să utilizăm un concept vag de lege și atunci puțin se câștigă; sau dacă cineva clarifică conceptul se confruntă cu dificultatea pe care H. Weyl a numit-o cercul vicios în fundarea analizei simțită instinctiv de diferiți matematicieni și de aici recomandarea restricționării procedurilor analizei, conchide P. Bernays [2]. Reținerea consistentă a punctului de vedere extensional (ceea ce concordă cu concepția lui Dedekind) evită dificultățile. Se cere recunoașterea dincolo de conceptul de număr, a conceptului de mulțime a numerelor naturale (și deci a conceptului de mulțime a fracțiilor) ca un concept semnificativ, împotriva reducțiilor. Consecința este renunțarea la aritmetizarea analizei și geometriei.

Într-adevăr, ne putem întreba cu Wttgenstein: „trebuie geometria să fie întregime aritmetizată ?".

O discuție interesantă privește conceptele de *infinit, numărabilitate, ne-numărabilitate*. Wittgenstein înțelege prin *număr cardinal* un număr cardinal finit. Teorema ne-numărabilității totalității numerelor reale a provocat polemici; nu este suficient clarificată analogia dintre *numărabil* și *infinit*. *„Infinitatea totalității G"* este definită de proprietatea prin care unui număr finit de lucruri ale lui G, totdeauna îi este atribuit unul, *„ne-numărabilitatea unei totalități G"* este definită prin proprietatea că fiecărei sub-totalități numărabile îi este atribuit un element al lui G care nu este conținut în sub-totalitate. Numărabilitatea totalității numerelor reale este demonstrată prin procedura diagonalei și nu există aici nimic nelegitim. Teorema ne-numărabilității totalității numerelor reale devine accesibilă fără compararea numerelor cardinale transfinite (P. Bernays [2]).

În *comentariile* sale, P. Bernays subliniază că atitudinea finitistă și constructivă adoptată de Wittgenstein în problema fundamentelor matematicii concordă cu modul și stilul său de filosofare. Dar, ceea ce este neplăcut, cu greu cineva poate să susțină că acest punct de vedere adoptat de Wittgenstein a primit o confirmare în sfera investigațiilor fundaționale. În polemicile și disputele dintre cele două puncte de vedere — platonist și cel constructivist — rezultatel obținute în legătură cu probleme fundaționale semnificative par a nu favoriza, avantaja în exclusivitate, pe nici unul dintre acestea; doar s-ar putea spune că din punct de vedere constructivist, o parte importantă a matematicii nu există, un inconvenient peste care nu se poate trece, atunci când se fac evaluări, context în care *„piatra de încercare“* rămâne raportarea la matematica propriu-zisă, efectivă ca și la *rezultatele* fundaționale stabilite de cercetările meta-matematice.

Problema consistenței este revendicată și de *meta-matematică* și de *fundamente;* dar dacă o evocăm și aici, ar trebui să ne amintim opiniile sale despre sisteme formale și contradicții, despre interesanta sa reflecție care declară productive contradicțiile. Oricum, mai mulți autori, aici îl invocăm pe P. Bernays [2], susțin că este greu de presupus că Wittgenstein a fost conștientizat în suficientă măsură de valoarea, importanța condiției de consistență în cadrul raționamentului din *„teoria demonstrației“*, lucru observabil atunc când studiem discuția pe care el a făcut-o despre teorema lui Gödel despre *nederivabilitate*. Despre atitudinea lui Wittgenstein față de logică și axiomatizare am vorbit pe larg în alte paragrafe.

În încheiere o suplimentare a observațiilor despre vederile lui Wittgenstein despre *infinit*. Kreisel [2] a susținut cu multă convingere că filosofia lui Wittgenstein este *strict finitism* care interzice propozițiile generale și legitimează numai procedurile combinatoriale și în consecință, matematica reală este numai aritmetica finită. Dar unii interpreți ai lui Wittgenstein susțin că el a admis propozițiile generale. Conform acestei poziții ar trebui să considerăm *propoziția generală* nu ca un *fapt* ci ca o propoziție care indică o anumită tehnică, sau o anumită regulă. El a pretins că o propoziție este în mod esențial generală, o demonstrație care este despre un caz particular, nu este matematică. Wittgenstein a fost mai cutezător, căci a acceptat nu numai propozițiile generale și demonstrațiile neconstructive, ci și uzul conceptului de infinit în matematică.

Deoarece el a contestat că propozițiile matematice fac enunțuri despre fapte relevante, despre obiecte matematice, atunci când este vorba despre infinit el a înțeles acest lucru în sensul următor : conceptul de infinit nu este o *proprietate* a mulțimilor de obiecte ci un *termen* care e aplicat în conexiune cu anumite tehnici infinitare în matematică, remarca un comentator al lui Wittgenstein (Klenk [1]). În lumina acestei interpretări, când se afirmă că mulțimea numerelor naturale este infinită, această afirmație trebuie înțeleasă în sensul că pentru orice număr natural produs, cineva poate găsi un număr mai mare. (Wittgenstein [3, A II 5]) : „Permisiunea de a mânui jocuri de limbaj nu se termină“.Numărul real nu trebuie considerat ca o *entitate completă* ci ca tehnică de calculare la nesfârșit al zecimalelor. Prin urmare *infinitatea* nu presupune referința la o entitate completă (ca în platonism), ci o tehnică de calcul într-o anumită manieră, o tehnică de un sort special. Teoria mulțimilor și teoria numerelor reale sunt încorporate ca ramuri legitime în matematica reală dacă infinitul este interpretat conform acestei concepții. Cardinalii infiniți pot fi folosiți în matematică, dacă îi destituim de calitatea ce le-o conferă interpretarea standard, aceea de a le aplica la totalități infinite complete, încheiate. Acum identificăm o analogie cu cardinali finiți servind asemănător predicatelor pentru serii (șiruri) de numere (așa cum numerele naturale servesc ca predicate pentru serii, şiruri de obiecte. Şi toate acestea devin posibile dacă păstrăm în minte distincţia dintre a avea de-a face cu concepte şi tehnici (ceea ce este cazul aici) şi a avea de-a face cu mulţimi de obiecte, o perspectivă indezirabilă şi respinsă. („...$2X_0$ este un semn al conceptului de zecimala infinită").

Şi despre numerele reale se pot face din perspectiva wittgensteiniană consideraţii analoage. Ideea de zecimală infinită ca o chestiune de tehnică nu reprezintă problema. Procedura lui Dedekind, a aproximării graduale a numărului real, poate fi aplicată independent de ideea unei *mulţimi* de numere, teorema lui Dedekind poate fi derivată dacă ceea ce noi numim numere iraţionale sunt *quite unknown*, însă dacă sunt o tehnică de a decide zecimalele. Singurul lucru care trebuie evitat este interpretarea extensională în termeni de obiecte.

Strict finitismul wittgensteinian reprezintă o critică a concepţiei că matematica, propoziţiile matematice sunt propoziţii experimental justificate. „Strict finitismul este o explicaţie a modului în care propoziţiile experimentale sunt convertite în propoziţii matematice". Strict finitismul respinge concepţia că propoziţiile matematice sunt adevăruri empirice justificate, dar el explică o mică porţiune din edificiul matematicii.

4.3. Wittgenstein şi meta-matematica

«Metamatematica» nu este aşa de veche ca *«fundamentele matematicii»*, decât doar dacă dăm o anumită interpretare formulării : „filosofia platoniciană a matematicii ca dialectică sau metamatematică". În lucrarea noastră (Ţurlea [3]) afirmăm că *metamatematica* este un *„produs modern"*, este al treilea orizont al matematicului, cum preciza Gonseth [1], alături de orizontul *intuitiv-creativ* şi de cel *formal* al matematicii. Se poate spune că în sens strict actul de naştere al metamatematicii datează după procesul *formalizării* matematicii la care au contribuit Frege, Peano, Russell, Whitehead, dar şi Zermelo, Fraenkel, J. von Neumann, Gödel, Quine. Dar o poziţie singulară ocupă David Hilbert, de numele căruia se leagă destinul metamatematicii ca *«teorie a demonstraţiei» (Beweis-theorie)*, o concepţie proprie despre natura raţionamentului matematic. („Materializarea" fenomenului formalizării matematicii este identificată istoric în *„Principia Mathematica"*, operă comună a lui B. Russell şi A. N. Whitehead). Aşadar, în sens actual nu putem vorbi de metamatematică decât odată cu, şi mai ales după, realizarea formalizării matematicii, raportarea la orizontul formal legitimându-i existenţa. La ordinea zilei, după apariţia (descoperirea) paradoxurilor care invadaseră matematica clasică, la sfârşitul secolului al XIX-lea, era *problema „salvării" fundamentelor matematicii*, asigurarea *consistenţei* matematicii clasice. D. Hilbert avertiza aproape patetic : *„din paradisul creat de G. Cantor nu ne va alunga nimeni !"*. Celebrul *program hilbertian* îşi propunea asigurarea consistenţei matematicii clasice, şi deci salvarea fundamentelor acestei ştiinţe, conside-

rată *model de certitudine,* printr-o demonstrație finitist-metamatematică a consistenței matematicii clasice. Procedural se edifica o *«construcție logico-matematică formală» sui generis* — edificare simultană, încât în cazul formalismului nu s-ar putea spune suficient de ferm că logica constituie o *presupoziție fundațională a matematicii,* și sub acest aspect „scapă" de criticile brouweriene și wittgensteiniene; aici *limbajul formal)* este aspectul care i-a deranjat pe intuiționiști. După edificarea construcției logico-matematice formale unitare și simultane, se proceda la redactarea matematicii în termenii acesteia, adică matematica reală intuitivă, creativă era expusă sub forma unui sistem axiomatic formal, iar apoi se aplica direct definiția consistenței în sens *sintactic,* ceea ce însemna că era interzisă apariția în sistem a două teoreme contradictorii. Consistența sistemului (prin tipul de demonstrație absolută) era verificată prin apelul *exclusiv* și *intern* la mijloacele acestui sistem. Se mai formula și exigența finitistă, care cum remarca Gonseth, urma să procure convingeri intuitive relevante asupra acestui demers. Dar programul a eșuat în urma publicării celebrelor teoreme ale lui K. Gödel și va fi reluat de Gentzen într-o *variantă modificată,* în care *exigența finitistă* este înlocuită cu o *«regula-meta-sistem» a inducției transfinite* până la ε_0, dar în acest caz nu mai lucrăm cu un sistem formal propriu-zis, ci un un *sistem semiformal,* cum constată Schütte. Conexiunea care se face cu *fundamentele matematicii,* deci cu *problema fundării,* este că intenția declarată a programului hilbertian era o dezirabilă *„separare"* a *fundamentelor matematicii* de *filosofie.* Hilbert lansase cunoscutul său slogan: *„să mutăm odată pentru totdeauna fundamentele matematicii înăuntrul matematicii",* ceea ce înseamnă că *problema întemeierii* nu va mai fi de competența filosofiei, ci o *„afacere" internă* a matematicii, tratată cu mijloacele, metodele specifice ale acestei științe.

Acesta era cadrul problemei pusă de metamatematica hilbertiană, iar L. Wittgenstein nu numai că era martor istoric (spectator) al acestor grave evenimente din istoria matematicii (al cărei destin mai ales în acea perioadă era împletit cu logica și filosofia), dar a și participat ca „actor" la ele. În cele ce urmează ne interesează concepțiile lui Wittgenstein, atitudinile și reacțiile lui la aceste fenomene majore din gândirea matematcă, și nu numai, având în vedere ecourile stârnite în întreaga istorie intelectuală a secolului XX.

Ca o *remarcă generală* care se degajă din consultarea bibliografiei consacrată lui Wittgenstein asupra relației lui cu meta-matematica, s-ar putea spune că s-au formulat și opinii nefavorabile care o pun într-o altă lumină. Observațiile din prima categorie evidențiază că Wittgenstein a manifestat un anumit „dezgust" față de logica matematică (de care metamatematica este inextricabil legată) și că unele remarci asupra *teoremei lui Gödel,* conceptelor de *contradicție* și *consistență,* ar arăta că nu le-a înțeles nici ca *rezultate meta-matematice,* nici în semnificația lor fundațional-filosofică, dar că împotriva lor *„a tunat și fulgerat".* A doua categorie de observații făcute asupra relației lui Wittgenstein cu metamatematica sunt mai prudente și tolerante și par a surprinde corect cel puțin unele fațete ale atitudinii sale ; aceste observații sunt în acord cu Anderson, Kreisel, Bernays că în opera lui Wittgenstein sunt prezente unele neînțelegeri privind diferite subiecte de logică matematică și metamatematică, şi chiar se recunoaște că el a făcut și unele greșeli, dar, cu toate acestea, s-ar putea formula o explicație plauzibilă relevantă a *„ostilității“* pe care Wittgenstein a manifestat-o și, poate chiar a întreținut-o. În mod esențial criticile privesc nu *Tractatus*-ul ci *Remarcile*. În context ni se pare potrivit să subliniem de ce am accentuat elementul de *ostilitate* prezent în concepțiile și atitudinile lui Wittgenstein ; am făcut aceasta pentru a sublinia că după unii autori, și îl avem în vedere pe P. Bernays [2], acest aspect se dovedește contra-productiv din punctul de vedere al pedagogiei filosofice : „...în contrast cu forma asertivă a enunțului filosofic din *Tractatus,* în prezenta carte prevalează în principal atitudinea aporetică. În aceasta constă un pericol pentru pedagogia filosofică, având în vedere puternica atracție ce o exercita Wittgenstein asupra tinerilor. Observația vechilor greci că contemplația filosofică începe frecvent cu mirarea filosofică, astăzi îi induce în eroare pe mulți filosofi să susțină concepția că cultivarea mirării este în ea însăși o realizare filosofică. Cineva poate să aibe dubii despre soliditatea unei metode care cere tinerilor filosofi să fie instruiți în mirare. Mrarea este euristic fructuoasă numai când este expresia (prin) unui instinct de cercetare. În mod natural nu poate fi pretins oricărei filosofii (de la filosofie) că ar trebui să facă comprehensibil tot ce este mirare. Poate că diferitele puncte de vedere filosofice pot fi caracterizate prin ce el acceptă ca ultim în ceea ce este mirare“. (P. Benays [2]).

Am văzut că logica matematică se face responsabilă de fenomenul *formalizării* matematicii, materializată în *Principia Mathematica,* situație care marchează „intrarea în scenă“ a metamatematicii. Inserția, implicarea logicii matematice în matematica modernă a fost văzută de Wittgenstein ca o *„anatemă“*, „blestem“, malefică prin efectele ei dezastruoase între care mai importante au fost deformarea matematicii, a gândirii matematicienilor și filosofilor. Celebrul comentariu wittgensteinian asupra acestui *„blestem“* explicitează două idei mai importante, ce se vor o conturare a caracterului indezirabil al logicii matematice. *Prima idee,* logica matematică ne constrânge să gândim, să concepem matematica ca un set de enunțuri despre obiecte matematice. Derularea analizei acestui punct conduce în final la ideea că logica matematică a servit drept de *„cal troian“* al platonismului modern (deghizându-l), în această știință. Ori, cum s-a văzut din eseurile anterioare Wittgenstein este unul dintre adversarii intransigenți ai platonismului. *A doua idee,* ne pare a fi mai curând derivată din prima și nu distinctă, cum apare în „scenariul“ abordării propus de Ch. F. Kielkopf [1], deci, un fel de explicitare a celei anterioare : este tendința care ne determină să considerăm că orice propoziție matematică are în mod automat și o *semnificație ;* mai explicit, *termenii matematici referă și propozițiile matematice fac enunțuri. „Deformarea gândirii noastre“* provocată de logica matematică modernă a condus la o interpretare superficială a limbajului nostru cotidian ca analiză a structurii faptelor, rădăcina acestui „rău“ aflându-și „solul“ încă în logica aristotelică, pe scurt, propozițiile matematice au devenit *declarative*, iar termenii matematici *referențiali*. Ori, această *interpretare semantică* combinată cu *simbolizarea standard*, care de fapt a și facilitat-o, devin acum *porțile* prin care pătrunde *platonismul* în matematică, chiar dacă travestit. Dacă termenii matematici referă, iar *propozițiile matematice* devin enunțuri despre obiecte matematice, atunci suntem nevoiți să concedem în acord cu platoniștii că există, realmente, așa ceva, obiecte matematice, alături de obiecte fizice, formând o lume de entități aparte de lumea fizică spațio-temporală. Dacă propozițiile matematice, în virtutea *concepției referențial semantice*, devin enunțuri despre obiecte pur matematice, atunci filosofia matematicii trebuie să acorde o atenție serioasă unui concept care îi este așa de dezagreabil lui Wittgenstein, este vorba de conceptul de *«realitate matematică»*. Și știe Wittgenstein de ce nu vrea să-l accepte, pentru că antrenează după el o anumită interpretare (semantică) a altui concept fundamental — *adevărul*; ori, această interpretare, teoria *«adevărului corespondență»*, corespondența cu realitatea, formulată prima dată de filosoful din Stagira, l-am numit pe Aristotel, trimite direct la aceeași sursă filosofică indezirabilă, *platonismul*. Dar, să vedem unele pasaje în care Wittgenstein își expune reacțiile și atitudinile față de această interpretare (fundamental platonistă) care ne introduce în „misteriile“ lumii matematice, ale universului matematic existent distinct și autonom de lumea faptelor fizice, sociologice, psihologice etc.

Wittgenstein avertizează că prin punerea unei propoziții matematice în formă logică se creează iluzia că aceasta ar avea o *semnificație definită*, plecându-se de la premisa că dacă simbolurile au funcția de a semnifica separat, atunci și combinația lor (propoziția) posedă, de asemenea, o semnificație. Ori acceptarea că o propoziție matematică are o semnificație trimite la ideea unei *realități matematice*. Dacă nu i-am dat noi o semnificație, atunci rămâne ipoteza existenței acestei realități matematice, un univers al unor obiecte speciale, matematice, care *pre-există* (platonism !) pe care termenii matematici îi referă. Punctul de vedere al lui Wittgenstein, făcând referire la *terțul exclus* și *„expansiunea“ numărului irațional“*, este că noi conferim semnificație propozițiilor matematice.

Al doilea efect malefic și dezastruos al *„invadării“* matematicii de logică ar fi după Wittgenstein, pretenția nelegitimă a logicii matematice, simbolice, de a constitui o *fundare*, un *fundament* pentru matematică. El respinge blasfemiator acest rol al logicii matematice, în contestarea ei ca o *presupoziție* a matematicii nefiind singur, deoarece se afla în consens, cum am văzut, cu Brouwer și intuiționiștii. În primul rând, prima nuanță a criticii sale, matematica nici nu are nevoie de o asemenea *fundare* promisă de logica matematică, ea fiind o disciplină cu statut independent, având metode și tehnici proprii, încât nu se poate constata necesitatea vreunui „împrumut“ de la logica simbolică. Nu se resimte matematica de vreo „dependență“ și „subordonare“ în raport cu logica matematică şi, în consecință, este superfluă orice tentativă de „justificare“ a procedurilor tehnicilor şi metodelor matematice prin apel la logica matematică. Cum însuși Wittgenstein [3, IV-24] referitor la blestemul invaziei dezastruoase a logicii în matematică: „Lucrul oribil despre tehnicile logice este că ne fac să uităm tehnicile matematice speciale. Tehnica logică este numai o tehnică auxiliară în matematică. De exemplu, ea stabileşte anumite conexiuni între diferite tehnici“. Aşadar se poate chiar vorbi de efecte chiar nefaste ale tehnicilor logice, cu atât mai mult că nu ele pot reprezenta standardul în matematică (în absența perspicacității creative proprie tehnicilor și metodelor matematice) și prin urmare nu răspund condițiilor pentru a servi drept *criterii* al inferenței corecte — autentica „esență“ a matematicii. În acest sens este aproape bizar să invoci demonstrațiile logice fastidioase practicate de Russell ca un standard pentru inferențele corecte din matematică. Atunci provoacă mirarea noastră dezideratul *justificării matematicii,* a metodelor ei, invocând drept canon logica matematică. Dar chiar dacă am încerca ce am reuși? De exemplu, să justificăm o demnostrație matematică (aritmetică, algebrică etc.) printr-o replică a ei — o demonstrație logică, dar suntem siguri că în ambele demonstrați vorbim despre unul și același lucru? În primul rând, operăm cu două *sisteme diferite,* unul matematic, celălalt logic; în al doilea rând, nu putem să dispunem de un sistem *„supra-sistem“,* sau o metodă „supra-logică“ având în vedere că am mobilizat cele mai fundamentale tehnici și procedee logice. Date fiind aceste premise nu avem o modalitate credibilă și relevantă pentru compararea și evaluarea celor două cazuri, care să ne asigure că vorbim despre același lucru și că sistemul logic este superior, și deci trebuie acceptat ca un *„cadru de justificare“* pentru metodele de inferență în matematică, garanție că logica poate constitui o fundare pentru matematică. Wittgenstein [3, II-8, 45, 20] spune textual cu privire la aceste lucruri: „Dacă cineva are o tehnică de calcul într-un sistem și altcineva are o tehnică în alt sistem, cum poate fi arătat că cele două sunt echivalente? În general, se pune problema cum poate fi definită o tehnică prin intermediul alteia? Cum poate una să explice esența celeilalte? Și dacă în mod evident obținem rezultate neevhivalente, cum decidem între ele? Cine spune că trebuie să fie tehnica logică cea care este totdeauna corectă? Cine spune, dacă ei nu sunt de acord, care este metoda proprie de calculare (iarăși leitmotivul *„calculării“,* alături de caracterul *inferențial* al matematicii — nota mea M. Ț.), cu rădăcinile ei la sursa matematicii?“. Este evidentă concluzia acestor rânduri, matematica nu are nevoie și nici nu admite o justificare în logică, o concluzie esențial *antilogicistă,* dar care „sapă“ destul de adânc la temelia *meta-matematicii hilbertiene,* și nu numai, făcând vane eforturi ale unor matematicieni (instruți logic şi filosofic ca Hilbert).

Ch. F. Kielkopf [1] sesizează o paralelă între *Tractatus* și *Remarci* referitor la *justificarea* inferenței logice şi matematice, „care trebuie să vină la urmă, ea nebazându-se pe legi mai fundamentale. Argumentarea ideii este diferită în cele 2 perioade diferite ale gândirii lui Wittgenstein. În *Tractatus* spune că nici o justificare nu poate fi dată pentru regulile noastre, deoarece este imposibil să spunem ceva semnificant despre logica limbajului nostru. În *Remarci* formulează argumentarea ce este de *natură pragmatică* „nu există un mod să spunem dacă supra-sistemul, care este presupus să ofere o justificare pentru inferențele pe care noi actual le facem vorbește despre același lucru. Și dacă cele două sisteme sunt în conflict nu există un motiv special să preferăm supra-sistemul tehnicilor pe care le folosim, în special dacă acestea au lucrat bine pentru noi" cf. Ch. F. Kielkopf [1].

Legat de *problema justificării* tehncilor, metodelor matematice de inferență (mai concis *raționamentul matematic)* Wittgenstein nu găsește utilitatea *demonstrațiilor de consistență* (ale sistemelor matematice). Demonstrațiile de consistență trebuie să stabilească că nu apar *contradicții* în sistemele noastre cu care lucrăm, pe această cale noi devenim justificați în folosirea lor. Dar cum deja am văzut ne aflăm în imposibilitatea justificării sistemelor noastre și atunci rolul demonstrațiilor de consistență devine superfluu. Atitudinea lui Wittgenstein este din nou pragmatică. În aplicarea sistemelor noastre cu care lucrăm este suficient să le folosim fără probleme, să avem convingerea că nu vor apare contradicții. Wittgenstein are o atitudine interesantă față de *contradicții, consistență* și *sisteme formale*. Astfel el notează : „În interiorul granițelor unui sistem formal contradicția nu ar trebui să fie considerată exclusiv ca un obstacol (ca ceva negativ)... un sistem formal poate să fie încă de interes chiar când conduce la contradicții. În primele sisteme ale lui Frege și Russell contradicția a apărut chiar de la început aproape direct din structura fundamentală a sistemului". Să înțelegem că Wittgenstein se pronunță în favoarea contradicțiilor ? Nu s-ar putea spune așa ceva, dar pare a se insinua un sort de *„productivitatea contradicțiiolr"* dacă asta ar fi o înțelegere corectă a unei sugestii din Bernays [2]. Ideea principală a lui Wittgenstein ar fi că oricum nu trebuie exagerată importanța demonstrațiilor de consistență, căci în raport cu ceea ce găsim practic acceptabil la un sistem (leitmotivul pragmatismului !) ele nu aduc ceva semnificativ nou (o idee împărtășită nu numai de intuiționiști, cunoscuți pentru atacul virulent și vehement la adresa metamatematicii hilbertiene ci și de H. B. Curry. Wittgenstein găsește perplex să spui că ceva formal, complex și chiar complicat și evident mult mai puțin intuitiv poate adăuga, spori certitudinea noastră. Anderson [1] observa că exagerările și criticile lui Wittgenstein referitor la *demonstrațiile de consistență,* au umbrit fondul problemei în ansamblul cercetărilor fundaționale, ceea ce i-a închis perspectiva asupra semnificațiilor acestor demonstrații privind progresele logicii matematice, metamatematicii. După Bernays [2] este îndoielnic că el a fost conștient de condiția *consistenței* în raționamentul din *«teoria demonstrației»*.

O altă problemă metamatematică celebră care a constituit obiectul reflecțiilor lui Wittgenstein a constituit-o *demonstrația lui Gödel a*

„teoremei de incompletitudine a aritmeticii“. Revenind la remarca lui Bernays că Wittgenstein n-a conștientizat importanța *consistenței* în structura raționamentului matematic, discuția lui Wittgenstein comportă în mod clar defectul că el a ignorat premiza consistenței sistemului formal considerat de Gödel. Și tot Bernays [2] notează ca potrivită comparația făcută de Wittgenstein privind *propoziția gödeliană*, și anume între o demonstrație a *«indemonstrabilității formale»* și o demonstrație a *«imposibilității unei anumite construcții cu rigla și compasul»*. O asemenea demonstrație conține un element de predicție. Observație stranie: „o contradicție este nefolosibilă ca și o predicție“. A. R. Anderson [1] subliniază că demonstrația arată că matematica nu poate fi complet automatizată; că excelența ei este *creativă* și nu *mecanizabilă*, o concluzie ce ar trebui salutată în spiritul vederilor lui Wittgenstein. Ch. F. Kielkopf [1] comentează atitudinea lui Wittgenstein față de demonstrație în termenii următori. Nu este clar că Wittgenstein a respins rezultatul demonstrației, dar este sigur că el nu a fost de acord cu o anumită interpretare a demonstrației. Deoarece Wittgenstein abordează problema în contextul unei *concepții non-referențiale* a matematicii, cu alte cuvinte respinge *«alchimia matematică»* după care propozițiile matematice sunt enunțuri despre obiectele matematice și, în consecință, va respinge ca irelevantă distincția *«adevăr-demonstrabilitate»*, ca și interpretarea că *adevărul* este independent de demonstrație, o afirmație anti-platonistă, dar în acord deplin cu constructivismul său radical. Referitor la un alt concept important — *creativitatea* — definitorie pentru matematică el va afirma că ea nu are nevoie de rezultatele lui Gödel pentru a se legitima. Pe scurt, concepția lui Wittgenstein despre adevăr este: advărat este echivalent cu (propoziție) *asertată*, ce vine la sfârșitul demonstrației.

Critica anti-wittgensteiniană a fost concentrată asupra „ștergerii“ diferenței dintre *adevăr și demonstrabilitate*, reproșându-i lui Wittgenstein că n-a înțeles „punctul cheie“ al demonstrației și de fapt al metamatematicii. Wittgenstein își plasează discuția în interiorul unui cadru *„non-referențial“*, din a cărui perspectivă îi pare că distincția *adevăr*-demonstrabilitate se *„dizolvă“*, pentru că întrezărește posibilitatea să obțină o definiție a *adevărului* în termenii *demonstrabilității*. Oricum, el vrea să evite sigur prezența unei *„corespondențe cu ceva“*, la care somează interpretarea semantic referențială, care *ceva*, când este vorba de matematică, devine *realitate matematică*, un concept indezirabil pentru un constructivist ca el, care preferă să echivaleze *adevărul* cu *asertibilitatea, demonstrabilitatea*, o certă afinitate cu intuiționiștii, cea mai severă, intransigentă specie de constructiviști. Respingând *definiția adevărului în termenii referinței semantice*, lui Wittgenstein nu-i rămâne altceva de făcut decât s-o înlocuiască cu conceptul de *derivabilitate într-un sistem*. Dar aici la Wittgenstein se adaugă, după interpretarea lui Ch. F. Kielkopf [1] și formaliștii, care nici ei nu sunt convinși că ar exista un domeniu al obiectelor matematice, o interpretare puțin plauzibilă dacă avem în vedere că un *platonism* se „travestește“ subtil odată cu formularea logico-matematică a teoriilor matematice, a teoriei modelelor.

Comentarii wittgensteiniene legate de termenul *„adevărat“* aplicat propoziției lui Gödel țintesc distingerea adevărului de demonstrabilitate. Problema în discuție : cum putem arăta că această propoziție, care spune că nici un șir de formule nu constituie o demonstrație a ei ? Propoziție lui Gödel are forma unei propoziții universale și în sistemul formal uzual în care lucrăm stabilim, demonstrăm cazuri (instances) ale acestei propoziții și invocând argumente semantice concludem că acestea sunt adevărate. În privința propoziției universale numai pe temeiul *derivabilității* lor și al *consistenței* sistemului formal (iată *condiția consistenței,* premisă în demonstrație !), și în acest context ne putem dispensa de noțiunea clasică de adevăr. Propoziția universală gödeliană are un statut special căci știm pe baza interpretării semantice că este adevărată, dar nu o putem demonstra. J. van Heijenoort [1] arată că lucrul devine posibil, dacă se construiește o premisă specială a sistemului formal, luând decizia să unificăm într-un enunț : *toate cazurile sunt adevărate* (un număr infinit de premise) care are statutul de *regulă semi-formală,* meta-sistem, ce modifică, oarecum, și statutul sistemului formal care o include, căci devine un *„sistem semi-formal“* în sensul lui Schütte [1]. Acum observăm că propoziția Gödel care nu este demonstrabilă într-un sistem standard, devine demonstrabilă într-un sistem *semi-formal.* Obținem un substitut al conceptului de adevăr, conceptul de *demonstrabilitate.* Rezultatul este apropiat de (sau în spiritul vederilor lui Wittgenstein, căci, acum *adevărat* dar *indemonstrabil* poate fi interpretat : „adevărat în alt sistem, i.e. poate fi corect asertat îna lt (sistem) joc“ (Wittgenstein [3, I-3, A-I-7]) ; *teorema de incompletitudine* devine un simplu rezultat de *nederivabilitate.*

4.4. Wittgenstein, filosofia și filosofia matematicii

În primul capitol am citat celebra frază din *«Tractus»,* amplu comentată în literatură, îndeosebi, atât pentru viziunea wittgensteiniană în sine despre *natura* și *statutul* filosofiei (în esență o concepție *reductivă),* cât și prin impactul produs în evoluția ulterioară a filosofiei. Într-adevăr legătura este destul de directă între această *enunțare* din *Tractatus :* „filosofia nu este o doctrină ci o activitate... Opera filosofică se compune în esență din eulcidări. Rezultatul filosofiei nu este un număr de propoziții filosofice ci clarificarea...“ și *sentința carnapiană* că filosofia se mai poate legitima într-un singur fel : devenind o *logică a științei ;* filosofia nu mai este nici măcar *teoria cunoașterii,* nicidecum *ontologie,* ea trebuie, sau, cel puțin, este somată să ființeze ca *logică a științei,* practicând doar analiza serioasă și relevantă a celor mai semnificative gânduri, cele cuprinse în enunțurile științei, funcția ei fiind acum *delimitarea «exprimabilului»* prin metoda analizei logice și *eliminarea «propozițiilor fără sens».* Pe scurt, filosofia devine, sau vrea să devină, o *«sintaxă logică a limbajului»,* problemele filosofice fiind «confuzii de limbaj», ele sunt reductibile la probleme de limbaj, și de aici avântul impetuos ulterior al *«filosofiilor lingvistice»,* mai întâi ale limbajelor simbolice ideale, apoi ale limbajelor naturale ; un destin al filosofiei la care L. Wittgenstein a contribuit remarcabil.

Nu mai dezvoltăm aici aspectul relației cu filosofia (generală), deoarece multe reflecții ale lui Wittgenstein, ale exegeților săi, ca și opiniile noastre le-am expus în primul capitol al lucrării, dar și în următoarele. De altfel și relația lui cu *«filosofia matematicii»* a fost în multe privințe anterior examinată. Reamintim doar obligați de scenariul cercetării propus și în intenția articulării coerente la un loc a sugestiilor, observațiilor, criticilor și remarcilor pozitive decelate de demersul nostru. Meandrele gândirii lui Wittgenstein provoacă prin caracterul lor contradictoriu și chiar excentric, dar totdeauna incitant benefic ; surprindem, sau mai bine spus suntem surprinși de părăsiri de poziții anterioare, treceri la alte extreme opuse, lansând mai totdeauna *„mode filosofice“,* după cum ne aflăm în perioada Wittgenstein I sau Wittgenstein II, totul petrecându-se remarcabil : „prozelitism“, adesea de cea mai bună calitate (vezi Cercul de la Viena), *„derute“,* atunci când *„versatilismul“* wittgensteinian îi surprinde nepregătiți pe discipoli și adepți. Stilul aforistic, extrem de sintetic, lapidar, profund și colorat, prin excelență sentențios, uneori malițios și chiar discret „extremist“ intelectual și totdeauna șocant, secant și parcă persiflând *«gravul metafizic găunos»,* absolutismele ce au generat cultivarea contradicțiilor (sau mai corect, a paradoxurilor), tribulațiile metafizice ale propriei sale gândiri, toate au făcut din Wittgenstein personajul, poate, cel mai charismatic și excentric de bun gust, din spațiul filosofiei contemporane, a secolului nostru. Contextual el este la fel de bine *«filosof»* și *«anti-filosof»,* dar de fiecare dată un „mister metafizic“ este prezent subiacent poziției luate, și este de așteptat că acolo gândirea dacă nu descoperă ceva, aproape sigur este în contact cu o nouă zare care tentează, provoacă, și oricum stimulează tensiuni spirituale. O operă se consacră nu numai prin ea însăși ci și prin posteritatea ei.

Ca o introducere la câteva reflecții despre atitudinea lui Wittgenstein față de *filosofia matematicii,* să reamintim *enunțul său șocant, «punct-sursă»* al unor aprecieri de genul «anti-filosof» al matematicii, cel puțin în opinia mea : „Filosofia și matematica n-au nimic una cu alta ; descoperirile matematice n-au relevanță pentru filosofia matematicii ; nici o opinie filosofică nu poate afecta procedura matematicianului“. O asemenea atitudine taie orice contact între matematică și filosofie, de parcă ar aparține unor lumi radical diferite. Te poți întreba : are sens să vorbești de *filosofia matematicii* a lui Wittgenstein ? Și chiar de o filosofie a lui Wittgenstein ? Rămâi derutat mai ales când te gândești la părerile lui B. Russell despre Wittgenstein, văzut drept candidatul ideal pentru școala, orientarea, direcția, cum vrem să-i spunem, pe care filosoful și logicianul britanic dorea să o întemeieze ; (este vorba de o școală de filosofi instruiți matematic). Interpretarea dată de Dummett [1] enunțului wittgensteinian — cea a unei segregări prea stricte și drastice a filosofiei de matematică nu îi pare ca verosimilă lui Ch. F. Kielkopf [1]. Wittgenstein, atunci când a spus că nici un progres matematic nu poate influența filosofia, a avut în vedere ceva de genul că de exemplu descoperirea recursiv-indecidabilității calculului predicatelor nu va potența înțelegerea noastră a matematicii așa cum ea este făcută efectiv, deoarece această descoperire este numai o parte a matematicii curente ce trebuie înțeleasă. Nu se poate susține, deci, ideea că progresele matematice sunt total irelevante pentru filosofie, deoarece acestea pot contribui semnificativ la o nouă matematică, care va constitui obiect al filosofiei matematicii.

Dar nu este singura asorțiune wittgensteiniană care a șocat, căci mai sunt încă multe altele; deja unele citate: filosoful nu trebuie să ia pieptiș (să se confrunte cu) problemele matematice ci trebuie să le ocolească; activitatea filosofică este inutilă în matematică etc.

A fost Wittgenstein așa „puritan" în fixarea acestor granițe așa stricte între matematică, logică și filosofie? A respins el așa drastic orice permabilitate reciprocă a frontierelor acestor discipline? În prima perioadă, cea a *Tratatului,* aflat sub influența lui Frege și Russell, el era într-un anumit sens, mai curând tolerant și nu exclusivist. Inițial interesat de fundamentele și filosofia matematicii, sub impactul scrierilor lui Frege (al axiomatizării logistice sau logiciste) își comută brusc interesul spre logică și filosofia logicii, aderând la *programul „igienizării" logice* a matematicii, ca ulterior axiomatizării logiciste (perioada *Investigațiilor filosofice* și a *Remarcilor),* să dezavueze malițios acest ideal, contestând energic axiomatizării logiciste orice rol în fundarea matematicii. Prima perioadă probează «visul lui Russell» cel a unui filosof instruit matematic și decis să se instruiască și logic, o ipostază a *«cooperării»* celor trei discipline, ce mai târziu le va despărți printr-o „cortină" să nu-i zicem „de fier", dar, oricum, imună la influențe și interacții reciproce. Era cel mai bun pretendent la *„postul" de filosof matematic* (sau chiar *«filosof logico-matematic»),* dacă aceste sintagme nu par prea barbare lingvistic. Reamintesc că filosof matematic nu înseamnă numai filosof al matematicii ci și filosof remodelat matematic, cu un stil de filosofare care este în spirit matematic, la limită într-un *spirit axiomatic,* ca în cazul *«noii filosofii exacte» (filosofia ca teorie exactă),* anticipată și, parțial, schițată de Gödel.

Istoria matematicii și filosofiei evidențiază deopotrivă și distincția dintre ele dar și conexiunea lor. Vorbind despre distincția dintre ele, S. Körner [1] scria: „După cum filosofia dreptului nu legiferează, iar filosofia științei nu formulează și nici nu verifică ipotezele științifice, tot astfel — e cazul să reținem de la început — filosofia matematicii nu mărește numărul teoremelor sau al teoriilor matematicii. Filosofia matematicii nu este matematică, ci reflecție asupra matematicii, generând întrebări și răspunsuri proprii". Și cum Wittgenstein este gânditorul care a profesat un sort de *„absolutism", absolutizarea* distincției reale dintre aceste domenii ale gândirii este specifică *perioadei târzii* din evoluția sa intelectuală. Filosoful englez, Körner [1], continuă comentând aspectul conexiunii și al cooperării dintre matematică și filosofie: „În ciuda distincției făcute, totuși conexiunea dintre cele două discipline este de natură a fi foarte strânsă. Nu putem gândi cu folos asupra unei discipline, dacă nu o cunoaștem, iar reflecția asupra unei acțiuni poate fi, desigur, utilă prin faptul că face acțiunea mai eficientă.

Matematica și filosofia s-au influențat reciproc de-a lungul istoriei lor. Una dintre cele mai vechi enigme și probleme, nu numai a filosofiei matematicii, ci ale filosofiei în general, a fost contrastul aparent dintre fluxul indefinit „al impresiilor senzoriale și adevărurile precise și eterne ale matematicii ; pe de altă parte, considerațiile filosofice asupra matematicii în raport cu știința empirică și logică au sugerat probleme matematice și-au dus chiar la crearea unor ramuri noi în matematică, așa cum sunt, de eexmplu, geometria neeuclidiană sau algebrele abstracte ale logicii matematice".

În contextul considerațiilor expuse, matematica nu poate „scăpa" de filosofie, cel puțin în cazul examinării următoarelor probleme : *originea* matematicii, *natura* matematicii, *aplicațiile* matematicii, dar reflecții filosofice suscită în egală măsură, *fenomenul matematizării generale a științei* (câtă matematică, atâta știință — Kant), care conferă matematicii o poziție singulară în spațiul culturii și am zice mai ales în ipostaza de *matematică aplicată,* o știință de un gen special, aflată la granița dintre *științele exacte, umaniste* și *experimentale,* care folosește metode și procedee elaborate în fiecare dintre aceste grupuri de științe, ajunse la maturitate conceptual-teoretică și metodologică. Rezultate și sugestii epistemologice și metodologice sunt datorate lui H. Weyl [1] privind rolul problemelor din științe pentru dezvoltarea matematicii, lui J. von Neumann [1] care analizează problema relevanței empirice, a interpretării fizice a matematicii, a infuziei de idei empirice, mai mult sau mai puțin explicite la nivelul matematicii. Și, nu în ultimul rând, impactul calculatoarelor asupra cunoașterii matematice a generat probleme filosofice serioase și grave, precum analiza demonstrației teoremei *celor patru culori,* se constă în introducerea experimentelor empirice în matematică.

S-a creat, astfel, *o situație teoretică și metodologică complexă* și, în mare măsură, *inedită* pentru *epistemologia matematicii pure,* până mai de curând supralicitată ca o dimensiune a filosofiei matematicii. Considerațiile noastre au relevanță, sperăm, pentru originile și aplicațiile matematicii ; cât privește *problema naturii matematicii,* mai complet, *problema fundării* matematicii, care include ca subprobleme pe cea a *naturii* pe cea a *structurii* matematicii, A. Mostowski [1] spunea *că „elucidarea naturii matematicii nu revine matematicii ci filosofiei".*

Se pare că dispunem de suficiente premise pentru a conchide asupra conexiunii și cooperării dintre matematică, filosofia matematicii și filosofia generală. Și când citești rânduri ca cele ce urmează, datorate unei autorități în domeniu, parcă îți vezi dacă nu validate și confirmate propriile-ți sugestii, intuiții și idei, cel puțin risipite temeri că tu însuți ai confundat *descripția* unei stări de lucruri cu un *scenariu* dezirabil ție.

În context, S. Körner [1] scrie textual : „Întrucât filosofia matematicii se ocupă în special cu expunerea structurii și funcției teoriilor matematice, s-ar părea că este independentă de orice presupoziţii speculative sau metafizice. Totuşi există îndoială dacă o astfel de autonomie este posibilă, în principiu, sau dacă nu cumva această autonomie este deja limitată, sau chiar prin simpla alegere a unui aparat sau a unei terminologii conceptuale pentru tratarea problemelor subiectului, sau chiar prin tipul de problemă considerată ca importantă. În realitate, toate concepţiile din filosofia matematicii de până acum şi, desigur, acelea care vor fi discutate aici, ori s-au dezvoltat în mod manifest în cadrul unui sistem filosofic mai larg, ori au fost îmbibate de spiritul unei Weltanschaung neformulate. Astfel de presupoziţii filosofice generale ies foarte clar la iveală atunci când exponentul unei filosofii a matematicii nu se mulţumeşte numai să atragă atenţia asupra trăsăturilor pe care unele teorii matematice le posedă efectiv, dar susţine că toate teoriile matematice trebuie să le posede sau — ceea ce înseamnă acelaşi lucru — afirmă că toate teoriile efectiv «bune» sau cu adevărat inteligibile le posedă în realitate". Şi ne oprim aici, şi aşa citatul a fost prea lung dar relevant pentru ideile care le susţinem, adăugând că efectul convingerilor metafizice este mai pregnant nu în *descrierea* ci în *prescrierea* unei situaţii, sistem, conceptuale, fenomen vizibil în polemici, dispute şi controverse.

Concepţiile wittgensteiniene distonează profund cu acest climat intelectual, şi cum s-a văzut, în bună măsură, *«ideologic»*. Cum vom vedea mediul relevant al concepţiilor lui Wittgenstein este cel al *contextelor polemice*, când ia în răspăr toate, sau aproape toate, atitudinile filosofice (şi mai cu toată lumea pare să aibă ceva !) faţă de rezultate ale acestora. Oare să-l caracterizeze pe Wittgenstein un inapetit pentru anumite luări de poziţie, fireşte în sensul cel mai înalt al activităţii intelectuale ? Cum va fi reuşit să scape sau să ţină sub control propriile sale convingeri metafizice, astfel încât să producă «descrieri relevante» ale situaţiilor şi rezultatelor din fundamentele matematicii ? Şi să reţinem că după Wttgenstein activitatea filosofică (după ce a declarat-o inutilă în matematică) i-a concedat aceasta, are menirea să fie *descriptivă* ca cea a geografului *«elementar»*, adică nu teoretician !

Ne apropiem acum, după avansarea acestor preliminarii, de *«coreul»* abordării noastre, ţinută, pe cât am putut, fidelă scenariului lansat. Am putea opera *a priori* cu un concept de *filosofia matematicii* în raport cu care să confruntăm concepţiile, remarcile lui Wittgenstein. Am putea să vedem ce se întâmplă cu demersul wittgensteinian şi de aici să inducem propriile lui concepţii articulate coerent şi să numim aşa ceva propria lui filosofie. Ne este mai la îndemână prima variantă, care ne-a fost inspirată de Ch. F. Kielkopf [1], dar augumentată cu sugestii şi idei decelate pe propria noastră cercetare, ţintind spre un dezirabil punct de vedere în problemă. Ch. F. Kielkopf [1] îşi începe investigaţia cu câteva întrebări : *ce este filosofia matematicii ? ce sunt fundamentele matematicii ?* Autorul foloseşte, în acelaşi sens, *filosofia matematicii* şi «investigarea fundamentelor filosofice ale matematicii» şi consideră că un bun candidat pentru *«filosofia matematicii»* este oferit de *lista de probleme* prezentă în lucrarea lui S. Körner [1] din care noi am citat extensiv.

Prezentăm această listă de *probleme* relevante pentru filosofia matematicii :

Din grupa I fac parte *chestiuni ontologice ale matematicii pure* (neaplicabile) : a) când facem matematică neaplicată (pură) vorbim despre obiecte ? b) aceste obiecte ale matematicii pure sunt neobișnuite ? c) aceste obiecte neobișnuite ce sunt și cum le cunoaștem ?

Din grupa a II-a fac parte *chestiuni epistemologice* ale *matematicii pure :* a) există adevăruri în matematica pură ? b) aceste adevăruri, dacă există, sunt necesare ? dacă adevărurile matematicii pure sunt adevăruri necesare, ce înseamnă aceasta și cum le cunoaştem ?

Din grupa a III-a fac parte *chestiuni asupra ontologiei și epistemologiei matematicii aplicate ;* mai exact, este vorba de faptul dacă chestiunile din grupele precedente și răspunsurile la ele oferă o explicație filosofică a matematicii aplicate.

Leitmotivul reflecțiilor lui Wittgenstein cu privire la filosofia matematicii este *«înțelegerea filosofică»* a matematicii și ceea ce matematicienii fac efectiv. După opinia lui Ch. F. Kielkopf [1] conceptul (termenul) wittgensteinian de *înțelegere filosofică* a matematicii semnifică un comentariu al celor trei grupe de chestiuni. O problemă importantă în acest context este *înțelegerea filosofică* a unei propoziții matematice (filosoful înțelege dar nu rezolvă probleme matematice, precizează destul de des Wittgenstein). În filosofia matematicii există după opinia lui Dummet o «diviziune fundamentală» în funcție de modul de explicație a semnificației unei propoziții matematice : o descriere în termenii *«condițiilor de adevăr»* și o descriere în termenii *«condițiilor de asertibilitate»*. Ch. F. Kielkopf, deși nu împărtășește opinia lui Dummett că Wittgenstein a susținut o *interpretare convenționalistă a necesității,* este de acord cu punctul de vedere după care cele două moduri de explicație a semnificației propozițiilor matematice îi divide pe filosofi în unii care consideră că *adevărurile matematice* exprimă ordinea și conexiunea dintre obiecte și alții care neagă că adevărurile matematice ne comunică despre ordinea și conexiunea obiectelor. Pe acest temei, investigarea fundamentelor filosofice ale matematicii ar trebui să înceapă cu chestiunea I-a.

După Russell (introducere la Tratatus logico-philosophicus) Wittgenstein a fost confruntat cu întrebarea : ce înseamnă să explici semnificația une propoziții, [ce relație trebuie să aibe un fapt (astfel ca o propoziție) cu altul în scopul de a fi capabilă să fie un simbol pentru celălalt ?], ceea ce ar reveni la punerea problemei generale a explicației semnificației propozițiilor. Ne aflăm din nou în fața problemei despre *obiecte matematice* și *necesitate,* adică ne confruntăm cu probleme ontologice și epistemologice ale matematicii. O *specie de platonism* va afirma, și chiar va dezvolta, o teorie despre obiecte neobservabile și în mod necesar aranjate, conectate, oferind condiții de adevăr pentru un fapt, enunțând uzurile propoziției. Wittgenstein a respins credința în obiecte matematice, întrebându-se dacă cineva care crede în obiecte matematice şi proprietăţile lor face matematică. El a dezavuat platonismul care, prin postularea obiectelor (create de mintea umană); îl obliga la o teorie despre unele obiecte care să explice uzul propoziţiilor matematice. *Obiectivitatea* şi *necesitatea matematică* nu ţin de filosofia matematicii, le consideră ceva pentru o tratare filosofică.

Al doilea mod de a trata problema explicaţiei *semnificaţiei* unei propoziţii, la care, după comentariile lui Russell la *Tractatus*, a aderat Wittgenstein şi „care apare când caracterizarea rolului pe care îl joacă propoziţia şi ideile preconcepute despre cum este jucat acest rol se izbesc (contrazic) de modelul în care propoziţia este actual folosită". Poziţia filosofului îl obligă să nu cerceteze dincolo de limbaj pentru a explica cum limbajul funcţionează, căci despre *lucruri* se pronunţă cei din *ştiinţa empirică*, eliminarea dubiilor despre cum funcţionează limbajul se realizează făcând mai clar cum el funcţionează abandonând „caracterizarea originală a uzului şi ideile preconcepute despre cum limbajul poate fi foolsit", făcând clar ce devine când oamenii fac asemenea aserţiuni. Şi în *Remarcile* lui Wittgenstein găsim că descrierea acestui fapt (când oamenii fac aserţiuni matematice) constă în atenţia acordată faptelor nelingvistice (fizice, psihologice, sociologice); după aceasta, întrebările *de ce* şi *cum* cad în sarcina ştiinţei empirice, furnizarea unor date pentru explicaţia ştiinţifică şi care evident nu constituie scopul *descrierii filosofice «of what goes on when people use language»*. Scopul descrierii filosofice este să răspundă la chestiunea filosofică despre cum o propoziţie poate face ce ea este folosită să facă. Este soluţionată problema filosofică sau se încearcă, dar nu se elaborează o teorie. În *Investigaţii filosofice,* Wittgenstein spune că „tratarea filosofică a unei chestiuni este asemănătoare tratării unei boli"; nu este nimic de explicat, căci ceea ce este ascuns nu este de „interes pentru noi... chestiunea trebuie să dispară fără urme, adică să primească răspunsuri explicite..." etc. spre deosebire de chestiunile ştiinţifice, cele filosofice, nu pot fi rezolvate, tot ce putem întreprinde este să dispară ca perplexităţi, atunci când am reuşit să le identificăm originile lingvistice. Problemele filosofice sunt datorate uzajului neadecvat al cuvintelor noastre, caracterului global al gramaticii noastre. Este de sperat o claritate globală şi absolută? Răspunsul este negativ şi tocmai de aceea problemele filosofice nu pot să dispară în mod absolut. Dificultatea în cercetările filosofice nu constă în a găsi soluţia, ci în a recunoaşte ca fiind soluţie ceva care ne dă impresia că reprezintă doar o etapă preliminară. Wittgenstein: „Am spus deja totul. Nu ceva care decurge din aceasta, ci tocmai aceasta este soluţia! nu trebuie să aşteptăm o explicaţie, descrierea este soluţia dificultăţii dacă ştim s-o plasăm unde trebuie. Mai curând ar trebui să spunem: dificultatea este aceasta: să te opreşti. (cf. J. Bouveresse [2]). Cum am văzut la încheierea primului mod de explicaţie a semnificaţiei propoziţiilor matematice el a negat existenţa obiectelor matematice şi deci a respins asumpţia că rolul esenţial al unei propoziţii este să enunţe fapte. Concepţiile sale filosofice ulterioare au fost motivate şi de faptul că «the how» în «How does a sentence do what people use it to do» a cerut o descripție mai curând decât o explicație în termenii unei teorii. Convingerea lui Wittgenstein a fost că *filosofia* în mod real este *pur descriptivă*. În Wittgenstein [4] (Blue Book) scrie : „Filosofii în mod constant văd metoda științei în fața ochilor și sunt tentați irezistibil să pună chestiuni și să răspundă în modul în care o face știința. Această tendință este sursa reală a metafizicii și conduce filosoful *into complete darkness*. Eu vreau să spun aici că nu poate fi niciodată *our job* a reduce ceva la ceva sau a explica ceva. *Filosofia* în mod real este *pur descriptivă*".

Concluzie. Filosofia nu poate oferi o *funtlare* a matematicii (Investigații filosofice), ea poate să ofere însă o *înțelegere filosofică* a matematicii și face acest lucru *nu pe calea explicației* ci a *descrierii* ; filosofia este pur descriptivă și o face plasându-se în „afara matematicii". Fiind o investigare a fundamentelor filosofice, filosofia matematică este o «secțiune» a fundamentelor matematicii (a se vedea 4.2.).

4.5. Wittgenstein și unele concepte fundamentale din filosofia matematicii

Conceptul central din filosofia matematicii în jurul căreia gravitează majoritatea conceptelor acestei discipline este cel de *realitate matematică*. Într-adevăr, acest *concept-cheie* legitimează o serie de concepte.

Conceptul de *„realitate matematică"* este cardinal în *platonism* ; el este prezent fie ca „proiecția ideală a unui domeniu al gândirii" (platonismul restrictiv), fie ca postulare „a existenței unei lumi de obiecte ideale care conțin toate obiectele și relațiile matematicii" *(platonism absolut)*, responsabil de apariția paradoxurilor. Dar, se poate vorbi, așa cum am arătat, de *platonism metodologic* (și nu ontologic), pentru care *existența matematică*, (realitatea matematică) este doar o *„ipoteză"* și care într-o manieră „tarancendentală", la care apelează Gödel, se dovedește plauzibilă și dezirabilă, în sensul că *„salvează"* o serie de concepte fundamentale relevante epistemologic, pentru orice filosofie a matematicii serioasă ; este vorba de conceptele : *intuiție, obiectivitate, necesitate, adevăr, demonstrabilitate*.

Într-adevăr, în absența unei *realități matematice*, a existenței obiectelor matematice și a relațiilor dintre ele, despre ce *intuiție* mai poate fi vorba ? ; a cui intuiție este, dacă nu a unor obiecte și relații ? Intuiția, la un realist ca Gödel, este concepută ca o extensiune a „ANSCHAUNG-ului" Kantian, o „extensiune a conceptului de percepție, un sort de *„organ fizic"* al impresiilor abstracte. Chiar și formaliștii apelează la intuiție, mai ales în sensul *„prozaic"* de *«percepție»*, percepția *semnelor* pe hârtie *(on paper)*, în înțelesul cel clar statuat în lucrările lu D. Hilbert.

Conexiunile dintre *realitatea matematică* și intuiția *matematică* sunt directe. *Existența matematică* în concepția platonistă modernă constă în *structuri abstracte* (numerice, geometrice, set teoretice, categoriale) și asociat acestor *tipuri de structuri,* veritabili locuitori ai *universului matematic,* vorbim despre *intuiție numerică, intuiție geometrică, intuiție set-teoretică* și *intuiție categorială.* Și evoluția matematicii, marcând succesiv pregnanța unui gen de *«realitate matematică»,* a înregistrat un fenomen interesant al *intuiției* care l-a însoțit pe cel al *realității matematice;* este vorba de *„fenomenul" vulnerabilității intuiției noastre matematice,* o succesiune a *detronărilor* ei : prin *descoperirea numerelor iraționale,* „locuitorii stranii" ai universului matematic, *intuiția aritmetică* s-a dovedit incapabilă să aprehendeze aspecte ale realității matematice și a fost *„detronată"* în favoarea mai eficientei intuiții geometrice. Dar și aceasta a suferit puternice transformări, căci intuiția noastră (euclidiană) indusă de geometria euclidiană a devenit inoperantă când au fost descoperite (construite) geometriile neeuclidiene, acum când *ontologia matematicii* devenea mai bogată și mai complexă. Era abandonată imaginea existenței unei structuri spațiale unice. Dar și intuiția aritmetică a suferit modificări, întrucât concepția intuitivă despre cantitate (mărime), adică număr, a fost rafinată prin contribuțiile lui Weierstrass, Dedekind, Cantor etc. Și în fine, se știe că platonismul este în cel mai înalt grad subiacent și consubstanțial teoriei mulțimilor. Dar și aici *rezultatele de independență* (Cohen), proliferarea *axiomelor cardinalelor mari,* ca și construcția de *modele bizare* în domeniul teoriei mulțimilor au relevat vulnerabilitatea *intuiției set-teoretice.* Determinarea statutului *ipotezei continuului,* va depinde de *perspicacitatea intuiției* noastre de a găsi direcția potrivită în care să îndreptăm cercetarea. Intuiția noastră concură la descrierea unei lumi posibile de determinat pe care o considerăm *existență matematică.*

Conexe *„existenței matematice"* sunt problemele *obiectivității* și *necesității matematice.* Distingem două sensuri ale obiectivității : a) *obiectivitatea enunțurilor matematice* (Kreisel), adică *important nu este existența obiectelor matematice ci obiectivitatea enunțurilor matematice.* Explicând, aceasta înseamnă *acceptarea demonstrațiilor* și a *concluziilor lor;* b) *al doilea sens,* la care aderă un realist ca Gödel (care deși este considerat platonist, el nu este platonist în sensul admiterii unui univers matematic aidoma lumii ideilor a lui Platon, ci, mai curând, în sensul *„lumii a treia"* a lui K. R. Popper) vorbim despre *obiectivitate* legat de conceptul de *adevăr,* și care, trimite explicit la *existența obiectelor și structurilor matematice.* Așadar, trebuie distins acest concept, (gödelian), care este mai *„tare"* decât primul, care semnifică doar un simplu *acord intersubiectiv* la care *„somează"* demonstrațiile și *concluziile* lor. Este evident că specificul *primului sens* are baza în *demonstrație,* particularitatea distinctivă al celui de *al doilea sens al obiectivității* rezidă în invocarea conceptului de *adevăr* plus *existența obiectelor și structurilor matematice,* într-un cuvânt conceptul de *existență matematică.* Deci, după realismul gödelian (platonism matematic modern), pentru a vorbi de *obiectivitate,* trebuie să existe *obiecte matematice* (adică să părăsim sfera *teoriei demonstrației,* pentru a intra în *ontologia matematicii),* altfel, cum observa H. Wang [4] pare oarecum straniu „să gândim obiectiv fără să gândim despre ceva".

Următoarea problemă cu care ne confruntăm, odată admisă supoziția ontologică a existenței obiectelor matematice, este cea a *„naturii“* acestor obiecte (care pot fi asemănătoare entităților muzicale — Bernays, pot fi mulțimi, concepte pure — Gödel, pot fi entități mentale — Brouwer etc.). Și atunci avem diferite forme de *realism: mental* (Brouwer), *matematic* și *conceptual* (Gödel) și așa mai departe.

Prin urmare, *intuiția* ne ajută să *„aprehendăm“ realitatea matematică,* realitatea matematică fundează *obiectivitatea, adevărul* [pentru că enunțurile matematice poartă asupra unei realități matematice și sunt *adevărate* sau *false,* după cum sunt sau nu conforme *(teoria corespondenței!)* cu obiectele și structurile din universul matematic]. În plus, intuiția ne poate procura și convingerea *adevărului asumpțiilor fundamentale* ale teoriilor matematice. Particularitățile naturii existenței matematice (în sens platonic o *lume metafizică)* conferă enunțurilor matematice proprietatea de a fi *necesare.* Kant [1] scria: „Trebuie să se observe mai întâi că judecățile matematice autentice sunt totdeauna judecăți a priori și nu empirice, deoarece conțin în sine *necesitate,* care nu poate fi scoasă din experiență. Dacă însă nu se va admite aceasta, ei bine, atunci eu restrâng judecata mea la matematica *pură,* al cărei concept cere ca ea să nu conțină cunoștință empirică, ci numai cunoștință pură a priori“.

Enunțurile noastre vor fi *adevărate, obiective* și *necesare,* în viziune platonistă, în virtutea unei *realități* (matematice) *independente* de noi. Imaginea platonistă a existenței matematice este consubstanțială cu *teoria adevărului-corespondentă* (Aristotel) și *adevărul* este independent de *verificarea, demonstrația* sau *demonstrabilitatea* lui; mulțimea propozițiilor demonstrable nu coincide cu mulțimea propozițiilor adevărate, aceasta din urmă tinde s-o *„acopere“ (asimptotic)* pe prima. Pentru *realist (platonician) realitatea* este independentă și la fel și adevărul; pentru *constructivist* nu există o asemenea *realitate* și nici un asemenea *adevăr;* conceptul central în filosofia lui este cel de *verificare, demonstrație,* din a cărui perspectivă le construiește pe primele. Pentru *constructivistul verificaționist* (și deci și pentru Wittgenstein, cu anumite nuanțe) nu există o realitate preexstentă, determinată anterior și independentă. *Realitatea est construită progresiv, produsă de activitatea noastră,* iar *adevărul* și *verificarea* nu stă în relația sugerată de *„descrierea platonistă“,* conform căreia verificarea este doar o recunoaștere a unui adevăr independent; dimpotrivă, adevărul pare construit ca produs al verificării.

Un procent semnificativ din lumea *„matematicienilor lucrători“* (the working mathematiciens) împărtășesc concepția platonistă, deoarece ea dă sens activității lor care are un *obiect,* deci „poartă“ asupra unei *realități* și produce, *demonstrează adevăruri* despre *ceva* (această *existență matematică),* încât, paradoxal, o concepție așa subtilă ca platonismul a devenit suficient de „populară“, bineînțeles tot în expunerea ei populară. Motivația acestor preliminarii a ținut seama de acest lucru, ca și de faptul că Wittgenstein s-a raportat la ea ca la o filosofie cu efecte indezirabile.

Să vedem acum concepția wittgensteiniană despre aceste concepte fundamentale ale filosofiei matematicii : realitatea (existența) matematică, obiectivitate și necesitate matematică, adevăr matematic, intuiție etc.

În cuprinsul eseurilor noastre am punctat faptul că Wittgenstein a negat *existența obiectivă* a entităților matematice, cu alte cuvinte, a contestat *„funcția referențială“ a matematicii*. Mai concret, Wittgenstein a spus că *termenii matematicii nu denotă*, iar *propozițiile matematice nu spun ceva*, statutul matematicii fiind acela de a oferi o *„structură lingvistică“*, un cadru pentru inferența unei propoziții din altele. *«Realitatea matematică»* nu este una pre-existentă, ca în viziunea platonistă, ci mai curând, se constituie progresiv în interiorul demersului matematic. Natura matematicii rezidă în calitatea ei de *„cadru lingvistic“* în care au loc *„procesele de inferență“*, inferențe care nu sunt garantate de nici o *realitate matematică*.

P. Bernays [2] subliniază un fapt semnificativ pentru înțelegerea concepției wittgensteiniene despre realitatea (existența) matematică : „Cine consideră matematica ca o fenomenologie teoretică a structurilor matematice mentale, neagă existența faptelor specific matematice despre entitățile matematice. Dar respingerea entităților matematice distruge *obiectivitatea* matematicii și conduce la *convenționalism* în care enunțurile matematice sunt adevărate în virtutea definițiilor noastre. O asemenea teorie nu poate explica stabilitatea matematicii, nu poate explica în nici un mod de ce aceste edificii conceptuale nu intră în colaps. Pe scurt, nu poate explica obiectivitatea matematicii“.

Așadar, contestând *„realitatea matematică preexistentă“* ne închidem în limitele gândirii wittgensteiniene, accesul la conceptul de *obiectivitate*. *Obiectivitatea* este fundată pe *realitatea matematicii*, și dacă distingem două concepte de obiectivitate, unul în sensul *tare* este *obiectivitatea* fundată pe *realitate*, accepție relevantă pentru *obiectivismul gödelian* și care este în directă conexiune cu problema *naturii matematicii ;* acest concept de obiectivitate este legat direct semnificativ de conceptul de *adevăr*, context în care pentru prepozițiile matematicii funcționează *principiul logic al terțului exclus*, conform căruia despre fiecare prepoziție matematică se afirmă că sau ea, sau negația ei, este adevărată. Conceptul acesta de obiectivitate (să-l numim conceptul gödelian de obiectivitate) legat fundamental de conceptul de adevăr, trimite direct la (deși lasă deschisă) *problema naturii obiectelor matematice*. În mod cert angajează însă *supoziția existenței obiectelor matematice* și sugerează pasul următor de făcut, cel al rezolvării *naturii entităților matematice*. În problema naturii obiectelor matematice, Gödel și Bernays împărtășesc respingerea concepției care declară obiectele matematice drept nume sau constructe mentale. Oricum, considerăm relevant și profitabil să admitem supoziția existenței obiectelor matematice, prin analogie gödeliană cu lumea obiectelor fizice, desigur universul entităților matematice fiind distinct ca natură de cel fizic. H. Wang consideră evidentă supoziția entităților matematice, căci altfel ar părea straniu să gândim obiectiv (obiectivitatea fiind un deziderat al oricărei științe serioase) fără să existe ceva obiectiv. O asemenea existență a obiectelor matematice întemeiază conceptele de adevăr (conformitatea propoziției la starea de lucruri (descrisă) din universul matematicii, dar și conceptul de *intuiție*, devenită aici un analog al *percepției*. Al doilea sens, să-l numim *slab*, descrie *obiectivitatea matematică* ca *acord intersubiectiv* la care „somează" *demonstrațiile* și concluziile lor.

Cunoscutul enunț al lui Kreisel „ceea ce este important nu este existența obiectelor matematice, ci obiectivitatea enunțurilor matematice" recuperează în mod esențial conceptul de obiectivitate în sensul slab și pare să diminueze semnificația conceptului (gödelian) de obiectivitate a matematicii.

Să ne amintim caracterizarea dată de Bernays fenomenologiei teoretice a structurilor matematice mentale, relevantă și pentru concepția lui Wittgenstein ce are evidente afinități cu intuiționismul. Și să continuăm înțelegerea sugerată de Bernays cu idei din M. Dummet, între care, cea mai semnificativă în context este următoarea : „Wittgenstein negând existența obiectelor matematice și relevând aspectele behaviorale ale matematicii, în mod conștient renunță la *necesitatea* și *obiectivitatea matematicii*, și devine utn convenționalist radical" (s.n. M. Ț.).

Aversiunea lui Wittgenstein pentru „o istorie naturală a numerelor" (de fapt, a tuturor entităților matematice) are multiple și profunde implicații. În primul rând l-a dus la un *concept sui generis* de *obiectivitate*, dacă conceptul obiectivist (gödelian) de obiectivitate era prin excelență unul *ontologic*, cel wittgensteinian este unul *metodologic* (de sorginte behaviorală și antropologică) emanând din practica umană matematică a *proceselor inferențiale*, specificul excelent al științei matematice, rezumat pe scurt ca *„acord intersubiectiv"* care indică inferenței un unic drum : conformarea la *reguli* (convenite, emanate din *comportamentul* indus din practica matematică), dar fără nici o referire la o *„realitate matematică pre-existentă"*. Wittgenstein, etichetat, poate nu pe nedrept de Dummett, ca un convenționalist radical spune că în fiecare demonstrație noi facem o nouă decizie, „la fiecare pas în demonstrație noi suntem liberi să alegem, să acceptăm sau să respingem demonstrația, nu există nimic care să ne forțeze să acceptăm demonstrația". Dummett crede că Wittgenstein considera că noi suntem complet liberi să depozităm în arhive orice mulțime arbitrară de enunțuri pe care le dorim.

Convenționalismul (cu atât mai mult cel radical) este incompatibil cu supoziția unei realități matematice și deci și a obiectivității matematice. Dar Klenk [1] consideră că M. Dummett nu este îndreptățit să susțină că Wittgenstein a fost un convenționalist radical. Dimpotrivă, Wittgenstein a stăruit asupra ideii că matematica „ne forțează" la o anumită concluzie, plecând de la o mulțime dată de premise și urmând anumite reguli ; prin urmare, nu putem infera orice și Dummett a interpretat greșit sugestiile lui Wittgenstein cu privire la posibilitatea folosirii diferitelor reguli și tehnici disponibile. Klenk [1] scrie : „El (Wittgenstein) a vrut să spună că nu există nimic în spatele practicilor noastre matematice, nici o realitate matematică care garantează rezultatele pe care le obținem. Wittgenstein nu vrea să nege obiectivitatea matematicii, ci ideea că această obiectivitate este explicată în termenii unei realități matematice". Prin urmare, Wittgenstein crede în obiectivitate, problema care rămâne în discuție este dacă o *teorie behaviorală,* pe care o propune (sau la care aderă) Wittgenstein, poate oferi o explicație relevantă a obiectivității, știut fiind că această teorie consideră că natura matematicii rezidă în modul în care noi inferăm. Este oare acest aspect sursa structurii solide a matematicii ? Este adevărat că inferențele matematice sunt adânc înrădăcinate în modul nostru de gândire, și reprezintă un pilon al obiectivității de tip metodologic. Dar pentru platoniști această explicație nu este satisfăcătoare. Regularitățile comportamentului uman trebuie explicate în termenii (existenței) obiectelor matematice, opinează platoniștii, rațiunea pentru care noi „agreem asupra rezultatelor obținute" fiind faptul că noi aprehendăm aceeași realitate matematică. Matematicienii fac aceleași descoperiri despre obiecte matematice și, în ultimă instanță, au convingeri că facem inferențe corecte și obținem concluzii adevărate. După unii comentatori ai operei wittgensteiniene pare nenatural să explicăm fapte empirice (cum sunt regularitățile comportamentului uman) invocând entități platonice, cum sunt considerate entitățile matematice. Regulile sunt un fapt incontestabil și ar părea mai firesc să le explicăm în termenii altor regularități empirice (poate structuri brain, opinează Klenk [1]) și astfel, *acordul intersubiectiv,* sursa autentică a *obiectivității,* acceptată de Wittgenstein, nu ar mai fi explicată în termenii *„formelor platonice"* (adică ai entităților matematice) ; aprehensiunea obiectelor matematice — sursa (în viziune platonistă, realist-modernă) obiectivității matematice lasă acum locul unor tendințe (înclinații) naturale ce întemeiază *acordul* (și deci obiectivitatea) împărtășit de comunitatea matematicienilor. Reproșul, adus explicației platoniste pe care Wittgenstein o respinge, este bazat pe apelul la *entități metafizice* în explicarea activităților, regularităților, proceselor empirice, în ultimă analiză refuzul explicației prin *esențe ultime,* atât de caracteristică platonismului și vehement repudiată de Wittgenstein. (Nu s-ar putea contesta că aici Wittgenstein se situează pe pozițiile *empirismului,* fie el chiar *logic !).* Am putea apela la relevanța mecanismului *percepției* obiectelor matematice, care și-ar găsi în *„intuiție"* un analog descris ca *„percepție cu ochii minții"* a obiectelor abstracte (matematice) și să încercăm să ne explicăm de ce noi toate ființele umane reacționăm identic (sau aproximativ identic) la această presupusă lume a obiectelor nemateriale (matematice). S-ar muta accentul de la *entitățile matematice* însele la *activitatea* cu ele, unde constatăm ca *evidente* unele regularități empirice ale comportamentului nostru în cadrul activității matematice și atunci avem sugestii wittgensteiniene suficiente pentru abandonarea *„explicației în termenii obiectelor matematice"* în favoarea uneia „în termenii regularităților empirice (behaviorale) care ne sunt în mod cert mai la îndemână.

Am enunțat între concepte fundamentale ale filosofiei matematicii și pe cel de *necesitate* (logică) ; s-a spus că unele linii de gândire, între care cea care încorporează concepția despre *necesitate logică* (proprietate excelentă a enunțurilor matematicii pure) converg în constructivismul wittgensteinian. Conform convenționalismului, și am văzut că filosofia lui Wittgenstein este calificată drept *„convenționalism radical"*, *necesitatea* o impunem noi, dar nu asupra *realității* ci asupra *limbajului nostru.* Un enunț este necesar în virtutea of our having chosen not to count anythings as falsifying it, iar *recunoașterea* de către noi a necesității logice (care este alături de sursa ei, al doilea aspect important al problemei necsității logice) devine, după Dummett, un caz particular al cunoașterii intențiilor noastre. *„Convenționalismul modificat"*, larg răspândit, derivă *„necesitatea"* din convenții lingvistice pe care le adoptăm. Unele enunțuri necesare sunt în mod direct *„liste de convenții"*, altele sunt *consecințe* ale acestora, mai mult sau mai puțin vagi. O *„direct register"* a unei convenții, explică Dummett, este un enunț ca „nimic nu poate fi în același timp verde și albastru", deoarece instrucția noastră ostensivă nu legitimează un asemenea uz al „colour-words" ; nu avem nevoie de o convenție specială care, să excludă uzul expresiei „both green and red" din limbaj, pe considerentul că procedând astfel, vorbitorul respectiv nu a învățat ceea ce trebuia să înțeleagă din instruirea ostensivă.

Convenționalismul modificat aplicat la matematică oferă o explicație a *„adevărului matematic"* în maniera specifică pozitivismului logic : axiomele unei teorii matematice sunt *necesare* în calitatea lor de *direct registers* ale anumitor *convenții* adoptate privind uzul termenilor, iar în activitatea sa matematicianul descoperă *consecințe,* mai mult, sau mai puțin vagi ale acestor axiome, consecințe încorporate în *teoreme ;* și, mai mult, chiar statutul principiilor logice care legiferează trecerea inferențială de la axiome la teoreme, este expilcat tot ca expresia adoptării convențiilor lingvistice ale uzului lui „dacă", „toți" etc. Explicația de sus este taxată ca superficială, deoarece lasă neexplicat statutul aserțiunii că *„anumite convenții au anumite consecințe"*, remarca Dummett. Adoptând convenții înregistrate de axiome și principii logice, atunci trebuie să aderăm la modul de vorbire încorporat (și sugerat de) în teoreme.

Pentru Wittgenstein *necesitatea logică* a unui enunț (matematic) este expresia directă(a unei convenții lingvistice. Convențiile par să nu se bazeze pe instrucția noastră, o explicație aplicabilă și la calculări elementare dar și la teoreme profunde. De pildă, în primul caz (cel al calculării elementare) noi alegem criteriul. Bunăoară, găsind într-o cameră 5 băieți și 7 fete noi spunem că în cameră se află 12 copii împreună. Ceea ce ne-a îndreptățit să procedăm așa (că există n lucruri sau ființe de același fel) nu provine din procedura de numărare, ci noi am adoptat în exemplul dat un criteriu nou care a justificat afirmația noastră că în cameră există 12 copii împreună. Necesitatea lui $5 + 7 = 12$, constă în aceea că dacă noi numărăm, copiii împreună și rezultatul numărării este 11, atunci noi spunem : „trebuie să fi greșit în numărare".

Conceptul de necesitate (logica) trimite la alt concept, cel de *demonstrație.* Să spunem în treacăt că *adevărul matematic* nu poate fi descris după Wittgenstein, (din moment ce funcția referențială a matematicii a fost negată) în *termenii obiectelor matematice* (ai *realității matematice*, care ea însăşi încetează de a mai avea statutul de *„pre-existență"* şi se construieşte pas cu pas în interiorul demersului matematic), descris în termenii *„teoriei corespondenței"*, proprie platonismului. Dacă natura matematicii este *inferențială, transformare* a expresiilor, *demonstrația* este „un semn că noi transformăm simbolurile într-un astfel de mod „...ansamblul de inferențe neghidate de vreo realitate matematică exterioară sistemului în care lucrăm, atunci ne putem dispensa de noțiuinea de adevăr ca find redundantă, eventual o recuperăm cu ajutorul demonstrației. „Adevărul în sistemul lui Russell înseamnă demonstrat în sistemul lui Russell". O demonstrație procedează conform unor reguli de inferență, sau principii logice și chiar suntem tentați să ne considerăm spectatori pasivi ai demersului ei, fără să luăm parte activă în travaliu, prețul și recompensa acceptării axiomelor de la care se pornește. În urmărirea (pasivă) a demonstrației, recunoaștem diferiți pași, diferitele tranziții treceri inferențiale ca aplicații ale regulilor generale de inferență. Deși ne-am dat asentimentul față de reguli, nu urmează că orice pas inferențial este corect, adică o aplicare corectă a regulilor de inferență. Dar, cum am văzut, Wittgenstein consideră că noi facem în fiecare demonstrație o decizie nouă, la fiecare pas în demonstrație suntem liberi să alegem fie să acceptăm, fie să respingem demonstrația. Dacă cineva nu acceptă o demonstrație, realmente sau n-a înțeles-o, sau nu a acceptat regulile de inferență. Prin urmare, suntem liberi să alegem, să acceptăm, sau să respingem demonstrația. Dacă acceptăm o demonstrație, noi prin aceasta conferim necesitate teoremei demonstrate, care capătă un statut ce o justifică să intre în *„arhivă"*, rezultat final al deciziei noastre.

Dar, dacă admitem *obiectivitatea* și *constrângerea inferențială* (conformitate la reguli) ce loc găsim *creativității matematice?* care, oricum, este un fapt real în activitatea matematică. S-a vorbit despre o *inconsistență internă* a concepțiilor lui Wittgenstein despre constrângere (compulsion) matematică, obiectivitate și creativitate. Specificul creativității, despre care spune Wittgenstein că este o particularitate, fenomen al matematicii, situat la nivelul (orizontul) matematicii intuitive (neformale) pentru care nu trebuie să aşteptăm teoremele lui Gödel, rezidă în descoperirea sau poate inventarea conexiunilor. Nu există nimic care să ne împiedice să descoperim mai curând o conexiune decât alta, este decizia noastră să acceptăm un rezultat al demonstrației.

Klenk [1] observa în legătură cu amintita inconsistență între vederile wittgensteiniene despre conceptele *obiectivitate, constrângere* și *creativitate* că, pe de o parte, căile pe care le urmăm în activitatea matematică sunt extensiuni ale celor vechi, deci sunt *pre-determinate*, adică sunt extinse în acord cu practica noastră anterioară, și în consecință deciziile trecute le constrâng pe cele actuale, la așa ceva ne obligă uzul consistent al termenilor ; pe de altă parte, în orice demonstrație noi formăm concepte noi, schimbăm conceptele noastre, un concept nou fiind produs atunci când calea de urmat nu a avut o extindere în direcție proprie. Ne confruntăm în prima ipostază cu relația *creativitate* și *determinism*, în a doua ipostază, creativitatea își regăsește mediul ei fertil și relevant, cel al *libertății* și *deciziei*.

Klenk [1] notează în contextul *dilemei* evocate : sau conexiunile sunt în mod simplu acolo unde sunt și matematicianul este un *„descoperitor“*, mai curând decât un *„creator“*, ceea ce este contrar declarațiilor lui Wittgenstein ; sau conexiunile nu există acolo și matematicianul este un *creator* și în acest caz crearea unei conexiuni nu este mai justificată decât crearea altei conexiuni ; dar astfel avem justificată asertiunea lui Dummett că Wittgenstein este un fullblooded convenționalist.

Soluția este la mijloc, matematicianul este atât *descoperitor* cât și *creator*. Este adevărat ce spune Wittgenstein că conexiunile nu se află acolo până nu le face matematicianul și el poate face orice conexiune și poate realiza orice *creație*, dar de îndată ce aceasta întrunește acceptanța comunității matematicienilor dobândește statutul de *descoperire*. În ciuda *creativității radicale*, matematica este *obiectivă*, acordul imanent comportamentului uman în cadrul activității matematice reprezintă autentica cheie în soluția acestei probleme, pare a fi răspunsul consonant sugestiilor și concepțiilor wittgensteiniene, în deplin dezacord cu concepția platonistă despre matematică, în care rolul central îl ocupă *existența matematică* (realitatea matematică), baza întregului edificiu conceptual la care ne-am referit : *obiectivitate, adevăr, intuiție, demonstrație, creație (creativitate)*.

L. WITTGENSTEIN, IS AN ANTI-PHILOSOPHER OF MATHEMATICS ?

Summary

The work consists of some essays which in the author's opinion can make up the first exegesis published in our country on the writings of mathematical philosophy of L. Wittgenstein.

The subtle intention of the work is to offer? the reader a coherent, systematic representation to the thoughts and reflections of Wittgenstein about logic, mathematics and philosophy, about the *„nature“* and *„foundations of mathematics“*.

A special attention is given to relation of Wittgenstein with „exact“ *„mathematical“ philosophy.* Important philosophical points of view are examinate in the book for example — *platonism and constructivism* aiming to identify the conception of L. Wittgenstein qualified as *„radical constructivism“* or Wittgenstein *„strict finitism“*.

Another investigated aspect was that of placing Wittgenstein among *„the great conceptions-trends“* in philosophy of mathematics : logicism, formalism, intuitionism, using the word „versus“, for example, *„Wittgenstein versus logicism“. Wittgenstein versus intuitionism, Wittgenstein versus formalism* wishing to find out the specific elements of Wittgenstein's thinking on mathematics, which make up a concept or, at least, a point of view about mathematics and philosophy.

Another way of research would be the study of Wittgenstein's opinions about major themes and concepts in any philosophy of mathematics : mathematical existence (mathematical reality), obiectivity necessity, intuition, truth and demonstrability, proof.

The last paragraph is provocative : is L. Wittgenstein an anti-philosopher of mathematics ?

I take as premises of this provocative question : Russell's opinions about L. Wittgenstein written as : Wittgenstein was the best candidate to the *new, exact, mathematical* philosophy, which seemed to be born in the phirst decades of the 20th century ; and last, not last I think about L. Wittgenstein own shocking confession about philosophy and mathematics, opinions of other authors about Wittgenstein's philosophy.

A series of dissociations, observations made which are covering investigated texts, as well as own my opinions are included in a *scenario* which tries to give a possible answer to the provocative and risking title : is Wittgenstein an anti-philosopher of mathematics ?

BIBLIOGRAFIE

L. WITTGENSTEIN, ANTI-FILOSOF AL MATEMATICII ?

ANDERSON, A. R. [1] *Mathematics and the „Language Game“* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

BENACERRAF, P. and PUTNAM, H. (eds) [1] *Philosophy of Mathematics*, Prentice-Hall 1964.

BERNAYS, P. [1] *On Platonism in Mthematics* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].
[2] *Comments on L. Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics*, in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

BLANCHÉ, R. [1] *Raison et discours*, J. Vrin 1967.

BLOCK, W. [1] *Russell's Concept of „Philosophy“ in B. Russell*, Philosopher of Century, edited by Ralph Schoenman, George Allen & Unvin Ltd. 1967.

BOOLE, G. [1] *Mathematical Analysis of Logic*, Cambridge 1847.

BOUVERESSE, J. [1] *Frege, Wittgenstein, Dummett et la nouvelle Querelle du realisme*, Aout-September 1980, Critique.
[2] *La parole malheurese*, Les Editions de Minuit, Paris 1974.

CARNAP, R. [1] *Logische Syntax der Sprache*, Springer, Wien 1934.

COHEN, P. [1] *Set Theory the Continuum Hypothesis*, Benjamin, New York 1966.

CHURCH, A. [1] *The Need for abstract Entities in semantic Analysis*, in J. Copi and J. Gould (eds) Contemporary Readings in logical Theoy, Mac Millan, New York 1967.
[2] *Introduction to mathematical Logic*, Princeton 1956.

CURRY, H. B.]1[*A Theory of formal Deductibility*, Notre Dame 1950.

DUMMETT, M. [1] Abstract Objects.
[2] *Platonism*
[3] *Realism*
[4] *The philosophical Basi of intuitionistic Logic*
[5] *Introduction* in Truth and other Enigmas
[6] *The Justification of Deduction* in Truth and other Engimas
[7]

[8] *The Significance of Quine's Indeterminacy Thesi* in Truth and other Enigmas

[9] *Abstract Objects*

ENESCU, GH. [1] *Filosofie și logică*, Editura Științifică 1973.

FRAENKEL, A. and BAR-HILLEL, Y.]1[*Foundations of Set Theory*, North-Holland, Publ. Co. Amsterdam, 1958.

FREGE, G. [1] *Foundations of Arithmetic*, translated by J. L. Austin, Oxford 1950.

[2] *Grundesetze der Arithmetic*, Begriffsschriftlich abgeleitet I, Jena 1893.

GOODMAN, N. D. [1] *Mathematics as an objective Science* in The American mathematical Montly 7/1979.

GÖDEL, K. [1] *What is Cantor's Continuum Problem* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

GONSETH, F. [1] *Despre metodologia cercetărilor în fundamentele matematicii*, în Logica științei, Editura Politică, 1970.

HART, W. D. [1] *Skolem's Promises and Paradoxes* in the Journal of Philosophy volume LXVII, number 4, february 26, 1970.

HATCHER, W. S. [1] *The logical Foundations of Mathematics*, Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sidney, Paris, Frankfurt 1982.

HEMPEL, C. G. [1] *On the standard Conception of Scientific Theores* in Rader, M. and Winokur, S.: Minnesota Studies in The Philosophy of Science, IV.

HENKIN, L. [1] *Mathematical Foundations for Mathematics*, in The American Mathematical Monthly 5/1971.

HEYTING, A. [1] *Intuitionism. A Introduction* North Holland, Publ. Co., Amsterdam, 1966.

[2] *The intuitionist Foundations of Mathematics* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

HILBERT, D. [1] *On the Infinite* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

HINTIKKA, J. [1] *Inferență, informație și adevăr* în Epistemologie. Orientări contemporane. Editura politică, București, 1974.

KANT, IMM. [1] *Critica rațiunii pure*, Editura Științifică, București, 1961.

KAPLAN, A. [1] *The new World of Philosophy*, New York, 1961.

KIELKOPF, CH. [1] *Strict Finitosm. An examination of L. Wittgenstein's Remarks on The Foundations of Mathematics*, 1978 Mouton, The Hague, Paris.

KLENK, V. H. [1] *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, Martinus Nijhoff The Hague, 1976.

KÖRNER, S. [1] *Introducere în filosofia matematicii*, Editura Științifică, București, 1965.

KREISEL, G. [1] *Perspectives in the Philosophy of pure Mathematics* in Logic, Methodology and Philosophy of Science IV, București 1971.

[2] *Wittgenstein's Remarks on the Foundations of Mathematics* in British Journal for the Philosophy of Science.

KREISEL, G. [1] *Proof Theory*, in Journal of Symbolic Logic, 3/1968.

LAWVERE, F. W. [1] *The Category of Categories as a Foundation of Mathematics*, Proc. Conference Categorial Algebra (la Jolla 1983) Springer-Verlag, New York, 1966.

MAC LANE, S. [1] *Categorial Algebra and Set-Theoretical Foundation* in Axiomatic Set Theory, Providence Rhode Island, 1971.

MEHLBERG, H. [1] *Aspecte empirice și teoretice ale științei*, în Logica științei, Editura Politică, București 1970.

MOSTOWSCKI, A. [1] *Thirty Years of foundational Studies* Blackwell, Oxford 1966.

[2] *Stadiul actual al cercetărilor în fundamentele matematicii*, în vol. Logică și Filosofie, Editura Politică, București 1966.

MYHILL, J. [1] *On the ontological Significance of the Löwenheim-Skolem's Theorem* in I. Copi and J. Gould (eds) Contemporary Readings in Theory, Mac Millan, New York, 1967.

von NEUMANN, J. [1] *The Mathematician* in Collected Works, Oxford, London, New York, Pergamon Press vol. I, 1966.

[2] *The formalist Foundations* in Benacerraf, P. and Putnam, H. (eds) [1].

PARRET, H., BOUVERESSE, J. [1] *Anti-Rcralism and Epistemology of Understanding*, De Gruyter 1980.

PEANO, G. [1] Formulario matematico.

PENCO, C. [1] *Matematica e gioco linguistico*, Felice Le Monnier-Firenze, 1981.

PERELMAN, CH. [1] *Jugements de valeur, justification et argumentation* in The Foundations of Statements and Decisions, Polish Publishers, Warszawa.

PUTNAM, H. [1] *The Thesis that Mathematics is Logic* in R. Schoenman (eds) [1].

QUINE, W. V. [1] *Two Dogmas of Empiricism* in Benacerraf, P. and Putnam, H (eds) [1].

[2] *New Foundations for Mathematics* in From a logical Point of View Harvard, Univ. Press. Mass. 1153.

RAMSEY, F. P. [1] *The Foundations of Mathematics*, London 1931.

RUSSELL, B. [1] *Introduction to mathematical Philosophy* Allen and, London Unwin, 1930.

[2] *History of western Philosophy*, George Allen and Unwin Ltd, London, 1961.

[3] *Scrisoare citată in Block, I* (ed) (1) Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein, Oxford Basil Blackwell, 1981.

[4] *My philosophical Development...*

[5] *Principles of Mathematics* 2 nd ed. London, 1950.

SCHOENMAN, R. (ed) [1] *Bertrand Russell, Philosopher of Century*, London, 1967.

SCHÜTTE, K. [1] *Gödel's Theorem* in Encyclopedia of Philosophy, vol. II.

SKOLEM, TH. [1] *Some Remarks on axiomatized Set Theory* in Selected Works in Logic, edited by J. E. Fenstad, Oslo Univ. 1970.

SUPPES, P. [1] *Dezirabilitatea formalizării în știință* în Epistemologie. Orientări contemporane, Editura Politică, București, 1974.

SURDU, AL. [1]

TONOIU, V.]1[*Metafilosofia ca dimensiune a unor variante ale criticismului* în Epistemologia și analiza logică a limbajului științei, Edit. Pol. București, 1975.

ȚURLEA, M. [1] *Filosofia și fundamentele matematicii*, Editura Academiei, București, 1982.

[2] *Fundamentele axiomatice ale teoriei mulțimilor contestate de «paradoxul» lui Skolem* în Probleme de logică, vol. VIII, Edtiura Academiei, București, 1981.

[3] *Filosofia matematicii*, Editura Universității din București, 1995.

WANG, H. [1] *Wittgenstein's and other mathematical philosophie.*

[2] *From Mathematics to Philosophy*, Rontledge & Kegan Paul, London, 1974.

[3] *Formalizarea matematicii* în Studii de logică matematică.

[4] *Reflections on K. Gödel*, Cambridge Ma. London The MIT Press Copyr. 1987.

WITTGENSTEIN, L. [1] *Tractatus logico-philosophicus.*

[2] *Investigations philosophiques.*

[3] *Remarks.*

[4] *Blue Book.*

Encyclopédie Philosophique Universelle.

De acelaşi autor :

– **Filosofia şi fundamentele matematicii,**
Editura Academiei, Bucureşti, 1982.

– **Filosofia matematicii,**
Editura Universităţii Bucureşti, 1995.

– **Existenţă şi adevăr în matematică,**
Editura Universităţii Bucureşti, 1996.

ISBN 973-575-060-0

Lei 3600