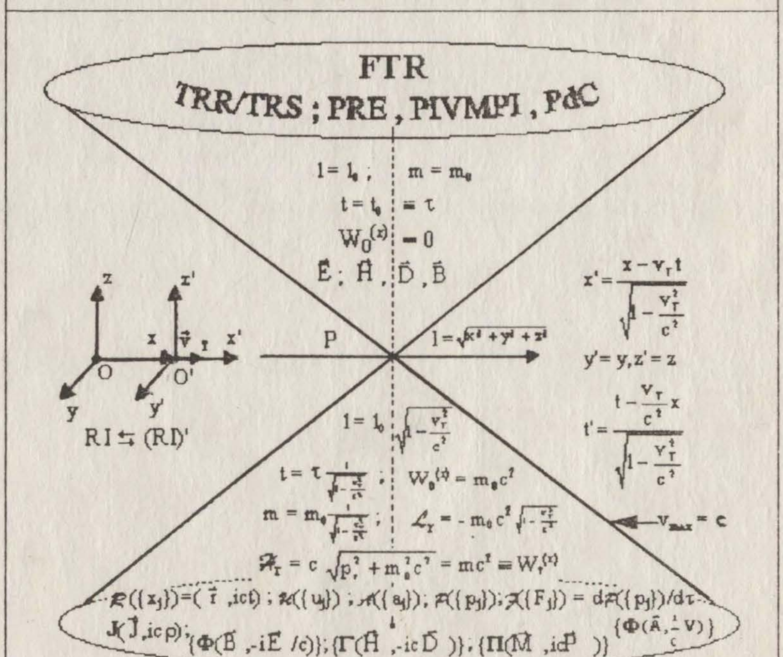
Valer SCRIDONESI-CĂLIN

Andrei Radu IONESCU

FUNDAMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ (II)

Galilei, Newton, Lagrange, Hamilton, Maxwell, Hertz, ...



Michelson, Lorentz, Poincaré, Minkowski, EINSTEIN

Editura Universităţii din Bucureşti

-1999-

Valer SCRIDONESI-CĂLIN **Andrei Radu IONESCU**

FUNDAMENTE
DE
FIZICĂ TEORETICĂ
(II)
FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ
Fascicula II (P.3^a)

vol. I
f. 2/p. 3

$P_3^{(1)}$: *TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE/SPECIALE (TRR/TRS)*
$P_3^{(2)}$: *MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ*
[MODELUL TEORETIC RELATIVIST (MTR)]
$P_3^{(3)}$: *ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RESTRÂNSĂ*

Editura Universităţii din Bucureşti
-1999-

Referenţi ştiinţifici: Prof. dr. Constantin Cioacă
Prof. dr. Ion M. Popescu

Valer SCRIDONESI-CĂLIN – elaborarea cursului în manuscris
Andrei Radu IONESCU – tehnoredactarea computerizată a manuscrisului

**CURS pentru studenţii secţiilor de
CHIMIE-FIZICĂ şi de RADIOCHIMIE
ale FACULTĂŢII DE CHIMIE**

<Se dedică minţilor deschise cărora *efortul intelectual* le este *(auto)privilegiu şi virtute*, nu *corvoadă şi servitute*>

Şos. Panduri, 90–92, Bucureşti - 76235; Telefon/Fax: 410.23.84

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale
SCRIDONESI-CĂLIN, VALER
Fundamente de fizică teoretică / Valer Scridonesi-Călin, Andrei Radu Ionescu
Bucureşti; Editura Universităţii din Bucureşti, 1999
253 p.; 29 cm
Fascicula II: Partea a 3-a: Fizică teoretică relativistă. – 1999
Bibliogr.
ISBN: 973-575-401-0

I. Ionescu, Andrei Radu

53(075.8)

Cuvânt înainte

Prezentul curs de fizică teoretică (FT) conține *fundamente de fizică teoretică* (FT) predate de autor la secțiile de *Chimie-fizică* și de *Radiochimie* ale facultății de *Chimie* a *Universității din București*, fundamente de FT completând *programa analitică în vigoare a cursului de* FT. Astfel, după ce *Fascicula I* a cursului a fost destinată, în volumul I (<"Elemente de fizică teoretică (I)">, Ed. Universității din București, 1998), părții 1^a (<Introducere în fizica teoretică> și <Mecanică analitică>), fasciculele II și III vor fi destinate volumului II, respectiv volumului III, în care se va desfășura forma tipărită complet a cursului nostru de FT.

Partea a 3^a <Fizică teoretică relativistă>, desemnată *fasciculei II* și cuprinzând <Teoria relativității restrânse/speciale (TRR/TRS)> și <Mecanică teoretică relativistă (Modelul teoretic relativist)> însoțite de <Elemente de fizică teoretică relativist-restrânsă>, apare în forma de față ca <Fundamente de fizică teoretică (II)>.

Volumului (III), <Fundamente de fizică teoretică (III)>, îi vor fi destinate *partea a 4^a* cuprinzând <Mecanică statistică> și <Elemente de fizică teoretică statistică>, cu necesități fizico-matematice cerute imperios de *partea a 5^a*, ambele părți pregătite pentru *fascicula III*.

În *partea a 5^a*, cursul nostru de FT cuprinde <Mecanică cuantică nerelativistă> însoțită de <Elemente de mecanică cuantică relativist-restrânsă>, încheind, astfel, problematica de FT prevăzută în programa analitică pentru anul III Chimie-fizică, respectiv anul II Radiochimie.

Forma prezentului curs de FT, volumul (II), în cadrul Facultății de Chimie a Universității din București, va putea fi utilizată și de studenții *secțiilor de chimie și ai celei de chimia mediului* (preconizată a fi înființată începând cu anul universitar 1999-2000), în necesitățile legate de înțelegerea mai aprofundată a cursurilor de fizică pe care le parcurg prin programa analitică de fizică.

Reluăm îndemnul din volumul (I) al cursului, adresat studenților noștri, ca și cititorilor doritori să învețe după materialul tipărit în Editura Universității noastre, *îndemnul la puțin efort de urmărire atentă*, deoarece dificultățile matematice din cadrul întregului curs de FT vor putea fi învinse de orice student utilizator, întregul aparat matematic necesar cursului fiind explicitat și detaliat, iar demonstrațiile și deducerile aferente fiind dezvoltate în întregime.

O parte din fundamentele de FT, prezentate în volumul (II) de față, va putea fi o regândire a unor părți de fizică parcursă într-o formă elementară în anii I și II de studiu al fizicii în facultatea de chimie. Ne referim la *mecanica* nerelativistă, formulată ca o limită a mecanicii relativiste la $v \ll c$, respectiv la cursul de *electromagnetism*, care din motive obiective (nivel de utilizare a formalismelor matematice, număr de ore destinate, programă analitică etc.) nu are o tratare consecvent relativistă de rigoarea modelelor teoretice ale FT. De asemenea, o regândire a acelor părți de *teoria relativității restrânse* (TRR), care sunt incluse în cursul de *mecanică*.

Afirmațiile de mai sus sunt valabile pentru studenții tuturor secțiilor de chimie ale facultății și îi fac interesați mai ales prin *partea a 3^a* a cursului, abordând *teoria relativității restrânse/speciale* (TRR/TRS), *mecanica relativistă* și *elemente de fizică relativistă în general*.

Vom remarca faptul că structura *părții a 3^a* (<*Fizică relativist-restrânsă*>) a fost astfel elaborată încât *modelul teoretic relativist* (MTR) și *teoria sa* (TRR/TRS) să genereze o imagine cât mai completă asupra întregii *fizici teoretice relativiste* (FTR), realizând o expunere fizico-matematică și metodologică cât mai aproape de completitudinea problematicii impuse de TRR/TRS în întreaga fizică.

Generalitatea FT care cuprinde şi FTR a volumului (II) ne îndeamnă să afirmăm că şi alţi studenţi de la alte facultăţi ale Universităţii noastre (fizică, matematică-mecanică, geologie etc.) vor putea fi beneficiari ai unora dintre părţile cursului nostru. Cum la fel unii dintre studenţii anilor V şi VI ce parcurg etapa *master* de încheiere a studiilor universitare.

Încheierea tipăririi cursului de FT în trei volume va fi completă şi efectivă odată cu apariţia <*Culegerii de probleme de fizică teoretică*>, conţinând într-un volum aparte aplicaţiile practice la cele cinci părţi proiectate şi realizate pentru cursul de FT.

Ca şi în cazul realizării tehnice computerizate a volumului (I) al cursului nostru, materializarea computerizată a întregului volum (II) de faţă, a fost posibilă prin efortul de editare-printare deosebit şi entuziast al Domnului Andrei Radu Ionescu, căruia şi de astă dată, îi mulţumim pentru colaborare, alăturându-ni-l ca *autor tehnic al cărţii de faţă*, tehnoredactată de Dumnealui după manuscrisul nostru.

Dr. Valer Scridonesi-Călin
Iunie 1999

"... a deduce două sau trei principii generale ale mişcării din fenomene şi apoi a ne spune în ce fel rezultă proprietăţile şi acţiunile tuturor lucrurilor corporale din acele principii evidente" (*Isaac Newton*, "Optica", (Qerry 31), 1704)

Curs de fizică teoretică (FT) partea a 3^a

FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ

$^*P_3^{(1)}$ TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE (SPECIALE) (TRR/TRS)*
$^*P_3^{(2)}$ MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ (MODELUL TEORETIC RELATIVIST)*
$^*P_3^{(3)}$ ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RESTRÂNSĂ*

Motto:

(0) <Experimental, relativitatea apare atunci când se confruntă măsurătorile efectuate de observatori diferiţi aflaţi în mişcare relativă unul faţă de celălalt >

Motto:

(1) "Teoria relativităţii este intim legată de teoria spaţiului şi a timpului" (*Albert Einstein*, "The meaning of relativity", 1956)

(2) "Orice rază de lumină se mişcă într-un sistem de coordonate <<în repaus>>, cu o viteză determinată c, independent de faptul că este emisă de un corp în repaus sau în mişcare" (*Albert Einstein*, 1905)

(3) "Legile după care se modifică stările sistemelor fizice nu depind de alegerea sistemului de coordonate, din mulţimea sistemelor de referinţă în translaţie uniformă unul faţă de celălalt, la care se raportează aceste modificări" (*Albert Einstein*, 1905)

(4) "Porni Luceafărul. Creşteau/ În cer a lui aripe/ Şi căi de mii de ani treceau/ În tot atâtea clipe.// ...Căci unde ajunge nu-i hotar,/ Nici ochi spre a cunoaşte,/ Şi vremea încearcă în zadar/ Din goluri a se naşte." (*Mihai Eminescu*, "Luceafărul", 1883, v.257-260 şi v.273-276)

Listă de abrevieri/prescurtări

CL → con luminos (hipersuprafaţa cuadridimensională din TRR/TRS)

DTA → domeniul trecutului absolut (v. CL)
DVA → ~ viitorului ~ (~)

EDF → efectul Doppler-Fizeau
e → eveniment (fizic) mecanic (x,y,z,t)
e_{RI} → ~ ~ ~ raportat la un RI
e_r → ~ relativist (x,y,z,ict)
$(e_r)_{RI}$ → ~ ~ raportat la un RI
ec. K-G → ecuaţia Klein-Gordon
e.t.r. → efect termodinamic relativist

FA$\mathcal{H}$ relativist → formalism analitic Hamilton relativist
FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$ ~ → ~ ~ ~Jacobi ~
FA$\mathcal{L}$ ~ → ~ ~ Lagrange ~
f.a.$\mathcal{H}$ → funcţie analitică Hamilton
f.a.$\mathcal{H}_r$ → ~ ~ ~ relativistă
f.a.$\mathcal{L}$ → ~ ~ Lagrange
f.a.$\mathcal{L}_r$ → ~ ~ ~ relativistă cinematică
f.a.$\mathcal{L}_r^{(0)}$ → ~ ~ ~ ~ proprie (de repaus)
f.a.S → ~ ~ acţiune Hamilton
f.a.$S^{(r)}$ → ~ ~ ~ ~ relativistă
FE → fizică experimentală
FQR → ~ cuantică relativistă (şi FRQ)
FRnQ → ~ ne~ ~ (şi FnQR)
FT → ~ teoretică
FTR → ~ ~ relativistă

GPS → Global Positioning System (v. SPG)

IPI → ipoteza propagării instantanee (a interacţiunilor)
ITU → ~ timpului universal

LCRV → legea (teorema) de compunere relativistă a vitezelor

{MA} → modele (teoretice) analitice
MAR → mecanică analitică relativistă
MGN → modelul galileano-newtonian
MR → mecanică relativistă
MRU → mişcare rectilinie şi uniformă
MRUA → ~ ~ ~ uniform accelerată
MRUV → ~ ~ ~ ~ variată
MTQ → modelul teoretic cuantic
MTQR → ~ ~ ~ relativist
MTR → ~ ~ relativist
M_f → mărime fizică
$M_f^{(r)}$ → ~ ~ relativistă

O_f/S_f → obiect fizic/sistem fizic

PAS → principiul acţiunii Schwinger (v. PVHG şi PVHR)
PdC → ~ de corespondenţă
PdCQ → ~ ~ ~ cuantic
PdC(R) → ~ ~ ~ relativist
PFECM → problema fundamentală a electrodinamicii corpurilor în mişcare
PIVMPI → principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor
PM → ~ măsurabilităţii
p.m.f.d.r. → problema metodologică fundamentală a dinamicii relativiste
PR → principiul relativităţii
PRE → ~ ~ einsteiniene
PRG → ~ ~ galileiene
PVH → ~ variaţional Hamilton
PVHG → ~ ~ ~ generalizat (v. PAS şi PVHR)
PVHR → ~ ~ ~ relativist

RI → referenţial inerţial (în general, presupus în repaus)
(RI)' → ~ ~ faţă de RI în MRU
$(RI)_0$ → ~ ~ propriu
RI ⇆ (RI)' → referenţiale reciproc inerţiale (sau inerţiale reciproce)
RIP → RI privilegiat

SdR → sistem de referenţă al unui RI (v. RI)
SdTA → subdomeniul trecutului absolut (v. DTA)
SdVA → ~ viitorului ~ (v. DVA)
SPG → Sistemul de Poziţionare Globală (prin sateliţi)
ST → sistem termodinamic
$\mathcal{S}_M$ → spaţiul Minkowski (v. spaţiul TRR/TRS , şi/sau universul spaţiu-timp)

TQC → teoria cuantică a câmpurilor
TQPE → ~ ~ ~ particulelor elementare
TR → ~ relativităţii
TRG → ~ ~ generale
TRR → ~ ~ restrânse (v. TRS)
TRS → ~ ~ speciale (v. TRG)
TRR/TRS → ~ ~ restrânse (sau speciale)
TrG → transformări Galilei
TrLG → ~ Lorentz generale
TrLS → ~ ~ speciale

Listă de simboluri și notații explicitate fizico-matematic

O_f/S_f → obiect fizic (mecanic)/sistem fizic (mecanic) reprezentat/modelat de un *punct material* P
(x,y,z) → coordonatele carteziene ale lui P față de originea O a SdR al unui RI, marcate la momentul t
$(x,y,z;t)$ → starea fizică mecanică $\Sigma^{(m)} \equiv (x,z,y;t)$ a O_f/S_f reprezentat de P
$\{(x,y,z;t)\}$ → șirul $\{\Sigma^{(m)}\}$ dând mișcarea mecanică a lui P
→ ~ parametrilor mecanici cinematici ai lui O_f/S_f
$(x,y,z;t)\equiv e$ → eveniment (fizic) mecanic în raport cu un RI
$(x,y,z,ict)\equiv e_r$ → ~ relativist considerat în $\mathcal{S}_M$ (v. $\mathcal{S}_M$)
$\vec{r}\,(x,y,z)=x\,\vec{1}_x+y\,\vec{1}_y+z\,\vec{1}_y$ → vectorul de poziție al lui P față de O a unui SdR al RI considerat
$\vec{r}=\vec{r}\,(t)$ → legea cinematică nerelativistă a variației în timp a lui $\vec{r}$
$\vec{v}=d\vec{r}/dt\equiv\dot{\vec{r}}$ → viteza instantanee a mișcării lui P
$\vec{v}=\vec{v}\,(t)$ → legea cinematică nerelativistă a vitezei
$\vec{a}=d\vec{v}/dt=d^2\vec{r}/dt^2\equiv\dot{\vec{v}}\equiv\ddot{\vec{r}}$ → accelerația instantanee a mișcării lui P
$\vec{a}=\vec{a}\,(t)$ → legea cinematică nerelativistă a accelerației
$\vec{p}=m\vec{v}$ → impulsul nerelativist al lui P nerelativist
$m\neq m(v^2)$ → masa inerțială (de mișcare) nerelativistă a lui O_f/S_f reprezentat de P
$\vec{F}=d\vec{p}/dt$ → forța ce determină variația instantanee $d\vec{p}/dt$ în mișcarea lui P
→ legea dinamică nerelativistă a mișcării lui P
$\vec{p}_r=m(v^2)\,\vec{v}$ → impulsul tridimensional relativist al lui P relativist
$m(v^2)=m_0/\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\equiv m_r$ → masa relativistă de mișcare (cinematică) a lui P relativist
m_0 → masa relativistă proprie (de repaus) a lui P relativist
$\vec{v}_T$ → viteza de transport a lui (RI)' în MRU față de RI (v. figura 3.3(b))
c → modulul (valoarea) vitezei luminii în spațiul liber (vidul electromagnetic)
M_f → mărime fizică
$M_f^{(r)}$ → ~ ~ relativistă cinematică (de mișcare)/măsurată în RI în MRU față de alt RI
$(M_f^{(r)})_0$ → ~ ~ ~ ~ proprie (de repaus)/măsurată în $(RI)_0$ propriu
$l^{(r)}\equiv l$ → lungime cinematică (de mișcare) a unei rigle/măsurată în raport cu RI în MRU față de $(RI)_0$ propriu riglei
$l^{(r)}_0\equiv l_0$ → ~ proprie (de repaus) ~ ~ ~/măsurată în $(RI)_0$ propriu riglei
t → momentul cinematic marcat cu ceasornicul din RI în MRU față de $(RI)_0$ propriu ceasornicului
→ timpul cinematic măsurat ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
Δt → durata cinematică măsurată ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
$\tau=t_0$ → momentul propriu marcat în $(RI)_0$ propriu ceasornicului
→ timpul ~ măsurat în ~ ~ ~
$\Delta t_0\equiv\tau$ → durata proprie măsurată ~ ~ ~ ~
$V^{(r)}\equiv V$ → volumul cinematic (de mișcare)
$V^{(r)}_0\equiv V_0$ → ~ propriu (de repaus)
$\{x_j\}\ (j=\overline{1,4})\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,y,z,ict)$ → coordonatele lui P relativist în $\mathcal{S}_M$ cuadridimensional
$\mathcal{S}_M$ → spațiul Minkowski/spațiul TRR(TRS)/universul spațiu-timp/spațiul evenimentelor relativiste $\{e_r\}$
$\mathcal{S}_{xyz}\equiv\mathcal{S}_R$ → subspațiul real al $\mathcal{S}_M$
$\mathcal{S}_{ict}$ → subspațiul unidimensional imaginar al $\mathcal{S}_M$
$$\mathcal{S}_M=\mathcal{S}_R\otimes\mathcal{S}_{ict}$$
$\{e_r\}\equiv\{(x_j)\}$ → mulțimea de evenimente relativiste ce generează $\mathcal{S}_M$
$ds=[c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)]^{1/2}$ → intervalul realtivist elementar/distanța Minkowski elementară
$\Delta s=\{c^2(\Delta t)^2-[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2]\}^{1/2}$ → intervalul relativist finit/distanța Minkowski finită
$\mathcal{R}(\{x_j\})\equiv\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\equiv\{x,y,z,ict\}\equiv(\vec{r}\ ,ict)$ → cuadrivectorul de poziție/cuadripoziția
$\mathcal{R}=\mathcal{R}(\tau)$ → legea cinematică relativistă a cuadripoziției prin timpul propriu τ [față de $(RI)_0$ propriu]
$\mathcal{R}=\mathcal{R}(t)$ → legea ~ ~ ~ ~ ~ cinematic t [față de RI în MRU în raport cu $(RI)_0$]
$\mathcal{U}=\mathcal{U}(\{u_j\})\ (j=\overline{1,4})$ → cuadrivectorul viteză/cuadriviteza; $\mathcal{U}=d\mathcal{R}(\tau)/d\tau$
$u_j=dx_j/d\tau\ (j=\overline{1,4})$ → componentele scalare ale cuadrivitezei
$d\tau$ → durata elementară proprie (de repaus)/timpul elementar propriu
dt → ~ ~ cinematică (de mișcare)/timpul elementar cinematic
$\mathcal{U}=\mathcal{U}(\tau)$ → legea cinematică relativistă a cuadrivitezei prin timpul propriu τ
$\mathcal{U}=\mathcal{U}(t)$ → ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ cinematic t
$\mathcal{A}=\mathcal{A}(\{a_j\})\ (j=\overline{1,4})$ → cuadrivectorul accelerație/cuadriaccelerația; $\mathcal{A}=d\mathcal{U}/d\tau\equiv d^2\mathcal{R}/d\tau^2$

$a_j = du_j/d\tau = d^2x_j/d\tau^2$ ($j = \overline{1,4}$) → componentele scalare ale cuadriaccelerației

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau)$ → legea cinematică relativistă a cuadriaccelerației prin timpul propriu τ

$\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ → ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ cinematic t

$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\{p_j\})$ ($j = \overline{1,4}$) → cuadrivectorul impuls/cuadriimpulsul; $\mathcal{P} = m_0\mathcal{U}(\{u_j\})$

$p_j = m_0 u_j = m_0\, dx_j/d\tau$ ($j = \overline{1,4}$) → componentele scalare ale cuadriimpulsului

$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\{F_j\})$ ($j = \overline{1,4}$) → cuadrivectorul forță Minkowski/cuadriforța

$F_j = dp_j/d\tau$ ($j = \overline{1,4}$) → componentele scalare ale cuadriforței

→ legea dinamică relativistă a mișcării lui P relativist scrisă scalar

$\mathcal{F}(\{F_j\}) = d\mathcal{P}(\{p_j\})/d\tau$ → ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ cuadrivectorial

$W_t^{(r)} = m_r c^2 = m(v^2)c^2$ → energia relativistă totală a punctului material liber

$W_0^{(r)} = m_0 c^2$ → energia relativistă proprie (de repaus) a punctului material liber

$W_{cin}^{(r)} = W_t^{(r)} - W_0^{(r)}$ → energia relativistă cinetică ~ ~ ~ ~

$(\breve{\mathcal{L}}), (\breve{\mathcal{L}})'$ → matricele coeficienților TrLG inverse și directe ($(\breve{\alpha}_{jk}), (\breve{\alpha}_{jk})^{-1}$)

$(\breve{\mathcal{L}})_S, (\breve{\mathcal{L}})_S'$ → ~ ~ TrLS ~ ~ ~

$\mathcal{L}_r = (\mathcal{L}_r)_{RI}$ → funcția analitică Lagrange relativistă [față de RI în MRU în raport cu $(RI)_0$]

$\mathcal{L}_r^{(0)} = (\mathcal{L}_r)_{(RI)_0}$ → ~ ~ ~ ~ ~ proprie [față de $(RI)_0$ propriu]

$\mathcal{H}_r = (\mathcal{H}_r)_{RI}$ → funcția ~ Hamilton ~ cinematică

$(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}_r^{(0)} d\tau$ → funcționala acțiune Hamilton relativistă proprie

$S^{(r)}{}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt$ → ~ ~ ~ ~ ~ cinematică

$S^{(r)} = S^{(r)}(\{x_j\})$ ($j = \overline{1,4}$) → funcția analitică acțiune Hamilton relativistă

$\pm\, dQ$ → căldura elementară schimbată [absorbită (+) sau cedată (-)] de un ST în contact termic cu alt ST (ambele {ST} aflate în repaus unul față de celălalt) din e.t.r(1)

$\vec{F}_r^{(1,2)}$ → forța relativistă din e.t.r(2)

$dL_{\vec{F}_r^{(1,2)}}$ → lucrul mecanic efectuat de $\vec{F}_r^{(1,2)}$ din e.t.r(2)

U_i → energia internă a unui ST [energia de repaus (proprie)]

T_{RI}; $T_{(RI)_0}$ → temperatura absolută a unui ST măsurată în RI; $(RI)_0$

$J(\vec{J}, ic\rho)$ → cuadrivectorul electromagnetic densitate de curent ($\vec{J}$) și densitate de sarcină electrică (ρ)

$\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ → ~ ~ potențial ($\vec{A}$ → potențial magnetic; V → potențial electric)

$\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$ → cuadritensorul electromagnetic CÂMP ($\vec{B}$ → inducția magnetică; $\vec{E}$ → intensitatea câmpului electric)

$\{\Gamma(\vec{H}, -ic\vec{D})\}$ → ~ ~ EXCITAȚIE ($\vec{H}$ → intensitatea câmpului magnetic; $\vec{D}$ → inducția electrică)

$\{\Pi(\vec{M}, ic\vec{P})\}$ → ~ ~ POLARIZARE ($\vec{M}$ → magnetizare; $\vec{P}$ → polarizare electrică)

$\Psi(\{x_j\})$($j = \overline{1,4}$) → funcția de undă relativistă a unui câmp scalar

$f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}\left[\Psi\left(\{x_j\}, \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right)\right]$($j = \overline{1,4}$) → densitate de lagrangeană relativistă a unui câmp scalar Lagrange

$\mathcal{L}_{câmp} = \iiint f_{\mathcal{L}}\, dxdzdy$ → funcția analitică Lagrange a câmpului scalar Lagrange

$S_{camp}^{1\to2} = (ic)^{-1} \int_{(1)}^{(2)}\iiint f_{\mathcal{L}}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ → acțiunea Hamilton relativistă a câmpului scalar Lagrange

→ ~ Schwinger (din PAS) ~ ~ ~

$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ → operatorul diferențial D'Alembert

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ → operatorul diferențial Laplace

$\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z$ → operatorul ~ Hamilton (nabla)

Partea a $3^a \equiv P_3$ (FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ)

($P_3^{(1)}$) TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE/SPECIALE (TRR/TRS)

($P_3^{(2)}$) MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ [Modelul teoretic relativist]

($P_3^{(3)}$) ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RESTRÂNSĂ (FTR)

INTRODUCERE

Partea a 3^a (P_3) a cursului de *Fizică teoretică* (FT) intitulată *Fizică Teoretică Relativistă* cuprinde trei subpărţi:

$P_3^{(1)}$ ca <*Teoria Relativităţii Restrânse/Speciale* (TRR/TRS)> căreia i-au fost destinate cap. I, II şi III cuprinzând <*Generalităţi asupra Modelului Teoretic Relativist* (MTR) *şi asupra teoriei relativităţii* > (cap.0), <*Principiile relativităţii restrânse* (TRR) *sau speciale* (TRS) (*Baza axiomatică a mecanicii relativiste*)>(cap.I), <*Transformările Lorentz generale şi speciale*> (cap.II), respectiv <*Baza noţional-conceptuală a* TRR/TRS. *Consecinţele cinematice relativiste ale* TrLS> (cap.III);

$P_3^{(2)}$ ca <*Mecanică teoretică relativistă* [*Modelul Teoretic Relativist* (MTR)]> elaborată în cap.IV (<*Cinematică relativistă cuadrivectorială*>) şi în cap.V (<*Dinamică relativistă cuadrivectorială*>); respectiv

$P_3^{(3)}$ ca <*Elemente de Fizică Teoretică Relativist-Restrânsă* (FTR)> căreia i-au fost destinate un capitol de precizare a *posibilităţilor de elaborare relativist-restrânsă a întregii fizici teoretice* (cap.VI) şi un set de patru capitole de elaborare efectivă a FTR, vizând reformularea relativist-restrânsă a unor domenii de fizică teoretică postnewtoniană şi nenewtoniană precum: mecanica analitică, termodinamica teoretică, electrodinamica clasică (Maxwell), mecanica cuantică, teoria câmpurilor fizice, etc. Astfel, structura *Părţii a 3^a* a cursului de FT ca *Fizică Teoretică Relativistă* desfăşoară, după TRR/TRS (cap.0-III) şi *mecanică teoretică relativistă* (cap.IV-V), setul de *elemente de fizică teoretică relativist-restrânsă*, sintetizând *bazele teoretice ale mecanicii analitice relativiste* (în cap.VII), *ale termodinamicii relativiste* (în cap.VIII), *ale electrodinamicii relativiste* (în cap.IX) şi ale *teoriei relativiste a câmpurilor Lagrange* (cu particularizarea ecuaţiilor cuantice relativiste de tip Klein-Gordon şi Proca), mecanica cuantică relativistă destinând-o *Părţii a 5^a* a cursului de FT (volumul III).

Intersecţia domeniilor de fizică teoretică (născute nerelativist şi posibil de formulat relativist) cu TRR/TRS este ilustrată în *figura 3.1*, printr-o diagramă de intersecţie metodologică generând fizica teoretică relativistă, conform acţiunii epistemologice a principiilor fundamentale ale TRR/TRS (PRE, PIVMPI şi PdC) expusă în organigrama din *figura 3.2*, în timp ce structura întregului subvolum (II_1) de FT (de faţă) este ilustrată diagramatic, după capitole, în *figura 3.4*.

Toate aceste ilustrări servesc la înţelegerea modului cum TRR/TRS prin principiile sale *restructurează întreaga fizică teoretică* şi la *configurarea unităţii* tuturor capitolelor *Părţii a 3^a* a cursului de FT, intitulată *Fizică Teoretică Relativistă*.

Deoarece nu ne-am propus să expunem şi elemente de *teoria relativităţii generale* (TRG), esenţial o teorie a gravitaţiei, întregul pe care l-am unificat pe baza TRR/TRS prezintă elementele fundamentale ale unei *formulări relativist-restrânse a mecanicii newtoniene, a mecanicii analitice, a termodinamicii teoretice, a electrodinamicii clasice şi a teoriei câmpurilor fizice Lagrange*.

Întreaga problematică a subpărţilor $\{P_3^{(i)}\}$ $(i=\overline{1,3})$ ale prezentului curs de fizică teoretică este detaliată în cuprinsul din fruntea fiecăreia.

Listele de abrevieri/prescurtări, respectiv *de simboluri şi notaţii explicitate fizico-matematic*, ca şi *indicele de noţiuni şi concepte* vin să uşureze înţelegerea materialului expus, dar şi să acceseze detalii pe care învăţarea sistematică le cere. Aceluiaşi scop îi serveşte şi *lista de figuri*, care mai are şi menirea de a permite o consultare rapidă a figurilor atunci când textul apelează la ele, figurile având un accentuat caracter sintetizator al cursului de FT, ca şi unul metodologic foarte important în înţelegerea tematicii destinate subpărţilor şi capitolelor cursului.

Bibliografia sistematizată de la finele cursului are atât rolul de a da aspecte istorico-genezice legate de TRR/TRS, sau de a furniza sursele de fizică teoretică relativistă care ne-au fost accesibile elaborării scrise a cursului de FT, cât mai ales de a furniza studenților (doritori să consulte sau să dezvolte problematică pe aceeași temă) o listă accesibilă cu bibliografie în limba română și/sau în limba engleză și franceză, în special, prin lucrări, monografii, tratate, etc. existente în bibliotecile bucureștene.

Pentru o mai rapidă înțelegere a funcționării logico-metodologice a cursului de FT inclus în *Partea a 3^a* destinat ca *<Fizică Teoretică Relativistă>*, *esența diagramatică ilustrată în figurile 3.1 și 3.2* apelate mai sus a fost concentrată în feed-back-ul expus în *figura 3.0*, special inclusă în prezenta *Introducere*.

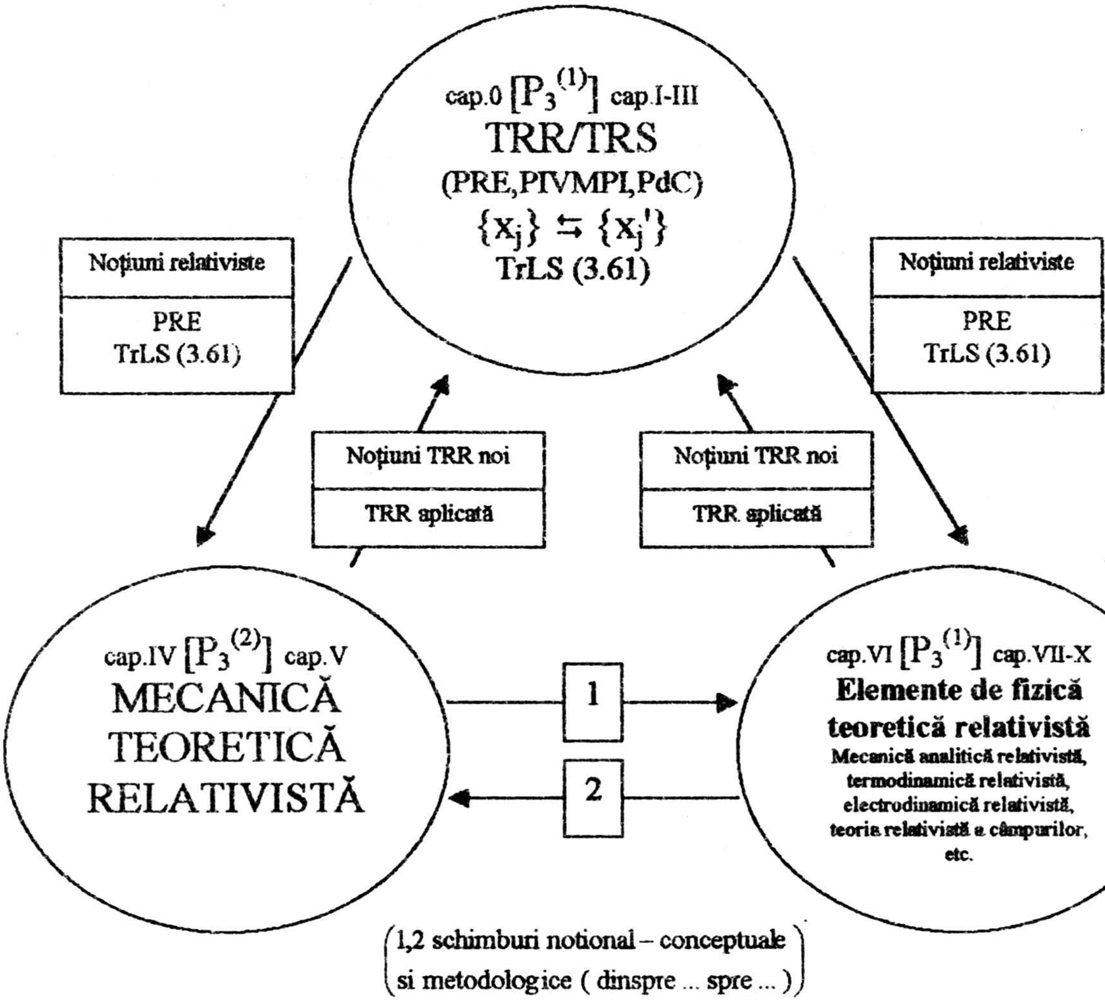


Figura 3.0 Diagramă feed-back, în cadrul *Părții a 3^a* a cursului de FT <FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ>, între subpărțile $[P_3^{(1)}]$≡<TRR/TRS> (cap.0, cap.I-III), $[P_3^{(2)}]$≡<MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ> (cap.IV-V) și $[P_3^{(3)}]$≡<ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RESTRÂNSĂ> (cap.VI-X)

Fiecăreia din subpărțile volumului de față i s-a sintetizat în fruntea ei un set de propoziții cu valoare științifică, metodică și integratoare, constituind un fel de rezumat cu accent pe limbajul fizico-matematic al FT în general și al FTR în special, la care să apeleze utilizatorii în beneficiul unui background minimal al TR, TRR/TRS și FTR, atunci când mai ales studenți fiind, vor căuta un minimum de repere pentru înțelegere și învățare. În categoria aceluiași ultim tip de repere se încadrează și majoritatea figurilor întocmite și incluse în curs, majoritatea lor având caracter de organigrame concentrând în aceeași funcționare diagramatică structura noțional-conceptuală fizico-matematică, funcționalitatea genezică științifică și metodologică, alături de structurarea logico-metodică a tematicii de FT și FTR luată în considerare în subpărțile și în capitolele cursului.

$[P_3^{(1)}]\equiv$ TEORIA RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE/ SPECIALE (TRR/TRS)

(p.14→88)

Cap. 0,I-III

Rezumat

(1) <Teoria relativităţii restrânse/speciale (TRR/TRS) are în vedere modelarea teoretică a fenomenelor mecanice şi electromagnetice ce au loc în referenţiale reciproc inerţiale RI ⇆ (RI)'>

(2) <Raportarea fenomenelor fizice la RI ⇆ (RI)' cere, conform PRE, descrierea fizico-matematică a trecerii reciproce RI ⇆ (RI)' care este făcută prin transformările Lorentz generale (TrLG) şi/sau speciale (TrLS), ce trebuie să lase invariantă forma matematică a legilor fizice>

(3) <Problema fundamentală a TRR/TRS este stabilirea TrLG/TrLS şi a consecinţelor lor cinematice şi dinamice>

(4) <Consecinţele cinematice şi dinamice ale TrLG/TrLS sunt accesibile interpretărilor fizice directe mai ales prin TrLS (3.61)>

(5) <Întreaga fizică teoretică relativist-restrânsă este generată de înlocuirea Tr. Galilei (3.1)-(3.2) cu TrLS (3.61) cerută de principiile fundamentale ale TRR/TRS (PRE, PIVMPI, PdC)>

(6) <Înlocuirea evenimentului e = (x,z,y,t) nerelativist prin evenimentul relativist $e_r = (\{x_j\}) \equiv (x,y,z,ict)$ transformă TRR/TRS într-o teorie cuadridimensională operând în ***spaţiul evenimentelor relativiste*** numit şi univers ***spaţiu-timp*** sau spaţiu Minkowski ($\mathcal{S}_M$)>

(7) <Transformările Lorentz speciale:

$$\left\{x'=\frac{x-v_T t}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\ y'=y,\ z'=z \text{ si } t'=\frac{t-\frac{v_T}{c^2}x}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\} \text{ şi inversele lor}$$

$$\left\{x=\frac{x'+v_T t'}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}},\ y=y',\ z=z' \text{ si } t=\frac{t'+\frac{v_T}{c^2}x'}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}, \text{ alături de \{PRE, PIVMPI, PdC\}}$$

constituie o bază metodologică minimală pentru întreaga TRR/TRS>

Dicţionar

(1) Teorie≡<"Categorie filosofică desemnând reflectarea abstractă, conceptuală a realităţii obiective"> (DEX)

(2) Relativ, -ă≡<"Care se referă, se raportează la ceva sau la cineva... "> (DEX)

(3) Relativist, -ă≡<"Referitor la teoria relativităţii, la efectele prevăzute de această teorie"> (DEX)

(4) Relativitate≡<"(1) Faptul de a fi relativ; (2) *Proprietate a mărimilor fizice de a avea valori dependente de* condiţiile concrete în care se efectuează măsurarea lor, sau de *sistemul de referinţă la care sunt raportate*"> (DEX)

(5) Teoria relativităţii≡<"Teorie care stabileşte interdependenţa între spaţiu şi timp şi materia în mişcare, aplicabilă atât în cazul vitezelor mici de deplasare a corpurilor, cât şi, ceea ce îi este caracteristic, în cazul vitezelor foarte mari, comparabile cu viteza luminii"> ("Dicţionar de fizică", 1972, p.453)

(6) Referenţial (R)≡<Ansamblul fizico-matematic noţional-conceptual alcătuit dintr-un *sistem de axe de coordonate* (de ex. O_{xyz} cartezian) având originea O fixată de un solid rigid (considerat în repaus), *la care se ataşează o riglă* (etalonată în metri) şi un *cronometru/ceasornic* (etalonat în secunde)>

(7) Rostul unui R≡<***marcarea evenimentului*** (x,y,z,t) în raport cu originea O a lui R, ***poziţionând*** spaţial punctul material P(x,y,z,t) ***la momentul t***, prin măsurătorile de x,y,z respectiv t cu rigla şi respectiv cronometrul care aparţin lui R>

(8) RI≡(R) inerțial≡<R care, fie (1) este în mișcare rectilinie și uniformă față de alt R considerat în repaus (și invers), fie (2) R în care este valabilă legea inerției, fie (3) R în care se conservă proprietățile fundamentale ale spațiului (omogenitatea și izotropia) și timpului (uniformitatea)>

(9) Referențiale reciproc inerțiale≡RI ⇆ (RI)' ≡<referențialele inerțiale RI și (RI)', inerțiale unul față de celălalt, utilizate în TRR/TRS pentru *raportarea* față de ele a unui fenomen fizic studiat, însoțită de *trecerea reciprocă* de la unul la celălalt [RI ⇆ (RI)']>

(10) TR Restrânsă≡<TR având în vedere fenomenele mecanice și cele electromagnetice, fără cele gravitaționale>

(11) TR Specială≡<TRR doar prin raportarea la {RI}>

(12) TR Generală/Generalizată≡<Teoria generală a gravitației care face raportarea la orice referențial, considerându-le și pe cele neinerțiale>

Cuprinsul detaliat al $P_3^{(1)}$=TEORIA RELATIVITĂȚII RESTRÂNSE/SPECIALE (TRR/TRS)(p.14→88)..16→21

3.0 Consideraţii generale metodologice. Despre modelul teoretic relativist (MTR) şi teoria relativităţii restrânse (TRR). Despre fizica relativistă în general

Ca parte a fizicii teoretice (FT), *mecanica relativistă* (MR) elaborează un *model teoretic* al sistemelor mecanice şi al fenomenelor mecanice (mişcărilor mecanice) pe care îl vom numi *modelul teoretic relativist* (MTR), generat împreună cu o *teorie fizică necesară* (în principal teoria relativităţii restrânse/speciale (TRR/TRS)), ambele plecând de la *realitatea fizică experimentală* sintetizată teoretic prin constatările: (c_1) sistemele mecanice macroscopice au viteze de mişcare $v \ll c$, cu c viteza luminii/undelor electromagnetice în vid/spaţiul fizic liber (vidul electromagnetic); (c_2) viteza de transmitere/propagare la distanţă a interacţiunilor nu are valoare infinită,ca în mecanica clasică (esenţial nerelativistă),ci o *valoare maximă finită* egală cu viteza de propagare a luminii în vid/spaţiul fizic liber $c=2.99792458\cdot10^8$ m/s $\cong 3\cdot10^8$ m/s, valoare ce nu depinde de starea mecanică de repaus sau de mişcare a referenţialelor inerţiale; (c_3) nu există un *referenţial inerţial* (RI) *absolut** faţă de care să avem o mişcare absolută, sau un repaus absolut, conform rezultatelor experienţelor Michelson-Morley (1881-1887) de determinare a vitezei luminii în raport cu diferite referenţiale în mişcare, respectiv de interferenţă a undelor luminoase, rezultate conducând la înlăturarea acelui mediu special ipotetic *numit eter* (mediul de propagare a undelor luminoase/electromagnetice); şi (c_4) există fenomene fizice (în special cele electromagnetice) ale căror legi fundamentale *nu sunt invariante faţă de transformările Galilei* {(v. paragraful 1.6.5 *Partea* 1^a *a cursului* (rel. (1.42)-(1.45)) şi (v. 2.3.2 *Partea a* 2^a (rel. (2.21)-(2.24))] [(v.ref. în [106], "*Elemente de fizică teoretică (I)*", Ed. Universităţii din Bucureşti}, transformări ce fac trecerea reciprocă de la un referenţial inerţial RI la altul (RI)' [RI $\leftrightarrows$ (RI)'], şi care sunt reluate ca (3.1)-(3.2), respectiv (3.14) şi (3.15) în cursul de faţă, conform cu figura 3.3(b).

Prima constatare (c_1) va conduce la reformularea *principiului de corespondenţă* (PdC) în TRR/TRS, în aşa fel încât trecerea la limită $v/c \to 0$ ($\Leftrightarrow$ $v \ll c$ sau $c \to \infty$) să conducă de la MTR la MGN (modelul galileeano-newtonian), sau să regăsească *transformările Galilei* [(1.42)-(1.45) sau (2.21)-(2.24)], *drept caz particular al transformărilor Lorentz-Fitzgerald* ce fac trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' în TRR. A doua constatare (c_2) înlocuieşte *ipoteza propagării instantanee* (sau cu viteză infinită) *a interacţiunilor la distanţă*, din MGN, *cu ipoteza propagării cu viteză finită*, conducând la *principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor* (PIVMPI), dacă se corelează (c_2) cu (c_3). Astfel, în MTR, având la bază TRR, PdC precizat mai sus, va trebui să ţină cont de PIVMPI, atunci când *acţionează epistemologic* în vederea construirii MTR şi a teoriei sale (TRR). Constatarea ultimă (c_4) va conduce la înlocuirea *transformărilor clasice Galilei* cu cele *relativiste Lorentz-Fitzgerald*, înlocuire simultană cu reformularea *principiului fundamental constructiv al relativităţii* (PR) în *forma einsteiniană* (PRE), în locul celei galileene (PRG) (v. paragraful 1.6.5 şi 2.3.2 din referinţa nr. [106] amintită). Astfel, cele două *principii constructive fundamentale* (PR şi PdC), utilizate în elaborarea MGN şi a modelelor teoretice analitice {MA}, din Partea 1^a respectiv a 2^a ale cursului de faţă, vor fi în continuare utilizate pentru elaborarea MTR şi a TRR. Modificările esenţiale faţă de modelele nerelativiste (MGN şi {MA}) vor fi aduse de acţiunea PRE conjugată cu cea a PIVMPI şi se vor manifesta în sinteza einsteiniană: "*teoria relativităţii este intim legată de teoria spaţiului şi timpului*" din introducerea la "The Meaning of Relativity" (1956), care legătură arată că spaţiul şi timpul în MTR şi TRR sunt "*intim legate*", conform relaţiilor de transformare Lorentz-Fitzgerald, ale căror consecinţe cinematice şi dinamice exprimă tocmai această din urmă legătură.

Cu cele trei principii amintite mai sus (PRE, PIVMPI şi PdC), noul model teoretic şi teoria sa vor putea reconstrui întreaga fizică teoretică nerelativistă, precum şi noi domenii relativiste, elaborând: (a) o *mecanică teoretică relativistă*-esenţial ca o TRR/TRS, extinzând relativist şi combinând metodologic noţiuni şi concepte de mecanică teoretică newtoniană de generalitate în întreaga fizică, împreună cu noţiuni şi concepte analitice de aceeaşi generalitate din mecanica analitică, rezultând o *cinematică relativistă cuadridimensională* şi o *dinamică relativistă cuadridimensională*, unificate de tratarea cuadridimensională în spaţiul cuadridimensional Minkowski a evenimentelor mecanice relativiste; (b) *o*

---

* Vezi şi § 3.17_0 (I) Avertismente [privind posibilitatea unui RI privilegiat (RIP)]

termodinamică relativistă; (c) un electromagnetism teoretic reformulat relativist ca o *electrodinamică relativistă*; (d) *o mecanică cuantică relativistă (de tip Dirac)* în locul celei nerelativiste (de tip Schrödinger); (e) o nouă *electrodinamică neclasică*, drept *electrodinamica cuantică*; (f) o nouă teorie a câmpurilor ca *teoria cuantică a câmpurilor* (TQC), conectată direct cu *teoria cuantică a particulelor elementare* (TQPE); (g) o nouă teorie a gravitaţiei ca *teoria relativităţii generalizate/generale* (TRG) esenţial teoria Einstein elaborată între 1907-1917; (h) o posibilă *teorie cuantică a gravitaţiei* [prin lucrările lui Stephen W. Hawking (n.1942) în special] etc. În acest fel, se poate vorbi de fizica teoretică relativistă generală, cu cele două aspecte ale sale fundamentale: (I) *fizica relativistă necuantică* (FRnQ) cuprinzând modelele relativiste *mecanic* (în mecanica relativistă), *termodinamic* (în termodinamica relativistă), *electromagnetic* (în electromagnetismul teoretic), *gravitaţional* (în TRG abordând sisteme fizice necuantice) respectiv (II) *fizica relativistă cuantică* (FQR) cuprinzând modelele teoretice ale căror teorii sunt sintetizate ca: teoria cuantică Dirac, teoria electrodinamicii cuantice, TQC, TQPE, cromodinamica cuantică etc. Trebuie specificat faptul că *teoria cuantică* ce stă la baza *modelului teoretic cuantic* (MTQ) (cu criteriul de departajare a obiectelor cuantice de cele clasice dat prin relaţiile Heisenberg de nedeterminare), permite atât un *model cuantic nerelativist* (prin mecanica ondulatorie de tip Schrödinger), cât şi un *model cuantic relativist* (prin teoria cuantică Dirac, electrodinamica cuantică, TQC, TQPE, cromodinamica cuantică, teoria cuantică a gravitaţiei etc.), după cum este adoptat drept principiu epistemologic constructiv al modelului şi a teoriei fie principiul relativităţii galileene (PRG), fie cel al relativităţii einsteiniene (PRE), alături de *principiul cuantic fundamental Heisenberg de nedeterminare* (incertitudine). Precizări suplimentare asupra acestor aspecte, se mai pot obţine prin interpretarea figurii 1.2 din Partea 1ª a cursului de faţă (<"Elemente de fizică teoretică", Ed. Universităţii din Bucureşti, 1998>, ref.nr. [106], la *Bibliografie Partea a 3ª*), expunând în paragraful 1.4b o *Diagramă de corespondenţă metodologică permisă de PdC, PR şi PM* (*principiul măsurabilităţii*) între fizica clasică/nerelativistă (FC), fizica relativistă necuantică (FRnQ) şi fizica cuantică nerelativistă (FQnR) şi relativistă (FQR sau FRQ). PM este cel care impune în *fizica teoretică cuantică* principiul Heisenberg. Din aceeaşi figură se poate observa rolul PR cu cele două aspecte ale sale PRG impunând transformările Galilei, respectiv PRE impunându-le pe cele Lorentz-Fitzgerald. De asemenea, este ilustrată corelarea acţiunii PR cu cea a PdC. O detaliere a figurii 1.2 din *Partea 1ª* a ref.[106] pentru *Partea a 3ª a cursului de FT de faţă* este desfăşurată în figura 3.2 , în care se află expusă *organigrama generării fizicii (teoretice) relativiste prin acţiunea epistemologică şi metodologică a principiilor constructive* (PIVMPI, PRE şi PdC), ce se precizează în continuare. De asemenea, aspecte legate de intersecţia metodologică TRR/TRS şi alte domenii de fizică teoretică de reformulat relativist în *figura 3.1*, precum şi în *figura 3.0* din *Introducere*.

După expunerea celor trei principii ale TRR ca fiind principiile: invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI), relativităţii einsteiniene (PRE) şi de corespondenţă (PdC), elementul constructiv fundamental al TRR şi al MTR va fi obţinerea transformărilor Lorentz-Fitzgerald, care vor sta la baza formalismului matematic al TRR şi al MTR, cu localizarea evenimentelor fizice în sens relativist $\{e_j\}$ într-un spaţiu cuadridimensional de tip Minkowski ($\mathcal{S}_M$). Spaţiul $\mathcal{S}_M$ se mai numeşte şi universul spaţiu-timp al evenimentelor relativiste şi va permite reprezentarea evenimentelor prin puncte cu poziţia dependentă de 4 coordonate (3 spaţiale şi una temporală), iar faţă de un eveniment origine (e_0) reprezentarea printr-un *cuadrivector de poziţie*, generalizând *vectorul de poziţie* (de 3 componente x,y,z) la unul de 4 componente (x_1=x,x_2=y,x_3=z şi x_4=ict ($i=\sqrt{-1}$)). Variaţia în timp a acestui vector va fi caracterizată de *cuadrivectorul viteză*, cu ajutorul căruia se va defini cuadrivectorul impuls. Variaţia cuadrivitezei în timp va fi măsurată cu ajutorul *cuadriacceleraţiei*, iar variaţia cuadriimpulsului în raport cu timpul va conduce la cuadrivectorul forţă. Astfel, întreaga geometrie euclidiană din MGN şi teoria newtoniană a mişcării va trebui înlocuită cu una neeuclidiană în MTR şi TRS, în care continuumul tridimensional euclidian independent de cel unidimensional temporal din fizica nerelativistă, se va contopi cu cel temporal, într-o varietate riemaniană cuadridimensională exprimând dependenţa spaţio-temporală reciprocă.

În această varietate cele trei coordonate spaţiale şi cea temporală sunt "legate intim", cum sugera citatul de mai sus din "The Meaning of Relativity" din 1956 a lui Einstein. Legea compunerii relativiste a vitezelor poate fi unul dintre argumentele cele mai importante susţinând geometria neeuclidiană din cadrul TRR/TRS [şi mai ales TRG (ca teoria relativităţii generale-o teorie generală a gravitaţiei)], deoarece compunerea relativistă a vitezelor este identică cu legea compunerii segmentelor, într-o geometrie neeuclidiană de tip Lobacevski-Bolyai (v. pag.133-134, "Dicţionar de matematică generală", Ed. Enciclopedică Română, Bucureşti, 1974).

Cu o geometrie neeuclidiană de tip Riemann (cuadridimensională în sens Minkowski), modelarea teoretică în $\mathcal{S}_M$ pentru a genera MTR şi TRR, va permite: (E_1) *elaborarea unei cinematici relativiste a mişcării* (în general a punctului material), (E_2) *elaborarea dinamicii relativiste* corespunzătoare aceleiaşi mişcări, respectiv (E_3) dezvoltări relativiste ulterioare cum ar fi cele amintite mai sus ca generând: mecanica analitică relativistă, electromagnetismul teoretic relativist, termodinamica relativistă, teoria relativistă a câmpurilor Lagrange, mecanica cuantică relativistă aplicată în diverse ramuri de FT precum: teoria cuantică Dirac, electrodinamica cuantică, TQC, TQPE, cromodinamica cuantică, etc. Pentru (E_2) şi toate celelalte dezvoltări relativiste din fizica cuantică, va fi necesară elaborarea *dinamicii relativiste din* TRR plecând de la *funcţiile analitice relativiste Lagrange* ($\mathcal{L}_r$), respectiv Hamilton ($\mathcal{H}_r$) şi de la acţiunea Hamilton relativistă ($S^r_{1\to2}$), în cazul mişcării punctului material, generând, astfel, o *mecanică analitică relativistă*, al cărui formalism analitic general va sta la baza elaborării efective a fizicii analitice relativiste conţinută în domeniile cuantice amintite. Conceptul de formalism analitic va fi cel definit în Partea a 2^a a cursului (v. paragraful 2.8.0), cu specificarea că p.f.m.a (problema fundamentală a mecanicii analitice) devine o p.f.m.a.r cu atributul de *relativistă*, în cazul N=1, al unui singur punct material, uşor de generalizat la cazul N cu oricât de multe puncte materiale, inclusiv la cazul cu număr g=3N-l grade de libertate, practic infinit (în cazul câmpului fizic din TQC). Toate aceste ultime detalii aparţin de ceea ce vom numi *Elemente de fizică teoretică relativistă* (FTR), ca o posibilă jalonare a extinderii complete a cursului, după parcurgerea Părţii a 4^a (mecanică statistică) şi a Părţii a 5^a (mecanică cuantică) ale prezentului curs.

Efectiv, elementele de FTR pe care le vom expune în cap.VII-X ale Părţii a 3^a vor cuprinde elementele esenţiale dintr-o posibilă: (1) *mecanică analitică relativistă*, (2) *termodinamică relativistă*, (3) *electrodinamică relativistă* şi (4) *teorie relativistă a câmpurilor* (vizând teoria câmpurilor Lagrange mai ales prin implicarea ecuaţiilor relativiste D'Alembert, Klein-Gordon şi Proca), *mecanica cuantică relativistă* fiind destinată *Părţii a* 5^a a cursului de FT. Ca *mecanică teoretică relativistă*, Partea a 3^a a cursului de FT va conţine cinci capitole destinate: (o) generalităţilor asupra modelului relativist (MTR) şi asupra teoriei relativităţii; (I) principiilor teoriei relativităţii restrânse (TRR); (II) transformărilor Lorentz generale şi speciale; (III) bazei noţional-conceptuale cinematice a TRR cu consecinţele cinematice relativiste ale TrLS; (IV) cinematicii relativiste cuadrivectoriale, respectiv (V) dinamicii relativiste cuadrivectoriale. Ca o aplicaţie multiplă a extinderii mecanicii relativiste în restul fizicii nemecanice, *elementele de fizică teoretică relativistă expuse în* cap.VII-X subliniază forma completă a fizicii teoretice generale, *care trebuie să fie esenţial relativist-restrânsă*, cuprinzând, principial, fizica teoretică nerelativistă ca pe un caz particular de trecere la limită, conform cu desfăşurarea nerelativistă a fenomenelor fizice. *Figura 3.1* conţine diagrama de intersecţie metodologică între diferitele domenii ale fizicii teoretice generând fizica teoretică relativistă (FTR), specificând şi domeniile de FTR abordate în cursul de FT de faţă. În *Figura 3.2* este redată *organigrama de generare a fizicii (teoretice) relativiste* apelând la *principiile fundamentale ale* TRR/TRS, sintetizate în cap.I (§3.5 → 3.8) [principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI), principiul relativităţii einsteiniene (PRE) şi principiul de corespondenţă (PdC)] şi plecând de la raportarea stărilor fizice (şi a fenomenelor fizice) la referenţialele reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)', de la care se face *trecerea reciprocă*, ce va fi descrisă de transformările Lorentz generale şi/sau speciale (TrLG/TrLS) (3.61), în cazul relativist, respectiv de transformările Galilei (TrG) în cazul nerelativist. Acţiunea PdC poate fi asociată cu acţiunea *principiului măsurării* (PM), în *fizica cuantică* având exprimarea cea mai precisă în forma *principiului Heisenberg al relaţiilor de nedeterminare* (incertitudine). De aceea, acţiunea PdC va fi de tip PdC(R), respectiv PdC(Q), după cum acţionează în sensul particularizării *relativist → nerelativist*, respectiv *cuantic → necuantic*. De asemenea, în *figura 3.4* sunt precizate domeniile FTR expuse în partea a 3^a a cursului de FT, inclusiv destinarea acestora după capitole. Consultarea *figurii 3.0* (plasată în *Introducere*) sintetizează corelarea dintre cele trei subpărţi $\{P_3^{(i)}\}$ $(i=\overline{1,3})$ ale *părţii a* 3^a, subiectul volumului (II) al cursului nostru de FT.

3.1 Incompatibilităţi ale mecanicii clasice cu electrodinamica clasică

3.1.0 Revederea ipotezei propagării instantanee (IPI) (cu viteză infinită) la distanţă a interacţiunilor din mecanica clasică şi/sau din fizica nerelativistă ($v_{max} \to \infty$)

3.1.0.1 Ipoteza propagării instantanee (IPI) a interacţiunilor

Deoarece în mecanica clasică realitatea fizică se considera ca alcătuită numai din corpuri substanţiale şi vid între aceste corpuri, *ipoteza propagării cu viteză infinită a interacţiunilor sau propagarea instantanee* a acestora la distanţă apărea ca o constatare observaţională şi experimentală de domeniul evidenţei, chiar dacă *Olaus (Ole) Römer* (1644-1710) a efectuat prima determinare a vitezei luminii în 1676 pe cale astronomică (prin observaţii asupra sateliţilor lui Jupiter), furnizând o primă evaluare a valorii foarte mari, dar finite a acestei viteze. *Ipoteza propagării instantanee* (IPI) a interacţiunilor a condus la *posibilitatea sincronizării absolute a ceasornicelor* ataşate tuturor referenţialelor. De aici, prin IPI, *posibilitatea definirii unui timp universal* (*şi deci o ipoteză a timpului universal* ITU), acelaşi în toate referenţialele, ca urmare a $v_{max} \to \infty$ de transmitere a informaţiei de la un referenţial la altul.

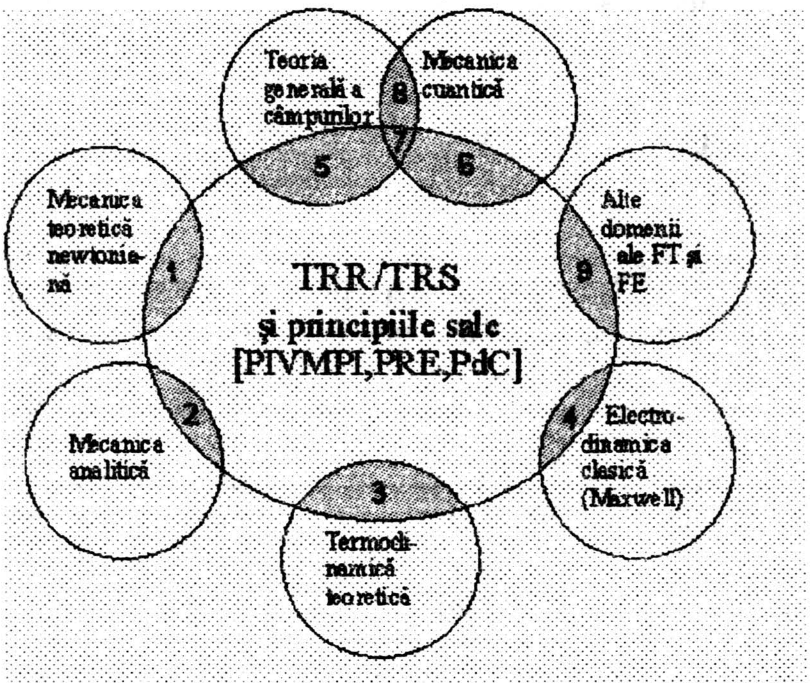


Figura 3.1 Diagramă de intersecţie metodologică între TRR/TRS şi diferitele domenii ale fizicii teoretice (FT)* generând fizica teoretică relativistă (FTR)**,***

Zonele haşurate se constituie în ramuri ale FTR, numerotate ca: **1.**-mecanică relativistă; **2.**-mecanică analitică relativistă; **3.**-termodinamică relativistă; **4.**-electrodinamică relativistă; **5.**-teoria relativistă a câmpurilor; **6.**-mecanică cuantică relativistă; **7.**-teoria cuantică relativistă a câmpurilor; **8.**-ecuaţiile relativiste cuantice de tip Klein-Gordon (scalară, vectorială, tensorială-Proca), ecuaţii de tip Pauli; **9.**-alte domenii relativiste posibile (inclusiv cele aparţinând de fizica experimentală (FE)).

---

* Considerăm FT şi teoria fizico-matematică ce formulează termodinamica clasică (inclusiv dă forma matematică a principiilor termodinamicii)

** Cursul de FT ***partea a 3ª*** (de faţă) cuprinde domeniile haşurate 1,2,3,4,5,7,8, domeniul 6 fiind destinat ***părţii a 5ª (mecanica cuantică)***; domeniul 5 cuprinde ecuaţia Lagrange generalizată, ca bază a tratării câmpurilor Lagrange; domeniul 7 conţine ecuaţiile relativiste de tip Klein-Gordon (inclusiv forma tensorială Proca)

*** Vezi şi ***figura 3.0*** din ***Introducere***

3.1.0.2 Consecințele ipotezei timpului universal (ITU)

Principalele consecințe ale IPI și ale ITU au fost:

(c_1) *principiul relativității galileene* (PRG), având la bază *transformarea Galilei asimetrică reluată vectorial* (din P 1ª și P a 2ª ale cursului de FT, v. ref. 106) ca:

(3.1) $\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 + \vec{v}_T t$ și/sau

(3.2) $\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{v}_T t$,

caracterizând trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' de la un referențial la altul (când $\vec{v}_T$ este viteza de transport a lui (RI)' față de RI), toate acestea formulând o *consecință cinematică a* ITU *care afirmă că* $t_{RI} = t_{(RI)'} \Leftrightarrow$ t=t' (expresie a timpului universal, unic în toate {RI});

(c_2) *independența de viteză a masei* ($m \neq m(v^2)$) *și a energiei potențiale* ($U \neq U(\dot{\vec{r}}) \equiv U(\vec{v})$), datorită conservării proprietăților de omogenitate și izotropie ale spațiului, respectiv a celei de uniformitate a timpului în oricare din {RI} la care se raportează mișcarea sistemelor mecanice, toate acestea drept consecință dinamică; *și*, din (c_2), *ca o consecință indirectă*:

(c_3) *formele explicite, concrete ale funcțiilor analitice clasice Lagrange și Hamilton* pe baza cărora a fost clădită întreaga mecanică clasică,plecând de la rezultatele fizico-teoretico-matematice din "Philosophiae naturalis principia mathematica" din 1687 a lui Newton, cu dezvoltarea *mecanicii teoretice* vreme de peste două secole, până la apariția *mecanicii relativiste* ca TRR/TRS [în 1905 a lui Albert Einstein (1879-1955)].

3.1.1 Ipoteza interacțiunilor propagate la distanță cu viteză finită ($v_{max} \leq c$)

Odată cu clarificarea *naturii luminii ca undă electromagnetică*, se va impune treptat în ultima parte a secolului XIX și la începutul celui XX, *ipoteza interacțiunilor propagate la distanță cu viteză finită maximă* ($v_{max} \leq c$), ca un rezultat fundamental al observațiilor și experiențelor cât și al deducțiilor teoretice, mai ales din electrodinamica clasică a lui James Clark Maxwell (1865, 1873 și 1878), care *impune existența și propagarea câmpului electromagnetic*, *în urma experiențelor din 1887 ale lui Heinrich R-Hertz (1857-1894).*

Toate experiențele de determinare a vitezei maxime de propagare la distanță a interacțiunilor din electrodinamica clasică maxwelliană au condus spre *rezultatul teoretic din lucrările lui Maxwell* (1865, 1873 și 1878):

$$(3.3) \quad v_{max} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$$

ușor de aproximat prin înlocuirea constantelor universale ale vidului electromagnetic (spațiul liber) $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ F/m ca permitivitate electrică absolută și $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ A/m ca permeabilitate magnetică absolută. Cea mai bună determinare experimentală a constantei c acceptată în prezent este: $c = (2.997924562 \pm 0{,}000000011) \cdot 10^8$ m/s, cu eroarea standard reprezentând circa 3,6692 miliardimi din valoarea estimatului 2,997924562, adică 1,1 m/s din 299.792.456,2 m/s.

3.1.2 Viteza maximă de propagare a interacțiunilor și ecuația generală de propagare din electrodinamica clasică. Invariantul $v_{max} \equiv c$

Rezultatul experimental și teoretic exprimat prin (3.3) dă viteza maximă de propagare la distanță a interacțiunilor din electrodinamica clasică, reprezentând *viteza de propagare (de fază) a undelor electromagnetice în vid/spațiul liber*, conformă cu *ecuația generală de propagare*:

$$(3.4) \quad \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r},t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 .$$

În (3.4) $\Psi(\bar{r},t)$ pot fi componentele vectoriale electrică $\vec{E}$, respectiv magnetică $\vec{H}$ ale câmpului electromagnetic.

Conform cu rezultatul teoretic exprimat în formula (3.3), viteza c este un *invariant* în raport cu trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)', atunci când fenomenele electromagnetice sunt raportate la referențiale inerțiale diferite. *Caracterul de invariant al vitezei* c fiind asigurat de *constantele universale* ε_0 și μ_0, c trebuie să aibă aceeași valoare în orice {RI}, adică avem: $v_{max}=c=\text{const.}$ ($\Leftrightarrow c_{RI} = c_{(RI)'}$), independent de starea de repaus ori de mișcare a referențialelor reciproce RI ⇆ (RI)'.

3.1.3 Insuficiența principiului relativității galileene (PRG) și necesitatea înlocuirii lui cu PRE

Din subparagraful precedent, care arată că $v_{max} = c$ este un invariant în raport cu trecerea RI ⇆ (RI)', rezultă că *transformările Galilei* (3.1)-(3.2) nu mai sunt valabile în domeniul în care $v \leq c$ (valori egale și/sau apropiate de c), deoarece la $v_{max} \equiv c$ nu mai este valabilă legea Galilei de compunere clasică (nerelativistă) a vitezelor:

$$(3.5) \qquad \vec{v}_{RI} = \vec{v}_{(RI)'} + \vec{v}_T ,$$

aceasta din urmă fiind o consecință cinematică a transformărilor (3.1)-(3.2). Astfel, baza matematică a PRG (transformările Galilei) trebuie înlocuită cu o alta, cea impusă de PRE ca *transformările Lorentz-Fitzgerald* sau transformările Lorentz speciale, care permit *invariantul relativist* $v_{max}=c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$, și deci o nouă lege de compunere a vitezelor ca lege relativistă. Aceste noi transformări ce fac trecerea RI ⇆ (RI)' vor trebui să lase invariantă și forma matematică a *ecuației generale de propagare* (3.4) și, după cum vom vedea, această invarianță va fi utilizată pentru a obține *transformările Lorentz generale.*

3.2 Alte incompatibilități fundamentale între mecanica clasică și electrodinamica clasică, drept surse de TRR

3.2.0 Precizare metodologică

Orice incompatibilitate între mecanica clasică și electrodinamica clasică poate fi utilizată ca sursă de generare a TRR, prin faptul că ar putea reclama înlocuirea transformărilor Galilei (3.1-3.2) cu alte transformări care să înlăture incompatibilitatea. Două incompatibilități fundamentale între mecanica clasică și electrodinamica clasică sunt furnizate prin: (i_1) existența forței Lorentz în electrodinamica microscopică și (i_2) asimetria ecuației de propagare a undelor electromagnetice (3.4) referitor la forma dependenței ei de coordonatele spațiale {x,z,y}, corelată cu dependența de coordonata temporală t.

3.2.1 Existența forței Lorentz în electrodinamica microscopică

Teoria Lorentz microscopică a mișcării electronilor în câmpul electromagnetic ($\vec{E},\vec{B}$) furnizează forța Lorentz: (3.5) $\vec{f}_L = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, valabilă pentru acțiunea câmpului ($\vec{E},\vec{B}$) asupra oricărui purtător microscopic de sarcină electrică q, care intră în câmp cu viteza $\vec{v}$ formând un unghi $\alpha \equiv (\widehat{\vec{v},\vec{B}})$ cu vectorul $\vec{B}$ al câmpului. Existența acestei forțe indică și existența unei funcții de forță (energie potențială a câmpului) dependentă de viteză, *fapt incompatibil cu independența de viteză a energiei potențiale în mecanica clasică* (semnalată în secvența 3.1.0.2 prin consecința (c_2) a PRG)

3.2.2 Asimetria ecuației de propagare a undelor (3.4) în raport cu transformările Galilei

Ținând cont că PRG face trecerea RI ⇆ (RI)' prin trecerea de la setul {x,y,z,t} la setul {x',y',z',t'}de coordonate ale aceluiași eveniment raportat la cele două referențiale diferite, se poate observa ușor că ecuația de propagare a undelor electromagnetice (3.4) prezintă asimetrie prin prezența în fața derivatei $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}$ a constantei $1/c^2$. Această asimetrie, face ca *forma matematică a ecuației* (3.4) *să nu rămână invariantă în raport cu transformările Galilei,* care reprezintă baza matematică a PRG, fapt ce arată că PRG *nu mai poate să fie valabil în electrodinamica clasică.* Astfel, se impune necesitatea găsirii acelor relații de trecere RI ⇆ (RI)' care să pună în evidență *simetria ecuației de propagare* (3.4).

3.2.3 Simetria ecuației (3.4) în raport cu alte posibile transformări ce fac trecerea RI ⇆ (RI)'

Simetria ecuației (3.4) se poate evidenția făcând *înlocuirea trecerii* {x,y,z,t} ⇆ {x',y',z',t'} (cu t=t') *de la un eveniment clasic (nerelativist) la altul, prin trecerea*:

(3.6) $\{x,y,z,ict\} \leftrightarrows \{x',y',z',ict'\} \Leftrightarrow \{x_j\} \leftrightarrows \{x'_j\}\ (j=\overline{1,4})$,

cu $\{x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, x_4 \equiv ict\}$ și $\{x'_1 \equiv x', x'_2 \equiv y', x'_3 \equiv z', x'_4 \equiv ict'\}$,

în care setul $\{x_j\}$ reprezintă un *eveniment relativist raportat la referențialul* RI, iar $i=(-1)^{1/2}$ unitatea imaginară imprimând caracter imaginar coordonatei x_4 al cărei *modul* se măsoară, tocmai în unități de lungime ca și $\{x_1,x_2,x_3\}$.În acest caz trecerea (3.6) este echivalentă cu raportarea la RI respectiv la (RI)' a aceluiași *eveniment relativist.* Este astfel pusă în evidență existența *unui spațiu cuadridimensional*:

(3.7) $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_{x,y,z} \otimes \mathcal{S}_{ict}$

ca produs tensorial între subspațiul fizic real tridimensional $\mathcal{S}_{x,y,z}$ și subspațiul imaginar unidimesional $\mathcal{S}_{ict}$. Spațiul $\mathcal{S}_M$ cuadridimensional cu axele reprezentate de coordonatele $\{x_j\}\ (j=\overline{1,4}) \equiv \{x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, x_4 \equiv ict\}$ se numește *spațiul Minkowski* sau *universul spațiu-timp* al TRR/TRS.

Simetria ecuației de propagare (3.4) față de trecerea (3.6) de la un eveniment raportat la RI la același eveniment raportat la (RI)' (sau invers) se poate observa mai ușor, dacă (3.4) se transcrie în formele:

(3.8) $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\vec{r},t) = 0$ sau

(3.9) $\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$, cu

(3.10) $\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \equiv \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, ca operatorul D'Alembert scris prin operatorul nabla

(3.11) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z$, care dă operatorul Laplace

(3.12) $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Toată simetria ecuației (3.4) față de (3.6) este conținută în forma (3.9) a ecuației, când, prin (3.10), *operatorul D'Alembert se exprimă ca*:

(3.13) $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Această simetrie va fi utilizată în deducerea/obținerea *relațiilor de transformare* Lorentz generale, cu cazul lor particular reprezentat de *transformările Lorentz speciale*, transformări ce constituie baza matematică a PRE (principiul relativității einsteiniene) din TRR/TRS.

3.3 Asupra unor rezultate experimentale şi teoretice din fizica proceselor nucleare, din fizica particulelor elementare şi a energiilor înalte, incompatibile cu mecanica clasică

Încă din 1902, W. Kuafmann a descoperit pe cale experimentală că *masa proaspăt descoperiților electroni* (prin lucrările experimentale directe ale lui J.J. Thomson din 1894-1896) *depinde de viteza* cu care se mişcă aceştia. *Existența electronilor relativişti* (care se mişcă cu v comparabile cu c) a fost pusă în evidență experimental, înainte de experiențele lui Kaufmann, de către H. Becquerel (descoperitorul radioactivității naturale) în 1896. Aceste fapte experimentale ca şi altele mult ulterioare, atât din fizica proceselor nucleare (reacțiilor nucleare), cât şi din fizica particulelor elementare (în care au loc fenomene de accelerare a particulelor) arată valori ale vitezelor comparabile cu c, valori ce le conferă energiile înalte necesare investigației ştiințifice din domeniul fizicii experimentale relativiste (nuclear, subnuclear şi elementar etc.). Atât rezultatele experimentale, cât şi cele teoretice, din aceste domenii fundamentale ale fizicii, arată că masa obiectelor fizice ce intră în studiu variază în raport cu viteza, punându-se în evidență o dependență $m=m(v^2)$ contrazisă de mecanica clasică. De asemenea, pe cale experimentală şi teoretică se demonstrează că această dependență este evidențiabilă când viteza v a particulelor este apropiată de, sau comparabilă cu viteza c a luminii în vid/spațiul liber. În cazul mecanicii clasice, valoarea $v \ll c$ face ca practic dependența de viteză a masei de mişcare a obiectelor clasice să nu poată fi pusă în evidență. Acest fapt va verifica una din consecințele aplicării PdC, atunci când în TRR/TRS se va face trecerea la limită $v/c \to 0$, trecere ce va regăsi mecanica clasică drept o limită nerelativistă a mecanicii relativiste (ca TRR/TRS), la baza căreia stă PRE cu relațiile Lorentz speciale care descriu matematic trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'. De aceea, dependența relativistă $m=m(v^2)$ cere acele relații de trecere RI $\leftrightarrows$ (RI)', ce vor conduce la consecința dinamică exprimată de această dependență.

3.4 Probleme istorice ale TRR/TRS şi alte precizări legate de teoria relativității în general

3.4.0 Elemente tematice ale teoriei relativității (ca TRR/TRS, respectiv TRG)

Ceea ce este cunoscut sub numele de teoria relativității (TR) are două elemente/aspecte tematice aparent distincte: (a1) *teoria relativității restrânse sau speciale* (TRR/TRS) şi (a2) *teoria relativității generale sau generalizate* (TRG) numită şi teoria generală a gravitației, ambele aspecte fiind elaborate de Albert Einstein (1879-1955), *primul aspect* în 1905 prin lucrarea "*Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare*" [publicată în vol. 17 al revistei germane "*Annalen der Physik*" (1905), pag. 891-92], *al doilea aspect* elaborat între 1907-1917.

3.4.1 Scurt istoric al mecanicii relativiste. Etape fundamentale ale genezei teoriei relativităţii restrânse (TRR/TRS)

3.4.1.0 Precizare obiectuală

Mecanica relativistă ca *teorie a relativităţii restrânse* (TRR) *sau speciale* (TRS) este reprezentată esenţial de acea *teorie fizică* (şi de modelul său aplicativ) care stabileşte dependenţa dintre caracteristicile fizice ale spaţiului, timpului şi materiei în mişcare, aplicată atât în cazul mişcărilor cu viteze mici ($v \ll c$), cât şi în cazul celor cu viteze comparabile cu viteza c a luminii în spaţiul liber (vidul electromagnetic). Astfel TRR/TRS studiază atât fenomenele mecanice cât şi cele electromagnetice ce se produc în referenţiale inerţiale ({RI}), cu trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' descrisă matematic de transformările Lorentz generale şi/sau speciale.

3.4.1.1 Etapa preeinsteiniană galileeană

Este tocmai cea a lucrării fundamentale a lui Galileo Galilei (1564-1642) "*Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze, attentati alla mecanica ed i movimenti locali*" (Leida, 1638) (tradusă în limba română sub titlul "Dialoguri asupra ştiinţelor noi") din care se poate extrage *enunţul Galilei* al *principiului relativităţii* (PRG) sub forma expusă în lucrarea fundamentală a lui Isaac Newton (1642-1727) din 1687: <"Într-o corabie toate mişcările se întâmplă la fel fie ca ea este în stare de repaus, fie că se mişcă uniform în linie dreaptă">, formulare pe care Newton n-o pune pe seama lui Galilei (pe care nici nu-l aminteşte) şi pe care o foloseşte drept explicaţie la *Corolarul V* al "Axiomelor sau legilor mişcării".

3.4.1.2 Etapa preeinsteiniană newtoniană

Este etapa lucrării fundamentale "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*" ("*Principiile matematice ale filosofiei naturale*", din care Poincaré şi Einstein extrag *Corolarul V* (la "Axiomele sau legile mişcării") numindu-l *principiul newtonian al relativităţii.* Acest corolar afirmă: "Mişcările corpurilor aflate într-un spaţiu închis sunt aceleaşi între ele, fie că acest spaţiu se află în repaus, fie că el se mişcă rectiliniu şi uniform fără mişcare circulară".

3.4.1.3 Etapa Maxwell-Hertz

Corespunde lucrărilor lui James Clerk Maxwell (1831-1879) din 1865, 1873 ("Treatise on Electricity and Magnetism") şi din 1878, care elaborează modelul teoretic al electromagnetismului fundamentând *electrodinamica clasică* şi impunând *invariantul* (relativist) $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$. De asemenea, lucrărilor teoretice şi experimentale ale lui Heinrich Hertz (1857-1894), ce confirmă invariantul c ca viteză de propagare a undelor electromagnetice în spaţiul liber (vidul electromagnetic).

3.4.1.4 Etapa Michelson-Morley ca etapă experimentală crucială (1881-1887)

Primele baze ale TRR/TRS au fost puse pe cale experimentală şi teoretic interpretativă a experienţelor efectuate între 1881-1887 de americanul de origine poloneză Albert Abraham Michelson (1852-1931, Premiul Nobel 1907) şi de americanul Edward Williams Morley (1838-1923), experienţe privind măsurarea vitezei luminii şi mişcarea de rotaţie a Pământului şi care au condus la concluziile: ($\underline{c}_1$) viteza luminii trebuie considerată independentă de referenţialul inerţial (RI) în care este măsurată şi ($\underline{c}_2$) *eterul* ca mediu ipotetic de propagare a undelor electromagnetice trebuie eliminat, deoarece nu s-a putut decela pe cale experimentală interferometrică existenţa unei mişcări absolute raportate la *eter* considerat ca reper absolut*. Concluzia ($\underline{c}_1$) impune, de fapt, *invarianţa vitezei c de propagare a luminii* în spaţiul liber (vidul electromagnetic), *în raport cu orice* RI, ca un principiu fundamental în TRR [principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI) la distanţă]. Cea de-a doua concluzie

---

* Vezi şi 3.17_0 (I) Avertismente [privind posibilitatea unui RI privilegiat (RIP)]

va susţine caracterul relativ al mişcării şi al repausului în TRR, echivalent cu imposibilitatea evidenţierii unei mişcări absolute în lipsa unui reper absolut.

3.4.1.5 Etapa Fitzgerald-Lorentz-etapa elaborării transformărilor Lorentz-Fitzgerald/transformărilor Lorentz speciale (TrLS)

Este etapa teoretică interpretativă crucială a rezultatelor experienţei Michelson **din 1881, începută de** irlandezul George Francis Fitzgerald **(1851-1901) care în 1883 introduce** *ipoteza contracţiei lungimilor în lungul direcţiei de mişcare la viteze mari, ipoteză introdusă independent şi de* **olandezul** Antoon Hendrik Lorentz **(1853-1928; premiul Nobel în 1902), care a utilizat-o în stabilirea în 1895 a relaţiilor matematice** ce descriu trecerea **reciprocă RI ⇆ (RI)', numite ulterior** *transformările Lorentz speciale* (TrLS). **Lucrările lui** Fitzgerald **şi** Lorentz **utilizează ipoteza** *contracţiei relativiste a lungimilor* **pentru a** explica rezultatul negativ al **experienţei de deplasare a franjelor de interferenţă datorate "vântului de eter"** în care s-ar afla Pământul. **În plus,** Lorentz **în această etapă** *completează teoria macroscopică a electrodinamicii maxwelliene cu teoria sa electronică a materiei*, **care este esenţial** o *electrodinamică a corpurilor în mişcare.*

3.4.1.6 Etapa descoperirii electronilor şi a studierii lor experimentale (1894-1902)

Este etapa **experienţelor lui** J.J. Thomson **(1856-1940) din anii 1894-1896 care pun în evidenţă existenţa particulelor încărcate cu sarcină electrică negativă [sarcină bănuită de** H. I. Helmholtz **(1821-1894) în 1881 în explicarea legilor electrolizei], particule pe care** A.H. Lorentz **le-a numit** *electroni.* **De asemenea,** este *etapa descoperirii electronilor relativişti* (cu v comparabilă cu c) de către Antoine Henri Becquerel **(1852-1908) în 1896 (odată cu descoperirea radioactivităţii naturale),** efectiv **identificaţi ca relativişti în 1900. Din punct de** vedere *experimental relativist*, **un** eveniment, foarte **important al acestei etape** este *descoperirea experimentală a dependenţei masei electronului relativist de viteza sa, în 1902,* **de** către W. **Kaufmann.**

3.4.1.7 Etapa teoretică preeinsteiniană Lorentz-Poincaré (1902-1905)

Este etapa în care **marele matematician francez Jules Henri** Poincaré **(1854-1912), punându-şi problema înlocuirii relaţiilor de transformare Galilei cu relaţiile de transformare Lorentz pentru a satisface invarianţa ecuaţiilor Maxwell (1873) în raport cu trecerea RI ⇆ (RI)', între 1902-1904,** este preocupat de **înlocuirea transformărilor Galilei faţă** de care **ecuaţiile Maxwell sunt variante, şi formulează.** *principiul relativităţii* **(PR) în forma: <Legile fenomenelor fizice trebuie să fie aceleaşi pentru doi observatori în translaţie uniformă unul faţă de celălalt>, prevăzând o** *dinamică a mişcării* **în care nu se poate depăşi** viteza de propagare **a luminii în vid/spaţiul** liber. **Poincaré a stabilit chiar** o **relaţie de tipul** $E=mc^2$ (vezi **Onicescu), fără a-i vedea semnificaţiile şi implicaţiile fizice în ceea ce ar fi putut fi o** *mecanică relativistă.* **Tot în această etapă, H.A. Lorentz publică** "*Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light*" **în 1904, iar Poincaré publică** "*Despre dinamica electronului*", **într-o revistă de matematică din Palermo cu circulaţie ştiinţifică foarte restrânsă, în 23 iulie 1905, la aprope** *o lună* **de la apariţia lucrării fundamentale a lui Einstein din 30 iunie 1905, din** foarte **cunoscuta şi larg circulata <"Annalen der Physik">.**

3.4.2 Etapa einsteiniană a TRR/TRS (1905-1906)

3.4.2.1 Prezentare

În 1905, Albert Einstein (1879-1955) publică "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*" **["Annalen der Physik" vol.17, p. 891-921 (30.06.1905)] punând bazele** *teoriei relativităţii restrânse* **(TRR) sau ale** *teoriei relativităţii speciale* **(TRS), termenii fiind introduşi şi uitlizaţi ulterior de către Einstein spre a deosebi** "*Asupra dinamicii corpurilor în mişcare*" **(30.06.1905) de teoria ce o va elabora între 1907-1917 ca** *teoria relativităţii generale* **(TRG), care dezvoltă pe baza teoriei câmpurilor problema gravitaţiei generale. Atributul de** "*restrâns*" **din TRR face departajarea de TRG, iar cel de** "*special*" **se referă la faptul că TRR/TRS are în vedere numai** *restrângerea* **TR la** *referenţialele inerţiale* **şi/sau la**

transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61) care descriu matematic trecerea RI ⇆ (RI)'. În acelaşi an Einstein, tot, în "Annalen der Phyzik" vol.17, mai publică "Depinde inerţia unui corp de energia înmagazinată în el?" (p.639-64, 1905). Etapa einsteiniană 1905-1906 nu poate face abstracţie de faptul că Einstein publică în 1905, respectiv 1906 două lucrări, între care prima explică efectul fotoelectric extern descoperit de Hertz (1888), utilizând două *ipoteze fundamentale în noua fizică a secolului 20*: *ipoteza Planck* (1900) a cuantelor de energie $E=h\nu\equiv\hbar\omega$, respectiv *ipoteza Einstein* (1905) *a cuantelor/particulelor de lumină, fotonii*, ca *particule relativiste cu masa de repaus nulă*. Cea de-a doua lucrare o completează pe prima făcând consideraţii asupra emisiei şi absorbţiei luminii conforme cu explicaţia dată efectului fotoelectric extern.

3.4.2.2 Consecinţe

Anul 1905, ca an de geneză a TRR/TRS este şi anul *posibilului model teoretic relativist* (MTR) ale cărei baze TRR/TRS tocmai le pusese prin "Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare", deoarece Einstein, plecând de la sintetizarea tuturor rezultatelor anterioare anului 1905, enunţa *principiul constantei vitezei luminii în vid (spaţiul liber)*, ca principiu de invarianţă a vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI) la distanţă, precum şi *principiul relativităţii einsteiniene* (PRE), conform căruia <Legile fenomenelor fizice (inclusiv cele electromagnetice) îşi păstrează invariantă forma matematică în toate referenţialele inerţiale (RI)>.

Cu ajutorul acestor două principii (PIVMPI şi PRE), *ca bază axiomatică*, s-au putut obţine relaţiile de transformare Lorentz generale şi speciale (TrLS), ca baza matematică a trecerii reciproce de raportare a mişcării mecanice de la RI la (RI)' şi invers. De asemenea, s-a putut elabora o *cinematică şi o dinamică relativistă*, în care coordonatele $\{x,z,y,t\}$ sunt "*intim legate între ele*", şi-n care dependenţa $m=m(v^2)$ a masei de mişcare cu viteza este o consecinţă a TrLS, iar legile mecanicii au fost puse sub formă invariantă faţă de TrL generale şi/sau speciale, devenind *legile mecanicii relativiste*. De asemenea, a fost tranşată definitiv relativitatea simultaneităţii.

3.4.3 Etapa einsteiniană-minkowskiană (1907-1909)

Este etapa în care TRR/TRS *ca o mecanică relativistă* primeşte mai ales aportul matematicianului Hermann Minkowski (1864-1909), cu o contribuţie decisivă la dezvoltarea *bazelor matematice ale teoriei relativităţii* introducând *spaţiul cuadridimensional de axe* ($\{Ox_j\}$ $(j=\overline{1,4})$) ca *spaţiul tuturor evenimentelor relativiste* $e_r\equiv\{x_j\}\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,y,z,ict)$, numit *universul spaţiu-timp* sau spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$), cu vectorul de poziţie al punctului reprezentativ ca un *cuadrivector de poziţie* şi cu *legile mecanicii relativiste exprimate matematic prin relaţii între cuadrivectori*.

3.4.4 Etapa einsteiniană a rafinării TRR/TRS (1920-1922)

Este etapa în care Einstein primeşte premiul Nobel pe 1921, în motivaţia Fundaţiei Nobel din Stockholm: "for his services to Theoretical Physics and especially for his discovery of the law of the photoelectric effect" (v. ref. 37). Dar, mai ales este etapa rafinării TRR/TRS sub forma "*The meaning of relativity: Four Lectures Delivered at Princeton University*" (mai 1921), publicate în 1922 de Methuen & Comp. în Marea Britanie şi de Universitatea Princeton din SUA, cuprinzând *textul prelegerilor Stafford* ale lui Einstein. Este interesant că tot în SUA şi tot în 1921 (21 noiembrie), în revista "America" (Cleveland, Ohio) apare articolul "Eminescu şi teoria relativităţii" (autor George Anagnostache), iar în 1922 în România, în "Adevărul literar şi artistic" (vol. II nr.1921, p.1), I. Glicsman sub pseudonimul Doctorul Ygrec publică articolul "De la Eminescu la Einstein. Ştiinţă şi poezie". Rafinarea TRR/TRS amintită se poate vedea fie numai din titlurile celor 4 prelegeri: (1) "Spaţiul şi timpul în fizica prerelativistă", (2) "Teoria relativităţii restrânse", (3) "Teoria relativităţii generale" şi (4) "Teoria relativităţii generale (Urmare)", precum şi din faptul că publicarea din 1922 este reluată în 1945, 1950 şi 1953 şi 1956, cu două anexe între care a doua este "Teoria relativistă a câmpului nesimetric". După *reeditarea din 1956* avem şi traducerea în limba română care a fost intitulată "Teoria relativităţii" (v. ref.[63]).

3.4.5 Despre verificarea experimentală a TRR/TRS

Dintre consecinţele cinematice şi dinamice ale TrLS (3.61) (contracţia relativistă a lungimilor pe direcţia de mişcare, dilatarea relativistă a duratelor, o nouă lege de compunere a vitezelor, relativitatea sincronizării, variaţia masei de mişcare cu viteza, etc.) majoritatea au primit confirmări experimentale prin: proiectarea relativistă a acceleratoarelor de particule (de ex. sincrotronul), creşterea timpului de viaţă al mezonilor rapizi în comparaţie cu cel al mezonilor lenţi, creşterea masei de mişcare a particulelor rapide în. acceleratoare, eliberarea energiei nucleare (în reactoarele nucleare ale centralelor nuclearoelectrice sau în dispozitivul distructiv numit bombă atomică) etc., toate acestea constituind şi *confirmări experimentale ale* TRR *ca mecanică relativistă.* Una dintre cele mai importante aplicaţii ale TRR şi ale principiilor sale este dată de *acceleratoarele de particule*, ca *aparate experimentale de investigaţie* în *fizica energiilor înalte*, aparate proiectate ţinând cont de principiile TRR/TRS, altfel devenind inoperabile. Dilatarea relativistă a duratelor are cea mai recentă confirmare în mişcarea sistemelor satelitare militare ce înconjoară Terra, în principal, în ceea ce este numit *Global Positioning System* (GPS), supraveghind navigaţia sateliţilor artificiali.

3.4.6 Despre conţinutul teoriei relativităţii generale/generalizate (TRG). Spre o teorie a relativităţii unificate

Teoria relativităţii generale/generalizate (TRG) a fost elaborată singular de Einstein între 1907-1917 şi urmăreşte *extinderea principiului relativităţii einsteiniene* (PRE), la toate referenţialele (inerţiale sau neinerţiale) şi la toate fenomenele fizice cunoscute inclusiv la cele gravitaţionale. La baza TRG, ca teorie generală a gravitaţiei, stă, alături de PRE, *principiul echivalenţei masei inerţiale cu masa gravifică*, afirmând că: <Un referenţial neinerţial este echivalent cu un anumit câmp gravitaţional>. Matematic, spaţiul {x,y,z} este unit cu timpul {t} într-o formă pătratică riemanniană cuadridimensională, rezultând o *lege generală a inerţiei.* În această formă pătratică sunt cuprinse într-o *singură exprimare matematică atât fenomenele de inerţie cât şi cele de gravitaţie.* Astfel, concepte din TRR/TRS precum referenţial, eveniment relativist, masă inerţială (de mişcare), spaţiu şi timp etc sunt implicate în cadrul TRG prin formulări care permit înţelegerea TRG unificând fenomenele inerţial-gravitaţionale. TRG a primit confirmări experimentale, între care avansul periheliului planetei Mercur, devierea razelor de lumină în apropierea unor corpuri cu mase foarte mari, deplasarea spre roşu a liniilor spectrale emise de un corp cu masă gravifică, sunt cele mai cunoscute.

O *teorie a relativităţii unificate* desemnează o teorie cuantică a gravitaţiei, în care *conceptul Hawking de gaură neagră cuantică* (microscopică) joacă rol esenţial pentru *formularea relativist-cuantică a interacţiunilor gravitaţionale* în vederea a două scopuri fizico-matematice teoretice *de încheiere a întregului edificiu al fizicii teoretice*: (I) unificarea TRG cu TRQ (cuantică) mai ales prin lucările lui St. W. Hawking (n.1942) şi (II) unificarea interacţiunilor gravitaţionale cuantice cu cele din marea unificare (cuprinzând interacţiunile electro-slabă şi tare).

CAP.I PRINCIPIILE TEORIEI RELATIVITĂŢII RESTRÂNSE (TRR) SAU SPECIALE (TRS) [BAZA AXIOMATICĂ A MECANICII RELATIVISTE]

3.5 Precizări metodologice asupra principiilor TRR/TRS ca bază axiomatică a mecanicii relativiste

3.5.0 Esenţa TRR/TRS formulată de Einstein în 1905

O înlăturare a incompatibilităţii mecanicii clasice cu electrodinamica clasică poate constitui tocmai *esenţa* TRR, aşa cum rezultă din lucrarea de 30 de pagini a lui Einstein "Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare" publicată în 1905 în "Annalen der Physic" vol. XVII. Astfel, TRR referindu-se la fenomenele mecanice şi electromagnetice ce au loc în referenţiale inerţiale ({RI}) cu trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' de la unul la altul, *esenţa* TRR va consta în *înlocuirea principiului relativităţii galileene* (PRG) cu acele *principii* care vor conduce la compatibilitatea mecanicii clasice cu electrodinamica clasică.

3.5.1 Enumerarea principiilor fundamentale ale TRR/TRS

Spre deosebire de relativitatea galileeană, *relativitatea einsteiniană* se va construi ca o teorie distinctă în forma TRR/TRS, având în bazele sale constructive următoarele trei principii (nu două): (I) *principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor la distanță* (PIVMPI); (II) *principiul relativității einsteiniene* (PRE), la care se adaugă (III) *principiul de corespondență* (PdC) ce va stabili relațiile dintre fizica clasică și fizica relativistă.

3.5.2 Precizare asupra acțiunii metodologice și genezice a TRR/TRS

Conform cu 3.5.1, esența TRR sub aspect metodologic și genezic constă în: (a) înlăturarea ipotezei clasice a propagării instantanee a interacțiunilor și înlocuirea ei cu PIVMPI care ridică *ipoteza relativistă a propagării cu viteză finită a interacțiunilor* la rang de *principiu relativist*; (b) înlocuirea PRG cu PRE, însoțită de (c) înlocuirea transformărilor Galilei cu transformările Lorentz speciale. Tocmai aceasta constituie *acțiunea epistemologică fundamentală* ridicată la rang de *axiomă gnoseologică* prin lucrarea din 1905 a lui Einstein, înlocuind toate încercările anterioare anului 1905 de a da o posibilă teorie a relativității, prin lucrările precursorilor Fitzgerald, Lorentz și Poincaré, care n-au realizat o modelare teoretică de rangul *metodologic și axiomatic la care se ridică lucrarea* "Asupra electrodinamicii corpurilor în mișcare" a lui Einstein din "Annalen der Physik" XVII (1905).

3.5.3 Organigrama generării fizicii teoretice relativiste (FTR) prin principiile TRR/TRS

În figura 3.2 este redată organigrama generării fizicii teoretice relativiste (FTR) apelând la principiile fundamentale ale TRR/TRS enumerate mai sus ca PIVMPI, PRE și PdC. Din această organigramă, după ce fiecare din cele trei principii va fi enunțat și i se vor arăta consecințele (în paragrafele următoare), se va putea constata că FTR *este o consecință de ansamblu a acțiunilor simultane și corelate ale principiilor fundamentale ale* TRR/TRS *impuse întregii fizici, așa cum cere* PRE. Întreaga organigramă din figura 3.2 are ca punct de plecare raportarea stărilor fizice și a fenomenelor fizice (ca șiruri de stări fizice la momente diferite) față de referențialele inerțiale RI și (RI)', cu trecerea reciprocă de la unul la celălalt, trecere descrisă matematic fie de transformările Galilei (TrG) (3.1)-(3.2), fie de cele Lorentz speciale (TrLS) (3.61). Astfel principiile fundamentale ale TRR ne apar ca principii constructive ale FT, generând FTR.

3.6 Principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor la distanță (PIVMPI)

3.6.0 Precizare genezică

PIVMPI are la bază atât experiențele Michelson-Morley efectuate între anii 1881-1887 utilizând metodele interferometrice pentru măsurarea vitezei luminii în diferite medii în repaus sau în mișcare, cât și rezultatele fizicii teoretice demonstrând nevalabilitatea legii Galilei de compunere a vitezelor în cazul interacțiunilor de natură electromagnetică, ce stau la baza fenomenelor electromagnetice. Concluzia experimentală Michelson-Morley era că *în vid lumina/unda electromagnetică se propagă cu aceeași viteză în toate* {RI} *independent de mișcarea sursei de lumină, a sistemelor fizice reflectătoare (oglinzi) sau a observatorului.*

3.6.1 Enunțuri ale PIVMPI

3.6.1.1 Enunț de sinteză

Enunț de sinteză:<Viteza maximă de propagare/transmitere a interacțiunilor la distanță este numeric egală cu viteza luminii în vid/spațiul liber și este invariantă în raport cu orice referențial inerțial (RI) și în raport cu orice direcție de măsurare>.

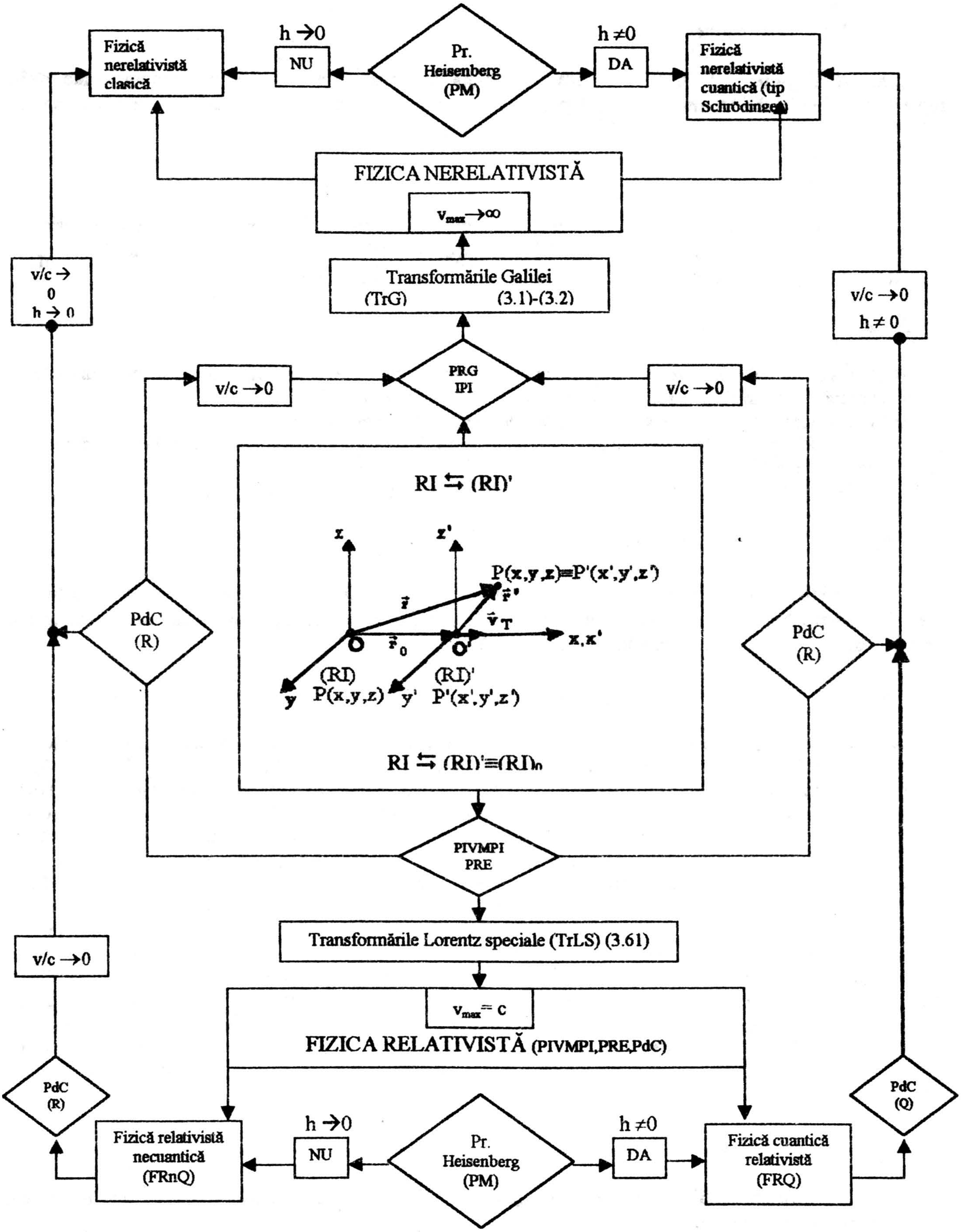


Figura 3.2 Organigrama generării fizicii teoretice relativiste (FTR) apelând la principiile fundamentale ale TRR/TRS (PIVMPI, PRE, PdC) plecând de la raportarea stărilor fizice (şi a fenomenelor fizice) la referenţiale inerţiale reciproce RI ⇆ (RI)'. Indicele (R) sau (Q) din PdC arată PdC cu specific relativist (R) respectiv cuantic (Q) [impune PIVMPI, respectiv principiul Heisenberg al relaţiilor de nedeterminare, ambele faţete ale principiului mai general al măsurabilităţii (PM) în fizică]. Acţiunea principiilor TRR/TRS pentru a genera FTR mai poate fi clarificată prin *figura 3.0* din *Introducere* (h este constanta Planck).

3.6.1.2 Enunțul Einstein (1905)

Enunțul Einstein (1905):<"**Orice rază de lumină se mişcă, într-un sistem de coordonate <<în repaus>>, cu o viteză determinată c, independent de faptul că ea este emisă de un corp în repaus sau în mişcare**">

3.6.1.3 Alt enunț de sinteză

Alt enunț de sinteză:<**În orice referențial aflat în mişcare rectilinie şi uniformă (adică în afara oricărui câmp de forțe), viteza luminii este aceeaşi în toate direcțiile, fiind independentă de starea mecanică de mişcare sau de reapus a sursei de lumină şi având valoare constantă maximă**>

3.6.2 Consecințe ale PIVMPI

(C_1) (einsteiniană) "Teoria relativității înlocuieşte acțiunea instantanee la distanță, sau acțiunea la distanță cu viteză de propagare infinită, prin acțiunea la distanță cu viteza luminii" (1905).

(C_2) TRR ridică PIVMPI la rang de principiu fundamental al întregii fizici.

(C_3) PIVMPI consfințeşte caracterul de transmitere/propagare din apropae în aproape (adică cu viteză finită) a tuturor interacțiunilor.

(C_4) PIVMPI înlătură ipoteza interacțiunilor instantanee la distanță şi toate consecințele ei.

3.6.3 Concluzie fundamentală

<**Principiul invarianței vitezei maxime de propagare la distanță a interacțiunilor (PIVMPI) susține în esență că viteza luminii în vid/spațiul liber este viteza maximă măsurată în lumea noastră fizică având aceeaşi valoare în toate referențialele inerțiale (PRE)**>

3.6.4 PIVMPI fațetă a principiului măsurabilității (PM) din fizică

Viteza de propagare a interacțiunilor fiind o mărime fizică, se va supune *principiului măsurabilității* (PM) (v. partea 1ª a cursului de FT), fapt care, în corelare cu rezultatele experiențelor Michelson-Morley (1881-1887) de comportare a vitezei de propagare (de fază) a undelor electromagnetice luminoase în spațiul liber (vidul electromagnetic), arată că PIVMPI din TRR/TRS este unul din aspectele/fațetele foarte importante ale PM. Astfel, tocmai măsurabilitatea vitezei c (a luminii în spațiul liber), alături de dovedirea experimentală prin observații şi măsurători a valorii $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$ ca valoare maximă în lumea fizică şi dovedirea independenței acestei valori de starea de repaus sau de mişcare a referențialelor inerțiale în care se măsoară, conduc la concluzia că PIVMPI este impus ca principiu (axiomă) în TRR/TRS de principiul fizic general al măsurabilității obiectelor şi fenomenelor fizice. Este tocmai ceea cea făcut Einstein prin TRR/TRS. Tot în sfera, PM, se încadrează şi cele mai recente experiențe de măsurare a vitezei fotonului, ca particulă cuantică ce poate suferi *efectul cuantic tunel*, efectuate în anii din urmă (1998-1999) la Universitatea Berkeley (California) de către fizicianul american Raymond Chiao. Aceste experiențe ***par să pună în discuție statutul axiomatic al*** PIVMPI, prin "ridicarea" plafonului vitezei maxime peste valoarea $c = (\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2} \cong 3\cdot 10^8$ m/s, datorită efectului tunel. Analiza atentă a acestor experiențe şi interpretarea lor, prin PM cu specificul său din mecanica cuantică, trebuie să țină cont de caracterul probabilistic/statistic fundamental al comportării microparticulelor (particulelor cuantice), inclusiv atunci când suferă efectul cuantic tunel, ***în mecanica cuantică noțiunea/conceptul de viteză pierzându-şi valabilitatea***.

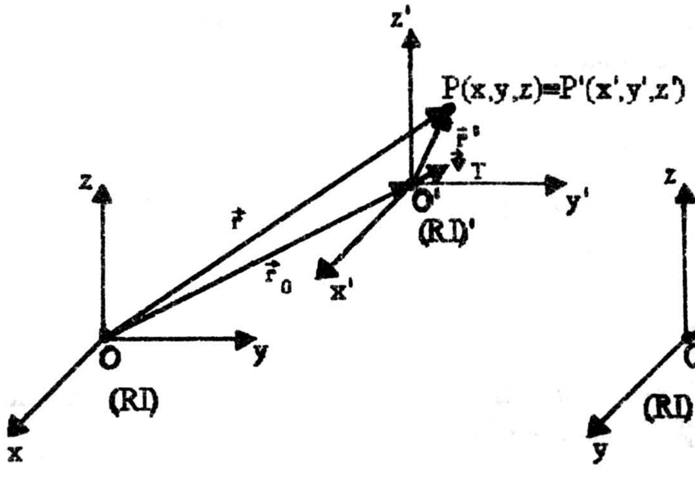
3.7 Principiul relativității einsteiniene (PRE)

3.7.0 Asupra principiului relativității galileene (PRG)/al relativității clasice din mecanică. Transformările Galilei

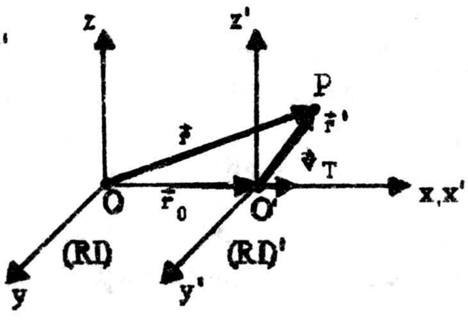
Deoarece *principiul relativității einsteiniene* (PRE) ca *principiu special al relativității* (de aici numele de teoria relativității speciale (TRS)) **reprezintă o generalizare a PRG, este necesar a se specifica faptul că PRG arată că din punct de vedere matematic, *legile mecanicii se formulează la fel în orice* RI, adică sunt invariante la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' descrisă matematic de transformările Galilei (3.1)-(3.2) explicitate după componentele carteziene ca:**

$$(3.14)\quad (a)\ (RI \to (RI)')\ \begin{cases} x' = x - x_0 - (v_T)_x t \\ y' = y - y_0 - (v_T)_y t \\ z' = z - z_0 - (v_T)_z t \\ t' = t \end{cases} \text{ respectiv (b) } ((RI)' \to RI)\ \begin{cases} x = x_0 + x' + (v_T)_x t' \\ y = y_0 + y' + (v_T)_y t' \\ z = z_0 + z' + (v_T)_z t' \\ t = t' \end{cases}$$

conforme cu figura 3.3(a) care face raportarea mişcării punctului material P la cele două referenţiale inerţiale RI considerat *fix*, respectiv (RI)' în mişcare rectilinie şi uniformă faţă de RI cu $\vec{v}_T$=constant, numită viteză de transport. Cazul special ilustrat în figura 3.3b, când (RI)' se mişcă în lungul axei Ox cu v_T≡const. transformă 3.14 în 3.15, ca transformările Galilei speciale.



(a) cazul general



(b) cazul special

Figura 3.3 Raportarea mişcării lui P la cele două referenţiale inerţiale RI fix şi (RI)' în mişcare rectilinie şi uniformă faţă de RI cu viteza $\vec{v}_T$=const. Rigla aparţinând de RI măsoară coordonatele (x,y,z) la momentul t marcat de ceasornicul ataşat, adică avem P(x,y,z,t) ca eveniment faţă de RI. Rigla aparţinând de (RI)' şi cesornicul ataşat lui (RI)' precizează evenimentul P(x',y',z',t') faţă de (RI)', fiind vorba de acelaşi eveniment fizic marcat de raportări la referenţiale diferite.

Cea mai simplă formă matematică a transformărilor Galilei (3.14) este obţinută atunci când la momentul t_0≡t, RI şi (RI)' coincid, iar (RI)' are $\vec{v}_T \equiv \vec{v}_x \equiv \vec{v}$, adică (RI)' se mişcă în lungul axei Ox, rezultând:

$$(3.15)\quad (a)\begin{cases} x = x' + vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}, \text{ respectiv } \quad (b)\begin{cases} x' = x - vt' \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases},$$

ca *transformările Galilei speciale*.

Această ultimă formă este importantă pentru a putea fi confruntată cu *transformările Lorentz speciale* (TrLS) ce vor fi obţinute în cele ce urmează, după expunerea principiilor TRR/TRS. De asemenea, va servi la înţelegerea aplicării *principiului de corespondenţă* în TRR/TRS. Definiţiile pentru referenţial (R), respectiv pentru referenţialul inerţial (RI) sunt cele date în Partea 1^a (secv. 1.6.4.1 şi 1.6.4.3); la fel şi definiţia pentru *evenimentul nerelativist* (v. secv. 1.6.4.2) (v. ref. 106).

Pentru necesităţi de interpretare fizică, mai detaliem că o altă definiţie pentru RI îl desemnează ca <acel R a cărui mişcare rectilinie şi uniformă nu poate fi pusă în evidenţă prin nici o experienţă fizică din "interiorul lui">. Reamintim că *un referenţial* (R) este dat de: (I) *un sistem de axe de coordonate* (carteziene $O_{x,y,z}$, de exemplu) cu originea O fixată de un corp solid rigid considerat în repaus şi faţă de care se raportează mişcarea unui alt corp numit mobil; (II) o riglă ataşată acestui sistem de axe, de coordonate pentru a măsura poziţia (faţă de originea O) a oricărui punct material aflat în spaţiul sistemului de axe; şi (III) un ceasornic (cronometru) cu care să se marcheze momentele la care se măsoară poziţia faţă de originea O, sau cu care să se măsoare durata scursă în trecerea de la o poziţie la alta. Astfel, faţă de un referenţial (R) şi cu ajutorul acestuia se defineşte *evenimentul nerelativist* ca ansamblul (x,y,z,t) care caracterizează la momentul t poziţia (x,y,z) a unui punct material faţă de originea O a sistemului de axe din (R). Rolul riglei şi ceasornicului/cronometrului în cadrul unui refrenţial (R) este esenţial în materializarea şirului de *stări mecanice* $\{x_i,y_i,z_i,t_i\}$(pentru i oricât de mare) şi în tratarea lui fizico-matematică, atunci când provine din caracterizarea mobilului care îşi schimbă în timp poziţia faţă de originea O a sistemului de axe din (R). Un (R) *este inerţial*, notat RI, atunci când:

(α) fie se mişcă rectiliniu şi uniform faţă de un alt (R) considerat în repaus;

(β) fie este în repaus, ori în mişcare faţă de un alt (RI);

(γ) fie în raport cu el este valabil principiul inerţiei;

(δ) fie dacă în (R) considerat sunt conservate proprietăţile fundamentale ale spaţiului (omogenitatea şi izotropia) şi timpului (uniformitatea).

3.7.1 Enunţ general al PRE

<Toate legile de desfăşurare ale fizicii trebuie astfel formulate astfel încât enunţul lor să fie independent de referenţialul (RI) la care sunt raportate>.

3.7.2 Enunţ specificat al PRE

<Legile fizicii trebuie să aibă formă invariantă faţă de transformările fizico-matematice care fac trecerea reciprocă de la un referenţial inerţial la altul (RI ⇆ (RI)')>.

3.7.3 Enunţ explicitat matematic al PRE necesar generării TRR/TRS

<Legile fizicii trebuie să ramână invariante faţă de *transformările Lorentz speciale*, ce descriu matematic trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'>, pe care îl vom numi şi *enunţul special* al PRE.

3.7.4 Enunţul Einstein (1905) al PRE

<"Legile după care se modifică stările sistemelor fizice nu depind de alegerea sistemului de coordonate, din mulţimea sistemelor de referinţă în translaţie uniformă unul faţă de celălalt, la care se raportează aceste modificări">.

3.7.5 Consecinţe ale PRE

(C_1) Înlocuirea PRG cu PRE conduce la coerenţa tuturor capitolelor fizicii.

(C_2) Legile întregii fizici trebuie să fie invariante faţă de un acelaşi grup de transformări ce face trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'.

(C_3) Corelarea acţiunii gnoseologice/epistemologice a PRE cu cea de acelaşi tip a PIVMPI *impune transformările Lorentz* (faţă de care sunt invariante legile electrodinamicii clasice), *în locul celor Galilei* pentru a înlătura incompatibilităţile mecanicii clasice cu electrodinamica clasică, inclusiv pentru a asigura *caracterul de invariant relativist al vitezei c* a luminii/undei electromagnetice în vid/spaţiul liber.

(C_4) Necesitatea obţinerii fizico-teoretice a transformărilor ce fac trecerea invariantă de la RI la (RI)' şi invers, respectând PRE şi PIVMPI.

3.7.6 Concluzie fundamentală

<PRE afirmă în esenţă că toate referenţialele inerţiale {RI} sunt echivalente în raport cu legile fizicii, nu numai în raport cu legile mecanicii, cum afirmă în esenţă PRG>.

3.7.7 Asupra posibilului enunț al principiului relativității de către Newton în 1687

Există lucrări în literatura științifică (v. de exemplu la Bibliografie, lucrarea nr. 46, p. 68 și nr. 67 la "Isaac Newton") legată direct de TRR/TRS, care afirmă că opera lui Newton conține un enunț al principiului relativității echivalent cu PRE. Aceasta se află în *Corolarul V* din "Axiomele sau legile mișcării", ca parte din "*Philosophiae naturalis principia matematica*" ("Principiile matematice ale filosofiei naturale"), publicată în 1687. *Corolarul V* afirmă: "*Mișcările corpurilor aflate într-un spațiu închis sunt aceleași între ele, fie că acel spațiu se află în repaus, fie că el se mișcă rectiliniu și uniform, fără mișcare circulară*", fiind însoțit de explicația: "Într-o corabie, toate mișcările se întâmplă la fel fie că ea este în stare de repaus, fie că se mișcă uniform în linie dreaptă". Compararea *Corolarului V* cu enunțul Einstein din 3.7.4 justifică posibila generalizare a *Corolarului V*, chiar de către Einstein, la rangul de *principiu newtonian al relativității mecanice*, după cum la fel atât el cât și Poincaré au numit *explicația însoțitoare* a corolarului drept *principiu galilean al relativității mecanice*. De aceea, PRE este un principiu al TRR/TRS și al întregii fizici, nu numai al mecanicii.

3.7.8 Diagramă de acțiune metodologică a TRR/TRS prin PRE

În figura 3.4 se expune *o diagramă de acțiune metodologică* a TRR/TRS prin PRE pentru a genera domeniile FTR elaborate relativist în Partea a 3^a a cursului de FT, rezultând că pentru TRR/TRS propriu-zisă au fost destinate primele patru capitole (0, I, II, III) reprezentând: generalități asupra modelului relativist (MTR) și asupra teoriei relativității (în cap. 0), principiile TRR/TRS (cap. I), transformările Lorentz generale și speciale (cap. II), baza noțional-conceptuală cinematică a TRR/TRS, precum și consecințele cinematice relativiste ale TrLS (3.61) (în cap. III). Conform aceleași diagrame *mecanica relativistă* este expusă în cap. IV și V, cuprinzând *cinematica relativistă cuadrivectorială* a punctului material, respectiv *dinamica relativistă cuadrivectorială*, *elementele de* FTR, *altele decât cele de fizică teoretică newtoniană relativistă fiind desfășurate* în cap. VII-X ca elemente: de mecanică analitică relativistă, de termodinamică relativistă, de electrodinamică relativistă și de teoria câmpurilor Lagrange. Aceeași figură mai servește la ilustrarea efectivă a structurii cursului de FT în întregimea Părții sale a 3^a destinată FTR. Prin corelarea conținutului figurii 3.4 cu cel al figurii 3.0 din *Introducere* se completează acțiunea metodologică a TRR/TRS în generarea domeniilor FTR, ilustrată prin corelarea dintre cele trei subpărți $\{P_3^{(i)},\ (i = \overline{1,3})\}$ ale Părții a 3^a a cursului de FT.

3.8 Principiul de corespondență (PdC) în TRR/TRS

3.8.0 Precizare metodologică

Conform considerațiilor din Partea 1^a a cursului de față în legătură cu cele două *principii constructive fundamentale* în FT (PR și PdC), după PR în forma PRE, particularizarea PdC pentru TRR, devine necesară și fundamentală în elaborarea TRR și a *modelului teoretic relativist* (MTR) pe care îl susține.

3.8.1 Enunțul PdC în TRR

<Relațiile matematice, ce exprimă enunțurile legilor fizice derivate din principiile TRR (PRE și PIVMPI), trebuie astfel *formulate* încât să cuprindă relațiile clasice (nerelativiste) drept cazuri particulare limită, atunci când se face trecerea la limită $v/c \to 0$ ($v \ll c$ sau $c \to \infty$)>.

3.8.2 Consecințe ale PdC în TRR

(C_1) Expresiile matematice clasice (nerelativiste) ce exprimă legile fizicii clasice/nerelativiste, la $v \ll c$, reprezintă o primă aproximație-cea nerelativistă-, a expresiilor matematice relativiste.

(C_2) TRR nu înlătură relațiile matematice ale fizicii clasice nerelativiste, ci le precizează domeniul de valabilitate.

(C_3) Transformările Lorentz speciale au drept limită nerelativistă ($v << c$) transformările Galilei, când $v/c \to 0$.

(C_4) Legea relativistă de compunere a vitezelor se transformă în legea nerelativistă (Galilei) de compunere a vitezelor, atunci când se face trecerea $v/c \to 0$, adică atunci când se trece de la fizica relativistă la cea nerelativistă.

(C_5) Toate consecințele relativiste cinematice și dinamice ale transformărilor Lorentz vor trebui să conducă la limita lor nerelativistă corespunzătoare.

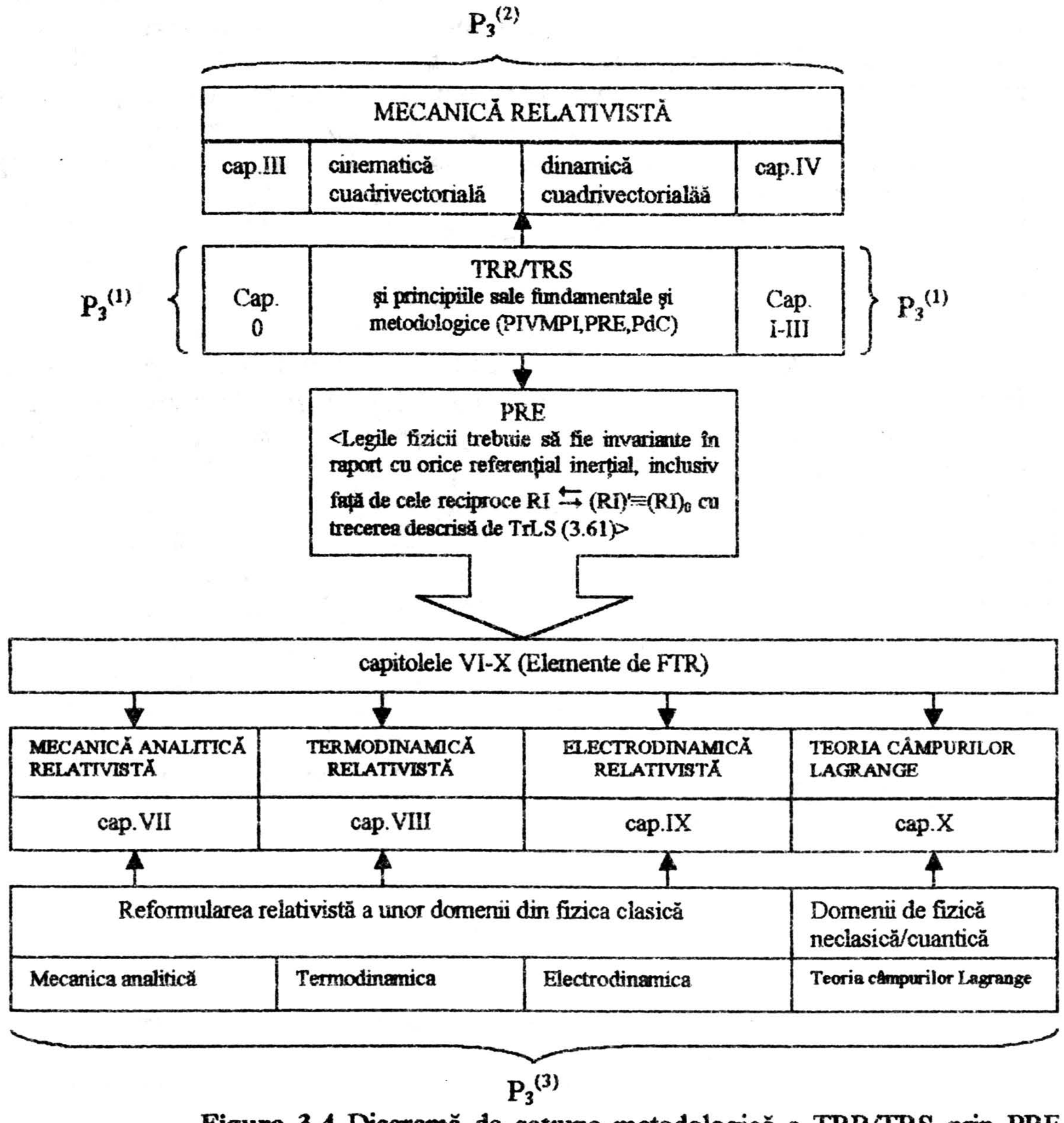


Figura 3.4 Diagramă de acțiune metodologică a TRR/TRS prin PRE pentru a genera domeniile FTR elaborate relativist-restrâns în Partea a 3^a a cursului de FT. Pentru TRR/TRS propriu-zisă au fost destinate cap.0, I,II și III; pentru mecanica relativistă cap.III (cinematica relativistă cuadrivectorială) și cap.IV (dinamica relativistă cuadrivectorială), iar pentru elementele FTR patru capitole VII-X, după unul de considerații generale și de prezentare a posibilităților de reformulare relativistă a unor domenii de fizică, clasică și neclasică. Desemnările prin $P_3^{(i)}$ $(i=\overline{1,3})$ localizează fiecare din subpărțile *FIZICII TEORETICE RELATIVISTE* ce constituie Partea a 3^a a cursului de FT. A se corela *figura 3.4* cu conținutul *figurii 3.0* din *Introducere*.

3.8.3 Concluzie fundamentală

<Principiul de corespondență (PdC) în TRR reglează construirea axiomatică a MTR și a teoriei sale, conform respectării valabilității *mecanicii clasice* în limitele vitezelor mici în comparație cu viteza c a luminii în vid/spațiul liber, și conform înlăturării incompatibilităților ei cu electrodinamica clasică, incompatibilități care au impus PIVMPI și PRE ca principii ale TRR>.

3.8.4 Remarcă asupra acțiunii metodologice a principiilor TRR/TRS prin organigrama din fig. 3.2

După enunțarea principiilor TRR/TRS și după precizarea *consecințelor* în ultimele trei paragrafe 3.6-3.8, funcționarea metodologică a TRR/TRS prin principiile sale (PIVMPI, PRE și PdC) devine explicită în *organigrama din* figura 3.2, care arată modul cum PRE corelat cu PIVMPI generează fizică teoretică relativistă (FTR), generarea fiind controlată de PdC. Analiza figurii 3.2 mai arată că acțiunea PIVMPI ca fațetă a principiului măsurabilității (PM) este simultană cu o altă fațetă a PM, cea impusă ca principiu fundamental *în mecanica cuantică* de relațiile Heisenberg de nedeterminare (incertitudine). Acțiunea PIVMPI simultană cu cea a principiului Heisenberg al relațiilor de nedeterminare (incertitudine) generează mecanica cuantică relativistă ca parte a FTR. Această parte a FTR va fi inclusă în partea a 5^a a cursului nostru de FT (în volumul III)

CAP.II TRANSFORMĂRILE LORENTZ GENERALE ȘI SPECIALE

3.9 Considerații generale și precizări asupra transformărilor Lorentz. Eveniment fizic. Eveniment fizic relativist

3.9.0 Considerații generale asupra transformărilor Lorentz

Conform *principiilor TRR și a consecințelor lor* expuse în cap.1 (paragrafele 3.5-3.8), baza fizico-matematică funcțională a MTR și a teoriei sale ca TRR/TRS, este asigurată de un grup de transformări matematice, care fac trecerea de la un RI la un (RI)', cel de-al doilea referențial deplasându-se cu viteza de transport $\bar{v}_T$ față de primul. Acest grup de transformări trebuie să lase invariante ecuațiile electrodinamicii clasice și în particular ecuația generală de propagare a undelor electromagnetice (3.4), atunci când se face trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'. În esență, invarianța ecuației (3.4), cum s-a precizat în subparagraful 3.2.3, este echivalentă cu invarianța operatorului D'Alembert (3.10), exprimat în *forma matematică simetrică* (3.13). Deducerea transformărilor Lorentz generale se va face prin căutarea acelui grup de transformări care lasă invariantă forma matematică (3.13) a operatorului D'Alembert ce acționează în ecuația de undă asupra funcției de undă $\Psi(\bar{r},t)$. Relațiile Lorentz speciale vor fi obținute din cele generale, apelând la *rotațiile generalizate din spațiul cuadridimensional* $\mathcal{S}_M$ (Minkowski) și la similitudinea lor cu rotațiile din spațiul euclidian. După ce relațiile Lorentz speciale vor fi stabilite, se va trece la *obținerea consecințelor lor cinematice,* ca și la *elaborarea cinematicii relativiste a punctului material liber* (cap. IV). Consecințele dinamice ale transformărilor Lorentz speciale vor fi expuse în *dinamica relativistă a punctului material liber* (cap. V). Deși lucrările lui George Francis Fitzgerald (1851-1901) din 1883 legate de explicarea rezultatelor experienței Michelson din 1881 l-au condus la introducerea ipotezei *contracției relativiste a lungimilor* (în lungul direcției de mișcare) (independent de H. A. Lorentz), vom utiliza conceptul de *transformări Lorentz speciale* (TrLS) în locul celui de *transformări Lorentz-Fitzgerald,* deoarece Lorentz a utilizat încă din 1892 ipoteza contracției Fitzgerald pentru elaborarea efectivă a electrodinamicii mediilor în mișcare, utilizată la rândul lui și de Einstein în elaborarea TRR/TRS (1905).

3.9.1 Precizare metodologică 1. Trecerea $e_{RI} \leftrightarrows e_{(RI)'} \Leftrightarrow (x,y,z,t) \leftrightarrows (x',y',z',t')$

Relațiile de transformare Lorentz sunt relațiile cu ajutorul cărora se realizează *trecerea reciprocă de la coordonatele spațio-temporale* (x,y,z,t) ale unui *eveniment* (e_{RI}) *în raport cu* RI, *la coordonatele* *spaţio-temporale* (x',y',z',t') *ale aceluiaşi eveniment în raport cu* (RI)', şi invers, în concordanţă cu principiile TRR, adică transformările Lorentz mijlocesc *şirul de treceri reciproce din* TRR:

(3.16) (a) RI $\leftrightarrows$ (RI)' $\Leftrightarrow$ (b) $e_{RI} \leftrightarrows e_{(RI)'}$ $\Leftrightarrow$ (c) (x,y,z,t) $\leftrightarrows$ (x',y',z',t').

3.9.2 Precizare metodologică 2. Evenimentul fizic relativist ($e_r \equiv (x,y,z,ict)$)

Cazul particular al varianţei/neinvarianţei ecuaţiei generale de propagare (3.4) a undelor electromagnetice faţă de *transformările Galieli* (3.1-3.2) sau (3.14) (*transformările clasice neralativiste*), impune utilizarea *coordonatelor generalizate relativist*:

(3.17) $\{q_j \equiv x_j;\ (j=\overline{1,4})\} \equiv \{x_1,x_2,x_3,x_4\} \equiv \{x,y,z,x_4=ict\}$,

care pun mai bine în evidenţă simetria matematică a ecuaţiei (3.4), conducând la forma foarte simplă (3.13) a operatorului D'Alembert din ecuaţie.

Definiţie. <Numim *eveniment fizic relativist* setul de coordonate generalizate relativist (3.17), care include coordonatele reale (x,y,z) şi coordonata imaginară (ict), cu modulul având caracter de lungime>. Se observă că în (3.17) avem coordonata generalizată.

(3.18) $q_4 \equiv x_4 = ict$ cu $i = \sqrt{-1}$ ca unitate imaginară şi

(3.19) $\dim|q_4| \equiv \dim|x_4| = \dim L \equiv (1,0,0,0,0,0,0)$ în SI, care conduce la

(3.20) $<|q_4|>_{SI} \equiv <|x_4|>_{SI} = 1$ metru. De asemenea, că un *eveniment fizic relativist*

(3.21) $e_R \equiv \{q_j\} \equiv \{x_j\}\ (j=\overline{1,4})$ se obţine dintr-un eveniment fizic nerelativist $e \equiv (x,y,z,t)$ printr-o *simplă multiplicare* cu ic a lui t. Această multiplicare transformă şirul (3.16) într-o formă în care trecerile (b) şi (c) trebuie înlocuite prin:

(3.22) (b') $(e_r)_{RI} \leftrightarrows (e_r)_{(RI)'}$ $\Leftrightarrow$ (c') (x,y,z,ict) $\leftrightarrows$ (x',y',z',ict') sau, mai general, prin:

(3.23) $\{q_j \equiv x_j\} \leftrightarrows \{q_j' \equiv x_j'\}\ (j=\overline{1,4})$, cu $q_4 \equiv x_4 = ict$ şi $q_4' \equiv x_4' = ict'$.

3.9.3 Concluzie fundamentală

Conform cu (3.17)-(3.22) transformările Lorentz generale operează într-un spaţiu cuadridimensional pe care îl numim *spaţiul* TRR şi îl vom preciza în continuare.

3.10 Spaţiul TRR(/TRS)/Universul spaţiu-timp/Spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$)

3.10.0 Definiţie

<Numim *spaţiul* TRR sau *univers spaţiu-timp* spaţiul generalizat cuadridimensional, care este generat de totalitatea evenimentelor fizice relativiste matematic posibile, date prin *coordonatele generalizate relativist* (3.17)>. Acest spaţiu se mai numeşte spaţiu Minkowski ($\mathcal{S}_M$) după numele matematicianului care l-a introdus întâi, pentru a da o fundamentare fizico-matematică (geometrică) riguroasă teoriei relativităţii.

3.10.1 Spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$) şi metrica sa. Linia de univers în $\mathcal{S}_M$

În $\mathcal{S}_M$, axele de coordonate sunt reprezentate de cele patru coordonate definite în (3.17), cu specificările (3.18)-(3.20) asupra celei de-a patra dimensiuni. *Metrica spaţiului* $\mathcal{S}_M$ este dată prin relaţia:

(3.24) $ds^2 = c^2(dt)^2-[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2] \equiv -\sum_{j=1}^{4}(dx_j)^2$, în care ds are rol de element de arc relativist sau element de drum, sau element de *linie de univers*, deoarece *traiectoria unui punct figurativ* $\mathcal{P}$ în $\mathcal{S}_M$, reprezentând mişcarea relativistă a unui punct material P, *se numeşte linie de univers*.

3.10.2 **Structura spațiului $\mathcal{S}_M$. Subspațiile spațiului $\mathcal{S}_M$ (universului spațiu-timp)**

Conform structurii setului (3.17) de coordonate generalizate relativist, *universul spațiu-timp*/**spațiul $\mathcal{S}_M$ este un produs tensorial de tipul:**

(3.7) $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_{x,y,z} \otimes \mathcal{S}_{ict}$

între *subspațiul* $S_{x,y,z}$ *ca spațiul fizic dimensional real, și subspațiul imaginar temporal unidimensional.* Cele două subspații sunt reciproc ortogonale, fapt asigurat de unitatea imaginară $i=\sqrt{-1}$. Această structură a fost impusă de simetria ecuației (3.4) și a operatorului său (3.13)

3.10.3 Intervalul relativist Δ s dintre două evenimente relativiste și tipurile sale. Distanța în $\mathcal{S}_M$ (distanța Minkowski)

Utilizând metrica relativistă (3.24) din $\mathcal{S}_M$, se poate *defini matematic intervalul reaitivist* Δs dintre două evenimente relativiste raportate la același RI, conform relației:

(3.25) $e_r^{(1)}\equiv\{q_j^{(1)}\equiv x_j^{(1)}\}$ $(j=\overline{1,4})$ și $e_r^{(2)}\equiv\{q_j^{(2)}\equiv x_j^{(2)}\}$ $(j=\overline{1,4})$

ca fiind:

(3.26) $s^2 = -\sum_{j=1}^{4}(\Delta x_j)^2 \equiv c^2(t^{(2)}-t^{(1)})^2-[(x^{(2)}-x^{(1)})^2+(y^{(2)}-y^{(1)})^2+(z^{(2)}-z^{(1)})^2]\equiv c^2(\Delta t)^2-l^2$,

în care apare distanța tridimensională l.

Diferențial, acest interval relativist se exprimă prin (3.24) și ne permite să remarcăm două tipuri de intervale relativiste s (sau ds ca interval relativist elementar):

(I) *intervale relativiste temporale,* ca fiind cele cu (3.27(a)) $c(t^{(2)}-t^{(1)}) > l$ (când $s^2 > 0$)/sau cele cu (3.27(a')) $cdt > dl$, *respectiv*

(II) *intervale relativiste spațiale,* ca fiind cele cu (3.27(b)) $c(t^{(2)}-t^{(1)}) < l$ (când $s^2 < 0$)/sau cele cu (3.27(b')) $cdt < dl$.

Această departajare a intervalelor va fi utilă în discutarea simultaneității evenimentelor, dependentă de tipul intervalului relativist ce separă evenimentele considerate. Intervalul relativist definit prin (3.26) sau prin (3.24) exprimă *distanța cuadridimensională/distanța Minkowski* dintre două puncte ale spațiului $\mathcal{S}_M$, care puncte sunt tocmai evenimentele relativiste luate în considerare în raport cu același RI. Atât în (3.24) cât și în (3.26) semnul (-) din fața sumei este impus de principiul relativist al invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor la distanță (PIVMPI).

3.10.4 Concluzie fundamentală

<Fundamentarea fizico-matematică (geometrică) a TRR cere generalizarea relativistă (3.17) a evenimentelor fizice *ce satisfac simetria* ecuației generale de propagare (3.4), asigurându-i invarianța față de un grup de transformări generale numite transformările Lorentz generale, care operează într-un spațiu cuadridimensional al TRR numit *universul spațiu-timp* sau spațiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$)>.

3.11 Stabilirea transformărilor Lorentz generale (TrLG)

3.11.0 Precizare metodologică. Acțiunea PRE asigurând invarianța ecuației generale de propagare (3.4)

Cu un eveniment relativist $(e_r)_{RI}\equiv(x,y,z,ict)\equiv\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ raportat la un RI considerat fix și $(e_r)_{RI'}\equiv(x',y',z',ict')$, același eveniment relativist, dar raportat la (RI)' (ce se mișcă cu viteza constantă $\vec{v}_T$ față de RI), stabilirea *transformărilor Lorentz generale* se transformă într-o *problemă de conservare a formei matematice a oricăreia din legile fundamentale ale electrodinamicii clasice*, atunci când se face trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)', ca o consecință directă a acțiunii PRE enunțat în paragraful 3.7. Alegerea *invarianței ecuației generale de propagare* (3.4) este cea mai potrivită pentru scopul propus, mai ales prin modul cum coordonatele generalizate relativist (3.17) îi pun în evidenţă simetria, dar şi prin implicarea PIVMPI asigurată de prezenţa invariantului relativist $c=1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ stabilit pe cale teoretică şi experimentală. De asemenea pentru eleganţa matematică a demonstraţiei când se utilizează forma (3.9) cu operatorul (3.13).

3.11.1 Enunţul problemei stabilirii transformărilor Lorentz generale (TrLG) prin invarianţa ecuaţiei (3.4) şi a operatorului său D'Alembert (3.13)

3.11.1.1Enunţ 1

<Dându-se un eveniment relativist raportat la referenţialele inerţiale RI considerat fix şi (RI)' în mişcare cu $\bar{v}_T$=const. faţă de RI, să se stabilească grupul transformărilor generale care leagă între ele coordonatele relativiste (x,y,z,ict) $\leftrightarrows$ (x',y',z',ict') corespunzătoare aceluiaşi eveniment relativist, atunci când se face trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'>.

3.11.1.2Enunţ 2

<Să se stabilească grupul transformărilor generale care, legând coordonatele unui eveniment relativist raportat la un RI de coordonatele aceluiaşi eveniment raportat la (RI)' în mişcare faţă de RI cu viteza $\bar{v}_T$=const., lasă invariantă forma ecuaţiei de propagare (3.9) raportată la cele două referenţiale>.

3.11.1.3Enunţ 3

<Să se stabilească grupul transformărilor generale care satisface ecuaţia: (3.28) $\square_{RI} = \square_{(RI)'}$ explictată prin operatorul D'Alembert (3.10) ca:

$$(3.29)\quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_4^{\,2}} \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}_k} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}_1}+\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}_2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}_3}+\frac{\partial^2}{\partial x'^{\,2}_4} >.$$

3.11.1.4Observaţie

Ultimele două enunţuri de mai sus sunt cazuri particulare ale enunţului întâi, căruia prin enunţurile suplimentare i s-a făcut precizarea rezolvării, ca urmare a implicării PRE, particularizată la un caz concret de lege fizică. Enunţul al treilea este cel la care se reduce problema TrLG.

3.11.2 Invarianţa operatorului D'Alembert şi TrLG

3.11.2.1Enunţ

<Invarianţa (3.29') $\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x'^2_k}$ este asigurată de existenţa unui grup de *transformări generale*

(3.30) (a) $\{x_k'=x_k'(\{x_j\}\ (j=\overline{1,4}))\equiv x_k'(x_1,x_2,x_3,x_4)\}\ (k=\overline{1,4})$ *în forma directă*, respectiv

(3.30) (b) $\{x_j=x_j(\{x_k'\}\ (k=\overline{1,4}))\equiv x_j(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)\}\ (j=\overline{1,4})$ *în forma inversă*, care descriu trecerea reciprocă $\{x_j\} \leftrightarrows \{x_k\}$ $(j,k=\overline{1,4})$ când se face trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'>. Acest grup de transfromări îl vom numi *grupul transformărilor Lorentz generale* (TrLG) directe, respectiv inverse.

3.11.2.2Condiţiile pe care trebuie să le satisfacă TrLG (3.30)

Deducerea efectivă a TrLG (3.30) până la forma lor explicită mai presupune impunerea unor condiţii asupra dependenţelor implicite (3.30) legate de respectarea: (a) *simetriei* operatorului D'Alembert; (b) *corespondenţei biunivoce* între coordonatele aceluiaşi eveniment relativist raportat la RI, respectiv la (RI)'; şi (c) *echivalenţei referenţialelor inerţiale* impusă de PRE. Cele trei condiţii ce rezultă pe rând din cerinţele (a)-(c) sunt: (C_1) *condiţia de simetrie*, (C_2) *condiţia de linearitate*, respectiv (C_3) *condiţia de reciprocitate*.

3.11.2.3Explicitarea condițiilor $\{c_i\}$ din 3.11.2.2

(C_1) Simetria TrLG este asigurată dacă (3.29') se exprimă prin *identitatea operatorială*:

(3.31) (a) $\frac{\partial}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_k}$ (pentru RI → (RI)') respectiv (a') $\frac{\partial}{\partial x'_k} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial x_j}$ (pentru (RI)' → RI), evidentă dacă se procedează la "simplificările" formale sugerate de membrul al doilea.

(C_2) *Liniaritatea* TrLG este asigurată dacă se impune *condiția de anulare*:

(3.31) (b) $\frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_j^2}=0$ (RI → (RI)'), respectiv (b') $\frac{\partial^2 x_j}{\partial x'^2_k}=0$ ((RI)' → RI), care nu va permite termeni de ordinul doi în dependențele (3.30) ce exprimă formele implicite ale TrLG.

(C_3) *Reciprocitatea* TrLG impusă de echivalența referențialelor, se exprimă matematic prin

(3.31) (c) $\frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}$ (RI → (RI)'), respectiv (c') $\frac{\partial x_j}{\partial x'_k} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}$ ((RI)' → RI).

3.11.3 Enunțul general al problemei TrLG

Din 3.11.2 se sintetizează următorul *enunț general al problemei* TrLG *de rezolvat*: <Să se stabilească/deducă acele transformări generale (3.30) ce fac trecerea reciprocă RI ⇆.(RI)' și îndeplinesc condițiile (3.31) de *simetrie (a), de linearitate (b) și respectiv de reciprocitate (c)* impuse de invarianța (3.29') cerută de PRE>.

3.11.4 Deducerea efectivă a TrLG

3.11.4.1Justficarea fizico-matematică a condițiilor (3.31) ≡ Demonstrarea invarianței (3.29') impusă de PRE

Observând că deducerea efectivă a TrLG explicite trebuie să fie precedată de justificarea fizico-matematică a condițiilor (3.31) (a,b,c) de impus TrLG (3.30) în această deducere, mai remarcăm că *acțiunea* PRE *în deducerea* TrLG *explicite* este tocmai *impunerea cerinței invarianței* (3.29'), obligând la demonstrarea acestei invarianțe, ca justificare fizico-matematică a condițiilor (3.31). *Demonstrația cerută are pașii*:

(d_1) transcrierea membrului întâi al (3.29') în formele succesive:

$$(3.32)\ \Box_{RI} \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}} = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_k}\right)$$

cu remarcarea utilizării *condiției de simetrie* (3.31) (a) în locul lui $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ultim din suma a doua;

(d_2) efectuarea derivării termen cu termen în suma a treia din (3.32), exprimată în final ca:

$$(3.33)\ \Box_{RI} = \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_j^{\,2}}\frac{\partial}{\partial x'_k} + \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x'_k}\right) \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x'_k},$$

cu *impunerea condiției de linearitate* a TrLG (3.30) explicitată ca (3.31) (b), care anulează întâiul termen al parantezei (3.33);

(d_3) reorganizarea termenilor din ultima sumă din (3.33) în forma:

$$(3.34)\ \Box_{RI} \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x'_k} \equiv \sum \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum \frac{\partial x_j}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x'_k} = \sum \frac{\partial}{\partial x'_k}\frac{\partial}{\partial x'_k} \equiv \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x'^2_k} \equiv \Box_{(RI)'},$$

adică în suma din termenul al treilea al succesiunii se utilizează *condiția de reciprocitate* (3.31)(c) și apoi se efectuează o "simplificare" în termenul al patrulea al succesiunii făcând să dispară ∂x_j;

(d_4) confruntarea începutului de pas (d_1) $\Box_{RI} \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^{\,2}}$ cu sfârșitul de pas (d_3), care încheie demonstrația existenței relației (3.29'), astfel rezultând și invarianța (3.28)/(3.29'), care impune și invarianța ecuației (3.4) față de TrLG implicite (3.30). Drept concluzie, TrLG (3.30) implicite trebuie să satisfacă relațiile (3.31) (a,b,c), *impuse ca și condiții de simetrie*, *liniaritate*, respectiv *reciprocitate*, prin acțiunea PRE implicată *în demonstrarea* invarianței (3.28)-(3.29').

Observație: Drumul invers $\Box_{(RI)'} = \Box_{RI}$ este un simplu exercițiu urmând (d_1) → (d_4) cu modificările de indici și primări corespunzătoare.

3.11.4.2 Deducerea efectivă a TrLG explicite

(p_1) Se postulează existența transformărilor implicite (3.30)(a) pentru cazul TrLG directe, respectiv (3.30)(b) pentru cele inverse.

(p_2) TrLG (3.30)(a) $\{x_k'=x_k'(\{x_j\}\ (j=\overline{1,4}))\equiv x_k'(x_1,x_2,x_3,x_4)\}$ $(k=\overline{1,4})$ se explicitează prin *condiția de linearitate* (3.31) (b) $\frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_j^2}=0$, aplicând *două integrări succesive* acestei ultime relații, încât avem:

$$(3.35)\ \frac{\partial x'_k}{\partial x_j}=\text{const}=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}\ \text{și}\ (3.36)\ dx'_k=\left(\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}\right)dx_j,\ \text{respectiv}$$

$$(3.37)\ \int dx'_k = x'_k=\int\left(\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}\right)dx_j=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}x_j+C_k\ \ (k=\overline{1,4}).$$

(p_3) *Forma cea mai generală a* TrLG este (3.38) $\left\{\alpha'_k=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}x_j+C'_k\right\}$ $(k=\overline{1,4})$ ca TrLG *directe* pentru trecerea RI ⇆ (RI)'.

(p_4) Pentru trecerea inversă (RI)' ⇆ RI, (3.38) sugerează forma:

(3.39) $\left\{x_j=\sum_{k=1}^{4}\alpha'_{jk}x'_k+C_j\right\}$ $(j=\overline{1,4})$, ușor de obținut din (3.31)(b') dacă se face dubla integrare conformă cu cea din (p_2).

(p_5) Aplicând *condiția de reciprocitate* (3.31)(c) și (c'), *coeficienții* α'_{jk} ai TrLG inverse (3.39) devin egali cu α_{kj} ai TrLG directe (3.38), adică avem (3.40) $\alpha'_{jk}=\alpha_{kj}$, încât TrLG *inverse au forma finală*:

$$(3.41)\quad \left\{x_j=\sum_{k=1}^{4}\alpha_{kj}x'_k+C_j\right\}\ (j=\overline{1,4})$$

(p_6) *Concluzie finală*: <*Transformările Lorentz generale* (TrLG) (3.30)(a) și (b) implicite au *formele finale explicite*:

$$(3.42)\quad \begin{aligned}&(a)\left\{x'_k=\sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}x_j+C'_k\right\}(k=\overline{1,4})\ \text{pentru TrLG directe (RI} \to \text{(RI)'), respectiv}\\&(b)\left\{x_j=\sum_{k=1}^{4}\alpha_{kj}x'_k+C_j\right\}(j=\overline{1,4})\ \text{pentru TrLG inverse ((RI)'} \to \text{RI)}\end{aligned}$$

3.11.5 Forma matriceală a TrLG

3.11.5.1 Forma matriceală generală

Ținând cont că în (3.42) avem $\{x'_k\}=\{x'_1,x'_2,x'_3,x'_4\}\equiv\{x',z',y',ict'\}$ și $\{x_j\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\equiv\{x,z,y,ict\}$, TrLG scrise prin elementele de matrice se pot ordona în forma matriceală:

$$(3.43)\quad \begin{aligned}&(a)\ (\tilde{x}'_k)\equiv\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{41}&\alpha_{42}&\alpha_{43}&\alpha_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{pmatrix}\quad \text{și}\\&(b)\ (\tilde{x}_j)\equiv\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha'_{11}&\alpha'_{12}&\alpha'_{13}&\alpha'_{14}\\\alpha'_{21}&\alpha'_{22}&\alpha'_{23}&\alpha'_{24}\\\alpha'_{31}&\alpha'_{32}&\alpha'_{33}&\alpha'_{34}\\\alpha'_{41}&\alpha'_{42}&\alpha'_{43}&\alpha'_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\x'_3\\x'_4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}C'_1\\C'_2\\C'_3\\C'_4\end{pmatrix},\end{aligned}$$

ca forme matriceale generale ale TrLG.

3.11.5.2Matricea ($\breve{\mathcal{L}}$) şi TrLG

Explicitarea *coordonatelor generalizate relativist* $\{x'_k\}$ şi $\{x_j\}$ $(k, j=\overline{1,4})$ conduce la expresiile:

$$(3.44)\ \ (a)\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & \alpha_{xt} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & \alpha_{yt} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & \alpha_{zt} \\ \alpha_{tx} & \alpha_{ty} & \alpha_{tz} & \alpha_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} \equiv (\breve{\mathcal{L}}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix}$$

, dacă considerăm matricea ultimă cu elementele nule (sau nenule caz în care le includem în matricea generală) şi notăm *matricea coeficienţilor* TrLG directe ca:

$$(3.45)\ \ (a)\quad (\breve{\mathcal{L}}) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & \alpha_{xt} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & \alpha_{yt} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & \alpha_{zt} \\ \alpha_{tx} & \alpha_{ty} & \alpha_{tz} & \alpha_{tt} \end{pmatrix} \equiv (\breve{\alpha}_{kj}) \text{ respectiv}$$

$$(3.44)\ \ (b)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = (\breve{\mathcal{L}})^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} \quad \text{cu} \quad (3.45)\ (b)\quad (\breve{\mathcal{L}})^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & \alpha_{xt} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & \alpha_{yt} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & \alpha_{zt} \\ \alpha_{tx} & \alpha_{ty} & \alpha_{tz} & \alpha_{tt} \end{pmatrix}^{-1}$$

ca *matricea inversă* a matricei ($\breve{\mathcal{L}}$) (care admite inversă, adică este nesingulară), calculabilă prin algoritmul de transpunere a matricei directe şi calculare a elementelor prin intermediul minorilor transpusei. Pentru a scrie (3.44)(b), am considerat matricea ultimă din (3.43)(b) ca având toate elementele nule. Anularea aplicată mai sus este posibil de justificat fizic în cazul *transformărilor Lorentz speciale* (TrLS), *care sunt cazuri particulare ale* TrLG (3.44)(a) şi (b). Anularea amintită în cazul TrLS echivalează cu considerarea referenţialelor RI şi (RI)' la momentul inţial (t_0=0) cu originile coincizând (O=O') (v. fig. 3.3(b)).

3.11.5.3Concluzie fundamentală

<Transformările Lorentz generale (TrLG) directe şi inverse au forma matriceală generală (3.43)-(3.44)(a) şi (b) cu *matricea Lorentz generală* explicitată prin (3.45)(a) ca *matrice directă*, între aceste transformări generale existând, ca un caz particular, *transformările Lorentz speciale* (TrLS) ce fac trecerea $\{x_j\} \leftrightarrows \{x'_k\}$ cu $(k, j=\overline{1,4})$ când (RI)' se deplasează cu $\vec{v}_T \equiv \vec{v}_x$ = const. paralel cu axa Ox a sistemului de axe din RI>.

3.11.6 Proprietăţile TrLG şi ale matricelor Lorentz generale ($\breve{\mathcal{L}}$) şi ($\breve{\mathcal{L}}$)$^{-1}$

3.11.6.1Proprietăţile TrLG (3.30)

Asupra TrLG au fost impuse condiţiile (3.31) *de simetrie, liniaritate,* respectiv *reciprocitate*, pe care le îndeplinesc elementele fie $\{x'_k\}$ $(k=\overline{1,4})$ dependente fiecare de setul $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ pentru TrLG directe, fie elementele $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ dependente fiecare de setul $\{x'_k\}$ $(k=\overline{1,4})$ pentru TrLG inverse. Deoarece TrLG (3.42) explicite au fost obţinute din TrLG (3.30) implicite, tocmai prin satisfacerea proprietăţilor/condiţiilor (3.31), rezultă că TrLG (3.42) la rândul lor satisfac/au aceleaşi proprietăţi *de simetrie, liniaritate şi reciprocitate.*

3.11.6.2Proprietățile transformărilor matriceale Lorentz generale și ale matricelor Lorentz generale $\breve{\mathcal{L}}$ și $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}$

Conform afirmațiilor din 3.11.6.1, *elementele formelor matriceale* (3.43) și (3.44) *ca și ale matricilor* $(\breve{\mathcal{L}})$ (3.45)(a) *respectiv* $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}$ *trebuie să permită aceleași proprietăți* ca și cele ale TrLG (3.42) explicite, respectiv TrLG (3.30) implicite, *atunci când se consideră una sau oricare din* TrLG pe care le conține grupul TrLG exprimate prin *oricare din formele matriceale* (3.43)-(3.44), adică *simetria, liniaritatea și reciprocitatea*. Matricile $(\breve{\mathcal{L}})$ și $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}$ date prin (3.45) sunt fiecare la rândul lor matrici nesingulare, adică admit *inversă*, deoarece *determinantul lor este nenul*, fapt asigurat de PRE *prin invarianța legilor fizicii* față de acele transformări generale ce fac trecerea matematică, de la descrierea unui eveniment fizic relativist raportat la RI, la descrierea aceluiași eveniment raportat la (RI)' și invers RI ⇆ (RI)'.

Una din cele mai importante proprietăți ale TrLG (3.30), (3.42)-(3.44) este că *grupul lor* conține și *transformările Lorentz speciale* (TrLS) ca un caz particular. Acest caz particular a fost obținut de H. A. Lorentz(1833-1928) în lucrările sale legate, pe de o parte de explicarea teoretică a rezultatelor experiențelor Michelson-Morley (1881-1887), pe de alta de dezvolatarea electrodinamicii mediilor în mișcare utilizată de Einstein în elaborarea TRR/TRS prin introducerea axiomatică a principiilor.

3.11.6.3Transformarea Lorentz identică

Unul din cazurile cele mai simple ale $(\breve{\mathcal{L}})$ este obținut când avem (3.46) $(\breve{\mathcal{L}})_I \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ca matricea transformării Lorentz identice*, când $\alpha_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$ și când (3.44)(a) se tranformă în

(3.47) (a) $x'=x+C'_x$, $y'=y+C'_y$, $z'=z+C'_z$ și $ict'=ict+C'_t$ reprezentând translația originii O' a referențialului (RI)' față de originea O a lui RI (în cazul RI → (RI)'), cum la fel putem avea și:

(3.47) (b) $x=x'+C_x$, $y=y'+C_y$, $z=z'+C_z$ și $ict=ict'+C_t$ (în cazul (RI)' → RI) pentru $(\breve{\mathcal{L}})_I^{-1}$. Aceste transformări Lorentz particulare au fost considerate pentru a ilustra semnificația constantelor $\{C'_k\}$, respectiv $\{C_j\}$ $(k, j = \overline{1,4})$ care intră în TrLG (3.42)-(3.43). Deoarece în TRR/TRS translația originii este neinteresantă, considerarea constantelor $\{C'_k\}$ și $\{C_j\}$ ca nule, considerată și precizată la scrierea TrLG (3.44)(a) și (b) se justifică și pe a această cale, cu atât mai bine cu cât *această simplificare* nu afectează generalitatea concluziilor ce vor rezulta din utilizarea TrLG și TrLS.

Cum se va vedea în cele ce urmează, alături de transformarea Lorentz identică (3.46), *grupul* TrLG va conține și *subgrupul rotațiilor* care va evidenția cazul transformărilor Lorentz speciale (TrLS), prin intermediul rotațiilor de unghi complex în spațiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$).

3.11.6.4Aplicație fundamentală a TrLG- Intervalul relativist dintre două evenimente din $\mathcal{S}_M$ (distanța Minkowski) ca invariant Lorentz (sau invariant relativist) la trecerea RI ⇆ (RI)'

(a) *Precizare*

Întreaga geometrie Minkowski este, de fapt, o fizică relativistă ce are la bază conceptul de *distanță Minkowski dintre două puncte* $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$ ale $\mathcal{S}_M$. Cum fiecare punct $\mathcal{P}$ din $\mathcal{S}_M$ reprezintă un eveniment fizic relativist (x,y,z,ict), *distanța Minkowski* dintre $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$ reprezintă intervalul relativist dintre două evenimente reprezentate de $\mathcal{P}_1$ și $\mathcal{P}_2$. Acest *interval relativist* a fost introdus în subparagraful 3.10.3. Îl vom relua, demonstrând că este un *invariant Lorentz (sau invariant relativist) la trecerea* RI ⇆ (RI)', alături de invariantul relativist, deja precizat $c=(\varepsilon_0\mu_0)^{-1/2}$, introdus de PIVMPI.

(b) *Distanța Minkowski/intervalul relativist ca invariant Lorentz* la trecerea RI ⇆ (RI)' (b₁) *Definiție 1* <Numim interval relativist/distanță Minkowski dintre două evenimente raportate la RI, mărimea fizică:

$$(3.48)\ (a)\ s^2 = \sum_{j=1}^{4}\left[-(\Delta x_j)^2\right] = c^2(\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2] \equiv c^2(t_2-t_1)^2-[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2] \equiv c^2(\Delta t)^2 - l^2 \equiv s^2_{RI}$$>.

(b₂) *Definiție 2* <Numim interval relativist/distanță Minkowski dintre două evenimente raportate la (RI)', mărimea fizică:

$$(3.48)\ (b)\ s'^2 = \sum_{k=1}^{4}\left[-(\Delta x'_k)^2\right] = c^2(\Delta t')^2 - [(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2] \equiv c^2(t'_2-t'_1)^2-[(x'_2-x'_1)^2+(y'_2-y'_1)^2+(z'_2-z'_1)^2] \equiv c^2(\Delta t')^2 - l'^2 \equiv s^2_{(RI)'}$$>.

În (3.48)(b) avem aceleași două evenimente ca și cele raportate la RI, de astă dată raportate la (RI)'.

(b₃) Vom demonstra că $s'^2=s^2$, adică *intervalul relativist/distanța Minkowski* dintre două evinimente este un *invariant Lorentz la trecerea* RI ⇆ (RI)', astfel:

$$(3.49)\ s^2 = \sum_{j=1}^{4}\left[-(\Delta x_j)^2\right] \equiv (-)\sum_{j=1}^{4}(\Delta x_j)(\Delta x_j) = -\sum_{j=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}\alpha'_{jk}\Delta x'_k\right)\left(\sum_{m=1}^{4}\alpha'_{jm}\Delta x'_m\right) \equiv$$

$$\equiv -\sum_k\sum_m\left(\sum_j \alpha'_{jk}\,\alpha'_{jm}\,\Delta x'_k\,\Delta x'_m\right) = -\sum_k\sum_m(\Delta x'_k\,\Delta x'_m)\sum_k\alpha'_{jk}\,\alpha'_{jm} = -\sum_k\sum_m\delta_{km}\Delta x'_k\,\Delta x'_m = -\sum_k(\Delta x'_k)^2 \equiv s'^2,$$

dacă ținem cont pe rând de TrLG (3.42)(a) și (b), precum și de *proprietatea coeficienților Lorentz* $\{\alpha_{kj}\}$ și $\{\alpha_{mj}\}$ *de a fi ortogonali* $(3.50)\ \sum_{j=1}^{4}\alpha_{kj}\alpha_{mj} = \sum_{j=1}^{4}\alpha'_{jk}\,\alpha'_{jm} = \delta_{km} = \begin{cases}1\ (k=m)\\0\ (k\neq m)\end{cases}$.

(b₄) *Definiție 3* <O *mărime fizică* este un *invariant Lorentz* sau, un *invariant relativist*, dacă la trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)', își menține valoarea constantă la acțiunea TrLG (3.42)-(3.44), care descriu matematic trecerea>.

Conform (b₄), *intervalul relativist/distanța Minkowski* este un *invariant Lorentz.*

3.11.6.5Implicație metodologică a def.3 din 3.11.6.4

Orice mărime fizică a cărei valoare este constantă față de acțiunea TrLG (3.42)-(3.44) descriind trecerea RI ⇆ (RI)', fiind un invariant Lorentz, este tot un *invariant Lorentz*, când TrLG sunt particularizate la *transformările Lorentz speciale* (TrLS).

3.11.6.6Precizare pentru TrLG → TrLS

Una din cele mai importante proprietăți ale TrLG (3.30), (3.42)-(3.44) este că grupul lor conține și *transformările Lorentz speciale* (TrLS) ca un caz particular. Acest caz particular a fost obținut de către H. A. Lorentz (1833-1928) în lucrările sale legate, pe de o parte de explicarea teoretică a rezultatelor și concluziilor experiențelor Michelson-Morley (1881-1887), pe de alta de dezvoltarea electrodinamicii mediilor în mișcare, dezvoltare utilizată de Einstein în elaborarea TRR/TRS prin introducerea și utilizarea TrLS alături de PIVMPI și PRE, în baza axiomatică și metodologică a TRR/TRS, care a condus la modificarea întregii fizici necuantice la început, apoi la modificarea relativistă a întregii fizici, spre care converg toate eforturile din cercetarea teoretică actuală vizând elaborarea unei *teorii cuantice a gravitației*, după ce forma relativistă a fizicii teoretice cuantice a trecut pe rând prin teoria cuantică relativistă Dirac, prin electrodinamica cuantică, prin cromodinamica cuantică, implicând totodată teoria cuantică a câmpurilor și teoria cuantică a particulelor elementare.

3.12 Transformările Lorentz speciale (TrLS)

3.12.0 Considerații generale și metodice

Întreaga *mecanică relativistă einsteiniană* creată pe baza *teoriei relativității restrânse/speciale* (TRR/TRS), ca și TRR/TRS are la bază, pe de o parte *principiile einsteiniene* PIVMPI și PRE deja precizate mai sus, pe de alta, *transformările Lorentz speciale* TrLS, adică acele *transformări Lorentz generale* (TrLG) care permit *efectiv* (și concret pentru confruntări cu experimența) tratarea fizico–matematică a problemei fundamentale a mecanicii teoretice (p.f.m.t) ca o tratare teoretică relativistă. De asemenea, acele TrLG particularizate care *înlătură toate incompatibilitățile mecanicii clasice și ale fizicii nerelativiste în general cu electrodinamica clasică în special*, permițând confruntarea rezultatelor teoretice ale mecanicii relativiste einsteiniene și ale TRR/TRS cu baza ei experimentală, care ar putea fi numită *fizica experimentală relativistă.*

Deoarece TrLS vor fi deduse pe cale teoretică fizico-geometrică în spațiul Minkowski (S_M)/universul spațiu-timp, apelând la formalismul matematic al rotațiilor de unghi complex $\hat{A}_c$, vom relua în subparagraful următor (3.12.1) și vom detalia câteva *elemente fizico-geometrice einsteinian-minkowskiene din* S_M , necesare deducerii TrLS și asupra cărora am mai făcut unele precizări în paragraful 3.10 dedicat S_M .

Capitolele următoare celui de față, cap.IV și V, respectiv cap.VII-X (din $P_3^{(3)}$), vor fi din plin bazate pe TrLS, deoarece vor elabora cinematica relativistă și dinamica relativistă a punctului material, respectiv elementele de mecanică analitică relativistă, de termodinamică relativistă, respectiv de electrodinamică relativistă și de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange.

Nu trebuie uitat nici o clipă faptul că TRR/TRS, având la bază PIVMPI, PRE, PdC relativist și TrLS, are în vedere *problema einsteiniană a invarianței tuturor legilor fizicii* față de acel grup de transformări fizico-matematice, care descriu trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' la care s-a raportat același eveniment fizic (x,y,z,t) sau fizic relativist (x,y,z,ict), cu *situația specială că* TrLS consideră (RI)' în mișcare cu $\vec{v}_T \equiv \vec{v}_x =$ const., paralelă cu axa Ox a SdR Oxyz ce aparține referențialului inerțial considerat fix RI (v. fig. 3.3(b)).

3.12.1 Elemente fizico-geometrice einsteinian-minkowskiene din S_M ca spațiul TRR/TRS necesare deducerii TrLS

3.12.1.1 Precizări asupra S_M ca spațiu TRR/TRS sau universul spațiu-timp

(p_1) TRR/TRS se poate geometriza în sens Minkowski, utilizând un spațiu cuadridimensional (S_M) cu cele 3 axe reale (Ox,Oy,Oz) (generând spațiul $S_{x,y,z}$ ca *spațiul fizic real*) *și o axă imaginară* O_{ict} *ca axă temporală* (generând spațiul imaginar S_{ict} unidimensional).

(p_2) *Spațiul Minkowski* (S_M) *sau universul spațiu-timp* ca spațiu al TRR/TRS satisface relația (3.7) $S_M = S_{x,y,z} \otimes S_{ict}$ care îi pune în evidență structura și ortogonalitatea dintre subspații, cum la fel metrica deja precizată prin relația (3.24).

(p_3) *Fenomenele fizice ca succesiuni de stări fizice*, considerate la diferitele momente ale desfășurării fenomenului, se pot studia în S_M cu ajutorul unei *varietăți cuadridimensionale* care ne dă tocmai spațiul mulțimii de evnimente fizice $\{(x_j,y_j,z_j,t_j)\}$ respectiv de evenimente fizice relativiste $\{(x_j,y_j,z_j,ict_j)\}$. De aceea S_M satisfăcând relația (3.7) se mai numește și *universul spațiu-timp sau universul Minkowski, sau/și universul Einstein-Minkowski.*

(p_4) Elementele fizico-geometrice fundamentale în S_M sunt *linia de univers și distanța Minkowski.*

Despre distanța Minkowski/intervalul relativist dintre două evenimente avem precizările necesare în TRR/TRS expuse în 3.10.3 și în 3.11.6.4.

3.12.1.2 Linia de univers/traiectoria Minkowski in $\mathcal{S}_M$

(a) *Definiţie* <Numim *linie de univers (sau traiectorie Minkowski) traiectoria punctului material ce evoluează în* $\mathcal{S}_M$>.

(b) *Liniile de univers/traiectoriile diferitelor mişcări ale punctului material în planul* OxOict *al* $\mathcal{S}_M$.

(b_1) *Punctul material P în repaus faţă de* RI (din spaţiul real $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$) *are o linie de univers/traiectorie Minkowski* reprezentată de o dreaptă ce trece prin originea O a spaţiului $\mathcal{S}_M$ şi rămâne suprapusă peste axa Oict (v. fig. 3.5)

(b_2) *Punctul material P în mişcare rectilinie şi uniformă* (MRU) *faţă de* RI (din spaţiul real $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$ cu v_x = const. $\neq 0$) are *linia de univers/traiectoria Minkowski o dreaptă ce face, în planul OxOict, un unghi complex* $\hat{A}_c$ *cu axa Oict* (v. fig. 3.5). Astfel, *mişcarea rectilinie şi uniformă* (MRU) *în* $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$ *echivalează în* $\mathcal{S}_M$ *cu o rotaţie (uniformă) de unghi complex* $\hat{A}_c$ faţă de axa complexă temporală Oict. Această echivalenţă este de fapt o *reprezentare* a mişcării rectilinii şi uniforme din $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$, *ca o rotaţie (uniformă) în* $\mathcal{S}_M$ (v. fig. 3.5).

(b_3) Punctul material P *în mişcare rectilinie şi uniform variată* (MRUV) faţă de RI din $\mathcal{S}_R$ are *linia de univers/traiectoria Minkowski* în $\mathcal{S}_M$ tocmai o *parabolă* [cu curbura în sus dacă $a_x > 0$, (MRUA) respectiv în jos dacă $a_x < 0$ (MRUÎ)] (v.fig. 3.5).

(b_4) Traiectoria lui P în mişcare rectilinie şi uniformă cu $v_x \equiv c$ = const. este dreapta ce trece prin O şi face un unghi complex $(\hat{A}_c)_{max}$ de modul egal cu $\pi/4$. $|(\hat{A}_c)_{max}| = \pi/2$ este o consecinţă a PIVMPI care afirmă că v_{max} de propagare a interacţiunilor la distanţă este egală cu viteza c a luminii în vid/spaţiul liber.

(b_5) Toate mişcările considerate au $v \leq c$ şi sunt plasate sub dreapta c =const., precizată la (b_4) (v.fig.3.5), ca o consecinţă a acţiunii PIVMPI.

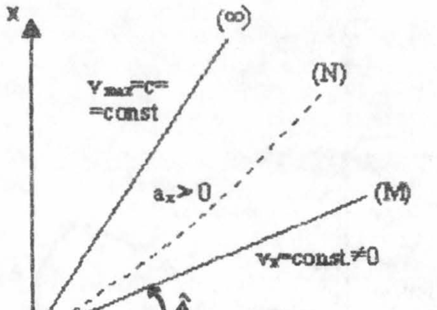


Figura 3.5 *Linii de univers/traiectorii Minkowski în* $\mathcal{S}_M$ *ale punctului material liber pentru diferite mişcări*:

- (b_1) axa Oict pentru v_x=0 (repaus)
- (b_2) dreapta O(M) pentru {v_x=const≠0, a_x=0} (MRU)
- (b_3) parabola O(N) pentru a_x≠0 (MRUV)-cazul MRUA (a_x>0)
- (b_4) dreapta O(∞) sub $|(\hat{A}_c)_{max}| = \pi/4$ pentru v_{max}=c=const.

Precizare. Dreapta O(∞) reprezintă una din generatoarele *conului luminos* ca hipersuprafaţa (suprafaţa cuadridimensională) din $\mathcal{S}_M$,care include în interiorul său toate mişcările posibile ce pot avea loc cu $v \leq c$ şi deci toate evenimentele fizice reale permise de PIVMPI. Acest concept va fi detaliat la discutarea simultaneităţii evenimentelor în TRR/TRS.

3.12.2 Deducerea transformărilor Lorentz speciale (TrLS)

3.12.2.0Precizare procedurală

Deoarece *transformările Lorentz generale* **(TrLG) sunt reprezentate prin matricile** $(\breve{\mathcal{L}}) \equiv (\breve{\alpha}_{kj})$ **(când RI → (RI)') şi** $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}$ **(când (RI)' → RI), precizate prin (3.43)-(3.44), vom căuta matricea** *transformărilor Lorentz speciale* **(TrLS) ca matrice : (3.51)** $(\breve{\mathcal{L}})_S \equiv (\breve{\alpha}_{kj})_S$ **şi** $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}{}_S$**, pentru trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)' când (RI)' este în mişcare rectilinie şi uniformă cu** $\vec{v}_T$ **în lungul axei Ox, considerând coincidenţa O'≡O a originilor la momentul inţial** $t_0=0$**. Cunoscând** $(\breve{\mathcal{L}})_S$ **, obţinerea matricei inverse** $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}{}_S$**va deveni extrem de simplă. Deducerea efectivă pentru** $(\breve{\mathcal{L}})_S$ **se va face utilizând concluzia (b₂) din 3.12.1.2 referitoare la** ***reprezentarea mişcării rectilinii şi uniforme*** **a unui punct material** ***din spaţiul fizic real*** $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$**,** ***printr-o rotaţie*** **(uniformă)** ***de unghi complex*** $\hat{A}_c$ **în spaţiul** $\mathcal{S}_M$ **cuadridimensional.**

3.12.2.1Deducerea efectivă a matricei $(\breve{\mathcal{L}})_S$ (3.51)

(d_1) Conform figurii 3.3(b), (RI)' se consideră cu originea O' coincidentă cu originea O a lui RI, la momentul inţial $t_0=t'_0=0$**, urmând a se mişca cu viteza** $\vec{v}_T \equiv \vec{v}_x = \text{const}$**.** ***Mişcarea rectilinie şi uniformă*** **(MRU)** ***cu originea O'*** **faţă de O în lungul axei Ox din spaţiul real** $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$ **, în** $\mathcal{S}_M$ ***va fi reprezentată de o rotaţie*** **(uniformă)** ***de unghi complex*** $\hat{A}_c$ **ilustrată în figura 3.6, ca rotaţia sistemului de axe O'xO'ict' (cu O'≡O) faţă de sistemul de axe fixe OxOict, deoarece MRU a lui O' în lungul axei Ox reprezintă tocmai dreapta (-----) însemnată pe figură ca fiind axa O(≡O')x', iar** ***axele de coordonate*** **aparţinând aceluiaşi** ***sistem de coordonate*** **rămân reciproc perpendiculare.**

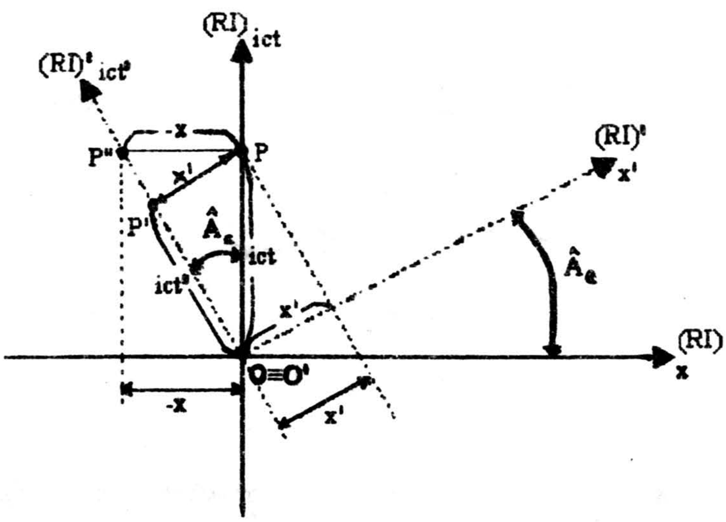


Figura 3.6 *Echivalarea mişcării rectilinii şi uniforme din spaţiul fizic real cu o rotaţie uniformă de unghi complex* $\hat{A}_c$ *în* $\mathcal{S}_M$. *Mişcarea rectilinie şi uniformă* **(MRU)** *a originii* **O' (v.fig.3.3(b)) faţă de** *originea* **O, atunci când (RI)' se deplasează faţă de RI rectiliniu şi uniform în lungul axei Ox în spaţiul** $\mathcal{S}_M = \mathcal{S}_{x,y,z} \otimes \mathcal{S}_{ict} \equiv \mathcal{S}_R \otimes \mathcal{S}_{ict}$, **este** *echivalentă cu o rotaţie uniformă de unghi complex* $\hat{A}_c$ *a sistemului de axe* **O'x'O'ict'** ***faţă de sistemul de axe fixe*** **OxOict (cu O'≡O).**

(d_2) Din ΔPOP" (sau PO'P") avem: (3.52) $\operatorname{tg}\hat{A}_c = -\frac{x}{ict} \equiv \frac{i^2 x}{ict} = \frac{ix}{ct} = \frac{i}{c}\frac{x}{t} = \frac{i}{c}v_T$, dacă se utilizează

$-1 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \equiv i^2$ şi (3.53) $x/t \equiv v_T$ ca viteza de deplasare a originii O' în lungul axei Ox când (RI)' are MRU faţă de RI.

(d_3) Din ΔPOP' (sau PO'P') rezultă: (3.54) $\operatorname{tg}\hat{A}_c = \frac{x'}{ict'} \equiv \frac{ix'}{i^2 ct'} = -\frac{ix'}{ct'} = -\frac{i}{c}\frac{x'}{t'} = -\frac{i}{c}v'_T$.

(d_4) Egalitatea relaţiilor (3.53) şi (3.54) arată că: (3.55) $v'_T = -v_T$, adică originea lui RI se deplasează în sens contrar lui (RI)' (cum era de aşteptat în $\mathcal{S}_{x,y,z} \equiv \mathcal{S}_R$), confirmând posibilitatea rotaţiei în sens invers echivalentă.

(d_5) Se apelează la rotaţia din planul real Oxy de unghi real $\hat{A}$ a sistemului de axe O'x'y', tot din $\mathcal{S}_M$, rezultând relaţiile de transformare:

$$(3.55)\quad \begin{cases} x' = x\cos A + y\sin A \\ y' = -x\sin A + y\cos A \\ z' = z \\ ict' = ict \end{cases},$$

care pun în evidenţă matricea transformării:

$$(3.56)\quad (\breve{\mathcal{L}})_{\hat{A}} \equiv (\breve{\alpha}_{kj})_{\hat{A}} = \begin{pmatrix} \cos\hat{A} & \sin\hat{A} & 0 & 0 \\ (-)\sin\hat{A} & \cos\hat{A} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pentru rotaţia de unghi real $\hat{A}$.

(d_6) Matricea TrLG $(\breve{\mathcal{L}}) \equiv (\breve{\alpha}_{kj})$ particularizată la rotaţia de unghi complex $\hat{A}_c$ în planul OxOict a sistemului de axe O'x'O'ict', ilustrată în figura 3.6, devine prin similitudine cu (3.56):

$$(3.57)\quad (\breve{\mathcal{L}})_{\hat{A}_c} \equiv (\breve{\alpha}_{kj})_{\hat{A}_c} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} & \alpha_{xt} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} & \alpha_{yt} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} & \alpha_{zt} \\ \alpha_{tx} & \alpha_{ty} & \alpha_{tz} & \alpha_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\hat{A}_c & 0 & 0 & \sin\hat{A}_c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\hat{A}_c & 0 & 0 & \cos\hat{A}_c \end{pmatrix}.$$

(d_7) Se transcriu relaţiile ce dau $\cos\hat{A}$ şi $\sin\hat{A}$ în funcţie de $\operatorname{tg}\hat{A}$ de unghi $\hat{A}$ real, adică relaţiile $\cos\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}}$ şi $\sin\hat{A} = \frac{\operatorname{tg}\hat{A}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}}$, pentru unghiul complex $\hat{A}_c$ ţinând cont de (3.52) ca:

$$(3.58)\quad \begin{aligned} &(a)\ \cos\hat{A}_c = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}_c}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{c}v_T\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ &(b)\ \sin\hat{A}_c = \frac{\operatorname{tg}\hat{A}_c}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}_c}} = \frac{\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{aligned}.$$

(d_8) *Matricea* TrLS, prin (3.58) în (3.57), este tocmai:

$$(3.59)\quad (\breve{\mathcal{L}})_S \equiv (\breve{\alpha}_{kj})_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

3.12.2.2 Obținerea TrLS cu ajutorul matricei ($\breve{\mathcal{L}}_S$) (3.59)

Apelând la TrLG în forma matriceală (3.44)(a) şi la (3.59), înlocuirea matricei ($\breve{\mathcal{L}}$) generale cu ($\breve{\mathcal{L}}$)$_S$ dată de (3.59), va duce la descrierea trecerii RI → (RI)' prin TrLS de forma matriceală:

$$(3.60)\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ict \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + 0 + 0 - \frac{v_T t}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ 0+y+0+0 \\ 0+0+z+0 \\ \frac{-i\frac{v_T}{c}x}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} + 0 + 0 + \frac{ict}{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-v_T t}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ y \\ z \\ ic\frac{t-\frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \text{ din}$$

care rezultă *transformările Lorentz speciale* (TrLS) *directe* (pentru RI → (RI)'):

$$(3.61)\ (a)\quad x'=\frac{x-v_T t}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\frac{t-\frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ **dacă se identifică elementele x',y',z',ict' din matricea unicoloană inţială cu cele din matricea unicoloană ultimă.**

***Transformările Lorentz speciale* (TrLS) *inverse* (pentru (RI)' → RI) rezultă din (3.61)(a), ca un simplu exerciţiu în forma finală:**

$$(3.61)(b)\quad x=\frac{x'+v_T t'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ y=y',\ z=z',\ t=\frac{t'+\frac{v_T}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ **când prima şi ultima relaţie din (3.61)(a) se transformă într-un sistem cu două necunoscute x şi t şi se rezolvă prin simplă substituire a uneia dintre ele în funcţie de cealaltă.**

3.12.2.3 Remarcă procedurală şi metodologică asupra obţinerii TrLS (3.61) din consideraţii de conservare a proprietăţilor fundamentale ale spaţiului şi timpului

În *Anexa* expusă în subparagraful 3.12.5 de la sfârşitul paragrafului de faţă, deducerii TrLS (3.61) de până aici i se va ataşa o a doua deducere/obţinere a TrLS (3.61) pe baza particularizării matricei TrLG prin consideraţii de conservare a proprietăţilor fundamentale ale spaţiului (omogenitatea şi izotropia) şi timpului (uniformitatea) în *referenţiale reciproc inerţiale* RI ⇆ (RI)'.

3.12.3 Aplicarea principiului de corespondenţă (PdC) grupului de transformări Lorentz speciale (TrLS) (3.61)

3.12.3.0 Necesitatea aplicării PdC asupra TrLS (3.61)

Deoarece TrLS au fost obţinute ca urmare a aplicării principiilor einsteiniene al invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI) şi al relativităţii (PRE), validitatea TrLS (3.61) obţinute va fi încercată mai întâi teoretic prin *principiul de corespondenţă* (PdC) specific TRR/TRS şi mai apoi, prin consecinţele lor cinematice şi dinamice, posibil de confruntat cu confirmările experimentale.

3.12.3.1 Aplicarea trecerii la limită $v_T/c \to 0$ ($\Leftrightarrow v_T \ll c$)

Conform observaţiei şi experienţelor din mecanica clasică, vitezele obiectelor mecanice satisfac relaţia $v_T \equiv v \ll c$, încât trecerea la limită $v_T/c \to 0$ în TrlS (3.61) va trebui să regăsească *transformările Galilei*, ce descriu trecerea RI ⇆ (RI)' în cazul mecanicii clasice, drept cazuri particulare. Impunând în (3.61) trecerea la limită $v_T/c \to 0$, rezultă:

(3.62) (a) $x'=x-v_T t$; $y'=y$; $z'=z$; $t'=t$ (pentru RI → (RI)') şi

(b) $x=x'+v_Tt'$; $y=y'$; $z=z'$; $t=t'$ (pentru (RI)' → RI), adică *tocmai transformările Galilei speciale* (3.15), *ca limita nerelativistă a* TrLS (3.61).

3.12.3.2Concluzii ale aplicării PdC asupra TrLS (3.61)

(c_1) Deaorece $v_T/c \to 0$ este echivalentă cu $c \to \infty$, rezultă că aplicarea PdC regăseşte ipoteza propagării instantanee la distanţă a interacţiunilor, valabilă în mecanica clasică, unde $v_T \equiv v << c$.

(c_2) Limita $v_T/c \to 0$ ($\Leftrightarrow$ $c \to \infty$) regăseşte *transformările Galilei* (3.15) ca şi caz particular nerelativist al TrLS.

(c_3) Conform cu (3.62)(a) şi (b) $t'=t$ sau $t=t'$, rezultă din TrLS şi existenţa unui timp universal absolut, când {RI} se deplasează cu $v_T << c$.

(c_4) TrLS (3.61) satisfac principiul general de corespondenţă (PdC) cu particularizare la TRR/TRS, regăsindu-se baza fizico-teoretică a afirmaţiei că mecanica clasică nerelativistă este un caz particular al mecanicii relativiste einsteiniene.

(c_5) Completa regăsire prin PdC a mecanicii clasice nerelativiste, drept caz particular al mecanicii relativiste va putea fi realizată numai prin supunerea tuturor consecinţelor cinematice şi dinamice ale TrLS din TRR/TRS la acţiunea PdC, specific trecerii de la *nivelul relativist al vitezelor* ($v_T \equiv v \sim c$) la cel nerelativist ($v_T \equiv v << c$), regăsind echivalentul galileean corespunzător, atunci când el există.

3.12.4 Despre consecinţele cinematice şi dinamice ale TrLS (3.61)

3.12.4.0Precizare metodologică şi structurală

Deoarece elaborarea sistematică a *cinematicii relativiste*, ca parte a TRR/TRS generând mecanica relativistă, necesită includerea consecinţelor cinematice ale TrLS (3.61), imediat după definirea şi precizarea noţiunilor şi conceptelor fundamentale de cinematică relativistă (mărimi fizice proprii, mărimi fizice cinematice, invarianţi relativişti etc.), expunerea detaliată a consecinţelor cinematice ale TrLS (3.61) va fi făcută în cap. III al cursului. Similar, consecinţele dinamice ale TrLS (3.61) vor fi tratate în cap. V (*Dinamica Relativistă...*), din acelaşi motiv de unitate structurală a dinamicii relativiste a TRR/TRS dezvoltată ca parte de mecanică relativistă. De asemenea, pentru a da unitate paragrafului 3.12 care tratează TrLS vom enumera consecinţele cinematice, respectiv dinamice, ce vor fi expuse în capitolele amintite.

3.12.4.1Consecinţe cinematice ale TrLS (enumerare)

(cc_1) *contracţia relativistă a lungimilor* riglelor pe direcţia de mişcare (contracţia Fitzgerald-Lorentz);

(cc_2) *contracţia relativistă a volumului tridimensional* al corpurilor pe direcţia de mişcare;

(cc_3) *dilatarea relativistă a duratelor* pe direcţia de mişcare;

(cc_4) *legea* (teorema) *de compunere relativistă a vitezelor*;

(cc_5) (a) *ordinea de succesiune absolută* numai pentru evenimente separate printr-un interval relativist temporal ($s^2 > 0$), *respectiv*

(b) *ordinea de succesiune relativă* pentru evenimentele separate printr-un interval relativst spaţial ($s^2 < 0$);

(cc_6) simultaneitatea evenimentelor păstrată numai pentru evenimente ce au loc în acelaşi moment;

(cc_7) excluderea posibilităţii de conexiune cauzală între evenimentul zero $e^{(0)}{}_r(0,0,0,0)$ al conului luminos şi evenimentele exterioare acestui con, datorită separării lor de $e^{(0)}$ printr-un interval relativist spaţial ($s^2 < 0$);

(cc_8) efectul Doppler-Fizeau relativist (EDF) (≡ efectul Doppler-Fizeau transversal);

(cc_9) invarianţii relativişti cinematici;

(cc_{10}) forma relativistă a legilor cinematicii prin cuadrivectori;

(cc_{11}) aplicaţii în alte domenii majoritar culturale (filosofia, lingvistica, gramatica, literatura, teologia, dogmatica, cunoaşterea paranormalului etc);

etc.

3.12.4.2Consecințe dinamice ale TrLS (enumerare)

(cd$_1$) variația relativistă a masei de mișcare cu viteza $\left(m = m(v^2) = m_0\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right)$;

(cd$_2$) forma relativistă a legilor dinamicii prin cuadrivectori;
(cd$_3$) energia de repaus ($W^{(r)}_0=m_0c^2$);
(cd$_4$) energia cinetică relativistă ($W^{(r)}_{cin}=(m-m_0)c^2$);
(cd$_5$) energia totală relativistă ($W^{(r)}_t=mc^2=m_0c^2(1-v_T^2/c^2)^{-1/2}$);
(cd$_6$) variația relativistă a masei ($\Delta m=(1/c^2)\Delta W^{(r)}$ (rel. Einstein)) și defectul de masă (din fizica nucleară);
(cd$_7$) invarianți relativiști dinamici;
(cd$_8$) forma relativistă a legilor dinamicii prin cuadrivectori;
etc.

3.12.4.3Alte consecințe ale TrLS (semnalate în $P_3^{(3)}$ <Elemente de fizică teoretică relativist-restrânsă>)

Alte consecințe cinematice și dinamice ale TrLS (3.61), ce pot fi *numite direct*, mai pot fi explicitate în cap.VIII (v. § 3.7) ca *efecte termodinamice relativiste,* în cadrul *reformulării termodinamicii teoretice* prin înlocuirea transformărilor Galilei [ce stau la baza termodinamicii clasice (nerelativistă)] cu TrLS. De asemenea, în cap. IX (v. § 3.55 subparagrafele 3.55.3 și 3.55.5), toate în cadrul extinderii fizicii teoretice (FT) relativiste de la mecanica teoretică relativistă la restul FT (mecanică analitică, termodinamică teoretică, electrodinamică, teoria câmpurilor Lagrange).

În realitate, toate capitolele care formulează relativist cuadridimensional domenii ale FT (cap. IV, V, VII-X), sunt *consecințe metodologice* ale TrLS (3.61) prin aplicarea principiilor TRR/TRS la domeniile de fizică considerate, pe această cale generându-se întreaga FT relativist-restrânsă.

3.12.5 *Anexă.* Deducerea TrLS (3.61) pe baza conservării proprietăților spațiului și timpului în referențialele reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)'

(a) *Considerarea referențialelor reciproc inerțiale* RI $\leftrightarrows$ (RI)' față de care este raportat *același eveniment fizic*, permite formularea problemei de trecere reciprocă:

(3.1s) $e_{RI} \equiv (x,y,z,t) \leftrightarrows e_{(RI)'} \equiv (x',y',z',t')$. În (3.1s) apar coordonatele spațiale ale *aceluiași eveniment* măsurate cu riglele aparținând *fiecăruia* din cele două referențiale inerțiale RI, respectiv (RI)', și momentele de timp ale *aceluiași eveniment fizic*, marcate cu ceasornicul/cronometrul fiecăruia din referențialele considerate. Astfel, *problema descrierii matematice* a trecerii reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)' este transformată în *găsirea acelei transformări Lorentz generale* (TrLG) *ce corespunde situației speciale pe care o prezintă mișcarea rectilinie și uniformă* (MRU) a lui (RI)' cu $\bar{v} \equiv \bar{v}_T$ (viteză de transport) în lungul axei Ox a lui RI, când, conform figurii 3.3(b), originea O' a sistemului de coordonate carteziene $O_{x'y'z'}$ din (RI)' coincide *inițial* cu originea O a sistemului de axe O_{xyz} din RI, axa O'x' suprapunându-se peste Ox.

(b) *Conform corespondenței* (3.1s), situația specială de considerare a mișcării lui (RI)' față de RI (considerat în repaus) (v. fig. 3.3(b)) impune găsirea *dependenței directe*:

(3.2s) (a) $\begin{Bmatrix} x'=x'(x,y,z,t) \\ y'=y'(x,y,z,t) \\ z'=z'(x,y,z,t) \\ t'=t'(x,y,z,t) \end{Bmatrix}$ și/sau *inverse* (b) $\begin{Bmatrix} x=x(x',y',z',t') \\ y=y(x',y',z',t') \\ z=z(x',y',z',t') \\ t=t(x',y',z',t') \end{Bmatrix}$, care cer, de fapt, *particularizarea matricei Lorentz generale*:

(3.3s) (a) $(\breve{\mathcal{L}}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$ și/sau (b) $(\breve{\mathcal{L}})^{-1}$, relațiile marcate cu (a) descriind *trecerea directă* RI $\rightarrow$ (RI)', cele cu (b) pe cea *inversă* (RI)' $\rightarrow$ RI. Astfel, TrLG directe din

(3.3s)(a) se cer a fi particularizate la *transformările Lorentz speciale* (TrLS) descriind matematic trecerea RI → (RI)', conformă situației speciale de *reciprocitate inerțială a referențialelor*, ilustrată în figura 3.3(b).

(c) Din (3.2s), rezultă că TrLS căutate dau, de fapt, *relațiile de trecere* de la un sistem de coordonate Oxyz (al lui RI) la sistemul de coordonate Ox'y'z' [al lui (RI)'], încât (3.2s) rescrisă, prin (3.3s)(a) ca:

$$(3.4s)\quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = (\breve{\mathcal{L}})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$$ se transformă în dependențele

liniare explicite:

$$(3.5s)\quad \begin{array}{l} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + x_0 \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + y_0 \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + z_0 \\ t' = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t + t_0 \end{array}$$, în care trebuie determinați coeficienții $\{\alpha_{jk}\}$

$(j,k = \overline{1,4})$ și evenimentul origine (x_0, y_0, z_0, t_0), pentru ca (3.5s) să devină TrLS (3.61)(a) *directe*.

(d) *Anexa de față* și-a propus să nu apeleze la considerațiile fizico-matematice utilizate în spațiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$), prin echivalarea MRU a lui (RI)' față de RI cu o rotație uniformă de unghi complex $\hat{A}_c$, pentru a obține TrLS (3.61)(a), ci la *utilizarea proprietăților fundamentale ale spațiului (omogenitatea și izotropia) și timpului (uniformitatea)*, pe care referențialele RI ⇆ (RI)' *ca referențiale inerțiale trebuie să le conserve* (conform uneia din definițiile referențialului inerțial).

(e) *Proprietățile fundamentale ale spațiului și timpului* (amintite) înseamnă pe rând:

(e_1) *omogenitatea spațiului* ≡ echivalența tuturor pozițiilor în spațiu ≡ inexistența pozițiilor în spațiu privilegiate ≡ identitatea proprietăților spațiului în toate punctele sale ≡ nevariația (constanța) proprietăților spațiului de la punct la punct;

(e_2) *izotropia spațiului* ≡ echivalența tuturor direcțiilor în spațiu ≡ inexistența direcțiilor în spațiu privilegiate ≡ identitatea proprietăților spațiului pe toate direcțiile sale ≡ nevariația/constanța proprietăților spațiului de la o direcție la alta;

(e_2) *uniformitatea timpului* ≡ echivalența tuturor momenteleor de timp ≡ inexistența momentelor de timp privilegiate ≡ același sens de curgere a timpului în toate referențialele inerțiale [inclusiv în cele reciproc inerțiale RI ⇆ (RI)'].

(f) Ținând cont de scopul și modalitatea de obținere a acestui scop în (d), cu apel la proprietățile detaliate în (e), se va proceda la desfășurarea unui *algoritm de obținere* a coeficienților $\{\alpha_{jk}\}$ $(j,k = \overline{1,4})$ din (3.5s), după *alegerea originilor coincidente inițial* O≡O', când la t_0=0, O'x'y'z' se suprapune peste Oxyz și din *această suprapunere* avem:

(3.6s) (a) x=y=z=t=0 ; (b) x'=y'=z'=t'=0 și deci (c) $x_0=y_0=z_0=t_0=0$, reducând (3.5s) la:

$$(3.7s)\quad \begin{Bmatrix} (A)\ x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t;\ (B)\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t; \\ (C)\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t;\ (D)\ t' = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t. \end{Bmatrix}.$$

(g) *Algoritmul de determinare a coeficienților* $\{\alpha_{jk}\}$ $(j,k = \overline{1,4})$ *din* (3.7s) *are următoarele etape*:

(g_0) *fixarea* (RI)' *în coincidență cu* RI *la momentul inițial al mișcării lui* (RI)' cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$=const. și $\vec{v}_T$||Ox, ceea ce are ca rezultat (3.6s) ce conduce la (3.7s);

(g_1) *utilizarea paralelismului dintre axele* Ox și O'x' *pentru a determina din coincidența planelor* Oxy și O'x'y', respectiv Oxz și O'x'z' (v.fig. 3.3(b)), *valorile nule ale coeficienților* α_{21}, α_{23}, α_{24}, α_{31}, α_{32} și α_{34} din (3.7s)(B) și (C), deoarece MRU a lui O'x'y'z' cu $\vec{v} = \vec{v}_T$ constantă respectă la orice t și pentru orice x: (3.8s) (a) z=z'=0, respectiv (b) y=y'=0 (ca ecuațiile planelor coincidente), acestea impunând:

(3.9s) (a) $\alpha_{21}=\alpha_{23}=\alpha_{31}=\alpha_{32}=0$ și (b) $\alpha_{24}=\alpha_{34}=0$, și prin ele:

$$(3.10s)\quad \begin{Bmatrix} (A)\ x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t;\ (B)\ y' = \alpha_{22}y;\ (C)\ z' = \alpha_{33}z; \\ (D)\ t' = \alpha_{41}x + \alpha_{42}y + \alpha_{43}z + \alpha_{44}t. \end{Bmatrix};$$

(g_2) *impunerea conservării omogenității spațiului (sau a echivalenței tuturor pozițiilor în spațiu) asupra punctelor de coordonate* (y,z); (-y,z); (y,-z) și (-y,-z), *pentru orice moment și orice x* (atunci când (RI)' se deplasează față de RI), conducând la anulările:

(3.11s) (a) $\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$ respectiv (b) $\alpha_{42}=\alpha_{43}=0$ de coeficienți din

(3.10s) (A) și (D), cu care (3.10s) se simplifică la:

(3,12s) $\{(A)\ x'=\alpha_{11}x+\alpha_{14}t;\ (B)\ y'=\alpha_{22}y;\ (C)\ z'=\alpha_{33}z;\ (D)\ t'=\alpha_{41}x+\alpha_{44}t.\}$;

(g_3) *impunerea conservării izotropiei spațiului în* RI și (RI)', care face ca *toate direcțiile perpendiculare pe* Ox și Ox' *să fie echivalente*, și prin această echivalență să avem (3.13s) (a) $\alpha_{22}=\alpha_{33}$, *ambii coeficienți fiind precizați* ca (3.13s) (b) $\alpha_{22}=\alpha_{33}=1$, *dacă se impune echivalența și în raport cu sensul deplasării relative a lui* (RI)' față de RI, *sau invers* a lui RI față de (RI)' (cu $\bar{v}'=-\bar{v}=-\bar{v}_T$) când se cere: (3.14s) (a) $y=\alpha_{22}y'$ și (b) $z=\alpha_{33}z'\equiv\alpha_{22}z'$ și când (3.13s)(b) *transformă* (3.12s) *în*:

(3.15s) $\{(A)\ x'=\alpha_{11}x+\alpha_{14}t;\ (B)\ y'=y;\ (C)\ z'=z;\ (D)\ t'=\alpha_{41}x+\alpha_{44}t.\}$;

(g_4) *utilizarea ecuației* MRU a lui (RI)' față de RI, $x=vt\equiv v_Tt$, pentru clarificarea relației dintre coeficienții α_{11} și α_{14}, care se dovedesc a fi egali atunci când se ține cont că originea O' a lui O'x'y'z' din (RI)' are coordonatele:

(3.16s) (a) $x'=0$ și (b) $x=v_Tt$, echivalent (c) $x-v_Tt=0$ impunând

(3.17s) $x'=\alpha(x-v_Tt)\equiv\alpha_{11}(x-v_Tt)\equiv\alpha_{22}(x-v_Tt)$, care permite transformarea relațiilor (3.15s) în:

(3.18s) $(A)\ x'=\alpha_{11}(x-v_Tt);\ (B)\ y'=y;\ (C)\ z'=z;\ (D)\ t'=\alpha_{41}x+\alpha_{44}t$, *rămânând de determinat* α_{11}, α_{41} și α_{44};

(g_5) *apelul la principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor* (PIVMPI) *prin trimiterea unui semnal luminos din originile* O *și* O' *coincidente la momentul inițial* $t_0=t'_0=0$, pentru a fi recepționat la momentele $t\neq0$ în RI, respectiv la $t'\neq0$ în (RI)' *în vederea obținerii condițiilor fizico-matematice ce permit sistemul de ecuații algebrice din care se vor determina* α_{11}, α_{41} și α_{44}.

(h) *Faza* (g_5) *a algoritmului* precizată mai sus, *fiind cea care finalizează obținerea* TrLS *căutate*, va fi detaliată după cum urmează.

(h_1) *Aplicarea* PIVMPI afirmând că $v_{max}=c$, impune fizico-matematic faptul că semnalul luminos emis simultan din cele două origini O și O' ale RI, respectiv (RI)', după timpul t măsurat în RI parcurge distanța:

(3.19s) (a) $d_{RI}^2\equiv x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, respectiv, după t' măsurat în (RI)':

(3.19s) (b) $d_{(RI)'}^2\equiv x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$, iar cum $v\leq c$ în toate cazurile (egalitatea valabilă pentru semnalul luminos), avem egalitatea:

(3.20s) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=\beta(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2)$.

(h_2) *Prin* PIVMPI, valoarea lui β este egală cu 1, fapt ce reduce (3.20s) la noua egalitate:

(3.21s) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2$.

(h_3) *Utilizând* (3.18s) în (3.21s), se obține:

(3.22s) $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=\alpha_{11}^2(x-v_Tt)^2+y^2+z^2-c^2(\alpha_{41}x+\alpha_{44}t)^2$ sau

(3.23s) $(1-\alpha_{11}^2+c^2\alpha_{41}^2)x^2+(c^2\alpha_{41}^2-v_T^2\alpha_{11}^2-c^2)t^2+(2v_T\alpha_{11}^2+2c^2\alpha_{41}\alpha_{41})xt=0$.

(h_4) *Ultima relație obținută* (3.23s) este echivalentă cu *sistemul de ecuații algebrice* (valabil pentru orice x și orice t măsurate în RI, pentru originea O' a lui (RI)' în MRU cu $v\equiv v_T$):

(3.24s) (a) $\alpha_{11}^2-c^2\alpha_{41}^2=1$; (b) $c^2\alpha_{44}^2-v_T^2\alpha_{11}^2=c^2$ și (c) $v_T\alpha_{11}^2+c^2\alpha_{41}\alpha_{44}=0$, obținute prin anularea tuturor parantezelor, cerută de (3.23s) ca identitate.

(h_4) Rezolvarea sistemului (3.24s) de 3 ecuații cu 3 necunoscute (α_{11}, α_{41} și α_{44}) se face în *ipoteza satisfacerii condiției de coincidență* la (3.25s)(a) $v\equiv v_T=0$, când (3.25s)(b) $x'=x$; $y'=y$; $z'=z$ și $t'=t$, admit soluțiile:

(3.26s) (a) $\alpha_{11}=\alpha_{44}=\dfrac{1}{(\pm)\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ și (b) $\alpha_{41}=\dfrac{-\dfrac{v_T^2}{c^2}}{(\pm)\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$.

(h_6) *Impunerea proprietăților de uniformitate a timpului* [timpul curge în același sens în ambele referențiale RI și (RI)'], echivalentă matematic cu *impunerea* condiției (3.27s) $\dfrac{\partial t'}{\partial t}>0$, tranșează în favoarea semnului (+) în fața radicalului din (3.26s), încât *soluția cu sens fizic* a sistemului de ecuații (3.24s) este:

$$(3.28s)\ (a)\ \alpha_{11}=\alpha_{44}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\ \text{și (b)}\ \alpha_{41}=\frac{-\frac{v_T^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}.$$

(h$_7$) Soluțiile (3.28s) introduse în (3.18s) duc la *forma matematică finală ireductibilă a transformărilor Lorentz speciale* (TrLS) directe:

$$(3.29s)\quad (A)\ x'=\frac{x-v_T t}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}};\ (B)\ y'=y;\ (C)\ z'=z\ \text{și}\ (D)\ t'=\frac{t-\frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$

care descriu matematic trecerea directă RI → (RI)', adică utilizează exprimarea (x,y,z,t) a măsurătorilor (simultane) de distanță și timp din RI asupra unui *eveniment fizic pentru a exprima prin ele măsurătorile (simultane) de același tip din* (RI)' (x',y',,z',t') *asupra aceluiași eveniment fizic*, adică realizează trecerea (x,y,z,t)→(x',y',z',t').

(h$_8$) *Trecerea inversă* (RI)' → RI, echivalentă cu (x',y',z',t')→(x,y,z,t) echivalând cu MRU a originii lui RI cu $\bar{v}'\equiv-\bar{v}_T$ ($v'=-v_T$) este obținută rezolvând sistemul (3.29s) cu *necunoscutele* (x,y,z,t) în funcție de presupus cunoscutele (x',y',z',t'), astfel furnizând:

$$(3.30s)\ (A)\ x=\frac{x'+v_T t'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ (B)\ y=y';\ (C)\ z=z'\ \text{și}\ (D)\ t=\frac{t'+\frac{v_T}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$

ca TrLS *inverse* [(RI)' → RI ⇔(x',y',z',t')→(x,y,z,t)].

(i) *Concluzii ale Anexei*

(c$_1$) Relațiile finale (3.29s) reprezintă tocmai TrLS (3.61)(a), ca *transformările Lorentz speciale directe* [RI → (RI)' ⇔ (x,y,z,t)→(x',y',z',t')], iar *cele finale* (3.30s) tocmai TrLS (3.61)(b), ca *transformările Lorentz speciale inverse* [(RI)' → RI ⇔ (x',y',z',t')→(x,y,z,t)].

(c$_2$) Deducerea fizico-matematică din prezenta *Anexă*, apelând la *considerații de conservare a proprietăților fundamentale ale spațiului (omogenitatea și izotropia) și timpului (uniformitatea) în referențialele reciproc inerțiale* RI ⇆ (RI)', atașată celei de la începutul paragrafului 3.12 (de față), care echivalează MRU a lui (RI)' față de RI cu o rotație uniformă de unghi complex $\hat{A}_c$ a sistemului de axe Ox'O'ict' față de sistemul de axe fix OxOict (cu O≡O') din spațiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$) servește interesului de înțelegere a semnificațiilor fizice și fizico-matematice a TrLS (3.61)(a) și (b) și/sau (3.29s)∪(3.30s), cu care afirmația lui Einstein din "The Meaning of Relativity" (1956) că <"*teoria relativității este intim legată de teoria spațiului și timpului*">, sintetizează ***legătura relativistă intrinsecă dintre spațiu și timp,*** infirmând *timpul universal* newtonian, în favoarea unui *timp relativist local*, deja afirmat fizico-matematic prin existența relațiilor (3.61) descriind trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)', și înlăturând relațiile Galilei (3.1)-(3.2) și/sau (3.14)-(3.15) care presupun matematic *timpul universal*.

(c$_3$) Aceeași dublă deducere a TrLS, pe lângă scopul științific metodico-didactic cerut de un curs de FT, mai justifică fizico-teoretic și tratarea cuadridimensională în $\mathcal{S}_M$ a fenomenelor fizice (mecanice, electromagnetice, cuantice etc.), la baza tratării stând ***generalizarea relativistă a evenimentelor fizice de raportare la referențialele inerțiale ca evenimente spațio-temporale*** $e_r\equiv\{x_j\}$ ($j=\overline{1,4}$)≡(x,y,z,ict) cuadridimensionale, care implică în structura lor intimă cerința PIVMPI ca $v_{max}=c$.

(c$_4$) În cazul în care v_T din sistemul de ecuații algebrice (3.24s) ar contrazice PIVMPI, adică ar satisface $v\equiv v_T>c$, atunci coeficienții α_{11}, α_{41} și α_{44} ar deveni imaginari, dând TrLS de trecere RI ⇆ (RI)' complexe în sens matematic (prin prezența unității imaginare $i=\sqrt{-1}$), *fapt care nu are sens fizic*, deoarece MRU relativă a lui RI și (RI)' unul față de celălalt este o ***mișcare reală***. În acest mod, viteza c apare ca limită superioară a vitezei de deplasare a referențialelor inerțiale unele față de altele, adică $(v_T)_{max}\equiv v_{max}=c$.

(c$_5$) Două moduri distincte de obținere a TrLS (3.61) sugerează ***posibilitatea altor modalități de obținere a acestor relații***, deja confirmată de existența unui mare nuumăr de căi de demonstrare fizico-matematică a TrLS, formulate în literatura dezvoltând TRR/TRS în cei peste 100 de ani scurși de la lucrările din 1895 ale lui Lorentz, care impun prima dată aceste transformări.

3.13 Noţiuni fundamentale ale TRR/TRS ca noţiuni de cinematică relativistă.

3.13.0 Consideraţii generale asupra noţiunilor de cinematică în general şi de cinematică relativistă în special

3.13.0.1Cinematica disciplină/ramură a mecanicii. Definirea cinematicii

Prin *cinematică*, în general, se înţelege ramura mecanicii care are drept obiect de studiu mişcarea mecanică, fără a apela la masele corpurilor/sistemelor mecanice şi nici la cauza mişcării care este interacţiunea dintre corpurile/sistemele mecanice. Din definiţia de mai sus, rezultă că *cinematica* face o *descriere a mişcării mecanice* prin noţiunile şi conceptele care nu implică direct masa şi nici forţa, ca mărimi fizice.

Conform definiţiei sale celei mai generale, *mişcarea mecanică fiind <fenomenul mecanic* de trecere a obiectului/sistemului mecanic dintr-o stare mecanică iniţială în alta finală>, rezultă prin *conceptul de stare mecanică, clarificarea modului de studiere a mişcării impus de Cinematică.*

3.13.0.2 Starea mecanică şi mişcarea mecanică. Vectorul de poziţie ($\vec{r}$) şi vectorul viteză ($\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$)

Definirea cinematică a stării mecanice:<Numim stare mecanică starea fizică în care se află un corp/sistem mecanic caracterizată complet de *parametrii cinematici de stare mecanică* ($\vec{r}, \vec{v} = \dot{\vec{r}}, t$), consideraţi/măsuraţi faţă de un referenţial (R)>.

Reamintim că referenţialul (R) permite prin *rigla* şi *ceasornicul* ataşate sistemului de referinţă (SdR) (în general un sistem de axe de coordonate, de ex. Oxyz cartezian), măsurarea poziţiei (x,y,z) *a mobilului* (corpul care se mişcă) faţă de originea O a SdR, cu marcarea momentului t la care s-a făcut măsurarea. Astfel, *parametrii cinematici de stare mecanică*, generând starea mecanică Σ_m sunt ($x,y,z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t$), între care am introdus şi parametrul t desemnând momentul t la care se face *măsurarea/determinarea parametrilor cinematici puri* ($x,y,z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$). Aceşti parametrii generează cele două *mărimi fizice vectoriale fundamentale în cinematică*:

(I) *vectorul de poziţie* $\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z$ şi

(II) *viteza* $\vec{v} = d\vec{r}/dt \equiv \dot{\vec{r}} = v_x\vec{1}_x + v_y\vec{1}_y + v_z\vec{1}_y \equiv \dot{x}\,\vec{1}_x + \dot{y}\,\vec{1}_y + \dot{z}\,\vec{1}_z$.

Conform definiţiei cinematice a mişcării mecanice, dată mai sus, trecerea $\Sigma_m(t_i) \rightarrow \Sigma_m(t_f)$ de la o stare mecanică iniţială la una finală, presupune schimbarea succesivă în timp a poziţiei mobilului faţă de originea referenţialului, încât *descrierea cinematică a mişcării* este echivalentă cu cunoaşterea:

(I) *variaţiei în timp a vectorului de poziţie* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ şi , respectiv, a

(II) *variaţiei în timp a vectorului viteză* $\vec{v} = \vec{v}(t)$.

Aceste două dependenţe în raport cu timpul exprimă *legile cinematice fundamentale* (ale vectorului de poziţie, respectiv viteză). Cunoaşterea dependenţei $\vec{v} = \vec{v}(t)$ permite şi cunoaşterea dependenţei $\dot{\vec{v}} \equiv \vec{a} \equiv d\vec{v}/dt \left(\equiv \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}} \right) = f(t)$, printr-o simplă derivare, adică tocmai cunoaşterea *acceleraţiei mişcării*.

Astfel, *legile cinematice ale mişcării* apar ca *legile de variaţie în raport cu timpul ale vectorilor* $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ exprimate matematic prin *ecuaţiile cinematice ale mişcării*: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ şi $\vec{a} = \vec{a}(t)$, numite: *legea vectorului de poziţie* (a spaţiului parcurs), *a vitezei*, respectiv *a acceleraţiei*.

3.13.0.3 Cinematica şi vectorul acceleraţie ($\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}$)

Problema fundamentală a cinematicii se reduce de fapt, la cunoaşterea stării mecanice în fiecare moment al mişcării unui mobil, adică la cunoaşterea dependenţei $\vec{r} = \vec{r}(t)$, din care rezultă uşor dependenţa $\vec{v} = \vec{v}(t)$ şi deci starea mecanică $\Sigma_m(t) \equiv (\vec{r}(t), \vec{v}(t)) \equiv (x,y,z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; t)$ la momentul t, dacă se

cunoaşte starea mecanică la orice alt moment anterior $t_0 < t$, considerat ca moment iniţial al mişcării. De asemenea, rezultă uşor şi $\vec{a} = \vec{a}(t)$. *Necesitatea vectorului* $\vec{a}$ este impusă cinematic, mai ales de: (α) rezolvarea inversă a *problemei fundamentale a cinematicii*, prin simpla integrare repetată ajungându-se de la $\vec{a}$ la $\vec{v}$, apoi la $\vec{r}$; (β) posibilitatea cunoaşterii *a priori* a acceleraţiei apelând la *interacţiunea ce determină mişcarea*, şi prin legile/principiile newtoniene ale mecanicii, la determinarea corespunzătoare a acceleraţiei; (γ) *cunoaşterea cinematică completă* a interacţiunii ce deteremină mişcarea considerată, contribuind la cunoaşterea forţei $\vec{F}$ ce măsoară interacţiunea, dacă se ţine cont de legea/principiul manifestării acţiunii forţei ($\vec{F} \equiv d\vec{p}/dt = m\vec{a}$), care pune în evidenţă *mărimea fizică cinematică* $\vec{a}$, prin masa m a corpului/sistemului mecanic (introdusă de mărimea fizică cinematico-dinamică $\vec{p} = m\vec{v}$).

3.13.0.4 Rolul referenţialului (R) în general şi al referenţialului (RI) în special în cunoaşterea cinematică a mişcării. Evenimentul fizic mecanic

Conform consideraţiilor de până aici, întreaga cinematică se poate elabora pe baza conceptului de *eveniment fizic mecanic*, înţeles prin *starea fizică mecanică* $\Sigma_m(t)=(x,y,z,t)$, a cărei cunoaştere la momentul t implică *întreaga bază noţional conceptuală cinematică* a mecanicii, legată de: (A) *conceptele de spaţiu* (x,y,z) *şi de timp* (t); (B) *corpul/obiectul/sistemul mecanic rigid cu întinderea sa spaţială* [ca: (a) orice *mobil* considerat ca sistem mecanic; (b) orice corp solid-rigid considerat ca *reper* pentru mişcarea mobilului; (c) *riglele* cu care se măsoară, atât *coordonatele* (x,y,z) *ale mobilului considerat punct material* P, cât şi modulul vectorului său de poziţie ($|\vec{r}| \equiv r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$), riglele având marcate pe ele unitatea de măsură a lungimii/distanţei dintre două puncte distincte ale unui corp solid rigid]; (C) *conceptele cinematice de moment/timp t, respectiv de durată* $\Delta t = t - t_0$ ($t_0 < t$), cu care se face marcarea momentelor de timp la care se marchează poziţia mobilului, respectiv *măsurarea duratelor scurse între două poziţii marcate la două momente diferite*, toate fiind raportate la *o origine O fixată de reper*; (D) *ceasornicele/cronometrele cu care se marchează momentele de timp t* pentru fiecare set (x,y,z) şi se măsoară duratele Δt.

Din (A)→(D), rezultă că *cinematica* nu se poate elabora fără conceptul de *referenţial* (R) înţeles ca acel *corp solid rigid considerat fix*, de care se leagă (pe care se fixează) originea O a SdR (*sistem de referinţă matematic, un sistem de axe de coordonate*), şi la care se ataşează o *riglă rigidă* (etalonată în unităţi de lungime/distanţă) şi *un ceasornic/cronometru* (etalonat în secunde). Din mulţimea referenţialelor {R}, sunt preferate referenţialele inerţiale {RI}, adică acea submulţime din {R} ce satisfac condiţiile : fie (C_1) referenţialele se află în mişcare rectilinie şi uniformă unul faţă de celălalt; fie (C_2) în aceste referenţiale este valabilă legea/principiul inerţiei; fie (C_3) aceste referenţiale conservă proprietăţile fundamentale ale spaţiului şi timpului. De asemenea, prin raportarea mişcării la RI ⇆ (RI)', în TRR/TRS apare *conceptul de referenţial propriu* $(RI)_0$ faţă de care sunt definite *mărimile fizice proprii* (*de repaus*), pe care *mecanica clasică* fiind *esenţial nerelativistă* (în sensul einsteinian al termenului de nerelativist) *nu le poate decela de cele de mişcare*.

Datorită permanenţei raportării la RI ⇆ (RI)' [descrisă matematic de TrLS (3.61)], în TRR/TRS şi în oricare parte de FT relativistă, introducem denumirea de *referenţiale inerţiale reciproce sau referenţiale reciproc inerţiale*, pentru *perechea de referenţiale inerţiale aflate în MRU relativă unul faţă de celălalt cu* $v_r \equiv \pm v_T$ [cu deplasarea conformă figurii 3.3(b)] şi faţă de care se consideră *mărimile fizice proprii (de repaus)*, respectiv *mărimile fizice cinematice (de mişcare)*.

3.13.0.5 Problema relativităţii ≡ problema trecerii reciproce RI ⇆ (RI)' [şi a măsurării/raportării aceluiaşi set de mărimi fizice faţă de aceste referenţiale reciproc inerţiale]

Atât în fizica nerelativistă, cât şi în cea relativistă, *problema relativităţii* este dirrect legată de necesitatea raportării mişcării la {RI} distincte, faţă de care legile mişcării (conform PRG) şi în general legile fizicii (conform PRE) să-şi *conserve* forma matematică, adică să rămână invariante atunci când se face *trecerea* reciprocă RI ⇆ (RI)' de la un referenţial inerţial (RI), considerat fix, la altul (RI)' în MRU faţă de primul, şi invers. Astfel, *problema relativităţii în fizică* se reduce esenţial, cinematic, la *problema trecerii reciproce* RI ⇆ (RI)' şi a consecinţelor sale privind: (α) măsurarea coordonatelor [(x,y,z)/(x',y',z')] şi comportarea etaloanelor de lungime din referenţiale; (β) măsurarea momentelor (t/t') pentru coordonate şi măsurarea duratelor [$\Delta t/\Delta t'$], respectiv comportarea ceasornicelor din referenţiale, implicând sincronizarea ceasornicelor şi simultaneitatea momentelor; (γ) transmiterea informaţiei (x,y,z;t)/(x',y',z';t') de la RI la (RI)' şi invers cu viteză infinită ($v_{max} \to \infty$) (relativitatea galileană) şi/sau cu vitază finită ($v_{max} = c$) (relativitatea einsteiniană); (δ) descrierea matematică a trecerii RI $\leftrightarrows$ (RI)' sau problema relaţiilor matematice de trecere (transformările Galilei, respectiv TrLS); (ε) consecinţele cinematice ale relaţiilor de trecere de la RI la (RI)' şi invers etc.

3.13.0.6 Problema {RI} şi principiul relativităţii einsteiniene (PRE)

Conform detalierii (α)→(ε) din 3.13.0.5, *problema referenţialelor inerţiale* {RI} *este una fundamentală în Teoria Relativităţii Restrânse* (TRR) sau *Speciale* (TRS) ca şi în întrega *Teorie a Relativităţii* (galileană şi eінteiniană). De aceea, formularea principiului relativităţii *einsteiniene* (PRE) din TRR/TRS, ca *principiu special al relativităţii* şi ca generalizare Enstein (1905) a principiului mecanic al relativităţii (formulat de Galilei), *afirmă în esenţă că toate referenţialele inerţiale* {RI} *sunt echivalente în raport cu legile fizicii,* sau invers *legile fizicii nu pot să depindă de referenţialele inerţiale la care sunt raportate fenomenele fizice,* TRR având în vedere fenomenele mecanice şi cele electromagnetice ce se produc în {RI}.

3.13.0.7 Mărimi cinematice fundamentale în mecanica nerelativistă (în modelul galileano-newtonian (MGN))

Caracterizarea completă a *stării mecanice* $\Sigma_m(t)\equiv(x,y,z;t)$ şi a *mişcării mecanice* ca fenomenul fizic de trecere $\Sigma_m(t_i)\to\Sigma_m(t_f)$, prin raportarea la {RI} impune următoarele *mărimi fizice fundamentale*:

(a) vectorul de poziţie $\vec r$ cu cele trei componente ale sale scalare (x,y,z), $\vec r = x\vec 1_x + y\vec 1_y + z\vec 1_z$, (x,y,z) conducând la modulul $|\vec r| \equiv r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, măsurat în unităţi de lungime;

(b) vectorul viteză $\vec v$, ca mărimea fizică vectorială ce măsoară variaţia în timp a lui $\vec r$, definită prin $\vec v \equiv \dot{\vec r} \equiv \dfrac{d\vec r}{dt} \equiv \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{d\vec r}{dt} \equiv \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec r(t)-\vec r(t_0)}{t-t_0}$, având modulul $|\vec v| \equiv v = (\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)^{1/2}$, măsurat în m/s;

(c) vectorul acceleraţie $\vec a$, ca mărimea fizică ce măsoară variaţia în timp a lui $\vec v$, definită prin $\vec a \equiv \dot{\vec v} \equiv \dfrac{d\vec v}{dt} \equiv \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{d\vec v}{dt} \equiv \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\vec v(t)-\vec v(t_0)}{t-t_0} \equiv \dfrac{d^2\vec r}{dt^2} \equiv \ddot{\vec r}$;

(d) durata $\Delta t = t - t_0$ ($t > t_0$) în care au loc variaţiile $\Delta\vec r = \vec r(t) - \vec r(t_0)$ şi $\Delta\vec v = \vec v(t) - \vec v(t_0)$. Trebuie specificat că, în cazul în care se consideră $t_0=0$, Δt se reduce la o *durată* t, care nu trebuie confundată cu *momentul de timp* t, la care se face marcarea măsurării coordonatelor (x,y,z) ale lui $\vec r$, sau *marcarea* componentelor $(v_x,v_y,v_z) \equiv (\dot x, \dot y, \dot z)$ ale vitezei $\vec v$.

În cazul formulării cuadridimensionale a TRR/TRS în spaţiul evenimentelor $\mathcal{S}_M$, mărimile fizice vectoriale se vor transforma în mărimi fizice cuadrivectoriale reprezentate de *cuadrivectori* (vectori generalizaţi de 4 componente), precum *cuadrivectorul de poziţie* ($\mathcal{R}$), cuadriviteza ($\mathcal{U}$), cuadriacceleraţia ($\mathcal{A}$) etc.

3.13.0.8 Impulsul mecanic ca mărime fizică fundamentală cinematico-dinamică. Problema masei de mişcare/masei inerţiale

Conform definiţiei sale, respectiv legăturii sale cu viteza $\vec v$ a unui punct material de masă m, *impulsul* $\vec p$ *al punctului material* ($\vec p = m\vec v$) reprezintă o mărime fizică hibridă cinematico-dinamică, deoarece variaţia lui în raport cu timpul conduce, de la *studiul cinematic al mişcării, la studiul ei dinamic*, prin cauza mişcării dată de interacţiunea dintre sistemele mecanice, cauză măsurată prin *mărimea fizică* *dinamică* forța $\vec{F}$ ($\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}$). Rolul cinematico-dinamic al $\vec{p}$ fiind acela de a pune în evidență legătura fizico-matematică dintre $\vec{p}$ și $\vec{v}$, rezultă importanța *problemei masei de mișcare* (masei inerțiale) a unui corp $\left(m=\frac{|\vec{p}|}{|\vec{v}|}\right)$ sau a unui sistem mecanic, după cum s-a putut vedea în *Partea a 2ª* a cursului de față (v. "Elemente de Fizică Teoretică (I)", Ed. Universității din București, 1998), prin formalismul analitic Hamilton (FA$\mathcal{H}$) având la bază ($\{p_i;q_i\}$) (ca parametrii analitici Hamilton) și funcția analitică Hamilton ($\mathcal{H}(\{p_i;q_i\})$) de stare mecanică. Deoarece, în TRR/TRS, *masa de mișcare* variază cu viteza [$m=m(v^2)$], *problema relativistă a masei de mișcare* (sau a masei inerțiale, sau a masei cinematice) prin $m=m(v^2)$ fiind o consecință dinamică a TrLS (3.61), va fi tratată în cap. IV (destinat *dinamicii relativiste a punctului material*), unde vectorul $\vec{p}$ va fi înlocuit cu *cuadrivectorul impuls* $\mathcal{P}(\{p_j\})$ în a cărui componentă va intra.

3.13.0.9 Precizări asupra cinematicii relativiste ca parte a TRR/TRS aplicată

(p_1) *În cinematica relativistă* (ca și în dinamica relativistă), ca TRR/TRS aplicată generând *modelul teoretic relativist* (MTR), *cu teoria sa fundamentată în spațiul cuadridimensional* Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (universul spațiu-timp), *mărimile fizice vectoriale* ($\vec{r},\vec{v},\vec{a},\vec{p},\vec{F}$ etc) vor fi înlocuite cu *mărimi fizice cuadrivectoriale* ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$ etc.), cuadrivectori care le reprezintă, având 4 componente (în loc de 3), se transformă în sens Lorentz (după TrLS), când are loc trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'.

(p_2) *Cuadrivectorii cinematici* ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ etc.) vor ține cont de toate cele 4 coordonate generalizate $\{x_j\}\equiv\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\equiv\{x,y,z,ict\}$ care caracterizează *starea mecanică relativistă a unui punct material*, în acest caz *starea mecanică* reprezentând tocmai *evenimentul fizic relativist* precizat în cap.0 al *Părții a 3ª* a cursului de FT (de față).

(p_3) *Cinematica relativistă*, ca TRR/TRS aplicată, este formal asemănătoare cu *cinematica mecanicii clasice*, cu deosebirea că locul transformărilor Galilei (3.1)-(3.2) va fi luat de TrLS (3.61), iar locul mărimilor fizice vectoriale va fi luat de mărimile fizice cuadrivectoriale.

(p_4) Relațiile cinematice dintre cuadrivectorii relativiști vor fi generalizări ale celor dintre vectorii nerelativiști și vor reprezenta, tocmai, *legile cinematice relativiste ale mișcării.*

3.13.0.10 Observație finală. Mărimi fizice proprii (de repaus) și mărimi fizice cinematice (de mișcare)

Raportarea mișcării punctului material la cele două referențiale RI și (RI)' cu (RI)' în MRU cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$=const. în lungul axei Ox a lui RI (v.fig. 3.3(b)), introduce în TRR/TRS în general și în orice domeniu de FT reformulat relativist (ca TRR/TRS aplicată) în special, *două categorii de mărimi fizice relativiste distincte*:

(c_1) *mărimile fizice proprii sau mărimile fizice de repaus* ale obiectului/sistemului fizic (O_f/S_f) ca mărimile fizice raportate la/măsurate în *referențialul inerțial propriu* ($(RI)_0\equiv(RI)'$) O_f/S_f;și

(c_2) *mărimile fizice de mișcare sau mărimile fizice cinematice* ale aceluiași O_f/S_f dar raportate la/măsurate în orice alt RI, altul decât cel propriu. Aceste aspecte vor fi detaliate în continuare, semnalând *incapacitatea mecanicii clasice* de a disjunge între *mărimi fizice proprii* (de repaus) și *mărimi fizice de mișcare* (cinematice), iar când reușește punerea in evidență a existenței unei mărimi fizice proprii, nu o poate clarifica (*preciza*) pe deplin.

3.13.1 Noțiuni și concepte fizice fundamentale ale TRR/TRS. Referențialul propriu (RI). Mărimi fizice proprii (de repaus). Mărimi fizice de mișcare (cinematice)

3.13.1.0Precizare metodologică relativistă

Studiul mișcării relativiste în TRR/TRS, prin utilzarea transformărilor Lorentz speciale (TrLS), cere *clarificarea rolului referențialului inerțial* $(RI)_0$ *legat solidar de punctul material/obiectul fizic/sistemul fizic* (care efectuează mișcarea) și în care se fac măsurători de mărimi fizice (distanță, durată, vector de poziție, volum, masă, energie etc.) cu instrumente de măsură legate solidar de acest referențial $(RI)_0$, de clarificat între *referențialele reciproc inerțiale* RI ⇆ (RI)', cu *trecerea reciprocă de la unul la celălalt descrisă de* TrLS (3.61). Precizarea *referențialului propriu* $(RI)_0$ este cerută şi de interpretările fizice relativiste pentru consecințele cinematice şi dinamice ale TrLS, ca şi de *definirea mărimilor fizice proprii (de repaus)*, mărimi introduse tocmai de TRR/TRS.

3.13.1.1 Referențial inerțial propriu ($(RI)_0$)

(a) *Definiție 1.* <Numim *referențial inerțial propriu* $(RI)_0$, referențialul legat solidar de obiectul fizic (O_f)/sistemul fizic (S_f) a cărui mişcare este raportată la un alt RI cu care $(RI)_0$ este *reciproc inerțial*>.

(b) *Consecință a definiției 1.* O definiție echivalentă pentru $(RI)_0$ mai este aceea că <$(RI)_0$ este acel referențial ce este în repaus față de O_f/S_f luat în considerare pentru a i se studia mişcarea prin raportarea la RI ⇆ (RI)'>.

(c) *Definiție 2.* <Numim *referențiale reciproc inerțiale* [RI şi (RI)'] două referențiale inerțiale, cu oricare dintre ele aflat în mişcare rectilinie şi uniformă (MRU) relativă unul față de celălalt>.

(d) *Observație.* Cazul cel mai simplu de referențiale reciproc inerțiale apare ca fiind cel în care unul din ele se mişcă cu $\vec{v}_T$=const (viteză de transport) în lungul axei Ox a celuilalt. Este cazul referențialelor RI ⇆ (RI)' considerate, conform figurii 3.3(b), pentru TrLS (3.61).

(e) *Reevaluarea notației* RI ⇆ (RI)'. Introducerea referențialului propriu $(RI)_0$ face ca raportarea, de până acum, la RI şi (RI)', deja specificată, *să se inverseze* în forma $(RI)'\equiv(RI)_0$ ⇆ RI, *urmărind a lega evenimentul propriu* $(x_0,y_0,z_0,ict_0)\equiv(x',y',z',ict')$, raportat la $(RI)'\equiv(RI)_0$, de *evenimentul* (x,y,z,ict) raportat la RI, care se deplasează cu $\vec{v}'\equiv-\vec{v}_T$ în sens contrar lui $(RI)'\equiv(RI)_0$, în lungul aceleiaşi axe, ca şi cea din situația directă când se consideră că (RI)' se deplasează cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$.

(f) *Consecința relativistă fundamentală în* TRR/TRS *şi în cinematica relativistă* a introducerii referențialului propriu $(RI)_0$ este *introducerea mărimilor fizice proprii sau de repaus* (vector de poziție, lungime, volum, durată, masă, impuls, energie etc.) şi departajarea lor de mărimile *fizice de mişcare (cinematice)* corespunzătoare.

3.13.1.2 Mărimi fizice relativiste proprii (sau de repaus)

(a) *Definiție*: <Numim *mărimi fizice proprii (de repaus)* acele mărimi fizice caracterizând un O_f/S_f care sunt măsurate în referențialul propriu O_f/S_f ((RI_0)), cu instrumentele de măsură din $(RI)_0$>.

(b) *Consecință. Mărimile fizice proprii (de repaus)* îşi păstrează valoarea constantă față de TrLS (3.61), atunci când are loc trecerea $(RI)_0\equiv(RI)'$ ⇆ RI, adică *sunt invarianți relativişti speciali.*

(c) *Principalele mărimi fizice proprii (de repaus)* pentru un O_f/S_f a cărui mişcare relativistă este luată în considerare sunt: *vectorul de poziție propriu* ($\vec{r}_0$), *lungimea proprie* (l_0), *volumul propriu* (V_0), *viteza proprie* ($\vec{v}_0$), *accelerația proprie* ($\vec{a}_0$), *masa proprie sau de repaus* (m_0), *impulsul propriu* ($\vec{p}_0$), *energia de repaus sau proprie* (E_0 sau $W_0^{(r)}$), *funcția analitică Lagrange relativistă proprie* ($\mathcal{L}_0^{(r)}$), *funcția analitică Hamilton relativistă proprie* ($\mathcal{H}_0^{(r)}$) etc. De asemenea, *durata proprie* $(\Delta t)_0\equiv(\Delta t)_{(RI)_0}$, corespunzătoare unui fenomen fizic raportat la $(RI)_0$ şi măsurată cu ceasornicul propriu din $(RI)_0$.

(d) *Observație.* Toate interpretările fizice relativiste ale consecințelor cinematice şi dinamice ale TrLS (3.61) fac o comparare a invarianței/constanței mărimilor fizice proprii (de repaus) cu comportarea relativistă a *mărimilor fizice de mişcare (cinematice)*.

(e) *Notația mărimilor fizice proprii (de repaus).* Toate mărimile fizice relativiste proprii (de repaus) primesc *un indice zero* la simbolul literal ce le reprezintă (l_0, V_0, $t_0\equiv\tau$, m_0, $W_0^{(r)}$, $\mathcal{H}_0^{(r)}$, $\mathcal{L}_0^{(r)}$ etc.).

3.13.1.3 Mărimi fizice relativiste de mişcare (sau cinematice)

(a) *Definiție*: <Numim mărimi fizice de mişcare (cinematice) acele mărimi fizice ce sunt măsurate în RI [aflat în mişcare față de referențialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ al O_f/S_f] şi măsurate cu instrumente de măsură ataşate lui RI în mişcare>.

(b) *Consecință*. Mărimile fizice de mişcare (cinematice) nu îşi păstrează constantă valoarea față de TrLS, adică *nu sunt invarianți relativişti*. Modul lor de variație în raport cu mărimile fizice proprii (de repaus) corespunzătoare reprezintă consecințe cinematice şi/sau dinamice ale TrLS.

(c) *Principalele mărimi fizice de mişcare (cinematice)* pentru un O_f/S_f sunt: vectroul de poziție ($\vec{r}$), lungimea (l), volumul (V), durata (Δt), viteza ($\vec{v}$), accelerația ($\vec{a}$), masa (m), impulsul ($\vec{p}$), energia cinetică ($W_{cin}^{(r)}$), energia totală ($W_t^{(r)}$) etc., fiecare cu atributul "de mişcare" sau "cinematică" dacă acesta este necesar.

(d) *Notație*. Mărimile fizice de mişcare (cinematice) se notează fără indicele zero al mărimilor proprii (de repaus) ($\vec{r}$, l, V, t, $\vec{v}$, $\vec{a}$, m, $W_{cin}^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$ etc.).

3.13.2 Invarianții relativişti (sau invarianții Lorentz) şi invarianță relativistă/invarianță Lorentz-concepte fundamentale ale TRR/TRS

3.13.2.0Precizare metodologică

Între mărimile fizice $\{M_f\}$ ce caracterizează cinematic, respectiv dinamic mişcarea mecanică relativistă, în TRR/TRS apare cazul special al acelor $\{M_f\}$ care îşi păstrează neschimbată valoarea la trecerea RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$. Aceste $\{M_f\}$ poartă numele de *invarianți Lorentz* sau *invarianți relativişti* şi sunt concepte fundamentale ale TRR/TRS, deoarece invarianța lor este echivalentă cu o conservare în raport cu TrLS şi de aceea, pot furniza *legi fizice* în cadrul mecanicii relativiste fundamentată cuadridimensional în $\mathcal{S}_M$

3.13.2.1 Definiția invariantului relativist (invariantului Lorentz)

<Numim invariant relativist/invariant Lorentz mărimea fizică (M_f) care îşi păstrează valoarea constantă în aplicarea transformărilor Lorentz speciale (TrLS) (3.61), ce descriu matematic trecerea reciprocă de la un referențial inerțial la altul [RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$], în care are loc măsurarea (M_f)>.

3.13.2.2 Consecință

Definiția de mai sus arată că un invariant relativist îşi conservă valoarea scalară, sau setul de valori scalare dacă este M_f vectorială sau tensorială, valoarea/valorile ce se conservă fiind cea/cele masurată/măsurate în referențialul propriu $(RI)_0$. Reluăm precizarea că, în considerarea referențialelor reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)' (cu $\vec{v}_{(RI)} \equiv \vec{v}_T$ de transport) (conform figurii 3.3(b)), avem $(RI)_0 \equiv (RI)'$.

3.13.2.3 Tipuri de invarianți relativişti

Conform definiției 3.13.2.1 şi consecinței sale 3.13.2.2, invarianții relativişti pot fi de 3 tipuri, după comportarea matematică a M_f prin valoarea numerică scalară pe *direcțiile* SdR al referențialelor inerțiale, *ca sistemul de axe de coordonate considerat*:

(a) *invarianți relativişti scalari* [ca de ex.: toate constantele fizice universale (ε_0, μ_0, c, k_B, h etc.), sarcina electrică (q), acțiunea Hamilton relativistă proprie $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}_0^{(r)} d\tau$, *mărimile fizice proprii (de repaus)* (l_0, V_0, $t_0 \equiv \tau$, m_0, $W_0^{(r)}$,funcția Lagrange relativistă proprie $\mathcal{L}_0^{(r)}$ etc.)].

(b) *Invarianți relativişti cuadrivectoriali din* $\mathcal{S}_M$ (spațiul Minkowski sau universul spațiu-timp), precum: *intervalul relativist cuadridimensional* [obținut din componentele scalare ale cuadrivectorului de poziție $\mathcal{R}(\{x_j\}; j=\overline{1,4})$] (v.secv.3.11.6.4), *volumul elementar cuadridimensional* [$d\mathcal{V}_0^{(4)} = \prod_{j=1}^{4} dx_j^0 = \prod_{\kappa=1}^{4} dx_\kappa$], *invariantul relativist construit din componentele* *scalare ale cuadrivitezei* $\left(I_{u} \equiv \sum_{j=1}^{4} u_j^2 = -c^2\right)$, *invariantul relativist construit din componentele scalare ale cuadriimpulsului* $\left(I_{p} \equiv \sum_{j=1}^{4} p_j^2 = -m_0c^2\right)$, etc.

(c) *Invarianţi relativişti tensoriali*, ca acei invarianţi posibil de construit din componentele tensoriale ale $\{M_f\}$ cuadritensoriale [precum cuadritensorii electromagnetici câmp $\{\phi\}$, excitaţie $\{\Gamma\}$, polarizare $\{\Pi\}$].

3.13.2.4 Invarianţă relativistă/invarianţă Lorentz

(a) *Precizare noţional-conceptuală.* Între conceptul de *invariant relativist* (invariant Lorentz) şi cel de *invarianţă relativistă* (invarianţă Lorentz) trebuie făcută o distincţie legată de diferenţa dintre *valoare scalară* şi *formă (expresie) matematică.*
(b) *Invarianţii relativişti sunt mărimi fizice* prin valorile lor numerice/scalare sau prin combinaţii scalare ale valorilor componenetelor lor scalare.
(c) *Invarianţa relativistă* este o comportare fundamentală a *formelor* (expresiilor) *matematice* (a mărimilor fizice, a legilor fizice) *care rămân de acelaşi tip, sau se conservă nedepinzând de referenţialele inerţiale*, în acţiunea TrLS (3.61) descriind trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$.
(d) *Conform definiţiei* (c), cuadrivectorul de poziţie $\mathcal{R}(\{x_j\})$, de exemplu prezintă *invarianţă relativistă*, deoarece vom avea

$\mathcal{R}_{RI}=\mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv\mathcal{R}(x,y,z,ict)=\mathcal{R}'(x_1', x_2', x_3', x_4')=\mathcal{R}'(x',y',z',ict')\equiv\mathcal{R}_{(RI)'}\equiv\mathcal{R}_{(RI)_0}$,

acest cuadrivector transformându-se în sens Lorentz, potrivit cu (3.100) care, în acest caz, este identică cu TrLS (3.61). Această modalitate de conservare a *formei matematice* poartă numele de *simetrie faţă de legea de transformare* şi este asemeni celei din cazul particular de invarianţă relativistă/Lorentz a ecuaţiei electromagnetice de propagare, al cărei operator D'Alembert invariant a fost utilizat pentru a stabili în TRR/TRS transformările Lorentz generale (TrLG). Aceluiaşi mod de comportare i se supune şi *intervalul relativist cuadridimensional*, ca şi *volumul cuadridimensional elementar*, care au fost incluşi şi la *invarianţii relativişti* deoarece "*modulul*" *lor cuadridimensional* este un scalar posibil de evidenţiat ca un invariant numeric.

3.13.3 Concluzii fundamentale din baza noţional/conceptuală a TRR/TRS în baza noţional/conceptuală a cinematicii relativiste

(C_1) *Starea mecanică relativistă* este definită cinematic prin noţiunea de *eveniment fizic relativist* desemnat de setul $e_r \equiv \{x_j\}$ ($j=\overline{1,4}$)≡{x,y,z,ict} cu corespondentul său mecanic nerelativist e≡{x,y,z,t}.

(C_2) *Raportarea mişcării mecanice* la mulţimea de referenţiale {R} evidenţiază pe cele inerţiale {RI}, între care două asociate unul celuilalt impun trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)', cu (RI)' deplasându-se cu $\vec{v}_T \equiv \vec{v}_x$=const. în lungul axei Ox a lui RI considerat fix (conf. fig. 3.3(b)).

(C_3) În fiecare din cele două *referenţiale reciproc inerţiale* RI şi (RI)' *există câte o riglă şi un ceasornic asociate* cu SdR (ca sistem de axe de coordonate aparţinând referenţialului), pentru măsurarea lungimilor (distanţelor) şi marcarea poziţiei, respectiv pentru marcarea momentelor de timp diferite, măsurătorile furnizând *pentru acelaşi eveniment fizic exprimările matematice*:

e_{RI}≡(x,y,z,t) şi/sau $e_{RI}^{(r)}$=(x,y,z,ict)≡$\{x_j\}$($j=\overline{1,4}$), respectiv

$e_{(RI)'}$≡(x',y',z',t') şi/sau $e_{(RI)'}^{(r)}$=(x',y',z',ict')≡$\{x'_j\}$($j=\overline{1,4}$). Acest fapt arată că există *un timp local al referenţialului*, ca şi o lungime l_{RI}≡l, respectiv $l_{(RI)'}\equiv l_{(RI)_0}\equiv l'\equiv l_0$ a riglelor în fiecare referenţial. Apare aici şi problema sincronizării ceasornicelor şi a simultaneităţii evenimentelor ce au loc în {RI} diferite, ca şi problema *echivalenţei dintre rigla (ca etalon) cu unitatea ei de măsură şi lungimea măsurată prin suprapunere şi comparare.* De asemenea, *problema echivalenţei dintre momente marcate de un ceasornic şi aceleaşi momente de desfăşurare a unui fenomen fizic a cărui durată este marcată cu ceasornicul referenţialului* în care se desfăşoară fenomenul, *problemă numită şi a etalonului de timp.*

(C_4) *Trecerea reciprocă* RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$ *este descrisă matematic de transformările Lorentz speciale* (TrLS) (3.61) legând $e_{RI}^{(r)}$ de $e_{(RI)'}^{(r)}$, sau invers, prin efectuarea trecerii reciproce (x,y,z,ict) ⇆ (x',y',z',ict') [echivalentă cu trecerea (x,y,z,t) ⇆ (x',y',z',t')], în condiţiile respectării PIVMPI (principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor).

(C_5) Pentru tratarea fizico-matematică a consecinţelor cinematice, ca şi a celor dinamice, ale TrLS (3.61), *trebuie* introdus *conceptul de referenţial inerţial propriu* (RI)$_0$, care va schimba notaţia referenţialelor reciproc inerţiale din RI ⇆ (RI)' în RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$ (uneori (RI)$_0$ ⇆ RI).

(C_6) Cu ajutorul referenţialului inerţial propriu (RI)$_0$ se definesc şi se introduc *mărimile fizice proprii de repaus)*, care *întotdeauna sunt invarianţi relativişti* (invarianţi Lorentz), constituind *reperul* de comparaţie pentru *modul de variaţie (comportarea relativistă) a mărimilor fizice de mişcare (cinematice).*

(C_7) *Mărimile fizice măsurate în raport cu* RI (în MRU faţă de (RI)$_0$ cu $\vec{v}\,'_{RI}=-\vec{v}_T$=const.) sunt *mărimi fizice de mişcare* (cinematice) şi acestora li se va studia comportarea în trecerea (RI)$_0$ ⇆ RI, conducând la enunţarea, interpretarea şi precizarea *consecinţelor cinematice şi dinamice ale* TrLS.

(C_8) *Cuadrivectorii cinematici* [vector de poziţie ($\mathcal{R}$), viteză ($\mathcal{U}$), acceleraţie ($\mathcal{A}$) etc.] generalizează cuadridimensional vectorii ($\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ etc.) corespunzători şi vor permite punerea în evidenţă a acestor vectori ca aparţinând subspaţiului real $\mathcal{S}_R \equiv \mathcal{S}_{x,y,z}$ al subspaţiului cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$), ca şi a componentei sale reale vectoriale a cuadrivectorului, alături de componenta scalară imaginară a aceluiaşi cuadrivector, spaţiul $\mathcal{S}_M$ satisfăcând produsul tensorial al celor două subspaţii $\mathcal{S}_M=\mathcal{S}_R\otimes\mathcal{S}_{ict}\equiv$ $\equiv\mathcal{S}_{x,y,z}\otimes\mathcal{S}_{ict}$.

(C_9) *Modulul cuadrivitezei* (vitezei cuadridimensionale) este independent de (RI)$_0$ şi RI, adică este un invariant relativist, după cum se va vedea în paragraful din cap. IV destinat cuadrivitezei.

(C_{10}) *Legile cinematicii relativiste sunt generalizări relativiste cuadridimensionale* ale legilor cinematicii nerelativiste, exprimând variaţia în raport cu timpul a cuadrivectorilor.

(C_{11}) Înainte de elaborarea efectivă a *cinematicii relativiste a punctului material*, este necesară *prezentarea consecinţelor cinematice ale* TrLS (3.61), pentru a pune în evidenţă întâia *infirmare a valabilităţii generale a legilor mecanicii clasice*, confirmând concluziile şi interpretarea teoretică a experienţelor Michelson-Morley (1881-1887), conform cărora *viteza luminii este independentă de oricare* RI *faţă de care este măsurată, precum şi de direcţia de deplasare a referenţialelor*, pe această cale evidenţiindu-se valabilitatea postulării PIVMPI.

3.14 Consecinţe cinematice ale transformărilor Lorentz speciale (TrLS) [Contracţia relativistă a lungimilor cinematice şi dilatarea relativistă a duratelor cinematice în lungul direcţiei de mişcare. Consecinţele contracţiei relativiste a lungimilor şi ale dilatării relativiste a duratelor, considerate separat şi combinat] (cc_1-cc_3)

3.14.0 Necesităţi noţional-conceptuale. Referenţial propriu (RI)$_0$. Mărimi fizice (lungime, durată, volum, vector de undă, pulsaţie, frecvenţă, lungime de undă) proprii (de repaus), respectiv de mişcare (cinematice)

3.14.0 1Definiţia lui (RI)$_0$

Definiţia lui (RI)$_0$ introduce referenţialul propriu ca acel referenţial inerţial faţă de care O_f/S_f considerat este în repaus, *echivalent*, acel referenţial inerţial ce are originea (O_0) fixată pe/în/de O_f/S_f considerat.

3.14.0.2 Definirea mărimilor fizice proprii (de repaus) ((M_f)$_0$). Lungime proprie(l_0). Volumul propriu (V_0). Durata proprie ((Δt)$_0$=τ). Vector de undă propriu ($\vec{\kappa}_0$)[pulsaţie proprie (ω_0), frecvenţă proprie (ν_0), lungime de undă proprie (λ_0)]

În consideraţiile următoare vor apare *mărimile fizice proprii* enumerate mai jos.

($D_1^{(0)}$) *lungime proprie de repaus* (l_0)≡ lungimea riglei legată solidar de referenţialului propriu (RI)$_0$. (în general plasată paralel cu axa în lungul căreia are loc mişcare referenţialului mobil) ($l_{(RI)_0}\equiv l_0$);

($D_2^{(0)}$) *volum propriu* (V_0)≡ volulmul O_f măsurat în raport cu referenţialul $(RI)_0$ propriu ($V_{(RI)_0} \equiv V_0$);

($D_3^{(0)}$) *durată proprie* [$(\Delta t)_0 \equiv \tau$] sau *timp propriu*≡ durata dintre două evenimente ce au loc în acelaşi punt fix (imobil) faţă de $(RI)_0$ propriu şi măsurată cu ceasornicul legat solidar de $(RI)_0$ ($\Delta t_{(RI)_0} \equiv \tau$);

($D_4^{(0)}$) *vector de undă propriu* ($\vec{k}_0$)≡ vectorul de undă măsurat în raport cu $(RI)_0$ ce se deplasează simultan cu unda considerată (faţă de care unda este în repaus) ($\vec{k}_{(RI)_0} \equiv \vec{k}_0$);

($D_5^{(0)}$) *pulsaţia proprie* (ω_0)/frecvenţa proprie (ν_0)/*lungimea de undă proprie* (λ_0)≡ pulsaţia/frecvenţa/lungimea de undă măsurate în $(RI)_0$ propriu undei considerate ($\omega_{(RI)_0} \equiv \omega_0$; $\nu_{(RI)_0} \equiv \nu_0$; $\lambda_{(RI)_0} \equiv \lambda_0$).

Alte *mărimi fizice proprii* vor putea fi considerate în funcţie de domeniul de FT care se reformulează relativist, cum se va întâmpla în cap. VII-X, unde pot apărea *mărimi fizice proprii* mecano-analitice, termodinamice, electromagnetice etc.

3.14.0.3 Definirea mărimilor fizice de mişcare (cinematice). Lungime cinematică (l). Durată cinematică (Δt). Volum cinematic (de mişcare) (V). Vector de undă cinematic ($\vec{k}$)[pulsaţie (ω), frecvenţă (ν), lungime de undă (λ) cinematice]

Setului $\{D_j^{(0)}\}$ $(j=\overline{1,5})$ de *mărimi fizice proprii (de repaus)* de mai sus îi corespunde un set de *mărimi fizice cinematice (de mişcare)* pe care le vom defini în continuare.

(D_1) *lungime cinematică (de mişcare)* (l)≡ lungimea riglei (considerate) măsurată în alt referenţial inerţial, altul decât cel propriu $(RI)_0$, echivalent lungimea riglei măsurată în acel RI care este în MRU faţă de riglă (şi cu rigla ataşată acelui RI) ($l_{RI} \equiv l$);

(D_2) *volum cinematic (de mişcare)*≡ volumul obiectului fizic (O_f) măsurat în raport cu RI, altul decât cel propriu $(RI)_0$ ($V_{RI} \equiv V$);

(D_3) *durata cinematică* (de mişcare) sau *timp cinematic* (Δt)≡ durata dintre două evenimente ce au loc în acelaşi punct fix (imobil) faţă de orice RI, altul decât $(RI)_0$ şi măsurată cu ceasornicul legat solidar de acel RI ($\Delta t_{RI} \equiv \Delta t$);

(D_4) *vector de undă cinematică* ($\vec{k}$)≡ vectorul de undă măsurat în orice alt RI, altul decât $(RI)_0$ al undei considerate ($\vec{k}_{RI} \equiv \vec{k}$);

(D_5) *pulsaţia* (ω)/*frecvenţa*(ν)/*lungimea de undă*(λ) *cinematice (de mişcare)*≡ pulsaţia/frecvenţa/ lungimea de undă măsurate în raport cu orice RI, altul decât $(RI)_0$ al undei considerate. Setul de $\{M_f\} \equiv \{\omega, \nu, \lambda\}$ respectiv $\{(M_f)_0\} \equiv \{\omega_0, \nu_0, \lambda_0\}$ din definiţiile $D_5^{(0)}$ şi D_5 vor fi necesare tratării cinematice a efectului Doppler-Fizeau (EDF).

3.14.1 Modificarea notaţiei din TrLS (3.61) conformă cu introducerea referenţialului inerţial propriu $(RI)_0$ şi a substituţiei R ⇆ (RI)' cu $(RI)_0$ ⇆ RI. Precizare metodologică şi relativistă conformă cu TRR/TRS

Deoarece *se va considera*, în figura 3.3(b), *referenţialul* $(RI)' \equiv (RI)_0$ *ca referenţialul inerţial propriu* O_f/S_f *căruia i se studiază mişcarea raportată la referenţialele reciproc inerţiale* RI ⇆ $(RI)' \equiv (RI)_0$, va fi necesară o modificare în TrLS (3.61), cerută de faptul că RI se deplasează cu $\vec{v}' = \vec{v}_{RI} = -\vec{v}_T$, în sens contrar mişcării lui (RI)' faţă de RI şi de *înlocuirea mărimilor fizice primate* (') *cu mărimi fizice indicate cu zero, ca mărimi fizice proprii(de repaus)*. Această modificare face ca pentru trecerea $(RI)' \equiv (RI)_0$ → RI să avem *transformările Lorentz speciale directe*:

(3.63) (a) $$x = \frac{x_0 + v_T t_0}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}, y = y_0, z = z_0, t = \frac{t_0 + \frac{v_T}{c^2} x_0}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}},$$ iar pentru trecerea RI → $(RI)_0$

transformările Lorentz inverse:

$$(3.63)\ (b) \qquad x_0 = \frac{x - v_T t}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}, y_0 = y, z_0 = z, t_0 = \frac{t - \frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}.$$

Relațiile (3.63) incluzând modificarea $(RI)' \equiv (RI)_0$ şi fixarea acestui referențial de O_f/S_f considerat vor fi utilizate pentru obținerea expresiei *contracției relativiste (contracția Fitzgerald-Lorentz) a lungimilor*, respectiv pentru obținerea *dilatării relativiste a duratelor*. Modificarea de mai sus, serveşte cel mai bine înțelegerii consecințelor cinematice al TrLS, prin *experimente mintale* în care un observator este plasat într-o navă cosmică, ce se deplasează față de Pământ/Terra (cu RI al său), având $v_{navă} \equiv v_T \sim c$, referențialul inerțial legat solidar de navă fiind considerat ca $(RI)' \equiv (RI)_0$ adică *referențialul propriu navei*, în care o riglă legată solidar de navă *are lungimea proprie* $l_0 \equiv l_{(RI)_0 \equiv (RI)'} \equiv x_0^{(2)} - x_0^{(1)}$, respectiv care are *lungimea cinematică* (de mişcare) $l_{RI} \equiv l = x^{(2)} - x^{(1)}$ față de RI fixat de Pământ. De asemenea, în navă cu al său $(RI)_0$ propriu se află un ceasornic legat solidar de navă măsurând *durata proprie* (timpul propriu) $(\Delta t)_{(RI)_0} \equiv (\Delta t)_0 \equiv \tau = t_0^{(2)} - t_0^{(1)}$, pentru un fenomen ce are loc între momentele $t_0^{(1)}$ şi $t_0^{(2)}$, *pentru care ceasornicul solidar legat de* RI măsoară *durata cinematică* (timpul cinematic) $(\Delta t)_{RI} \equiv (\Delta t) = t^{(2)} - t^{(1)}$.

3.14.2 Enumerarea consecințelor cinematice ale TrLS ce vor fi tratate

Conform setului de consecințe cinematice şi dinamice ale TrLS (3.61) expuse în 3.12.4, subsetul de consecințe cinematice ale TrLS ce vor fi tratate va fi alcătuit din:

(cc_1) contracția relativistă a lungimilor cinematice în lungul direcției de mişcare;

(cc_2) contracția relativistă a volumului tridimensional cinematic al corpurilor în lungul direcției de mişcare;

(cc_3) dilatarea relativistă a duratelor cinematice în lungul direcției de mişcare;

(cc_4) legea (teorema) de compunere relativistă a vitezelor;

(cc_5) (a) ordinea de succesiune absolută numai pentru evenimente relativiste separate printr-un interval relativist temporal ($s^2 > 0$), respectiv

(b) ordinea de succesiune relativă pentru evenimente separate, printr-un interval relativist spațial ($s^2 < 0$);

(cc_6) simultaneitatea evenimentelor absolută numai pentru evenimente ce au loc în acelaşi moment;

(cc_7) excluderea posibilității de conexiune cauzală între evenimentul zero $e^{(0)}$ (0,0,0,0) al conului luminos şi evenimente exterioare acestuia, datorită separării lor de $e^{(0)}$ prin intervale relativiste spațiale ($s^2 < 0$);

(cc_8) efectul Doppler-Fizeau (EDF) relatvist (efectul Doppler-Fizeau transversal);

(cc_9) invarianții relativişti cinematici;

(cc_{10}) forma relativistă a legilor cinematicii prin cuadrivectori;

(cc_{11}) aplicații în domenii culturale (filosofia, lingvistica, gramatica, literatura, teologia, dogmatica, cunoaşterea paranormalului, ozenistica etc.).

În cele ce urmează vor fi tratate consecințele numerotate $\{cc_i\}$ $(i = \overline{1,11})$ în: subparagrafele 3.14.3, 3.14.4, 3.14.5 (cc_1-cc_3), paragraful 3.15 (cc_4), paragraful 3.16 (cc_5-cc_6) subparagrafele 3.16.8 (cc_7), paragraful 3.18 (cc_8), subparagraful 3.10.3 (invariantul cinematic relativist -intervalul relativist (3.36), demonstrat de secvența 3.11.6.4 prin (3.48)-(3.49)), subparagraful 3.14.7 (invariantul dV), subparagraful 3.17.4 [secv. 3.17.4.5, invariantul cinematic I_u (3.115)] (pentru (cc_9)), consecința (cc_{10}) în cap. IV, respectiv (cc_{11}) în paragraful 3.19. Alte consecințe cinematice ale TrLS (3.61) mai pot fi găsite în cap. VII-X.

3.14.3 (cc_1) Contracția relativistă a lungimii riglelor în lungul direcției de mișcare

3.14.3.1 Plasarea unei rigle paralel cu axele O_0x_0/Ox ale $(RI)_0 \leftrightarrows RI$. Lungime proprie (de repaus) l_0. Lungime cinematică (de mișcare) l.

În figura 3.3(b), se consideră o riglă legată solidar de $(RI)' \equiv (RI)_0$ ca referențial propriu riglei așezate paralel cu axa $O'x' \equiv O_0x_0$, încât, față de $(RI)_0$ în repaus cu rigla, *lungimea proprie (de repaus)* a riglei este dată prin (3.64) (a) $l_0 \equiv l_{(RI)_0} = x_0^{(2)} - x_0^{(1)}$, în timp ce, față de RI (în mișcare cu $\vec{v}_T' = -\vec{v}_T$ față de $(RI)_0 \equiv (RI)'$), aceeși riglă are *lungimea cinematică (de mișcare)* dată de (3.64) (b) $l \equiv l_{RI} = x^{(2)} - x^{(1)}$.

3.14.3.2 Aplicarea TrLS (3.63) la calculul lungimii cinematice l

Dacă abscisele capetelor riglei în raport cu RI, $x^{(1)}$ și $x^{(2)}$, se măsoară la același moment t, atunci, conform TrLS precizate prin (3.63) (b), *lungimea proprie (de repaus)* l_0 a riglei devine:

(3.65) $l_0 \equiv l_{(RI)_0} = x_0^{(2)} - x_0^{(1)} = \dfrac{x^{(2)} - v_T t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}} - \dfrac{x^{(1)} - v_T t}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}} = \dfrac{x^{(2)} - x^{(1)}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \dfrac{l}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, pe care o transcriem ca relație finală:

(3.66) (a) $l_0 = \dfrac{l}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ sau (b) $l_{(RI)_0} = \dfrac{l_{RI}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$. Din (3.66) avem, pentru *lungimea cinematică (de mișcare)* l:

(3.67) (a) $l = l_0 \sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}$ sau (b) $l_{RI} = l_{(RI)_0} \sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}$, necesare interpretărilor fizice ce urmează.

3.14.3.3 Contracția relativistă a lungimilor cinematice (contracția Fitzgerald-Lorentz). Interpretarea fizică a relațiilor (3.66)-(3.67)

Motivul pentru care s-a calculat $l \equiv l_{RI}$ prin $l_0 \equiv l_{(RI)_0}$ este faptul că *lungimea proprie* l_0, conform *definiției* din TRR/TRS a *mărimilor fizice proprii*, este un *invariant relativist*. Din același motiv, *comparația* dintre l_0 și l *trebuie* să vizeze *comportarea lungimii cinematice față de cea proprie*.

Ținând cont de principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor (PIVMPI), radicalul de ordinul doi din TrLS (3.61) și (3.63) satisface întotdeauna relația:

(3.68) $\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}} < 1$ (deaorece $v_T < c$), atingând valoarea maximă 1 *numai* când $v_T = c$. Cu (3.68) în (3.67) rezultă că (3.69) $l \equiv l_{RI} < l_0 \equiv l_{(RI)_0}$, ca o *consecință cinematică* a TrLS, *care afirmă că*: <*Lungimea cinematică (de mișcare)* a unei rigle suferă, în lungul direcției de mișcare, o *micșorare (contracție) relativistă față de lungimea proprie (de repaus)*>. Această *contracție relativistă* mai poartă și numele de *contracție Fitzgerald-Lorentz*.

3.14.3.4 Remarcă asupra contracției Fitzgerald-Lorentz

Dacă rigla este plasată sub un unghi α față de axa $O_0x_0 \| Ox$, contracția relativistă are loc numai asupra proiecției pe axa Ox, adică numai în lungul direcției de mișcare. Conform relației (3.67), $l = l_0$ numai în cazul $v_T \ll c$, când $v_T/c \to 0$, adică în cazul vitezelor de transport mici corespunzătoare mecanicii clasice, contracția Fitzgerald-Lorentz, este nesemnificativă sau neglijabilă. Limita maximă a acestei contracții s-ar obține pentru limita $v_T/c \to 1$, sau când $v_T \to c$. În acest caz, discuția nu mai are sens, deoarece doar fotonii ca particulele elementare ce poartă *informația luminoasă* se mișcă cu viteza c, iar *fotonii nu există decât în mișcare* (deci n-au caracteristici de repaus sau proprii în sensul definit prin mărimile fizice proprii). Alt argument în favoarea imposibilității contracției maxime, care ar face $l \rightarrow 0$ (când $v_T \rightarrow c$) este imposibilitatea atingerii vitezei c de către corpuri macroscopice cum ar fi riglele în discuție.

3.14.4 (cc_2) Contracția relativistă a volumului tridimensional cinematic al corpurilor

3.14.4.1 Consecință a contracției Fitzgerald-Lorentz (3.67)

Considerarea corpurilor cu $(RI)_0$ față de care RI se află în mișcare, conduce la contracția Fitzgerald-Lorentz în lungul direcției de mișcare (direcția $O_0x_0 \| Ox$), conformă cu relația (3.67), încât se poate vorbi de *contracția volumului cinematic al corpurilor* în raport cu *volumul propriu (de repaus)*. Fizico-matematic are sens *contracția Fitzgerald-Lorentz a volumului elementar tridimensional*, ca o consecință matematică a TrLS (3.61) sau (3.63).

3.14.4.2 Contracția volumelor cinematice elementare tridimensionale

Dacă față de $(RI)_0$ se introduce *volumul tridimensional elementar propriu (de repaus)*:

(3.70) $dV_0 = dx_0 dy_0 dz_0$, atunci în raport cu RI în mișcare față de $(RI)_0$ propriu corpului tridimensional considerat, *volumul tridimensional elementar cinematic (de mișcare)* este:

(3.71) $dV = dxdydz$, care prin TrLS (3.61)/(3.63) și prin (3.67) devine:

(3.72) $dV = (dV_0)\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}$, ținând cont că TrLS permit *contracția Fitzgerald-Lorentz* (conform (3.67))

(3.73) $dx = (dx_0)\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}$ și egalitățile (3.73') $dy = dy_0$ și $dz = dz_0$.

3.14.4.3 Interpretarea relativistă

Conform consecinței cinematice exprimată matematic prin (3.72), *volumul tridimensional elementar cinematic* (dV) suferă *o contracție (micșorare) relativistă, față de volumul tridimensional elementar propriu* (dV_0), *în lungul direcției de mișcare a referențialului inerțial* (RI) *altul decât cel propriu* (RI_0), deoarece $dV < dV_0$, conform cu (3.68).

3.14.4.4 Remarcă

Contracția relatvistă de mai sus este valabilă numai în spațiul tridimensional euclidian, în cel cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$) *volumul elementar cuadridimensional* fiind un *invariant relativist* după cum se va arăta în subparagraful 3.14.7. Pentru demonstrarea acestui din urmă invariant relativist, mai este necesară evidențierea dilatării duratelor, după ce a fost evidențiată contracția lungimilor.

3.14.5 (cc_3) Dilatarea relativistă a duratelor cinematice în lungul direcției de mișcare

3.14.5.1 Durata proprie sau timpul propriu ($(\Delta t)_0 \equiv (\Delta t)_{(RI)_0} \equiv \tau$)

Se consideră două evenimente e_1 și e_2 ce au loc în *același punct de abscisă* x_0 imobil față de $(RI)' \equiv (RI)_0$ ca referențial propriu, cele două evenimente fiind marcate de ceasornicul solidar cu $(RI)_0$ la momentele $t_0^{(1)}$ și $t_0^{(2)}$. Astfel, ceasornicul din $(RI)_0$ măsoară *durata proprie dintre cele două evenimente*

(3.74) (a) $(\Delta t)_0 \equiv \tau = t_0^{(2)} - t_0^{(1)} \equiv (\Delta t)_{(RI)_0}$ numită și *timpul propriu.*

Ca și în cazul lungimii proprii $l_0 = l_{(RI)_0}$, și durata proprie $(\Delta t)_0 \equiv \tau \equiv (\Delta t)_{(RI)_0}$ este un *invariant relativist.*

3.14.5.2 Durata cinematică sau timpul cinematic ($\Delta t \equiv (\Delta t)_{RI}$)

În raport cu orice alt referențial inerțial RI altul decât $(RI)_0$ propriu, ceasul legat solidar de RI marchează e_1 la momentul $t^{(1)}$, respectiv e_2 la momentul $t^{(2)}$, *durata dintre* e_1și e_2 fiind

(3.74) (b) $\Delta t = t^{(2)} - t^{(1)} \equiv (\Delta t)_{RI}$ ca *durata cinematică* sau *timpul cinematic.*

3.14.5.3 Aplicarea TrLS (3.63) la calculul duratei cinematice Δt

Cu TrLS (3.63) (a), durata cinematică Δt se scrie:

$$(3.75)\quad \Delta t \equiv (\Delta t)_{RI} = t^{(2)} - t^{(1)} = \frac{t_0^{(2)} + \frac{v_T}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} - \frac{t_0^{(1)} + \frac{v_T}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} = \frac{t_0^{(2)} - t_0^{(1)}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \frac{(\Delta t)_{(RI)_0}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \frac{(\Delta t)_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$

pe care o rescriem concis ca:

$$(3.76)\quad \Delta t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ forma matematică a consecinței cinematice a TrLS exprimând *dilatarea relativistă a duratei în lungul direcției de mișcare*. În cele ce urmează, se va ține cont că durata proprie $\tau \equiv (\Delta t)_0 \equiv (\Delta t)_{(RI)_0}$ este un invariant relativist, ca și lungimea proprie $l_0 \equiv l_{(RI)_0}$.

3.14.5.4 Interpretarea fizică relativistă a relației (3.76)

Conform relației (3.76), rezultă că *durata proprie dintre două evenimente* (sau *timpul propriu) este minimă*, în raport cu *durata cinematică* dintre aceleași evenimente, măsurată din alte referențiale inerțiale (RI), altele decât $(RI)_0$ propriu. Cu alte cuvinte, ceasornicul legat solidar de $(RI)_0$ *măsoară durate mai mici* între e_1 și e_2 decât ceasornicul legat solidar de RI (aflat în mișcare cu $\vec{v}_T' = -\vec{v}_T$ față de $(RI)_0 \equiv (RI)'$ (vezi fig. 3.3(b)), adică fenomenele fizice ce măsoară *durata proprie* $(\Delta t)_0 \equiv \tau \equiv (\Delta t)_{(RI)_0}$ față de $(RI)_0$ și care au loc în $(RI)_0$ se desfășoară mai *lent*, decât cele ce au loc în RI care măsoară $\Delta t \equiv (\Delta t)_{RI}$ ca *durata cinematică* sau invers, fenomenele fizice ce măsoară durata cinematică se desfășoară mai repede decât cele ce măsoară durata proprie. În acest mod "întârzierea" ceasornicului din $(RI)_0$ explică de ce avem $(\Delta t)_{RI} \equiv \Delta t > (\Delta t)_0 \equiv \tau$, ceea ce înseamnă *dilatarea relativistă a duratelor cinematice în lungul direcției de mișcare.*

3.14.5.5 Confirmarea experimentală a dilatării relativiste a duratelor cinematice. Experiențele cu miuonii din razele cosmice

Dilatarea relativistă a duratelor a fost confirmată experimental în cazul cercetărilor efectuate asupra particulelor miuoni (notate μ) din razele cosmice, când, prin măsurătorile efectuate asupra urmelor lăsate în *emulsiile nucleare* fixate pe plăci de sticlă plasate în sateliți, s-a constatat că *durata proprie de viață* a acestor particule, adică durata în raport cu referențialul propriu era $(\Delta t)_0 = \tau = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ sec. Tot experimental, s-a constatat că miuonii se mișcă cu viteze apropiate de viteza c a luminii și că, paradoxal, un observator de pe Pământ poate constata prezența miuonilor în plăci fotografice cu emulsii nucleare plasate pe sol, deși aceștia au fost produși în razele cosmice la 20 Km față de sol. Un simplu calcul arată că, nu *durata proprie* $(\Delta t)_0$ dată mai sus explică *paradoxul* miuonilor ce ajung la sol, ci *durata cinematică* $\Delta t = \frac{d}{c} \cong \frac{2 \cdot 10^4\,m}{3 \cdot 10^8\,m/s} \cong 6{,}6 \cdot 10^{-5}\,s > (\Delta t)_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-6}$ s.

Dacă se utilizează (3.76) care exprimă dilatarea relativistă a duratelor ca o consecință cinematică a TrLS (3.61(/(3.63), se poate evalua *viteza miuonilor* ca fiind

$v_T \equiv v_\mu = c\sqrt{1-\frac{(\Delta t)_0^2}{(\Delta t)^2}} \cong c\left[1-\frac{1}{2}\frac{(\Delta t)_0^2}{(\Delta t)^2}\right] \cong 2{,}997 \cdot 10^8\,m/s$ reprezentând 99,9% din c. De asemenea, se poate constata că pentru miuonii produși la înălțimea de 20 km și ajunși pe sol, utilizarea duratei proprii

$(\Delta t)_0$ ar conduce la o viteză $v_\mu > c$, ceeea ce ar infirma PIVMPI. Dilatarea relativistă *a duratei cinematice* ar explica "paradoxul gemenilor" enunţat după 1905 de Paul Langevin (1872-1946).

3.14.6 Consecinţă fundamentală a dilatării relativiste a duratelor cinematice (3.76). Relaţia dintre durata proprie elementară (timpul propriu elementar) $d\tau$ şi intervalul relativist elementar ds

Conform *definiţiei intervalului relativist* (3.26) sau (3.48), *intervalul relativist elementar* se scrie succesiv ca:

$$(3.77)\quad (ds)^2 = c^2(dt)^2 - [(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2] = c^2(dt)^2\left[1-\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{c^2}\right]=$$

$$=c^2(dt)^2\left[1-\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{c^2}\right]=c^2(dt)^2\left[1-\frac{v_T^2}{c^2}\right]=c^2\left[(dt)\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\right]^2=c^2d\tau^2,\ \text{dacă}$$

se ţine cont că (3.76) se scrie diferenţial (3.75') $dt=\dfrac{d\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$.

Din (3.77) rezultă *relaţia fundamentală*:

(3.78) $ds = c\cdot d\tau$ ca relaţia dintre *timpul propriu elementar* $d\tau$ şi *intervalul relativist elementar* ds, atât cel *propriu* cât şi cel *cinematic*, deoarece intervalul relativist (3.48) a fost demonstrat ca *invariant relativist (invariant Lorentz)* în secvenţa 3.11.6.4 din cap.II. Astfel (3.78) devine precizată ca:

(3.79) $ds = ds_0 = c\cdot d\tau$, cu indicele 0 legat de $(RI)_0$ propriu, adică (3.79) ţine cont că $ds \equiv ds_{RI}$ şi $ds_0 \equiv ds_{(RI)_0}$ în cadrul trecerii reciproce $(RI)_0 \leftrightarrows RI$.

3.14.7 Consecinţă combinată a contracţiei relativiste a lungimilor cinematice cu dilatarea relativistă a duratelor cinematice. Volumul elementar cuadridimensional invariant relativist

3.14.7.0 Precizare fundamentală

Ca urmare a combinării consecinţelor cinematice ale TrLS date matematic prin relaţia (3.67) şi (3.76), rezultă că *volumul elementar cuadridimensional din spaţiul* Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (universul spaţiu-timp) *este un invariant relativist (invariant Lorentz)*, ceea ce nu este cazul în spaţiul tridimensional euclidian.

3.14.7.1 Volumul elementar cuadridimensional propriu din $\mathcal{S}_M$ $(d\mathcal{V}_\mathcal{D})_0$

Considerând un element de volum în spaţiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$) ale cărui axe sunt O_0x_0, O_0y_0, O_0z_0 şi O_0ict_0 în $(RI)_0$ ca referenţial propriu, respectiv Ox,Oy,Oz şi Oict în RI ca referenţial în mişcare faţă de $(RI)_0$, rezultă *elementul de volum cuadridimensional propriu*:

(3.80) $d\mathcal{V}_{(RI)_0} \equiv (d\mathcal{V}_\mathcal{D})_0 = dx_0\cdot dy_0\cdot dz_0\cdot d(ic\tau)$.

3.14.7.2 Volumul elementar cuadridimensional cinematic din $\mathcal{S}_M$ $(d\mathcal{V}_\mathcal{D})$

Faţă de RI în mişcare în raport cu $(RI)_0$ propriu, *elementul de volum cuadridimensional cinematic* se scrie:

(3.81) $d\mathcal{V}_{RI} \equiv d\mathcal{V}_\mathcal{D} = dx \cdot dy \cdot dz \cdot d(ict)$, dacă *durata cinematică* sau *timpul cinematic* $\Delta t \equiv (\Delta t)_{RI}$ se notează simplu cu t, încât în spaţiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$) avem axele deja precizate prin *sistemul de referenţă* (SdR) din RI: Ox,Oy,Oz,Oict.

3.14.7.3 Acțiunea contracției relativiste și a dilatării relativiste în ($d\mathcal{V}_{\mathcal{D}}$) cinematic. Invarianța relativistă $d\mathcal{V}_{RI} \equiv d\mathcal{V}_{\mathcal{D}} = d(\mathcal{V}_{\mathcal{D}})_0 \equiv d\mathcal{V}_{(RI)_0}$

(a) Conform contracției relativiste a lungimilor (contracția Fitzgerald-Lorentz) în lungul direcției de mișcare, (3.67) aplicată abscisei dă din nou (3.73) și (3.73'), care în (3.81) conduc la:

$$(3.82) \quad d\mathcal{V}_{RI} \equiv d\mathcal{V}_{\mathcal{D}} = \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} \cdot dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0 \cdot (ic)dt \, .$$

(b) Utilizând în (3.82) dilatarea relativistă a duratelor exprimată din forma finită (3.75) în forma diferențială (3.75'), rezultă prin simplificarea radicalului de ordinul doi:

$$(3.83) \quad d\mathcal{V}_{RI} \equiv d\mathcal{V}_{\mathcal{D}} = dx_0 \cdot dy_0 \cdot dz_0 \cdot d(ic\tau) \equiv d(\mathcal{V}_{\mathcal{D}})_0 \equiv \mathcal{V}_{(RI)_0},$$ sau concis

$(3.83') \; d\mathcal{V}_{RI} \equiv d\mathcal{V}_{\mathcal{D}} = d(\mathcal{V}_{\mathcal{D}})_0 \equiv \mathcal{V}_{(RI)_0}$, afirmând *invarianța relativistă (invarianța Lorentz) a volumului elementar cuadridimensional*, la trecerea $(RI)_0 \leftrightarrows RI$, *ca o invarianță față de* TrLS (3.63)/(3.61) care descriu matematic trecerea reciprocă $(RI)_0 \leftrightarrows RI$ (3.63).

3.15 (cc_4) Legea (teorema) de compunere relativistă a vitezelor (LCRV)

3.15.0 Considerații generale. Justificare metodologică

Simpla precizare a faptului că în TRR/TRS $v_{max} \leq c \neq v_{max} \to \infty$ din mecanica clasică atrage după sine problema compunerii relativiste a vitezelor, în așa fel încât această realitate experimentală din TRR/TRS axiomatizată ca PIVMPI să fie reflectată în legea relativistă de compunere a vitezelor, care mai trebuie să exprime și *invarianța vitezei maxime* c *de propagare a interacțiunilor la distanță față de trecerea* RI $\leftrightarrows$ (RI)' sau $(RI)_0 \equiv (RI)' \leftrightarrows RI$.

De aceea elaborarea efectivă a unei cinematici relativiste necesită *precizarea modului de compunere a vitezelor*, deoarece *înlocuirea relațiilor de transformare* Galilei (3.1)-(3.2) sau (3.14)-(3.15) cu *relațiile de transformare Lorentz speciale* (TrLS) (3.61) sau (3.63), ca relațiile ce descriu matematic în TRR/TRS trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' și/sau $(RI)_0 \leftrightarrows RI$, atrage după sine și *înlocuirea legii clasice de compunere a vitezelor* (legea Galilei) cu o *lege relativistă de compunere*, care să plece de la TrLS (3.61) și nu de la transformările (3.1)-(3.2). Această lege relativistă se poate enunța și demonstra ca o teoremă. De asemenea, se va putea arăta că satisface *principiul de corespondență* (PdC) din TRR/TRS, având drept caz particular limită legea Galilei de compunere clasică, atunci când se face trecerea $v_T/c \to 0$ (sau $v_T << c$). În plus , această nouă lege va trebui să satisfacă și PIVMPI (principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor). Pentru demonstrarea legii relativiste de compunere a vitezelor vom apela la fig. 3.3(b) cu trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' pentru care este valabilă forma (3.61) a TrLS, apoi vom face adaptarea cerută de referențialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)' \leftrightarrows RI$ cu modificarea TrLS în forma (3.63). Paragraful 3.15 a fost destinat în întregime *consecinței cinematice* (cc_4) a TrLS (3.61) tocmai pentru a pune bine în lumină importanța legii relativiste de compunere a vitezelor în cadrul *cinematicii relativiste*.

3.15.1 Enunțul legii (teoremei) relativiste de compunere a vitezelor

<Dacă trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' (vezi fig. 3.3(b)) este descrisă matematic de transformările Lorentz

$$(3.61)\,(a) \quad x' = \frac{x - v_T t}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ respectiv

(b) $x = \dfrac{x'+v_T t'}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}, y = y', z = z', t = \dfrac{t'+\dfrac{v_T}{c^2}x'}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, atunci compunerea relativistă a vitezelor are loc conform legii matematice:

$$(3.84I)\ \text{(a)}\ v_x = \frac{v'_x + v_T}{1+\dfrac{v_T}{c^2}v'_x};\ \text{(b)}\ v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v_T}{c^2}v'_x};\ \text{(c)}\ v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v_T}{c^2}v'_x},$$

cu v_x, v_y, v_z componentele vitezei $\vec{v} \equiv \vec{v}_{RI}$, respectiv v'_x, v'_y, v'_z componentele vitezei $\vec{v}' \equiv \vec{v}_{(RI)'}$ când (RI)' se deplasează cu $\vec{v}_T$=const. în raport cu cu RI în lungul axei Ox||O'x'>.

Observație. Cazul $(RI)_0$≡(RI)' ⇆ RI pentru care s-a făcut modificarea TrLS în forma (3.63) nu aduce nimic nou în afară de adaptări de notație pentru ca (RI)' să fie transformat în referențial propriu $(RI)_0$ față de care RI se deplasează cu $\vec{v}' = -\vec{v}_T$ conducând la (3.63). Compunerea relativistă a vitezelor nu cere o adaptare expresă a notațiilor conform cu (3.63), încât numai numai în cazul cerințelor efective de raportare la $(RI)_0$≡(RI)' se va apela la (3.63).

3.15.2 Demonstrarea legii (teoremei) relativiste de compunere a vitezelor exprimată de (3.84I) prin TrLS (3.61)(b)

3.15.2.1 Ipoteza legii (teoremei)

<Un punct material P de coordonate (x,y,z,t) față de RI (fig. 3.3(b)) respectiv (x',y',z',t' față de (RI)' are trecerea (RI)' → RI descrisă prin (x',y',z',t')→(x,y,z,t) efectuată prin TrLS *inverse* (3.61)(b), respectiv vitezele $\vec{v}_{RI} \equiv \vec{v} = v_x\vec{1}_x + v_y\vec{1}_z + v_z\vec{1}_z$ față de RI și $\vec{v}_{(RI)'} \equiv \vec{v}' = v'_x\vec{1}_{x'} + v'_y\vec{1}_{z'} + v'_z\vec{1}_{z'}$ față de (RI)'>.

3.15.2.2 Concluzia legii (teoremei)

<Componentele v_x,v_y,v_z ale $\vec{v} \equiv \vec{v}_{RI}$ se obțin din componentele v'_x,v'_y,v'_z ale $\vec{v}' \equiv \vec{v}_{(RI)'}$, conform relațiilor (3.84I)>.

3.15.2.3 Demonstrație

(D_1) Se diferențiază TrLS (3.61)(b), rezultând:

$$(3.85)\ \text{(a)}\ dx = \frac{dx'+v_T dt'}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}};\ \text{(b)}\ dy = dy';\ \text{(c)}\ dz = dz';\ \text{(d)}\ dt = \frac{dt'+\dfrac{v_T}{c^2}dx'}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}.$$

(D_2) Cu (3.85) (d) și (3.85) (a),(b) și (c) se calculează rapoartele $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dz}{dt}$ reprezentând componentele v_x, v_y, v_z ale $\vec{v}_{RI} \equiv \vec{v}$, obținându-se:

$$(3.86)\ \text{(a)}\ \frac{dx}{dt} \equiv v_x = \frac{dx'+v_T dt'}{dt'+\dfrac{v_T}{c^2}dx'};\ \text{(b)}\ \frac{dy}{dt} \equiv v_y = \frac{dy'\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}{dt'+\dfrac{v_T}{c^2}dx'};\ \text{(c)}\ \frac{dz}{dt} \equiv v_z = \frac{dz'\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}{dt'+\dfrac{v_T}{c^2}dx'}.$$

(D_3) Se împarte numărătorul și numitorul relațiilor (3.86), termen cu termen, la dt' și se ține cont că $\dfrac{dx'}{dt'} \equiv v'_x$, $\dfrac{dy'}{dt} \equiv v'_y$ și $\dfrac{dz'}{dt} \equiv v'_z$, rezultând (3.84I) ca relații finale.

3.15.3 Forma "inversă" a legii relativiste (3.84) de compunere a vitezelor

Pentru trecerea RI → (RI)', legea (teorema) relativistă de compunere a vitezelor rezultă ca:

$$(3.84\text{II})\ (a)\ v'_x = \frac{v_x - v_T}{1 - \frac{v_T}{c^2} v_x};\ (b)\ v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_T}{c^2} v_x};\ (c)\ v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_T}{c^2} v_x},$$ care se obţine

prin aceiaşi paşi $(D_1) \rightarrow (D_3)$, dar plecând de la (3.61)(a).

Prin (3.84II) legea (teorema) relativistă de compunere a vitezelor devine completă pentru întreaga transformare reciprocă RI ⇆ (RI)'. Trebuie remarcat faptul că (3.84II) se mai obţine şi plecând de la (3.84I) prin simpla exprimare a componentelor v'_x, v'_y şi v'_z ca funcţii $v'_x(v_x, v_T, c)$, $v'_y(v_x, v_y, v_T, c)$, respectiv $v'_z(v_x, v_z, v_T, c)$ care rezultă printr-un simplu exerciţiu de găsire a necunoscutelor v'_x, v'_y respectiv v'_z din relaţiile (a), (b) şi (c) ale grupului (3.84I).

3.15.4 Aplicarea principiului de corespondenţă (PdC) din TRR/TRS asupra legii relativiste de compunere a vitezelor (3.84I,II)

3.15.4.0 Precizare metodologică

În întreaga fizică teoretică (FT) expusă până acum, *principiul de corespondenţă* (PdC) a fost utilizat pentru elaborarea efectivă a modelelor teoretice şi a teoriei lor, în sensul exprimat de enunţul general al PdC din *Partea I^a a cursului de faţă* (v. subparagraful 1.4.2 din ref. [106] "Elemente de fizică teoretică (I)"), PdC funcţionând ca un principiu metodologic de precizare a valabilităţii modelelor teoretice şi a teoriei lor.

De aceea, PdC aplicat legii (3.84II) *trebuie să se reducă la legea Galilei de compunere clasică a vitezelor*

(3.87I) (a) $v_x = v'_x + v_T$; (b) $v_y = v'_y$ şi (c) $v_z = v'_z$, respectiv

(3.87II) (a) $v'_x = v_x - v_T$; (b) $v'_y = v_y$ şi (c) $v'_z = v_z$, *dacă* se face trecerea la limită $v_T/c \rightarrow 0$ sau $v_T \ll c$, echivalente cu $v_{max} \rightarrow \infty$ ca viteză maximă de transmitere a interacţiunilor. Legea (3.87I,II) este o consecinţă cinematică a transformărilor Galilei (3.1)-(3.2) sau (3.14)-(3.15) şi rezultă printr-o simplă derivare în raport cu timpul a acestor transformări. Astfel, modelul teoretic relativist (MTR) şi teoria lui (TRR/TRS) se reduce la modelul teoretic clasic nerelativist, verificându-se o parte a previziunilor MTR care înglobează modelul clasic galileano-newtonian.

3.15.4.1 Aplicarea PdC legii (3.84I,II). Trecerea la limită $v_T/c \rightarrow 0$

PdC în TRR/TRS *reglează cuprinderea mecanicii clasice* [cu modelul galileano-newtonian (MGN) al vitezelor mici în comparaţie cu viteza c a luminii ($v \ll c$)] *în mecanica relativistă a vitezelor mari* ($v \sim c$), conformă cu nerespectarea PIVMPI al TRR/TRS, adică cu considerarea vitezei maxime de transmitere a interacţiunilor ca $v_{max} \rightarrow \infty$ în loc de $v_{max} = c$, când este posibilă trecerea la limită $v_T/c \rightarrow 0$. Dacă în (3.84I,II) se aplică această trecere la limită, raportul $v_T/c^2 \rightarrow 0$, încât numitorul tuturor relaţiilor tinde la 1, ca şi radicalul de ordinul 2 de la numărătorul componentelor v_y şi v_z respectiv v'_y şi v'_z pentru care raportul $\frac{v_T^2}{c^2} \rightarrow 0$, rezultând legea (3.87I,II) ca *legea clasică Galilei de compunere a vitezelor.*

3.15.4.2 Concluzie prin PdC

Legea de compunere relativistă a vitezelor (3.84I,II) satisface principiul de corespondenţă (PdC) din TRR/TRS, regăsindu-se, la limita clasică, *legea clasică* (3.87I,II) *de compunere nerelativistă a vitezelor (legea Galilei).*

3.15.5 Legea de compunere relativistă a vitezelor (3.84I,II) satisface PIVMPI (v_{max}=c)

3.15.5.0Precizare prin PIVMPI

Conform PIVMPI din paragraful 3.6 (cap.I), viteza maximă de porpagare a interacțiunilor la distanță este finită și egală cu c reprezentând viteza luminii în vid/spațiul liber, adică avem $v_{max}=c$. De asemenea, c este invariantă față de trecerea RI ⇆ (RI)', adică nu depinde de referențialul inerțial față de care o măsurăm și nici de direcția de deplasare a referențialelor. Aceste fapte trebuie să fie puse în evidență prin legea relativistă (3.84I,II).

3.15.5.1 Legea relativistă (3.84I,II) arată că v_{max}=c

Se consideră un punct material ce se mișcă față de (RI)' (v. fig. 3.3(b)) cu $v'_x=c$ ($v'_y=v'_z=0$). De asemenea, se presupune că v_T cu care (RI)' se deplasează față de RI (considerat fix) are tot valoarea c. Înlocuind aceste valori în (3.84I) rezultă: (3.88) (a) $(v_x)_{max} \equiv v_{max}=\dfrac{c+c}{1+\dfrac{c}{c^2}c}=\dfrac{2c}{2}=c$ și (b) (c) $v_y=v_z=0$,

arătând că deși s-au considerat $v'_x=c$ și $v_T=c$, punctul material P ce se deplasează cu $v'_x=c$ față de (RI)' (care și el se deplasează cu o viteză de aceeași valoare c), în raport cu RI, "suma" relativistă dă v_x a lui P tot de valoare c, nu de valoare 2c cum ar rezulta clasic nerelativist. În acest mod, legea *de compunere relativistă a vitezelor arată că* v_{max} = c. Dacă rezultatul (3.88) ca v_x=c se introduce în (3.84II), adică dacă P are față de RI v_x=c, atunci față de (RI)' are $v'_x=\dfrac{c-v_T}{1-\dfrac{v_T}{c^2}c}=\dfrac{c(c-v_T)}{c-v_T}=c$, fără a mai depinde de valoarea lui v_T. Avem, astfel *întrega invarianță a vitezei luminii c în raport cu trecerea* RI ⇆ (RI)'.

3.15.5.2 Consecință fundamentală a respectării PIVMPI de către legea (3.84). Punctul material P ce se deplasează cu viteza c reprezintă fotonul

Dacă se consideră punctul material P ce se mișcă față de (RI)' cu v'_x=c, atunci prin (3.84I) rezultă că față de RI se mișcă cu $v_x=\dfrac{c+v_T}{1+\dfrac{v_T}{c^2}c}=\dfrac{c(c+v_T)}{c+v_T}=c$. Dacă P are viteza v_x=c față de RI, atunci prin (3.84II) are față de (RI)' viteza $v'_x=\dfrac{c-v_T}{1-\dfrac{v_T}{c^2}c}=\dfrac{c(c-v_T)}{c-v_T}=c$. Ambele rezultate de mai sus date de (3.84) *arată independența de viteza de transport* v_T a lui (RI)' față de RI. Ținând cont de acest fapt, ca și de independența valorii c față de trecerea RI ⇆ (RI)', rezultă că *punctul material P a cărui mișcare satisface teoretic concluziile experimentalo-teoretice ale experianțelor Michelson-Morley (1881-1887)modelează particula numită foton*, care reprezintă lumina în propagarea ei în vid/spațiul liber cu viteza c. De aici, justificarea *introducerii de către Einstein*, în lucrarea lui din 1905, *a fotonului*, pentru a explica legile efectului fotoelectric extern, raza de lumină fiind considerată ca un flux de particule identice, asupra căreia Einstein a făcut considerații TRR/TRS, inclusiv energetice, ce dovedesc existența fotonului ca particulă relativistă cu masă proprie (de repaus) nulă.

3.15.5.3 Concluzie prin PIVMPI asupra legii (3.84)

Legea de compunere relativistă a vitezelor (3.84I,II) satisface PIVMPI, demonstrând, atât *existența valorii maxime finite a vitezei de propagare a interacțiunilor la distanță*, cât și posibilitatea existenței fotonului ca particula satisfăcând concluziile teoretico-experimentale ale experiențelor Michelson-Morley (1881-1887), *care au impus în baza axiomatică a* TRR/TRS *principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor* (PIVMPI), alături de PRE, baza axiomatică fiind formulată de Einstein în 1905.

3.16 (cc_5-cc_7) Alte consecințe cinematice ale TrLS (3.61). Problema simultaneității și a ordinii de succesiune (anterior, simultan, posterior) a evenimentelor în TRR/TRS. Conexiunea dintre evenimente în TRR/TRS. Conul luminos

3.16.0 Considerații generale și metodologice

Fară a apela la cauza mişcării reprezentată de interacțiunea dintre sistemele mecanice [măsurată prin mărimea fizică forță ($\vec{F}$)] *cinematica relativistă*, ca ramură a *mecanicii teoretice relativiste, descrie mişcarea mecanică prin conceptul de eveniment fizic* e≡(x,y,z;t), respectiv *eveniment fizic relativist* e_r≡(x,y,z,ict) în $\mathcal{S}_M$ raportându-le la referențialele reciproc inerțiale RI ⇆ (RI)', cu trecerea e_{RI} ⇆ $e_{(RI)'}$ sau $(e_r)_{RI}$ ⇆ $(e_r)_{(RI)'}$, descrisă matematic de transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61). De aceea, *elaborarea efectivă a acestei cinematici, va trebui să aibă clarificată*, chiar de la început, prin bazele sale noțional-conceptuale, *problema ordinii de succesiune a evenimentelor*, ca problema *anteriorității* unul față de celălalt, a *simultaneității*, respectiv a *posteriorității* unul față de celălalt. Astfel, vor fi puse în discuție și consecințele cinematice (cc_5)-(cc_7) ale TrLS (3.61), enumerate în subparagrafele 3.12.4 și 3.14.2 ca fiind:

(cc_5) *ordinea de succesiune a evenimentelor absolută numai pentru evenimente separate printr-un interval relativist temporal* ($s^2 > 0$), respectiv (cc_6) *ordinea de succesiune relativă pentru evenimente separate, printr-un interval relativist spațial* ($s^2 < 0$);

(cc_7) *excluderea posibilității de conexiune cauzală între evenimentul zero* $e_r(0,0,0,0)$ *al conului luminos și evenimente exterioare acestuia, datorită separării lor de* $e_r^{(0)}$ *printr-un interval relativist spațial* ($s^2 < 0$). Pentru a obține și comenta consecințele enumerate mai sus, este necesar a se departaja între *tipurile de evenimente relativiste* din spațiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (universul spațiu-timp), apelând la *intervalul relativist* (s)/*distanța Minkowski* (3.26) definită între perechi de evenimente din $\mathcal{S}_M$.

De asemenea, este necesară introducerea *hipersuprafeței geometrice din* $\mathcal{S}_M$ *numită con luminos*, pentru a localiza evenimentele din întregul $\mathcal{S}_M$, a le cerceta conexiunile posibile între ele, prin aplicarea principiilor TRR/TRS (în special prin PIVMPI). Consecința (cc_6) a simultaneității evenimentelor va fi detaliată pentru ambele tipuri de evenimente relativiste, în cadrul fiecărui tip, cu specificările posibile și necesare.

3.16.1 Tipuri de evenimente relativiste în TRR/TRS

3.16.1.1 Distanța Minkowski/intervalul relativist dintre două evenimente (s) (3.26)

Conform subparagrafului 3.10.3, între *două evenimente relativiste raportate* la același R $e_r^{(1)}$≡{$q_j^{(1)}$=$x_j^{(1)}$ $(j=\overline{1,4})$}≡{$x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, $ict^{(1)}$} și $e_r^{(2)}$≡{$q_j^{(2)}$=$x_j^{(2)}$ $(j=\overline{1,4})$}≡{$x^{(2)}$, $y^{(2)}$, $z^{(2)}$, $ict^{(2)}$} *distanța Minkowski* sau *intervalul relativist finit* (s) este definită/definit ca:

$$(3.26)\quad s^2=\sum_{j=1}^{4}(-)(\Delta x_j)^2 \equiv -\sum_{j=1}^{4}(\Delta x_j)^2 \equiv c^2(t^{(2)}-t^{(1)})^2-[(x^{(2)}-x^{(1)})^2+(y^{(2)}-y^{(1)})^2+(z^{(2)}-z^{(1)})^2]\equiv$$

$$\equiv c^2\Delta t^2-[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2]\equiv c^2(\Delta t)^2-l^2,$$ cu $l=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2]^{1/2}$ distanța tridimensională din subspațiul real $\mathcal{S}_R \equiv \mathcal{S}_{x,y,z}$ al $\mathcal{S}_M$.

Intervalul relativist elementar este dat prin relația (3.24) care *defineşte metrica în* $\mathcal{S}_M$, ca fiind

$$(3.24)\quad (ds)^2\equiv ds^2= c^2dt^2-[(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2].$$

3.16.1.2 Tipuri de intervale relativiste s definte prin (3.26)

Conform definiției (3.26), intervalele relativiste ce separă două evenimente relativiste, pot fi de tipurile:

(I) *intervale relativiste temporale*, când $s^2 > 0$ (sau $ds^2 > 0$), corespunzând situației

(3.89) (a) $c(t^{(2)}-t^{(1)}) > l$ sau (b) $cdt > dl$, respectiv

(II) *intervale relativiste spațiale*, **când $s^2 < 0$ (sau $ds^2 < 0$), corespunzând situației (3.90) (a) $c(t^{(2)}-t^{(1)}) < l$ sau (b) $cdt < dl$.**

3.16.1.3 Tipuri de evenimente relativiste prin intervalul relativist s ce le separă

Apelând la definiția (3.26) și la tipurile (I)(3.89) și (II)(3.90) de intervale relativiste, rezultă că și *evenimentele relativiste* **din** $\mathcal{S}_M$ *considerate în perechi sunt de tipurile*:

(I) *evenimente relativiste* "temporale" $\{e_r^{(1)}, e_r^{(2)}\}$ ca fiind cele *separate printr-un interval relativist temporal* ($s^2 > 0$), când în (3.26) domină termenul $c^2(\Delta t)^2$, respectiv

(II) *evenimente relativiste* "spațiale" $\{e_r^{(1)}, e_r^{(2)}\}$ ca fiind cele *separate printr-un interval relativist spațial* ($s^2 < 0$), când în (3.26) domină termenul $l^2 \equiv (\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2$.

3.16.2 Problema simultaneității, anteriorității și posteriorității evenimentelor în TRR/TRS sau problema ordinii lor de succesiune în timp

3.16.2.1Precizare din mecanica clasică. Sincronizarea absolută. Timp absolut

Datorită ipotezei propagării instantanee la distanță a interacțiunilor ($v_{max} \rightarrow \infty$), în mecanica clasică este admisă *posibilitatea* sincronizării absolute a tuturor ceasornicelor din toate referențialele, fapt echivalent cu existența unui *timp universal* (unic și absolut). În acest caz, noțiunile *anterioritate, simultaneitate și posterioritate* (anterior, simultan și posterior), *ca relații* (conexiuni) *între două evenimente raportate la același* RI, *au caracter absolut*. Principiul invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor (PVIMPI) impunând $v_{max}=c$ ca valoare plafon finită, *ipoteza* timpului universal (introdusă chiar de Newton) *nu mai este valabilă în* TRR/TRS. De aceea, noțiunile de evenimente anterioare, simultane ori posterioare nu mai pot avea caracter absolut, trebuind să fie reexaminate.

3.16.2.2 Precizare relativistă. Relativitatea timpului (duratelor) în TRR/TRS. Timp relativ (local)

Conform consecințelor cinematice a TrLS (cc_3), reprezentând dilatarea relativistă a duratelor cinematice în lungul direcției de mișcare, *relativitatea timpului* (duratelor) *față de diferitele* {RI} *determinată în* TRR/TRS *de respectarea principiilor* TRR/TRS (în special PIVMPI) *în trecerea reciprocă* $(RI)_0 \equiv (RI)' \leftrightarrows RI$, *va impune relativitatea noțiunilor de anterior, simultan și posterior* între evenimentele din $\mathcal{S}_M$ considerate în perechi.

Trebuie reamintit și faptul că, prin TrLS (3.61), este deja anunțată în TRR/TRS *relativitatea timpului ca relativitate fundamentală exprimată prin legătura fizico-matematică dată de dependența coordonatei temporale de coordonatele spațiale*, în particular, $t'=f_1(x,t,v_T,c)$ și/sau $t=f_2(x',t',v_T,c)$, conform relațiilor matematice corespunzătoare din (3.61).

3.16.3 Emisia de semnale luminoase pentru generarea evenimentelor $\{e^{(1)},e^{(2)}\}$ și/sau $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ și posibilitatea utilizării lor în clarificarea ordinii de succesiune în timp a evenimentelor

Dacă față de un RI, în punctul $P_1(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ al SdR (sistemul de axe considerat) din RI se emite la momentul $t^{(1)}$ un semnal luminos de *durată extrem de scurtă*, atunci în P_1 a fost generat *evenimentul* $e^{(1)} \equiv (x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)},t^{(1)})$ sau $e_r^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)},ict^{(1)})$. Emisia unui alt semnal de același tip în $P_2(x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)}) \neq P_1$, la momentul $t^{(2)}$ generează *evenimentul* $e^{(2)} \equiv (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)},t^{(2)})$ sau $e_r^{(2)} \equiv (x^{(2)}, y^{(2)}, z^{(2)},ict^{(2)})$, față de același RI. Propagarea reciprocă a celor două semnale luminoase dintr-un punct în celălalt permite *o comunicare cu* $v_{max}=c$ între cele două evenimente cu ajutorul căreia se va putea departaja *ordinea de succesiune în timp*, stabilindu-se *anterioritatea, simultaneitatea ori posterioritatea unuia în raport cu celălalt*. Utilizarea *semnalelor luminoase va permite utilizarea tipului (I) sau (II) de interval relativist* s (3.26) [pentru a stabili tipul evenimentelor pereche $(e_r^{(1)}, e_r^{(2)})$ luate în considerare], conform (I)(3.89) sau (II)(3.90), *de care depinde ordinea lor de succesiune*. De aceea, se pune *întrebarea*: <În ce condiții fizice unul dintre semnalele luminoase este *în mod absolut anterior, simultan ori posterior* celuilalt, și în ce condiții ordinea de succesiune a semnalelor raportate la RI ales este relativă?>.

3.16.4 Cazul evenimentelor $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate printr-un interval relativist temporal ($s^2>0$ sau $ds^2>0$). Caracterul absolut al ordinii de succesiune (anterior, simultan, posterior)

3.16.4.1 Condiţia ca semnalul luminos 1 (s.l.1) să fie absolut anterior semnalului luminos 2 (s.l.2). Separarea evenimentelor printr-un interval relativist temporal ($s^2>0$)

Dacă semnalul luminos 1 (s.l.1) emis în P_1 la $t^{(1)}$ ajunge în P_2 înaintea emiterii celui generat în acest punct (s.l.2), atunci s.l.1 *este anterior lui* s.l.2, adică s.l.1 a parcurs deja distanţa fizică dintre P_1 şi P_2, care în RI este $l=[(x^{(2)}-x^{(1)})^2+(y^{(2)}-y^{(1)})^2+(z^{(2)}-z^{(1)})^2]^{1/2}$, ajungând în P_2 la un moment anterior momentului $t^{(2)}$ la care s-a emis s.l.2, încât trebuie să avem:

(3.91) $(\Delta t)_{s.l.1,2}\equiv t^{(2)}-t^{(1)} > l/c$. Din (3.26) şi (3.91), rezultă că *cele două evenimente de generare a semnalelor sunt separate de intervalul relativist* (distanţa Minkowski):

(3.92) $s^2\equiv c^2(t^{(2)}-t^{(1)})-l^2>0$, ca *interval relativist temporal* [$s^2>0$, v(3.89)].

3.16.4.2 Utilizarea invarianţei Lorentz a intervalului relativist (3.26). Caracterul absolut al ordinii de succesiune

Invarianţa Lorentz a intervalului relativist s, demonstrată în subparagraful 3.11.6.4, conformă cu relaţia (3.49) ($s_{RI}{}^2\equiv s^2=s_{(RI)'}{}^2\equiv s'^2$), face ca, odată *satisfăcută condiţia* (3.92) *faţă de un* RI, *să fie automat satisfăcută în toate referenţialele inerţiale*, inclusiv în (RI)' reciproc inerţial cu RI [conform fig. 3.3 ilustrând modul general şi cel special de raportare RI ⇆ (RI)']. În acest fel, se sintetizează concluzia ce urmează.

3.16.4.3 Concluzie fundamentală

<Pentru perechea de evenimente relativiste $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate printr-un interval relativist temporal ($s^2>0$), *ordinea de succesiune fiind aceeaşi în raport cu orice referenţial inerţial* RI, *anterioritatea unuia faţă de celălalt, simultaneitatea lor,* respectiv *posterioritatea unuia faţă de celălalt au caracter absolut, adică se conservă în raport cu toate* {RI}>.

3.16.4.4 Referenţialul inerţial (RI) particular faţă de care $\{e^{(1)},e^{(2)}\}$ succesive au loc în acelaşi punct

Deaorece (RI)' este, conform figurii 3.3(b), în MRU faţă de RI în care au loc evenimentele $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ succesive, este posibil ca ceasornicul legat solidar de (RI)' să marcheze emisia s.l.1 la momentul $t'^{(1)}$, *tocmai*, când originea O' (a SdR' din (RI)') trece prin P_1 din RI, adică localizăm evenimentul $e'^{(1)}\equiv e_{(RI)'}{}^{(1)}\equiv(x'^{(1)}=y'^{(1)}=z'^{(1)}=0,t'^{(1)})$. De asemenea, este posibil ca, acelaşi ceasornic să marcheze emisia s.l.2 la $t'^{(2)}$, când aceeaşi origine O' trece prin P_2, conducând la $e'^{(2)}\equiv e_{(RI)'}{}^{(2)}\equiv(x'^{(2)}=y'^{(2)}=z'^{(2)}=0,t'^{(2)})$. În acest mod, *două evenimente succesive se desfăşoară în acelaşi punct al* (RI)', *menţinându-se anterioritatea lui* $e'^{(1)}$ *faţă de* $e'^{(2)}$, *menţinere posibilă deoarece cele două evenimente* măsurate în raport cu (RI)' *sunt separate printr-un interval relativist temporal*: $s'^2\equiv s_{(RI)'}{}^2=c^2[t'^{(2)}-t'^{(1)}]^2>0$.

Se poate observa că posibilitatea producerii celor două evenimente în acelaşi punct este furnizată de condiţia explicitată $s'^2>0$, situaţie imposibilă când $s'^2<0$ (exprimând separarea prin intervale relativiste spaţiale).

3.16.4.5 Coincidenţa spaţială şi simultaneitatea evenimentelor. Coincidenţa absolută a evenimentelor

Ţinând cont de concluzia din 3.16.4.4, legată de producerea în acelaşi punct a două evenimente succesive separate de un interval relativist temporal, rezultă că, în cazul $t'^{(2)}=t'^{(1)}$ (în raport cu (RI)' (v. fig 3.3(b)), *simultaneitatea* celor două evenimente (exprimată prin $t'^{(2)}=t'^{(1)}$) care însoţeşte localizarea lor spaţială în acelaţi punct, face să avem: $s'\equiv s_{(RI)'}=0$. Astfel, anularea intervalului relativist dintre *evenimentele simultane afirmă atât coincidenţa spaţială, cât şi coincidenţa temporală*, adică *evenimentele sunt absolut coincidente*. Acest tip de coincidenţă relativistă este imposibilă în cazul evenimentelor relativiste separate prin intervale relativiste spaţiale ($s'^2<0$), cum se va vedea în subparagraful următor. Avem concluzia importantă că <*simultaneitatea a două evenimente relativiste cere coincidenţa absolută*

a evenimentelor: evenimentele simultane trebuie să fie coincidente atât ca moment de producere cât şi ca loc unde se produc>.

3.16.4.6 Remarcă finală

Concluzia fundamentală **formulată în subparagraful 3.16.4.3, afirmând că** <*ordinea de succesiune este absolută numai pentru evenimente relativiste separate printr-un interval relatvist temporal* **($s^2>0$)>,** *reprezintă tocmai consecinţa cinematică (cc_5) a* **TrLS (3.61), dată în enumerarea din subparagraful 3.14.2, respectiv anunţată ca fiind de tratat în paragraful 3.16 (de faţă). În plus, din secvenţa 3.16.4.5 avem** *evenimente relativiste simultane*, **atunci când sunt** *absolut coincidente* **(spaţial şi temporal).**

3.16.5 Tranzitivitatea succesiunii absolute a evenimentelor separate printr-un interval relativist temporal

În cazul a *3 evenimente relativiste* **$\{e_r^{(1)},e_r^{(2)},e_r^{(3)}\}$, separate două câte două prin intervale relativiste temporale ($s_{12}^2>0$, $s_{13}^2>0$, $s_{23}^2>0$), dacă $e_r^{(1)}$ este** *anterior* **lui $e_r^{(2)}$, iar $e_r^{(2)}$ este** *anterior* **lui $e_r^{(3)}$, atunci $e_r^{(1)}$ este** *anterior* **şi lui $e_r^{(3)}$** *în mod absolut*, **cum tot** *în mod absolut* **îi este anterior lui $e_r^{(2)}$, la rândul lui** *anterior absolut* **lui $e_r^{(3)}$. Astfel, se deduce că,** *succesiunea absolută a evenimentelor are proprietatea de tranzitivitate.*

3.16.6 Cazul evenimentelor $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate printr-un interval relativist spaţial ($s^2<0$ sau $ds^2<0$). Caracterul relativ al ordinii de succesiune (anterior, simultan, posterior)

3.16.6.1 Condiţia ca s.l.1 să fie posterior lui s.l.2. Separarea evenimentelor prin intervale relativiste spaţiale ($s^2<0$)

Dacă *semnalul luminos* **emis în P_1 la $t^{(1)}$ (notat s.l.1) ajunge în $P_2 \neq P_1$ (faţă de RI) după emiterea la $t^{(2)}$ a** *semnalului luminos emis în* **P_2 (notat s.l.2), prin definiţia (3.26) şi conform cu (3.90), acest fapt este posibil când cele două evenimente sunt separate între ele în $\mathcal{S}_M$ de intervalul relativist (distanţa Minkowski):**

(3.93) $s^2\equiv c^2(t^{(2)}-t^{(1)})^2-l^2<0$, deoarece s.l.1 face valabilă relaţia $t^{(2)}-t^{(1)}<\frac{l}{c}$, obţinută din $t^{(1)}-t^{(2)}>\frac{l}{c}$.

Prin (3.93), rezultă că cele două evenimente $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ considerate faţă de RI trebuie să fie separate prin *intervale relativiste spaţiale* **($s^2<0$), pentru ca semnalul emis în P_1 la $t^{(1)}$ să fie** *posterior* **celui emis în P_2 la $t^{(2)}$. De aici,** *caracterul relativ al ordinii de succesiune în timp a două evenimente* **separate printr-un interval relativist spaţial, ca şi** *caracterul relativ al anteriorităţii*, **al** *simultaneităţii*, **respectiv al** *posteriorităţii* **evenimentelor perechi.**

3.16.6.2 Exemplificarea caracterului relativ al succesiunii în timp a evenimentelor separate prin intervale relativiste spaţiale ($s^2<0$)

Dacă în cele două puncte P_1 şi P_2 din RI, în care au fost generate $e_r^{(1)}$ la $t^{(1)}$, respectiv $e_r^{(2)}$ la $t^{(2)}$ prin emisia extrem de scurtă a unui semnal luminos, se plasează solidar cu punctele câte un referenţial $(RI)_1$ cu originea $O_1\equiv P_1$, respectiv un referenţial inerţial $(RI)_2$ cu originea $O_2\equiv P_2$, atunci *evidenţa caracterului relativ al succesiunii în timp a evenimentelor* **$\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$** *se manifestă prin separarea evenimentelor printr-un interval relativist spaţial* **[$s^2<0$ (sau $ds^2<0$) $\Leftrightarrow c^2(\Delta t)^2-l^2<0$ sau $l>c\Delta t$], deoarece: (I)** *în raport cu* **$(RI)_1$** *cu originea* **$O_1\equiv P_1$** *semnalul luminos 1* **(generat în O_1)** *este anterior celui luminos 2* **(generat în O_2) şi (II)** *în raport cu* **$(RI)_2$** *cu originea* **$O_2\equiv P_2$** *semnalul luminos 2 emis în* **$P_2\equiv O_2$** *este anterior celui luminos 1* **(generat în O_1). Afirmaţiile (I) şi (II), prin $l>c\Delta t$ echivalează cu $\frac{l}{\Delta t}>c$ şi/sau $v>c$, contrazicând PIVMPI.**

3.16.6.3 Cvasisimultaneitatea evenimentelor absolut îndepărtate

(a) Conform definiției (3.26) a intervalului relativist (s) dintre două evenimente $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ din $\mathcal{S}_M$, dacă acestea sunt separate printr-un interval relativist s spațial ($s^2<0$), *nu există nici un* (RI)' față de care $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ *să aibă loc în același punct* [($P'_1 \equiv P'_2$) al SdR' (sistemului de axe de coordonate) din (RI)'], deoarece conform secvenței 3.16.4.4 acest lucru este posibil numai când $s^2>0$ (când $v_{max}=c$), nu și când $s^2<0$ (când $v_{max}>c$).

(b) *Definiție 1.* <Numim *evenimente absolut îndepărtate două evenimente* $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate printr-un interval relativist spațial ($s^2<0$), *deoarece nu există nici un* (RI)' *față de care evenimentele să aibă loc în același punct din* (RI)'>.

(c) *Definiței2.* <Numim *evenimente cvasisimultane două evenimente* $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate printr-un interval relativist spațial ($s^2<0$), *pentru care există acel* (RI)' *față de care evenimentele au loc în același moment* $t'^{(1)}=t'^{(2)}$>.

Din definiția (3.26) a lui s, rezultă că față de (RI)', $s'^2=c^2[t'^{(2)}-t'^{(1)}]^2-l^2$ în cazul $t'^{(1)}=t'^{(2)}$ devine $s'^2=-l^2<0$, indicând faptul că două evenimente pot fi *cvasisimultane* numai dacă $s'^2<0$, adică sunt separate printr-un interval relativist spațial. Confruntând definițiile 1 și 2, avem constatarea că două evenimente $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ sunt *cvasisimultane* dacă sunt *absolut îndepărtate*, adică separate printr-un interval relativist s spațial.

(d) *Concluzie finală.* <Evenimentele $\{e_r^{(1)},e_r^{(2)}\}$ separate prin intervale relativiste spațiale pot prezenta o *ordine de succesiune relativă față de diferitele* {RI}, deoarece: (I) față de anumite {(RI)'} pot fi *simultane*; (II) față de alte {(RI)''} $e_r^{(1)}$ poate fi *anterior* lui $e_r^{(2)}$; (III) față de alte {(RI)'''} $e_r^{(1)}$ poate fi *posterior* lui $e_r^{(2)}$>.

3.16.7 Caracterul absolut al ordinii de succesiune a evenimentelor în mecanica clasică. Aplicarea PdC

Aplicarea PdC *în* TRR/TRS pentru a trece la mecanica clasică galileano-newtoniană, echivalează cu abrogarea PIVMPI și cu considerarea limitei $v_{max}=c \rightarrow \infty$, pentru regăsirea ipotezei acțiunii instantanee la distanță, echivalentă cu propagarea cu viteză infinită a interacțiunilor. Acest fapt conduce la afirmația că *intervalul relativist* (3.26) *dintre oricare două evenimente ale mecanicii clasice este întotdeauna un interval relativist temporal* ($s^2>0$), deoarece limita produsului $c\cdot\Delta t$ va fi întotdeauna mai mare decât $l=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, adică este *întotdeauna* satisfăcută inegalitatea $s^2=c^2(\Delta t)^2-l^2>0$. Rezultă astfel, că în *mecanica clasică,* noțiunile de *anterioritate, simultaneitate,* respectiv *posterioritate* (reprezentând conexiuni posibile între perechi de evenimente), *au întotdeauna caracter absolut,* deoarece evenimentele în aproximația mecanicii clasice sunt separate *numai prin intervale relativiste temporale* ($s^2>0$), nu și prin intervale relativiste spațiale ($s^2<0$).

3.16.8 Conexiunea dintre evenimente în TRR/TRS reprezentată cu ajutorul hipersuprafeței con luminos

3.16.8.0 Precizare metodologică și fizico-geometrică. Spațiul $(\mathcal{S}_M)_{real} \equiv \{O_x,O_y,O_z,O_{ct}\}$

Cum și în *universul spațiu timp* (spațiul Minkowski) ($\mathcal{S}_M$) cuadridimensional al TRR/TRS, discutarea conexiunilor posibile dintre evenimentele relativiste $\{(e_r^{(j)})_f\}$ (cu f oricât de mare) nu se poate realiza decât comparând aceste coordonate reale (x,y,z,ct), este nevoie de o descompunere a spațiului $(\mathcal{S}_M)_{real}$ în forma (3.94) $(\mathcal{S}_M)_{real}=\mathcal{S}_{x,y,z}\otimes\mathcal{S}_{ct}$, ca produs tensorial $\otimes$ între două *subspații reale* $[\mathcal{S}_{x,y,z}]$ caracterizat prin axele (O_x,O_y,O_z) și *subspațiul* $[\mathcal{S}_{ct}]$ caracterizat prin axa temporală O_{ct}. Această descompunere se face cu ajutorul unei *hipersuprafețe cuadridimensionale numită con luminos*, a cărei condiționare implică *anularea intervalului relativist* (3.95) $s^2=c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0$, *pentru generarea oricărui punct* P(x,y,z,ct) *situat pe pânza conului.* De asemenea, implică $s^2>0$ *pentru punctele interioare*, respectiv $s^2<0$ *pentru punctele exterioare* acestei hipersuprafețe.

3.16.8.1 Eveniment relativist zero ($e_r^{(0)} \equiv (x^{(0)}=y^{(0)}=z^{(0)}=ct^{(0)}=0) \equiv (0,0,0,0)$

(a) *Definiție*: <Numim *eveniment zero* (sau eveniment origine), evenimentul relativist din $(\mathcal{S}_M)_{real}$ (3.94), care în raport cu un referențial RI are coordonatele $x^{(0)}= y^{(0)}= z^{(0)}= ct^{(0)}=0$>. Acest eveniment îl notăm cu $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$.

(b) *Observație*. *Evenimentul zero* (sau evenimentul origine) este necesar ca *eveniment reper*, în $(\mathcal{S}_M)_{real}$ (3.94), față de care se calculează distanța Minkowski (intervalul relativist) a oricărui alt eveniment relativist $e_r\equiv(x,y,z,ct)\neq e_r^{(0)}$. După cum se va vedea, $e_r^{(0)}$ din $(\mathcal{S}_M)_{real}$ *va marca în ordinea de succesiune* (trecut/anterior, prezent, posterior/viitor) *tocmai prezentul*. Mai trebuie precizat că în $e_r\equiv(x,y,z,ct)$ se remarcă înlocuirea lui $x_4=ict$ prin modulul său $|x_4|=|ict|\equiv ct$, tocmai pentru a putea utiliza o geometrie cuadridimensională în care *distanța generalizată cuadridimensional* este reală şi conformă cu caracterul real al acestei hipergeometrii, dar mai ales va permite *hipersuprafața con luminos, de ecuație* (3.95), care implică şi PIVMPI în reprezentarea ei spațio-temporală.

3.16.8.2 Conul luminos (CL)

(a) *Definiție*. <Numim *con luminos* (CL), cu axa de simetrie O_{ct}, *hipersuprafața cuadridimensională* din $(\mathcal{S}_M)_{real}$ (3.94), *ale cărei puncte satisfac ecuația* (3.95) ce defineşte generatoarele pânzei conice ca *liniile de univers ale punctelor figurative* plecând din *evenimentul zero* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ cu viteza constantă $v_{pe\ CL}\equiv c$, în lungul acestor generatoare, dinspre $e_r^{(0)}$>.

(b) *Observație*. Din (3.95), ținând cont că $l=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, rezultă

(3.96) $v^2_{pe\ CL} \equiv \dfrac{l^2}{t^2} = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{t^2} = c$, adică $v_{pe\ CL}=c$, ca viteză de deplasare pe pânza CL,

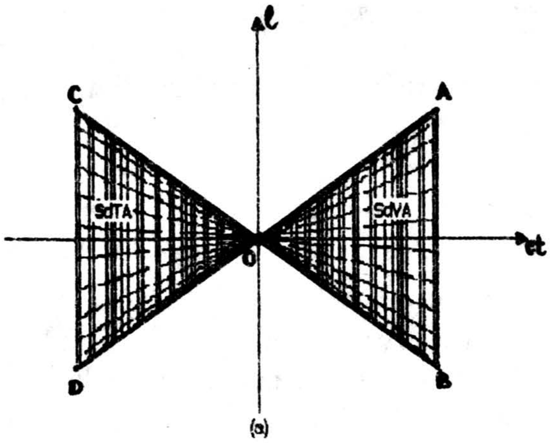
în lungul generatoarelor sale. Astfel *pânza CL apare ca o înfăşurătoare a tuturor evenimentelor ce respectă* $v \leq c$, adică satisfac principiul TRR/TRS al invarianței vitezei maxime de porpagare a interacțiunilor (PIVMPI).

3.16.8.3 Reprezentarea conului luminos (CL) prin "secțiuni" în spațiul cuadridimensional real $(\mathcal{S}_M)_{real}$

(a) Alegând o axă orizontală ca axa Oct (cum se obişnuieşte cu axa Ot temporală) şi o axă verticală Ol, apare o "secțiune" în pânza CL ca planul (Oct,Ol) a CL, conformă cu figura 3.7(a), în care este ilustrată o reprezentare "bidimensională", cu axa Oct-dând *săgeata timpului*.

(b) Ilustrarea "tridimensională" din figura 3.7(b) are rostul să "spațializeze" *cele două pânze ale conului luminos* (CL), fiecare pânză avându-şi vârful în originea O(0,0,0,0), adică în *evenimentul zero/evenimentul origine* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ pe care îl reprezintă această origine în $(\mathcal{S}_M)_{real}$.

(c) Conform figurii 3.7(b), *pânzelor* CL *le corespunde prin* (3.95) *distanța Minkowski* (intervalul relativist) *zero* între $e_r^{(0)}$ ca origine şi oricare alt eveniment situat pe generatoarele conului, deoarece pe con avem $ds^2=0$. Acest fapt impune condiția (3.96), deja specificată.



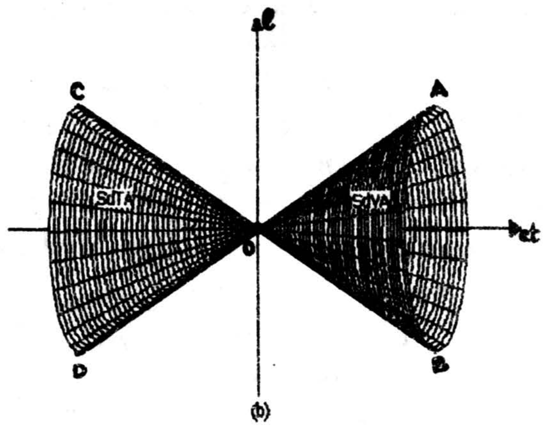


Figura 3.7 *Conul luminos* (CL) *în reprezentare* (a) **"bidimensională"** *prin planul* (Oct,Ol) **şi** (b) **"tridimensională"**, *ilustrând spaţial cele două pânze ale CL*. **Originea** O **reprezintă** *evenimentul zero* $e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$ **desemnând** *prezentul observatorului*. **SdTA desemnează** *subdomeniul* (Sd) **al** *trecutului absolut* (TA), **iar SdVA** *subdomeniul* (Sd) **al** *viitorului absolut* (VA).*

3.16.8.4 Puncte interioare, respectiv exterioare conului luminos. Evenimente interioare şi evenimente exterioare conului

(a) *Puncte interioare ≡ evenimente interioare pânzelor conului luminos* **(CL)**

Plecând de la ecuaţia hipersuprafeţei CL (3.95) ca exprimând anularea intervalului relativist (distanţa Minkowski) ($ds^2=0$), rezultă trei posibilităţi pentru punctele din spaţiul $(\mathcal{S}_M)_{real}$ (3.94):

(I) *puntele se află pe generatoarea* **CL**, *adică pe pânzele* **CL, când (3.97)(a) $ds^2=0$;**

(II) *punctele se află în interiorul pânzelor* **CL, când (3.97)(b) $ds^2>0$;**

(III) *punctele se află în exteriorul pânzelor* **CL, când (3.97)(c) $ds^2<0$.**

Cazul (I) a fost deja analizat în secvenţa 3.16.8.3(c).

Cazul (II) dat de (3.97)(b), corespunde *punctelor interioare pânzelor* **CL, reprezentând** *evenimente situate faţă de evenimentul zero* **$e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$** *la distanţa Minkowski* **(intervalul relativist) $ds^2>0$, adică tocmai** *evenimentele separate de* **$e_r^{(0)}$** *printr-un interval relativist temporal*. **În acest caz, $ds^2>0$, condiţia de interval relativist temporal** *impune*, **prin definiţia (3.26),** *semnificaţia fizico-matematică*:

$$(3.98)\ (a)\ c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)>0; \quad (b)\ ct>1 \ \text{şi} \quad (c)\ v_{ev.\ interior} \equiv v_{Int.} \equiv \frac{1}{t} < c,\ \text{pentru}$$

"desfăşurarea" *evenimentelor interioare conului în raport cu evenimentul zero/evenimentul origine* **(0,0,0,0).**

(b) *Puncte exterioare ≡ evenimente exterioare pânzelor* **CL**

Cazul (III) dat de (3.97)(c) corespunde *punctelor exterioare pânzelor* **CL, reprezentând** *evenimente exterioare* **CL, care faţă de** *evenimentul zero/origine* **$e_r^{(0)}=(0,0,0,0)$ se află** *la distanţa Minkowski* **(intervalul relativist) $ds^2<0$, adică sunt evenimente separate de $e_r^{(0)}$ printr-un** *interval relativist spaţial*.

Impunând $ds^2<0$, prin (3.26), rezultă *semnificaţia fizico-matematică*:

$$(3.99)\ (a)\ c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)<0; \ (b)\ ct<1 \ \text{şi} \ (c)\ v_{ev.\ ext.} \equiv v_{Ext.} \equiv \frac{1}{t} > c,\ \text{pentru "desfăşurarea"}$$

evenimentelor exterioare pânzelor **CL** *în raport cu evenimentul zero/origine* **(0,0,0,0).**

---

* Aspecte clarificând figura 3.7 şi completând-o cu problematica liniilor de univers în CL, sunt date detaliat în figurile 3.8 (a)→(e).

3.16.8.5 Comportarea față de PIVMPI a punctelor spațiului $(\mathcal{S}_M)_{real}$ (3.94) structurat de conul luminos (3.95)

(a) *Puncte ce respectă strict* PVMPI

(a_1) *În interiorul pânzelor* CL ($ds^2>0$), punctele/evenimentele, în raport cu evenimentul zero/origine $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$, îndeplinesc relația (3.98)(c), indicând respectarea principiului TRR/TRS al invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor (PIVMPI), deoarece $v_{Int}<v_{max}\equiv c$, *fără a pune efectiv problema invarianței* vitezei maxime, decât atunci când este atinsă c.

(a_2) *Pe pânzele* CL ($ds^2=0$), punctele/evenimentele îndeplinesc condiția (3.96), care arată că evenimentele se desfășoară numai cu viteza luminii, astfel îndeplinindu-se perfect invarianța vitezei c afirmată de PIVMPI.

Reunind totalitatea punctelor de pe pânzele CL cu cele interioare pânzelor CL, avem condiția $v\leq c$ impusă de PIVMPI ca principiu fundamental al TRR/TRS.

(b) *Puncte ce nu respectă* PIVMPI

În interiorul pânzelor CL ($ds^2<0$) punctele/evenimentele în raport cu $e_r^{(0)}$ îndeplinesc (3.99)(c), indicând posibilitatea nerespectării PIVMPI, deoarece $v_{Ext}>c$. Interpretarea fizică a acestei consecințe matematice a separării evenimentului zero/origine $e_r^{(0)}$ de oricare eveniment $e_r^{(Ext)}$ (ca eveniment exterior pânzelor CL), printr-un interval relativist spațial va fi dată în 3.16.8.7.

3.16.8.6 Ordinea de succesiune în TRR/TRS cu ajutorul conului luminos. Principiul cauzalității aplicat pentru $e_r^{(0)}$

(a) *Precizare noțională. Evenimentul zero* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ *ca reper al prezentului absolut*

Orice discuție despre conexiunile posibile dintre evenimentele departajate cu ajutorul pânzelor CL în secvențele precedente (3.16.8.4 și 3.16.8.5) nu se poate face decât considerând *evenimentul zero/origine* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ ca *reper al prezentului absolut*, echivalent *prezentul observatorului situat în* O(0,0,0,0).

(b) *Ordinea de succesiune cu ajutorul pânzelor* CL. *Domeniul pânzelor* CL *și subdomeniile sale* [al *trecutului absolut* (SdTA) și al *viitorului absolut* (SdVA)]

Din figura 3.7(a),(b), se observă că, în raport cu evenimentul origine/zero $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$, cele două pânze ale CL [marcate prin AOB (ca pânza în care ct>0), respectiv COD (în care ct<0)] definesc două *subdomenii* (Sd) *ale conului luminos* $\mathcal{D}\equiv(\mathcal{D}_1)\cup(\mathcal{D}_2)$. Ținând cont de săgeata timpului marcată prin axa Oct, $\mathcal{D}_1$ și $\mathcal{D}_2$ devin:

(I) *subdomeniul trecutului absolut* (SdTA) $\equiv\mathcal{D}_1$, ca pânza COD care cuprinde *toate evenimentele absolut anterioare evenimentului zero/origine* $e_r^{(0)}$; respectiv

(II) *subdomeniul viitorului absolut* (SdVA) $\equiv\mathcal{D}_2$, care cuprinde *toate evenimentele absolut posterioare evenimentului zero/origine* $e_r^{(0)}$.

Ordinea de succesiune în TRR/TRS, apelând la totalitatea evenimentelor din interiorul pânzelor CL este marcată de axa Oct, prin *determinarea* unei serii de evenimente aparținând ordonat la (SdTA, $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$, SdVA), "*trecerea*" între SdTA și SdVA făcându-se, întotdeauna, prin $e_r^{(0)}$ și în sensul săgeții timpului.

(c) *Principiul cauzalității în* TRR/TRS *aplicat pentru* $e_r^{(0)}$

(c_1) Confrom cu $\mathcal{D}\equiv(\mathcal{D}_1)\cup(\mathcal{D}_2)\equiv$ SdTA $\cup$ SdVA, în TRR/TRS, *principiul cauzalității aplicat pentru* $e_r^{(0)}$ *se poate sintetiza ca*: <Evenimentul zero $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ nu poate fi determinat cauzal decât de evenimente din SdTA, iar el, la rându-i, nu poate determina cauzal decât evenimente din SdVA>.

(c_2) Enunțul de mai sus se justifică prin faptul că $e_r^{(0)}$ *este legat de evenimente din* SdTA, respectiv SdVA *prin intervale relativiste temporale*, care îndeplinesc PIVMPI, adică satisfac $c>v_{Int}$, conform cu (3.98)(c).

(c_3) Conform enunțului de mai sus, *subdomeniul trecutului absolut* (SdTA) reprezintă toate evenimentele *absolut anterioare* lui $e_r^{(0)}$, adică tocmai *trecutul absolut al lui* $e_r^{(0)}$. De asemenea, *subdomeniul viitorului absolut* (SdVA) reprezintă toate evenimentele absolut posterioare lui $e_r^{(0)}$, adică tocmai *viitorul absolut al lui* $e_r^{(0)}$.

3.16.8.7 Conexiunea cauzală dintre $e_r^{(0)}$ şi evenimente din exteriorul conului luminos. Consecinţa (cc_7) a TrLS

Până aici au rămas necercetate evenimentele exterioare pânzei CL, care sunt despărţite de evenimentul zero/origine prin *intervale relativiste spaţiale* ($ds^2 < 0$) cum reiese din secvenţa 3.16.8.4 prin (3.97)(c).

Dacă se cercetează conexiunea cauzală între $e_r^{(0)}$ şi evenimente din exteriorul pânzelor CL ($ds^2 < 0$), atunci se poate afirma că $e_r^{(0)}$, *nu poate determina nici un eveniment din exteriorul pânzelor* CL, respectiv $e_r^{(0)}$ *nu poate fi determinat cauzal de nici un eveniment din exteriorul pânzelor* CL, deoarece separarea dintre $e_r^{(0)}$ şi oricare din evenimentele regiunii exterioare pânzelor CL este dată prin intervale relativiste spaţiale ($ds^2<0$), caz în care interacţiunea ar trebui să aibă loc, respectiv ar fi tebuit să aibă loc cu o *viteză superioară vitezei c*, contrazicând PIVMPI al TRR/TRS, conform relaţiei (3.99)(c).

Drept *concluzie fundamentală* a secvenţei de faţă a paragrafului 3.16 avem: <excluderea posibilităţilor de conexiune cauzală între evenimentul $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ [desemnând <u>*prezentul absolut*</u> *al observatorului* plasat în originea O(0,0,0,0)], ca eveniment zero/origine al conului luminos şi evenimentele exterioare acestuia>. Astfel, a rezultat consecinţa cinematică (cc_7) a TrLS (3.61).

3.16.8.8 Rezumat în loc de concluzii

(R_1) *Anularea distanţei Minkowski* (intervalului relativist) *faţă de* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ *a evenimentului* $e_r^{(f)}(x,y,z,ct)$:
$ds^2=c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)\equiv c^2t^2-l^2=0$ impune ecuaţia (3.95) $c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)=0$ drept *ecuaţia unei hipersuprafeţe conice numită con luminos* (CL) a cărei axă coincide cu axa Oct.

(R_2) *Generatoarele conului luminos* (CL) satisfac (3.96) $v_{CL}^2=\dfrac{x^2+y^2+z^2}{t^2}=c^2$ şi reprezintă liniile de univers ale punctelor care la $t^{(0)}=0$ se găseau în O(0,0,0,0) deplasându-se cu $v_{CL}=c$.

(R_3) *Prin reprezentarea din* figura 3.7 a CL se impun axele Oct ca axă orizontală≡ axa temporală (a timpului), respectiv axa Ol reprezentând $l=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ca axă verticală (cu desemnare tridimensională). Cele două axe se intersectează în evenimentul $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ reprezentat de originea unui RI.

(R_4) Hipersuprafaţa cuadridimensională con luminos (CL) separă întreg spaţiul $(\mathcal{S}_M)_{real}\equiv\{x,y,z,ct\}$ în două regiuni/zone marcate de pânzele CL:

(Z_I) interioară pânzelor cu $c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)\equiv ds^2>0$ conţinând evenimente separate de $e_r^{(0)}$ prin *intervale relativiste temporale* ($c^2t^2-l^2>0$ sau $v_{Int}<c$), respectiv

(Z_E) exterioară pânzelor cu $c^2t^2-(x^2+y^2+z^2)\equiv ds^2<0$ conţinând evenimente separate de $e_r^{(0)}$ prin *intervale relativiste spaţiale* ($c^2t^2-l^2<0$ sau $v_{Ext}>c$). Zonele (Z_I) şi (Z_E) sunt separate prin pânzele CL pe care $v_{CL}\equiv c$.

(R_5) Zona (Z_I) ($v_{Int}<c$) ca *domeniul pânzelor* CL se împarte în subdomeniile SdTA al *trecutului absolut* (pânza cu vârful "sosind" în $e_r^{(0)}$) şi SdVA al *viitorului absolut* (pânza cu vârful "plecând" din $e_r^{(0)}$).

(R_6) (a) În SdTA sunt cuprinse numai evenimente *absolut anterioare lui* $e_r^{(0)}$.
(a) În SdVA sunt cuprinse numai evenimente *absolut posterioare lui* $e_r^{(0)}$.

(R_7) *Evenimentul zero/evenimentul origine* $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$
(a) poate fi determinat cauzal numai de $\{e_r^{(f)}\}\in$SdTA;
(b) poate determina cauzal numai $\{e_r^{(f)}\}\in$SdVA ($v<c$), fiind separat de $\{e_r^{(f)}\}$ prin *intervale relativiste temporale* ($s^2>0$).

(R_8) Primul principiu fundamental al TRR/TRS, PIVMPI, interzice conexiuni cauzale între $e_r^{(0)}$ şi $\{e_r^{(g)}\}\in(Z_E)$ exterioară pânzelor CL, deoarece $\{e_r^{(g)}\}$ sunt separate de $e_r^{(0)}$ prin *intervale relativiste spaţiale* ($s^2<0$) care presupun $v_{Ext}>c$.

(R_9) Săgeata timpului are sensul dinspre SdTA spre SdVA prin *prezentul* marcat de $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$.

(R_{10}) Comunicarea cu (Z_E) exterioară pânzelor CL este *fizic imposibilă* fiind interzisă de PIVMPI ($v_{max}=c$). *Domeniul fizic maxim posibil pentru comunicare* este delimitat de $v\le c$ şi este reprezentat de pânzele CL marcate prin generatoarele conului luminos.

(R_{11}) **Concluzii interesante asupra liinilor de univers din $\mathcal{S}_M$, ca şi asupra modului de reprezentare a unor cuadrivectori cinematici, rezultă din Anexa ce urmează, comentariile $\{c_m\}$ ce o însoţesc *clarificând* aspecte cinematice relativiste legate de *conul luminos* (CL) *deosebit de importante*.**

3.16.8.9*ANEXĂ*. Ilustrări grafice cinematice ale unor linii de univers ale mişcării punctului material relativist (particulei relativiste) în interiorul şi/sau pe conul luminos (CL). Comentarii şi explicitări de semnificaţii fizice $\{c_m\}$

În figura 3.5 au fost ilustrate *linii de univers* (traiectorii Minkowski în $\mathcal{S}_M$) ale punctului material pentru diferite tipuri de mişcări, ilustrarea nefăcând utilizarea *conului luminos* (CL) care înfăşoară traiectoriile.

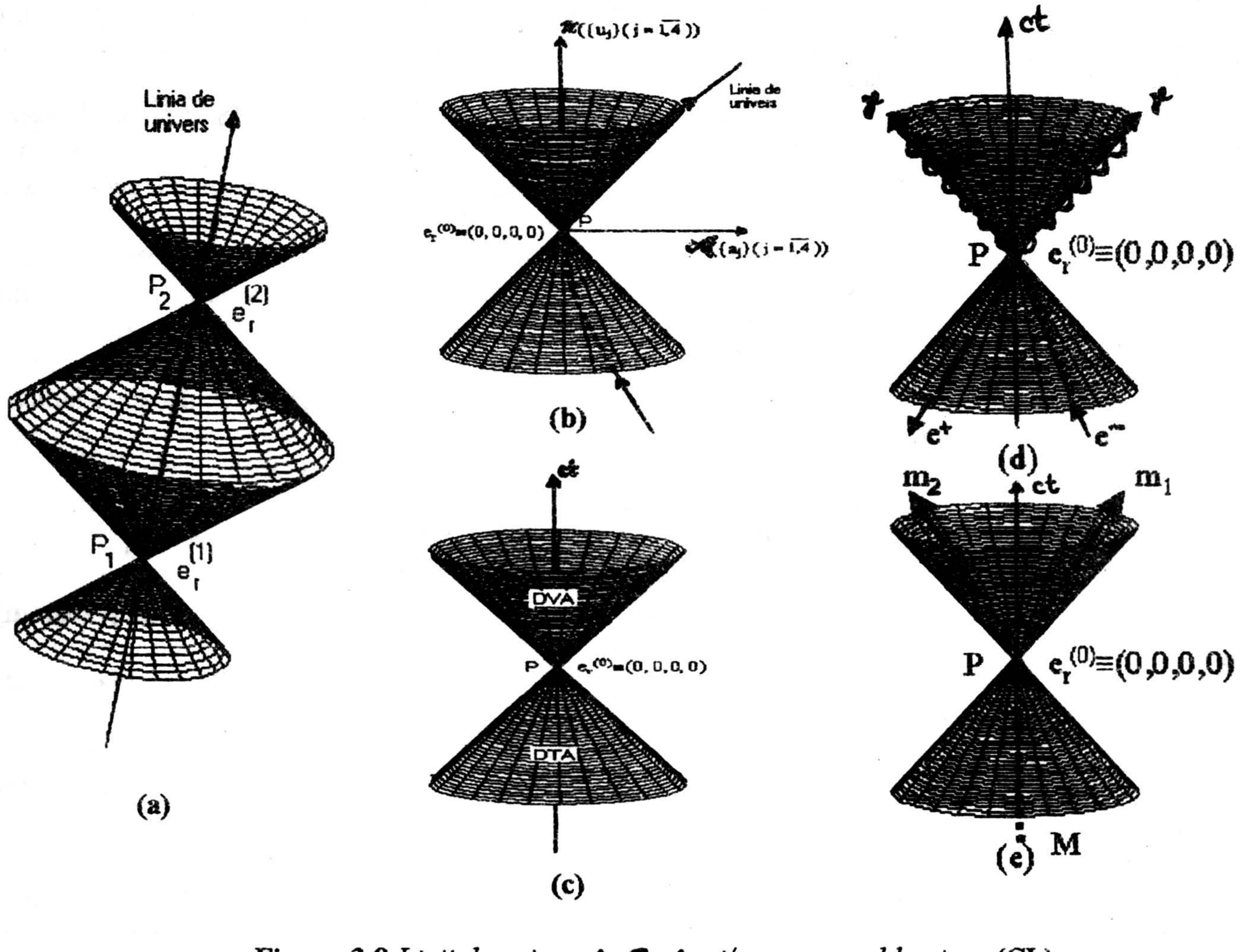


Figura 3.8 *Linii de univers în $\mathcal{S}_M$ în şi/sau pe conul luminos* (CL)

(a) cazul particulei relativiste în MRU cu $\vec{v}$ =const. (considerat între evenimentele $e_r^{(1)}$ şi $e_r^{(2)}$) considerate la momentele de timp t_1, respectiv $t_2 > t_1$;

(b) cazul particulei accelerate (având $v < c$), cu linia de univers tangentă la cuadrivectorul viteză $\mathcal{U}(\{u_j\})$ ortogonal pe cuadriacceleraţia $\mathcal{A}(\{a_j\})$ (care exprimă şi curbura liniei de univers);

(c) cazul particulei cu linia de univers indicând mişcarea înainte în timp;

(d) cazul electronului (e^-) mişcându-se înainte în timp şi al pozitronului (e^+) mişcându-se înapoi în timp, care se anihilează reciproc în doi fotoni γ ce se deplasează pe pânza DVA (domeniul viitorului absolut) a CL;

(e) cazul particulei de masă de repaus M, deplasându-se înainte în timp spre ***momentul dezintegrării*** [considerat ca origine $e_r^{(0)}$(prezentul)] ***în două particule*** (cu $m_1+m_2 < M$) liniile lor de univers arătând $v_1 < c$, $v_2 < c$ şi deplasare înainte în timp.

În toate figurile cu excepţia figurii 3.8 (a), prin P se desemnează prezentul $e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$, considerare necesară pentru comentarea semnificaţiilor fizice.

(C_1) În figura 3.8 redăm câteva ilustrări grafice de *linii de univers însoțite de* CL, care evidențiază geometric mult mai bine *elementele de cinematică implicate în reprezentarea cuadridimensională a mișcării în universul spațiu-timp* ($\mathcal{S}_M$), precum și procese cuantice ce au loc în evenimentul origine $e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$ al CL, când linia de univers trece tocmai prin *prezentul procesului cuantic*, ca *eveniment zero/origine,* datorită duratei extrem de scurte a propceselor luate în considerare [*anihilarea* reciprocă din perechea (e^+,e^-), respectiv *dezintegrarea* spontană a unei particule cu masa de repaus M în două particule cu mase de repaus m_1 respectiv m_2].

(C_2) Figurile 3.8 (a) și (c) se referă strict la cinematica relativistă a aceleiași particule relativiste aflată în mișcare rectilinie și uniformă (MRU), cu mișcarea înainte în timp. Cu excepția liniei de univers din figura 3.8 (b), în restul figurilor avem numai MRU.

(C_3) Mișcare înainte în timp prezintă toate liniile de univers reprezentate în figura 3.8, cu *excepția* liniei de univers a *pozitronului* (e^+) din figura 3.8 (d), care *se deplasează înapoi în timp* (după cum indică și sensul marcat pe linia de univers).

(C_4) În toate cazurile de linii de univers reprezentate este satisfăcut PIVMPI, deoarece particulele se mișcă cu $v<c$, cu excepția fotonilor γ din fig. 3.8 (d), care au $v_f = c$ și, după cum se vede din figură, se deplasează pe pânza CL desemnând DVA (domeniul viitorului absolut), astfel fiind satisfăcută relația $v \leq c$.

(C_5) Din figura 3.8 (a) se poate deduce modul cum se construiesc CL-urile care "înfășoară" în fiecare moment linia de univers a particulei în MRU relativistă, dând un segment de traiectorie considerat între două evenimente $e_r^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_4^{(1)}) \equiv (x_1,y_1,z_1,ict_1)$ și $e_r^{(2)}(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, x_4^{(2)}) \equiv (x_2,y_2,z_2,ict_2)$.

(C_6) Figura 3.8(b) reprezentând linia de univers a particulei relativiste în mișcare rectilinie și uniform accelerată (MRUA) este una din cele mai încărcate cu informații cinematice relativiste, deoarece indică:

(I) linia de univers prezentând curbură;

(II) curbura măsură și ilustrare tocmai a caracterului accelerat al mișcării;

(III) modul cum se reprezintă *cuadrivectorul viteză* $\mathcal{U}(\{u_j\})$ *tangent la linia de univers în evenimentul origine* $e_r^{(0)}$ (în care se află particula relativistă supusă observării);

(IV) modul de ilustrare a *cuadriaccelerației* $\mathcal{A}(\{a_j\})$ în raport cu cuadriviteza pe care este ortogonală, conform demonstrației ortogonalității din secvența 3.17.6.3 (a paragrafului 3.17) [v. relațiile (3.125)-(3.126)];

(V) măsura curburii liniei de univers a MRUA ca fiind tocmai modulul cuadriaccelerației și/sau invers.

(C_7) Informațiile despre cuadriviteză din (C_6) și figura 3.8(b) vor fi foarte utile pentru înțelegerea cuadrivitezei în subparagraful 3.17.4 (al cap. IV). De asemenea, informațiile despre cuadriaccelerație din aceeași figură și același comentariu.

(C_8) Figurile 3.8 (d) și (e) arată că, reprezentarea relativistă în $\mathcal{S}_M$ prin linii de univers localizate în CL este foarte avantajoasă metodologic pentru înțelegerea comportării relativiste a particulelor cuantice, atât înainte cât și după *prezentul* ($e_r^{(0)}$) al unor procese cuantice pe care le suferă [ciocniri elastice și/sau neelastice, anihilări particulă-antiparticulă, dezintegrare spontană, schimburi de particule virtuale cu alte particule aflate în interacție (ex. $e^- \leftrightarrow e^+$) etc.]

$[P_3^{(2)}]\equiv$ MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ [MODELUL TEORETIC RELATIVIST (MTR)]

(p.89→152)

Cap. IV şi cap. V

[Cinematică şi dinamică relativiste cuadrivectoriale]

Rezumat şi dicţionar

(0) Întreaga *mecanică relativistă are la bază* TrLS (3.61) şi/sau (3.63) şi principiile fundamentale ale TRR/TRS, *impunând* înlocuirea mărimilor fizice $\{M_f\}$ nerelativiste cu cele relativiste $(\{M_f^{(r)}\})$, departajate la raportarea mişcării la referenţialele reciproc inerţiale RI ⇆ $(RI)'\equiv(RI)_0$ în două clase: (c_1) $\{M_f^{(r)}\}$ *proprii* (de repaus) [indiciate prin zero, de ex. l_0, $(\Delta t)_0\equiv\tau$, V_0, m_0, $W_0^{(r)}$ etc.] măsurate în $(RI)_0$ propriu şi (c_2) **$\{M_f^{(r)}\}$** ***cinematice*** (de mişcare) [neindiciate, de ex.: l, (Δt), V, m, $W_t^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$] măsurate în RI, oricare altul decât cel propriu.
Capitolele IV şi V expunând mecanica teoretică relativistă utilizează setul de $\{M_f\}$ *proprii* (de repaus) şi *cinematice* (de mişcare) amintit mai sus, dar acestea apar în principal incluse în *formularea cuadridimensională-cuadrivectorială* a MTR mecanic pe care îl avem în vedere.

(1) *Mecanica teoretică relativistă* este în fapt o reformulare relativistă a mecanicii teoretice newtoniene *ca o TRR/TRS aplicată mecanicii*.

(2) Modelarea teoretică a mişcării obiectelor $(\{O_f\})$/sistemelor $(\{S_f\})$ fizice prin elaborarea *modelului teoretic relativist* (MTR) are în vedere mişcarea O_f/S_f *a cărui viteză relativă* este comparabilă ca valoare cu c, valoarea vitezei luminii în spaţiul liber (vidul electromagnetic), sau *a cărui energie cinetică* (Γ) este comparabilă cu produsul mc^2 (al masei cu c^2), ca valoare numerică.

(3) Un O_f/S_f ce se mişcă cu v ~ c şi/sau a cărui T ~ mc^2 (ca valoare) se numeşte O_f/S_f *relativist*.

(4) Modelarea teoretică a O_f/S_f relativist *furnizând* MTR *mecanic are* în baza sa fizico-matematico-experimentală numai TRR/TRS, impusă de faptul că *efectele gravitaţionale asupra mişcării* pot fi neglijate prin indicaţia dată de *diferenţele de energie potenţială gravitaţională implicate*, mult mai mici decât mc^2 (în caz contrar trebuind aplicată TRG).

(5) Cel mai simplu MTR mecanic este acela în care dimensiunile O_f/S_f relativist sunt neglijabile, sau când se neglijează (nu interesează) simetria lui internă, caz în care MTR mecanic se reduce la *punctul material relativist* sau la *particula relativistă*.

(6) *Mecanica teoretică relativistă* (cinematica şi dinamica) *punctului material relativist* (particulei relativiste) îşi găseşte aplicaţii practice *fizic naturale în calcularea*:

- (I) *efectelor relativiste pur cinematice privind rata dilatării relativiste a duratei măsurate cu ceasornicele de la bordul sateliţilor artificiali ai Terrei* implicaţi în ansamblul militar satelitar numit *Sistemul de Poziţionare Globală* (SPG, sau GSP în engl.), efecte relativiste mult mai importante decât cele simultane dinamice;
- (II) *efectelor relativiste din mişcarea relativistă a particulelor elementare* accelerate la energii înalte în acceleratoare de particule; *ori a*
- (III) *energiei*: (a) *electronilor şi pozitronilor* din dezintegrarea nucleelor radioactive; (b) *de legătură a nucleonilor* în nucleele atomice; (c) *surselor de energie stelară*; (d) *exploziilor supernovelor*; (e) *electronilor din atmosfera pulsarilor*; (f) *plasmei primordiale* etc.

(7) Cea mai *eficientă şi mai concisă formulare fizico-matematică a mecanicii teoretice relativiste este cea cuadridimensională*, în spaţiul Minkowski (universul spaţiu-timp), ca *spaţiul general de totalitatea evenimentelor relativiste* $\{e_r^{(f)}(\{x_j\},\ j=\overline{1,4})\}$ (cu f oricât de mare), în care poziţia oricărui e_r faţă de evenimentul origine/zero $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ este dată printr-un *cuadrivector de poziţie* $\mathcal{R}(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))\equiv\mathcal{R}(x,y,z,ict)$ având în originea sa O(0,0,0,0) pe $e_r^{(0)}$, iar în vârful său punctul figurativ/reprezentativ P(x,y,z,ict) al $e_r\neq e_r^{(0)}$.

(8) Cei mai importanţi *cuadrivectori cinematici* utilizaţi în elaborarea *cinematicii relativiste* din cap. IV sunt: *cuadripoziţia* $\mathcal{R}(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))$, *cuadriviteza* $\mathcal{U}(\{u_j\}(j=\overline{1,4}))$ şi *cuadriacceleraţia* $\mathcal{A}(\{a_j\}(j=\overline{1,4}))$ şi *cuadrivectorul de undă* $\mathcal{K}(\{k_j\}(j=\overline{1,4}))$, *legile cinematicii relativiste cuadrivectoriale* fiind date tocmai de variaţia lui $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$ în raport cu *timpul propriu* τ , respectiv în raport cu *timpul cinematic* t, iar importantul efect cinematic relativist care este efectul Doppler-Fizeau (EDF) transversal fiind pus în evidenţă cu ajutorul $\mathcal{K}$. Reprezentarea grafico-geometrică a cuadrivectorilor ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$) este ilustrată în figura 3.10.

(9) *Cuadrivectorii dinamici* în număr minim necesar *elaborării dinamicii relativiste cuadrivectoriale în cap. IV* sunt cuadrivectorul impuls $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))$ respectiv *forţă* $\mathcal{F}(\{F_j\}(j=\overline{1,4}))$, cu ajutorul cărora se formulează şi se rezolvă: (a) *problema dinamică a variaţiei masei de mişcare cu viteza* ($m=m(v^2)$), (b) *problema energiilor în* TRR/TRS ($W_t^{(r)}$, $W_0^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$) prin $\mathcal{P}$, respectiv *problema formulării relativiste a legii fundamentale a dinamicii relativiste* prin variaţia lui $\mathcal{P}$ în

raport cu ***timpul propriu*** (τ) ($d\mathcal{P}/d\tau=\mathcal{F}$). Reprezentarea grafico-geometrică a cuadrivectorilor $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{F}$ este dată în fig. 3.10 în simultan cu ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}$).

(10) ***Structurarea completă şi funcţionarea metodologică*** ale $P_3^{(2)}$ ca mecanică teoretică relativistă sunt date în fig. 3.9 din 3.17_0, conţinând şi toate mărimile fizice (proprii şi de mişcare) şi toţi cuadrivectorii (cinematici şi dinamici) implicate/implicaţi.

(11) Esenţa fizico-geometrică cuadridimensională şi condensarea grafică cea mai mare de informaţie cinematică şi dinamică asupra unei mişcări relativiste este expusă în figura 3.10 [din paragraful 3.17_0 introductiv al $P_3^{(2)}$ (ca mecanică teoretică relativistă (m.t.r.)], care conţine reprezentarea grafică a tuturor cuadrivectorilor mecanici fundamentali [cinematici ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}$) şi dinamici ($\mathcal{P}, \mathcal{F}$)] pentru mişcarea rectilinie şi uniform accelerată (MRUA) a particulei relativiste, cu ***linia de univers*** din $\mathcal{S}_M$ interioară pânzelor conului luminos (CL).

(12) Esenţa fizico-matematică şi metodologică a cap.V (dinamica relativistă cuadrivectorială), ca şi a modului de structurare a problematicii lui este dată în fig. 3.12, care expune ***diagrama rezolvării*** *<problemei metodologice fundamentale a dinamicii relativiste* (p.m.f.d.r.)> ≡ *<obţinerea explicită a componentelor cuadriimpulsului>* şi a *consecinţelor sale* [obţinerea explicită a impulsului relativist tridimensional ($\vec{p}_r$), obţinerea dependenţei relativiste $m(v^2)$ fără a apela explicit la problema masei cinematice (de mişcare), găsirea pe cale cuadrivectorială a expresiei energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$, respectiv rezolvarea problemei variaţiei în raport cu timpul a cuadriimpulsului $\mathcal{P}$, furnizând legea fundamentală a dinamicii relativiste ($d\mathcal{P}/d\tau = \mathcal{F}$)].

Cuprinsul detaliat al $P_3^{(2)}$ = MECANICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ [MODELUL TEORETIC RELATIVIST (MTR)] (p.89→152)

3.17$_0$ (I) Avertismente [privind posibilitatea unui RI privilegiat (RIP)]
(II) Diagrama structurală a [$P_3^{(2)}$].
(III) Reprezentarea grafică a cuadrivectorilor mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$)

(I) Avertismente [privind posibilitatea unui RI privilegiat (RIP)]

(A_1) Întreaga formulare a TRR/TRS atât ca teorie a modelelor teoretice relativiste mecanice, electromagnetice, cuantice etc, indiferent de forma matematică utilizată (vectorială sau cuadrivectorială), are la bază *raportarea fenomenelor fizice la, respectiv măsurarea mărimilor fizice în,* referenţialele reciproc inerţiale RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, ca o exprimare completă a relativităţii mişcării, în condiţiile în care, TRR/TRS exprimă prin PRE al său că nu există RI *privilegiat* (RIP), adică, în condiţiile *echivalenţei tuturor* {RI}, cu trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' descrisă matematic de TrLS (3.61)/(3.63).

(A_2) Relativitatea {RI} rămâne valabilă în întreaga mecanică teoretică relativistă, cum la fel şi echivalenţa lor, chiar dacă în 1965 astrofizicienii americani Arno Penzias şi Robert Wilson au descoperit *fondul universal de radiaţie de microunde cosmice* (de aprox. 2,7K), demonstrând astfel *că universul fizic* (lumea fizică) *posedă un referenţial inerţial privilegiat* (RIP), în locul atât de căutatului *eter* înlăturat definitiv de rezultatele experienţelor Michelson-Morley (1881-1887) şi de interpretările fizico-matematice şi principiale ale acestor experienţe.

(A_3) *Amintitul* (RIP) *nu contrazice* TRR/TRS, deoarece *faţă de el nu se poate măsura viteza relativă* a Terrei (Pământului) prin experienţe de laborator închis, o problemă dificilă fiind însăşi *detectarea fondului universal de radiaţie cosmică în discuţie.*

[Rafinamentul şi dificultăţile experimentale, ca şi interpretarea teoretică a rezultatelor măsurătorilor şi prelucrarea acestor măsurători le-au adus celor doi astrofizicieni americani Premiul Nobel pentru fizică pe 1978]

(A_4) În capitolele ce urmează (IV şi V), *mecanica teoretică relativistă* ($P_3^{(2)}$), pe care o expunem prin *cinematica relativistă cuadrivectorială* (cap.IV), respectiv prin *dinamica relativistă cuadrivectorială* (cap.V), va avea în vedere MTR mecanic cel mai simplu reprezentat prin *punctul material relativist* sau *particula relativistă,* mai ales în *formularea cuadrivectorială.*

(A_5) Conform (A_4), mecanica teoretică relativistă (m.t.r.) va fi o TRR/TRS *aplicată la mişcarea particulei relativiste* pentru care nu se ia în considerare structura internă a particulei, în caz contrar fiind necesară elaborarea mecanicii teoretice a continuumului relativist. Cu toate acestea *domeniul aplicativ* al m.t.r. reuneşte modelări teoretice relativiste şi rezolvări aplicative din: (a) *mecanica relativistă a punctului material în general,* (b) *mecanica relativistă satelitară a Sistemului de Poziţionare Globală* (SPG) a Terrei, (c) *fizica particulelor elementare accelerate la energii înalte în acceleratoarele de particule* (CERN, FermiLAB, Dubna, Hessa etc.); (d) *fizica dezintegrărilor radioactive* a nucleelor atomice cu emisia de electroni şi pozitroni şi cea a *energiei de legătură a nucleonilor*; (e) *fizica stelară* (a surselor de energie stelară, a exploziilor supernovelor şi a energiei acestora, a electronilor relativişti din atmosfera pulsarilor, a energiei plasmei primordiale etc.), la care putem alătura (f) *fizica teoretică relativistă a particulelor cuantice,* inclusiv cea mai specială, la care lucrează Stephen W. Hawking (n.1942), considerând (g) *găurile negre microscopice* (cuantice) ca particule relativiste cu mase extrem de mari [*model teoretic cuantic relativist* cu care este posibilă elaborarea teoriei cuantice relativiste a interacţiunilor gravitaţionale] etc.

(II) Diagrama structurală a [$P_3^{(2)}$] a cursului de FT ca mecanică teoretică relativistă (m.t.r.) cuadrivectorială

În figura 3.9 structura subpărţii [$P_3^{(2)}$] a *Părţii a 3^a* <*Fizică teoretică relativistă*> ≡ [P_3] are prezentat diagramatic *conţinutul ştiinţific* [cap.IV destinat *cinematicii relativiste cuadrivectoriale* şi cap.V destinat *dinamicii relativiste cuadrivectoriale*] cu detalieri structurale legate de tipurile de {M_f} specifice TRR/TRS [{M_f} *proprii* (de repaus) indiciate cu zero (0), respectiv {M_f} *de mişcare* (cinematice) cele neindiciate cu zero], generate de *măsurătorile în referenţialele reciproc inerţiale* [RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$], respectiv tipurile de {M_f} exprimate cuadridimensional prin *cuadrivectorii generali* definiţi cu ajutorul relaţiei (3.100) ce desemnează legea fizico-matematică de transformare a componentelor

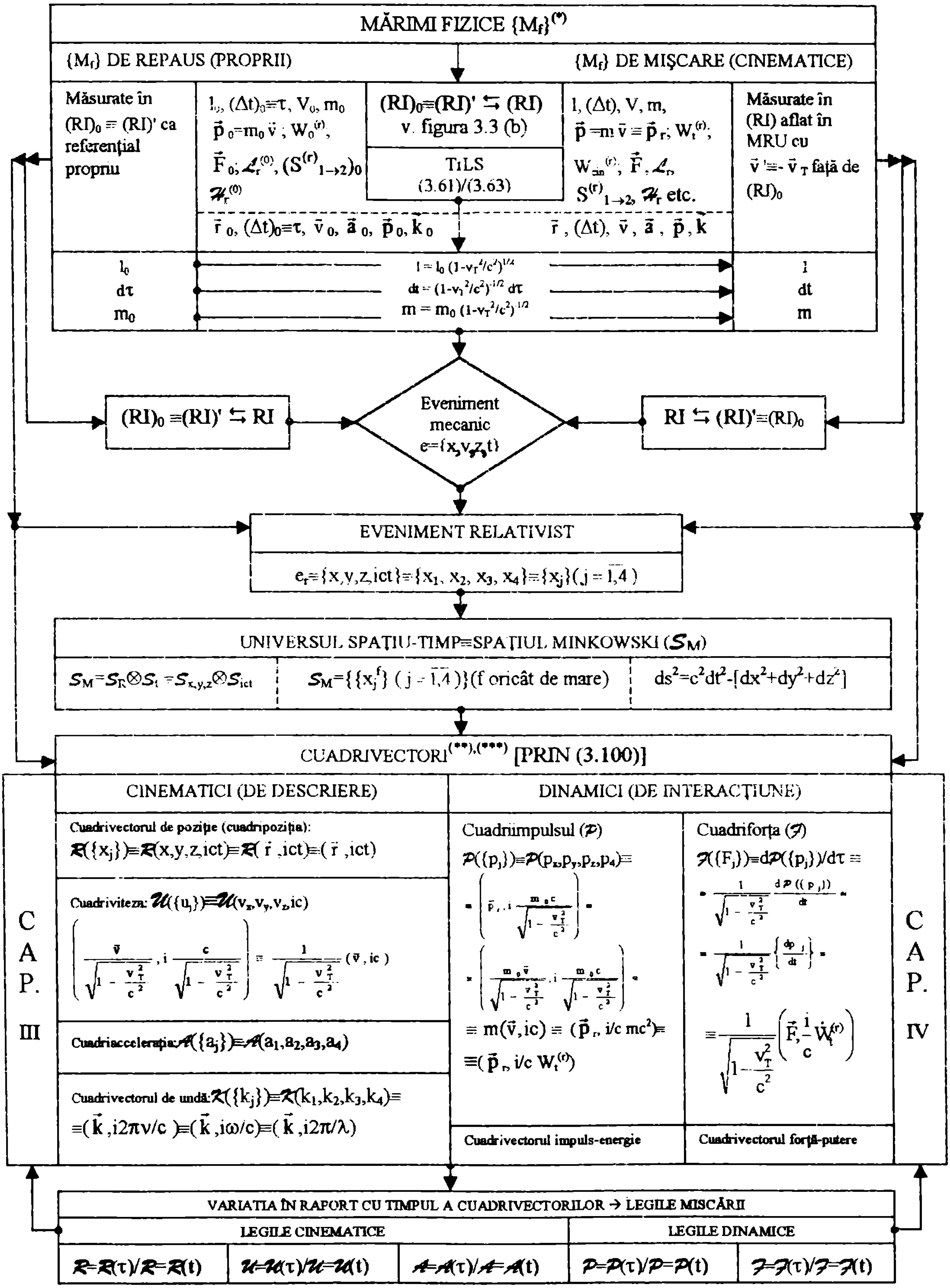


Figura 3.9 (v. explicația în pag. 98)]

Figura 3.9 **Diagrama structurală a subpărţii [$P_3^{(2)}$] a cursului de FT ca mecanica teoretică relativistă cuadrivectorială (cap. IV-V), având la bază {M_f} de repaus (proprii) şi de mişcare (cinematice) [furnizate parţial de [$P_3^{(1)}$]≡<TRR/TRS>(cap. 0,I-III) prin cap. III], respectiv cuadrivectorii mecanici fundamentali ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}; \mathcal{P}, \mathcal{F}$)**

(*) În setul de {M_f}preluate din $P_3^{(1)}$ au fost incluse ca {M_f} şi {M_f} din $P_3^{(2)}$ cerute de descrierea cinematică a mişcării ($\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}, \vec{k}$) sau de explicarea cauzală dinamică (m, $\vec{p}$, W, $\vec{F}$). De asemenea, şi {M_f} exprimate prin funcţii analitice de stare ($\mathcal{L}_r$, $\mathcal{H}_r$) respectiv de proces $S^{(r)}{}_{1\to2}$

(**) Cuadrivectorii consideraţi (cinematici, respectiv dinamici) formează o bază minimală ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{K}$), respectiv ($\mathcal{P}, \mathcal{F}$) suficientă elaborării cinematicii relativiste (cap.III), respectiv dinamicii relativiste (cap.IV), în forma cuadridimensională (cuadrivectorială)

(***) Cu excepţia cuadrivectorului $\mathcal{K}$, toţi ceilalţi ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}; \mathcal{P}, \mathcal{F}$) au reprezentare grafică în figura 3.10, care dă ilustrarea liniei de univers a mişcării uniform accelerate (MRUA) a particulei relativiste

cuadrivectorilor relativişti. De asemenea, structura metodologic-funcţională, cu preluări de {M_f} din [$P_3^{(1)}$] (cap.III), cu completarea întregului set de {M_f} răspunzând necesităţilor de descriere cinematică din elaborarea efectivă a cinematicii relativiste cuadrivectoriale (cap.IV), ca şi celor de explicare cauzală prin interacţiune elaborând dinamica relativistă cuadrivectorială (cap.V), cu specificarea cuadrivectorilor dinamici fundamentali ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}$), respectiv dinamici fundamentali ($\mathcal{P}, \mathcal{F}$), cu explicitarea legilor cinematice ale mişcării relativiste ca legi de variaţie a cuadrivectorilor cinematici fundamentali în raport cu timpul propriu (τ) şi/sau cu cel cinematic (t), respectiv a celor dinamici dând legile dinamice ale mişcării relativiste [în principal legea fundamentală a dinamicii relativiste $\left(\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \mathcal{F}\right)$].

În cap.V, metoda de obţinere a cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\})$ va fi cea analitică, după ce se va obţine acţiunea Hamilton relativistă $S^{(r)}{}_{1\to2}$ a punctului material, prin *funcţia analitică Lagrange relativistă* [$\mathcal{L}_r = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$]şi prin *relaţia generală* $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$ ($k=\overline{1,g}$) dintre *impulsul generalizat* (p_k) şi *funcţia analitică acţiune Hamilton* $S_r(\{x_j\})$ ($j=\overline{1,4}$) *relativistă* (fixând limita temporală iniţială şi lăsând variabilă limita temporală finală, din funcţionala $S^{(r)}{}_{1\to2}$). Odată obţinut $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))$ din $S_r(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))$, se vor rezolva: (a) *problema variaţiei relativiste a masei cu viteza* $m=m(v^2)$, (b) *problema energiilor* în TRR/TRS ($W_t^{(r)}$, $W_0^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$) ca o problemă rezolvată dinamic apelând la $\mathcal{P}$, respectiv (c) *problema variaţiei în raport cu* τ (respectiv t) a lui $\mathcal{P}$, care furnizează tocmai cuadriforţa şi, prin ea, *legea fundamentală a dinamicii relativiste cuadrivectoriale* (legea cuadriforţei) $\left[\left(\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \mathcal{F}\right)\right]$.

De aceea, figura 3.9 ilustrează atât de detaliat cuadriimpulsul $\mathcal{P}$. Tot din aceeaşi figură, se mai observă întreaga structură şi formulare cuadrivectorială a m.t.r., plecând de la evenimentul relativist $e_r(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))$≡{x,z,y,ict} şi de la mulţimea tuturor evenimentelor relativiste care generează *universul spaţiu-timp sau spaţiul Minkowski* ($\mathcal{S}_M$), cu *intervalul relativist elementar* (ds) drept element de distanţă generalizată cuadridimensional.

Necesitatea specificării pe cale grafică a cuadrivectorilor din $P_3^{(2)}$ ($\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{A}; \mathcal{P}, \mathcal{F}$) primeşte răspuns prin figura 3.10.

Alte precizări privitoare la diagrama structurală a [$P_3^{(2)}$] (ca m.t.r.) sunt făcute ca observaţii (*), (**) şi (***) la figura 3.9.

(III) Reprezentarea grafică a cuadrivectorilor mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$)

Deoarece întreaga m.t.r. (mecanică teoretică relativistă) ce va fi expusă în $P_3^{(2)}$ prin cap.IV şi V ale cursului de FT este formulată cuadridimensional/cuadrivectorial, o *sinteză pe cale grafică a informaţiilor teoretice relativiste* este concepută în figura 3.10 prin *reprezentarea grafică formală şi simultană* a *cuadrivectorilor mecanici fundamentali*:

(a) *cinematici* (cuadripoziţia $\mathcal{R}$, cuadriviteza $\mathcal{U}$ şi cuadriacceleraţia $\mathcal{A}$), respectiv

(b) *dinamici* (cuadriimpulsul $\mathcal{P}$ şi cuadriforţa $\mathcal{F}$).

Ilustrarea se face în cazul mişcării rectilinii uniform accelerate (MRUA), a cărei *linie de univers din* $\mathcal{S}_M$ *are curbura măsurată* tocmai prin *modulul cuadriacceleraţiei* $\mathcal{A}$. Deoarece particula relativistă aflată în MRUA are v < c, "înfăşurătoarea" liniei sale de univers prin pânzele conului luminos are valoare grafică deosebită, *implicând tocmai* PIVMPI al TRR/TRS care, prin $v_{max}=c$, şi ţinând cont de ecuaţia

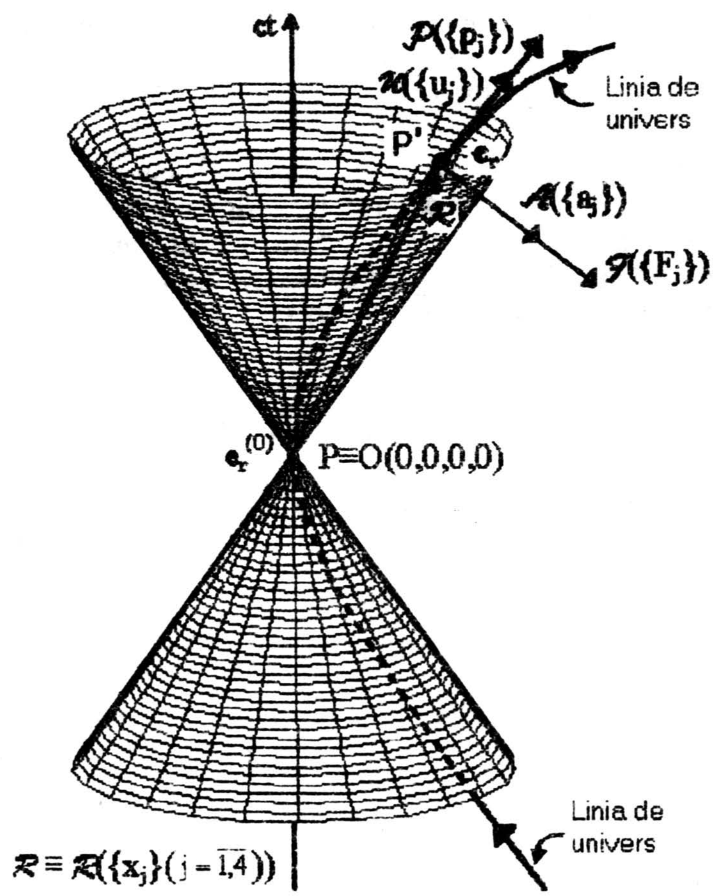


Figura 3.10 Reprezentarea grafică formală $^{(*)}$ simultană a cuadrivectorilor mecanici [cinematici ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$)$^{(**)}$ şi dinamici ($\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$)$^{(***),(****)}$] în cazul mişcării rectilinii uniform accelerate (MRUA) a particulelor relativiste, prin ilustrarea liniei de univers a MRUA [în universul spaţiu-timp ($\mathcal{S}_M$)] interioară pânzelor conului luminos (CL)

(*) Formală deoarece se "condensează" o reprezentare cuadridimensională într-una tridimensională efectivă prin CL

(**) Cuadrivectorul $\mathcal{R}$ are "originea" în P≡O(0,0,0,0) ca eveniment zero/origine $e_r^{(0)}(0,0,0,0)$ şi "vârful" în P' ca e_r(x,y,z,ict), toţi ceilalţi cuadrivectori reprezentaţi având "originile" în P'

(***) Cuadriimpulsul ($\mathcal{P}$) este "coliniar" cu cuadriviteza ($\mathcal{U}$) şi de aceea tangent ca şi $\mathcal{U}$ la linia de univers în P'. Cuadriforţa ($\mathcal{F}$) este "coliniară" cu cuadriacceleraţia ($\mathcal{A}$) şi de aceea ortogonală pe $\mathcal{U}$ (şi/sau $\mathcal{P}$), cum ortogonală este $\mathcal{A}$ pe $\mathcal{U}$ (v. rel. (3.125))

(****) Coliniaritatea lui $\mathcal{F}$ cu $\mathcal{A}$ nu este întotdeauna valabilă generatoarelor CL (3.95), *cere ca linia de univers curbată a* MRUA să fie interioară pânzelor CL.

Reprezentarea grafică a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ este precizată complet prin (**) ce însoţeşte figura 3.10, care arată că acest cuadrivector localizează evenimentul $e_r(x,y,z,ict)$ în raport cu evenimentul origine/zero $e_r^{(0)}$, "vârful" lui $\mathcal{R}$ fiind în P' de pe linia de univers interioară CL.

Toţi ceilalţi cuadrivectori mecanici ($\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{F}$) au originea în P' ca punct figurativ în $\mathcal{S}_M$ al evenimentului relativist ce localizează particula relativistă prin cuadricoordonatele (x,y,z,ict). De pe figura 3.10 caracterul tangent al cuadrivitezei $\mathcal{U}$ la linia de univers atrage după sine, prin "coliniaritatea" ei cu $\mathcal{P}$, acelaşi caracter de cuadrivector tangent la linia de univers şi pentru $\mathcal{P}$.

Ortogonalitatea dintre cuadrivectorii $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$ definită şi demonstrată prin relaţiile (3.125)-(3.126) ajută la înţelegerea modului de reprezentare grafică a cuadriacceleraţiei $\mathcal{A}$. Aceeaşi "coliniaritate" a cuadriforţei $\mathcal{F}$ cu cuadriacceleraţia $\mathcal{A}$ şi/sau ortogonalitatea lui $\mathcal{P}$ cu $\mathcal{F}$ permit încheierea descrierii modului cum apelând la linia de univers a MRUA interioară pânzelor CL se reprezintă grafic setul de cuadrivectori mecanici fundamentali.

Alte precizări asupra (III) din paragraful de faţă se mai pot obţine prin observaţiile (*), (**) şi (***) care însoţesc figura 3.10.

Rostul metodologic al plasării figurii 3.10 în cadrul paragrafului introductiv 3.17_0 al $P_3^{(2)}$ (ca m.t.r.) este evident, iar justificarea efectivă este dată de includerea figurii 3.9 în aceeaşi poziţie faţă de cap.IV şi V ale $P_3^{(2)}$, cu conţinutul ei clarificând structura $P_3^{(2)}$ ca o m.t.r. *cuadrivectorială*, structură care este cinematic şi dinamic pe deplin ilustrată grafic *tocmai* prin conţinutul informaţional relativist cuadridimensional şi cuadrivectorial, afirmat prin cei cinci cuadrivectori mecanici fundamentali.

CAP. IV CINEMATICĂ RELATIVISTĂ CUADRIVECTORIALĂ

3.17 Cinematica relativistă cuadrivectorială a punctului material

3.17.0 Consideraţii generale procedurale. Obiectul de studiu al cinematicii relativiste

3.17.0.1Obiectul de studiu al cinematicii clasice nerelativiste

Cinematica nerelativistă a mecanicii clasice are ca *obiect de studiu mişcarea mecanică* descrisă cinematic prin *mărimile fizice cinematice vectoriale de stare mecanică* [vectorul de poziţie $\vec{r}$, viteza momentană (instantanee) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$, acceleraţia momentană (instantanee) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}$ etc.] şi prin *dependenţele lor de timp* [$\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, $\vec{v} = \vec{v}\,(t)$, $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$] ca *ecuaţiile cinematice ale mişcării* [ecuaţia vectorului de poziţie (operatorului), ecuaţia vitezei, ecuaţia acceleraţiei] reprezentând *formele matematice ale legilor cinematice ale mişcării*. Pentru simplitate, vom considera mişcarea punctului material, asupra căruia din *punct de vedere cinematic* nu interesează *problema masei* şi, prin ea, nici *problema interacţiunii mecanice*, care reprezintă *cauza mişcării*, ce intră în obiectul de studiu al dinamicii.

3.17.0.2Obiectul de studiu al cinematicii relativiste cuadrivectoriale

Ca parte *a mişcării relativiste, cinematica relativistă* are acelaşi obiect de studiu ca şi cea nerelativistă, descriind mişcarea mecanică prin *mărimile fizice cuadrivectoriale* [$\mathcal{R}$ –cuadrivectorul de poziţie (cuadripoziţia), $\mathcal{U}$ –cuadrivectorul viteză (cuadriviteza), $\mathcal{A}$ –cuadrivectorul acceleraţie (cuadriacceleraţia) etc.] şi *prin dependenţele lor de timpul propriu* (τ) [$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\tau)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tau)$ etc.] *respectiv de timpul cinematic* (t) [$\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(t)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(t)$ etc.], ca *ecuaţii cinematice relativiste ale mişcării*, dând *legile cinematice ale mişcării mecanice relativiste* raportate la referenţialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ prin dependenţele de τ, respectiv aceleaşi legi raportate la referenţialul inerţial RI, altul decât cel propriu $(RI)_0$, atunci când face raportarea mişcării relativiste la referenţialele reciproc inerţiale RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$, trecerea reciprocă fiind descrisă matematic de TrLS (3.61) şi (3.63).

Generalitatea cinematicii relativiste în afara extinderii sale cuadridimensionale şi cuadrivectoriale este dată de faptul că *vitezele* sistemelor mecanice modelate ca puncte materiale relativiste cu valori comparabile cu valoarea c a undelor electromagnetice (luminii) în spaţiul liber (vidul electromagnetic), conformă principiului invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI).

3.17.0.3Procedura de elaborare a cinematicii relativiste cuadrivectoriale

Cinematica relativistă este *formal* asemănătoare cu cea nerelativistă şi se obţine formal prin: (a) *înlocuirea stării mecanice* Σ_m=(x,y,z;t), ca eveniment nerelativist [cu trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)' descrisă matematic prin transformările Galilei], *prin evenimentul relativist* $e_r \equiv \{x_j,\ j=\overline{1,4}\}$≡(x,y,z,ict) [cu trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)' descrisă matematic de TrLS]; (b) *înlocuirea spaţiului euclidian tridimensional* $\mathcal{S}_E$=$\mathcal{S}_{x,y,z}$=$\mathcal{S}_{\mathcal{R}}$ prin *spaţiul cuadridimensional Minkowski* (universul spaţiu-timp) ($\mathcal{S}_M$), $\mathcal{S}_M$=$\mathcal{S}_{\mathcal{R}}\otimes\mathcal{S}_t$=$\mathcal{S}_{x,y,z}\otimes\mathcal{S}_{ict}$, în care e_r este reprezentat printr-un punct figurativ P cu poziţia raportată la evenimentul origine $e_r^{(0)}$=(0,0,0,0) dată de *cuadrivectorul de poziţie* $\mathcal{R}$ (având originea în $e_r^{(0)}$ şi vârful în e_r); (c) *utilizarea transformărilor Lorentz speciale* (TrLS) (3.61) şi/sau (3.63) *în locul celor Galilei* (3.1)-(3.2) şi/sau (3.14)-(3.15), pentru a face trecerile reciproce $(e_r)_{RI}$ ⇆ $(e_r)_{(RI)'}$, de la evenimentul relativist raportat la RI, la acelaşi eveniment raportat la (RI)' ce se deplasează cu $\vec{v}_T$=const., paralel cu axa Ox din RI [vezi fig. 3.3(b)]; (d) *înlocuirea mărimilor fizice cinematice vectoriale* (tridimensionale) ($\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ etc.) *prin mărimile fizice cuadrivectoriale* (cuadridimensionale) *corespondente* ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ etc.), care se transformă în sens Lorentz (3.61) în trecerea RI ⇆ (RI)'; (e) *scrierea formală a dependenţelor de timp ale cuadrivectorilor cinematici* ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ etc.) şi (f) *transformarea cuadridimensională a legilor cinematice nerelativiste ale mişcării mecanice, pentru a rezulta legile cinematicii relativiste cuadridimensionale* (legea cuadrivectorului de poziţie, legea cuadrivitezei, legea cuadriacceleraţiei etc.)

Întâiul pas efectiv în elaborarea cinematicii relativiste cuadrivectoriale este *introducerea conceptului de cuadrivector,* reprezentând orice mărime fizică cuadrivectorială.

3.17.1 Cuadrivectori. Cuadrivectori cinematici

3.17.1.1Definiţia cuadrivectorului

<Numim cuadrivector $\mathcal{C}$ ansamblul de patru mărimi fizice scalare $\{\mathcal{C}_j;\ j=\overline{1,4}\}$, care în trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)' se transformă în sens Lorentz (3.100) $\mathcal{C}'_j=\sum_{k=1}^{4}\alpha_{jk}\mathcal{C}_k$ $j=\overline{1,4}$, cu $\{\alpha_{jk}\}$ coeficienţii transformării Lorentz generale ((3.42)-(3.45))>.

În TRR/TRS, în general, $\{\alpha_{jk}\}$ se particularizează la cazul transformărilor Lorentz speciale TrLS (3.61) cu ajutorul cărora se fac aplicările efective de descriere matematică a trecerii RI ⇆ (RI)' la care se raportează scrierea efectivă a mărimilor fizice şi a relaţiilor matematice dintre ele, care reprezintă legile fizice, prin raportarea la RI şi (RI)' reciproc inerţiale.

3.17.1.2Exemple de cuadrivectori

Cel mai simplu exemplu de cuadrivector este *cuadrivectorul de poziţie* (cuadripoziţia) $\mathcal{R}$=$\mathcal{R}(\{x_j\};\ j=\overline{1,4})$≡$\mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4)$≡$\mathcal{R}$(x,y,z,ict). Alte exemple de cuadrivectori sunt: *cuadriviteza* ($\mathcal{U}$), *cuadriacceleraţia* ($\mathcal{A}$), *cuadrimomentul cinetic, cuadriimpulsul* ($\mathcal{P}$), *cuadriforţa* ($\mathcal{F}$), *cuadrivectorul de undă* ($\mathcal{K}$) etc.

3.17.1.3Cuadrivectorii cinematici

(a) *Definiţie* <Numim *cuadrivector cinematic*, cuadrivectorul ce reprezintă orice mărime fizică cinematică de patru componente scalare transformându-se în sens Lorentz (3.100)>.
(b) *Enumerarea cuadrivectorilor cinematici*

Cuadrivectorii cinematici necesari descrierii cinematice a mişcării mecanice relativiste sunt: (I) *cuadrivectorul de poziţia sau cuadripoziţia* ($\mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4)$); (II) *cuadrivectorul viteză sau cuadriviteza* ($\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$); (III) *cuadrivectorul acceleraţie sau cuadriacceleraţia* ($\mathcal{A}(a_1,a_2,a_3,a_4)$) etc. În paragraful 3.18 vor fi date elemente de cinematică relativistă a undelor pe baza cuadrivectorului de undă ($\mathcal{K}$).

3.17.2 Cuadrivectorul de poziţie sau cuadripoziţia ($\mathcal{R}$)

3.17.2.1Definiţie

<Numim *cuadrivector de poziţie sau cuadripoziţia* ($\mathcal{R}$), *cuadrivectorul* care localizează *oricare element relativist* din $\mathcal{S}_M$ $(e_r)_{RI}\equiv\{xj; j=\overline{1,4}\}\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,y,z,ict)$, prin poziţia punctului său figurativ $P(\{x_j; j=\overline{1,4}\})$ faţă de *evenimentul zero/origine* $(e_r^{(0)})_{RI}\equiv(0,0,0,0)$ reprezentat ca *punct figurativ origine* O(0,0,0,0) a sistemului cuadridimensional de axe (Ox,Oy,Oz,Oict) ≡ sistemul de referinţă (SdR) al referenţialului inerţial RI, considerat pentru raportarea mişcării>.

3.17.2 2Justificarea introducerii lui $\mathcal{R}$

Introducerea cuadrivectorului $\mathcal{R}$ este justificată de definirea spaţiului relativist din TRR/TRS sau spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (universul spaţiu-timp), ca spaţiul generat de totalitatea evenimentelor relativiste $\{e_r^{(f)}(\{x_j; j=\overline{1,4}\})\}$, cu f oricât de mare, chiar infinit.

3.17.2 3Componentele scalare ale lui $\mathcal{R}$

Conform definiţiei de mai sus, *componentele scalare ale lui $\mathcal{R}$ sunt tocmai coordonatele cuadridimensionale ale evenimentului* $(e_r)_{RI}$ *considerate faţă de RI*, reprezentând coordonatele punctului figurativ $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ în spaţiul cuadridimensional $\mathcal{S}_M$ (universul spaţiu-timp).

Avem astfel:

(3.101) $\mathcal{R}\equiv\mathcal{R}(\{x_j\}; j=\overline{1,4})\equiv\mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv\mathcal{R}(x,y,z,ict)\equiv\mathcal{R}(\vec{r},ict)\equiv(\vec{r},ict)$, cu $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ componentele scalare ale cuadrivectorului $\mathcal{R}$, respectiv $\vec{r}=x_1\vec{1}_x+x_2\vec{1}_y+x_3\vec{1}_z\equiv x\vec{1}_x+x\vec{1}_y+x\vec{1}_z$. Reprezentarea grafică efectivă a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ este dată în figura 3.10 [din paragraful introductiv 3.17_0 al $P_3^{(2)}$ (m.t.r.)].

3.17.2.4Comportarea lui $\mathcal{R}$ în trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'. TrLS (3.61)

Aplicând lui $\mathcal{R}$ definiţia (3.100) a cuadrivectorului, coeficienţii $\{\alpha_{jk}\}$ se particularizează la coeficienţii TrLS (3.60) care fac trecerea (3.102) $\mathcal{R}_{RI}\equiv\mathcal{R}(x,y,z,ict)\leftrightarrows\mathcal{R}_{(RI)'}\equiv\mathcal{R}(x',y',z',ict')$, identică cu (103) $(x,y,z,ict)\leftrightarrows(x',y',z',ict')$ să fie dată *tocmai ca* TrLS (3.61) *directe*, respectiv *inverse*:

$$(3.61)\quad (a)\quad x'=\frac{x-v_Tt}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}, y'=y, z'=z, t'=\frac{t-\frac{v_T}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\quad (RI\rightarrow(RI)'), \text{ respectiv}$$

$$(b)\quad x=\frac{x'+v_Tt'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}, y=y', z=z', t=\frac{t'+\frac{v_T}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\quad (RI\rightarrow(RI)'),$$

confirmând că $\mathcal{R}$ este un *cuadrivector*, conform definiţiei generale (3.100).

Astfel se poate scrie:

(3.103)(a) $\mathcal{R}' = \mathcal{R}_{(RI)'} = (\breve{\mathcal{L}})_S\mathcal{R} \equiv (\breve{\mathcal{L}})_S\mathcal{R}_{RI}$, cu $(\breve{\mathcal{L}})_S$ matricea (3.59) a TrLS *directe* (3.60)-(3.61). De asemenea, (3.103) (b) $\mathcal{R} = (\breve{\mathcal{L}})_S^{-1}\mathcal{R}'$ pentru TrLS *inverse*. În concluzie, componentele $\{x_j\}(j=\overline{1,4})$ ale lui $\mathcal{R}$ se transformă în sens Lorentz, conform TrLS (3.61).

3.17.2.5Remarcă. Legătura dintre subparagraful 3.17.2 şi paragraful 3.16

Având în vedere rolul cuadrivectorului $\mathcal{R}$, precizat în definiţia sa 3.17.2.1, rezultă că întreaga discuţie din paragraful 3.16, dar mai ales cea din subparagraful 3.16.8, a fost destinată discutării implicaţiilor cinematice, pe care relaţiile (3.101)-(3.103) le generează în spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (sau în universul spaţiu-timp cuadridimensional), atunci când se pune problema ordinii de succesiune a evenimentelor relativiste, până la un punct, echivalentă cu *problema conexiunii dintre evenimente*.

3.17.3 Variaţia în timp a cuadripoziţiei ($\mathcal{R}$). Ecuaţia cuadripoziţiei ($\mathcal{R}$) ca ecuaţia cinematică a mişcării punctului material relativist în $\mathcal{S}_M$. Legea cinematică a cuadripoziţiei ($\mathcal{R}$)

3.17.3.0Precizare conceptuală. Punct material relativist

Vom numi *punct material relativist*, punctul material ale cărui legi de mişcare respectă principiile fundamentale ale TRR/TRS (PIVMPI, PRE şi PdC). Ca şi în cazul punctului material clasic, în cadrul cinematicii relativiste nu se ţine cont de *problema masei*, nefiind necesară descrierii cinematice relativiste a mişcării. În general, un punct material relativist este punctul material a cărui mişcare decurge cu viteza având modulul comparabil cu valoarea c a vitezei luminii în spaţiul liber (vidul electromagnetic).

3.17.3.1Variaţia în timp a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ a punctului material relativist

Vom relua trecerea reciprocă $(RI)_0 \equiv (RI)' \leftrightarrows RI$, conformă cu figura 3.3 (b) şi cu utilizarea *referenţialului inerţial propriu* $(RI)_0$ legat solidar de punctul material a cărui mişcare se studiază. Faţă de $(RI)_0$, cuadripoziţia $\mathcal{R}_0 \equiv \mathcal{R}_{(RI)_0}$ îşi menţine componentele scalare $\{x_0^{(j)};\ j=\overline{1,4}\}$ constante, încât faţă de RI care se mişcă cu $\vec{v}' = -\vec{v}_T = \text{const.}$ în lungul axei O_0x_0 a lui $(RI)_0$, variaţia în timp a cuadripoziţiei poate fi exprimată atât prin *timpul sau durata cinematică* t măsurată cu ceasornicul legat de originea RI, cât şi prin *timpul propriu sau durata proprie* τ măsurată cu ceasornicul legat solidar de originea O_0 a lui $(RI)_0$, ca dependenţe implicite:

(3.104) (a) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(t)$ şi/sau (b) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau)$.

Ţinând cont de *legătura dintre timpul cinematic* t *şi cel propriu* τ prin (3.76) retranscrisă (3.76') $t = \dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ (cu momentele iniţiale zero pentru ceasornicele din RI respectiv $(RI)_0$), relaţiile (3.104) se transformă într-o nouă dependenţă implicită:

(3.105) $\mathcal{R} = \mathcal{R}\left(\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\right)$, care arată că în $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{RI}$ ca dependenţă de τ apare radicalul relativist $\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}$ implicat în TrLS (3.61).

3.17.3.2Justificarea dependenţei lui $\mathcal{R}$ numai de timpul propriu τ

Reducerea dependenţelor (3.104) la una singură (3.105) ca dependenţă numai de τ se justifică prin faptul că τ este invariant relativist în trecerea RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$ simplificând la maximum discuţia variaţiei lui $\mathcal{R}$ în raport cu timpul. Vom observa că $(RI)_0 \equiv (RI)'$ (v. fig. 3.3(b)) şi fixarea lui $(RI)_0$ cu O_0 în punctul material relativist face ca în (3.76') să avem, de fapt, $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$ atât ca viteză de deplasare a punctului material cât şi ca viteză de transport a lui $(RI)_0$ faţă de RI.

3.17.3.3 Ecuaţia cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ ca ecuaţie cinematică a mişcării punctului material relativist. Legea cinematică a cuadripoziţiei

(a) *Relaţia implicită* (3.105) dă tocmai *ecuaţia cuadripoziţiei* $\mathcal{R}$ ca ecuaţie cinematică a mişcării punctului material exprimând *implicit variaţia cu/sau dependenţa de timpul propriu* τ *a cuadrivectorului cinematic* $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{RI}$.

(b) *Ecuaţia cuadripoziţiei* $\mathcal{R}$ $(\{x_j; j=\overline{1,4}\})$ *prin componentele scalare* $\{x_j\}$. *Legea cinematică a cuadripoziţiei*

Relaţia (3.105) se scrie, prin componentele scalare ale lui $\mathcal{R}$, ca (3.106) $\{x_j = x_j(\tau)\ (j=\overline{1,4})\}$, dând dependenţele de τ implicite ale coordonatelor evenimentului relativist $e_r(x_1,x_2,x_3,x_4)$ considerat în $\mathcal{S}_M$ faţă de RI cu originea $e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$, respectiv ca *funcţii de* τ *ale componentelor lui* $\mathcal{R}$ dând în $\mathcal{S}_M$ poziţia punctului figurativ $P(x_1,x_2,x_3,x_4)$ reprezentându-l pe e_r, încât $\mathcal{R}$ are originea în $e_r^{(0)}$ şi "vârful" în e_r.

Mai trebuie remarcat că în trecerea RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$ componentele lui $\mathcal{R}(\{x_j\})$ sunt legate matematic tocmai ca relaţii TrLS (3.61) şi/sau (3.63).

3.17.3.4 Necesitatea cuadrivectorului viteză $\mathcal{U}$

Dacă cuadripoziţia $\mathcal{R}$ *variază în timp* în sens (3.105), atunci *măsurarea şi precizarea matematică* efectivă a acestei variaţii nu poate fi făcută decât prin *variaţiile momentane* (instantanee) *ale lui* $\mathcal{R}$, fapt ce necesită introducerea *cuadrivectorului viteză* (cuadriviteza) ($\mathcal{U}$).

3.17.3.5 Precizare grafico-geometrică asupra reprezentării grafice a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$

Urmărind conul luminos (CL) din figura 3.7, ca şi reprezentările de linii de univers din figura 3.8(a)→(e) se poate reprezenta grafico-geometric cuadrivectorul $\mathcal{R}$ printr-un "vector" cu originea în evenimentul zero $e_r^{(0)} \equiv (0,0,0,0)$ şi vârful în interiorul CL (DVA –domeniul viitorului absolut) într-un punct figurativ reprezentând evenimentul $e_r^{(t)} \equiv (x_1,x_2,x_3,ict)$ cu $t > 0$. $\mathcal{R}$ este efectiv uşor de ilustrat prin figura 3.8 (a) în lungul liniei de univers a particulei relativiste, dacă în loc de $e_r^{(1)}$ se consideră $e_r^{(0)}$, iar în loc de $e_r^{(2)}$ de pe figură se pune $e_r^{(t)}$. Reprezentarea efectivă a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ este ilustrată complet şi precizată detaliat în figura 3.10, în legătură cu *linia de univers a mişcării rectilinii şi uniforme* (MRUA) *a particulei relativiste*, din $\mathcal{S}_M$. Alături de $\mathcal{R}$, mai sunt reprezentaţi şi ceilalţi cuadrivectori cinematici (cuadriviteza $\mathcal{U}$ şi cuadriacceleraţia $\mathcal{A}$).

3.17.4 Cuadrivectorul viteză sau cuadriviteza ($\mathcal{U}$)

3.17.4.0 Observaţie metodologică pentru definirea matematică a lui $\mathcal{U}$

Reducerea dependenţelor (3.104) ale cuadripoziţiei $\mathcal{R}$ de timpul cinematic (t) respectiv de timpul propriu (τ), ca dependenţă (3.105) numai de τ simplifică problema cuadrivectorului viteză ($\mathcal{U}$) în sensul generalizării *definiţiei cinematice a vitezei tridimensionale*

(3.107) $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$, la cazul cuadridimensional, înlocuind $\vec{r}$ cu $\mathcal{R}$ şi ţinând cont că derivata trebuie considerată în raport cu timpul propriu (τ), pentru a utiliza avantajul dat de τ ca invariant relativist, respectiv de *timpul propriu elementar* $d\tau$ având aceeaşi proprietate de invarianţă faţă de TrLS.

3.17.4.1Definirea fizico-matematică a cuadrivitezei ($\mathcal{U}$)

Ţinând cont că prin (3.105), cuadripoziţia depinde de timpul propriu τ ($\mathcal{R}=\mathcal{R}(\tau)$), generalizarea cuadridimensională a definiţiei fizico-matematice (3.107), pentru a măsura variaţia $\mathcal{R}(\tau)$ în raport cu τ, conduce la *cuadrivectorul viteză* ($\mathcal{U}$)

(3.108) $\mathcal{U}=\lim\limits_{\Delta\tau\to 0}\dfrac{\Delta\mathcal{R}}{\Delta\tau}\equiv\lim\limits_{\tau\to\tau_0}\dfrac{\mathcal{R}(\tau)-\mathcal{R}(\tau_0)}{\tau-\tau_0}\equiv\dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau}$ de componente scalare:

(3.109) $u_j=\dfrac{dx_j}{d\tau}$ $(j=\overline{1,4})$ definite ca derivatele componentelor $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ale cuadripoziţiei $\mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4)$. Astfel, *$\mathcal{U}$ este un cuadrivector de componente scalare* (u_1,u_2,u_3,u_4) definite prin (3.109) conducând la

(3.110) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)\equiv\mathcal{U}\left(\dfrac{dx_1}{d\tau},\dfrac{dx_2}{d\tau},\dfrac{dx_3}{d\tau},\dfrac{dx_4}{d\tau}\right)=\mathcal{U}\left(\dfrac{dx}{d\tau},\dfrac{dy}{d\tau},\dfrac{dz}{d\tau},\dfrac{d(ict)}{d\tau}\right)$.

3.17.4.2Cuadriviteza $\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ satisface definiţia generală (3.100) a cuadrivectorului

Deoarece componentele scalare $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadripoziţiei satisfac atât TrL generale cât şi TrLS (3.61), şi diferenţialele lor $\{dx_j\}$$(j=\overline{1,4})$ se vor transforma în sens Lorentz. Cum $d\tau$ ca timp elementar propriu este invariant relativist, atunci şi componentele scalare $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ definite prin (3.109) se vor transforma în sens Lorentz, încât $\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ *îndeplinind condiţia* (3.100) *este un cuadrivector.*

3.17.4.3 Explicitarea componentelor cuadrivitezei $\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$ în raport cu RI

Dacă se utilizează legătura dintre timpul elementar propriu şi timpul cinematic obţinută din (3.76') ca (3.76") $dt=\dfrac{d\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ sau (3.76"') $d\tau=\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}\cdot dt$ în relaţiile de definiţie (3.109) ale componentelor scalare $\{u_j\}$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$, atunci, în raport cu un referenţial inerţial RI altul decât cel propriu $(RI)_0$, avem:

(3.111) (a) $u_1=\dfrac{dx}{dt\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv\dfrac{dx/dt}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv\dfrac{v_x}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, (b) $u_2=\dfrac{dy}{dt\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv\dfrac{v_y}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$

(c) $u_3=\dfrac{dz}{dt\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv\dfrac{v_z}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ şi (d) $u_4=\dfrac{d(ict)}{dt\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv i\dfrac{c}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, cu v_x, v_y, v_z componentele vectorului viteză tridimensional $\vec{v}\equiv\vec{v}_{RI}=v_x\vec{1}_x+v_y\vec{1}_y+vz\vec{1}_z\equiv\dfrac{dx}{dt}\vec{1}_x+\dfrac{dy}{dt}\vec{1}_y+\dfrac{dz}{dt}\vec{1}_z$, cu $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$ şi $\vec{1}_z$ versorii axelor de coordonate Ox,Oy, respectiv Oz.

3.17.4.4 Explicitarea efectivă a cuadrivitezei $\mathcal{U}$ prin $\vec{v}(v_x,v_y,v_z)$ şi ic

Cum componentele u_1,u_2,u_3 ale lui $\mathcal{U}$ permit scrierea vectorului tridimensional:

(3.112) $\dfrac{v_x\vec{1}_x+v_y\vec{1}_y+v_z\vec{1}_z}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\equiv\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, *expresia efectivă a cuadrivectorului viteză se* scrie ca:

$$(3.113)\ \mathcal{U}=\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)\equiv\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},i\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)\equiv\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},i\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}(\vec{v},ic)\cdot$$

Prin (3.113) avem transcrierea cuadridimensională a lui $\mathcal{U}$ conformă cu structura $\mathcal{S}_M=\mathcal{S}_{\vec{r}}\otimes\mathcal{S}_t\equiv\mathcal{S}_{x,y,z}\otimes\mathcal{S}_{ict}$ a universului spațiu-timp relativist.

Trebuie remarcat că modul de raportare la referențialele reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ (v. fig. 3.3 (b)), face ca în (3.113) să putem pune $v_T\equiv v$, deoarece (RI)$_0$=(RI)' se mişcă cu $\vec{v}_T$=const. față de RI, iar punctul material relativist este legat solidar de originea lui (RI)$_0$.

3.17.4.5 Invariantul relativist I_u (3.114) consecință cinematică (cc$_9$) a TrLS

Cu ajutorul componentelor $\{u_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$ ($\{u_j\}$) se poate construi invariantul relativist (3.114) $I_u\equiv\sum_{j=1}^{4}u_j^2=-c^2$, putându-se uşor demonstra valoarea lui constantă $-c^2$ prin utilizarea relațiilor (3.111). Astfel, rezultă:

$$(3.115)\ I_u\equiv u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=\frac{v_x^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}+\frac{v_y^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}+\frac{v_z^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}-\frac{c^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}=\frac{v_x^2+v_y^2+v_y^2-c^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}=\frac{v^2-c^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}=\frac{c^2\left(v^2-c^2\right)}{c^2-v_T^2}=-c^2,$$

dacă se egalează v_T^2 cu v^2. Egalarea $v_T^2=v^2$ este posibilă ținând cont că $\vec{v}_T$ este viteza de transport a lui (RI)$_0$≡(RI)' față de RI (cf. figurii 3.3.(b)), care la rându-i se deplasează cu $\vec{v}\,'=-\vec{v}_T$ față de (RI)$_0$ propriu legat de punctul material în mişcare cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_{RI}$, raportată la RI.

Demonstrarea invarianței lui I_u efectuată în (3.115) se poate confrunta cu o alta, utilizând definițiile (3.109) ale componentelor, astfel rezultând: (3.116) $I_u=\sum_{j=1}^{4}u_j^2=\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{dx_j}{d\tau}\right)^2=\left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{d\tau}\right)^2+$

$$+\left(\frac{dx_4}{d\tau}\right)^2\equiv\frac{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2+(d(ict))^2}{(d\tau)^2}\equiv\frac{dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2}{d\tau^2}=-\frac{c^2dt^2-[dx^2+dy^2+dz^2]}{d\tau^2}=-\frac{ds^2}{d\tau^2}=-c^2,$$ dacă

se mai utilizează şi definiția (3.26) a intervalului relativist, scrisă pentru intervalul relativist elementar ds, precum şi relația (3.79) ce dă legătura dintre ds şi timpul elementar propriu dτ.

3.17.4.6 Remarcă asupra utilității invariantului relativist I_u (3.114)

Prin (3.114), alături de invarianții relativişti cinematici c, s şi ds, τ şi dτ, mai avem şi *invariantul relativist cinematic* $I_u\equiv u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=-c^2$ important în scrierea acțiunii Hamilton relativiste ($S^{(r)}{}_{1\to2}$), în vederea obținerii expresiei funcției Lagrange relativiste ($\mathcal{L}_r$) a punctului material, cum se va vedea în capitolul următor destinat *dinamicii relativiste. Mulțimea* { c, s şi ds, τ şi dτ, I_u} *de invarianți cinematici relativişti* aparține consecinței (cc$_9$) a TrLS (3.61) din seria de consecințe cinematice ale TrLS enumerate în subparagrafele 3.12.4, şi 3.14.2 care urmau a fi tratate. O altă utilitate a invariantului I_u (3.114) se va remarca în secvența 3.17.6.3, când va fi utilizat pentru *demonstrarea ortogonalității cuadrivitezei* $\mathcal{U}$ *cu cuadriaccelerația* $\mathcal{A}$.

3.17.5 **Variaţia în timp a cuadrivitezei ($\mathcal{U}$=$\mathcal{U}$(τ)). Ecuaţia cuadrivitezei ($\mathcal{U}$) ca ecuaţie cinematică a mişcării punctului material relativist în S_M. Legea cinematică a cuadrivitezei $\mathcal{U}$.**

3.17.5.0 Precizare procedurală cinematică

Ca şi în cazul variaţiei în timp a cuadripoziţiei $\mathcal{R}$, şi în cazul variaţiei în timp a cuadrivitezei putem avea dependenţele de *timpul cinematic* (t), respectiv de *timpul propriu* (τ) ca: (3.117) (a) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(t)$ şi (b) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\tau)$, pentru $\mathcal{U}\equiv\mathcal{U}_{RI}$ raportată la RI în mişcare cu $\bar{v}'=-\bar{v}_T$=const. faţă de $(RI)_0$ [în care punctul material considerat este în repaus] şi în care se măsoară τ legat de t din RI prin (3.76'), încât dependenţele (3.117) se vor reduce la una singură:

$$(3.118)\quad \mathcal{U}\equiv\mathcal{U}_{RI}=\mathcal{U}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right).$$

3.17.5.1 Ecuaţia cuadrivitezei $\mathcal{U}$ ca ecuaţie cinematică a mişcării punctului material relativist în S_M. Legea cuadrivitezei $\mathcal{U}$

a) Dependenţa implicită (3.118) dă tocmai *ecuaţia cuadrivitezei $\mathcal{U}$* ca ecuaţie cinematică a mişcării punctului material relativist în S_M, exprimând implicit variaţia cu/sau dependenţa de τ a cuadrivitezei, ca *legea cinematică a cuadrivitezei mişcării punctului material.*

b) *Ecuaţia cuadrivitezei $\mathcal{U}(\{u_j\}, j=\overline{1,4})$ prin componentele scalare* $\{u_j\}$

Relaţia (3.118) se poate scrie prin componentele lui $\mathcal{U}$ ca:

(3.119) $\{u_j=u_j(\tau)\ (j=\overline{1,4})\}$, dând dependenţele implicite de τ ale componentelor scalare $\{u_j\}$. În cazul posibilităţii de explicitare efectivă a dependenţelor (3.119) este cunoscută şi *legea cinematică a cuadrivitezei $\mathcal{U}$* a mişcării punctului material relativist.

3.17.5.2 Necesitatea cuadrivectorului acceleraţie ($\mathcal{A}$)

Dacă cuadrivectorul viteză/cuadriviteza $\mathcal{U}$ variază în timp în sens (3.118), atunci măsurarea şi precizarea matematică a acestei variaţii nu poate fi făcută decât prin variaţiile momentane (instantanee) ale lui $\mathcal{U}$, necesitând *introducerea cuadrivectorului acceleraţie* ($\mathcal{A}$).

3.17.5.3 Precizare grafico-geometrică asupra reprezentării grafice a cuadrivitezei $\mathcal{U}$

În cazul mişcării rectilinii şi uniforme (MRU) a particulei relativiste, linia de univers (v. fig. 3.7 şi fig. 3.8) este o dreaptă trecând prin originea conului luminos (CL), şi când v<c, fiind poziţionată în interiorul pânzelor CL, atunci *cuadrivectorul $\mathcal{U}$ este coliniar* cu linia de univers având originea *tocmai* în punctul figurativ în care se află evenimentul relativist $e_r(x_1,x_2,x_3,ict)$ la momentul t în care se observă particula. Dacă mişcarea este accelerată (v. figura 3.8 (b)) atunci $\mathcal{U}$ este un *cuadrivector tangent* la linia de univers (care este curbată) în $e_r^{(0)}\equiv(0,0,0,0)$ considerând *evenimentul zero*, ca prezentul P al observării particulei relativiste în MRUA.

Reprezentarea completă şi specificată detaliat a *cuadrivitezei* ($\mathcal{U}$) este făcută în figura 3.10 (din paragraful 3.17_0 introductiv în $P_3^{(2)}$), alături de ceilalţi 4 cuadrivectori mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$), posibil de reprezentat în raport cu linia de univers a MRUA interioară pânzelor CL.

3.17.6 Cuadrivectorul accelerație sau cuadriaccelerația ($\mathcal{A}$)

3.17.6.0Observație metodologică pentru definirea matematică a lui $\mathcal{A}$

Ca şi în cazul definirii matematice a cuadrivitezei $\mathcal{U}$ cu reducerea dependenţelor de t respectiv τ ale lui $\mathcal{R}$ la dependenţa numai de τ, *în cazul definirii matematice a cuadriaccelerației* $\mathcal{A}$, reducerea dependenţelor de t respectiv de τ ale lui $\mathcal{U}$ (3.117) la dependenţa numai de τ (3.118) serveşte posibilității de generalizare a definiției matematice a accelerației tridimensionale:

(3.120) $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\vec{v}(t)-\vec{v}(t_0)}{t-t_0} \equiv \dfrac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}$, la cazul cuadridimensional înlocuind $\vec{a}$ cu $\mathcal{A}$ şi considerând derivata în raport cu τ (pentru a utiliza avantajul că τ şi $d\tau$ sunt invarianți relativişti).

3.17.6.1Definirea fizico-matematică a cuadriaccelerației ($\mathcal{A}$)

Utilizând dependenţa unică (3.118) a cuadrivitezei de timpul propriu τ ($\mathcal{U} = \mathcal{U}(\tau)$), generalizarea cuadridimensională a definiției (3.120) conduce la *cuadrivectorul accelerație sau la cuadriaccelerația* $\mathcal{A}$:

(3.121) $\mathcal{A} = \lim\limits_{\Delta\tau\to 0} \dfrac{\Delta\mathcal{U}}{\Delta\tau} \equiv \lim\limits_{\tau\to\tau_0} \dfrac{\mathcal{U}(\tau)-\mathcal{U}(\tau_0)}{\tau-\tau_0} \equiv \dfrac{d\mathcal{U}}{d\tau}$, de componente scalare:

(3.122) $a_j = \dfrac{du_j}{d\tau} \equiv \dfrac{d^2x_j}{d\tau^2}$ ($j=\overline{1,4}$), definite ca derivatele componentelor scalare $\{u_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale cuadrivitezei $\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$. Prin (3.122), $\mathcal{A}$ este un cuadrivector de componente scalare (a_1,a_2,a_3,a_4) ca:

(3.123) $$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(a_1,a_2,a_3,a_4) \equiv \mathcal{A}\left(\frac{du_1}{d\tau},\frac{du_2}{d\tau},\frac{du_3}{d\tau},\frac{du_4}{d\tau}\right) \equiv \mathcal{A}\left(\frac{d^2x_1}{d\tau^2},\frac{d^2x_2}{d\tau^2},\frac{d^2x_3}{d\tau^2},\frac{d^2x_4}{d\tau^2}\right) \equiv$$
$$\equiv \mathcal{A}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2},\frac{d^2y}{d\tau^2},\frac{d^2z}{d\tau^2},\frac{d^2(ict)}{d\tau^2}\right).$$

În (3.122) şi (3.123) s-a utilizat (3.109) ce defineşte componentele scalare ale cuadrivitezei $\{u_j\}$.

3.17.6.2Explicitarea componentelor cuadriaccelerației $\mathcal{A}(a_1,a_2,a_3,a_4)$ în raport cu RI

Utilizarea relației (3.76'''), care dă timpul elementar propriu $d\tau$ prin timpul elementar cinematic, în (3.123), conduce la explicitarea componentelor $\{a_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale cuadriaccelerației $\mathcal{A}$, conformă cu definițiile (3.122) ale acestor componente şi cu $\{u_j\}$ (3.111), prin relațiile:

(3.124) (a) $$a_1 = \frac{du_1}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right),$$

(b) $$a_2 = \frac{du_2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)$$

$$\text{(c)}\quad a_3=\frac{du_3}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)$$

$$\text{(d)}\quad a_4=\frac{du_4}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)=\frac{i}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)$$, ca *explicitate în raport cu oricare* RI altul decât $(RI)_0$ *propriu punctului material* a cărui mişcare relativistă este considerată. Reprezentarea grafică a cuadriaccelerației în $\mathcal{S}_M$ este dată şi precizată detaliat în figura 3.10 care prezintă grafic toți ceilalți cuadrivectori mecanici fundamentali vizați în $[P_3^{(2)}]$ (ca m.t.r.).

3.17.6.3 Ortogonalitatea dintre cuadrivectorii $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{U}$

Cu ajutorul invariantului relativist I_u (3.114) construit cu pătratele componentelor scalare ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$ se poate arăta că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{U}$ *satisfac o relație de ortogonalitate* de tipul:

$$(3.125)\quad \sum_{j=1}^{4}u_j a_j=0.$$

Obținerea relației (3.125) rezultă prin derivarea în raport cu τ a relației (3.114), conform operațiilor succesive:

$$(3.126)\quad \frac{dI_u}{d\tau}=\frac{d}{d\tau}\left(\sum_{j=1}^{4}u_j^2\right)=\sum_{j=1}^{4}\frac{d}{d\tau}\left(u_j^2\right)=2\sum_{j=1}^{4}u_j\frac{du_j}{d\tau}=2\sum_{j=1}^{4}u_ja_j=\frac{d(-c^2)}{d\tau}=0,$$ din care se extrage (3.125). Relația (3.125) se poate obține şi prin verificare, dacă se utilizează în ea explicitările (3.111) ale componentelor $\{u_j\}$ şi explicitările (3.124) ale componentelor $\{a_j\}$. Ortogonalitatea dintre cuadrivectorii $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$ este ilustrată efectiv în figura 3.8(b) din Anexa expusă în secvența 3.16.8.10 a paragrafului 3.16 al capitolului precedent. Aceeaşi figură 3.8 (b) mai arată, în simultan cu ortogonalitatea dintre $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$, *tocmai* modul de reprezentare grafică a cuadrivectorului $\mathcal{A}$.

3.17.6.4 Asupra dependenței de timp a cuadriaccelerației $\mathcal{A}$ ca legea cinematică a cuadriaccelerației mişcării relativiste a punctului material în $\mathcal{S}_M$

Având în vedere că setul complet de legi cinematice din cinematica nerelativistă a mecanicii clasice este constituit din legile vectorului de poziție ($\bar{r}$), vitezei ($\bar{v}$) şi accelerației ($\bar{a}$), este posibil să se discute despre *legea cinematică a cuadriaccelerației mişcării rectilinii a punctului material*, în modul discutat despre *legea cinematică a cuadripoziției* în 3.17.3, respectiv despre *legea cinematică a cuadrivitezei* în 3.17.5, de astă dată apelând la dependența lui $\mathcal{A}$ de *timpul cinematic* t, respectiv de *timpul propriu* τ, reduse la o dependență unică de τ, prin utilizarea relației dintre t şi τ (3.76").

3.17.6.5 Precizare grafico-geometrică asupra reprezentării grafice a cuadriaccelerației $\mathcal{A}$

Cum s-a mai precizat în 3.17.6.3, figura 3.8(b), din *Anexa* la paragraful 3.16 (cap.III), ilustrează grafic modul cum se reprezintă cuadrivectorul accelerație $\mathcal{A}(\{a_j\})$ în raport cu linia de univers a unei particule în mişcare uniform accelerată (MRUA), ținând cont de reprezentarea grafică a cuadrivitezei $\mathcal{U}(\{u_j\})$ cu care este ortogonală (conform relației (3.125)), întregul set de reprezentări grafice (linie de univers, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$ etc.) fiind raportat la *conul luminos* (CL). Cuadriaccelerația $\mathcal{A}$ şi ortogonalitatea ei cu $\mathcal{U}$ sunt, de asemenea, ilustrate în figura 3.10, care redă şi alte raporturi spațiale (în $\mathcal{S}_M$) cu toți ceilalți cuadrivectori mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$).

3.17.7 (cc_{10}) Asupra legilor cinematice relativiste ale mişcării punctului material.

3.17.7.0 Precizare prin consecinţele cinematice ale TrLS (3.61)

În subparagrafele 3.12.4 şi 3.14.2, între consecinţele cinematice relativiste ale TrLS (3.61), enumerate spre a fi tratate, a fost formulată şi (cc_{10}) *forma relativistă a legilor cinematicii (prin cuadrivectori)*. Despre aceste legi şi forma lor relativistă şi deci despre (cc_{10}) a TrLS (3.61) avem deja afirmaţii în 3.17.3 pentru *legea cuadripoziţiei* ($\mathcal{R}$), în 3.17.5 pentru *legea cuadrivitezei*, respectiv în 3.17.6 pentru *legea cuadriacceleraţiei*. Subiectul *legilor cinematice relativiste ale mişcării punctului material* va fi sintetizat global şi unitar în cele ce urmează, ţinând cont că în cinematica nerelativistă a mecanicii clasice *calculul diferenţial* permite drumul $\bar{r}(t) \to \bar{v}(t) \to \bar{a}(t)$, iar *calculul integral drumul invers* $\bar{a}(t) \to \bar{v}(t) \to \bar{r}(t)$, în tratarea cinematică completă a problemei mişcării.

3.17.7.1 Cuadrivectorii cinematici $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$ generalizând vectorii $\bar{r}$, $\bar{v}$ respectiv $\bar{a}$

Paralela dintre vectorii ($\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}$) şi cuadrivectorii ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$) arată generalizarea relativistă cuadridimensională trecând de la vectori la cuadrivectori, după cum urmează:

(I) (a) *vectorul de poziţie*: $\bar{r} \equiv \bar{r}_{RI} = \bar{r}(x,y,z) = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z$, la momentul t_j

(b) *cuadripoziţia*: $\mathcal{R} \equiv \mathcal{R}_{RI} = \mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \mathcal{R}(x,y,z,ict) \equiv \mathcal{R}(\bar{r},ict) \equiv (\vec{r},ict)$;

(II) (a) *vectorul viteză*: $\bar{v} \equiv \bar{v}_{RI} = \dfrac{d\bar{r}}{dt} \equiv \bar{v}(v_x,v_y,v_z) \equiv \bar{v}\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) = v_x\vec{1}_x + v_y\vec{1}_y + v_z\vec{1}_z$,

(b) *cuadriviteza*: $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_{RI} \equiv \dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau} \equiv \mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4) \equiv \mathcal{U}\left(\dfrac{dx_1}{d\tau}, \dfrac{dx_2}{d\tau}, \dfrac{dx_3}{d\tau}, \dfrac{dx_4}{d\tau}\right) =$

$$= \mathcal{U}\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{d(ict)}{d\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}(\bar{v}, ic) \text{ prin (3.113)};$$

(III) (a) *vectorul acceleraţie*: $\bar{a} \equiv \bar{a}_{RI} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} \equiv \bar{a}(a_x,a_y,a_z) \equiv \bar{a}\left(\dfrac{dv_x}{dt}, \dfrac{dv_y}{dt}, \dfrac{dv_z}{dt}\right) \equiv$

$$\equiv \bar{a}\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right) = a_x\vec{1}_x + a_y\vec{1}_y + a_z\vec{1}_z,$$

(b) *cuadriacceleraţia*: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{RI} = \dfrac{d\mathcal{U}}{d\tau} = \dfrac{d^2\mathcal{R}}{d\tau^2} = \mathcal{A}(a_1,a_2,a_3,a_4) \equiv \mathcal{A}\left(\dfrac{du_1}{d\tau}, \dfrac{du_2}{d\tau}, \dfrac{du_3}{d\tau}, \dfrac{du_4}{d\tau}\right) \equiv$

$$\equiv \mathcal{A}\left(\frac{d^2x_1}{d\tau^2}, \frac{d^2x_2}{d\tau^2}, \frac{d^2x_3}{d\tau^2}, \frac{d^2x_4}{d\tau^2}\right) \equiv \mathcal{A}\left(\frac{d^2x}{d\tau^2}, \frac{d^2y}{d\tau^2}, \frac{d^2z}{d\tau^2}, \frac{d^2(ict)}{d\tau^2}\right), \text{prin}$$

(3.121)-(3.123).

3.17.7.2 Forma concisă a ecuaţiilor cinematice relativiste ale mişcării şi legile cinematice relativiste

(A) *Forma diferenţială* (*urmărind drumul* $\mathcal{R} \to \mathcal{U} \to \mathcal{A}$ *prin derivare*)

(I) Se cunoaşte: (a) $\bar{r} = \bar{r}(x(t),y(t),z(t)) \to$ dependenţa $\bar{r} = \bar{r}(t) \to$ *legea vectorului de poziţie*

(b) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\{x_j(\tau),\ j=\overline{1,4}\}) \equiv \mathcal{R}[x_1(\tau),x_2(\tau),x_3(\tau),x_4(\tau)] \to$ dependenţa $\{\mathcal{R}(\tau)$ sau $x_j = x_j(\tau)\} \to$ *legea cuadripoziţiei*.

(II) Se calculează (prin derivare): (a) $\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}(t)}{dt} \to$ dependenţa $\bar{v} = \bar{v}(t) \equiv \bar{v}[v_x(t),v_y(t),v_z(t)] \to$ *legea vitezei*;

(b) $\mathcal{U}=\dfrac{d\mathcal{R}(\tau)}{d\tau}$ → dependenţa $u_j=\dfrac{dx_j}{d\tau}\equiv u_j(\tau)$ ($j=\overline{1,4}$) → *legea cuadrivitezei*.

(III) Se calculează (prin derivare): (a) $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}\equiv\dfrac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$ → dependenţa $\vec{a}\equiv\vec{a}(t)\equiv\vec{a}\,[a_x(t), a_y(t), a_z(t)]$ → *legea acceleraţiei*;

(b) $\mathcal{A}=\dfrac{d\mathcal{U}(\tau)}{d\tau}=\dfrac{d^2\mathcal{R}(\tau)}{d\tau^2}$ → dependenţa $a_j=\dfrac{du_j}{d\tau}\equiv\dfrac{d^2x_j}{d\tau^2}\equiv a_j(\tau)$ ($j=\overline{1,4}$) → *legea cuadriacceleraţiei*.

(B) *Forma integrală* (*urmărind drumul* $\mathcal{A}$ → $\mathcal{U}$ → $\mathcal{R}$ *prin integrare*)

(I) Se cunoaşte: (a) $\vec{a}\equiv\vec{a}\,[a_x(t), a_y(t), a_z(t)]\equiv\vec{a}(t)$ şi se cunoaşte $\vec{a}_0=\vec{a}(t_0)$ la momentul iniţial t_0;

(b) $\mathcal{A}=\mathcal{A}[a_1(\tau),a_2(\tau),a_3(\tau),a_4(\tau)]\equiv\mathcal{A}(\tau)$ şi $a_j^{(0)}\equiv a_j(\tau_0)$ la momentul iniţial τ_0.

(II) Se calculează (prin integrare): (a) $\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)dt$, cunoscând $\vec{v}(t_0)\equiv\vec{v}_0$ (prin condiţii iniţiale) şi definiţia $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$;

(b) $\mathcal{U}\equiv\mathcal{U}[u_1(\tau),u_2(\tau),u_3(\tau),u_4(\tau)]\equiv\mathcal{U}(\tau)$ formal prin $\mathcal{A}=\dfrac{d\mathcal{U}}{d\tau}$ şi obţinut efectiv cu ajutorul componentelor $a_j=\dfrac{du_j}{d\tau}$ ($j=\overline{1,4}$), conform diferenţialelor $\{du_j=a_jd\tau$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$, permiţând $\{u_j(\tau)=u_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau}a_jd\tau$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$, când se cunosc $\{u_j^{(0)}$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$ (prin condiţiile iniţiale ale problemei).

(III) Se calculează (prin integrare) : (a) $\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)dt$, cunoscând $\vec{r}(t_0)\equiv\vec{r}_0$ (prin condiţii iniţiale) şi definiţia $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$;

(b) $\mathcal{R}=\mathcal{R}[x_1(\tau),x_2(\tau),x_3(\tau),x_4(\tau)]\equiv\mathcal{R}(\tau)$, formal prin $\mathcal{U}=\dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau}$ şi obţinut efectiv cu ajutorul componentelor $u_j=\dfrac{dx_j}{d\tau}$ ($j=\overline{1,4}$), conform diferenţialelor $\{dx_j=u_jd\tau$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$, permiţând $\{x_j(\tau)=x_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau}u_jd\tau$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$, când se cunosc $\{a_j^{(0)}$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$ (prin condiţiile iniţiale ale problemei).

3.17.7.3 Observaţii asupra ecuaţiilor cinematice şi asupra legilor cinematice relativiste ale mişcării

(O_1) Legile cinematice relativiste ale mişcării sunt: (a) *legea cuadripoziţiei* ($\mathcal{R}$), (b) *legea cuadrivitezei* ($\mathcal{U}$) şi (c) *legea cuadriacceleraţiei* ($\mathcal{A}$), adică legile care arată modul cum variază *cuadrivectorii cinematici* $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ *şi* $\mathcal{A}$ *în raport cu timpul propriu* τ.

(O_2) Variaţia cuadrivectorilor $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ şi $\mathcal{A}$ în raport cu timpul cinematic t poate fi obţinută uşor din legile (O_1) prin legătura $t=\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ dintre t şi τ.

(O_3) În modul *matematic cel mai concis* legile (O_1) se exprimă prin dependenţele: (a) $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\tau)$ şi $\{x_j=x_j(\tau)$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$, (b) $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\tau)$ şi $\{u_j=u_j(\tau)$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$ şi (c) $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\tau)$ şi $\{a_j=a_j(\tau)$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$.

(O_4) Rezolvarea completă a problemei cinematice a mişcării presupune cunoaşterea condiţiilor iniţiale ale problemei, rezumate esenţial la cunoaşterea valorilor iniţiale ale componentelor $\{x_j^{(0)}\equiv x_j(\tau_0)$; $u_j^{(0)}\equiv u_j(\tau_0)$ ($j=\overline{1,4}$)$\}$ la momentul iniţial propriu τ_0.

(O_5) *Definițiile matematice ale* $\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ și $\mathcal{A}$ sunt operabile diferențial, respectiv integral numai prin definițiile matematice ale componentelor lor scalare: (a) ($x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z, x_4 \equiv ict$); (b) $\{u_j = \frac{dx_j}{d\tau}\ (j=\overline{1,4})\}$ și (c) $\{a_j = \frac{du_j}{d\tau} \equiv \frac{d^2x_j}{d\tau^2}\ (j=\overline{1,4})\}$

(O_6) Prin (O_5) (a), (b) și (c) avem, tocmai, *ecuațiile diferențiale cinematice relativiste ale mișcării*, conducând la *legile mișcării pe drumul* (I) $\mathcal{R} \to \mathcal{U} \to \mathcal{A}$, dacă se presupune cunoscută dependența $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\tau)$ și $\{x_j=x_j(\tau);\ j=\overline{1,4}\}$, care *prin derivare* permite dependențele $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\tau)$ prin $\{u_j=u_j(\tau);\ j=\overline{1,4}\}$, respectiv $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\tau)$ prin $\{a_j=a_j(\tau);\ j=\overline{1,4}\}$; și *pe drumul* (II) $\mathcal{A} \to \mathcal{U} \to \mathcal{R}$, dacă se presupune cunoscută dependența $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\tau)$ și $\{a_j=a_j(\tau);\ j=\overline{1,4}\}$, permițând *prin integrare* dependențele $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\tau)$ cu $\{u_j(\tau)=u_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau} a_j d\tau\ (j=\overline{1,4})\}$ și $\mathcal{R}=\mathcal{R}(\tau)$ cu $\{x_j(\tau)=x_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau} u_j d\tau\ (j=\overline{1,4})\}$.

(O_7) În (O_6) sunt conținute și *ecuațiile integrale cinematice relativiste ale mișcării* (generând drumul (II) $\mathcal{A} \to \mathcal{U} \to \mathcal{R}$): (a) $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\tau)$ și $\{a_j=a_j(\tau);\ j=\overline{1,4}\}$ ca fiind date inițial; (b) $\{u_j(\tau)=u_j(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau} a_j d\tau \equiv u_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau} a_j d\tau\ (j=\overline{1,4})\} \to \mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4) \equiv \mathcal{U}(\tau)$ și (c) $\{x_j(\tau)=x_j(\tau_0)+\int_{\tau_0}^{\tau} u_j d\tau \equiv x_j^{(0)}+\int_{\tau_0}^{\tau} u_j d\tau\ (j=\overline{1,4})\} \to \mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \mathcal{R}(\tau)$.

3.18 Cinematica relativistă prin cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$). Efectul Doppler-Fizeau (EDF) general și particular longitudinal prin cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$). EDF transversal neclasic ≡ EDF pur relativist [consecința cinematică (cc_8) a TrLS (3.61)].

3.18.0 Considerații generale. Vectorul de undă $\vec{k}$

În afara cuadrivectorilor cinematici tratați până aici ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$ și $\mathcal{A}$), în *cinematica relativistă* mai pot apare și *alți cuadrivectori cinematici*, mai ales în legătură cu *cinematica ondulatorie*, care are drept obiect de studiu *undele mecanice*, *termice*, *electromagnetice*, *luminoase*, *magnetohidrodinamice* etc. În *cinematica ondulatorie ca parte a teoriei generale a undelor, propagarea undelor poate fi caracterizată de vectorul de undă*:

(3.127) (a) $\vec{k}=k_x\vec{1}_x+k_y\vec{1}_y+k_z\vec{1}_z$, având modulul (3.127) (b) $|\vec{k}| \equiv k=\frac{2\pi}{\lambda}$, cu

(3.126) (c) $\lambda=v_pT=v_p/\nu=2\pi v_p/\omega$

În (3.127)(a), (k_x,k_y,k_z) sunt componentele carteziene ale vectorului $\vec{k}$ tridimensional, *având direcția determinată de cosinușii săi directori* (cosα, cosβ, cosγ), cu (α, β, γ) unghiurile sale față de axele Ox, Oy, Oz ale SdR (ca sistemul de axe) dintr-un referențial RI (vezi figura 3.11). Precizarea lui $\vec{k}$ se face și prin modulul (3.127)(b), în care λ este lungimea de undă a undei pentru care a fost introdus $\vec{k}$, v_p-viteza de propagare (de fază) a undei, iar (T, ν, ω) sunt pe rând: perioada, frecvența, respectiv pulsația oscilației pe care o poartă unda în propagarea ei. De aceea, în paragraful 3.14, ($\vec{k}$, λ, T, ν, ω) au fost amintite ca posibile mărimi fizice proprii, atunci când sunt definite și măsurate în $(RI)_0$ propriu undei considerate, respectiv ca *mărimi fizice cinematice (de mișcare)*, atunci când sunt definite și măsurate în orice RI, altul decât cel propriu $(RI)_0$.

Pentru o undă electromagnetică luminoasă, la propagarea ei în vidul electromagnetic/spațiul liber, avem:

(3.128) (a) $v_p \equiv c$ și (3.128) (b) $\lambda=cT=c/\nu$, încât rezultă explicitările:

(3.128) (c) $|\vec{k}| \equiv k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{2\pi}{cT}=2\pi\frac{\nu}{c}=\frac{\omega}{c}$, respectiv scalarii:

(3.129)(a) $k_x=2\pi\frac{\nu}{c}\cos\alpha\equiv\frac{\omega}{c}\cos\alpha$ (b) $k_y=2\pi\frac{\nu}{c}\cos\beta\equiv\frac{\omega}{c}\cos\beta$ şi (c) $k_z=2\pi\frac{\nu}{c}\cos\gamma\equiv$

$\equiv\frac{\omega}{c}\cos\gamma$, drept *componentele carteziene ale vectorului de undă* $\vec{k}$ *prin cosinuşii directori ai direcţiei sale* (vezi figura 3.11). Astfel, *vectorul de undă* $\vec{k}$ *al unei unde luminoase*, prin (3.127)(a), se mai scrie ca:

$$(3.130)\ \vec{k}=\vec{k}(k_x, k_y, k_z)\equiv\vec{k}(k_1, k_2, k_3)=2\pi\frac{\nu}{c}\vec{1}_x\cos\alpha+2\pi\frac{\nu}{c}\vec{1}_y\cos\beta+2\pi\frac{\nu}{c}\cos\gamma=$$

$$=\frac{\omega}{c}\vec{1}_x\cos\alpha+\frac{\omega}{c}\vec{1}_y\cos\beta+\frac{\omega}{c}\vec{1}_z\cos\gamma.$$

Deoarece electrodinamica clasică, prin incompatibilităţile sale cu mecanica clasică, a fost cea care a dus la elaborarea TRR/TRS, *generalizarea relativistă a vectorului de undă tridimensional* ($\vec{k}$) al cinematicii ondulatorii nerelativiste clasice şi transformarea lui într-un *cuadrivector de undă* $\mathcal{K}$ (k_1,k_2,k_3,k_4) al *cinematicii ondulatorii relativiste* are o *dublă justificare* în cursul de FT relativistă de faţă: (I) să facă pentru cinematica ondulatorie nerelativistă o extindere relativistă printr-o reformulare cuadrivectorială, dar, mai ales, (II) prin această trecere $\vec{k}\rightarrow\mathcal{K}$ să dea o *elaborare relativistă a efectului Doppler-Fizeau* (EDF) *longitudinal*, simultană, prin consecinţele cinematice ale TrLS (3.61) şi/sau (3.63), cu *punerea în evidenţă (numai pe calea TRR/TRS aplicată) a unui nou* EDF, ca *efectul Doppler-Fizeau transversal*, care este un *efect pur relativist*, amintit în subparagrafele 3.14.4 şi 3.14.2 printre consecinţele cinematice ale TrLS (3.61) de tratat în cursul de faţă [consecinţa (cc_8)].

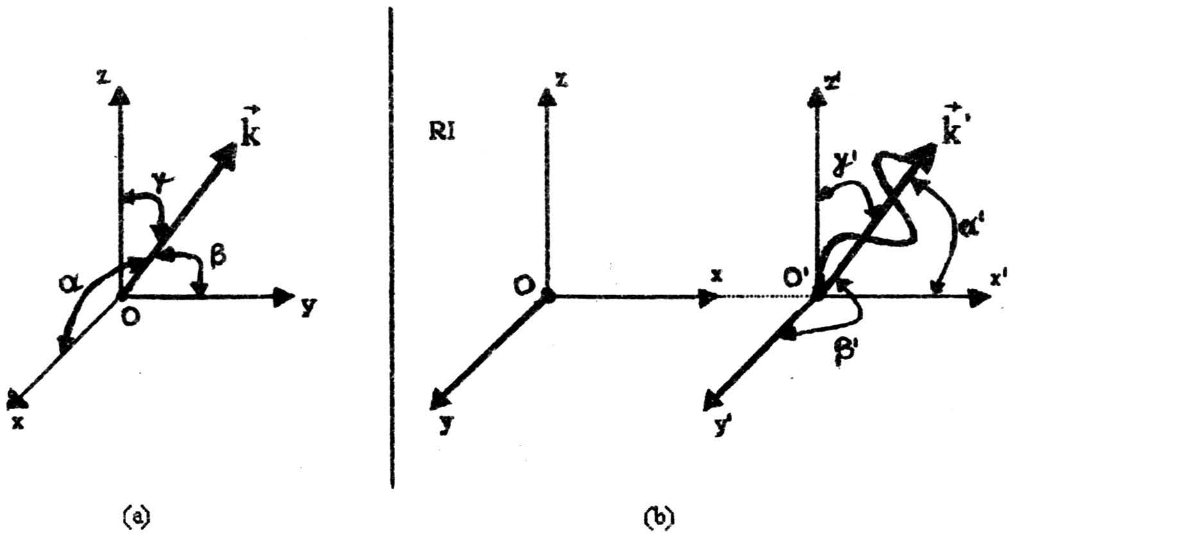


Figura 3.11 *Vectorul de undă* $\vec{k}$ *şi reprezentarea lui*

(a) $\vec{k}$ şi unghiurile α, β, γ directoare [necesare în (3.127)-(3.130)] satisfăcând relaţia $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

(b) $\vec{k}$ raportat la (RI)')şi transformat în $\vec{k}'\equiv\vec{k}_{(RI)'}$), când (RI)' este în mişcare cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$=constant faţă de RI.

3.18.1 Cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$)

3.18.1.0Justificare procedurală

Generalizarea vectorului de undă tridimensional $\vec{k}$ (3.127) la nivel de cuadrivector $\mathcal{K}$ se poate face, ţinând cont că avem $\mathcal{K}=\mathcal{K}(k_1,k_2,k_3,k_4)$ cu $k_1\equiv k_x$, $k_2\equiv k_y$, $k_3\equiv k_z$, fiecare având dimensiunea inversului lungimii (L^{-1}) obţinută prin $\dim(\vec{k})=\dim(|\vec{k}|)\equiv\dim\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)$, şi făcând ca şi k_4 să aibă modulul de dimensiunea lui L^{-1}. În acest fel, k_4 are expresia (3.131) $k_4 = i\frac{2\pi}{\lambda} = i\frac{2\pi}{cT} = i2\pi\frac{\nu}{c} = i\frac{\omega}{c}$, în cazul undelor electromagnetice luminoase, pe care le avem în vedere în TRR/TRS *aplicată* în paragraful de față.

3.18.1.1 Cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$) prin componentele sale scalare

Scriind $\mathcal{K} = \mathcal{K}(k_1 \equiv k_x, k_2 \equiv k_y, k_3 \equiv k_z, k_4) \equiv (\vec{k}, k_4)$, avem cuadrivectorul de undă $\mathcal{K}$ prin componentele sale scalare $\{k_j\}$ ($j = \overline{1,4}$), explicitate cu ajutorul relațiilor (3.129) și (3.131), în raport cu un RI, ca:

$$(3.132)\ (I)\ (a)\ k_1 = 2\pi\frac{\nu}{c}\cos\alpha \equiv \frac{\omega}{c}\cos\alpha; \quad (b)\ k_2 = 2\pi\frac{\nu}{c}\cos\beta \equiv \frac{\omega}{c}\cos\beta;$$

$$(c)\ k_3 = 2\pi\frac{\nu}{c}\cos\gamma \equiv \frac{\omega}{c}\cos\gamma \text{ și } (d)\ k_4 = i2\pi\frac{\nu}{c} \equiv i\frac{\omega}{c}, \text{ permițând}$$

$$(3.132)\ (II)\ \mathcal{K} = (\vec{k}, i2\pi\frac{\nu}{c}) = (\vec{k}, i\frac{\omega}{c}).$$

3.18.1.2 Invariantul relativist cinematic I_k (3.133)

Alături de invarianții relativiști cinematici $\{c, s$ și ds, τ și $d\tau$, $I_u = -c^2\}$, se mai poate atașa și *invariantul relativist* (3.133) $I_k = \sum_{j=1}^{4} k_j^2$ reprezentând tocmai modulul cuadrivectorului $\vec{k}$. *Invarianța lui* I_k se obține simplu înlocuind în (3.133) expresiile (3.132) ale $\{k_j\}$ ($j = \overline{1,4}$), rezultând succesiunea:

$$(3.134)\quad I_k = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = (2\pi\frac{\nu}{c})^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - i^2) = 0,$$ prin $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ satisfăcută de cosinusurile directoare ale unei direcții în general. Se observă că

$$(3.135)\quad I_k \equiv \mathcal{K}\cdot\mathcal{K}^* \equiv |\mathcal{K}|^2 = \sum_{j=1}^{4} k_j^2 = 0,$$ afirmând că modulul *cuadrivectorului de undă este un invariant relativist cinematic*, alături de ceilalți din setul deja amintit.

3.18.1.3 Faza undei prin cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$) și cuadrivectorul de poziție ($\mathcal{R}$)

O parte din informația cinematică asupra unei unde este conținută în *faza* φ a undei, deoarece se poate scrie prin cuadrivectorul $\mathcal{K}$ ($\{k_j\}$($j = \overline{1,4}$)) și prin cuadripoziția $\mathcal{R}$ ($\{x_j\}$($j = \overline{1,4}$)), ca:

$$(3.136)\ \varphi = \omega t - \vec{k}\,\vec{r} = \omega t - (k_x\vec{1}_x + k_y\vec{1}_y + k_z\vec{1}_z)(x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z) = -(k_x x + k_y y + k_z z + i^2\omega t) =$$

$$\equiv -(k_x x + k_y y + k_z z - \frac{i}{c}\omega i c t) \equiv (k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4) = -\sum_{j=1}^{4} k_j x_j,$$ *generalizând faza undei* ca produsul scalar cuadrivectorului de undă ($\mathcal{K}$), cu cuadrivectorul do poziție ($\mathcal{R}$) luat cu semn negativ:

$$(3.137)\ \varphi \equiv \omega t - \vec{k}\,\vec{r} = -\mathcal{K}\cdot\mathcal{R} \equiv -(\vec{k}, i\frac{\omega}{c})\cdot(\vec{r}, ict).$$

3.18.2 Transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61) și cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}'$) (3.132). Efectul Doppler-Fizeau (EDF) general ca EDF cu interpretare clasică în TRR/TRS

3.18.2.0 Precizări noțional-conceptuale și metodologice

Cinematica relativistă ondulatorie schițată mai sus prin cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$) va conduce la obținerea teoretică, în cadrul TRR/TRS, a efectului Doppler-Fizeau (EDF) general și particular longitudinal, deja interpretate clasic nerelativist. Deoarece $\mathcal{K}$ (3.132) este un cuadrivector, satisface *definiția generală* (3.100) *a cuadrivectorului*, adică se transformă în sens Lorentz la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' din TRR/TRS, conformă cu figura 3.3(b). Cum se va vedea, TrLS (3.61) vor pune în evidență atât

un EDF general şi particular longitudinal, cât şi un EDF transversal, ca EDF *pur relativist*, consecinţa cinematică specială a TrLS (3.61). Înainte de toate este necesară definirea EDF, ceea ce urmează, apelând la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'.

3.18.2.1 Definirea fizico-experimentală a efectului Doppler-Fizeau (EDF)

<**Numim efect Doppler-Fizeau (EDF)** *fenomenul fizic de modificare a frecvenţei* (ν), *a perioadei* (T), *a pulsaţiei* (ω) **şi** *a lungimii de undă* (λ) **a undelor, percepute de un observator aflat în mişcare relativă faţă de sursa ce emite undele, când mediul de propagare a undelor este în repaus**>.

3.18.2.2 Observaţii asupra definiţiei EDF prin RI $\leftrightarrows$ (RI)' şi $\mathcal{K}$

(O$_1$) *Mişcarea relativă* **a observatorului faţă de sursa de unde este dată prin raportarea cuadrivectorului $\mathcal{K}$ la RI $\leftrightarrows$ (RI)', conformă figurii 3.11(b).**

(O$_2$) Sursa ce emite undele electromagnetice luminoase va fi plasată în originea O' a referenţialului (RI)' şi va fi considerată legată solidar de (RI)' adică (RI)'≡(RI)$_0$ ca referenţial propriu sursei de unde luminoase.

(O$_3$) *Observatorul ce va percepe modificările de* **ν, T, ω şi λ va fi plasat în originea O a lui RI.**

(O$_4$) Mişcarea relativă a observatorului este echivalentă cu mişcarea relativă a referenţialelor RI şi (RI)' unul faţă de altul.

3.18.2.3 Aplicarea TrLS (3.61) (b) cuadrivectorului de undă $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}_{(RI)'}$ spre a deveni $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_{RI}$.

(a) Urmărind RI $\leftrightarrows$ (RI)' din figura 3.11(b), vectorul de undă $\vec{k} \equiv \vec{k}_{RI}$ raportat la RI, devine

(3.137) $\vec{k}' = \vec{k}_{(RI)'} = 2\pi\frac{\nu'}{c}(\vec{1}_{x'}\cos\alpha' + \vec{1}_{y'}\cos\beta' + \vec{1}_{z'}\cos\gamma')$, **raportat la (RI)', cu ($\vec{1}_{x'}, \vec{1}_{y'}, \vec{1}_{z'}$)** **versorii axelor (Ox', Oy', Oz') ale SdR' din (RI)', respectiv (cosα', cosβ', cosγ') cosinuşii directori ai direcţiei lui $\vec{k}'$ faţă de SdR'. Atunci avem în final:**

(3.138) $\mathcal{K}' = \mathcal{K}'(\vec{k}', i2\pi\frac{\nu'}{c}) \equiv \mathcal{K}'(\vec{k}', i\frac{\omega'}{c})$ **având** $k_4 = i2\pi\frac{\nu'}{c} = i\frac{\omega'}{c}$.

(b) *Cuadrivectorul de undă* $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}_{(RI)'}$ *se transformă în* $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_{RI}$, **conform definiţiei generale (3.100) a cuadrivectorului, admiţând şi TrLS între transformările Lorentz generale prin relaţiile:**

(3.139) **(a)** $\mathcal{K}_{RI} = (\breve{\mathcal{L}}')_s \mathcal{K}_{(RI)'} = (\breve{\mathcal{L}})_s^{-1} \mathcal{K}_{(RI)'}$ **sau (b)** $\mathcal{K} = (\breve{\mathcal{L}})_s^{-1}\mathcal{K}'$, **cu** $(\breve{\mathcal{L}}')_s \equiv (\breve{\mathcal{L}})_s^{-1} \equiv \{\alpha'_{jk}\}$ *matricea inversă* **a matricei** $(\breve{\mathcal{L}})_s$ **(3.59), calculabilă din matricea directă ţinând cont de proprietăţile coeficienţilor Lorentz şi mai ales de proprietatea** $\{\alpha'_{jk}\} \equiv \{\alpha_{jk}\} = \{\alpha_{kj}\}$ ($j, k = \overline{1,4}$), **rezultând o matrice tip (3.59) modificată numai prin interschimbarea între ei a termenilor cu unitatea imaginară** $i = \sqrt{-1}$ **la numărător:**

$$(3.140)\ (\breve{\mathcal{L}}')_s \equiv (\breve{\mathcal{L}})_s^{-1} \equiv (\alpha'_{jk}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{pmatrix}.$$

(c) *Utilizarea componentelor scalare ale cuadrivectorului de undă* $\{k_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ din (1.132) şi $\{k'_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ din (1.138) şi a explicitării (3.140), transformă (3.139)(b) în forma matriceală:

$$(3.141)\ (a)\ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = (\breve{\mathcal{L}})_s^{-1} \begin{pmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \\ k'_4 \end{pmatrix}\ \text{şi}\ (b)\ \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i2\pi\frac{\nu}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{-\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\frac{i}{c}v_T}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k'_{x'} \\ k'_{y'} \\ k'_{z'} \\ i2\pi\frac{\nu'}{c} \end{pmatrix}\ \text{ca}$$

formă explicită a transformării în sens Lorentz special (3.61) (b) a cuadrivectorului de undă ($\mathcal{K}$).

Interesând numai *obţinerea teoretică a efectului Doppler-Fizeau* (EDF), rămâne importantă doar obţinerea dependenţei (legăturii) (3.142) $k_4=f(k'_4)$, prin explicitarea ei din (3.141)(b), dacă se înmulţeşte ultima linie a matricei 4x4 cu matricea unicoloană din dreapta ei şi se face adunarea corespunzătoare a termenilor, conform cu:

$$(3.143)\ i2\pi\frac{\nu}{c} = \frac{i\frac{v_T}{c}k'_{x'}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{i2\pi\frac{\nu'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ \text{şi cu forma finală:}$$

$$(3.144)\quad (a)\ \nu = \nu'\frac{1+\frac{v_T}{c}\cos\alpha'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\quad \text{sau}\quad (b)\ \nu_{RI} = \nu_{(RI)'}\frac{1+\frac{v_T}{c}\cos\alpha'}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ \text{utilizând expresia}$$

explicită a lui $k'_{x'}$ din (3.137).

3.18.2.4 Analiza rezultatului cinematic relativist (3.144). EDF general consecinţă cinematică a **TrLS (3.61)**

(a) *Analiza rezultatului* (3.144), obţinut prin aplicarea TrLS (3.61)(b) cuadrivectorului de undă $\mathcal{K}'\equiv\mathcal{K}_{(RI)'}$ spre a fi transferat în $\mathcal{K}\equiv\mathcal{K}_{RI}$, implică discuţia relaţiei (3.144), în raport cu trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)', adică prin mişcarea relativă a referenţialelor unul faţă de celălalt.

(b) (I) EDF *la apropierea sursei de lumină faţă de observator.*

Deoarece *sursa de unde luminoase este considerată plasată în* O' *şi solidară cu* (RI)', *apropierea lui* (RI)' *de* RI *echivalentă cu apropierea originii* O' *de originea* O (v. figura 3.11(b)) impune în (3.144) condiţia (3.145(I)) $v_T<0$ şi $\cos\alpha'<0$, *conducând la* (3.146') $\nu\equiv\nu_{RI}>\nu'\equiv\nu_{(RI)'}$ [sau $T\equiv T_{RI}<T'\equiv T_{(RI)'}$; sau $\omega\equiv\omega_{RI}>\omega'\equiv\omega_{(RI)'}$; sau $\lambda\equiv\lambda_{RI}<\lambda'\equiv\lambda_{(RI)'}$], când *observatorul plasat în* O *percepe o frecvenţă mai înaltă decât cea emisă de sursa plasată în* O'. Concluzia ultimă este interpretarea fizico-matematică a relaţiei (3.146'), care rezultă relativist prin (3.144) modificată de condiţia (3.145(I)) ca:

$$(3.144')\ \nu \equiv \nu_{RI} = \nu'\frac{1+\frac{v_T}{c}|\cos\alpha'|}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \nu_{(RI)'}\frac{1+\frac{v_T}{c}|\cos\alpha'|}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ *exprimând* EDF *la apropierea sursei luminoase de observatorul considerat fix.*

(II) EDF *la îndepărtarea sursei luminoase de observator.*

Dacă (RI)' *se îndepărtează de* RI, echivalent O' (şi *sursa de lumină plasată în el*) *se îndepărtează de* O, sau echivalent sursa de lumină *se îndepărtează de observator*, atunci *condiţia* (3.145(II)) $v_T>0$ şi $\cos\alpha'<0$ *impusă relaţiei* (3.144) de îndepărtarea lui (RI)' de RI, transformă (3.144) în

$$(3.144'')\ \nu \equiv \nu_{RI} = \nu' \frac{1-\frac{v_T}{c}|\cos\alpha'|}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \nu_{(RI)'} \frac{1-\frac{v_T}{c}|\cos\alpha'|}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}$$, *exprimând* EDF *la îndepărtarea sursei luminoase de observator.* Din (3.144") se observă uşor că (3.146") $\nu \equiv \nu_{RI} < \nu' \equiv \nu_{(RI)'}$ [sau $T \equiv T_{RI} > T' \equiv T_{(RI)'}$; sau $\omega \equiv \omega_{RI} < \omega' \equiv \omega_{(RI)'}$; sau $\lambda \equiv \lambda_{RI} > \lambda' \equiv \lambda_{(RI)'}$], adică, *la îndepărtarea sursei de lumină, observatorul (plasat în* O) *percepe în* RI *o frecvenţă inferioară celei emise în originea* O' *a lui* (RI)'.

(c) *Concluzii asupra* EDF *obţinut prin aplicarea* TrLS (3.61)(b) *cuadrivectorului de undă în raportarea la* RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$

(c_1) Relaţiile (3.144') şi (3.144") arată că *are loc modificarea* frecvenţei (ν) a undei luminoase [sau modificarea perioadei (T), a pulsaţiei (ω) sau a lungimii de undă (λ), ca mărimi fizice direct legate de ν], adică *are loc efectul Doppler-Fizeau* (EDF) definit în 3.18.2.1.

(c_2) Deoarece EDF a fost obţinut pe cale teoretică relativistă prin TrLS (3.61)(b) transformând cuadrivectorul $\mathcal{K}' \equiv \mathcal{K}_{(RI)'}$ în cuadrivectorul $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_{RI}$ *se pot face interpretări cu ajutorul mărimilor fizice proprii* (ν_0, T_0, ω_0, λ_0), *definite prin raportare la referenţialul propriu sursei luminoase* ((RI)$_0$≡(RI)') şi al *mărimilor fizice cinematice* (ν, T, ω, λ) definite faţă de oricare RI, altul decât (RI)$_0$ propriu.

(c_3) Procedând la identificarea (RI)$_0$≡(RI)' cu sursa de lumină plasată în O'≡O$_0$ şi legată solidar de (RI)$_0$ (în repaus faţă de (RI)$_0$), *mărimile fizice proprii* ($\nu_0 \equiv \nu' \equiv \nu_{(RI)_0 \equiv (RI)'}$, $T_0 \equiv T' \equiv T_{(RI)_0 \equiv (RI)'}$, $\omega_0 \equiv \omega' \equiv \omega_{(RI)_0 \equiv (RI)'}$, $\lambda_0 \equiv \lambda' \equiv \lambda_{(RI)_0 \equiv (RI)'}$) *sunt invarianţi relativişti, încât interpretările fizice pentru* EDF *exprimat prin* (3.144') şi (3.144"), vor compara *comportarea mărimilor fizice cinematice sau de mişcare* ($\nu \equiv \nu_{RI}$; $T \equiv T_{RI}$; $\omega \equiv \omega_{RI}$; $\lambda \equiv \lambda_{RI}$) *cu valorile constante* (ν_0, T_0, ω_0, λ_0) *ale mărimilor fizice proprii* (de repaus) *în referenţialul inerţial propriu sursei de lumină.*

(c_4) Prin (c_3), EDF exprimat matematic de (3.144) se reformulează ca

$$(3.144''')\quad \nu = \nu_0 \frac{1 \pm \frac{v_T}{c}|\cos\alpha'|}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}$$, menţinându-se aceleaşi inegalităţi (3.146') şi (3.146") reformulate mai concis ca (3.146"') (a) $\nu > \nu' \equiv \nu_0$ şi (b) $\nu < \nu' \equiv \nu_0$, din care se observă mai uşor că $\nu > \nu_0$ (la apropierea observatorului de sursa de lumină) şi $\nu < \nu_0$ (la îndepărtare).

(c_5) Prin (3.144"') şi (3.146"'), EDF *general înţeles ca fenomen fizic de modificare a frecvenţei undei* (ν) [sau a T, ω, λ] *percepute de un observator în mişcare relativă faţă de sursa de lumină, se precizează cinematic relativist* ca fenomenul fizic de *modificare a frecvenţei cinematice a undei* (sau de modificare a mărimilor fizice cinematice T, ω, λ) *în raport cu frecvenţa* ν_0 *proprie undei* [respectiv cu T_0, ω_0, λ_0 proprii], *definită şi măsurată în referenţialul propriu sursei de unde luminoase* (RI)$_0$≡(RI)'.

3.18.3 EDF longitudinal obţinut pe cale cinematică relativistă prin TrLS (3.61)

EDF *general*, obţinut pe cale cinematică relativistă şi exprimat matematic prin relaţiile relativiste (3.144'), (3.144") sau (3.144"') şi precizat interpretativ prin inegalităţile (3.146'), (3.146") sau (3.146"'), *se particularizează la cazul* EDF *longitudinal, dacă direcţia vectorului de undă* $\vec{k}'$ (3.137) [ilustrat în figura 3.11], se consideră în lungul direcţiei axei Ox şi O'x' (de aici atributul de longitudinal), caz în care *propagarea undei luminoase se face în lungul direcţiei de deplasare a lui* (RI)' *şi în lungul direcţiei de observare.* În acest caz, α'=0 şi cosα'=1 transformă relaţiile (3.144) (cele supranotate cu ', " şi "') în

$$(3.147)\quad \nu = \nu_0 \frac{1 \pm \frac{v_T}{c}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}$$, *exprimând matematic* EDF *longitudinal, obţinut cinematic relativist prin aplicarea* TrLS (3.61) *cuadrivectorului de undă a undei luminoase luate în considerare.*

3.18.4 EDF transversal neclasic ≡ EDF pur relativist (consecinţa cinematică (cc_8) a TrLS (3.61))

3.18.4.0 Precizare metodologică

Până aici, întreg paragraful 3.18 s-a ocupat de schiţarea *cinematicii relativiste ondulatorii* prin cuadrivectorul de undă ($\mathcal{K}$), precum şi de tratarea cinematică relativistă a EDF *general şi particular longitudinal*, ca fenomene fizice cu interpretare clasică nerelativistă, formulabile în cinematica relativistă ca rezultate teoretice posibil de obţinut în aplicarea TrLS (3.61) *cuadrivectorului de undă*, şi de aceea, încadrabile în setul de consecinţe cinematice ale TrLS enumerate în subparagraful 3.12.4 şi 3.14.2, între care (cc_8) remarca numai EDF *transversal, ca* EDF *pur relativist.*

3.18.4.1 EDF transversal ca EDF pur relativist

(a) *Relaţiile cinematice relativiste* (3.144) *exprimând matematic* EDF *general*, alături de *cazul teoretic particular* (3.147) *exprimând* EDF *longitudinal* [pentru $\cos\alpha' \equiv \cos 0 = 1$, orientând vectorul $\vec{k}$ (3.137) al cuadrivectorului $\mathcal{K}'(\vec{k}', i2\pi\frac{v'}{c})$ în lungul axelor (Ox, O'x')], *mai pot conţine un caz teoretic particular de* EDF, furnizat de (3.148) $\cos\alpha' \equiv \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Acesta din urmă va fi EDF *transversal* sau EDF *pur relativist.*

(b) *Utilizarea valorii* (3.148) [a cosinusului director al lui $\vec{k}'$ (3.137)] face ca vectorul de undă reprezentat în figura 3.11(b) să apară *orientat perpendicular pe direcţia comună axelor* (Ox şi O'x'). Introducând (3.148) în (3.144'''), se obţine: (3.149) $v = \frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}$, exprimând matematic *existenţa unui* EDF *transversal, ca un* EDF *pur relativist în sensul că nu poate fi interpretat şi clasic*, aşa cum se întâmpla cu EDF longitudinal.

(c) EDF *transversal* constă în *modificarea frecvenţei cinematice* (sau a T, ω, λ cinematice) *şi atunci când* $\vec{k}'$ *din cuadrivectorul de undă* $\mathcal{K}'(\vec{k}', i2\pi\frac{v'}{c})$ *are orientarea perpendiculară pe direcţia mişcării relative a referenţialelor inerţiale* [RI şi $(RI)' \equiv (RI)_0$], *în lungul direcţiei comune axelor* (Ox şi O'x').

(d) Rezultatul teoretic pur relativist (3.149), exprimând teoretic EDF transversal, trebuie verificat experimental.

3.18.4.2 Despre verificarea experimentală a EDF transversal (EDF pur relativist). Experienţa Ives-Stilwell (1938)

EDF *transversal* a fost pus în evidenţă experimental prin experienţa Ives-Stilwell din 1938 utilizând un fascicul de raze canal de ioni excitaţi care emiteau lumină. Modificarea frecvenţei (ν) [sau modificarea mărimilor fizice cinematice (T, ω, λ)], în sensul descris matematic de relaţia (3.149) pentru ν, *s-a pus în evidenţă prin măsurarea deplasării liniilor spectrale emise de ionii formând fasciculul de raze canal având viteza* $\bar{v} \equiv \bar{v}_T$ *comparabilă ca valoare cu c.*

3.19 Câteva remarci asupra implicării limbajului TRR/TRS şi TRG în alte domenii majoritar culturale (filosofia, lingvistica, gramatica, literatura, psihologia, dogmatica, teologia, cercetarea paranormalului, etc.)

(R_0) Printre consecinţele cinematice ale TrLS (3.61) enumerate în subparagraful 3.12.4, ultima formulată explicit (cc_{11}) nu are legătură cu TRR/TRS şi cu fizica teoretică (FT), decât în măsura în care elementele din baza noţional-conceptuală a TRR/TRS ţinând de limbajul ştiinţific al fizicii teoretice relativiste şi al teoriei relativităţii în general, au fost preluate în *diverse alte domenii majoritar culturale şi chiar umanist-ştiinţifice* (lingvistica, gramatica, psihologia), spre a servi unor scopuri specifice fiecărui domeniu în parte. Cel mai important scop de preluare a fost şi mai este cel ţinând de încercarea de a extinde cunoaşterea specifică domeniului respectiv, utilizând noţiuni şi concepte noi, în general, greu de elaborat sau de înnoit fără provocarea unei interdisciplinarităţi.

(R_1) Cea mai masivă preluare a fost făcută în *domeniul filosofiei*, încercând să pună bazele filosofice ale cunoaşterii fizice prin TRR/TRS în special, cu interpretarea spaţiului şi timpului a ordinii de succesiune a evenimentelor, a simultaneităţii, a comunicării posibile în universul spaţiu-timp, a consecinţelor cinematice ale TRR/TRS ţinând cont de legătura coordonatei temporale cu cele spaţiale, de contracţia relativistă şi de dilatarea relativistă a duratelor, cum la fel cu implicaţiile filosofice ale TRR/TRS şi ale TRG în cosmogonie şi cosmologie, în cunoaştere în general etc.

(R_2) *Domeniul lingvisticii* a preluat elemente din baza noţional-conceptuală a TRR/TRS şi TRG, în principal prin preluarea din lexicul dicţionarelor generat de ştiinţe contribuind cu neologisme la dezvoltarea lexicului şi limbajului, ca şi la interpretări în cadrul semanticii sau al altor ramuri lingvistice ce se ocupă cu clasificarea înţelesului cuvântului ori cu sursele de îmbogăţire a limbajului şi a limbilor. Astfel, *relativ*, *relativist*, *relativitate*, *sistem de referinţă*, teoria relativităţii, sincronizarea ceasornicelor, paradoxul gemenilor, linie de univers, univers spaţiu-timp etc. constituie îmbogăţiri de preţ ale dicţionarelor explicative (nu neapărat enciclopedice) elaborate de lingvişti, care le consideră bunuri lingvistice şi culturale incontestabile.

(R_3) *Gramatica* (limbii române, de ex.), a preluat noţiuni de TRR/TRS în încercarea de extindere a propriului limbaj noţional-conceptual, forţând extinderea cunoaşterii şi investigării specifice pentru *clarificarea timpurilor verbale* prin recurgerea la semantica implicată în desemnările din conul luminos drept *trecut absolut* şi *viitor absolut* al evenimentului origine/zero.

(R_4) *Domeniul literaturii* trebuie remarcat, mai ales, prin relaţiile de tip *science fiction* (SF), fără ca TRR/TRS sau TRG să poată arbitra între realitate şi imaginaţie. Merită pomenite încercările de a găsi elemente de gândire în *spiritul teoriei relativităţii* în operele literare ale unor mari scriitori precum A. Dante , E.A.Poe, M. Eminescu, J. Verne, J.H. Updike, S. Lem, I. Asimov etc. nefiind vorba de o cunoaştere propriu-zisă de tipul celei specifice fizicii teoretice relativiste, ci de creaţii artistice şi estetice şi chiar lingvistice, uneori, de gândire sistemică intuind relativitatea în sens filosofic.

(R_5) *Psihologia modernă*, cercetând conexiunile posibile între activitatea nervoasă cerebrală şi actele mentale, între gândire şi activitatea psihică, între limbaj comun şi limbaj ştiinţific, între timp fizic şi timp psihic (psihologic) etc., a încercat şi mai încearcă ipoteze inspirate de TRR/TRS în special vizând viteza de transmitere a interacţiunilor pentru naşterea comunicării psihice propriu-zise, ori geneza percepţiei/intuiţiei spaţiului, timpului, succesiunii, simultaneităţii, etc. Modelul fizico-matematic de reprezentare în $\mathcal{S}_M$ prin pânzele conului luminos (CL) impusă de TRR/TRS este curent utilizată în consideraţii de cercetare în psihologie, situând gândul, mintea, conştiinţa în zona exterioară pânzelor (CL) cu scopul de modela psihicul uman prin evenimente între care se comunică cu $v > c$, examinându-se inclusiv ipoteza *tahionilor* ca particule purtătoare ale gândului sau ca particule permiţând cooperarea ce generează mintea omenească şi/sau conştiinţa. În studiul asupra neuro-fiziologiei gândului şi minţii umane generatoare de conştiinţă, la Institutul de Cercetare a Minţii din Philadelphia, se utilizează curent pânzele CL în modelări teoretice, afirmându-se că aparatura foarte sofisticată şi ultrafină pune în evidenţă emisii fotonice ale creierului omenesc, de anumite energii, corespunzătoare anumitor stări de conştienţă şi conştiinţă, de care este interesată şi *biofizica cuantică.*

(R_6) *Domeniul teologiei-dogmaticii* nu este străin de preluări din baza noţional-conceptuală a TRR/TRS şi TRG spre a-şi formula, reformula şi chiar înnoi, în pas cu cuceriri ştiinţifice legate, mai ales, de cosmologia şi cosmogonia relativistă şi de *baza interpretativă a mecanicii cuantice*, preluând *paradoxuri ce exprimă limitări intrinsece de domenii*, ori *funcţionări de modele teoretice* (aplicabile doar în fizică) şi chiar afirmaţii fizico-matematice explicitând limite ale cunoaşterii prin fizică. Este vorba de domeniul teologiei-dogmaticii noilor curente apărute în secolele XIX şi XX, în special în SUA, cu o foarte bogată literatură teologico-dogmatică adresându-se unor posibili aderenţi, a căror instrucţie şi cultură este foarte impregnată de binefaceri ale cunoaşterii ştiinţifice ce a pus bazele tehnologiilor de vârf informaţional-comunicaţionale din ultimele decenii ale secolului XX.

(R_7) Încercarea de cercetare a ceea ce este numit *domeniul paranormalului* începe, de obicei, *cu extinderea* posibilă a celor patru dimensiuni din *universul spaţiu-timp* (spaţiul Minkowski) al TRR/TRS la un număr superior, *sau chiar cu problematica celor patru dimensiuni* ale universului spaţiu-timp relativist, *aplicată* la interacțiunile psihice și mentale vizând explorarea gândirii, a minții, a conștiinței etc. cu mijloace noțional-conceptuale sau cu mijloace investigaționale specifice fizicii în general și/sau fizicii teoretice relativiste în particular.

(R_8) Dacă se face o încadrare a fenomenului OZN [la Universitatea "California" din Los Angeles (UCLA) și la Universitatea din Melbourne (Australia) se țin deja cursuri de ... *ozenistică*] în domeniul numit al *paranormalului*, sau chiar dacă nu se face încadrarea, *cultura lumii contemporane*, prin cărțile ce s-au scris (și au invadat piața de carte) despre *desemnatul fenomen OZN*, nu este străină de preluări noțional-conceptuale, metodologic-funcționale etc. din TRR/TRS și TRG, în încercarea de a înțelege și de a explica *fenomenologia psiho-socială* a valului cultural occidental intensificat de *problematica OZN*.

(R_9) Rostul acestui ultim paragraf, în cadrul *cinematicii relativiste*, este să nu piardă din vedere că *fizica teoretică relativistă generată de* TRR/TRS și/sau TRG *nu este numai în atenția firească a fizicienilor*, ci și în atenția tuturor acelora nefizicieni care încearcă să făurească o anumită interdisciplinaritate, intersectând limbajul și mijloacele fizicii cu cele ale altor domenii mai mult sau mai puțin (în)depărtate fizicii. De aceea, *fizicienilor* nu le rămâne decât să constate cât de tare a fost trădat spiritul științei fizicii în încercarea acelora de a-i extinde limbajul și mijloacele de cercetare în domenii în care fizicienii, vegheați de rigorile științei lor, nu se pot încumeta s-o facă, ori considera că *încă* n-au suficiente dovezi observațional-experimentale, care să-i convingă de apartenența tematicii unuia sau altuia din domenii la cercetarea prin fizică. Nu se poate trece cu vederea faptul că un număr important de fizicieni *cu* înaltă pregătire teoretică din SUA, Marea Britanie, Franța, Germania, Rusia etc. sunt implicați în cercetări care vizează (R_7) și (R_8), ori au îmbogățit *literatura celor două domenii pomenite*, prin sinteze, monografii, ipoteze, concepte etc, de care limbajul TRR/TRS nu este străin, cum la fel metodologia de analiză, sinteză, modelare, investigare etc. specifice fizicii în general și celei teoretice în special.

(R_{10}) Trebuie să specificăm faptul că, în domeniile specificate în (R_0) și (R_1)→(R_8), *rareori*, se face *precizarea preluărilor* din TRR/TRS ori TRG a unor noțiuni, concepte și/sau elemente de limbaj științific specific fizicii, ori a unor modele, procedee și metode de investigație ale fizicii teoretice în general și ale celei relativiste în special. Este principalul motiv pentru care ne-am permis scrierea paragrafului 3.19 (de față), ca și includerea lui în cadrul cursului nostru de FT.

3.20 Considerații generale și procedurale asupra dinamicii relativiste cuadrivectoriale a punctului material

3.20.0 Obiectul de studiu al dinamicii nerelativiste a punctului material

Ca și în cinematica clasică, precizată în cap. IV (paragraful 3.7 secv. 3.17.0.1), obiectul de studiu al dinamicii nerelativiste a mecanicii clasice este tot *mișcarea mecanică*, dar *explicată cauzal prin interacțiunea mecanică* dintre sistemele mecanice, *interacțiune măsurată prin mărimea fizică forță* ($\vec{F}$). Fundamental, explicarea cauzală dinamică a mișcării se bazează pe *legea acțiunii forței* [enunțată ca *lex secunda* în "Phylosophiae Naturalis Principia Mathematica" din 1687 a lui Isaac Newton], *exprimată matematic* prin: (3.150) $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$, cu *impulsul mecanic* (3.151) $\vec{p}=m\vec{v}$, în care *masa de mișcare* m este independentă de viteză [cum s-a arătat în *Partea a 2^a^* a cursului de FT în cap.III (paragraf. 2.15, secv. 2.15.4.3), v. "Elemente de fizică teoretică"(I), Editura Universității din București, 1998, ref.106].

3.20.1 Mărimile fizice dinamice ce intervin în legea acțiunii forței

Conform (3.150) și (3.151), explicația cauzală dinamică a mișcării mecanice este dată cu ajutorul *mărimilor fizice dinamice*: *masa de mișcare* (m), *impulsul mecanic* ($\vec{p}$) și *forța ce determină mișcarea* ($\vec{F}$), în cadrul interpretărilor fizico-matematice intervenind și *mărimi fizice cinematice* [vectorul de poziție ($\vec{r}$), viteza ($\vec{v}$), accelerația ($\vec{a}$), durata (Δt) etc].

3.20.2 Obiectul de studiu al dinamicii relativiste cuadrivectoriale

Ca parte a *mecanicii teoretice relativiste*, dinamica relativistă are același obiect de studiu ca și cea nerelativistă, explicând cauzal dinamic mișcarea mecanică relativistă prin *mărimile fizice dinamice cuadrivectoriale relativiste* (cuadriimpulsul $\mathcal{P}$, cuadriforța $\mathcal{F}$, în principal), conform *legii fundamentale a acțiunii cuadriforței* ($\mathcal{F}$) exprimată prin variația cuadriimpulsului $\mathcal{P}$ în raport cu *timpul* (durata) *proprie elementară* $d\tau$, respectiv cu timpul (durata) cinematică elementară dt. Astfel, *generalitatea relativistă a legii fundamentale a dinamicii newtoniene* este respectată formal prin relația matematică cuadrivectorială:

(3.152) $\mathcal{F}=\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$, care generalizează relativist forma vectorială (3.150) prin *substituirea vectorilor cu cuadrivectorii corespunzători*, și *a duratei elementare clasice* dt *cu durata proprie relativistă* (3.153) $d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$, exprimată prin *durata cinematică* dt.

3.20.3 Procedura de elaborare a dinamicii relativiste cuadridimensionale

Dinamica relativistă fiind, *formal*, asemănătoare cu cea nerelativistă, se va obține *formal* prin: (e_1) *marcarea cadrului noțional-conceptual relativist* fixat prin etapele (a)-(c) din secvența 3.17.0.3; (e_2) *înlocuirea mărimilor fizice vectoriale dinamice tridimensionale* ($\vec{p}$, $\vec{F}$ etc.) *prin mărimile fizice cuadrivectoriale corespondente* ($\mathcal{P}$,$\mathcal{F}$ etc.) care se transformă în sens Lorentz (3.61) în trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' [sau $(RI)_0 \leftrightarrows$ RI, $(RI)_0$ referențialul propriu]; (e_3) *obținerea mărimii fizice cuadrivectoriale* $\mathcal{P}$ (*cuadriimpulsul*) prin explicitarea componentelor sale scalare ($\{p_j\}$, $j=\overline{1,4}$); (e_4) *scrierea formală a legii fundamentale a dinamicii relativiste* (3.152) generalizând formal (3.150) însoțită de *explicitarea componentelor scalare* ($\{F_j\}$ ($j=\overline{1,4}$)) *ale cuadrivectorului forță* (ale cuadriforței) $\mathcal{F}$; (e_5) rezolvarea relativistă a problemei $m=m(v^2)$ a variației masei de mișcare (cinematice) cu viteza [simultană cu obținerea impulsului relativist vectorial ($\vec{p}_r$)]; (e_6) *elaborarea problemei relativiste a energiei mecanice*, echivalent *problema energiilor relativiste*: totală ($W_t^{(r)}$), de repaus ($W_0^{(r)}$), cinetică ($W_{cin}^{(r)}$), inclusiv *variația relativistă a masei prin variația de energie* (ca relația Einstein cea mai verificată experimental).

3.20.4 Precizări ca detalii procedurale și metodologice în 3.20.3

(d_1) Etapa (e_1) a fost deja elaborată în secvența 3.17.0.3 și va fi considerată ca atare.

(d_2) Etapa (e_2) furnizează *enumerarea* cuadrivectorilor dinamici fundamentali ($\mathcal{P}$ și $\mathcal{F}$), care vor fi introduși și explicitați prin componentele lor scalare în etapele (e_3), respectiv (e_4).

(d_3) Etapa (e_3) *de obținere explicită a componentelor scalare* $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ *ale cuadrivectorului impuls* ($\mathcal{P}$) este o *etapă esențială* a întregului cap.V, deoarece conține în formă implicită și etapele (e_5) și (e_6) [în principal ca etapă a obținerii energiei relativiste totale ($W_t^{(r)}$)], cuadrivectorul $\mathcal{P}$ *mai fiind numit și cuadrivectorul energie-impuls*.

(d_4) *Obținerea explicită a componentelor* $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale $\mathcal{P}$ se va face apelând la formalismele analitice Lagrange, Hamilton și Hamilton-Jacobi, a căror valabilitate relativistă este dată de posibilitatea obținerii unei funcții analitice Lagrange invariantă față de transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61) cu care se poate scrie *conceptul Hamilton de acțiune* $S_{1\to2}$ *a mișcării*:

(3.154) $S_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}dt$, transformată în *funcție analitică* $S(\{q_k\},t)$ prin fixarea limitelor t_1 la o valoare t_0 și considerarea limitei t_2 ca variabilă t, pentru a putea *utiliza relația dintre* $S(\{q_k\},t)$ și *impulsurile generalizate* $\{p_k\}$ (3.155) $p_k=\dfrac{\partial S}{\partial q_k}$ $(k=\overline{1,g})$, la explicitarea efectivă a componentelor scalare ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))$. În (3.154) $\mathcal{L}$ este funcția analitică Lagrange (f.a.$\mathcal{L}$), a cărei dependență $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\{q_k,\dot{q}_k\},t)$ de coordonatele generalizate $\{q_k\}$ și de vitezele generalizate $\{\dot{q}_k\}$ $(k=\overline{1,g})$ pentru un sistem cu g grade de libertate, *în cazul punctului material* (particulei relativiste) *liber*, permite o dependență (3.156) $S=\int_{t_0}^{t}\mathcal{L}dt\equiv S(\{q_k\},t)$, simplificată la maxim ca (3.157) $S^{(r)}=S(\{x_j\}, \ j=\overline{1,4})$, ca dependență relativistă *formală* de coordonatele evenimentului relativist $e_t\equiv(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,z,y,ict)$.

(d_5) Pentru a putea explica (3.155) prin (3.157), va fi necesară cunoașterea f.a.$\mathcal{L}$ *relativistă proprie (de repaus)* $\mathcal{L}_r^{(0)}$ și a f.a.$\mathcal{L}$ *relativistă cinematică* $\mathcal{L}_r$ ale punctului material liber, ca expresii raportate la referențialul inerțial propriu $(RI)_0$, respectiv la cel nepropriu RI, luând în considerare trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$ (v. fig. 3.3(b)).

(d_6) Cunoașterea explicită a f.a.$\mathcal{L}_r^{(0)}$ și a f.a.$\mathcal{L}_r$ va permite scrierea *acțiunii Hamilton relativiste proprii*

(3.158) (a) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0=\int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{L}_r^{(0)}d\tau$, respectiv a celei *relativiste cinematice*

(3.158) (b) $S^{(r)}{}_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}_r dt$, conforme cu definiția fizico-matematică (3.154) și cu notația τ pentru timpul propriu, respectiv t pentru timpul cinematic [prin utilizarea relației $d\tau=dt\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}$ dintre τ și t].

(d_7) Explicitarea efectivă a lui $\mathcal{L}_r^{(0)}$ necesară în $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ se va face prin aplicarea *principiului variațional Hamilton* (PVH) *acțiunii* (3.158) (a) și (b), însoțită de *aplicarea principiului de corespondență* (PdC) [așa PVH devenind PVHR, adică relativist].

(d_8) După obținerea explicită a lui $\mathcal{L}_r^{(0)}$ ca $\mathcal{L}_r^{(0)}=-m_0c^2$ (cu m_0 *masa de repaus* (masa proprie) a punctului material), aplicarea relației (3.155) cu S de tipul (3.157), va necesita utilizarea invariantului relativist (3.115) $I_u = \sum_{j=1}^{4} u_j^2 = -c^2$, pentru a introduce în $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ dat de (3.158)(a) componentele scalare ale cuadrivitezei $\{u_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) prin intermediul lui $(-c^2)$ din $\mathcal{L}_r^{(0)}$ (3.159).

(d_9) Prin explicitarea componentelor scalare $\{p_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale lui $\mathcal{P}(\{p_j\})$ se vor rezolva implicit problema impulsului vectorial relativist, *problema relativistă* $m=m(v^2)$, ca şi *problema energiei relativiste totale* $W_t^{(r)}$, ultimele două rezolvări trebuind reconfirmate ulterior prin *definiţiile analitice ale masei de mişcare* (3.160) $m=\dfrac{1}{2\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial(p^2)}}$, respectiv *a energiei mecanice totale* (3.161) $E_{tot} \equiv \mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$, ca acea funcţie analitică Hamilton ce nu depinde explicit de parametrul t. În figura 3.12 setul de detalii $\{d_i\}$ este utilizat în ilustrarea structurii rezolvării *problemei metodologice fundamentale a dinamicii relativiste* (p.m.f.d.r).

3.20.5 Asupra cuadrivectorilor dinamici fundamentali $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{F}$ prin legea (3.152) a acţiunii cuadriforţei. Problema metodologică fundamentală a dinamicii relativiste (p.m.f.d.r)

Conform celor afirmate până aici, întreaga *dinamică relativistă*, ca parte a mecanicii relativiste [cu modelul său teoretic mecanic relativist (MTR) şi teoria corespunzătoare lui], se bazează pe introducerea şi explicitarea *cuadrivectorului impuls* $\mathcal{P}$ şi a *cuadrivectorului forţă* $\mathcal{F}$, cu care *legea fundamentală cuadrivectorială a dinamicii relativiste* (a mişcării punctului material) (3.152), generalizând legea vectorială (3.150), va putea fi descompusă în 4 ecuaţii scalare legând componentele scalare $\{p_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale lui $\mathcal{P}$ de componentele scalare $\{F_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale lui $\mathcal{F}$. Astfel, *obţinerea explicită a lui* $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))\equiv\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ *se transformă în problema metodologică fundamentală a dinamicii relativiste* (p.m.f.d.r.).

Cum se va vedea când vom avea explicite componentele scalare $\{p_j\}$, respectiv $\{F_j\}$ ($j=\overline{1,4}$), cei doi cuadrivectori $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{F}$ satisfac condiţia generală de cuadrivector dată prin legea (3.100), deoarece componentele lor scalare se transformă în sens Lorentz (după TrLGenerale cu cazul lor particular TrLSpeciale (3.61)). De aceea, este necesară *definiţia cuadrivectorului dinamic*:<Numim *cuadrivector dinamic*, cuadrivectorul ce reprezintă orice mărime fizică dinamică, de patru componente scalare ce se transformă în sens Lorentz (3.100)>.

În figura 3.12, p.m.f.d.r apare ca bază de plecare în cele *patru probleme dinamice relativiste* pe care p.m.f.d.r odată soluţionată le soluţionează la rândul ei: (I) *problema impulsului relativist* $\vec{p}_r$; (II) *problema dependenţei relativiste* $m(v^2)$; (III) *problema energiilor relativiste* (în principal $W_t^{(r)}$), respectiv (IV) *problema variaţiei lui* $\mathcal{P}$ *în raport cu timpul,* care dă tocmai *legea fundamentală a dinamicii relativiste cuadrivectoriale.*

Principiile PRE, PVHR şi PdC de pe linia de start din figura 3.12 contribuie pe rând la: *impunerea invariantului Lorentz* care trebuie să fie *funcţia analitică Lagrange proprie* ($\mathcal{L}_r^{(0)}$), efectuarea prin PVH a *variaţiei acţiunii Hamilton relativiste atât proprie cât şi cinematică,* simultană unei dezvoltări în serie de puteri a lui $(1-v_T^2/c^2)^{1/2}$ urmată de aplicarea PdC acesteia, totul pentru a explicita expresia invariantului $\mathcal{L}_r^{(0)}$, inclusiv prin introducerea masei proprii (de repaus) m_0 ca o limită a unei dependenţe încă neexplicitate. La obţinerea relaţiei (3.184), ce dă componentele scalare $\{p_j\}$ ale cuadrivectorului $\mathcal{P}$ prin componentele cuadrivitezei concurează, conform figurii 3.12, *formalismul analitic Hamilton-Jacobi* (FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$) prin furnizarea f.a.S şi a relaţiei ei cu impulsurile generalizate ca model pentru $S^{(r)}(\{x_j\})$ şi $\{p_j\}$, respectiv *formalismul analitic relativist* dezvoltat prin acţiunea Hamilton relativistă proprie, apelând la invariantul relativist (3.115) construit din componentele $\{u_j\}$ ale cuadrivitezei.

Ambele formalisme obţin *diferenţiala* f.a.$S^{(r)}$ *cuadridimensională,* unul prin componentele $\{p_j\}$($j=\overline{1,4}$), celălalt prin produsul $\{m_0u_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) a *masei de repaus* sau a *masei proprii* m_0 a punctului material relativist cu componentele $\{u_j\}$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$, şi în final, *explicitarea fundamentală* (3.184) $p_j=m_0u_j$ ($j=\overline{1,4}$) a componentelor scalare ale cuadrivectorului $\mathcal{P}(\{p_j\})$.

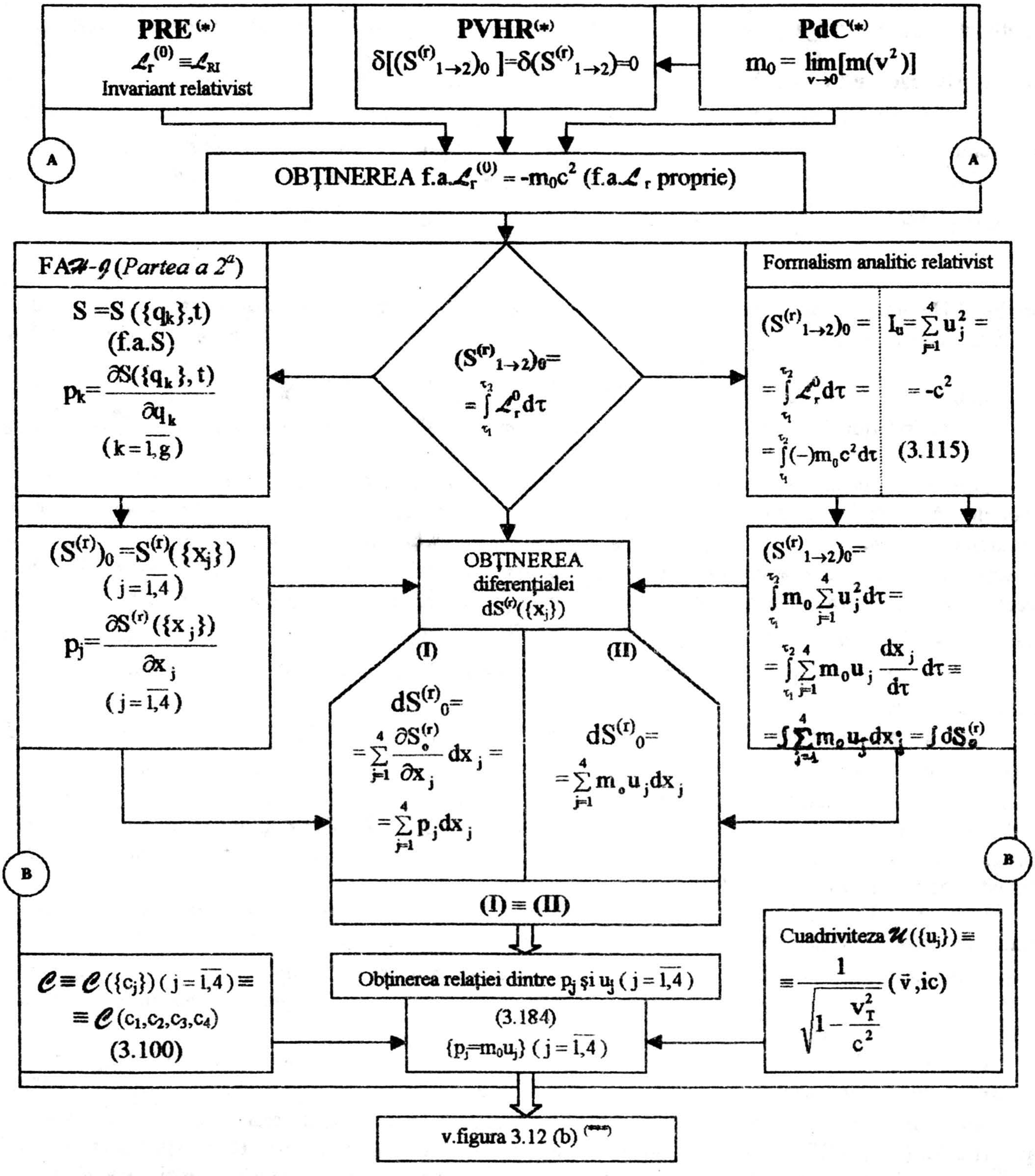


Figura 3.12 (a) *Diagrama rezolvării <problemei metodologice fundamentale a dinamicii relativiste* **(p.m.f.d.r)>** ≡ <*obținerea explicită a componentelor cuadriimpulsului*> **şi a consecinţelor sale [(I) $\vec{p}_r$; (II) $m(v^2)$; (III) $W_t^{(r)}$; (IV) $d\mathcal{P}/d\tau=\mathcal{F}$]**

(*) Pentru PRE, PVHR şi PdC, vezi lista de abrevieri!

(**) A, B şi C [v. şi (**) C din fig. 3.12 (b)] desemnează cele trei mari "blocuri" ale structurii rezolvării p.m.f.d.r:(A) ***obținerea funcției Lagrange relativiste proprii*** (de repaus) $\mathcal{L}_r^{(0)}$ a mişcării punctului material relativist [raportată la $(RI)_0$ propriu]; (B) ***obținerea relației dintre componentele scalare*** $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ***ale cuadriimpulsului*** $\mathcal{P}$ ***şi produsul masei proprii*** (de repaus) m_0 cu componentele $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}(\{u_j\})$.

(***) Vezi figura 3.12(b) pentru "blocul" C al rezolvării p.m.f.d.r.!

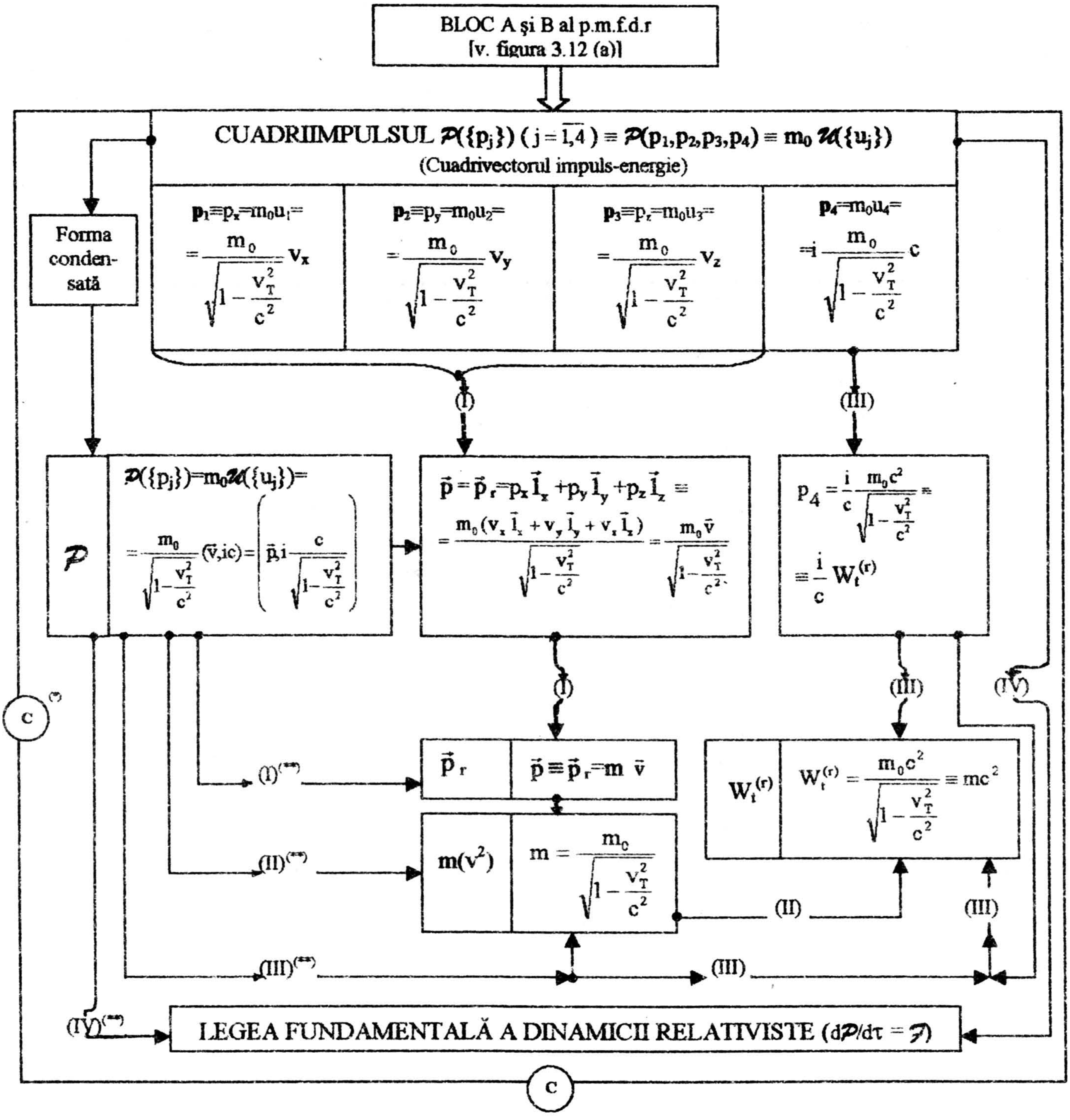


Figura 3.12 (b) *Diagrama rezolvării <problemei metodologice fundamentale a dinamicii relativiste* (p.m.f.d.r)> **[continuare din figura 3.12 (a)] <*Cuadriimpulsul* $\mathcal{P}(\{p_j\}$ ca "blocul" C al rezolvării p.m.f.d.r şi al consecinţelor sale [(I) $\vec{p}_r$; (II) $m(v^2)$; (III) $W_t^{(r)}$; (IV) $d\mathcal{P}/d\tau = \mathcal{F}$]**

(*) Întreaga figură 3.12 (b) este o *continuare directă* a figurii 3.12(a), fapt marcat prin notarea/marcarea C a "blocului" al 3lea al structurii rezolvării p.m.f.d.r determinat de cunoaşterea explicită a lui $\mathcal{P}$.

(**) Notaţia (I), (II), (III) şi (IV) corespunde rezolvării celor patru probleme TRR/TRS dinamice, pe care le permite rezolvarea p.m.f.d.r drept consecinţe directe:problema impulsului relativist tridimensional (vectorul $\vec{p}_r$), problema variaţiei masei de mişcare cu viteza ($m(v^2)$), problema energiei relativiste totale ($W_t^{(r)}$), respectiv problema variaţiei în timp a cuadriimpulsului (care conduce la legea fundamentală a dinamicii relativiste).

Conform observației (**), ce însoțește explicarea figurii 3.12, și evident prin simpla analiză a structurii figurii în trei părți A, B și C se poate trage concluzia ca *diagrama dată* reprezintă o sinteză totală a cap. V [lipsind doar detalii legate de explicitarea după componente a cuadriforței $\mathcal{F}$, respectiv enunțuri și aplicații speciale, ce n-au cum să fie însemnate pe figura 3.12 (din motive de încărcare a ei) și *verificările* prin definițiile analitice pentru $m(v^2)$ respectiv $W_t^{(r)}$ desfășurate în cadrul capitolului de față], fapt ce va fi demonstrat în cele ce urmează.

3.21 Problema metodologică fundamentală a dinamicii relativiste ≡ obținerea explicită a componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}$

3.21.0 Precizare procedurală sintetică. Despre funcția Lagrange relativistă

Toate considerațiile generale și procedurale asupra dinamicii relativiste a punctului material făcute în paragraful precedent conduc spre *concluzia metodologic procedurală că*: (I) *obținerea explicită a componentelor scalare* $\{p_j\}$ *ale cuadriimpulsului* $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ *este o problemă fundamentală în elaborarea dinamicii relativiste*, care atrage după sine (II) *rezolvarea problemelor relativiste ale*: (II_1) *impulsului vectorial relativist* $\vec{p}_r$; (II_2) *variației masei de mișcare (cinematice) cu viteza* $m(v^2)$ și (II_3) *energiei relativiste totale* $W_t^{(r)}$, cerând (III) o *formulare relativist-restrânsă a legilor fizicii*, și, în particular, a legilor mecanicii, inclusiv a legilor dinamicii. Pentru a rezolva *problema metodologică fundamentală a dinamicii relativiste* (p.m.f.d.r), după cum arată figura 3.12(a), se va apela la formalismele analitice Lagrange (FA$\mathcal{L}$), Hamilton (FA$\mathcal{H}$) și Hamilton-Jacobi (FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$) din *mecanica analitică* [v. *Partea a 2^a* a cursului de FT, ref. 106, "Elemente de fizică teoretică (I)", Ed. Universității din București, 1998], a cărei *valabilitate relativistă* poate fi probată prin găsirea unei forme concrete explicite relativist a funcției Lagrange (f.a.$\mathcal{L}_r$), care să fie *invariantă* față de transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61) și care să permită scrierea acțiunii Hamilton $S^{(r)}{}_{1\to2}$ relativiste și funcționarea algoritmului de obținere a componentelor $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale lui $\mathcal{P}$, algoritm marcat prin relațiile (3.154)-(3.159), în care vor interveni principiile elaboratoare de fizică teoretică (PVH ca PVH relativist, PRE și PdC), după cum indică "blocurile" algoritmic structurale A și B din figura 3.12 (a) pentru desemnata problemă (I) aparținătoare de p.m.f.d.r. Celelalte probleme desemnate prin ($II_{1,2,3}$) respectiv (III) aparțin "blocului" algoritmic structural C, ilustrat în figura 3.12(b) care continuă figura 3.12(a).

3.21.1 Funcția analitică Lagrange relativistă a punctului material liber prin acțiunea Hamilton relativistă a mișcării punctului material

3.21.1.1 Acțiunea Hamilton relativistă proprie/de repaus $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ a punctului material liber

Luând în considerare referențialul inerțial propriu $(RI)_0$ al punctului material liber, definiția generală (3.154) a acțiunii Hamilton a mișcării rectilinii și uniforme (MRU) a punctului material devine *acțiunea Hamilton proprie*:

(3.157) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}_r^{(0)} d\tau$, cu integrala în raport cu *timpul propriu* τ, considerată între *două* momente proprii τ_1 și τ_2 $(\tau_2 > \tau_1)$ și cu $d\tau$ *timpul propriu elementar*.

3.21.1.2 Despre funcția analitică Lagrange relativistă proprie/de repaus $\mathcal{L}_r^{(0)}$

În (3.157), acțiunea Hamilton proprie este definită prin $\mathcal{L}_r^{(0)}$ ca *funcția analitică Lagrange proprie* (de repaus). Deoarece punctul material este liber, iar $(RI)_0$ propriu este legat solidar de el (ca referențial propriu), $\mathcal{L}_r^{(0)}$ *trebuie să fie o constantă*, deoarece prin acțiunea PRE $\mathcal{L}_r^{(0)}$ este invariantă față de TrLS (3.61), *ca toate mărimile fizice proprii* (cum s-a specificat în cap. III și IV asupra invarianților cinematici reprezentați de mărimile fizice proprii). Avem astfel, rezultatul (3.162) $\mathcal{L}_r^{(0)}$ =constant, în care *constanta*

va fi determinată în cele ce urmează prin *aplicarea* PVH *acțiunii Hamilton relativiste cinematice* $(S^{(r)}{}_{1\to2})$ **(3.158), însoțită de aplicarea PdC, după ce f.a.**$\mathcal{L}_r$ ***cinematică a punctului material liber*** **va fi detaliată prin f.a.**$\mathcal{L}_r{}^{(0)}$ **proprie.**

3.21.1.3 Acțiunea Hamilton relativistă cinematică a mișcării punctului material liber $(S^{(r)}{}_{1\to2})$

Raportarea acțiunii Hamilton la orice alt referențial RI, altul decât cel propriu $(RI)_0$, conduce la scrierea *acțiunii Hamilton relativiste cinematice*:

(3.158) $S^{(r)}{}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt$, scrisă între două momente de timp cinematice t_1 și t_2 $(t_2>t_1)$ ale mișcării relativiste, cu dt *timpul cinematic elementar* și $\mathcal{L}_r$ *funcția analitică Lagrange relativistă cinematică.*

3.21.1.4 Invarianța acțiunii Hamilton relativiste a mișcării punctului material liber $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$. Funcția analitică Lagrange relativistă cinematică $\mathcal{L}_r$

În (3.158), acțiunea Hamilton relativistă cinematică este definită prin f.a.Lagrange *relativistă cinematică* $\mathcal{L}_r$ *a punctului material liber*, funcție ce se poate detalia confruntând acțiunea proprie $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ din (3.157) cu $S^{(r)}{}_{1\to2}$ cinematică (3.157), prin utilizarea relației (3.153) $d\tau=(dt)\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$ ce leagă timpul elementar propriu $d\tau$ de cel cinematic dt, conform consecinței cinematice a TrLS (3.61) de dilatare a duratelor. Detalierea amintită rezultă prin:

(3.163) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L}_r^{(0)} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r^{(0)} \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\,dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt \equiv S^{(r)}{}_{1\to2}$, ca exprimare a aplicării PRE, care afirmă invarianța acțiunii Hamilton relativiste față de TrLS (3.61), atunci când se face raportarea la referențialele reciproce RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$. Identificarea termenilor de sub integralele cu limitele t_1 și t_2 conduce la:

(3.164) $\mathcal{L}_r \equiv (\mathcal{L}_r)_{RI} = (\mathcal{L}_r)_{(RI)_0} \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} \equiv \mathcal{L}_r^{(0)} \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$, ca expresie generală a f.a.Lagrange *relativistă a punctului material liber* luat în considerare.

3.21.1.5 Obținerea f.a.$\mathcal{L}_r{}^{(0)}$ proprie complet explicită. Aplicarea PVH și PdC

(a) *Dezvoltarea în serie a radicalului din* (3.164) permite utilizarea aproximației

(3.165) $\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} \cong 1-\frac{1}{2}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2+\ldots$, cu neglijarea termenilor $(v_T/c)^n$ cu $n>2$, valabilă deoarece $v_T/c<1$.

(b) Cu (3.165) în (3.164), f.a.$\mathcal{L}_r$ cinematică aproximativă:

(3.166) $\mathcal{L}_r \cong \mathcal{L}_r^{(0)} - \frac{1}{2}\mathcal{L}_r^{(0)}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2$, rescrie (3.158) în forma:

(3.167) $S^{(r)}{}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt \cong \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r^{(0)} dt - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \mathcal{L}_r^{(0)} dt + \ldots$

(c) *Generalitatea principiului variațional Hamilton* **(PVH) fiind asigurată și relativist, aplicarea principiului asupra acțiunii Hamilton relativiste cinematice (3.167) conduce la scrierea** *variației nule*:

(3.168) $\delta\, S^{(r)}{}_{1\to 2} \cong \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r^{(0)} dt - \delta\left[\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \mathcal{L}_r^{(0)} dt\right]$, în care primul termen al membrului doi al egalității este nul, conform relației (3.162), când semnul δ pătrunde sub integrală și când se ține cont că la limitele de integrare variațiile sunt nule.

(d) *Aplicarea principiului de corespondență* (PdC) termenului rămas din (3.168) trebuie să conducă la *obținerea unei expresii clasice nerelativiste* sub integrala relativistă:

(3.169) $\delta\, S^{(r)}{}_{1\to 2} \cong \delta\left[\int_{t_1}^{t_2}(-)\frac{1}{2}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \mathcal{L}_r^{(0)} dt\right]$, atunci când se trece la limita nerelativistă, făcând $v_T/c \to 0$ (limita vitezelor mici).

(e) *Afirmația* (d) *se scrie ca o limită*:

(3.170) $\delta\, S^{(r)}{}_{1\to 2} \underset{(v_T \ll c)}{\overset{\frac{v_T}{c}\to 0}{\longrightarrow}} \delta\, S_{1\to 2} \cong \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_{\text{nerelativist}} dt \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{m_0 v_T^2}{2} dt$ prin explicitarea f.a.$\mathcal{L}$ nerelativiste a punctului material liber ca energia sa cinetică.

(f) *Confruntarea dintre* (3.169) și (3.170) duce la identificarea:

(3.171) $-\frac{1}{2}\left(\frac{v_T}{c}\right)^2 \mathcal{L}_r^{(0)} \equiv \frac{m_0 v_T^2}{2}$, în care m_0 ca masă de mișcare în mecanica nerelativistă nu poate depinde de viteza punctului material, fiind constantă.

(g) *Cu notația* (3.172) $m_0 = \lim_{v_T\to 0} m(v_T^2) \equiv \lim_{v\to 0} m(v^2) \equiv m_{(RI)_0}$, adică masa proprie (de repaus), ca masa măsurată în referențialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ al punctului material liber, din (3.171) rezultă:

(3.173) $(\mathcal{L}_r)_{(RI)_0} \equiv \mathcal{L}_r^{(0)} = -m_0c^2 = \text{const.}$,adică avem tocmai explicitarea fizico-matematică a constantei din (3.162) dând f.a.$\mathcal{L}_r^{(0)}$ ca f.a.Lagrange *proprie*, raportată la referențialul propriu $(RI)_0$.

3.21.1.6 F.a.$\mathcal{L}_r$ cinematică complet explicită a punctului material liber

Dacă rezultatul foarte important (3.173) este introdus în f.a.$\mathcal{L}_r$ cinematică (3.164), atunci $\mathcal{L}_r$ *cinematică are forma* complet explicitată:

(3.174) $(\mathcal{L}_r)_{RI} \equiv \mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r^{(0)} \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} \equiv -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$, exprimată prin *masa proprie* (de repaus) m_0 a punctului material liber, *definită matematic prin* (3.172), prin $v_T \equiv v$ viteza mișcării puntului material liber legat solidar de $(RI)_0$ propriu și prin constanta universală c.

3.21.2 Masa proprie/masa de repaus a punctului material relativist

(a) Trebuie remarcat faptul că expresiile explicite (3.173) și (3.174) ale f.a.Lagrange *relativistă proprie*, respectiv *cinematică depind explicit de masa proprie* m_0, ca *masa proprie* (de repaus) a punctului material liber, definită matematic, prin (3.172), ca *limita clasică* a *masei de mișcare* (cinematice) $m = m(v_T^2) \equiv m(v^2)$, cu dependența de viteză de obținut, în cele ce urmează, ca o consecință dinamică a TrLS (3.61).

(b) *Definiție*. Numim *masa proprie* sau *masă de repaus* a punctului material relativist *masa măsurată în raport cu* referențialul propriu $(RI)_0$ al punctului material.

(c) *Observație*. Masa cinematică (de mișcare) a punctului material relativist va fi definită prin raportarea masei la un $RI \neq (RI)_0$ și *va trebui să reflecte în expresia ei dependența de viteza punctului material* [ca o consecință dinamică a TrLS (3.61)], respectiv *va trebui să satisfacă* PdC *din* TRR/TRS *implicat în definiția matematică* (3.172).

(d) *Masa proprie* (de repaus) m_0 *prin definiția* (b) *reprezintă un invariant relativist,* fapt utilizat și în (3.172), când s-a ținut cont că, la limita nerelativistă, constanța masei cu viteza este o consecință a transformărilor Galilei din mecanica clasică, iar, relativist, TrLS (3.61) trebuie să reflecte această aproximaţie respectând PdC din TRR/TRS.

(e) *Problema efectivă a masei cinematice* (de mişcare) ca $m=m(v^2)$ va fi abordată în cadrul explicitării componentelor $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$, respectiv după obţinerea explicită a f.a.$\mathcal{H}_r$ ca *funcţia analitică Hamilton relativistă cinematică* a punctului material liber.

(f) *Acţiunea Hamilton relativistă cinematică* (3.158) devine, prin (3.174),

(3.175) $S^{(r)}{}_{1\to 2} = -m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}dt$, prin masa proprie (de repaus) m_0 definită matematic în (3.172).

3.21.3 Acţiunea Hamilton relativistă proprie $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ a punctului material liber

3.21.3.1 $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ prin $\mathcal{L}_r^{(0)}$ (3.173)

Introducând în (3.157) f.a.$\mathcal{L}_r^{(0)}$ proprie explicitată prin (3.173), rezultă *expresia complet explicitată*:

(3.176) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{L}_r^0 d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}(-)m_0c^2d\tau$, a *acţiunii Hamilton relativiste proprii*, expresie care prin introducerea în locul lui $(-c^2)$ a invariantului (3.115) $I_u=\sum_{j=1}^{4}u_j^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2=-c^2$, va servi la utilizarea relaţiilor (3.155) ce leagă acţiunea $S(\{q_i\},t)$ de impulsurile generalizate $\{p_i\}$ $(i=\overline{1,g})$, în vederea obţinerii *componentelor scalare* $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ *ale cuadriimpulsului* $\mathcal{P}$, după ce vor fi utilizate şi definiţiile (3.109) ale componentelor cuadrivitezei $\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

3.21.3.2 $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0$ prin componentele $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului de poziţie $\mathcal{R}$(3.101) şi prin componentele $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$(3.109)

Înlocuind (3.115) în (3.175), avem:

(3.177) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\sum_{j=1}^{4}m_0u_j^2\right)d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{j=1}^{4}m_0\left(\frac{dx_j}{d\tau}\right)^2d\tau$, dacă se utilizează şi definiţiile (3.109) ale componentelor scalare ale cuadrivectorului viteză $\mathcal{U}$.

Relaţia (3.177) se rescrie, prin (3.109), ce dă definiţia componentelor $\{u_j\}$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$:

(3.178) $(S^{(r)}{}_{1\to2})_0 = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{j=1}^{4}m_0\frac{dx_j}{d\tau}dx_j = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\sum_{j=1}^{4}m_0u_jdx_j = \int_{\tau_1}^{\tau_2}dS_0^{(r)}$.

Din (3.178), avem diferenţiala (3.179) $dS_0^{(r)} = \sum_{j=1}^{4}m_0u_jdx_j$, exprimată prin masa de repaus m_0 (3.172) prin componentele $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ (3.109) ale cuadrivectorului viteză $\mathcal{U}$ şi prin diferenţialele $\{dx_j\}$ ale componentelor $\{x_j\}$ ale cuadrivectorului de poziţie $\mathcal{R}$(3.101) al punctului material relativist.

3.21.4 Obţinerea generală a componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$

3.21.4.1 Precizare metodologică

Din formalismul analitic Hamilton-Jacobi (v. P. a 2ª a cursului de FT, cap. V, paragraful 2.28, ref. 106), relaţiile ce leagă impulsurile generalizate $\{p_i\}$ $(i=\overline{1,g})$ de acţiunea Hamilton ca funcţie analitică f.a.$S(\{q_i\},t)$ sunt:

(3.155) $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ ($i = \overline{1,g}$), în cazul unui sistem cu g grade de libertate.

În cazul punctului material relativist liber, f.a.S are o dependență mult mai simplă:

(3.180) $S_0^{(r)} = S_0^{(r)}(\{x_j\};\ j = \overline{1,4}) \equiv S_0^{(r)}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv S^{(r)}(x,y,z,ict)$.

Generalizarea relativistă formală a relației (3.155) ca:

(3.181) $p_j = \dfrac{\partial S_0^{(r)}}{\partial x_j}$ ($j = \overline{1,4}$) va permite explicitarea componentelor scalare $\{p_j\}$ ($j = \overline{1,4}$) ale cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ prin confruntarea diferențialei (3.179) cu diferențiala relației (3.180).

3.21.4.2 Diferențiala f.a.$S^{(r)}$ (3.180)

Funcția analitică acțiune Hamilton relativistă, elaborată în sensul (3.180), conformă cu formalismul analitic Hamilton-Jacobi, permite diferențiala

(3.182) $dS_0^{(r)} = \sum\limits_{j=1}^{4} \dfrac{\partial S^{(r)}}{\partial x_j} dx_j = \sum\limits_{j=1}^{4} p_j dx_j$, prin (3.181).

3.21.4.3 Confruntarea diferențialelor $dS_0^{(r)}$ din (3.179) și (3.182). Definiția matematică explicită a componentelor scalare $\{p_j\}$ ($j = \overline{1,4}$) ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}$

Identitatea evidentă dintre relațiile (3.179) și (3.182) permite egalitatea: (3.183) $p_j = m_0 u_j$ ($j = \overline{1,4}$) ca relație de *definiție matematică a componentelor scalare* (p_1,p_2,p_3,p_4) ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}$ al punctului material liber, exprimate prin produsul dintre *masa proprie* (de repaus) m_0 (3.172) și componentele scalare (u_1,u_2,u_3,u_4) ale cuadrivitezei sale $\mathcal{U}$, definite prin (3.109). Relația de definiție (3.183) va permite explicitarea efectivă a componentelor scalare $\{p_j\}$ ale lui $\mathcal{P}$, după ce se va rescrie, prin

(3.184) $p_j = m_0 u_j \equiv m_0 \dfrac{dx_j}{d\tau}$ ($j = \overline{1,4}$) în funcție de componentele scalare $\{x_j\}$ ale cuadrivectorului de poziția $\mathcal{R}$ (3.101).

Global și implicit, cuadrivectorul $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ se poate defini prin $\mathcal{U}$ și $\mathcal{R}$ ca:

(3.185) $\mathcal{P} = m_0\mathcal{U} \equiv m_0 \dfrac{d\mathcal{R}}{d\tau}$, care păstrează evidența produsului dintre masa proprie (de repaus) m_0 a punctului material și cuadrivectorul $\mathcal{U}$, respectiv dintre m_0 și derivata întâia a cuadrivectorului de poziție $\mathcal{R}$ în raport cu timpul propriu τ.

3.21.5 Explicitarea componentelor $\{p_j\}$ ale lui $\mathcal{P}$

Utilizând relațiile de definiție (3.184), fie prin (3.111) ce dă componentele $\{u_j\}$ ale lui $\mathcal{U}$, fie prin $\{x_j\} \equiv (x,y,z,ict)$ componentele explicitate ale lui $\mathcal{R}$ la care trebuie adăugată (3.153) ce-l precizează pe $d\tau$ prin dt, se obțin componentele scalare explicitate ale lui $\mathcal{P}$:

(3.186) (a) $p_1 = m_0 u_1 = \dfrac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$; (b) $p_2 = m_0 u_2 = \dfrac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$; (c) $p_3 = m_0 u_3 = \dfrac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ și

(d) $p_4 = i \dfrac{m_0 c}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}} = \dfrac{i}{c} \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$.

Reprezentarea grafică a cuadriimpulsului $\mathcal{P}$ este ilustrată în figura 3.10, alături de ceilalți cuadrivectori mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$), în cazul mișcării rectilinii și uniform accelerate a punctului material relativist.

3.22 Cuadrivectorul impuls/cuadriimpulsul $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ și vectorul impuls tridimensional relativist $\vec{p}_r$. Rezolvarea explicită pe cale tridimensională prin $\mathcal{P}$ a problemei variației relativiste a masei de mișcare/cinematice cu viteza [$m=m(v^2)$]

3.22.0 Considerații generale

Modul în care au rezultat definițiile matematice (3.183) ale componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}$ în paragraful precedent arată *includerea invariantului relativist* m_0 *ca masa de repaus* (proprie) *a punctului material* pentru a înmulți scalar fiecare din componentele scalare $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului viteză $\mathcal{U}$, permițând o scriere formală de tip (3.185), care sugerează că impulsul tridimensional (3.151) $\vec{p}_r=m\vec{v}$ este inclus în $\mathcal{P}$ în așa fel încât *trebuie* să se pună în evidență *masa de mișcare/cinematică* m ca o dependență relativistă de viteză prin implicarea masei de repaus (proprii) m_0. Acest fapt va putea fi pus în evidență de scrierea condensată a cuadrivectorului $\mathcal{P}$ care va conține $\vec{p}_r$ ca impulsul tridimensional relativist

(3.187) $\vec{p}_r=p_1\vec{1}_x+p_2\vec{1}_y+p_3\vec{1}_z$, cu $\{p_k\}$ $(k=\overline{1,3})$ primele trei componente scalare ale lui $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ date de (3.186) (a)-(c) și $(\vec{1}_x,\vec{1}_y,\vec{1}_z)$ versorii axelor (Ox,Oy,Oz) din subspațiul real $\mathcal{S}_R$ al spațiului cuadridimensional Minkowski (3.188) $\mathcal{S}_M=\mathcal{S}_R\otimes\mathcal{S}_{ict}$. Impulsul tridimensional relativist (3.187), cum se va vedea, conține *rezolvarea implicită pe cale cuadridimensională a problemei relativiste* $m=m(v^2)$, *ca o consecință dinamică a* TrL Speciale (3.61).

3.22.1 Forma condensată a cuadriimpulsului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$

Detalierea dependenței implicite $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ prin explicitările (3.183) și (3.186) ale componentelor scalare permite scrierea formală:

$$(3.189)\quad \mathcal{P}(\{p_j\};j=\overline{1,4})\equiv\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)=m_0\mathcal{U}(u_1,u_2,u_3,u_4)=$$

$$=\mathcal{P}\left(\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)\equiv\left(\vec{p}_r,\frac{i}{c}\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right),\ \text{dacă}$$

se ține cont de *structura* (3.188) *a spațiului Minkowski* $\mathcal{S}_M$ (universul spațiu-timp), care se exprimă prin produsul tensorial $\otimes$ dintre subspațiul tridimensional real $\mathcal{S}_R$ și subspațiul unidimensional temporal $\mathcal{S}_{ict}$ reprezentat prin axa imaginară O_{ict}.

În forma finală condensată din (3.189) apare *impulsul tridimensional relativist* (3.187) explicitat ca:

$$(3.190)\quad \vec{p}_r=\frac{m_0v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\vec{1}_x+\frac{m_0v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\vec{1}_y+\frac{m_0v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\vec{1}_z=\frac{m_0\left(v_x\vec{1}_x+v_y\vec{1}_y+v_z\vec{1}_z\right)}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\equiv$$

$$\equiv\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\equiv m_0\frac{d\vec{r}}{d\tau}$$ (cu $d\tau$ dat prin (3.153) și $\vec{r}=x\vec{1}_x+y\vec{1}_y+z\vec{1}_z$), în care transformarea de tip Lorentz a componentelor (p_x,p_y,p_z) ale lui $\vec{p}_r$ este evidentă. Componenta scalară p_4 a lui $\mathcal{P}$, cea din

subspaţiul imaginar S_{ict} al S_M dată prin (3.186) (d) şi inclusă în (3.189) are *modulul* cu caracter de energie şi va fi cea care implică rezolvarea problemei energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$.

3.22.2 Impulsul tridimensional relativist $\vec{p}_r$ (3.190) şi rezolvarea problemei relativiste a dependenţei $m(v^2)$

Dacă se consideră valabilă relativist definiţia fizico-matematică (3.151) a impulsului tridimensional $\vec{p}_r$, atunci prin (3.190) avem:

(3.191) $\vec{p}_{relativist} \equiv \vec{p}_r = m\vec{v} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\vec{v} \equiv \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$, din care prin identificare avem:

(3.192) $m \equiv m(v_T^2) \equiv m(v^2) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, dacă $\vec{v}_T \equiv \vec{v}$, notând cu $\vec{v}$ viteza

oricărui punct material liber în raport cu acel RI care se mişcă cu $\vec{v}_{RI} \equiv -\vec{v}_T$ faţă de referenţialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ al punctului material considerat. Avem, astfel, dependenţa relativistă a *masei de mişcare* (a masei cinematice) *de viteză*:

(3.193) $m \equiv m(v^2) = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, rezultând conform (3.190)-(3.192) ca o *consecinţă dinamică a* TrL Speciale (3.61), după care se transformă componentele scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}$, conformă cu respectarea *definiţiei generale* (3.100) *a cuadrivectorului*. Trebuie specificat că relaţia (3.151) are valabilitate relativistă deoarece *legea de conservare a impulsului* punctului material liber *trebuie* să fie invariantă Lorentz în raport cu TrLS (3.61), această invarianţă impunând *consecinţa dinamică* $m(v^2)$ *a masei de mişcare*.

3.22.3 Masa relativistă a punctului material

3.22.3.0 Precizare noţional-conceptuală

Între consecinţele relativiste cele mai importante ale TrLS (3.61) din TRR/TRS ca teoria relativistă a *modelului teoretic relativist* (MTR), variaţia relativistă a masei de mişcare (cinematice) $m(v^2)$ exprimată mai general prin (3.192), contrazice teoretic şi experimental cel mai evident o comportare de tip clasică galileano-newtoniană a sistemelor mecanice în timpul mişcării. De aceea, alături de noţiunea de *impuls tridimensional relativist* $\vec{p}_r$ definit matematic prin (3.190) s-a încetăţenit în TRR/TRS şi noţiunea de *masă relativistă*.

3.22.3.1 Definiţia masei relativiste a punctului material

<Numim *masă relativistă* masa de mişcare a punctului material care variază cu viteza de mişcare>. Introducerea definiţiei de mai sus atrage atenţia că trebuie precizate condiţiile când masa de mişcare nu variază cu viteza, fapt ce solicită aplicarea *principiului de corespondenţă* (PdC). Apelând la PdC prin (3.193), se regăseşte *masa de repaus* m_0 definită matematic prin (3.172) făcând trecerea la limită $v \to 0$. De asemenea, cercetând dependenţa de raportul v/c a *masei relativiste* (3.193), rezultă că definiţia de mai sus are semnificaţie fizico-matematică aplicativă efectivă atunci când $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ are valori mici şi foarte mici, echivalent, atunci când v *este comparabilă cu* c, adică atunci când *mişcarea punctului material este relativistă*.

3.22.3.2 Asupra masei de repaus/proprie m_0 a punctului material prin (3.193)

Deoarece definiția matematică (3.172) se consideră prin presupunerea dependenței $m(v^2)$, ea nefiind decât implicită, abia prin explicitarea (3.193) a acestei dependențe ***masa de repaus*** **(masa proprie) m_0** ***a punctului material*** este complet *justificată fizico-matematic drept*:

(3.194) $m_0 = \lim_{v\to 0} m(v^2) \equiv \lim_{v\to 0} \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ **și se dovedește a putea fi definită pur fizic ca** ***masa punctului material măsurată în raport cu referențialul față de care punctul material este în repaus*****, adică măsurată în referențialul propriu $(RI)_0$ legat solidar de punctul material considerat.**

3.22.3.3 Alte implicații fizico-matematice ale variației relativiste $m(v^2)$ (3.193). Viteza c ca viteză maximă limită

Analizând dependența (3.193) rezultă și alte implicații ale variației relativiste a masei de mișcare (cinematice) cu viteza, precum:

(I_1) valoarea minimă a *masei relativiste ca masă de mișcare* (cinematică) este tocmai *masa de repaus* sau *masa proprie* m_0;

(I_2) *masa de mișcare* (cinematică) crește cu viteza și *tinde către infinit*, când $v \to c$ (viteza de propagare a undelor electromagnetice în spațiul liber/vidul electromagnetic);

(I_3) *dependența relativistă* $m(v^2)$ (3.193) permite interpretarea vitezei c *ca o viteză limită maximă* (viteza plafon), deoarece accelerarea nelimitată a mișcării punctului material ar duce și la creșterea nelimitată a masei de mișcare;

(I_4) posibilitatea accelerării este limitată prin *imposibilitatea depășirii vitezei* c [conform principiului invarianței vitezei maxime de propagare a interacțiunilor (PIVMPI)];

(I_5) masa relativistă (3.193) rămâne o mărime scalară și este independentă de accelerația punctului material.

3.22.3.4 Remarcă finală. Masa de mișcare (cinematică) (3.193) prin funcția analitică Hamilton relativistă $\mathcal{H}_r$ a punctului material liber

Justificarea fizico-matematică a dependenței (3.193) se va face pe baza definiției analitice (3.160) a masei de mișcare, de îndată ce funcția analitică Hamilton relativistă a punctului material liber va fi obținută explicit ca dependență $\mathcal{H}_r(p^2) \equiv \mathcal{H}_r(p_r^2)$. Alte aspecte dinamice legate de masa de mișcare vor fi obținute în paragraful dedicat legii relativiste a acțiunii cuadriforței $\mathcal{F}$ ca lege fundamentală a dinamicii relativiste.

3.23 Cuadrivectorul $\mathcal{P}$ (p_1,p_2,p_3,p_4) ca și cuadrivector impuls-energie. Rezolvarea implicită pe cale cuadrivectorială a problemei energiei relativiste totale $(W_t^{(r)})$ a punctului material liber

3.23.0 Considerații generale

Fără a ține cont de *definiția analitică a energiei mecanice totale a unui sistem fizic ca funcția analitică Hamilton a sistemului* ($\mathcal{H}$) *când nu depinde explicit de timp* (parametrul t) cu ajutorul componentei p_4 a cuadriimpulsului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ definită explicit prin (3.186) (d) și marcată separat în forma condensată (3.189) a lui $\mathcal{P}$, se va putea rezolva pe cale cuadrivectorială problema energiei relativiste totale $(W_t^{(r)})$ a punctului material liber. Caracterul de mărime fizică ce conține semnificație energetică pentru p_4 se poate proba prin *analiza dimensională* a modulului componentei imaginare p_4 a lui $\mathcal{P}$, după ce în structura lui p_4 se scoate în față constanta complexă i/c ($i=\sqrt{-1}$) ca un factor de cuplaj între subspațiile $\mathcal{S}_R \equiv \mathcal{S}_{xyz}$ și $\mathcal{S}_{ict}$ ale lui $\mathcal{S}_M$ (3.188).

3.23.1 $\mathcal{P}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ cuadrivectorul impuls-energie

Până aici, cuadrivectorului $\mathcal{P}$ i-a fost atribuită denumirea *numai* pe baza primelor sale componente $\{p_k\}$ $(k=\overline{1,3})$ care definesc *impulsul relativist* ($\vec{p}_r$), fără a implica şi componenta sa imaginară p_4 care îi justifică *efectiv* calitatea de cuadrivector. Reluarea relaţiei (3.189) prin forma condensată cuadrivectorială:

(3.195) $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4) \equiv \left(\vec{p}_r, i\dfrac{m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \left(\vec{p}_r, \dfrac{i}{c}\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\right) \equiv \left(\vec{p}_r, \dfrac{i}{c}W_t^{(r)}\right)$, arată o proiecţie a lui $\mathcal{P}$ pe subspaţiul real $\mathcal{S}_R \equiv \mathcal{S}_{xyz}$ ca $\vec{p}_r$, respectiv pe subspaţiul imaginar $\mathcal{S}_{ict}$ (unidimensional temporal) ale lui $\mathcal{S}_M$ (3.188) ca (3.196) $W_t^{(r)} \equiv \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, când $\dfrac{i}{c}$ (constanta de cuplaj între subspaţiile spaţiului Minkowski $\mathcal{S}_M$ care îi asigură cuadridimensionalitatea) este scoasă în faţa expresiei matematice explicite a lui $p_4=i\dfrac{m_0c}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$. Astfel, ultima formă condensată a lui $\mathcal{P}$ *conţine un termen* care, prin (3.196) analizată dimensional, *are caracter de energie*, probat şi prin unitatea de măsură, care în SI de unităţi de măsură este Joulul. Rezultă, prin (3.195) că $\mathcal{P}$ este un cuadrivector conţinând *atât* $\vec{p}_r$ *ca impulsul relativist*, cât şi $W_t^{(r)}$ *ca energia totală relativistă* a punctului material liber. De aceea, $\mathcal{P}$ *mai este numit denumit cuadrivectorul impuls-energie.*

3.23.2 Energia relativistă totală ($W_t^{(r)}$) a punctului material liber

Prin relaţia (3.192) ce dă dependenţa de viteză a masei de mişcare/cinematică a punctului material liber $W_t^{(r)}$ din (3.196) devine de forma foarte simplă:

(3.197) $W_t^{(r)} = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} = mc^2$ pe care o vom confirma ca *energie mecanică totală relativistă*, atunci când va fi explicitată *funcţia analitică Hamilton relativistă* ($\mathcal{H}_r$) *a punctului material liber* în paragraful următor, unde va fi utilizată definiţia analitică a energiei mecanice totale a unui sistem fizic.

3.23.3 Invariantul relativist $I_p = -m_0^2c^2$

Printre rezultatele cap.V importante ca fiind legate de cuadrivectorul $\mathcal{P}$, semnalăm *comportarea relativist invariantă a expresiei* (3.198) $I_p \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} p_j^2$ construită din pătratele componentelor scalare $\{p_j\}$ ale lui $\mathcal{P}$. Utilizarea relaţiilor (3.186)(a)-(d) în (3.198) permite desfăşurarea:

(3.199) $I_p \equiv p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 \equiv (\vec{p}_r)^2 + p_4^2 = \dfrac{m_0(v^2-c^2)}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} = -m_0c^2$, dacă se consideră $v \equiv v_T$ prin fixarea punctului material liber de referenţialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$. Astfel, avem *invariantul relativist*: (3.200) $I_p \equiv \sum\limits_{j=1}^{4} p_j^2 = -m_0c^2$, necesar în continuare în *problema relativistă a scrierii funcţiei analitice Hamilton relativistă* ($\mathcal{H}_r$) a punctului material liber.

3.23.4 Legea conservării cuadriimpulsului $\mathcal{P}$ al punctului material liber. Legea conservării impulsului relativist, respectiv energiei relativiste totale

În cazul mişcării libere a punctului material relativist, sunt valabile legile de conservare ale impulsului, respectiv energiei mecanice totale cunoscute din mecanica teoretică nerelativistă, cu modificările relativiste corespunzătoare:

$$\text{(a)}\quad \vec{p}_r = m\,\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} = \text{const.}\ (\vec{v}\equiv\vec{v}_T),\ \text{respectiv}$$

$$\text{(b)}\qquad W_t^{(r)} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} = \text{const.}\ (v\equiv\vec{v}_T),$$

deoarece în ambele cazuri $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$ =const, punctul material relativist fiind legat solidar de originea referenţialului inerţial propriu (RI)'≡(RI)$_0$ (v. fig. 3.3 (b)). Cum impulsul relativist $\vec{p}_r$ şi $\frac{i}{c}W_t^{(r)}$ conţin tocmai componentele $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$, rezultă că *legile de conservare* (a) şi (b) *sunt cazuri particulare ale unei singure legi de conservare exprimată matematic prin*:

$$\text{(c)}\ \mathcal{P}^2 \equiv \mathcal{P}\cdot\mathcal{P} = p_r^2 - \frac{\left[W_t^{(r)}\right]^2}{c^2} = \text{const.}$$

Acest fapt arată că *dacă $\mathcal{P}^2$ se conservă pentru punctul material relativist liber sau izolat* (asupra lui nu acţionează forţe) *atunci se conservă separat atât $\vec{p}_r$, cât şi $W_t^{(r)}$, sau invers*. Astfel, *legea de conservare a cuadriimpulsului $\mathcal{P}$* al punctului material liber include *conservarea simultană a impulsului relativist*, respectiv *a energiei relativiste totale*. Această conservare exprimată prin (c) este o faţetă a existenţei invariantului relativist (3.198) care ne precizează şi valoarea constantei din relaţia (c) de mai sus.

Mai trebuie remarcat că legea (b) a conservării energiei relativiste totale rescrisă ca (b') $W_t^{(r)}=mc^2$=const., conţine implicită în ea legea (b") $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$=const. ($v_T$≡v), adică tocmai *legea conservării masei de mişcare* (cinematice), încât *legea* (b), *ca lege relativistă de conservare*, exprimă *conservarea ansamblului masă-energie*.

Astfel, legea (c) conţine implicite *legea conservării impulsului relativist*, ca şi pe cea a *ansamblului masă-energie*.

3.24 Funcţia analitică relativistă $\mathcal{H}_r$ a punctului material liber. Rezolvarea completă a problemelor relativiste a dependenţei $m(v^2)$ respectiv a energiei ($W_t^{(r)}$, $W_0^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$ şi $\Delta W^{(r)}$)

3.24.0 Consideraţii generale

În paragrafele anterioare, cap.V a fost pregătit pentru elaborarea dinamicii relativiste a punctului material, prin definirea şi obţinerea explicită a componentelor scalare ale cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$. De asemenea, prin *rezolvarea implicită, pe cale cuadridimensională*, a problemei relativiste a dependenţei masei de mişcare (cinematice) de viteză $m(v^2)$, respectiv a problemei energiei totale relativiste $W_t^{(r)}$, în cazul mişcării punctului material liber. *În ambele probleme*, justificarea pe cale cuadridimensională a unei rezolvări implicite, simultană cu obţinerea explicită a componentelor $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$, trebuie să fie însoţită de confirmarea rezultatelor (3.192)-(3.193), respectiv (3.196)-(3.197), prin utilizarea *definiţiilor analitice a masei de mişcare* (cinematice) (3.160), respectiv a *energiei mecanice totale* (3.161), ca definiţiile fizico-matematice cele mai generale pentru cele două mărimi fizice în discuţie. Conform cu (3.160) şi (3.161), rezolvarea analitică a celor două probleme relativiste cere identitatea (3.201) $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$, cu $\mathcal{H}_r$ *funcția analitică Hamilton relativistă* (f.a.$\mathcal{H}_r$) a punctului material liber. Obținerea explicită a lui $\mathcal{H}_r$ va utiliza invariantul relativist (3.200), pentru a rezulta $\mathcal{H}_r$ ca dependență $\mathcal{H}_r(p^2) \equiv \mathcal{H}_r(p_r^2)$ în cazul problemei $m(v^2)$, respectiv definiția fizico-matematică analitică generală a f.a.$\mathcal{H}$ prin f.a.Lagrange:

(3.202) $\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{g} p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$ a sistemului mecanic cu g grade de libertate, particularizată la un singur punct material (3.203) $\mathcal{H} = \vec{p}\,\dot{\vec{r}} - \mathcal{L} \equiv \vec{p}\,\vec{v} - \mathcal{L}$, în cazul problemei energiei mecanice totale.

3.24.1 Funcția analitică relativistă $\mathcal{H}_r$ a punctului material liber

3.24.1.1 $\mathcal{H}_r$ prin definițiile analitice (3.202)-(3.203)

Indiciind formal pe $\mathcal{H}$ și $\mathcal{L}$ din (3.203) pentru a deveni notații pentru f.a.$\mathcal{H}$ respectiv f.a.$\mathcal{L}$ relativiste, (3.203) devine (3.204) $\mathcal{H}_r = \vec{p}_r\vec{v} - \mathcal{L}_r$, cu $\vec{p}_r$ impulsul tridimensional relativist dat de (3.191) și $\mathcal{L}_r$ f.a. Lagrange relativistă explicitată complet prin (3.174). Introducând (3.191) și (3.174) în (3.204), rezultă:

(3.205) $\mathcal{H}_r = \dfrac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} - [-m_0c^2\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}\,] = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, care trebuie exprimată numai prin impulsul relativist $\vec{p}_r$, conform dependenței $\mathcal{H} = \mathcal{H}(p^2)$ a f.a. Hamilton a punctului material liber [din formalismul analitic Hamilton al modelului analitic Hamilton și al teoriei sale (v. *Partea a 2^a*, cap.III, paragraful 2.15 a cursului de FT, ref.106)].

3.24.1.2 $\mathcal{H}_r$ ca dependență $\mathcal{H}_r(p_r^2)$

Pentru a obține $\mathcal{H}_r = \mathcal{H}_r(p_r^2)$, se va utiliza intervalul relativist (3.200) obținut cu ajutorul componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$, deoarece cu ajutorul lui se poate scrie:

(3.206) $(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+p_4^2 \equiv (\vec{p}_r)^2 + p_4^2 = -m_0^2c^2$, în care dacă se introduce p_4 din (3.186)(d), mai avem:

(3.207) $p_r^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{m_0^2c^4}{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}} = -m_0^2c^2$. Recunoscându-l pe $\mathcal{H}_r$ din (3.205) în (3.207), acesta devine (3.208) $p_r^2 - \dfrac{1}{c^2}\mathcal{H}_r^2 = -m_0^2c^2$, de unde se obține $\mathcal{H}_r(p_r^2)$ explicită:

(3.209) $\mathcal{H}_r \equiv \mathcal{H}_r(p_r^2) = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}$ ca *formă matematică explicită a* f.a.$\mathcal{H}_r$ *relativistă a punctului material liber.*

3.24.2 Consecințe dinamice ale cunoașterii f.a.$\mathcal{H}_r$ explicite (3.209)

3.24.2.0 Precizări asupra relației (3.209)

Din punct de vedere dinamic, forma matematică explicită (3.209) a f.a.$\mathcal{H}_r$ constituie în mecanica relativistă punct de plecare în: (I) *justificarea fizico-matematică a existenței particulelor cu masă de repaus nulă și cu impuls nenul* ($m_0=0$; $p_r \neq 0$), respectiv în (II) *rezolvarea analitică a problemei relativiste* $m(v^2)$, cerând explicitarea dependenței de viteză a masei de mișcare (cinematice). Cele două probleme analitice ((I) și (II)) reprezintă două dintre consecințele dinamice ale relației relativiste (3.209), de aceea relația este foarte importantă în întreaga mecanică relativistă [ca teorie fizico-matematică a modelului teoretic relativist (MTR)].

A treia consecință dinamică a relației (3.209) este că (III) (3.209) [ca și (3.205)], nedepinzând explicit de timp, reprezintă tocmai expresia energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$ a punctului material liber exprimată prin impulsul relativist (3.191).

3.24.2.1 Existența particulelor relativiste cu masă de repaus nulă și impuls nenul

Consecința dinamică (I) a relației (3.209) precizată mai sus, constând în justificarea fizico-matematică a existenței particulelor cu masă de repaus nulă, se poate proba luând în (3.209) $m_0=0$, când rezultă că astfel de particule *au impuls diferit de zero*, deoarece pentru ele avem:

(3.210) $\mathcal{H}_r = p_r c \neq 0$. O astfel de particulă este fotonul, ca particulă asociată câmpului electromagnetic în propagare (undei electromagnetice, inclusiv celei luminoase).

3.24.2.2 Dependența $\mathcal{H}_r(p^2)$ (3.209) și problema relativistă $m(v^2)$

Forma explicită (3.209) a f.a.$\mathcal{H}_r$ a punctului material liber ca dependență $\mathcal{H}_r(p_r^2)$ sugerează că *problema relativistă* a dependenței masei de mișcare (cinematice) de viteză $m(v^2)$ se poate rezolva pe cale analitică, dacă se apelează la definiția analitică (3.160) a masei de mișcare.

3.24.3 Problema relativistă $m(v^2)$. Legea relativistă de variație a masei de mișcare cu viteza

Introducând $\mathcal{H}_r$ (3.209) în definiția (3.160) a *masei de mișcare* rezultă, succesiv, prin efectuarea derivării și rearanjare de termeni:

(3.211) $m=\dfrac{1}{2\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial(p_r^2)}}=\dfrac{1}{2\dfrac{\partial}{\partial(p_r^2)}\left(c\sqrt{p_r^2+m_0^2c^2}\right)}=\dfrac{1}{c}\sqrt{p_r^2+m_0^2c^2}$, din care egalitatea

$m=\dfrac{1}{c}\sqrt{p_r^2+m_0^2c^2}$, prin introducerea lui $\vec{p}_r=m\vec{v}$, conduce la: (3.212) $m^2=(m^2v^2)/c^2+m_0^2$, finalizând

(3.213) $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, ca *legea relativistă de variație a masei de mișcare cu viteza*, regăsindu-se dependența $m(v^2)$ (3.193) și *rezolvând analitic complet problema relativistă* $m(v^2)$, implicită în obținerea componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului $\mathcal{P}$. Din (3.213), prin aplicarea PdC, *masa de mișcare* (cinematică) m *devine egală cu masa de repaus* m_0, numai la limita clasică $v/c \to 0$, adică numai la $c\to\infty$, dacă $v \ll c \cong 3\cdot10^8$ m/s^2 ține cont de valorile mici ale vitezelor în mecanica clasică nerelativistă. Astfel, constanța masei (independența de viteză) în mecanica clasică nerelativistă este o consecință a ipotezei propagării instantanee (cu viteză infinită) a interacțiunilor, în timp ce variația $m(v^2)$ din mecanica relativistă este o consecință a principiului invarianței vitezei maxime ($v_{max}=c$) de propagare a interacțiunilor (PIVMPI), care înlătură ipoteza $v_{max}\to\infty$.

De asemenea, PIVMPI impunând înlocuirea transformărilor Galilei (TrG) din mecanica clasică nerelativistă, cu transformările Lorentz (TrL) din mecanica relativistă, $m_{clasică} \neq f(v)$ ca o consecință dinamică a TrG, a fost înlocuită cu $m_{relativistă} = f(v)$ ca o consecință dinamică a TrL. Legea dinamică relativistă de variație a masei de mișcare cu viteza (3.213) este, alături de legea cinematică relativistă de compunere a vitezelor (3.84), una din cele mai verificate legi pe cale experimentală. Verificarea experimentală a legii (3.213) are loc în experiențele din acceleratoarele de particule, în fizica particulelor elementare și în fizica energiilor înalte. Prin (3.211), rezultatul (3.213) permis de f.a.$\mathcal{H}_r$ (3.209), justifică analitic complet variația relativistă a masei de mișcare cu viteza, contribuind și la justificarea analitică a explicitării, *numai prin* m_0 (și prin componentele $\{u_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivitezei $\mathcal{U}$) a componentelor scalare ale cuadrivectorului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ date de (3.186), care se rescrie prin m în forma:

(3.214) (a) $p_1=mv_x$; (b) $p_2=mv_y$; (c) $p_3=mv_z$ și (d) $p_4=imc$, sau în forma condensată

(3.214') $\mathcal{P} \equiv (m\vec{v}, imc) \equiv (\vec{p}_r, imc)$, *incluzând legea relativistă* (3.213) în mod necesar şi justificat prin transformarea în sens Lorentz special (3.61) a componentelor scalare ale lui $\mathcal{P}$.

3.24.4 Funcţia analitică Hamilton $\mathcal{H}_r$ (3.205) şi problema energiei în TRR. Energiile relativiste: totală ($W_t^{(r)}$), de repaus ($W_0^{(r)}$) şi cinetică ($W_{cin}^{(r)}$). Relaţia Einstein dintre variaţiile relativiste a masei şi a energiei ($\Delta m = f(\Delta W^{(r)})$)

3.24.4.0 Consideraţii generale

Definiţia analitică a energiei mecanice totale (3.161) arătând că energia mecanică totală reprezintă tocmai acea funcţie analitică Hamilton ($\mathcal{H}$) ce nu depinde explicit de timp, impune abordarea problemei relativiste a energiei prin $\mathcal{H}_r$ a cărei expresie (3.205) a fost obţinută cu ajutorul relaţiei matematice generale (3.202), particularizată la punctul material liber relativist. Cu plecare de la (3.205) care, conform (3.161), reprezintă tocmai *energia relativistă totală* a punctului material liber, vor fi obţinute şi expresiile matematice pentru *energia relativistă de repaus* şi pentru *variaţia relativistă a masei* prin variaţia relativistă a energiei (reprezentând tocmai *relaţia Einstein dintre variaţiile relativiste a masei şi a energiei*).

3.24.4.1 Energia relativistă totală $W_t^{(r)}$ şi a punctului material liber

(a) *Expresiile matematice pentru* $W_t^{(r)}$

Reluând definiţia analitică (3.161) în care se pune $\mathcal{H} = \mathcal{H}_r$ cu $\mathcal{H}_r$ obţinută în (3.204), avem pentru punctul material liber

(3.215) $E^{\text{relativista}}_{\text{totala}} \equiv W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r = \vec{p}_r \vec{v} - \mathcal{L}_r$, cu $\vec{p}_r$ impulsul relativist (3.191) şi $\mathcal{L}_r$ funcţia analitică Lagrange relativistă (3.174). Prin (3.191) şi (3.174), *expresia finală pentru* $W_t^{(r)}$ este:

(3.216) $W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$, adică tocmai expresia (3.205) a lui $\mathcal{H}_r$ (cu $v_T \equiv v$).

Ţinând cont de legea relativistă (3.213), $W_t^{(r)}$ devine prin masa de mişcare (cinematică):

(3.217) (a) $W_t^{(r)} = mc^2$ sau (b) $W_t^{(r)} = m(v^2)c^2$.

Trebuie specificat faptul că şi expresia (3.209) a $\mathcal{H}_r$ exprimată numai în funcţie de p_r^2 (şi de invarianţii relativişti m_0 şi c) reprezintă o formă fizico-matematică a energiei $W_t^{(r)}$, încât avem şi

(3.218) $W_t^{(r)} = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2 c^2}$.

(b) $W_t^{(r)}$ *şi cuadrivectorul impuls-energie* $\mathcal{P}$

Expresia (3.216) a energiei $W_t^{(r)}$ intervine în componenta p_4 (3.186) (d) a cuadrivectorului $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ permiţând: (I) *expresia condensată din (3.189) a lui* $\mathcal{P}$ *în forma condensată* ultimă (3.219) $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4) \equiv (\vec{p}_r, \frac{i}{c} W_t^{(r)})$, prin impulsul relativist $\vec{p}_r = m\vec{v}$ şi energia totală relativistă, respectiv (II) *denumirea de cuadrivector impuls-energie* pentru cuadrivectorul $\mathcal{P}$.

(c) $W_t^{(r)} = mc^2$ *relaţia relativistă a echivalenţei dintre masă şi energie*

Expresia (3.217) a energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$ poartă numele de *relaţia relativistă de echivalenţă dintre masă şi energie*, deoarece cu ajutorul ei se poate scrie:

(3.217') $\Delta W_t^{(r)} = c^2 \Delta m$, care arată că dacă are loc *conservarea energiei totale*, atunci are loc şi conservarea masei şi invers, adică conservarea energiei totale a unui sistem fizic este corelată cu conservarea masei sistemului. Astfel, referitor la conservare masa şi energia sunt echivalente, ceea ce mai înseamnă că masa şi energia dau împreună un invariant relativist. Tot prin (3.217) ca relaţie ce dă echivalenţa relativistă dintre masă şi energie, se justifică *utilizarea*, în fizica atomică şi nucleară, *a electronvoltului* (1 eV) *ca unitate de măsură pentru masa de repaus a particulelor elementare*. De exemplu, $(m_0)_{\text{electron}} = 5,1 \cdot 10^5$ eV.

O altă explicaţie a relaţiei (3.217), ca relaţie *de echivalenţă între masă şi energie este atribuirea unei mase de mişcare* (cinematice) particulelor elementare cu masa de repaus nulă, prin (3.217), energiei acestora corespunzându-le masa de mişcare echivalentă (3.217") $m=W_t^{(r)}/c^2$, prin măsurarea experimentală a $W_t^{(r)}$.

3.24.4.2 Energia relativistă de repaus ($W_0^{(r)}$)

(a) *Problema raportării energiei relativiste faţă de* RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$

Dacă se pune problema referenţialului inerţial în care este măsurată energia, atunci apare necesitatea precizării faţă de care dintre referenţialele reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ este considerată relaţia (3.216) (ca şi relaţiile (3.217)-(3.218)). Cum (RI)$_0$ este *referenţialul propriu*, adică cel legat solidar de punctul material liber luat în considerare, rezultă că punctul material se mişcă cu $\bar{v} \equiv \bar{v}_T$ faţă de RI [simultan cu (RI)'≡(RI)$_0$] (v. fig. 3.3 (b)), adică expresiile (3.216)-(3.128) sunt valabile în raport cu RI.

Raportarea la *referenţialul propriu* (RI)$_0$ faţă de care punctul material este în repaus, impune în $W_t^{(r)}$ (3.116) o trecere la limită $\bar{v} \equiv \bar{v}_T \rightarrow 0$. Astfel, prin (3.116), avem:

(3.220) $\lim\limits_{v\to 0} W_t^{(r)} \equiv \lim\limits_{v_T\to 0} \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} = m_0c^2 \equiv W_0^{(r)}$, reprezentând tocmai *expresia energiei relativiste de repaus* (sau energia proprie) *a punctului material.*

(b) *Definiţii ale energiei relativiste de repaus* $W_0^{(r)}$

Definiţia 1. <Numim energie de repaus a punctului material, *energia totală măsurată în referenţialul propriu* (RI)$_0$ *al punctului material*>.

Definiţia 2. <Numim energie de repaus a punctului material energia relativistă numeric egală cu produsul dintre *masa de repaus* (proprie) m_0 şi pătratul c^2 al constantei universale c [reprezentând viteza de propagare a undelor electromagnetice în spaţiul liber (vidul electromagnetic)]>.

(c) *Remarcă asupra* $W_0^{(r)}$ *în termodinamica relativistă*

Energia de repaus $W_0^{(r)}$ în termodinamica relativistă reprezintă tocmai *energia internă a sistemelor termodinamice*, după cum se va vedea în cap. VIII (Elemente de termodinamică relativistă) [v. şi (e) din prezenta secvenţă].

(d) *Observaţii şi precizări nerelativiste (de mecanică clasică)*

După cum se poate constata din *Partea a 2ª* a cursului de FT (ref.106) [v. § 2.15, secv. 2.15.4.4, relaţia (2.177)] în mecanica clasică (esenţial nerelativistă) energia mecanică totală este definită în aproximaţia unei constante aditive arbitrare. Această constantă se consideră întotdeauna nulă, deoarece în *mecanica clasică* nu există nici o modalitate de a-i determina valoarea.

În mecanica relativistă, ce are la bază TRR/TRS a lui Einstein, constanta arbitrară în discuţie este precizată în mod univoc ca *energie de repaus* $W_0^{(r)}$ de expresie (3.220). Atributul de relativistă pentru $W_0^{(r)}$ a fost acordat prin faptul că *nu poate fi explicitată* decât pe baza principiilor fundamentale de TRR/TRS, care permit elaborarea modelului teoretic relativist (MTR). De asemenea, prin faptul că este posibilă trecerea la limită (3.220) asupra expresiei (3.216) a energiei $W_t^{(r)}$.

(e) *Energia de repaus* $W_0^{(r)}$ *ca energie internă a corpului fizic reprezentat de punctul material*

Conform trecerii la limită (3.220), în $W_t^{(r)}$, apare o *energie externă* care este tocmai energia cinetică relativistă $W_{cin}^{(r)}$ din secvenţa următoare, 3.24.4.3, *alături de* $W_0^{(r)}$ de repaus (proprie), pe aceasta din urmă putând-o numi si *energie internă* (de aceea, şi proprie).

3.24.4.3 Energia cinetică relativistă ($W_{cin}^{(r)}$)

Deoarece (3.216)-(3.218) exprimă energia $W_t^{(r)}$, ca energie relativistă totală, iar (3.220) ca energie de repaus (proprie) $W_0^{(r)}$, rezultă că *energia cinetică relativistă* $W_{cin}^{(r)}$ este dată prin relaţia:

(3.221) $W_{cin}^{(r)} = (m-m_0)c^2$, dacă se consideră că $W_t^{(r)}$ are structura:(3.222) $W_t^{(r)} = W_{cin}^{(r)} + W_0^{(r)}$, în cazul mişcării relativiste a punctului material liber. *Expresia* (3.221) *mai poate fi exprimată prin legea relativistă de variaţie* $m(v^2)$ (3.213), încât avem:

$$(3.223)\quad W_{cin}^{(r)} = m_0c^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right].$$

3.24.4.4 $W_{cin}^{(r)}$ (3.223) satisface PdC din TRR/TRS

Din (3.223), se poate observa că avem (3.224) $W_{cin}^{(r)} \neq 7$, dacă 7 este energia cinetică nerelativistă din mecanica clasică. Ca expresie relativistă, $W_{cin}^{(r)}$ explicitată prin (3.223) satisface principiul de corespondenţă (PdC) din TRR/TRS, adică pentru viteze nerelativiste (v/c <<1) trebuie să se obţină:

$$(3.225)\quad W_{cin}^{(r)} \to 7 = \frac{m_0v^2}{2}$$, **cu m_0 valoarea independentă de viteză a masei din mecanica clasică. Obţinerea comportării (3.225) se evidenţiază prin dezvoltarea în serie de puteri a termenului cu radical din (3.223) ca** $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\ldots$, **care permite:**

$$(3.226)\quad W_{cin}^{(r)} \cong m_0c^2\left\{\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\ldots\right]-1\right\} \cong m_0c^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4+\ldots\right].$$

Deoarece la v/c <<1, în domeniul vitezelor nerelativiste, termenul cu $(v/c)^4$ şi următorii din (3.226) se pot neglija, atunci putem detalia (3.225) ca:

$$(3.227)\quad W_{cin}^{(r)}\Big|_{\frac{v}{c}<<1} \cong \frac{1}{2}m_0v^2 \equiv 7$$, **adică $W_{cin}^{(r)}$ (3.223) satisface PdC, la limita nerelativistă, particularizându-se într-o expresie nerelativistă.**

3.24.4.5 $W_{cin}^{(r)}$ (3.223) satisface principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI)

Dacă viteza v a punctului material tinde la c (v →c), atunci din (3.223), rezultă $\lim_{v\to c} W_{cin}^{(r)} \to \infty$, fapt ce arată că c este o viteză maximă (plafon) ce nu poate fi atinsă, deoarece limita ∞ pentru $W_{cin}^{(r)}$ presupune acţiunea unei forţe de valoare infinită. Imposibilitatea atingerii vitezei maxime c este justificată şi de creşterea masei de mişcare $m(v^2)$ la valoare infinită, ceea ce ar presupune posibilitatea de accelerare infinită a mişcării corpului fizic reprezentat de punctul material. Imposibilitatea atingerii v_{max}=c prin accelerarea corpurilor substanţiale este o altă formulare a PIVMPI din TRR/TRS.

3.24.4.6 Relaţia Einstein dintre variaţiile relativiste a masei şi a energiei ($\Delta m = f(\Delta W^{(r)})$). Despre verificarea experimentală a TRR/TRS prin verificarea experimentală a relaţiei Einstein

(a) *Precizare asupra stărilor mecanice de repaus şi de mişcare*

Trecerea unui corp fizic/sistem fizic din starea de repaus în stare de mişcare este însoţită de o ***variaţie de energie a corpului/sistemului***, **care nu poate fi bine precizată în mecanica clasică nerelativistă, deoarece aceasta nu poate preciza** ***energia de repaus*** **pe care o poate, totuşi, pune în evidenţă teoretic ca o constantă de integrare considerată convenţional nulă.**

(b) *Variaţia relativistă a energiei punctului material*

Deoarece punctul material în repaus are ***energia de repaus*** **$W_0^{(r)} = m_0c^2$, iar în mişcare liberă relativistă** ***energia relativistă totală*** **$W_t^{(r)} = m(v^2)c^2$, rezultă că** ***are loc o variaţie a energiei de la starea de repaus la starea de mişcare*** **(stare definită prin viteza $v \equiv v_T$) explicitată ca:**

$$(3.228)\quad \Delta W^{(r)} \equiv W_t^{(r)} - W_0^{(r)} = m(v^2)c^2 - m_0c^2 \equiv [m(v^2)-m_0]c^2 = c^2\cdot\Delta m$$, **dacă se face notaţia**

$$(3.229)\quad \Delta m \equiv m(v^2) - m_0 = m_0\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} - 1\right] \text{(cu } v_T \equiv v).$$

(c) *Variaţia relativistă a masei punctului material*

Conform relaţiei (3.229), atunci când punctul material trece din starea de repaus în starea de mişcare liberă relativistă, *variaţiei* $\Delta W^{(r)}$ *a energiei*, îi corespunde o *variaţie relativistă a masei* Δm, posibil de exprimat prin variaţia relativistă $\Delta W^{(r)}$ a energiei. conform relaţiei:

$$(3.230)\quad \Delta m = \frac{1}{c^2}\Delta W^{(r)}$$, numită *relaţia Einstein dintre masă şi energie.*

(d) *Observaţii şi precizări asupra relaţiei Einstein. Despre verificarea experimentală a relaţiei* (3.230)

Relaţia Einstein (3.230) *a fost obţinută iniţial doar pe cale teoretică*, ca relaţia dintre variaţiile relativiste a masei şi a energiei, ambele variaţii relativiste având loc simultan, atunci când se consideră că punctul material trece din starea de repaus în starea de mişcare liberă relativistă.

Ca relaţie teoretică, (3.230) poate fi verificată experimental în acele experienţe cu fenomene fizice relativiste în care au loc variaţii de masă Δm detectabile prin măsurători de masă. Asemenea fenomene fizice au loc cu variaţii $\Delta W^{(r)}$ de energii suficient de mari *pentru ca* Δm *să poată fi măsurată* şi aparţin fizicii energiilor înalte, cercetate experimental în acceleratoarele de particule elementare (microparticule). De asemenea, reacţiile (procesele) nucleare au loc cu $\Delta W^{(r)}$ de valori mari, favorizând detecţii de Δm. Accelerarea microparticulelor la mari energii, ca şi reacţiile nucleare, au permis verificarea experimentală a relaţiei Einstein (3.230) cu foarte înaltă precizie, atât în măsurarea variaţiilor Δm cât şi a celor $\Delta W^{(r)}$, *rezultând o foarte bună concordanţă între precizările teoretice date de* (3.230) şi *rezultatele experimentale*. De asemenea, se poate afirma că *energia nucleară* a fost descoperită pe baza acestei relaţii (3.230), iar aplicaţiile paşnice (centralele nucleare) ca şi cele distructive (bombele atomice) au la bază tot relaţia (3.230). În acest ultim caz, Δm din (3.229) este tocmai *<defectul de masă>*.

(e) *Asupra verificării experimentale a* TRR/TRS *prin relaţia Einstein*

Verificarea experimentală a relaţiei Einstein (3.230) cu mare precizie în fizica fenomenelor la înalte energii [reacţii (procese) nucleare, accelerări de microparticule etc.] constituie totodată o verificare a TRR/TRS elaborată de Einstein (1905), în primul rând a justeţii principiilor fundamentale ale TRR care stau la baza obţinerii teoretice a relaţiei (3.230). Cum principiul invarianţei vitezei maxime de propagare a interacţiunilor (PIVMPI) este cel care impune *înlocuirea* transformărilor Galilei cu transformările Lorentz pe baza cărora rezultă (3.230), se poate considera că verificarea experimentală discutată mai sus este şi o verificare experimentală a PIVMPI şi implicit a întregii TRR/TRS ca teorie a modelului teoretic relativist (MTR).

3.24.5 Energia totală relativistă a punctului material mişcându-se într-un câmp de forţe conservative

Deoarece forţele conservative permit satisfacerea definiţiei analitice (3.161) a energiei mecanice totale, pentru punctul material relativist aflat într-un câmp de forţe conservative, se poate adăuga în fiecare din expresiile (3.216)-(3.218) energia potenţială U, încât vom avea:

$$(3.216')\quad W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + U;\quad (3.217')\quad W_t^{(r)} = mc^2 + U, \text{ respectiv}$$

$$(3.218')\quad W_t^{(r)} = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2 c^2} + U,$$ ca *expresii ale energiei totale relativiste a punctului material* mişcându-se relativist *într-un câmp de forţe conservative* (cu $v_T \equiv v$).

3.25 Variaţia în raport cu timpul a cuadrivectorului $\mathcal{P}$. Legea fundamentală a dinamicii relativiste cuadrivectoriale. Cuadrivectorul forţă Minkowski ($\mathcal{F}$)

3.25.0 Consideraţii generale

Conform paragrafelor 3.21-3.23, cuadrivectorul dinamic fundamental $\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ a fost tratat numai sub aspect fizico-matematic ca *mărime fizică relativistă*, răspunzând *problemei metodologice fundamentale a dinamicii relativiste* precizată în paragraful 3.21, după ce în 3.20 s-au făcut detalierile procedurale de elaborare a dinamicii relativiste a punctului material.

Variaţia în raport cu timpul a cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$ fiind o problemă de dinamică efectivă, tratarea acesteia este echivalentă cu elaborarea acelei părţi a dinamicii relativiste care conţine *legea fundamentală a acţiunii cuadriforţei $\mathcal{F}$* şi implicit întreaga dinamică legată de cuadrivectorul $\mathcal{F}$ ca mărime fizică relativistă. Trecând de la nivel nerelativist tridimensional în legea Newton (3.150) $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$ a acţiunii forţei, la nivel relativist cuadridimensional, generalizarea relativistă (3.152) $\mathcal{F}=\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$ reprezentând *legea fundamentală a dinamicii relativiste cuadrivectoriale* pune efectiv problema variaţiei în raport cu timpul propriu (τ) a cuadrivectorului $\mathcal{P}$, iar prin (3.153) $d\tau=dt\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$ în raport cu timpul cinematic (t) a aceluiaşi cuadrivector. Deoarece vectorul tridimensional forţă $\vec{F}$ (F_x,F_y,F_z) din subspaţiul real $\mathcal{S}_R \equiv \mathcal{S}_{xyz}$ al lui $\mathcal{S}_M$ (3.188) este definit şi în mecanica relativistă prin (3.150), valabilitatea relativistă a lui (3.150) cere ca vectorul $\vec{p}$ *să fie impulsul tridimensional relativist* $\vec{p}_r$ dat de (3.191), iar t să fie timpul cinematic. Scriind legea (3.152) prin variaţia în raport cu timpul propriu τ a componentelor $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale *cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$* vor rezulta patru legi scalare, care vor reprezenta şi relaţiile fizico-matematice ce explicitează componentele scalare $\{F_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului $\mathcal{F}$. Cuadrivectorul $\mathcal{F}$ este reprezentat grafic în figura 3.10,în cazul mişcării rectilinii şi uniform accelerate (MRUA) a punctului material relativist.

3.25.1 Enunţul legii fundamentale a dinamicii relativiste cuadrivectoriale ca lege a acţiunii cuadriforţei Minkowski ($\mathcal{F}$)

<Variaţia în raport cu timpul propriu a cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$ este egală cu cuadriforţa Minkowski ($\mathcal{F}$) care provoacă această variaţie>.

3.25.2 Exprimarea matematică a legii fundamentale a dinamicii relativiste cuadrivectoriale prin variaţia lui $\mathcal{P}$ în raport cu timpul propriu (τ)

Enunţul din 3.25.1 este , de fapt, o generalizare a legii fundamentale a dinamicii newtoniene nerelativiste (legea acţiunii forţei) prin înlocuirea vectorilor ($\vec{p}$ şi $\vec{F}$) prin cuadrivectorii $\mathcal{P}$ respectiv $\mathcal{F}$. Astfel, exprimarea matematică (3.152) generalizând relativist cuadrivectorial pe (3.151) va fi reluată ca:

$$\text{(3.231)}\quad \text{(a)}\ \mathcal{F}=\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}\ \text{ sau }\ \text{(b)}\ \mathcal{F}(\{F_j\}(j=\overline{1,4}))=\frac{d\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))}{d\tau}\ \text{ sau}$$

$$\text{(c)}\ \mathcal{F}(F_1,F_2,F_3,F_4)=\frac{d\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)}{d\tau}.$$

Reamintim că timpul propriu este timpul măsurat în referenţialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ al punctului material luat în considerare (faţă de care acesta este în repaus). Formele (b) şi (c) detaliază caracterul de cuadrivectori pentru $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{P}$, prin componentele scalare corespunzătoare permiţând (3.232) $F_j = \frac{dp_j}{d\tau}$ ($j=\overline{1,4}$) ca exprimare după componentele scalare a legii în discuţie.

3.25.3 Exprimarea matematică a legii (3.231) prin variaţia lui $\mathcal{P}$ în raport cu timpul cinematic (t)

Dacă în (3.231) se va înlocui dτ prin (3.151) care dă relaţia dintre *timpul propriu elementar* şi *timpul cinematic elementar*, atunci (3.231) devine:

$$(3.233)\ (a)\ \mathcal{F} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}\ \text{ sau (b) } \mathcal{F}(\{F_j\}(j=\overline{1,4})) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))}{d\tau}\ \text{ sau}$$

$$(c)\ \mathcal{F}(F_1,F_2,F_3,F_4) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d\mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)}{d\tau},$$ reprezentând forma matematică a *legii fundamentale a dinamicii relativiste* exprimată prin *variaţia cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$ în raport cu timpul cinematic.*

3.25.4 Formele matematice scalare ale legii (3.233) prin variaţiile componentelor scalare în raport cu timpul cinematic

Legea fundamentală a dinamicii relativiste scrisă în forma (3.233) se scrie după componentele scalare $\{F_j\}$ şi $\{p_j\}$ ale cuadrivectorilor $\mathcal{F}$, respectiv $\mathcal{P}$:

$$(3.234)\ F_j = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{dp_j}{d\tau}\ (j=\overline{1,4}),$$ specificând că timpul cinematic t este timpul măsurat în RI, oricare altul decât cel propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ (de care punctul material considerat este legat solidar).

3.26 Cuadrivectorul forţă Minkowski ($\mathcal{F}$) şi componentele sale scalare. Justificarea denumirii de cuadrivector forţă-putere pentru $\mathcal{F}$

3.26.0 Precizare metodologică

În forma matematică (3.234) a legii fundamentale a dinamicii relativiste scrisă prin componentele scalare ale cuadrivectorilor $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{P}$ simpla înlocuire a componentelor scalare $\{p_j\}$ ale lui $\mathcal{P}$ prin explicitările (3.186) va conduce la explicitarea componentelor scalare $\{F_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) ale cuadrivectorului $\mathcal{F}$.

3.26.1 Explicitarea componentelor scalare $\{F_j\}$ ($j=\overline{1,4}$)

Înlocuind pe rând (3.186) (a)-(d) în (3.234), rezultă:

$$(3.235)\ (a)\ F_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}(mv_x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}F_x;$$

$$\text{(b) } F_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_y}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}(mv_y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}F_y;$$

$$\text{(c) } F_3 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_z}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}(mv_z) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}F_z \text{ şi}$$

$$\text{(d) } F_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{c}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{i}{c}W_t^{(r)}\right) = \frac{i}{c\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\dot{W}_t^{(r)}, \text{ dacă}$$

se mai utilizează şi legea $m(v^2)$ (3.192) sau relaţiile (3.195) şi (3.196) care precizează semnificaţiile fizice ale componentelor scalare reale, respectiv a celei imaginare, ale lui $\mathcal{P}$.

3.26.2 Forma condensată a cuadrivectorului $\mathcal{F}$. Justificarea fizico-matematică a denumirii de cuadrivector forţă-putere pentru $\mathcal{F}$

Dacă se analizează componentele scalare reale ale lui $\mathcal{F}$ din (3.235) (a)-(c), se poate constata apariţia componentelor carteziene F_x, F_y, F_z ale vectorului $\vec{F} = F_x\vec{1}_x + F_y\vec{1}_y + F_z\vec{1}_z$ şi , de aceea, posibilitatea scrierii condensate a lui $\mathcal{F}$, conformă cu structura spaţiului Minkowski ($\mathcal{S}_M$) (3.188) ca universul spaţiu-timp:

(3.236) $\mathcal{F}(F_1,F_2,F_3,F_4) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}(\vec{F}, \frac{i}{c}\dot{W}_t^{(r)})$. Expresia (3.236) reprezintă, în acelaşi timp, şi o nouă exprimare a *legii fundamentale a dinamicii relativiste*. În (3.235) (d), ca şi în (3.236), apare componenta F_4 exprimată prin derivata energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$ în raport cu timpul cinematic, derivată $\dot{W}_t^{(r)}$ care are semnificaţia fizică de *putere mecanică dezvoltată*. De aceea, *cuadrivectorul $\mathcal{F}$ se mai numeşte cuadrivectorul forţă-putere*. Reprezentarea grafică a cuadriforţei $\mathcal{F}$ este ilustrată în figura 3.10, care prezintă principalii cuadrivectori mecanici ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$; $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$) pentru cazul mişcării uniform accelerate (MRUA) a punctului material relativist.

3.27 Teorema variaţiei energiei mecanice totale în dinamica relativistă. Ortogonalitatea dintre cuadrivectorul $\mathcal{F}$ şi cuadriviteza $\mathcal{U}$ în spaţiul $\mathcal{S}_M$ (3.188)

3.27.0 Justificarea evidenţierii ortogonalităţii dintre $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$. Definiţia ortogonalităţii

Teorema variaţiei energiei totale în procesele (fenomenele) pur mecanice, în dinamica relativistă a punctului material apare ca o consecinţă a ortogonalităţii dintre cuadriforţa $\mathcal{F}$ şi cuadriviteza $\mathcal{U}$ în spaţiul Minkowski (3.188). De aceea, această ortogonalitate *trebuie* evidenţiată fizico-matematic.

Definiţia ortogonalităţii: <*Doi cuadrivectori* (ca şi doi vectori) *sunt ortogonali dacă produsul lor scalar este nul*>.

3.27.1 Produsul scalar dintre $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$

Definind *produsul scalar dintre doi cuadrivectori* $\mathcal{C}^{(1)}$ şi $\mathcal{C}^{(2)}$ ca (3.237) $\mathcal{C}^{(1)} \cdot \mathcal{C}^{(2)} \equiv \sum_{j=1}^{4} \mathcal{C}_j^{(1)} \cdot \mathcal{C}_j^{(2)}$, atunci produsul scalar dintre *cuadrivectorul forţă-putere* şi *cuadrivectorul viteză* se scrie:

(3.238) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{U} = \sum_{j=1}^{4} F_j u_j = \dfrac{1}{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}} (\vec{F}\,\vec{v} - \dot{W}_t^{(r)})$, dacă se scrie formal

$\mathcal{F} \cdot \mathcal{U} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} (\vec{F}, \dfrac{i}{c}\,\dot{W}_t^{(r)}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} (\vec{v}, ic)$ prin utilizarea formelor condensate (3.236) a lui $\mathcal{F}$, respectiv (3.113) a lui $\mathcal{U}$. Rezultatul (3.238) prin formele condensate (3.236) şi (3.113) este posibil, dacă se ţine cont de structura (3.188) a spaţiului Minkowski $\mathcal{S}_M$. Prin (3.239) $\vec{F} = \dot{\vec{p}} \equiv \dfrac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\,\dot{m}$

[cu $\vec{p} \equiv \vec{p}_r$ impulsul relativist (3.190)] şi prin (3.240) $\dot{W}_t^{(r)} \equiv \dfrac{dW_t^{(r)}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{d}{dt}(mc^2) = c^2\dot{m}$,

ambele introduse în (3.238), produsul scalar (3.238) se transformă în

(3.241) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{U} \equiv \sum_{j=1}^{4} F_j u_j = \dfrac{1}{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}} [m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}} + (v^2 - c^2)\ \dot{m}] = 0$, dacă se utilizează

$\dot{m} \equiv \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \dfrac{m\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}}{c^2 - v^2}$ [cu m_0=const. şi v_T=v, prin raportarea la $(RI)_0$ propriu].

Anularea produsului scalar $\mathcal{F} \cdot \mathcal{U}$, conform rezultatului (3.241), satisface condiţia de *ortogonalitate* (perpendicularitate) a cuadrivectorilor $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$ în $\mathcal{S}_M$. Această *ortogonalitate dintre* $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$ este ilustrată grafic în figura 3.10, în care au fost reprezentaţi cuadrivectorii mecanici fundamentali ($\mathcal{R}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{A}$; $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$), în cazul mişcării rectilinii şi uniform accelerate (MRUA).

3.27.2 Identificarea teoremei variaţiei energiei relativiste totale $W_t^{(r)}$ prin condiţia de ortogonalitate dintre cuadrivectorii $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$

Demonstrarea ortogonalităţii dintre $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{U}$ în subparagraful 3.27.1 echivalează cu a scrie că:

(3.242) $\mathcal{F} \cdot \mathcal{U} \equiv \sum_{j=1}^{4} F_j u_j = 0$, sau echivalent, prin formulele condensate (3.236) şi (3.113):

(3.243) $F_1u_1 + F_2u_2 + F_3u_3 + F_4u_4 \equiv \vec{F} \cdot \vec{v} - \dot{W}_t^{(r)} = 0$. Explicitând (3.243) prin $\dot{W}_t^{(r)} \equiv \dfrac{dW_t^{(r)}}{dt}$,

rezultă (3.244) $dW_t^{(r)} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = dL_{mec}$, dacă se utilizează $\vec{v} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ şi definiţia fizico-matematică a lucrului mecanic în procesele (fenomenele) pur mecanice.

Sintetizând, din (3.244) reţinem: (3.245) $dW_t^{(r)} = dL_{mec}$, care reprezintă tocmai *forma matematică a teoremei variaţiei energiei relativiste totale* din dinamica relativistă, teorema fiind pusă în evidenţă pe cale cuadrivectorială cu ajutorul ortogonalităţii dintre cuadrivectorul forţă-putere $\mathcal{F}$ şi cuadrivectorul viteză $\mathcal{U}$, în spațiul Minkowski al tuturor evenimentelor relativiste $\{(e_r)_k \equiv (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, x_4^{(k)})\}$ cu k oricât de mare.

3.27.3 Enunțul teoremei variației energiei relativiste totale ($W_t^{(r)}$)

<În fenomenele (procesele) pur mecanice, variația energiei relativiste totale este egală cu lucrul mecanic efectuat asupra sistemului mecanic>. Se observă că fenomenele (procesele) pur mecanice sunt acelea în care nu intervin forțe de frecare, și, în general, nu are loc disipație.

3.27.4 Remarcă finală asupra teoremei variației energiei relativiste totale ($W_t^{(r)}$)

Analizând modul cum apare, în dinamica relativistă cuadrivectorială, *legea de variație a energiei relativiste totale* (3.245), precum și modul cum este măsurată variația cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$ [măsură exprimată prin legea fundamentală a acțiunii cuadrivectorului forță-putere $\mathcal{F}$ (3.235)-(3.237)], rezultă că, în cadrul cuadrivectorial, *legea de variație a cuadrivectorului impuls-energie $\mathcal{P}$ în raport cu timpul cinematic* implică *legea de variație a energiei relativiste totale* în modul în care este structurat cuadrivectorul forță-putere $\mathcal{F}$ (3.236) între subspațiile (real, imaginar) spațiului Minkowski $\mathcal{S}_M$, forța $\vec{F}$ din structura cuadrivectorului dând măsura lucrului mecanic efectuat asupra sistemului fizic reprezentat de punctul material, căruia îi provoacă o variație a energiei relativiste totale, egală tocmai cu lucrul mecanic efectuat.

3.28 Aplicație a teoremei variației energiei relativiste totale (3.245). Justificarea fizico-matematică a conceptului relativist de energie relativistă totală ($W_t^{(r)} \equiv W_{cin}^{(r)} + W_0^{(r)}$) pentru punctul material liber

3.28.0 Precizare conceptuală

Ținând cont de structura generală a funcției analitice Hamilton ca sumă de energie cinetică cu energie potențială, conform definiției analitice (3.161) a energiei mecanice totale și având în vedere că punctul material relativist este considerat liber, în $W_t^{(r)}$ de expresii explicite (3.215)-(3.218) nu apare energia potențială. Datorită acestui, din urmă fapt, este necesar a demonstra că efectiv avem $W_t^{(r)}$ *ca energie relativistă totală*, în forma structurată:

(3.246) $W_t^{(r)} = mc^2 \equiv W_{cin}^{(r)} + W_0^{(r)} = W_{cin}^{(r)} + m_0c^2$.

Pentru a pune în evidență structura (3.246) a lui $W_t^{(r)}$, vom apela la teorema *variației energiei relativiste totale*, tocmai demonstrată fizico-matematic prin obținerea ei în forma (3.245).

3.28.1 Aplicarea teoremei variației energie relativiste totale (3.245) în cazul mișcării punctului material liber

Reluând (3.245), cu specificațiile din 3.28.0, avem (3.247) $dW_t^{(r)} = dL_{mec} = dW_{cin}^{(r)}$, adică în cazul punctului material liber este valabilă relația:

(3.248) $dW_t^{(r)} = dW_{cin}^{(r)}$ de *egalitate a variației energiei relativiste cinetice cu variația energiei relativiste totale.*

Vom remarca faptul că în deducerea relației Einstein (3.230) s-a utilizat în mod tacit această concluzie obținută ca (3.248). Dacă (3.248) este valabilă, atunci ar trebui să conducă, prin *teorema variației energiei cinetice relativiste* [caz particular al teoremei de variație (3.245)]

(3.249) $dW_{cin}^{(r)} = dL_{mec}$, la (3.246), care justifică pe $W_t^{(r)} = mc^2$ ca *energie relativistă totală* cu structura (3.246).

3.28.2 Obținerea structurii (3.246) a energiei $W_t^{(r)} = mc^2$

Considerăm forța exterioară (3.250) $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \equiv \frac{d(m\vec{v})}{dt}$ (cu $\vec{p} \equiv \vec{p}_r = m\vec{v}$ impulsul relativist) ca măsură a variației impulsului relativist în raport cu timpul cinematic. Atunci, conform (3.249), $\vec{F}$(3.250) efectuează lucrul mecanic elementar $dL_{mec} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ egal cu variația energiei cinetice relativiste $dW_{cin}^{(r)}$. Integrând (3.249) pentru situația că $\vec{F}$(3.250) trece punctul material din starea de repaus ($v_0=0$) în starea de mișcare ($v \neq 0$), rezultă:

(3.251) $W_{cin}^{(r)} = \int_{v_0=0}^{v\neq 0} \vec{F}d\vec{r}$, pe care o putem considera unidimensional, generalizarea tridimensională fiind imediată. Înlocuind (3.250) în (3.251) cu specificarea de mai sus, se obține

(3.252) $W_{cin}^{(r)} = \int_0^v F dx = \int_0^v \frac{d}{dt}(mv)dx = \int_0^v d(mv)\frac{dx}{dt} = \int_0^v (mdv + vdm)v = \int_0^v (mvdv + v^2dm) \equiv \int_0^v dW_t^{(r)}$, în care (3.253) $dW_t^{(r)} \equiv mvdv + v^2dm$, cu $dW_t^{(r)}$ o diferențială de precizat în continuare.

Diferențiala de sub semnul ultimei integrale din (3.252), *numai notată* ca $dW_t^{(r)}$ conform cu (3.253), se demonstrează a fi tocmai (3.254) $dW_t^{(r)} \equiv d(mc^2) = c^2dm$. Pentru aceasta se reia în discuție notația (3.253) prin intermediul legii relativiste (3.213) ce dă $m(v^2)$, pe care o rescriem ca:

(3.255) $m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$ și o diferențiem rezultând

(3.256) (a) $2mc^2dm - 2mv^2dm - 2m^2vdv = 0$ sau (b) $c^2dm - v^2dm - mvdv = 0$ sau

(c) $c^2dm = mvdv + v^2dm \equiv d(mc^2) \equiv dW_t^{(r)}$ reprezentând tocmai afirmația (3.254), specificând și justificând fizico-matematic identificarea cu (3.253).

Astfel, (3.552) se rescrie:

(3.257) $W_{cin}^{(r)} = \int_0^v dW_t^{(r)} = \int_0^v c^2dm = c^2m\Big|_{v_0=0}^{v} = c^2m(v^2) - c^2m(0) \equiv mc^2 - m_0c^2 \equiv W_t^{(r)} - W_0^{(r)}$, din care avem (3.258) $W_t^{(r)} = W_{cin}^{(r)} + W_0^{(r)}$, adică tocmai (3.246) prin care se afirma că $W_t^{(r)}$ este *energia relativistă totală a punctului material liber*.

3.28.3 Despre $W_0^{(r)} = m_0c^2$ ca energie internă a unui sistem fizic

Demonstrarea structurii (3.258) pentru $W_t^{(r)} = mc^2$, cu o *parte externă* ca $W_{cin}^{(r)}$ permite, pentru *energia de repaus (proprie)* $W_0^{(r)} = m_0c^2$, *desemnarea* ca *energie internă*. Dacă drept forme de *energie internă a unui sistem fizic* se pot desemna forme de existență precum calorică, potențială la nivel atomic, potențială la nivel molecular etc., atunci în cazul sistemelor fizice alcătuite din particule elementare (constitutive), *cea mai mare parte a energiei interne este dată de energia de repaus*, justificându-se astfel desemnarea energiei $W_0^{(r)}$ ca *energie internă*, alături de cea *externă* [în structura (3.258) a lui $W_t^{(r)}$]. *Cel mai bun exemplu prin care* $W_0^{(r)} = m_0c^2$ *este considerată energie internă* este, modul cum se calculează *energia de legătură a nucleului în fizica nucleară*, pe baza formulei $W_{leg} = [Zm_p + (A-Z)m_n - M(A,Z)]c^2$, în care apare o diferență între *energia de repaus a tuturor nucleonilor* (protoni și neutroni) constituenți ai unui nucleu atomic, considerați liberi $(W_0^{(r)})_{nucleoni\ liberi} = [Zm_p + (A-Z)m_n]c^2$ și *energia de repaus a nucleului atomului* (de număr de masă A și număr atomic Z) $(W_0^{(r)})_{nucleu\ atomic} = M(A,Z)c^2$, prin masele de repaus m_p, m_n și M(A,Z) ale protonului, neutronului, respectiv nucleului atomic considerat.

3.29 Aplicație dinamică einsteiniană specială (I). Punerea în evidență a masei relativiste longitudinale și a masei relativiste transversale. "Rozeta relativistă" a traiectoriei punctului material ce se mișcă în câmp de forțe centrale

3.29.0 Precizare justificativă

Din punct de vedere dinamic, *problema relativistă* $m(v^2)$ a variației masei de mișcare/cinematice cu viteza, în lucrarea originală a lui A. Einstein din 1905 care pune bazele TRR/TRS, apare mai complexă, în sensul că legea relativistă (3.213) reprezintă doar un aspect al problemei $m(v^2)$, cel care se referă la *masa* *relativistă transversală* (m_t). Un alt aspect al problemei $m(v^2)$ este cel ce conduce la masa relativistă longitudinală (m_l). Cele două aspecte distincte ale masei relativiste cinematice (m_t şi m_l) sunt *consecinţe dinamice ale modului cum o forţă* $\vec{F}$ *accelerează o particulă de masă* m.

3.29.1 Accelerarea unei particule (punct material) de masă de mişcare/cinematică m sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$. Direcţia vectorului acceleraţie $\vec{a}$ faţă de direcţia forţei $\vec{F}$ /

Se consideră o particulă ce are *masa de mişcare* m dată prin (3.213) şi viteza mişcării $\vec{v}$, încât are $m=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Acţiunea forţei $\vec{F}$ îi imprimă o acceleraţie $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ care poate fi scrisă prin intermediul forţei $\vec{F}$.

Forţa $\vec{F}$ fiind relativistă (prin variaţia impulsului relativist), avem:

(3.259) $\vec{F}\equiv\dot{\vec{p}}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\dfrac{d(m\vec{v})}{dt}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\dfrac{dm}{dt}$, în care introducând acceleraţia $\vec{a}$ şi $\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d}{dt}(mc^2)$ din (3.254) scris ca $\dfrac{dm}{dt}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{dW_t^{(r)}}{dt}\equiv\dfrac{1}{c^2}\dfrac{dL_{mec}}{dt}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\vec{F}d\vec{r}}{dt}=\dfrac{1}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v}$ (prin utilizarea teoremei variaţiei energiei relativiste totale (3.245), rezultă

(3.260) $\vec{F}=m\vec{a}+\dfrac{1}{c^2}\vec{v}(\vec{F}\cdot\vec{v})$. Din (3.260) acceleraţia $\vec{a}$ are expresia vectorială:

(3.261) $\vec{a}=\dfrac{\vec{F}}{m}-\dfrac{1}{mc^2}\vec{v}(\vec{F}\cdot\vec{v})\equiv\vec{a}_1-\vec{a}_2$.

3.29.2 Analiza direcţiei $\vec{a}$ din (3.261) în raport cu direcţia forţei $\vec{F}$. Cazuri speciale când $\vec{a}\parallel\vec{F}$

În (3.261) apare diferenţa dintre doi vectori $\vec{a}_1$ şi $\vec{a}_2$, care în general nu sunt paraleli şi nici coliniari. Astfel, vectorul $\vec{a}$, ca un vector rezultant, nu este paralel cu $\vec{F}$, deoarece $\vec{a}_1\equiv\dfrac{\vec{F}}{m}$ este un vector coliniar şi de acelaşi sens cu $\vec{F}$, iar $\vec{a}_2=-\dfrac{1}{mc^2}\vec{v}(\vec{F}\cdot\vec{v})$ este coliniar şi de sens contrar cu $\vec{v}$. Afirmaţia de coliniaritate de mai înainte poate fi înlocuită cu una de paralelism. Necoliniaritatea (sau neparalelismul) lui $\vec{a}$ cu $\vec{F}$ mai poate fi utilizată pentru a pune problema masei de mişcare a particulei accelerate de $\vec{F}$ la acceleraţia $\vec{a}$, atâta vreme cât $\vec{a}$ nu este paralel/coliniar cu $\vec{F}$, care nu satisface $\vec{a}\sim\vec{F}$, conform legii fundamentale a dinamicii.

Totuşi, există cazuri în care $\vec{a}$ (3.261) este paralelă cu $\vec{F}$, încât să putem avea $a=\dfrac{F}{m}$ care să permită identificarea factorului de proporţionalitate 1/m cu m masa de mişcare (cinematică). Cazurile amintite rezultă din (3.261), prin produsul scalar $\vec{F}\cdot\vec{v}$ din $\vec{a}_2$, ca fiind:

cazul (I) al forţei $\vec{F}$ paralelă cu viteza $\vec{v}$ a particulei considerate ($\vec{F}\parallel\vec{v}$) şi

cazul (II) al forţei $\vec{F}$ perpendiculară pe $\vec{v}$ ($\vec{F}\perp\vec{v}$).

În ambele cazuri, intervine proporţionalitatea $a\sim F$ cu factorul de proporţionalitate 1/m.

3.29.3 Masa relativistă longitudinală ($m_l\equiv m_{\parallel}$)

În *cazul (I)* $\vec{F}\parallel\vec{v}$, rezultă $\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos 0=Fv$, încât (3.261) permite obţinerea unei acceleraţii:

(3.262) $a=\frac{F}{m}-\frac{1}{mc^2}vFv=\frac{F}{m}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{F}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}$, dacă se utilizează (3.213). Din (3.262), factorul de proporționalitate dintre a și F apare *direct* prin $F=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}a$, care se indiciază cu ||, rescriindu-se (3.263) $F_l=m_{||}a_{||}\equiv\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}a_{||}$, și punând în evidență *masa relativistă longitudinală*:

(3.264) $m_l\equiv m_{||}=\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$, deoarece *accelerarea* produsă de forța $\vec{F}||\vec{v}$ are loc *pe direcția vitezei*, adică în *lungul direcției de mișcare*.

3.29.4 Masa relativistă transversală ($m_t\equiv m_\perp$)

În *cazul (II)* $\vec{F}\perp\vec{v}$, rezultă $\vec{F}\cdot\vec{v}=Fv\cos\frac{\pi}{2}=0$, care în (3.261) face să apară (3.265) $a=a_1=\frac{F}{m}$ (a_2=0). Indiciind cu ⊥ în (3.265), forța transversală $F_\perp$ are expresia:

(3.266) $F_\perp=m_\perp a_\perp\equiv\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}a_\perp$, de unde pune în evidență *masa relativistă transversală*:

(3.267) $m_\perp=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Confruntând (3.264) cu (3.267), se observă că avem: (3.268) $m_l\equiv m_{||}>m_t\equiv m_\perp$, adică *masa de mișcare* (cinematică) reprezentată de *masa relativistă longitudinală* este mai mare decât *masa relativistă transversală*.

3.29.5 "Rozeta" relativistă a traiectoriei punctului material supus acțiunii unei forțe centrale $\vec{F}$

Tot în lucrarea fundamentală a lui A. Einstein din 1905 asupra TRR/TRS, apare precizată și forma de "rozetă" relativistă pentru traiectoria punctului material, atunci când acesta este supus acțiunii unei forțe centrale $\vec{F}$. Mecanica clasică, nerelativistă fiind, arată că în acest caz traiectoria ar trebui să fie o elipsă cu $\vec{F}$ trecând continuu prin unul din focare.

Conform rezultatului (3.268), traiectoria punctului material (particulei) supusă acțiunii forței centrale $\vec{F}$ suferă o deplasare a periheliului elipsei în sensul mișcării punctului material, deoarece datorită inegalității $m_{||}>m_\perp$ (sau $m_l>m_t$) corpul fizic reprezentat de punctul material relativist "cedează" mai mult componentei tangențiale $\vec{F}_\perp$ decât celei longitudinale $\vec{F}_{||}$ ale forței $\vec{F}$. Deplasarea periheliului elipsei în sensul mișcării și generarea "rozetei" relativiste pot fi modelate și vizualizate prin figura 3.13.

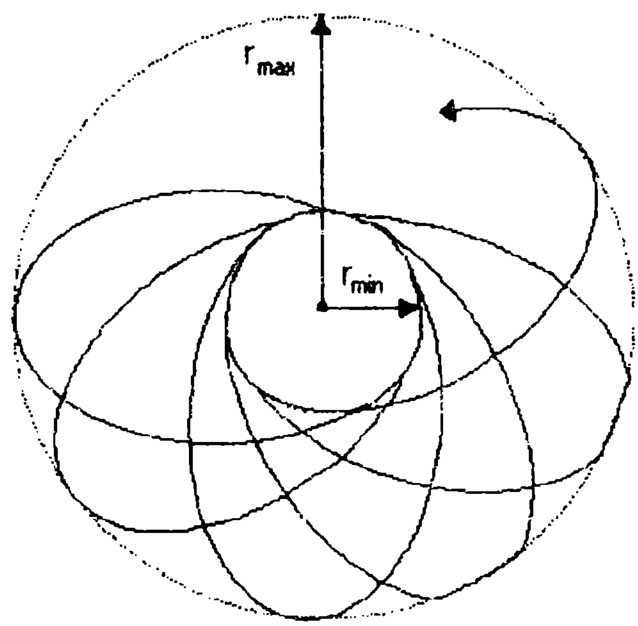


Figura 3.13 Traiectoria unei particule în câmp de forțe centrale ("rozeta" relativistă)

3.30 Aplicație dinamică einsteiniană specială (II). Obținerea pe calea TRR/TRS a relației Planck-Einstein $p_f = \frac{h}{\lambda_f}$, ce leagă impulsul fotonului de lungimea de undă a undei electromagnetice. Generalizarea De Broglie în forma $p = \frac{h}{\lambda}$ pentru microparticule (obiecte cuantice)

3.30.0 Precizare istorică și metodologică

În baza experimentală a *mecanicii cuantice* intră și legea Planck-Einstein-DeBroglie sintetizată matematic prin relația (3.269) (a) $E = h\nu \equiv \hbar\,\omega$ și (3.269) (b) $\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$ ($p = \frac{h}{\lambda}$), reunind formula Planck din 1900 cu formula Einstein (3.270) $p_f = \frac{h}{\lambda_f}$ din 1905 generalizată în sensul (3.269) (b) de către Louis DeBroglie în 1924. Formula (3.270) a fost obținută de Einstein *în lucrarea sa explicând efectul fotoelectric extern* (descoperit în 1888 de către H. Hertz), prin introducerea *noțiunii de cuantă de lumină sau foton*, pe baza utilizării relației Planck (3.269) (a), dar și pe baza *conceptului de particulă relativistă pentru foton*. Lucrarea lui Einstein cu explicarea efectului fotoelectric a apărut tot în "Annalen der Physik" vol. XVII (1905) pag. 132-148, ca și lucrarea fundamentând TRR/TRS. *Conceptul de particulă relativistă pentru foton* a fost utilizat de Einstein în lucrarea sa din 1906 privitoare la emisia și absorbția luminii.

Deoarece *fotonul* este un *obiect cuantic* (microparticulă) generalizarea deBroglie (3.269) (b) a relației Einstein (3.270) la orice "*particulă de materie*" *justifică obținerea relativistă a formulei generalizate* (3.269) (b), ca o *necesitate în crearea bazei experimentale a mecanicii cuantice*. De aceea, relația (3.269) (b) va fi analizată, obținută și detaliată pe *calea relativistă a* TRR/TRS.

3.30.1 Energia şi impulsul unei particule relativiste cu masa de repaus $m_0 \neq 0$. Particule cu $v < c$

Cum s-a arătat mai sus, energia şi impulsul unei particule relativiste cu masa de repaus (proprie) m_0 nenulă sunt fixate prin relaţiile:

(3.271) (a) $W_t^{(r)} = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ sau (3.271) (b) $W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2 c^2}$, respectiv

(3.272) $\vec{p}_r = \dfrac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v_T^2}{c^2}}}$ (cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$).

Dacă particula relativistă posedă o masă de repaus (proprie), atunci se poate găsi un referenţial inerţial faţă de care particula va fi în repaus (imobilă) având, la $m_0 \neq 0$, $W_0^{(r)} = m_0 c^2$ ca *energie de repaus*, respectiv având (3.273) (a) $W_t^{(r)} \to \infty$ şi (3.273) (b) $\vec{p}_r \to \infty$, atunci când (3.273) (c) $v \to c$ [conform cu (3.271)-(3.273)]. Din (3.273), rezultă că *o particulă cu masă de repaus finită şi nenulă se poate deplasa cu viteza luminii*, consecinţă directă a PIVMPI şi TrLS (3.61) [care descriu matematic trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$].

3.30.2 Energia şi impulsul unei particule cu masa de repaus nulă ($m_0 = 0$). Particule cu viteza c

Din (3.271) (a) şi (3.272), impulsul particulei relativiste este dat de (3.274) $\vec{p}_r = \dfrac{W_t^{(r)}}{c^2}\vec{v}$. Dacă particula considerată *se deplasează cu viteza* v=c, atunci (3.274) se particularizează la (3.275) $p_r = W_t^{(r)}/c$, caz în care (3.279)(b) arată că, pentru *particula ce se deplasează cu viteza c*, masa ei de repaus trebuie să fie nulă, adică $m_0=0$. Astfel, TRR/TRS şi implicit mecanica relativistă admite *existenţa particulelor cu masă de repaus* (proprie) *nenulă, ca particulele ce se deplasează cu viteza* c. *O astfel de particulă relativistă este fotonul* (cuanta de lumină).

3.30.3 Cuanta de lumină sau fotonul. Relaţia Einstein (3.270) dintre impulsul fotonului şi lungimea de undă a undei electromagnetice luminoase

Existenţa particulelor deplasându-se cu viteza c, *dar având masa de repaus* (proprie) *nulă* ($m_0=0$) *este pusă în evidenţă de* TRR/TRS, fără a putea da avantajele unei asemenea asocieri de valori pentru v şi m_0. La întrebarea dacă în natură există mişcări ce au loc cu viteza c, se poate răspunde: *este evident că în general faza unei unde electromagnetice în spaţiul liber* (vidul electromagnetic) se deplasează cu viteza c a luminii, aşa cum rezultă din teoria Maxwell a electromagnetismului, unde $c \equiv v_{fază} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Relaţia relativistă (3.275) dintre *impuls şi energie* este valabilă şi în cazul luminii, deoarece (3.275) poate fi obţinută prin intermediul tratării fizico-matematice a unei *experienţe asupra presiunii exercitate de o undă electromagnetică luminoasă pe suprafaţa unui corp*. Această experienţă este direct legată de absorbţia luminii în interacţiunea ei cu substanţa, cum este şi *cazul efectului fotoelectric extern*, explicat de Einstein în 1905 apelând atât la (3.275), cât şi la formula Planck a *cuantei de energie* (3.269) (a). În lucrarea sa tratând efectul fotoelectric din 1905, ca şi în cea asupra emisiei şi absorbţiei luminii din 1906, Einstein considera că *lumina se comportă ca un ansamblu de particule, fiecare cu energia* (3.269') $E_f = h\nu$ şi *impulsul* (3.275') $p_f = E_f/c$, la fiecare interacţiune elementară cu substanţa participând *numai o singură particulă numită cuantă de lumină sau foton*. Introducând (3.269') în (3.275'), rezultă:

(3.276) $p_f = \dfrac{h\upsilon_f}{c} = \dfrac{h}{\left(c\dfrac{1}{\upsilon_f}\right)} = \dfrac{h}{cT} = \dfrac{h}{\lambda_f}$, cu λ_f *lungimea de undă a undei electromagnetice luminoase*, obţinută prin (3.277) $\lambda_f = cT = c/\nu_f$ cu ν_f frecvenţa utilizată în formula Planck (3.269) (a). În toate relațiile scrise până acum în care apare, h este constanta Planck, cu valoarea $6{,}626\cdot 10^{-34}$ j·s exprimată în unități de acțiune Hamilton $S_{1\to 2}$. Drept *concluzie fundamentală* avem:

(I) *particula relativistă numită foton are energia*
(3.278) $(W_t^{(r)})_{foton} = m_f c^2 = (m_f c)c = p_f c$ și *impulsul* $p_f = m_f c$;

(II) *dacă fotonul desemnează cuanta de lumină*, atunci el poartă cuanta de energie (3.279) $E_f = h\nu_f$, cu ν_f frecvența undei electromagnetice luminoase ce "poartă" fotonul;

(III) egalitatea (3.280) $E_f = (W_t^{(r)})_{foton}$ *conduce la relația Einstein* (3.276), *ce leagă impulsul fotonului* p_f *de lungimea de undă* λ_f a undei electromagnetice luminoase, *prin intermediul constantei Planck* h.

3.30.4 Generalizarea DeBroglie a relației Einstein (3.276) ca relația Planck-Einstein-DeBroglie ($p=h/\lambda$)

În teza sa de doctorat din 1924, Louis DeBroglie introduce termenul de *undă de materie*, considerând că fiecărei microparticule (electron, atom, moleculă etc.) i se poate atașa o undă ce "poartă" microparticula respectivă, numită ulterior unda DeBroglie atașată microparticulei sau *unda asociată microparticulei*. Între impulsul p al microparticulei și lungimea de undă λ a "undei de materie" ce "poartă" microparticula, DeBroglie postulează relația (3.281) $p = h/\lambda$ și/sau $\lambda = h/p$, prin generalizarea relației Einstein (3.276). Pentru a-și permite o asemenea generalizare DeBroglie ia în considerare formula Planck (3.269) (a), făcând considerații analitice de mecanică analitică cu plecare de la acțiunea Hamilton $S(\{q_i\};t)$ a mișcării unei particule, prin care se poate stabili o *viteză de fază* (de propagare) *a hipersuprafeței de egală acțiune*. Detalii analitice suficiente asupra deducerii relației de tip (3.281) se pot obține din paragraful 2.36 al cursului nostru de FT (v. ref. 106, pag. 162-163), de unde se poate observa că *pentru obținerea relației Planck-Einstein-DeBroglie* (3.281) *nu sunt necesare de loc considerații relativiste*. Această situație fizico-teoretică are acoperire epistemologică în generalitatea formalismului analitic Hamilton-Jacobi, care furnizează *funcția analitică* $S(\{q_i\};t)$, ca unul din cele mai *puternice instrumente conceptuale fizico-matematice* ale fizicii teoretice. Explicația acestei "indiferențe" a *mecanicii analitice față de deducerea relativistă a relației* (3.281) este dată de *generalitatea funcției analitice* $S(\{q_i\};t)$, care permite: (a) *obținerea funcțiilor analitice relativiste Lagrange* ($\mathcal{L}_r$), *respectiv Hamilton* ($\mathcal{H}_r$) (după cum s-a văzut în cap.V §3.21 pentru $\mathcal{L}_r$ și în § 3.24 pentru $\mathcal{H}_r$) în cazul punctului material relativist liber, furnizând bazele teoretice analitice relativiste ale TRR și permițând obținerea relativistă a relației (3.281), respectiv (b) *includerea efectivă a situației teoretice* (a) în "propagarea" suprafeței de egală acțiune în spațiul analitic Lagrange (spațiul de configurație) $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$, ca un caz particular de precizat printr-o formă *concretă a integralei complete a mișcării*, prin $S(\{q_i\};t)$ evidențiind una din soluțiile generale ale ecuației analitice Hamilton-Jacobi. Astfel, avem și dovada generalității fizico-matematice a mecanicii analitice, care prin $S(\{q_i\};t)$ și ecuația Hamilton-Jacobi poate genera, atât *fizică analitică nerelativistă*, cât *fizică analitică relativistă*, urmând ca invarianțele de tip Galilei, respectiv de tip Lorentz pentru f.a.$\mathcal{L}$, respectiv f.a.$\mathcal{H}$ să satisfacă în mod corespunzător principiul de corespondență (PdC), respectiv principiul relativității galileene (PRG), ori *principiile relativității einsteiniene* (PIVMPI, PRE, PdC adaptat).

Mai menționăm că afirmația de mai sus, legată de funcția analitică $S(\{q_i\};t)$ și de ecuația Hamilton-Jacobi poate fi adevărată și privitor la generalizarea formalismului analitic al fizicii analitice necuantice, respectiv al fizicii analitice cuantice (nerelativistă și/sau relativistă). Detalii asupra acestui aspect metodologic de FT se pot obține din cap. V (paragrafe 2.37 și 2.38) și din cap. VI ale volumului (I) al cursului nostru de FT (v. ref. 106, pag. 163-171).

$[P_3^{(3)}]\equiv$ ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RESTRÂNSĂ

(p.153-238)

Cap. VI - Cap. X

Rezumat

(1) Toate legile fizicii trebuie să aibă formă invariantă față de transformările fizico-matematice care fac trecerea reciprocă de la un referențial inerțial la altul [RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$] (Enunț al PRE) [CAP. VI]

(2) Formularea relativist-restrânsă a mecanicii analitice contribuie decisiv la elaborarea TRR/TRS cel puțin prin consecințele relativist-metodologice pe care le are cunoașterea funcțiilor analitice Lagrange ($\mathcal{L}_r$) și Hamilton ($\mathcal{H}_r$), care permit formularea relativistă a principiului variațional Hamilton (PVHR). De asemenea, la fundamentarea întregii fizici teoretice relativiste (necuantice și cuantice). [CAP. VII]

(3) O termodinamică relativistă este posibilă punând în evidență *efecte termodinamice relativiste*, care reprezintă, în esență, *consecințe termodinamice ale transformărilor Lorentz speciale* (TrLS) (3.61), dintre care cele mai importante sunt: (a) *variația masei de repaus* a unui sistem termodinamic (corp macroscopic) *cu schimburile de căldură* cu alt sistem termodinamic; (b) *variația energiei de repaus* a corpurilor *cu schimburile de căldură* cu alte corpuri; (c) *apariția unei forțe relativiste determinată de variația masei de repaus cu schimburile de căldură*, forță al cărei lucru mecanic modifică lucrul mecanic din termodinamica nerelativistă; (d) *o relație relativistă de transformare a cantității de căldură*; (e) *variația relativistă relativă a căldurii măsurate* în referențialele reciproc inerțiale [RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$]; (f) *o relație relativistă de transformare* a temperaturii etc. [CAP. VIII]

(4) Extinderea principiilor TRR/TRS la fenomenele electromagnetice a marcat *decisiv* evoluția fizicii, TRR/TRS făcând cea mai completă unificare fizico-matematică a fenomenelor electrice și magnetice, având ca rezultat evidențierea fizico-teoretică a naturii relativiste a fenomenelor electromagnetice, cu *modelarea teoretică completă cuadridimensională a mărimilor și a legilor fizice, în cadrul electrodinamicii relativiste*. [CAP. IX]

(5) *La baza electrodinamicii relativiste cuadridimensionale*, ca sistem de propoziții furnizând teoria fizico-matematică a *modelului teoretic relativist electrodinamic*, stau postulatele sale enunțate în număr de trei (postulatul I al *divergenței tensoriale a cuadritensorului excitație* $\{\Gamma\}$; postulatul II al *rotorului tensorial al cuadritensorului electromagnetic câmp* $\{\Phi\}$, și postulatul III al relațiilor dintre cuadritensorii electromagnetici relativiști *câmp* $\{\Phi\}$, *excitație* $\{\Gamma\}$ și *polarizare* $\{\Pi\}$ [CAP. IX]

(6) Postulatele electrodinamicii relativiste sintetizează cuadridimensional perechi de postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene în număr de șase, furnizând *trei enunțuri relativiste*, ce pun întreaga structură fizico-matematică noțional-conceptuală a postulatelor neformulate relativist în electrodinamica clasică, dar *intrinsec* relativiste prin caracterul special relativist ascuns al legilor electrodinamicii clasice. [CAP. IX]

(7) *O paralelă a formelor matematice invariante relativist* (evidentă în structura cuadritensorială a mărimilor fizice electrodinamice relativiste $[\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}, \{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ și $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}]$) *impuse de cele trei postulate ale electrodinamicii relativiste*:

$$(3.434)\quad (p_I)\ \mathrm{DIV}_d\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}\equiv\nabla_4\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}=J(\vec{J},ic\rho);$$

$$(p_{II})\ \mathrm{ROT}\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}\equiv\nabla_4\times\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=0 \text{ și}$$

$$(p_{III})\ \{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=\mu_0[\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}+\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}],$$

ca formele matematice impuse de cele șase postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene (reformulată explicit relativist):

$$(3.435)\quad (G_I)\ (1)\ \mathrm{rot}\vec{H}\equiv\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{tot}=\vec{J}_C+\vec{J}_D\equiv\vec{J}_C+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \text{ și } (2)\ \mathrm{div}\vec{D}\equiv\nabla\cdot\vec{D}\equiv\nabla\vec{D}=\rho;$$

$$(G_{II})\ (3)\ \mathrm{rot}\vec{E}\equiv\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ și } (4)\ \mathrm{div}\vec{B}\equiv\nabla\cdot\vec{B}=\nabla\vec{B}=0; \text{ respectiv}$$

$$(G_{III})\ (5)\ \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \text{ și } (6)\ \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M}),$$

afirmă invarianța relativistă, în raport cu trecerea reciprocă de la un referențial inerțial la altul RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, *a tuturor formelor matematice maxwelliene* (3.435), datorită implicării directe a fiecărui grup de relații maxwelliene în câte una din formele matematice (3.34), prin formularea cuadrivectorială şi cuadritensorială, apriori invariante faţă de TrLGenerale (3.43-44), respectiv faţă de TrLSpeciale (3.61), care descriu matematic trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'. [CAP. IX]

(8) Întregul *capitol IX*, dedicat ***elementelor de electrodinamică relativistă***, are în vedere ***formularea cuadrivectorială şi cuadritensorială a electrodinamicii clasice maxwelliene***, spre a explicita invarianţa relativistă a legilor electromagnetismului care, prin natura fenomenelor electromagnetice, sunt intrinsec relativiste, ***baza acestei reformulări fiind expusă minimal în rezumatul*** (7), după ce mărimile fizice electromagnetice metodologic relativist perechi $\{(\vec{J};\rho)$, $(\vec{B};\vec{E})$, $(\vec{H};\vec{D})$, $(\vec{M};\vec{P})\}$ au permis introducerea, utilizarea şi construirea ***cuadrivectorului densitate de curent şi de sarcină electrică*** $J(\vec{J},ic\rho)$ şi ***a cuadritensorilor de ordinul doi electromagnetici***: *câmp* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, ***excitaţie*** $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ şi ***polarizare*** $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$, pentru caracterizarea stării locale a câmpului electromagnetic şi a stării corpurilor aflate în câmp.

(9) Cuplajul metodologic în perechi dintre mărimile fizice electromagnetice enumerate în *rezumatul* (8), la nivelul formulării cuadridimensionale a electrodinamicii se dovedeşte a fi o ***exprimare fizico-matematică fundamentală a faţetelor duale ale realităţii fizice relativiste reprezentate de câmpul electromagnetic***, iar efectele electromagnetice pur relativiste, obţinute prin raportarea la referenţialele inerţiale aflate în mişcare relativă unul faţă de celălalt [RI $\leftrightarrows$ (RI)', v. figura 3.3.(b)] se demonstrează a fi, la nivel cuadrivectorial şi cuadritensorial, manifestări reale ale aceloraşi faţete ce dau natura relativistă a ***câmpului electromagnetic cel mai general***, fizico-matematic, posibil în ***electrodinamica relativistă teoretică*** modelând realitatea fizică cuprinzând distribuţiile şi/sau mişcările cele mai complexe ale purtătorilor de sarcină electrică. [CAP. IX].

(10) <*Elementele de teoria câmpurilor Lagrange*> din capitolul X prezintă generalizarea relativistă a teoriei câmpurilor reprezentate printr-o funcţie de undă scalară permiţând atât formularea relativistă a teoriei câmpurilor având starea fizică locală şi momentană caracterizată de o densitate de lagrangeană ce satisface ecuaţia Lagrange generalizată (3.467) ca ecuaţie cuadridimensională, cât şi particularizarea acesteia la ecuaţia relativistă cuadridimensională D'Alembert din electromagnetismul teoretic, cum şi la ecuaţiile cuantice relativiste de tip Klein-Gordon, cu cazul ei generalizat tensorial în forma ecuaţiei Proca [CAP. X].

(11) Unul dintre cele mai importante rezultate fizico-teoretice ale capitolului X este sintetizarea faptului că ***formularea relativistă a teoriei câmpurilor fizice de tip Lagrange conduce la ecuaţii relativiste cuantice care descriu particule cuantice***, reprezentând tocmai ***cuanta câmpului fizic*** respectiv, generat teoretic de o densitate de lagrangeană de dependenţă $f_{\mathcal{L}}[\Psi(x_j), \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}]$ $(j=\overline{1,4})$ explicitată, posibil de indus din situaţii experimentalo-teoretice privitoare la câmpuri fizice teoretice [electromagnetice, pionice şi chiar de tip Dirac (pe care le-am desemnat părţii a 5ª a cursului de FT)] [CAP. X].

(12) ***Figurile** 3.1, 3.2* şi *3.4* conţin precizări importante asupra $P_3^{(3)}$ a părţii a 3ª a cursului de FT, cea dintâi în cadrul unei interacţii metodologice între TRR/TRS şi diferitele domenii ale FT generând FT relativistă, cea de-a doua figură prezentând organigrama generării FT relativiste prin principiile TRR/TRS (PIVMPI, PRE, PdC), iar ultima figură amintită prezentând structura completă a $P_3^{(3)}$ generată de acţiunea metodologică a TRR/TRS prin PRE generând fizică teoretică relativistă.

(13) Tot pe cale grafică, sunt ilustrate structural şi metodologic *capitolele VII* în ***figura** 3.14* dând o diagramă structurală şi metodologică, respectiv *VIII* în ***figura** 3.15* cu aceeaşi menire diagramatică, în cazurile acestor două figuri oferindu-se esenţa fizico-matematico-metodologică a formulării relativist-restrânse a mecanicii analitice, respectiv a termodinamicii teoretice, cu posibilitatea înţelegerii structurale complete a celor două domenii de FT relativistă.

(14) Şi capitolului IX, elaborând şi expunând <Elemente de electrodinamică relativistă>, i-a fost întocmită o sinteză structurală esenţial grafică, în ***figura** 3.16*, care-i ilustrează ***structura noţional-conceptuală*** şi ***metodologic-funcţională***, vizând şi realizând formularea cuadridimensională (cuadrivectorială şi cuadritensorială) garantând invarianţa relativistă a formei matematice a legilor electromagnetismului, şi semnalând ***efecte electrodinamice pur relativiste***, legate direct de trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' şi corelate cu relativitatea şi simultaneitatea (din TRR/TRS).

(15) Pentru ultimul capitol de FTR, cap. X <Elemente de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange. Ecuaţii relativiste cuantice de tip Klein-Gordon. Ecuaţia Proca>, ***sinteza structurală*** este expusă diagramatic-funcţional, în ***figura** 3.17*, pe baza conceptelor fundamentale pentru câmpul fizic scalar: ***funcţia de undă*** $\Psi(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))$, ***densitatea de lagrangeană*** $f_{\mathcal{L}}[\Psi(x_j), \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}]$ şi ecuaţia Lagrange generalizată (3.467), elaborarea relativistă apelând la ***principiul variaţional Hamilton relativist*** (PVHR), în forma PAS (***principiul acţiunii Schwinger***), după scrierea acţiunii relativiste $S_{camp}^{1\to2}$ de tip Schwinger (3.453).

(16) ***Reunirea tuturor figurilor*** precizate în rezumatele (12)→(15), adică ***reunirea setului de figuri** 3.1,3.2 **şi** 3.4 **cu setul de figuri** 3.14* (pentru cap. VII), *3.15* (pentru cap. VIII), *3.16* (pentru cap. IX) şi *3.17* (pentru cap. X) ***generează o sinteză grafică completă a subpărţii*** $P_3^{(3)} \equiv$ <***Elemente de fizică teoretică relativist-restrânsă***>, sinteză din care pot fi extrase elemente fundamentale noţional-conceptuale, fizico-matematico-teoretice modelatoare, principial-metodologice de elaborare şi structurare, fizico-matematico-aplicative etc., toate ***generatoare de fizică teoretică*** (FT) ***în general, respectiv de fizică teoretică relativistă*** (FTR) ***în special, întrunind condiţiile necesare şi suficiente*** pentru ca $P_3^{(3)}$ să se constituie într-o ***subparte*** (cea de FTR) foarte importantă a cursului nostru de FT, prin care ne-am propus să dăm o ***imagine completă***

asupra întregii fizici teoretice, după cum se va putea vedea prin alăturarea părții a 4ª (<Fizică statistică>) și a părții a 5ª (<Mecanică cuantică>), destinate volumului III din <Fundamente de fizică teoretică>.

Cuprinsul detaliat al $[P_3^{(3)}]$ ≡ **ELEMENTE DE FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVIST-RETRÂNSĂ (p.153→238)**

CAP. VI POSIBILITĂŢI DE ELABORARE RELATIVIST-RETRÂNSĂ A ÎNTREGII FIZICI TEORETICE. DOMENII DE FIZICĂ CLASICĂ ŞI NECLASICĂ DE ELABORAT RELATIVIST ÎN $P_3^{(3)}$

3.31 Consideraţii generale privind fizica teoretică relativistă (FTR)

3.31.0 Precizarea termenului de FTR

Formularea relativist invariantă a legilor fizicii, în forma invarianţei/covarianţei lor faţă de transformările Lorentz speciale (TrLS) (3.61), prin înlocuirea transformărilor Galilei (TrG) (3.1)-(3.2) cu TrLS, care descriu raportarea fenomenelor fizice la referenţialele inerţiale reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, poate completa *mecanica relativistă* (expusă în capitolele precedente) cu alte ramuri ale fizicii clasice formulate relativist-invariant, deoarece în a sa TRR/TRS Einstein a postulat că principiile TRR se extind asupra tuturor fenomenelor fizice. De asemenea, ramuri ale fizicii neclasice, cum ar fi mecanica cuantică, vor putea fi elaborate relativist. Astfel, vom putea desemna prin *fizică teoretică relativistă* (FTR) întreaga fizică teoretică care aplică principiile TRR/TRS (expuse în cap.I, paragrafele 3.5→3.8) pentru a reelabora modelele teoretice având la bază principiul relativităţii Galilei (PRG), ca şi ipoteza de propagare cu viteză infinită a interacţiunilor, respectiv de a elabora modele teoretice noi pe baze relativiste. În cursul de FT de faţă, nu avem în vedere teoria relativităţii generale (TRG), care este esenţial o teorie generală a gravitaţiei, ci numai acea parte a FT care este relativist-restrânsă, adică este relativistă în sensul TRR/TRS prin impunerea principiilor TRR/TRS, TRG implicând şi principiul echivalenţei masei inerţiale cu masa gravifică. Implicarea acestui din urmă principiu în cadrul cuadridimensional minkowskian, arată că o FTR *completă ar trebui să implice şi* TRG, *fapt ce depăşeşte programa analitică* a cursului nostru de FT, dar şi explică consideraţiile generale istorico-epistemologice din paragrafele introductive ale *părţii a 3^a* (în special paragraful 3.4 (subp. 3.4.5)), în care *teoria relativităţii* (TR) a fost precizată în formele TRR/TRS, respectiv TRG, ambele elaborate de Einstein.

În *figura 3.1* din *cap.0* ($P_3^{(1)}$), o diagramă de intersecţie metodologică între TRR/TRS şi diferitele domenii ale FT generând FTR dă, practic, toate domeniile relativiste pe care le vom enumera şi preciza în cap.VI, apoi le vom expune şi dezvolta în cap. VII-X, în timp ce *figura 3.2* din *cap.I* ($P_3^{(1)}$) prezintă organigrama generării FTR prin principiile fundamentale ale TRR/TRS (PIVMPI, PRE, PdC). De asemenea, $P_3^{(3)}$ de faţă îşi are structurarea precizată complet în *figura 3.4*, care prezintă organigrama de acţiune metodologică a TRR/TRS prin PRE generând FTR.

3.31.1 Precizare metodologică relativistă fundamentală

Principala modalitate fizico-matematică de reelaborare relativistă a unui domeniu de fizică clasică constă în reformularea legilor domeniului considerat, în aşa fel încât să devină invariante/covariante Lorentz, adică invariante în raport cu TrLG şi/sau TrLS (efectiv de aplicat), înlocuind transformările Galilei cu cele Lorentz. Covarianţa Lorentz poate fi mai uşor obţinută prin reformularea domeniului apelând la *generalizarea cuadrivectorială a mărimilor fizice fundamentale*.

3.31.2 Mecanica analitică întâiul domeniu de fizică clasică de reformulat relativist-restrâns

După reelaborarea mecanicii newtoniene pe baza principiilor fundamentale ale TRR/TRS, ca o teorie fizico-matematică relativistă a mişcării mecanice cu viteze $\vec{v}$ de valori comparabile cu viteza c (viteza de propagare a undelor electromagnetice în spaţiul liber/vidul electromagnetic), dezvoltând *cinematica relativistă cuadrivectorială* a punctului material liber în cap.IV şi *dinamica relativistă cuadrivectorială* corespunzătoare în cap.V, reelaborarea relativistă a *mecanicii analitice* apare ca o necesitate relativistă impusă firesc de câteva *argumente esenţiale*: (a_1) echivalenţa principiilor mecanicii analitice cu cele ale mecanicii teoretice newtoniene; (a_2) *mecanica analitică* (v. partea a 2^a a cursului de FT, ref. 106) *ca forma cea mai elaborată a mecanicii teoretice*, rezolvând toate neajunsurile mecanicii teoretice newtoniene; (a_3) *generalitatea formalismelor analitice* (FA$\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$, în primul rând) *în întreaga fizică teoretică* (inclusiv în cea neclasică cuantică); (a_4) *introducerea şi utilizarea metodologică* a celui mai important generator fizico-matematic de FT, principiul variațional Hamilton (PVH), care, apelând la conceptul teoretic de acțiune Hamilton ($S_{1\to2}$), permite unificarea metodologică a întregii FT; (a_5) *deja utilizatele concepte și metode analitice* [acțiune Hamilton $S_{1\to2}$, funcție Lagrange relativistă ($\mathcal{L}_r$), funcție Hamilton relativistă, energie mecanică totală definită analitic, masă de mișcare (cinematică) definită analitic, principiu variațional Hamilton] în *cap.V* [*dinamica relativistă cuadrivectorială* a punctului material pentru explicitarea efectivă a cuadrivectorului impuls $\mathcal{P}(\{p_j\})$ (numit și *cuadrivectorul impuls-energie*)], *pentru a rezolva problemele*: impulsului relativist vectorial $\vec{p}_r$, variației $m(v^2)$ a masei de mișcare (cinematice) cu viteza, respectiv problema energiei $W_t^{(r)}$ (și a celorlalte energii relativiste), ca și problema cuadriforței $\mathcal{F}(\{F_j\}, j=\overline{1,4})$. Toate argumentele ($\{a_k\}$, $k=\overline{1,5}$),corelate cu *adevărul metodologic* că o alegere/deducere potrivită a funcției analitice Lagrange poate conduce la mecanica relativist-restrânsă a lui Einstein, justifică reformularea relativistă a mecanicii analitice în cap.VII.

3.31.3 Termodinamica teoretică domeniu de fizică clasică de reformulat relativist-retrâns

În sens relativist restrâns (în sensul TRR), principala problemă pe care o pune termodinamica este *cum se modifică mărimile fizice* ce intră în exprimarea matematică a principiilor termodinamicii, *atunci când are loc raportarea* stărilor termodinamice și a proceselor termodinamice la *referențialele inerțiale* , raportare ce implică și trecerea reciprocă (din TRR/TRS) *de la un referențial la altul* RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, trecere descrisă matematic de TrLS (3.61), știut fiind că transformările Galilei valabile și în termodinamica clasică (nerelativistă) au drept consecință dinamică independența masei de mișcare a corpurilor (sistemelor termodinamice) de viteză, și considerarea nulă a energiei de repaus (proprii). De asemenea, ținând cont că procesele termodinamice presupun schimburi de căldură (Q) între sistemele termodinamice (corpuri), iar Q fiind dependentă de masă, devine necesară și reformularea relativistă a lucrului mecanic. Pe această cale, se vor putea obține formulări relativiste ale principiilor termodinamicii, generând o *termodinamică relativist-restrânsă*, ca o termodinamică reformulată prin TRR/TRS, în capitolul VIII desemnat ca <Elemente de termodinamică relativistă>, cursul de FT de față urmărind și expunerea efectelor termodinamice relativiste legate de *variația masei de repaus (proprii) cu schimburile de căldură dintre sistemele termodinamice*, variație pusă în evidență de raportarea stărilor termodinamice și a proceselor termodinamice la referențialele reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$. Este tocmai ceea ce ar trebui să conceapă studenții de la secția de chimie-fizică, drept extindere teoretică a cursului lor de termodinamică chimică, punând în evidență efecte termodinamice relativiste.

3.31.4 Electrodinamica clasică și explicitarea invarianței ei relativiste intrinsecă fundamentelor teoretice ale electromagnetismului

Cum s-a specificat, prin principiile sale, TRR *și mecanica relativistă elaborată pe baza ei* furnizează metode eficiente în studiul fenomenelor fizice raportate la toate referențialele inerțiale {RI}, datorită echivalenței acestora, fapt ce impune invarianța formei matematice a legilor fizice față de TrLS, conform PRE. Modelul teoretic al electromagnetismului elaborat de Maxwell (1865,1873) arată că desfășurarea fenomenelor electromagnetice este supusă sistemului Maxwell de ecuații fundamentale, exprimând matematic legile electromagnetismului. Este remarcabil că, deși aceste legi au fost elaborate cu o jumătate de secol înainte de lucrarea fundamentală a lui Einstein punând bazele TRR/TRS, forma lor matematică se conservă în raport cu oricare RI, adică legile Maxwell ale electromagnetismului *sunt invariante față de* TrLS *sau sunt covariante Lorentz, chiar înainte de găsirea formei explicite a* TrLS, care descriu matematic trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$. Esențial, *legile Maxwell ale electromagnetismului sunt legi intrinsec relativiste*, ele neputând fi invariante față de transformările Galilei, ce au la bază ipoteza de propagare instantanee (cu viteză infinită) a interacțiunilor, adică nu satisfac PIVMPI. De aceea, în cap.II (paragraful 3.11) a fost utilizată ecuația de propagare a undelor electromagnetice (3.4), ca reprezentând o lege a electromagnetismului *apriori invariantă Lorentz*, în vederea obținerii explicite a transformărilor Lorentz generale (TrLG) (3.44), apelând la demonstrarea invarianței ecuației (3.4) față de alt tip de transformări, altele decât cele Galilei (3.1)-(3.2).

Cea mai simplă metodă de punere în evidență a *invarianței (covarianței)* Lorentz a sistemului de ecuații Maxwell, adică de punere în evidență a invarianței față de TrLS (3.61), constă în *scrierea acestor ecuații în formă cuadrivectorială și cuadritensorială*, prin explicitarea cuadrivectorilor și cuadritensorilor electromagnetici corespunzători, cum se va face în cap.IX al prezentului curs.

Pe această cale, se va obține formal *electrodinamica relativistă*, cu mărimile fizice cuadrivectoriale și cuadritensoriale satisfăcând postulatele electrodinamicii maxwelliene reformulate cuadridimensional. De importanță specială, în acest caz, este raportarea mişcării purtătorilor de sarcină electrică, respectiv a corpurilor fizice aflate în câmp electric și/sau magnetic, la referențialele inerțiale reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$.

3.31.5 Domenii de fizică neclasică și posibila lor formulare relativistă. Aspecte ale teoriei câmpurilor Lagrange și ale mecanicii cuantice relativiste prin ecuația Klein-Gordon și prin ecuația Proca. Elemente de teoria cuantică a câmpurilor

Principalul domeniu de fizică teoretică neclasică este *mecanica cuantică*, a cărei teorie fizico-matematică poate fi elaborată atât pentru un *model cuantic nerelativist*, cât și pentru un *model cuantic relativist*, după cum *ecuația cuantică de evoluție a funcției de undă ce descrie stările obiectului cuantic modelat* este invariantă în raport cu transformările Galilei (3.1)-(3.2), respectiv cu TrLS (3.61). Această departajare fizico-teoretică va fi subiectul de dezvoltat în *Partea a 5^a a cursului de FT*, care elaborează *mecanica cuantică*. În capitolul X al subpărții $P_3^{(3)}$, vor fi explicitate *elemente de teoria cuantică a câmpurilor*, care este esențial relativistă, și care se va centra numai pe obținerea *ecuației cuantice relativiste Klein-Gordon* (ec.K-G) pe două căi: (c$_1$) plecând direct de la conceptul general de funcție de stare ca funcție de undă scalară a unui *sistem fizic oarecare considerat ca un mediu continuu* [cu caracterizare cuadridimensională spațio-temporală $\{x_j\}(j=\overline{1,4})$≡(x,y,z,ict) relativistă], respectiv (c$_2$) apelând la relațiile de corespondență dintre mărimile fizice cuantice și operatorii cuantici ce le sunt atașați în mecanica cuantică pentru a le descrie operația de măsurare, respectiv la expresia $\mathcal{H}_r$ a funcției analitice Hamilton relativistă a punctului material liber, explicitată prin (3.209) (din paragraful 3.24), care reprezintă și energia mecanică totală a punctului material. De asemenea, cap.X va face generalizarea ecuației Klein-Gordon ca ecuație Proca tensorială.

3.31.6 Considerații și remarci metodologice finale

($R_f^{(1)}$) Ceea ce am desemnat prin FTR, ca fizică teoretică relativistă ar trebui să implice și TRG, nu numai TRR/TRS, ceea ce în cazul *mecanicii cuantice relativiste* ar trebui să ducă la o unificare a teoriei cuantice relativiste cu teoria interacțiunilor gravitaționale, într-o tratare teoretică a nivelului cuantic microscopic, care respectând principiile teoriei cuantice și principiile teoriei gravitației, să elaboreze *modelul teoretic cuantic-relativist gravitațional*, cel mai complet întrevăzut a fi realizat în lucrările lui Stephen W. Hawking (n. 1942), titularul catedrei <"Isaac Newton"> de la Universitatea Cambridge (Anglia), cel mai mare fizician teoretician în viață.

($R_f^{(2)}$) În cele ce urmează, vom proceda la reformularea relativistă a trei domenii ale fizicii clasice (mecanica analitică, termodinamica teoretică și electrodinamica maxwelliană) și a unui domeniu de fizică neclasică (teoria câmpurilor Lagrange) cu elemente de mecanică cuantică relativistă prin regăsirea ecuației Klein-Gordon printre cazurile particulare ale ecuației Lagrange generalizată.

($R_f^{(3)}$) Structura metodologică funcțională pentru *elementele* de fizică teoretică relativistă (FTR), expuse în cap. VII-X este dată în *figura 3.4*, explicitând și problematica rezultată prin reformularea relativistă a domeniilor de fizică amintite, reformulare cerută de extinderea aplicării principiilor TRR/TRS de la mecanica teoretică newtoniană (cap.IV și V) la restul fizicii clasice nerelativiste, sau al fizicii neclasice (cuantice), dar nerelativistă. De asemenea, implicând și posibilitatea elaborării de noi domenii ale FTR. Toate acestea se regăsesc la intersecția metodologică dintre TRR/TRS și domeniile fizicii, ilustrate gnoseologic/epistemologic interactiv în *figura 3.1*.

($R_f^{(4)}$) Din *figura 3.0*, pentru subpartea $P_3^{(3)}$ a cursului de FT de față și pentru capitolele VII-X ce urmează, se poate extrage *feed-back-ul dintre toate subpărțile* $P_3^{(k)}$ (k=1,2,3) ale P_3 ca *Partea a 3^a* a cursului intitulată *<Fizică teoretică relativistă>*, furnizând, în primul rând, *caracterul global aplicativ relativist al întregii subpărți* $P_3^{(3)}$, și în al doilea rând, justificarea completă a necesității elaborărilor relativiste din cap. VII-X, pentru a obține o ***fizică teoretică relativistă***, cvasicompletă în tematică și în abordarea teoretică a acestei tematici de FT.

($R_f^{(5)}$) Din *figura 3.2*, capitolele VII-X ale $P_3^{(3)}$ au explicitată la nivel grafic organigrama generării fizicii teoretice relativiste, apelând la principiile fundamentale ale TRR/TRS (PIVMPI, PRE, PdC) plecând de la raportarea stărilor fizice şi a fenomenelor fizice la referenţialele inerţiale reciproce RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$, cu câştiguri informaţionale şi metodologice teoretico-relativiste pentru fiecare din reformulările sau formulările relativiste conţinute de aceste capitole.

($R_f^{(6)}$) Capitolul VII, în care se vor expune *elemente de mecanică analitică relativistă*, are expusă *diagrama structurală şi metodologică* în *figura 3.14*, ilustrându-i trei blocuri structurale: (A) *de intrare* (de start) ca *bloc analitic nerelativist informaţional* furnizat de mecanica analitică clasică (nerelativistă) expusă în *Partea a 2^a* a cursului de FT; (B) *metodologic funcţional de elaborare relativistă a mecanicii relativiste* prin acţiunea reunită şi corelată a principiilor TRR/TRS cu cea a PVHR şi PdC specifice mecanicii analitice, respectiv (C) *analitic relativist informaţional de ieşire sintetizând* întreg capitolul prin *elementele de mecanică analitică relativistă elaborate*.

($R_f^{(7)}$) Toate cele şapte efecte termodinamice relativiste ({e.t.r.}) expuse în cap.VIII sunt direct legate de (1) *raportarea stărilor termodinamice şi a proceselor termodinamice faţă de referenţialele reciproce* RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$, şi de (2) *schimbul de căldură a unui sistem termodinamic* (ST)$_1$ *cu alt sistem termodinamic* (ST)$_2$, ambele corelate în cadrul impunerii principiilor TRR/TRS (în special PRE), corelare ilustrată structural şi metodologic-funcţional în *figura 3.15*, care arată de fapt modul de generare fizico-matematico-metodologică a {e.t.r.}, ca şi consecinţe termodinamice ale TrLS (3.61), cu considerarea referenţialului inerţial propriu (RI)$_0$≡(RI)' pentru (ST)$_1$.

($R_f^{(8)}$) Structura noţional conceptuală şi metodologic funcţională a cap.IX (<Elemente de electrodinamică relativistă>) este expusă diagramatic în *figura 3.16*, iar a cap.X (<Elemente de teorie relativistă a câmpurilor...>) în *figura 3.17*.

CAP. VII ELEMENTE DE MECANICĂ ANALITICĂ RELATIVISTĂ (MAR)

3.32 Despre elemente de mecanică analitică relativistă (MAR). Principiul variaţional Hamilton relativist (PVHR)

3.32.0 Consideraţii principiale şi metodologice asupra unei mecanici analitice relativiste (MAR)

Conform argumentelor $(a_1)\rightarrow(a_5)$ enumerate în subparagraful 3.31.2, o mecanică analitică relativistă (MAR) ar trebui să încorporeze în formalismele analitice (FA$\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$) rezultatele TRR/TRS, în principal cele legate de cuadridimensionalitatea evenimentului relativist $e_r \equiv \{x_j\}$ $(j=\overline{1,4}) \equiv \{x,y,z,ict\}$ şi de consecinţele cinematice şi dinamice ale TrLS (3.61), atunci când se raportează mişcarea particulelor relativiste la referenţialele inerţiale reciproce RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$. În acest mod funcţiile analitice Lagrange şi Hamilton vor avea exprimări matematice relativiste, care pentru particula liberă relativistă au fost deja stabilite şi utilizate în cap.V [§ 3.21 pentru $\mathcal{L}_r$, respectiv § 3.24 pentru $\mathcal{H}_r$]. De aceea, § 3.21 şi § 3.24 vor putea fi considerate ca părţi ale domeniului mecanicii analitice relativiste, utilizate în elaborarea *dinamicii cuadrivectoriale*, procedura fiind justificată în cap.V de simplitatea fizico-matematică a elaborării capitolului prin explicitarea componentelor scalare $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale primului cuadrivector dinamic, cuadriimpulsul $\mathcal{P}$. Întreaga obţinere a expresiilor relativiste pentru $\mathcal{L}_r$ şi $\mathcal{H}_r$ din cap.V s-a bazat pe aplicarea *principiului variaţional Hamilton* (PVH) la acţiunea Hamilton $S^{(r)}{}_{1\to2}$ considerată între două momente ale mişcării particulei libere relativiste, conformă cu modalitatea fizico-matematică de generare a formalismelor analitice (FA$\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$ etc.) prin PVH, în cadrul mecanicii analitice (v. *Partea a 2^a* a cursului de FT, ref. 106). În cele ce urmează, *elementele de mecanică analitică relativistă vor fi generate prin acţiunea metodologică a* PVH *în spaţiul cuadridimensional Minkowski* ($\mathcal{S}_M$), în scopul stabilirii expresiei relativiste a funcţiei Lagrange ($\mathcal{L}_r$), cu care se va pleca în dezvoltările relativiste ulterioare. Alături de PVH se va utiliza şi PdC (principiul de corespondenţă), necesar explicitării unor constante scalare.

În *figura 3.14* este expusă *diagrama structurală şi metodologică a* CAP.VII, ilustrând cele trei blocuri structural-funcţionale în elaborarea elementelor de mecanică analitică relativistă: *blocul* (A) *analitic nerelativist informaţional de start* (intrare) furnizat de mecanica analitică clasică (nerelativistă), cu noţiunile şi conceptele sale fizico-matematice analitice şi cu formalismele sale ($\mathcal{F}\mathcal{A}\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$)

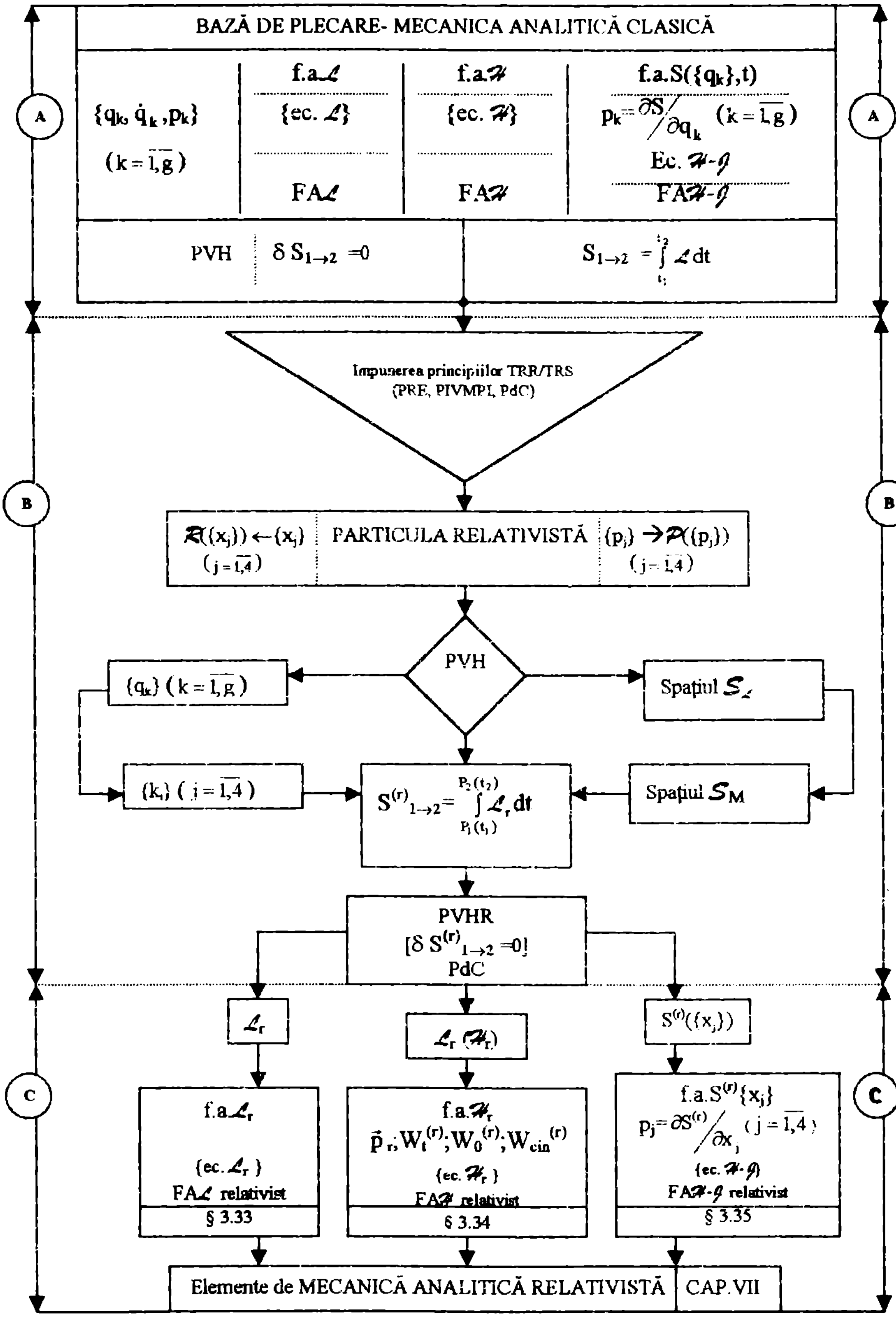


Figura 3.14 Diagrama structurală şi metodologică a CAP.VII

(A) Blocul analitic nerelativist de start (intrare) furnizat de mecanica analitică clasică (nerelativistă) şi formalismele sale analitice.

(B) Blocul metodologic funcţional de elaborare relativistă a mecanicii analitice, reunind acţiunea principiilor TRR/TRS cu acţiunea specifică a PVHR şi PdC în cadrul mecanicii analitice.

(C) Blocul analitic relativist informaţional de ieşire (sintetizând principalele elemente de mecanică analitică elaborate în cadrul cap.VII).

propuse formulării relativiste; *blocul* (B) *metodologic-funcțional de elaborare relativistă a mecanicii analitice relativiste* arătând cumularea acțiunii metodologice a principiilor TRR/TRS (PRE, PIVMPI, PdC) cu acțiunea specifică a PVHR și PdC în cadrul mecanicii analitice și *blocul* (C) *analitic relativist informațional de ieșire*, sintetizând principalele elemente de mecanică relativistă elaborate în cadrul cap.VII. Pentru blocul (A) este necesară consultarea ref.106 ("Elemente de fizică teoretică (I)") care expune detaliat, în *Partea a 2^a^, mecanica analitică clasică.*

3.32.1 Acțiunea Hamilton relativistă în S_M pentru mișcarea unei particule relativiste libere

3.32.1.1 Integrala de drum cuadridimensional

Dacă în universul spațiu-timp (spațiul Minkowski cuadridimensional S_M), pentru *particula relativistă liberă*, se consideră *integrala de drum cuadridimensional*, între două puncte P_1 și P_2 ale unei linii de univers după care se mișcă particula, ca:

(3.282) $I=\int_{P_1}^{P_2} ds>0$, atunci prin elementul de linie de univers ds dat de

(3.283) $ds^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)$, *integrala pozitiv definită* (3.282), în cazul ds >0 (*al evenimentelor relativiste separate printr-un interval relativist temporal*), devine după ușoare grupări aritmetice:

$$(3.284)\quad I=\int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}\sqrt{c^2-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}}dt=\int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt>0.$$

Această ultimă integrală ne va fi utilă în *scrierea acțiunii* Hamilton relativiste $S^{(r)}{}_{1\to2}$ în cele ce urmează, precum și în posibilitatea aplicării principiului variațional Hamilton (PVH) în forma relativistă (PVHR).

3.32.1.2 Acțiunea Hamilton relativistă $S^{(r)}{}_{1\to2}$ a particulei libere

Cum particula relativistă considerată este liberă (asupra ei nu acționează forțe), I din (3.284) *poate fi un invariant* relativist (în raport cu TrLS (3.61)), pe care îl postulăm ca existent în forma modificată:

$$(3.285)\quad S^{(r)}{}_{1\to2}=-\alpha\int_{P_1}^{P_2}ds=-\alpha\int_{t_1}^{t_2}c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt.$$

Acest invariant *prezintă*, în mod sigur, *un extremum*, și acest extremum este un minim de-a lungul liniei de univers, care este o dreaptă pentru *particula liberă* (caracterizată prin constanta oarecare α de determinat).

Ținând cont că raportăm mișcarea particulei la un RI față de care se mișcă cu viteza v, și că, *prin modul de construire fizico-matematică*, funcționala (3.285) prezintă un extremum pe traiectoria sa reală (în raport cu toate celelalte virtuale/posibile din S_M), rezultă că prin (3.282) specificat *în forma* (3.285) *s-a construit tocmai acțiunea Hamilton* $S^{(r)}{}_{1\to2}$ *relativistă cinematică a mișcării particulei relativiste libere.* $S^{(r)}{}_{1\to2}$ din (3.285) mai trebuie precizată prin *explicitarea constantei fizice* α, *legată direct de particula considerată.* De asemenea, se poate observa că în (3.285) produsul $(1-v^2/c^2)^{1/2}dt$ este tocmai *durata elementară proprie* $d\tau$, dt fiind măsurată în raport cu RI aflat în mișcare cu $\vec{v}'=-\vec{v}$ față de particula considerată, reprezintă *durata elementară cinematică.* Trebuie precizat că în toate considerațiile relativiste privitoare la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)', referențialul (RI)' a fost considerat *referențial propriu* $((RI)_0)$ față de care particula este în repaus. Precizarea constantei α din (3.285) se va face cu ajutorul PdC, după ce acțiunii relativiste $S^{(r)}{}_{1\to2}$ i se va aplica PVH, care-i va face variația $\delta S^{(r)}{}_{1\to2}$ nulă.

3.32.2 Principiul variaţional Hamilton în forma relativistă (PVHR)

3.32.2.0 Precizare metodologică

Unealta metodologică de elaborare a mecanicii analitice nerelativiste fiind, în principal, principiul variaţional Hamilton (PVH), o vom utiliza în cele ce urmează la elaborarea mecanicii analitice relativiste (MAR), recurgând la enunţarea în formă relativistă a PVH şi, de aceea, îl vom numi PVH relativist (PVHR). Acţiunea metodologic-constructivă a PVHR va fi conjugată cu cea de acelaşi tip a *principiului de corespondenţă* (PdC), adaptat corespunzător problemei elaborării MAR.

3.32.2.1 Enunţul PVHR

Din subparagraful 3.32.1, rezultă că se poate formula PVH *în mecanica analitică relativistă prin enunţul* PVH *relativist* (PVHR):<Pentru orice sistem mecanic relativist (care evoluează cu v comparabilă cu c), există o integrală (3.286) $S^{(r)}_{1\to 2} \equiv (S_{1\to 2})_{RI} = -\alpha \int_{P_1}^{P_2} ds = -\alpha \int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)} c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$, numită *acţiunea Hamilton relativistă* a mişcării sistemului mecanic relativist între două momente cinematice t_1 şi t_2, care prezintă un extremum pe traiectoria sa reală din $\mathcal{S}_M$, faţă de toate celelalte traiectorii virtuale/posibile ce trec prin aceleaşi puncte figurative $P(t_1)$ şi $P(t_2)$ ale spaţiului Minkowski $\mathcal{S}_M$>.

3.32.2.2 Exprimarea matematică a PVHR. Variaţia nulă a acţiunii (3.286)

Enunţul de mai sus este echivalent matematic cu *formularea condiţiei de extremum postulată pentru* (3.286) ca: (3.287) $\delta S^{(r)}_{1\to 2} = 0$, afirmând că variaţia ($\delta$) acţiunii Hamilton relativiste $S^{(r)}_{1\to 2}$ este nulă pe traiectoria reală a sistemului mecanic relativist din $\mathcal{S}_M$ cuadridimensional. Exprimarea matematică a PVHR (3.287) are consecinţe fizico-matematice relativiste, între care cea mai importantă va fi precizată în continuare.

3.32.2.3 Consecinţă analitică relativistă a variaţiei (3.287)

Principala consecinţă analitică relativistă a efectuării variaţiei (3.287) şi a impunerii condiţiei de anulare va fi *obţinerea ecuaţiilor analitice ale mişcării relativiste a particulei libere*. Cum analitic nerelativist acţiunea $S_{1\to 2}$ era definită prin funcţia analitică Lagrange ($\mathcal{L}$), ecuaţiile amintite vor fi tocmai ecuaţiile analitice Lagrange. De aceea, $S^{(r)}_{1\to 2}$ din (3.285)-(3.286) va trebui exprimată prin f.a.Lagrange *relativistă $\mathcal{L}_r$ cinematică*, după cum urmează prin găsirea expresiei explicite a $\mathcal{L}_r$ în cadrul *elementelor de mecanică analitică Lagrange relativistă.*

3.33 Elemente de mecanică analitică Lagrange relativistă. FA$\mathcal{L}$ relativist

3.33.0 Remarcă procedurală

În paragrafele începând cu cel de faţă, cap.VII va expune *elemente de mecanică analitică relativistă de tip Lagrange*, de tip Hamilton respectiv Hamilton-Jacobi, de fiecare dată urmărind să evidenţieze *formalismele analitice relativiste corespunzătoare* (FA$\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$).

3.33.1 Funcţia analitică Lagrange relativistă cinematică ($\mathcal{L}_r$). Expresia generală dependentă de α

Conform definiţiei fizico-matematice (3.288) $S_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$ a acţiunii Hamilton ca mărime fizică de proces mecanic, definiţie extinsă şi asupra expresiilor matematice (3.285)-(3.286) ale acţiunii relativiste $S^{(r)}_{1\to 2}$, vom avea:

(3.289) $S^{(r)}_{1\to 2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt$, cu $\mathcal{L}_r$ f.a.Lagrange *relativistă cinematică a particulei libere*,

uşor de obţinut distinct ca: (3.290) $\mathcal{L}_r = -\alpha\, c \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, dacă se aplică o identificare a expresiilor de sub integralele (3.286) şi (3.289), când constanta $-\alpha$ este introdusă, din faţa integralei, sub integrala (3.286).

În (3.290) expresia f.a.$\mathcal{L}_r$ avem $v \equiv v_T$ ca viteza de transport a referenţialului inerţial propriu $(RI)' \equiv (RI)_0$ legat solidar de particula în mişcare cu viteza v faţă de RI (v. fig. 3.3 (b)) la care se raportează mişcarea particulei. Modul de raportare a mişcării la referenţialele reciproc inerţiale este ilustrat în *figura 3.3*, care clarifică trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)', cu referenţialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$.

Expresia (3.290) a f.a.$\mathcal{L}_r$ este afectată de constanta fizică neprecizată α, care este legată de sistemul mecanic relativist considerat. Precizarea efectivă a lui α necesită aplicarea PdC, conform modalităţii din subparagraful următor.

3.33.2 Aplicarea PdC pentru determinarea constantei fizice α din $S^{(r)}_{1\to 2}$ (3.285)/(3.286) şi din $\mathcal{L}_r$ (3.290)

La limita nerelativistă $c \to \infty$ (sau $v/c \to 0$), încât utilizând dezvoltarea în serie a radicalului din (3.290) ca mărginită la primii termeni $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots$, expresia:

(3.291) $\mathcal{L}_r \cong -\alpha\, c\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}+\ldots\right) = -\alpha\, c + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2$, prin aplicarea PdC va trebui să tindă la corespondenta sa nerelativistă:

(3.292) $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \equiv \mathcal{T} = \frac{m_0 v^2}{2}$, ca f.a.Lagrange a particulei nerelativiste libere ($\mathcal{U}=0$). În (3.292) avem m_0 ca *masa particulei nerelativiste*, pe care numind-o *masă proprie sau masă de repaus*, adică măsurând-o în $(RI)' \equiv (RI)_0$ legat solidar de particulă, *va trebui s-o definim matematic prin limita*:

(3.293) $m_0 = \lim_{v\to 0} m(v)$. Dacă aplicăm PdC în forma:

(3.294) $\mathcal{L}_r \cong -\alpha\, c + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 \xrightarrow{\text{PdC}} \mathcal{L} = \frac{m_0 v^2}{2}$, se constată că *trebuie anihilată contribuţia termenului $-\alpha c$ în mod justificat fizico-matematic şi nu prin identificare de termeni.* De aceea, *va trebui aplicat PVHR prin* (3.287), care arată că $(-\alpha c)$ n-are contribuţie în variaţia:

(3.295) $\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt \cong \delta \int_{t_1}^{t_2}\left(-\alpha c + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2+\ldots\right)dt = \delta \int_{t_1}^{t_2}(-\alpha c)dt + \delta \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 dt+\ldots \cong$

$\cong \delta \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 dt$. În acest din urmă caz, *aplicarea* PdC arată că

(3.296) $\delta \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 dt \xrightarrow{\text{PdC}} \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r dt = \delta \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}m_0 v^2 dt$, de unde prin identificarea (3.297) $\frac{1}{2}\frac{\alpha}{c}v^2 \to \frac{1}{2}m_0 v^2$, rezultă *constanta* α explicitată ca: (3.298) $\alpha = m_0 c$, prin *masa de repaus* m_0 a particulei relativiste şi valoarea c a vitezei luminii în spaţiul liber (vidul electromagnetic).

3.33.3 Expresiile complet explicite ale $\mathcal{L}_r$ (3.290) şi $S^{(r)}_{1\to 2}$ (3.285)/(3.286)/(3.289)

Utilizarea rezultatului (3.298) în (3.290) face ca *funcția analitică Lagrange relativistă cinematică a particulei libere* să se *expliciteze complet* ca: (3.299) $\mathcal{L}_r \equiv \mathcal{L}_{RI} = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, la rândul ei permițând, prin (3.289), *forma matematică explicită a acțiunii cinematice*:

$$(3.300)\quad S^{(r)}{}_{1\to2} \equiv (S_{1\to2})_{RI} = -m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt .$$

3.33.4 Funcția analitică Lagrange relativistă proprie ($\mathcal{L}_r^{(0)}$) și acțiunea relativistă proprie ($S^{(0)}{}_{1\to2}$) pentru mișcarea particulei relativiste libere

3.33.4.1 Funcția relativistă $\mathcal{L}_r^{(0)}$ proprie

Dacă în (3.299) se pune v=0, adică dacă se face raportarea la referențialul propriu (RI)'≡(RI)$_0$ legat solidar de particulă (față de care particula este în repaus), atunci avem:

(3.301) $\mathcal{L}_r^{(0)} \equiv (\mathcal{L}_r)_{(RI)_0\equiv(RI)'} = -m_0c^2$, ca *funcția Lagrange relativistă proprie, care este un invariant relativist*, așa cum sunt toate *mărimile fizice proprii* [cum s-a precizat și în cap.III (par. 3.13)].

3.33.4.2 Acțiunea relativistă $S^{(0)}{}_{1\to2}$ proprie

Cu rezultatul (3.301) în definiția acțiunii Hamilton (3.288) prin f.a.$\mathcal{L}$, se obține:

(3.302) $S^{(0)}{}_{1\to2} \equiv (S_{1\to2})_{(RI)_0\equiv(RI)'} = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\mathcal{L}_r^{(0)}d\tau = -m_0c^2\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau$, ca *acțiunea Hamilton relativistă proprie a mișcării particulei relativiste libere* [de masă de repaus (proprie) m$_0$] între momentele proprii τ_1 și τ_2, dacă se ține cont și de relația $d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}dt$ ($v \equiv v_T$) ce leagă durata elementară cinematică de cea elementară proprie.

3.33.5 Funcția Lagrange relativistă cinematică pentru particula relativistă mișcându-se într-un câmp conservativ de forțe ce-i permit energia potențială U

Dacă expresia (3.299) se modifică scăzând energia potențială U a particulei relativiste în mișcare într-un câmp de forțe conservative, atunci prin formula:

(3.303) $\mathcal{L}_r = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U$, analogă cu $\mathcal{L} = \mathcal{T} - U$, extindem cazul mișcării rectilinii și uniforme a particulei relativiste cu masa proprie (de repaus) m$_0$ la cazul mișcării aceleași particule într-un câmp de forțe conservative.

Obținerea efectivă a expresiei (3.303) se poate face *plecând de la definiția analitică a impulsului generalizat* (3.304) $p_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j}$ $(j=\overline{1,g})$, adaptată la cazul unei singure particule (3.305) $p_k = \frac{\partial\mathcal{L}_r}{\partial\dot{x}_k}$ $(k=\overline{1,3})$, din care introducând (3.306) $p_k = \frac{m_0v_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \equiv \frac{m_0\dot{x}_k}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ și (3.307) $v^2 = \sum_{k=1}^{3}\dot{x}_k^2$, prin *integrarea relației* (3.305) se obține relația finală: (3.308) $\mathcal{L}_r = -m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - U(\{x_k\})$, în care U({x$_k$}) este *constanta de integrare* a ecuației diferențiale (3.305) cu necunoscuta $\mathcal{L}_r$. Din (3.308), cu U({x$_k$})=0, adică pentru particula mișcându-se în afara oricărei acțiuni exterioare (particula liberă), rezultă (3.299) ca funcție analitică Lagrange relativistă particulară.

3.33.6 Ecuația analitică Lagrange în cazul particulei relativiste libere

3.33.6.1 Ecuația Lagrange relativistă

Aplicarea PVHR, conformă cu (3.287), prin (3.300) [la rândul ei obținută cu $\mathcal{L}_r$ (3.299)], înlocuiește condiția de extremum (3.287) prin *ecuația analitică Lagrange relativistă*:

(3.309) (a) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\vec{r}}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{r}}=0$ sau (3.309) (b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{v}}\right)-\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{r}}=0$, arătând că forma matematică a *ecuației Lagrange nerelativistă* se conservă, locul funcției analitice Lagrange nerelativiste $\mathcal{L}$ fiind luat de funcția analitică Lagrange relativistă $\mathcal{L}_r$.

3.33.6.2 Funcția relativistă $\mathcal{L}_r$ (3.299) verifică ecuația Lagrange (3.309)

Întreaga afirmație din secvența precedentă, obținută prin aplicarea PVHR, poate fi confirmată matematic prin utilizarea f.a.$\mathcal{L}_r$ (3.299) în (3.309), când se obține, *tocmai*, faptul că f.a.$\mathcal{L}_r$ a particulei libere *satisface ecuația Lagrange relativistă* (3.309). Verificarea rezultă prin impulsul relativist $\vec{p}_r=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ($v=v_T$) al particulei libere ($\vec{p}_r$=const), care va fi regăsit prin operațiile matematice succesive:

$$(3.310)\quad \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{v}}\equiv\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial v}\,\vec{1}_v=\frac{\partial}{\partial v}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\vec{1}_v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v\,\vec{1}_v=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\equiv\vec{p}_r=\text{const};$$

$$(3.311)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{v}}\right)=\frac{d}{dt}(\vec{p}_r)=\frac{d}{dt}(\text{const.})=0;\ \text{și}\ (3.312)\ \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{r}}=0\ \text{deoarece}\ \mathcal{L}_r\neq\mathcal{L}_r(\vec{r}),$$

prin (3.311) și (3.312) având verificarea așteptată.

3.33.7 Concluzie asupra FA$\mathcal{L}$ relativist

În paragraful de față au fost elaborate *elementele fundamentale ale mecanicii analitice relativiste* (MAR) a particulei libere cu formalismul analitic Lagrange (FA$\mathcal{L}$) relativist, esențial, desfășurat prin explicitarea f.a.Lagrange relativistă $\mathcal{L}_r$ cinematică (3.299) și proprie $\mathcal{L}_r^{(0)}$ (3.301), respectiv prin *ecuația Lagrange relativistă* (3.309).

Aceleași aspecte analitice vor fi expuse și pentru FA$\mathcal{H}$ relativist, odată cu explicitarea *funcției analitice Hamilton relativiste* $\mathcal{H}_r$ pentru aceeași particulă.

3.34 Elemente de mecanică analitică Hamilton relativistă. FA$\mathcal{H}$ relativist

3.34.1 Impulsul relativist $\vec{p}_r$ al unei particule libere

Dacă pentru particula relativistă liberă se consideră cunoscută f.a.Lagrange (3.299), atunci prin definiția (3.305) a componentelor carteziene ale impulsului particulei, cu ajutorul expresiei (3.299) rezultă *impulsul relativist*:

$$(3.313)\quad \vec{p}_r=p_x\vec{1}_x+p_y\vec{1}_y+p_z\vec{1}_z=\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \vec{v}}=\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(-m_0c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}=m\vec{v},\ \text{verificând}$$

tocmai valabilitatea relației analitice care definește impulsul generalizat prin derivata f.a.$\mathcal{L}$ în raport cu viteza generalizată.

3.34.2 Funcția analitică Hamilton relativistă ($\mathcal{H}_r$) a mişcării particulei libere

3.34.2.1 Funcția $\mathcal{H}_r$ şi energia relativistă totală $W_t^{(r)}$

Funcția analitică Hamilton relativistă ($\mathcal{H}_r$) cinematică a particulei libere se obține cu ajutorul f.a.$\mathcal{L}_r$ (3.299), dacă se apelează la definiția generală a f.a.Hamilton prin f.a.$\mathcal{L}$: (3.314) $\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{s} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$ particularizată la un singur punct material: (3.315) $\mathcal{H}_0 = \vec{p}\,\vec{v} - \mathcal{L}$. Astfel, (3.299) şi (3.313) dau succesiv:

$$(3.316)\quad \mathcal{H}_r = \vec{p}_r \vec{v} - \mathcal{L}_r = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\cdot\vec{v} - m_0 c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 = mc^2 = W_t^{(r)},$$

reprezentând în acelaşi timp şi *energia relativistă totală a particulei libere,* dacă se utilizează definiția analitică a energiei mecanice totale ca acea valoare a f.a.$\mathcal{H}$ care nu depinde de timp.

3.34.2.2 Funcția analitică relativistă $\mathcal{H}_r$ prin impulsul $\vec{p}_r$

Funcția analitică relativistă $\mathcal{H}_r$ (3.316) trebuie făcută dependentă de impulsul relativist $\vec{p}_r$ (3.313), pentru a respecta formalismul analitic Hamilton al mecanicii analitice. Ca atare, din (3.316), prin (3.313), rezultă egalitățile succesive:

$$(3.317)\ (a)\ \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 = mc^2\,;\ (b)\ \frac{m_0^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}}c^4 = m^2c^4\,;\ (c)\ m^2c^4 \quad m^2v^2c^2 = m_0^2c^2\,;$$

$$(d)\ \mathcal{H}_r^2 - p_r^2c^2 = m_0^2c^4\,;\ (e)\ \mathcal{H}_r^2 = c^2\,(p_r^2 + m_0^2c^2),\ \text{şi în final:}$$

(3.318) $\mathcal{H}_r = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}$, *expresia căutată pentru funcția analitică Hamilton relativistă cinematică a particulei libere.*

3.34.3 Energiile relativiste ale particulei libere ($W_t^{(r)}$, $W_0^{(r)}$, $W_{cin}^{(r)}$)

(a) Conform definiției analitice a energiei mecanice totale, ca acea valoare a lui f.a.$\mathcal{H}$ ce nu depinde de timp, prin (3.316) şi (3.318) avem *energia relativistă totală* ($W_t^{(r)}$) a particulei libere, deja, specificată (parțial) mai sus:

$$(3.319)\quad W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}\,.$$

(b) *Energia relativistă de repaus* ($W_0^{(r)}$) a particulei se obține din (3.319), când v=0, echivalentă cu energia măsurată în referențialul propriu $(RI)_0$ al particulei, ca:

$$(3.320)\quad W_0^{(r)} \equiv W^{(r)}\big|_{(RI)_0} = \lim_{v\to 0} W_t^{(r)} = m_0c^2.$$

(c) *Energia cinetică relativistă* ($W_{cin}^{(r)}$) este tocmai diferența

$$(3.321)\quad W_{cin}^{(r)} = W_t^{(r)} - W_0^{(r)} = (m-m_0)c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right).$$

3.34.4 Ecuațiile Hamilton (canonice) relativiste pentru mișcarea particulei libere

3.34.4.1 Scrierea formală

În mod *formal, ecuațiile Hamilton (canonice) relativiste sunt* **reprezentate de ecuațiile:**

(3.322) (a) $\dot{\vec{p}}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \vec{r}}$ și (3.322) (b) $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v} = \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \vec{p}_r}$, ca o scriere vectorială a ecuațiilor **Hamilton nerelativiste:**

(3.323) (a) $\dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial q_k}$ și (3.323) (b) $\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial p_k}$ $(k = \overline{1,g})$ **reduse, de la ecuațiile pentru un sistem cu g grade de libertate [alcătuit din N puncte materiale (particule) cu l legături între ele], la** *ecuațiile pentru o singură particulă* (punct material), când $k = \overline{1,3}$ permit scrierea vectorială (3.322). În (3.322) $\vec{p}_r$ este impulsul relativist (tridimensional ca vector), iar $\mathcal{H}_r$ este de expresie (3.318), ca funcția analitică Hamilton relativistă a particulei libere.

3.34.4.2 Despre deducerea analitică a ecuațiilor Hamilton relativiste

Deducerea analitică a ecuațiilor (3.322) se face aplicând PVHR (3.287) acțiunii relativiste $S^{(r)}{}_{1\to2}$ (3.289) cu f.a.Lagrange relativistă $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(\mathcal{H}_r)$ [cu $\mathcal{H}_r$ prin (3.316)] de expresie (3.324) $\mathcal{L}_r = \vec{p}_r\vec{v} - \mathcal{H}_r$, permițând (3.325) $S^{(r)}{}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}_r(\mathcal{H}_r)dt = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{p}_r\vec{v} - \mathcal{H}_r)dt$.

Aplicarea variației (3.287) *și anularea ei* în cazul (3.325) conduc la ecuațiile analitice Hamilton (canonice) (3.322).

3.24.4.3 Funcția $\mathcal{H}_r$ verifică ecuațiile Hamilton relativiste (3.322)

Că (3.322) sunt *ecuațiile Hamilton (canonice) relativiste ale mișcării particulei libere*, se poate proba prin simpla verificare a faptului că f.a.Hamilton *relativistă* $\mathcal{H}_r$ *de expresie* (3.318) verifică ecuațiile (3.322). Această verificare este un simplu exercițiu de realizat, după cum urmează. Avem cu (3.318) în (3.322) (a), succesiunea:

(3.326) $\dot{\vec{p}}_r = -\frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}\right) = 0$, deoarece $\mathcal{H}_r \neq \mathcal{H}_r(\vec{r})$. Anularea din (3.326) este echivalentă cu $\vec{p}_r$=const, confirmând faptul că particula relativistă este liberă, adică nu se află sub acțiunea forțelor. Dacă introducem (3.318) în a doua ecuație Hamilton relativistă (3.322) (b), atunci avem succesiv: (3.327) $\dot{\vec{r}} = \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \vec{p}_r} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{p}_r}\left(c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}\right) = \frac{\vec{p}_r}{\frac{1}{c}\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}} \equiv \frac{\vec{p}_r}{\frac{1}{c^2}\mathcal{H}_r} \equiv \frac{\vec{p}_r}{\frac{1}{c^2}mc^2} \equiv \frac{\vec{p}_r}{m} \equiv \vec{v}$, deoarece $\mathcal{H}_r = mc^2 = c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2}$. În acest fel, ecuația Hamilton relativistă (3.322) (b) confirmă verificarea ei de către $\mathcal{H}_r$ (3.318), tocmai prin $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v} = \frac{\vec{p}_r}{m}$, încheind verificarea de către f.a.$\mathcal{H}_r$ a ecuațiilor analitice Hamilton relativiste.

3.34.5 Concluzie asupra FA$\mathcal{H}$ relativist

În paragraful de față au fost desfășurate *elemente fundamentale de mecanică analitică Hamilton relativistă a particulei libere*, **în principal, prin formalismul analitic Hamilton (FA$\mathcal{H}$) relativist, implicând funcția analitică Hamilton relativistă $\mathcal{H}_r$ și ecuațiile analitice Hamilton (canonice) relativiste. De asemenea, prin explicitarea energiilor relativiste [totală $W_t^{(r)}$, de repaus $W_0^{(r)}$ și cinetică $W_{cin}^{(r)}$].**

3.35 Formularea relativistă cuadridimensională a mecanicii analitice Hamilton-Jacobi. Ecuația Hamilton-Jacobi relativistă. FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$ relativist

3.35.1 Rescrierea acțiunii $S^{(r)}{}_{1\to2}$ în vederea formulării cuadridimensionale a FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$

Utilizând coordonatele spațial temporale ale spațiului Minkowski ($\mathcal{S}_M$) $\{x_j\}\equiv\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\equiv\{x,y,z,ict\}$, *elementul de drum cuadridimensional* (intervalul elementar cuadridimensional relativist) (3.283) $ds=[c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)]^{1/2}$, din acțiunea Hamilton relativistă $S^{(r)}{}_{1\to2}$ de expresie (3.285) [scrisă prin (3.282)], se scrie și sub forma: (3.327) $ds=\sqrt{-\sum_{j=1}^{4}dx_j^2}$ evidențiind coordonatele relativiste $\{x_j\}$ ($j=\overline{1,4}$). Cu (3.327) și cu utilizarea precizării (3.298) a constantei α, ca $\alpha=m_0c$, *acțiunea* $S^{(r)}{}_{1\to2}$ (3.285) devine:

$$(3.328)\quad S^{(r)}{}_{1\to2}=-\alpha\int_{P_1}^{P_2}ds=-m_0c\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{(-)\sum_{j=1}^{4}dx_j^2},$$ pregătită spre a fi exprimată prin componentele cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4}))$.

3.35.2 Aplicarea variației δ impusă de PVHR asupra $S^{(r)}{}_{1\to2}$

Aplicând variația (3.287) asupra $S^{(r)}{}_{1\to2}$ de expresie (3.328), conformă cu PVHR enunțat în subparagraful 3.32.2, modifică (3.328) astfel:

$$(3.329)\quad \delta S^{(r)}{}_{1\to2}=-\alpha\,\delta\int_{P_1}^{P_2}ds=-m_0c\,\delta\int_{P_1}^{P_2}\sqrt{-\sum_{j=1}^{4}dx_j^2}=m_0c\int_{P_1}^{P_2}\frac{\sum_{j=1}^{4}dx_j\,\delta\sum_{j=1}^{4}dx_j}{\sqrt{-\sum_{j=1}^{4}dx_j^2}}=$$

$$=m_0c\int_{P_1}^{P_2}\frac{\sum_{j=1}^{4}dx_j}{ds}\,d\left(\delta\sum_{j=1}^{4}x_j\right)\equiv m_0c\int_{P_1}^{P_2}\frac{d\mathcal{R}(\{x_j\})}{ds}\,d\delta\mathcal{R}(\{x_j\})=m_0\int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}\mathcal{U}(\{u_j\})d\delta\mathcal{R}(\{x_j\}),$$

dacă în penultimul termen al egalității succesive se implică $ds=c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt\equiv c\,d\tau$, conform operațiilor efectuate în (3.284), pentru a defini temporal "capetele" P_1 și P_2 din integrala acțiunii Hamilton relativiste. De asemenea, dacă se ține cont că $\mathcal{U}(\{u_j\})$ –cuadrivectorul viteză se definește prin $\mathcal{U}(\{u_j\})=\frac{d\mathcal{R}(\{x_j\})}{d\tau}$, cu $d\tau=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dt$ ca durata proprie elementară, și dacă se introduce și se utilizează în $\mathcal{U}$ cuadrivectorul de poziție $\mathcal{R}(\{x_j\})$.

3.35.3 Finalizarea variației (3.287)

Integrarea prin părți a ultimului termen al egalității succesive (3.329), conform relației Leibniz $\int_\alpha^\beta udv=uv|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta vdu$, stabilește o ultimă succesiune a variației δ impusă de PVHR acțiunii Hamilton relativiste (3.328), desfășurată ca:

$$(3.330)\quad \delta S^{(r)}{}_{1\to2}=m_0\mathcal{U}(\{u_j\})\delta\mathcal{R}(\{x_j\})\Big|_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}-m_0\int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}\delta\mathcal{R}(\{x_j\})\frac{d\mathcal{U}(\{u_j\})}{ds}ds=$$

$$=-m_0\int_{P_1(t_1)}^{P_2(t_2)}\frac{d\mathcal{U}(\{u_j\})}{ds}\delta\mathcal{R}(\{x_j\})ds=0,$$ în care egalarea cu zero este impusă de PVHR prin (3.287). Anularea primului termen din (3.330) obținut la integrarea prin părți este

asigurată de faptul că toate traiectoriile (inclusiv cea reală) din spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$), pentru mişcarea particulei relativiste libere [traiectorii considerate conform aplicării PVHR (v. ref. 106, figura 2.4, pag. 69)], trec prin P_1 la momentul cinematic t_1, respectiv prin P_2 la momentul cinematic t_2, condiţionând la aplicarea variaţiei (3.287) pentru *mănunchiul de traiectorii* din spaţiul Minkowski $\mathcal{S}_M$ (ca spaţiu Lagrange cuadridimensional) variaţiile coordonatelor $\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ prin:

(3.331) (a) $\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_2) = 0$ $(j=\overline{1,4})$ sau (3.331) (b) $\delta \mathcal{R}(\{x_j(t_1)\}) = \delta \mathcal{R}(\{x_j(t_2)\}) = 0$.

3.35.4 Consecinţă fundamentală a PVHR finalizând (3.330). Conservarea cuadrivitezei particulei libere

Anularea finală din (3.330) impusă de PVHR, pentru orice $\delta \mathcal{R}(\{x_j\}) \neq 0$ şi orice $ds \neq 0$, presupune la rându-i anularea: (3.332) (a) $\frac{d\mathcal{U}(\{u_j\})}{ds} = 0$, valabilă şi după componentele cuadrivitezei: (3.332) (b) $du_j/ds = 0$ $(j=\overline{1,4})$, exprimând *constanţa cuadrivitezei particulei relativiste libere*, deoarece $ds = c\,d\tau$. Acest ultim rezultat era de aşteptat deoarece particula relativistă liberă are o mişcare rectilinie şi uniformă (MRU). În plus, *relaţia* (3.332) *exprimă matematic forma relativistă a legii* (principiului) *inerţiei*.

3.35.5 Funcţia analitică acţiune Hamilton relativistă $S^{(r)}(\{x_j\})$ din funcţionala $S^{(r)}_{1\to2}$

Pentru obţinerea ecuaţiei analitice Hamilton-Jacobi relativistă este necesară scrierea funcţiei analitice acţiune Hamilton relativistă $S^{(r)}(\{x_j\})$ prin transformarea funcţionalei $S^{(r)}_{1\to2}$ relativiste în funcţie analitică. Obţinerea funcţiei analitice acţiune Hamilton relativistă ca dependenţă (3.333_0) $S^{(r)}(\{x_j\}(j=\overline{1,4})) \equiv S^{(r)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ este posibilă prin *fixarea*, în funcţionala (3.328), *a limitei inferioare* $P_1(t_1)$ la un moment $t_1 \equiv t_0$, deci ca valoarea $P_1(t_0)$ şi considerarea variabilă a limitei superioare, conform $P_2(t_2) \equiv P_2(t)$, cu $t_2 \equiv t$ variabil. În această situaţie, condiţia analitică (3.331) se rescrie fixând numai $P_1(t_1 \equiv t_0)$:

(3.333) (a) $\delta x_j(t_1) = \delta x_j(t_0) = 0$ $(j=\overline{1,4})$ şi $\delta x_j(t_2) = \delta x_j(t) \neq 0$ $(j=\overline{1,4})$, respectiv

(3.333) (b) $\delta \mathcal{R}(\{x_j(t_1)\}) \equiv \delta \mathcal{R}(\{x_j(t_0)\}) = 0$ şi $\delta \mathcal{R}(\{x_j(t_2)\}) \equiv \delta \mathcal{R}(\{x_j(t)\}) \neq 0$ $(j=\overline{1,4})$, prin $t_1 \equiv t_0$ fixat şi $t_2 \equiv t$ variabil, iar mănunchiul de traiectorii de tip "corzi" fixate la ambele capete în aceleaşi două puncte din $\mathcal{S}_M$ se transformă într-un fascicul plecând din $P_1(t_0)$ şi "răsfirându-se" în $\mathcal{S}_M$ în mod divergent, în loc să se "adune"/să "conveargă" într-un punct fix $P_2(t_2)$ (t_2 valoare fixă şi unică).

3.35.6 Legătura dintre $S^{(r)}(\{x_j\}) \equiv S^{(r)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ şi componentele cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\})$

3.35.6.1 Variaţia $\delta S^{(r)}$ şi $\{p_j\}$

Dacă se ţine cont că funcţia analitică acţiune Hamilton relativistă (3.333_0) s-a obţinut prin condiţia variaţională (3.333) (b), reluarea relaţiei (3.329) permite:

(3.329') $\delta S^{(r)}_{1\to2} = \int_{P_1(t_0)}^{P_2(t)} \mathcal{U}(\{u_j\})\, d\delta\mathcal{R}(\{x_j\}) \equiv \delta S^{(r)}(\{x_j\}) = m_0 \sum_{j=1}^{4} u_j \delta x_j$, din care reţinem:

(3.334) $\delta S^{(r)}(\{x_j\}) = m_0 \sum_{j=1}^{4} u_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{4} m_0 u_j \delta x_j = \sum_{j=1}^{4} p_j \delta x_j$, finalizând

(3.334') $\delta S^{(r)}(\{x_j\}) = \sum_{j=1}^{4} p_j \delta x_j$, dacă se ţine cont că $p_j = m_0 u_j$ $(j=\overline{1,4})$ sunt tocmai componentele scalare ale cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\}) \equiv \mathcal{P}(\{m_0 u_j\})$, conform cap.V, unde a fost tratat acest cuadrivector.

Din (3.334'), avem tocmai *relaţia dintre* $\{p_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ şi f.a.$S^{(r)}(\{x_j\}) \equiv S^{(r)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, conformă cu relaţia generală (din formalismul analitic Hamilton-Jacobi nerelativist) dintre impulsurile generalizate

$\{p_k\}$ ($k=\overline{1,g}$) şi *funcţia analitică acţiune Hamilton* $S(\{q_k\},t)$ ($k=\overline{1,g}$) nerelativistă $p_k = \frac{\partial S(\{q_k\})}{\partial q_k}$ ($k=\overline{1,g}$), *relaţia relativistă fiind*: (3.335) $p_j = \frac{\partial S^{(r)}(\{x_j\})}{\partial x_j}$ ($j=\overline{1,4}$).

Relaţia relativistă (3.335) legând $\{p_j\}$ şi f.a.$S^{(r)}(\{x_j\})$ va permite scrierea cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\})$ prin derivatele parţiale ale funcţiei $S^{(r)}(\{x_j\})$ în raport cu coordonatele relativiste $\{x_j\}$ ($j=\overline{1,4}$), care sunt tocmai componentele cuadripoziţiei $\mathcal{R}(\{x_j\})$.

3.35.6.2 Cuadriimpulsul $\mathcal{P}$ prin $S^{(r)}(\{x_j\})$

Cuadriimpulsul $\mathcal{P}(\{p_j\})$ se poate scrie prin derivatele acţiunii relativiste $S^{(r)}(\{x_j\}) \equiv S^{(r)}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, conform cu (3.335):

$$(3.336)\ \mathcal{P}(\{p_j\}) \equiv \mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4) \equiv \mathcal{P}\left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_1}, \frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_2}, \frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_3}, \frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_4}\right) \equiv$$

$$\equiv\left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_1}\vec{1}_x + \frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_2}\vec{1}_y + \frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_3}\vec{1}_z, -\frac{i}{c}\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_4}\right),$$ având pătratul formal:

$$(3.336')\ (\mathcal{P},\mathcal{P}) \equiv \mathcal{P}^2 = \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial t}\right)^2 \equiv \sum_{j=1}^{4} p_j^2 = -m_0c^2,$$ dacă

se ţine cont că $(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv (x,y,z,ict)$ şi că suma pătratelor componentelor scalare ale cuadriimpulsului este tocmai invariantul relativist $I_p = -m_0c^2$ din subparagraful 3.23.3, demonstrat ca invariant prin obţinerea relaţiei (3.200).

Relaţia (3.336') este importantă prin faptul că sugerează procedura de obţinere a ecuaţiei analitice Hamilton-Jacobi relativiste, apelând la invariantul relativist (3.200).

3.35.7 Ecuaţia analitică Hamilton-Jacobi relativistă

Utilizarea invariantului relativist (3.200) reluat ca (3.337) $I_p = \sum_{j=1}^{4} p_j^2 = -m_0c^2$, prin intermediul componentelor (3.335) ale lui $\mathcal{P}$ scrise prin funcţia analitică $S^{(r)}(\{x_j\})$, va conduce la *ecuaţia Hamilton-Jacobi relativistă*:

$$(3.338)\ \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x_4}\right)^2 = -m_0c^2,$$ sau trecând totul în membrul întâi al egalităţii şi înlocuind $\{x_j\}$($j=\overline{1,4}$) prin $\{x,y,z,ict\}$, când (3.338) ia forma mai explicită:

$$(3.339)\ \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S^{(r)}}{\partial t}\right)^2 + m_0^2c^2 = 0,$$ ca o *formă relativistă finală a ecuaţiei Hamilton-Jacobi căutată.*

3.35.8 Acţiunea PdC asupra ecuaţiei (3.339). Ecuaţia Hamilton-Jacobi nerelativistă ca limită clasică a ecuaţiei relativiste (3.339)

Aplicarea principiului de corespondenţă (PdC) pentru ca, din *ecuaţia Hamilton-Jacobi relativistă* (3.339), să se obţină cazul nerelativist al aceleiaşi ecuaţii, trebuie să utilizeze dependenţa $S^{(r)}(\{x_j\})$ *a funcţiei analitice acţiune* ($S^{(r)}$) *relativistă* explicitată prin separarea variabilelor spaţiale de cea temporală în structura:

(3.340) $S^{(r)}(\{x,y,z\},t) = S(x,y,z) - m_0c^2t$, scrisă după modelul $S(\{q_k\},t) = S_0(\{q_k\}) - Et$ din formalismul analitic Hamilton-Jacobi (FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$) al mecanicii analitice clasice (nerelativiste) (v. *Partea a 2ª* a cursului de FT, ref. 106, cap.V).

Cu (3.340) în (3.339), însoţită de aplicarea PdC făcând $c \to \infty$ (echivalent $v/c \to 0$, sau $v \ll c$), *ecuaţia Hamilton-Jacobi relativistă* (3.339) *trece în corespondenta nerelativistă*:

(3.341) $$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$ sau ţinând cont că funcţia analitică Hamilton are, pentru particula nerelativistă, dependenţa $\mathcal{H}(p_x,p_y,p_z;x,y,z;t) \equiv \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}; x, z, y, t\right)$, *forma mai utilizată a ecuaţiei Hamilton-Jacobi clasică (nerelativistă)* la care se reduce (3.341) este:

(3.342) $$\frac{\partial S(x,z,y,t)}{\partial t} + \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}\right) = 0.$$

3.35.9 Concluzie asupra FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$ relativist

În paragraful de faţă, au fost desfăşurate *elemente de mecanică analitică Hamilton-Jacobi relativistă*, obţinându-se: (I) relaţia dintre componentele cuadriimpulsului $\mathcal{P}(\{p_j\})$ şi funcţia analitică acţiune Hamilton relativistă $S^{(r)}(\{x_j\}) \equiv S^{(r)}(x,y,z,t)$ raportată la referenţialul inerţial RI faţă de care particula relativistă este în mişcare cu viteza $v \equiv v_T$ [cu care se mişcă referenţialul $(RI)' \equiv (RI)_0$ propriu particulei; v. fig. 3.3 (b)]; (II) ecuaţia Hamilton-Jacobi relativistă (3.339) şi (III) limita nerelativistă a ecuaţiei (3.339), ca ecuaţia Hamilton-Jacobi clasică (nerelativistă) (3.341) şi/sau (3.342). În acest mod, *formularea cuadridimensională a relaţiei analitice* (3.335), dintre componentele cuadriimpulsului $\mathcal{P}$ al particulei relativiste şi funcţia $S^{(r)}(\{x_j\})$ definite în spaţiul Minkowski ($\mathcal{S}_M$), a permis desfăşurarea elementelor fundamentale de formalism analitic Hamilton-Jacobi relativist (FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$ relativist), permiţând o formulare cuadridimensională a *elementelor de mecanică analitică Hamilton-Jacobi* reformulată relativist.

3.36 Concluzii finale asupra cap. VII

(C_1) Cap. VII de faţă a schiţat structura unei *mecanici analitice relativiste* (MAR), vizând în principal cele trei tipuri de mecanică analitică clasică, cu impactul teoretic şi metodologic cel mai generator de fizică teoretică în general, respectiv de fizică teoretică relativistă de tip Lagrange, de tip Hamilton, respectiv de tip Hamilton-Jacobi, cu reformularea relativistă a formalismelor analitice corespunzătoare (FA$\mathcal{L}$, FA$\mathcal{H}$, respectiv FA$\mathcal{H}$-$\mathcal{J}$), având în vedere mai ales *funcţiile analitice relativiste* ($\mathcal{L}_r$, $\mathcal{H}_r$, $S^{(r)}$) şi *ecuaţiile analitice relativiste corespunzătoare*, care jalonează fundamental formalismele analitice luate în considerare.

(C_2) În *figura 3.14*, destinată întregului cap.VII, a fost ilustrată *diagrama* structurală şi metodologică a capitolului, cu prezentarea întregii problematici, cele *trei blocuri structurale* vizând: (A) informaţia analitică nerelativistă de start (intrare) furnizată de mecanica analitică (nerelativistă) şi formalismele sale, expusă detaliat în *Partea a 2ª* a cursului de FT (v. ref. 106, "Elemente de fizică teoretică (I)", Ed. Universităţii din Bucureşti, 1998); (B) metodologia funcţională în elaborarea relativistă a mecanicii analitice corelând acţiunea principiilor TRR/TRS (PRE, PIVMPI, PdC) cu acţiunea specifică a principiilor metodologice ale mecanicii analitice (PVHR, PdC) formulată relativist, respectiv (C) structura fizico-matematică noţional-conceptuală şi algoritmică rezultată ca *blocul analitic relativist informaţional de ieşire*, schiţat în (C_1).

(C_3) Cap.VII (<Elemente de mecanică analitică relativistă (MAR)>) reprezintă o completare a părţii a 2ª (<Mecanică analitică>) a cursului nostru de FT, expusă în "Elemente de fizică teoretică (I)" [Editura Universităţii din Bucureşti, Bucureşti, 1998; ref. 106, cap. 0,I→VI (pag. 41→175)], furnizând formularea relativist-restrânsă a mecanicii analitice, alături de forma nerelativistă a acesteia.

3.37 Despre efecte termodinamice relativiste ({e.t.r}) şi reformularea termodinamicii teoretice ca termodinamică relativistă

3.37.1 Consideraţii istorice şi metodologice

Schimbarea referenţialului la care sunt raportate stările termodinamice ale sistemelor termodinamice (corpuri macroscopice) pune problema studierii comportării ecuaţiilor fundamentale descriind fenomenele termodinamice, echivalentă cu problema comportării ecuaţiilor termodinamicii macroscopice în raport cu această schimbare. Astfel, se pune problema revizuirii principiilor termodinamicii din punctul de vedere al concepţiilor relativiste impuse în fizică de TRR/TRS după 1905. Această revizuire a fost făcută de Max Planck (1858-1947) şi de Hasenrole în 1907, Einstein introducând rezultatele acestei revizuiri în cadrul consecinţelor TRR/TRS, chiar în acelaşi an. Principiile termodinamicii, avem în vedere primele două, rămân valabile în referenţialele inerţiale {RI} în care sistemele termodinamice considerate sunt în repaus, adică în {RI} proprii, punându-se problema conservării formei principiilor în raport cu $(RI)_0$ propriu unui sistem termodinamic. Afirmarea valabilităţii şi în termodinamică, a PRE (principiul relativităţii einsteiniene) impune invarianţa Lorentz a formei principiilor termodinamicii la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$ [v. fig. 3.3(b)].

Această invarianţă, ţinând cont că *fenomenele/procesele termodinamice au loc cu schimb de căldură* (Q) şi *de lucru mecanic* (L), respectiv *variaţie de energie internă* (ΔU_i), va impune *efecte termodinamice relativiste de variaţie* asupra unora dintre mărimile fizice de stare şi/sau de proces, atunci când se va face *raportarea la referenţialele reciproce impusă de* TRR/TRS *prin principiile sale* (în special PRE). Transformările Lorentz (3.61), prin invarianţa formei principiilor termodinamicii impusă de PRE, vor afecta relativist mai ales *enunţul legilor ce arată cum se transformă cantitatea de căldură* (Q) primită/absorbită de sistemul termodinamic, respectiv temperatura acestuia. În continuare, vom enumera *principalele efecte termodinamice relativiste*, reprezentând *consecinţele termodinamice ale* TrLS (3.61).

În *figura 3.15* este prezentată structura metodologic-funcţională între paragrafele cap.VIII, cu localizarea efectivă în cadrul paragrafelor a *efectelor termodinamice relativiste* ({e.t.r}) enumerate în subparagraful 3.37.2, figura 3.15 arătând modul cum sunt generate fizico-matematic ({e.t.r}) propuse tratării teoretice ca elemente de termodinamică relativistă.

3.37.2 Efecte termodinamice relativiste ({e.t.r}) reprezentând consecinţe termodinamice ale TrLS (3.61)

TRR/TRS elaborată de Einstein (1905) afirmă principiile sale ca extinzându-se asupra tuturor fenomenelor fizice pe care le suferă sistemele fizice, raportate la *referenţialele inerţiale reciproce* RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$, notaţia cu indicele zero desemnând *referenţialul propriu*. În acest fel, *studiul schimburilor de căldură* (efectele calorice) *în diferitele referenţiale inerţiale evidenţiază efecte termodinamice relativiste*, cerând elaborarea termodinamicii şi pe baze relativist-restrânse (TRR/TRS), efectele amintite neputând fi manifeste în termodinamica teoretică clasică, esenţial nerelativistă.

Cele mai importante efecte termodinamice relativiste, posibil de evidenţiat, sunt: (1) *variaţia masei de repaus a unui sistem termodinamic cu căldura schimbată cu alt sistem termodinamic* (de asemenea în repaus); (2) *apariţia unei forţe relativiste* ($\vec{F}_r$) *determinată de* (1), *forţă care acţionează asupra unui sistem termodinamic (corp) aflat în mişcare rectilinie şi uniformă faţă de un* RI, altul decât cel propriu $(RI)_0$, *ca urmare a variaţiei masei de repaus*; (3) *efectuarea de lucru mecanic* ($L^{(r)}_{F_r}$) *de către* $\vec{F}_r$ asupra sistemului termodinamic în mişcare cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$ faţă de RI (sistemul termodinamic fiind legat solidar de $(RI)_0\equiv(RI)'$ propriu); (4) *relaţia de transformare relativistă a cantităţii de căldură şi apariţia unei variaţii a căldurii măsurate în cele două referenţiale inerţiale reciproce* [RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$]; (5) *reformularea principiilor termodinamicii ţinând cont de raportarea schimburilor de căldură la referenţialele reciproce*, respectiv de invarianţa principiilor faţă de TrLS (3.61) impusă de PRE; (6) *invarianţa entropiei*

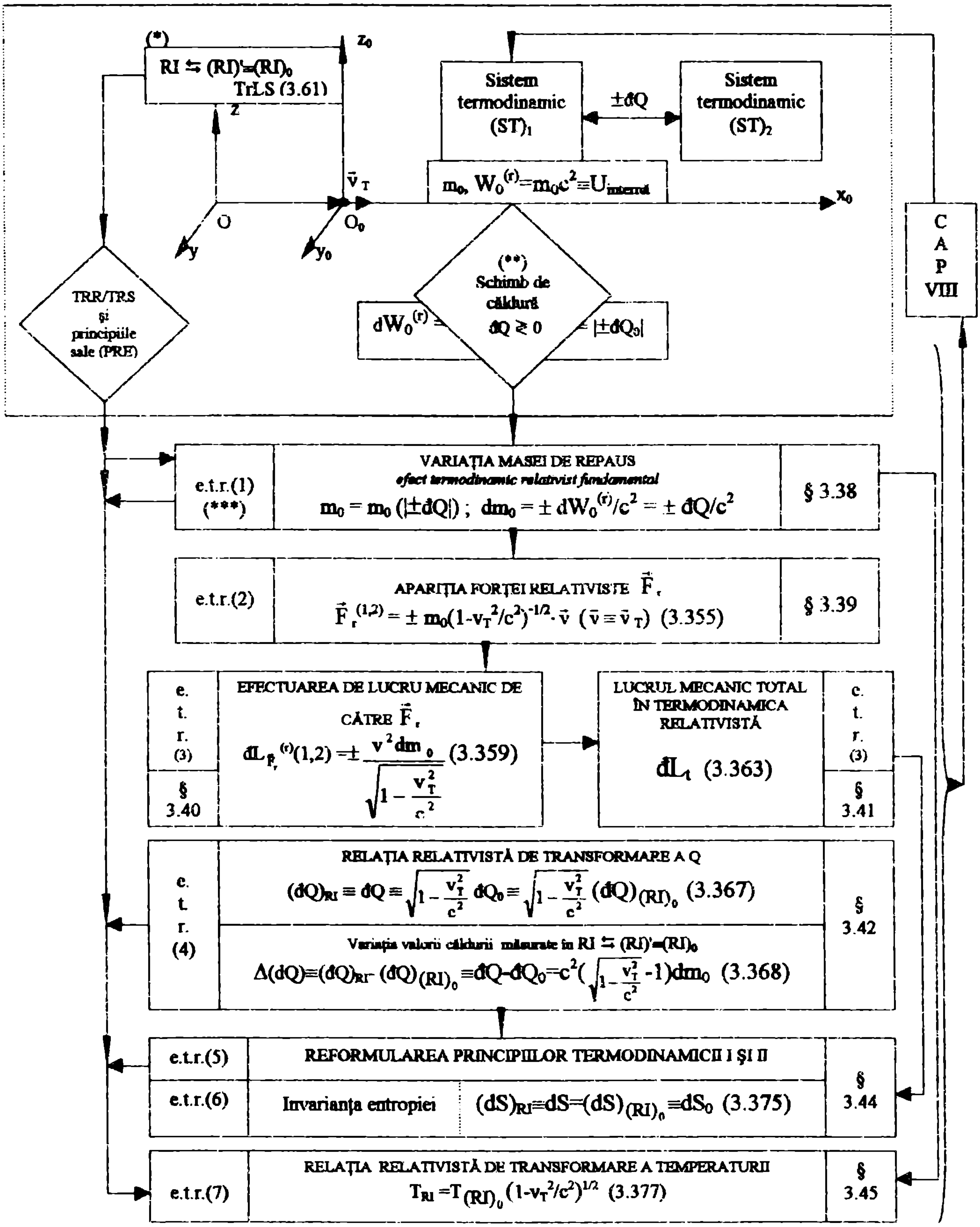


Figura 3.15 Efectele termodinamice relativiste tratate în cap.VIII ca elemente de termodinamică relativistă şi modul lor de elaborare teoretică prin intercorelarea dintre paragrafele capitolului.

(*) RI ⇆ (RI)' ca referenţiale inerţiale reciproce faţă de care se raportează stările termodinamice ale $(ST)_1$, împreună cu schimburile de căldură (**) dintre $(ST)_1$ şi $(ST)_2$ determină toate *efectele termodinamice relativiste* [e.t.r.(***)], esenţial, *consecinţe termodinamice ale* TrLS (3.61) urmărite numai pentru $(ST)_1$. $(ST)_2$ joacă doar rol de "partener" de schimb de căldură cu $(ST)_1$ luat în considerare. Dreptunghiul marcat cu linie întreruptă constituie *blocul metodologic operaţional* conţinând datele de intrare (start) inclusiv cele metodologic operaţionale legate de acţiunea PRE în trecerea RI ⇆ $(RI)_0$ şi de acţiunea schimbului de căldură între $(ST)_1$ (supus studiului) şi $(ST)_2$.

față de trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$; (7) "*contracția*" *relativistă a temperaturii măsurate în* RI, în raport cu temperatura măsurată în (RI)$_0$ (temperatura "de repaus") etc. Toate cele 7 *efecte termodinamice relativiste* vor fi tratate în cele ce urmează, ca și consecințe termodinamice ale transformărilor Lorentz speciale (TrLS) (3.61), ele constituind împreună *elementele de termodinamică relativistă* desemnate elaborării în capitolul VIII de față.

În *figura 3.15*, *efectele termodinamice relativiste* {e.t.r} numerotate de la (1) la (7) sunt prezentate prin intermediul unei diagrame structurale metodologic-funcționale în cadrul cap.VIII, cu corelarea dintre paragrafe și legătura dintre {e.t.r} specificată și cu ilustrarea *modului de generare/elaborare a elementelor de termodinamică relativistă*, plecând de la raportarea stărilor termodinamice ale sistemului termodinamic (corp macroscopic) (ST)$_1$, aflat în contact termic, cu un alt sistem termodinamic (ST)$_2$, cu care face schimb de căldură. Raportarea stărilor termodinamice la referențialele inerțiale reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ este impusă de principiile TRR/TRS (în special PRE), împreună cu schimbul de căldură a lui (ST)$_1$ cu (ST)$_2$ raportat la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)$_0$ [descrisă matematic de TrLS (3.61)-(3.63)], contribuie la generarea tuturor {e.t.r} enumerate mai sus.

3.38 Variația masei de repaus (m_0) a unui sistem termodinamic prin schimburile de căldură cu alt sistem termodinamic ([e.t.r(1)])

3.38.1 Sistem termodinamic unic $(ST)_1 \cup (ST)_2$ raportat la același referențial inerțial $(RI)_0$ propriu. Energia relativistă de repaus (proprie) $W_0^{(r)}$ ca energie internă (U_i) a sistemului termodinamic ($W_0^{(r)} \equiv U_i$)

Pentru a putea studia relativist schimbul de căldură (Q) dintre două sisteme termodinamice, conform termodinamicii clasice, sunt necesare două corpuri macroscopice (sisteme termodinamice) în contact termic între ele, care împreună alcătuiesc un sistem unic $ST \equiv (ST)_1 \cup (ST)_2$ și pe care considerându-le în repaus unul față de celălalt, le raportăm la *referențialul propriu unic* (RI)$_0$≡(RI)' (v. fig. 3.15 și fig. 3.3(b)). Avem cea mai simplă situație termodinamică, în care (ST)$_1$ și (ST)$_2$ nu schimbă între ele (nu efectuează) lucru mecanic. Fiecare din cele două corpuri macroscopice considerate cu *aceeași masă de repaus* m_0, are *energia relativistă de repaus (proprie)*: (3.220) $W_0^{(r)} = m_0c^2 \equiv U_i$, care, *termodinamic, reprezintă tocmai energia internă* (U_i) *a fiecăruia din sistemele termodinamice* (ST)$_1$, respectiv (ST)$_2$.

Elaborările termodinamice relativiste, din cadrul cap.VIII de față, tratând cele 7 efecte termodinamice relativiste enumerate în paragraful precedent, vor avea în vedere mai ales *sistemul termodinamic* (ST)$_1$, celui de-al doilea revenindu-i rolul de "partener" în realizarea *schimbului de căldură* (Q), care raportate la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ (descrisă matematic de TrLS (3.61)) vor provoca efectele termodinamice avute în vedere (după cum arată reprezentarea diagramatică din figura 3.15).

3.38.2 Schimburi elementare de căldură $|\pm đQ_0|$ între (ST)$_1$ și (ST)$_2$

Conform precizărilor din 3.38.1, cele două corpuri, ca sisteme termodinamice (ST)$_1$ și (ST)$_2$ în contact termic, vor putea face *schimburi de căldură* $|\pm đQ_0|$ între ele, unul, de exemplu (ST)$_1$ *primind căldura* $+đQ_0$, celălalt (ST)$_2$ cedând căldura $(-)đQ_0$, sau invers. Indicele zero din $đQ_0$ arată că măsurarea căldurii schimbate se face în (RI)$_0$ propriu [în repaus față de corpurile (sistemele termodinamice) considerate, conform figurii 3.15]. Semnul đ, adică d tăiat, indică faptul că mărimea Q nu este diferențială totală exactă, echivalent, este mărime fizică de proces. Totuși prin $đQ_0$ se desemnează *schimburi de călduri elementare* corespunzând, conform principiului I al termodinamicii, diferențialei totale exacte dU, care introduce în termodinamică *energia internă* U_i ca mărime fizică de stare.

3.38.3 Variația energiei de repaus $W_0^{(r)}$ a corpurilor (sistemelor termodinamice) determinată de schimbul elementar de căldură $|\pm đQ_0|$

Deoarece *energia de repaus (proprie)* $W_0^{(r)}$, ca *energie măsurată*, pentru fiecare din cele două corpuri (sisteme termodinamice) (ST)$_1$ și (ST)$_2$, în *referențial propriu* (RI)$_0$ *față de care corpurile sunt în* *repaus* (v. fig. 3.15), *este tocmai energia internă* (U_i), şi *deoarece nu are loc schimb de lucru mecanic între corpuri, principiul întâi al termodinamicii* [exprimat matematic în forma diferenţială:

(3.343) (a) $dU_i = đQ + đL$ (v. ref. 82b, pag. 61, rel (3.10)) sau în forma

(3.343) (b) $đQ = dU_i - đL$] *conduce la concluzia că energia de repaus (proprie)* $W_0^{(r)}$ *ca energie internă* (U_i) a oricăruia din cele două corpuri (sisteme termodinamice) *suferă o variaţie*:

(3.344) $|dW_0^{(r)}| \equiv d(U_i)_0 = |\pm đQ_0|$. Dacă primul corp (sistem termodinamic) $(ST)_1$ suferă o *creştere* (3.345) $dW_0^{(r)} = +đQ_0$, atunci celălalt $(ST)_2$ suferă o descreştere cu aceeaşi cantitate, adică $(ST)_1$ absoarbe căldură de la $(ST)_2$ în timp ce acesta o cedează. Situaţia se inversează, când $(ST)_1$ suferă o *descreştere* de energie internă, care este echivalentă cu o cedare de căldură. Avem, astfel, variaţia

(3.346) $dW_0^{(r)} \equiv dU_i = \pm đQ_0$ sau (3.347) $|dW_0^{(r)}| = |\pm đQ_0| \equiv |đQ_0|$, *a energiei de repaus*, sau *a energiei interne*, determinată de schimburile de căldură $|\pm đQ_0|$ între $(ST)_1$ şi $(ST)_2$.

3.38.4 Variaţia masei de repaus m_0 prin schimburile de căldură $|đQ_0|$ -efect termodinamic relativist fundamental ([e.t.r.(1)])

Cel mai simplu *efect termodinamic relativist* (e.t.r), consecinţă a TrLS (3.61) şi a principiilor TRR/TRS rezultă din relaţia (3.220) precum şi din (3.346)/(3.347), care au la bază *invarianţa formei matematice a principiului I al termodinamicii* (ca lege fizică fundamentală în termodinamica macroscopică) faţă de trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'$\equiv$(RI)$_0$ (v. şi *figura 3.3(b)*), la care se raportează stările termodinamice şi procesele termodinamice suferite de sistemul termodinamic $(ST)_1$ luat în considerare pentru studiu. Acest efect ca e.t.r este tocmai *variaţia masei de repaus* m_0 *a unui sistem termodinamic* $(ST)_1$ *cu schimburile de căldură* $|\pm đQ_0|$ *determinate de contactul termic* cu un alt sistem termodinamic $(ST)_2$, e.t.r *exprimat matematic prin*:

(3.348) (a) $|dm_0| = |dW_0^{(r)}|/c^2 = |\pm đQ_0|/c^2$ sau (3.348) (b) $dm_0 = \pm\, dW_0^{(r)}/c^2 = \pm\, đQ_0/c^2$. În (3.348) (b), semnele $\pm$ indică *creşterea masei de repaus* m_0 când $(ST)_1$ *absoarbe căldura* $(+)đQ_0$, respectiv *micşorarea/scăderea masei de repaus* m_0 când *cedează căldura* $(-)đQ_0$. Prin (3.348) avem o *nouă lege termodinamică*, care, exprimând unul din {e.t.r}, este *impusă de reformularea termodinamicii în sens relativist-retrâns* (TRR/TRS).

3.38.5 Legea termodinamică relativistă a variaţiei masei de repaus (m_0) prin schimburile de căldură dintre sistemele termodinamice [e.t.r.(1)]

Conform rezultatelor relativiste (3.348), se poate formula următorul enunţ al *legii termodinamice relativiste de variaţie a masei de repaus cu schimburile de căldură*: <*masa de repaus a unui corp macroscopic* (sistem termodinamic), *care schimbă căldură cu alte corpuri macroscopice* (alte sisteme termodinamice), *variază*, chiar în referenţialul propriu (RI)$_0$, *în funcţie de căldura schimbată*>, echivalent, <*masa de repaus* (proprie) m_0 *a unui corp* (sistem termodinamic) ce face schimburi de căldură cu alte corpuri *nu este un invariant relativist termodinamic*, cum este în cazul fenomenelor pur mecanice>.

Forma matematică cea mai comodă pentru legea enunţată este (3.349) $c^2 dm_0 = \boldsymbol{đQ}_0$, care arată că *schimburile de căldură de valori* $đQ_0$ *diferite*, pentru acelaşi sistem termodinamic, conduc la *valori diferite* ale produsului $c^2 dm_0$ şi deci ale *masei de repaus*.

3.39 Apariţia unei forţe relativiste $\vec{F}_r$ determinată de variaţia (3.348) a masei de repaus cu schimburile de căldură $|\pm đQ_0|$ ([e.t.r.(2)])

3.39.0 Precizare metodologică

Utilizând legea fundamentală a acţiunii forţei (legea manifestării acţiunii forţei) $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} \equiv \dot{\vec{p}} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt}$, în ipoteza variaţiei în timp a termenilor produsului $m\vec{v}$ de derivat, variaţia relativistă $m(v^2)$ a masei de mişcare (cinematice) un efect relativist mecanic fiind, din punct de vedere termodinamic, ne interesează *efectul termodinamic relativist* (e.t.r) introdus de variația $\dot{m} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)$. Corelând cele două variații incluse în formulele de mai sus, rezultă că e.t.r avut în vedere este apariția unei *forțe suplimentare* $\vec{F}_r$, determinată de variația $\dot{m}_0 = \frac{dm_0}{dt}$ (la rândul ei provocată de schimburile de căldură), ca o *forță relativistă* ce se pune în evidență prin raportarea sistemului termodinamic unic la un RI, altul decât $(RI)' \equiv (RI)_0$ propriu.

3.39.1 Raportarea sistemului termodinamic unic (din 3.38.1) la un RI altul decât $(RI)_0 \equiv (RI)'$ propriu

Trecerea de la referențialul propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ la RI, altul decât cel propriu (v. fig. 3.15 și fig. 3.3(b)), conform modului cum s-au considerat cele două tipuri de referențiale, face ca *sistemul termodinamic unic* $ST=(ST)_1 \cup (ST)_2$, din subparagraful 3.38.1, să fie *în mișcare rectilinie și uniformă* (MRU) cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$ cu care se deplasează $(RI)' \equiv (RI)_0$ față de RI. În acest caz, asupra primului dintre cele două corpuri $[(ST)_1]$ din sistemul unic considerat va acționa o forță:

(3.350) $\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} \equiv m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\,\dot{m}$, având o *componentă relativistă de explicitat* ($\vec{F}_r^{(1)} = v \cdot \dot{m}$), determinată de variația (3.348) a masei de repaus (din $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}$) cu schimburile $\pm đQ_0$ de căldură.

3.39.2 Forța relativistă $\vec{F}_r^{(1)}$ determinată de variația $dm_0 = +đQ_0/c^2$ (la absorbție de căldură) a masei de repaus a lui $(ST)_1$ ([e.t.r.(2)])

Relația (3.350) se mai explicitează prin considerarea derivatei $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$, ținând cont de variația $m(v^2) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \equiv \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, ca:

(3.351) $\vec{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\left(m_0\dot{\vec{v}} + \dot{m}_0\vec{v} + \frac{v^2}{c^2}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\dot{\vec{v}}\right)$, dacă se utilizează

(3.352) $\dot{m} \equiv \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{v}\dot{\vec{v}}}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^3}}$, la $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$.

Când $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$=const., adică sistemul termodinamic unic are MRU împreună cu $(RI)' \equiv (RI)_0$ (ca referențial propriu), față de RI, atunci în expresia generală (3.351) având $\dot{\vec{v}} \equiv \vec{a} = 0$, rezultă o reducere a expresiei (3.351) a lui $\vec{F}_1$ la *forța relativistă*:

(3.353) $\vec{F}_r^{(1)} = \frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\,\bar{v} \equiv \frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\bar{v}$, *forță ce acționează* asupra corpului macroscopic

$(ST)_1$ care absoarbe căldura $(+)đQ_0$, ca *forță relativistă determinată de variația* $\dot{m}_0$ *a masei de repaus* m_0 *a corpului.*

3.39.3 Forța relativistă $\vec{F}_r^{(2)}$ determinată de variația $dm_0 = -\frac{đQ_0}{c^2}$ (la cedarea de căldură) a masei de repaus a lui $(ST)_2$ ([e.t.r.(2)])

Specificând că masa de repaus m_0' a corpului macroscopic (sistemului termodinamic) $(ST)_2$ a fost considerată $m_0' = m_0$, adică egală cu cea a lui $(ST)_1$ (v. și fig. 3.15 în blocul metodologic operațional), trebuie remarcat, *ținând cont de legea termodinamică relativistă exprimată prin* (3.348)(b), că și *asupra corpului macroscopic* $(ST)_2$ [care cedează căldura $(-)đQ_0$] *acționează o forță relativistă determinată de variația masei sale de repaus la cedarea căldurii* $(-đQ_0)$, având expresia:

(3.354) $\vec{F}_r^{(2)} = -\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\,\bar{v} \equiv -\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\bar{v} = -\vec{F}_r^{(1)}$.

3.39.4 Concluzie termodinamică relativistă

Ca urmare a variației masei de repaus m_0 *a unui sistem termodinamic* (corp macroscopic) cu schimburile de căldură $\pm đQ$, exprimată prin relațiile (3.348) și (3.349), *apare un efect termodinamic relativist* ([e.t.r.(2)]) constând din *acțiunea unei forțe relativiste*:

(3.355) $\vec{F}_r^{(1,2)} = \pm\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\,\bar{v} \equiv \pm\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\bar{v}$, *asupra corpului* ce absoarbe, respectiv cedează căldură [cazul de absorbție, respectiv cel de cedare de căldură fiind desemnat prin semnul (+), respectiv (-)]. Trebuie observat că în (3.355), $\bar{v} \equiv \bar{v}_T$ indică menținerea indicelui T sub semnul radical *pentru specificarea mișcării de transport* cu viteza $\bar{v}_T$ a referențialului propriu $(RI)' \equiv (RI)_0$ față de RI, conformă cu *figura 3.3 (b)* (respectiv 3.15). Se mai observă, ca un fapt special termodinamic relativist, că e.t.r desemnat matematic prin (3.355), este posibil *chiar* atunci când corpul are MRU, deoarece $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355) apare la $\bar{a} \equiv \dot{\bar{v}} = 0$, când $\bar{v}$ =const.

3.40 Lucrul mecanic $đL^{(r)}_{F_r^{(1,2)}}$ efectuat de forța $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355) determinată de variația masei de repaus (m_0) cu schimbul de căldură dintre corpurile macroscopice (sistemele termodinamice) ([e.t.r.(3)])

3.40.0 Precizare conceptuală

Lucrul mecanic elementar se poate calcula și cu ajutorul puterii mecanice P, dacă aceasta este cunoscută, încât avem: (3.356) $đL = Pdt$, ca formulă de calcul. Din punct de vedere termodinamic, de interes relativist special va fi efectuarea de lucru mecanic de către $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355) în condițiile în care sistemul termodinamic se mișcă rectiliniu și uniform (MRU), adică atunci când $\bar{a} = \dot{\bar{v}} = 0$ din punct de vedere mecanic.

3.40.1 Puterea mecanică P_r corespunzătoare forței $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355)

Deoarece avem (3.357) $P = đL/dt \equiv \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$, forței $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355) îi corespunde o dezvoltare (disipare) de putere:

$$(3.358)\quad P_r^{(1,2)} = \vec{F}_r^{(1,2)}\cdot\vec{v} = \pm\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\vec{v}^{\,2}\ (\text{cu } \vec{v}\equiv\vec{v}_T).$$

3.40.2 Lucrul mecanic $đL^{(r)}_{F_r^{(1,2)}}$ efectuat de $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355)

Prin (3.358), formula de calcul (3.356) permite:

$$(3.359)\quad đL^{(r)}_{F_r^{(1,2)}} = \pm\frac{v^2\dot{m}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}dt = \pm\frac{v^2dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\ (\text{cu } \vec{v}\equiv\vec{v}_T),$$ dând *lucrul mecanic elementar efectuat de forța* $\vec{F}_r^{(1,2)}$. Această efectuare de lucrul mecanic (3.359) de către *forța relativistă* (3.355) *reprezintă* al 3-lea *efect termodinamic relativist* [e.t.r.(3)], *determinat de variația* (3.348) *a masei de repaus* (m_0) a unui sistem termodinamic cu schimburile de căldură ($đQ_0$) cu un alt sistem termodinamic.

3.40.3 Precizare sintetică asupra efectelor termodinamice relativiste din § 3.39 și din § 3.40

Apariția forței relativiste $\vec{F}_r^{(1,2)}$ (3.355) *și efectuarea lucrului mecanic* $đL^{(r)}_{F_r^{(1,2)}}$ (3.359) de către aceasta *au loc chiar în cazul* MRU ($\vec{a}\equiv\dot{\vec{v}}=0$) *a sistemului termodinamic* (corpului macroscopic), și constituie *esența specială* a condiționării efectelor termodinamice relativiste prezentate în paragrafele 3.39 și 3.40.

3.41 Lucrul mecanic total în termodinamica relativistă

În termodinamica relativistă, reluarea relației (3.350)/(3.351) cu înlăturarea indicelui 1 din $\vec{F}_1$ va conduce la *formula lucrului mecanic total schimbat de un sistem termodinamic*, când nu se mai consideră $\vec{a}\equiv\dot{\vec{v}}=0$ (sistem termodinamic în MRU), ci se condiționează că $\vec{a}\equiv\dot{\vec{v}}\neq 0$. În acest caz, prin P dat în forma (3.357), se reia (3.356) ca:

$$(3.360)\quad đL=Pdt=\vec{F}\,\vec{v}\,dt = m\vec{v}\,d\vec{v} + v^2\,dm = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\left(m_0\vec{v}\,d\vec{v}+v^2dm_0+\frac{v^2}{c^2}\,\frac{m_0}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\,\vec{v}\,d\vec{v}\right),$$

după ce s-a utilizat și (3.352) înmulțită cu dt pentru a-l explicita pe dm.

Dând factor comun $m_0\vec{v}\,d\vec{v}$ între primul și ultimul termen din paranteza rotundă a relației (3.360) și ținând cont de (3.359), rezultă succesiv:

$$(3.361)\quad đL = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\,m_0\vec{v}\,d\vec{v}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\,\frac{1}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\right)+\frac{v^2dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}=\frac{m\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}+\frac{v^2dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},$$ și în

final: $$(3.362)\quad đL = \frac{m\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}} + đL^{(r)}_{F_r^{(1,2)}}\ (\vec{v}_T\equiv\vec{v}),$$ ca *expresia termodinamică relativistă a lucrului mecanic total schimbat* de un sistem termodinamic aflat în mișcare cu $\dot{\vec{v}}\equiv\vec{a}\neq 0$, dar și în contact termic cu un alt sistem termodinamic cu care face schimburi de căldură. Cum referențialul propriu $(RI)_0$=(RI)' este legat solidar de sistemul termodinamic considerat, identitatea $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$ se menţine şi în (3.361)-(3.362), chiar dacă $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} \neq 0$.

Din (3.362) explicitată prin (3.361), se poate observa contribuţia $đL^{(r)}_{\vec{F}_r^{(1,2)}}$, la lucrul mecanic total, a efectului termodinamic relativist de variaţie a masei de repaus, care la rândul ei provoacă apariţia forţei relativiste $\vec{F}_r^{(1,2)}$, cu aportul ei corespunzător în efectuarea lucrului mecanic total. În acest fel, în đL sunt implicate toate cele trei {e.t.r} expuse în paragrafele 3.38, 3.39 şi 3.40, a căror corelare metodologică este ilustrată în figura 3.15.

3.42 Relaţia relativistă de transformare a cantităţii de căldură. Despre efectul termodinamic relativist de variaţie a căldurii măsurate în cele două referenţiale reciproc inerţiale (RI ⇆ (RI)' ≡ (RI)₀) [[e.t.r.(4)]]

3.42.0 Precizare metodologică

Invarianţa Lorentz a principiului I al termodinamicii (3.343) fiind asigurată de aplicarea principiului relativităţii einsteiniene (PRE), calcularea cantităţii de căldură đQ se va face utilizând forma (3.343)(b) a principiului I, cu specificarea că această relaţie are toţi termenii raportaţi la RI, faţă de care sistemul termodinamic considerat este în mişcare cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$.

3.42.1 Cantitatea de căldură đQ în raport cu RI

Indiciind cu RI termenii din (3.343)(b), avem pentru un sistem termodinamic care schimbă căldură şi lucru mecanic: (3.363) $(đQ)_{RI} = (dU_i)_{RI} - (đL)_{RI}$, ca exprimare matematică generală a principiului I al termodinamicii (v. ref. 82b, rel (3.10)).

În (3.363), *variaţia de energie internă* este:

$$(3.364)\quad (dU_i)_{RI} = c^2 dm = c^2 \dot{m}\,dt = c^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right)dt = c^2\left[\frac{\dot{m}_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{v}\dot{\vec{v}}}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^3}}\right]dt =$$

$$= c^2\left[\frac{dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m_0\vec{v}\,d\vec{v}}{c^2\sqrt{\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)^3}}\right] = \frac{c^2 dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\,\frac{\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}} = \frac{c^2 dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}},$$

pentru produsul $\dot{m}\,dt$ utilizându-se $\dot{m}$ din (3.352). Deoarece în (3.363) avem $(đL)_{RI} \equiv đL_t$ explicitat prin (3.361), utilizarea rezultatului final (3.364) şi a relaţiei (3.361) conduce, succesiv, la:

$$(3.365)\quad (đQ)_{RI} = \left(\frac{c^2 dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \frac{m\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}\right) - \left(\frac{m\vec{v}d\vec{v}}{1-\frac{v_T^2}{c^2}} + \frac{v^2 dm_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}\right) = \frac{c^2-v^2}{1-\frac{v_T^2}{c^2}}dm_0 =$$

$$= \frac{c^2\left(1-\frac{v_T^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}dm_0 = c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dm_0 \text{ (când } \vec{v} \equiv \vec{v}_T\text{)}.$$

3.42.2 Relația relativistă finală de transformare a cantității de căldură (3.367) ca e.t.r.(4)

Observând că în rezultatul final din (3.365) apare factorul $c^2 dm_0 = đQ_0 \equiv (đQ)_{(RI)_0}$, deja explicitat prin (3.349), $(đQ)_{RI}$ se mai scrie: (3.366) $(đQ)_{RI} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,(đQ)_{(RI)_0}$, sau renunțând la indicierea literală: (3.367) $đQ = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,đQ_0$, ca *formă finală a relației relativiste de transformare a cantității de căldură*, care *relație constituie tocmai* e.t.r.(4), enumerat printre {e.t.r} în subparagraful 3.37.2.

3.42.3 Interpretarea relației relativiste (3.367)

Relația relativistă (3.367) (sau (3.366)) exprimă *relația de transformare relativistă a cantității de căldură la trecerea de la un referențial propriu* $(RI)_0 \equiv (RI)'$ *la un referențial inerțial oarecare* RI *față de care sistemul termodinamic* (corpul macroscopic) *luat în considerare se mișcă cu* $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$. Se poate observa *similitudinea matematică dintre* (3.367) *și relațiile relativiste ce exprimă contracții relativiste* [(3.67) $l = l_0\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$; (3.72) $dV = dV_0 \cdot \sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$]. Astfel, relația relativistă (3.367) (sau (3.366)) arată o "*contractare/micșorare*" *a cantității de căldură* $đQ \equiv (đQ)_{RI}$ măsurată în referențialul (RI) în mișcare relativă cu $\vec{v}\,' = -\vec{v}_T$ [în raport cu $(RI)' \equiv (RI)_0$], "contractare" față de $đQ_0 \equiv (đQ)_{(RI)_0}$ măsurată în referențialul propriu $(RI)_0$ față de care sistemul termodinamic este în repaus.

Prin e.t.r sintetizat matematic de (3.367) (sau (3.366)), în paragraful următor va rezulta o *consecință fizico-matematică relativistă*, constând din *variația valorii căldurii măsurate în* RI și în $(RI)_0$, pe care am inclus-o în e.t.r(4), după cum se poate vedea și din *figura 3.15*.

3.43 Variația valorii căldurii măsurate simultan în referențiale reciproc inerțiale (RI $\leftrightarrows$ (RI)' $\equiv$ $(RI)_0$) [e.t.r.(4)]

Ca urmare a e.t.r exprimat prin (3.367) (sau (3.366)) de "contractare"/"micșorare" *relativistă a cantității de căldură* "cinematică" ($đQ \equiv (đQ)_{RI}$) față de cantitatea de căldură "de repaus" ($đQ_0 \equiv (đQ)_{(RI)_0}$), în raportarea simultană la referențialele reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$ (v. *figura 3.3 (b)* și *figura 3.15*), apare o *variație a valorii căldurii* măsurate, pentru același sistem termodinamic, în cele două referențiale: (3.368) $\Delta(đQ) \equiv (đQ)_{RI} - (đQ)_{(RI)_0} \equiv đQ - đQ_0 = c^2\left(\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}} - 1\right)dm_0$ (cu $\vec{v}_T \equiv \vec{v}$). Această variație este negativă, fapt ce îndreptățește utilizarea "termenului" de "contractare"/"micșorare". Astfel, prin (3.368), avem o *măsură* a efectului relativist expus în subparagraful ultim al paragrafului precedent, *la rândul ei această măsură* putând fi o exprimare a e.t.r de *variație a valorii căldurii prin trecerea de la un referențial inerțial la altul.*

3.44 Despre reformularea principiilor (I și II) ale termodinamicii teoretice în cadrul termodinamicii relativiste ([e.t.r.(5) și (6)]). Invarianța entropiei și relația relativistă de transformare a temperaturii ([e.t.r.(6) și e.t.r.(7)])

3.44.0 Remarcă metodologică. Acțiunea principiului relativității einsteiniene (PRE)

Impunerea PRE și asupra fenomenelor (proceselor) termodinamice cere *postularea invarianței principiilor termodinamicii ca legi fizice după care se desfășoară aceste fenomene* (procese). Matematic, această invarianță exprimă *conservarea formei matematice* a acestor principii (avem în vedere principiile I și II), în raport cu trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$, descrisă matematic de TrLS (3.61). În mod conștient, această invarianță impusă de PRE a fost utilizată metodologic pentru principiul I, practic, în toate {e.t.r} tratate până aici, în măsura în care forma matematică (3.343) a fost necesară unui anumit bilanţ energetic cerut de punerea problemelor plecând de la principiul I al termodinamicii. *Reformularea principiilor I şi II ale termodinamicii înseamnă*, esenţial, *afirmarea invarianţei Lorentz a formelor lor matematice*, atunci când se face dubla măsurare a mărimilor fizice (de stare şi de proces) în cele două referenţiale RI şi $(RI)' \equiv (RI)_0$, şi se impune cu necesitate trecerea de la un referenţial la altul. Astfel, PRE se manifestă ca un principiu metodologic *generator de termodinamică relativistă.*

3.44.1 Despre reformularea relativistă a principiului I al termodinamicii ([e.t.r.(5)])

3.44.1.1 Enunţul general al principiului I al termodinamicii

În vederea reconsiderării relativiste a principiului I al termodinamicii teoretice formulăm următorul *enunţ al principiului I*: <Variaţia energiei interne a unui sistem termodinamic în procesul termodinamic de trecere de la o stare termodinamică iniţială dată la o stare finală este egală cu suma algebrică dintre lucrul mecanic şi cantitatea de căldură schimbate de sistem în decursul procesului>.

Relativist, enunţul rămâne identic, dar cu precizarea raportării la referenţialele reciproc inerţiale RI şi $(RI)' \equiv (RI)_0$, respectiv a invarianţei formei lui matematice la trecerea $(RI)_0 \leftrightarrows RI$.

3.44.1.2 Forma matematică a principiului I pentru un proces termodinamic elementar

Este dată prin relaţia (3.343), din care putem avea formele matematice raportate la RI, respectiv $(RI)' \equiv (RI)_0$: (3.369) $(dU_i)_{RI} = (đL)_{RI} + (đQ)_{RI}$, respectiv

(3.370) $(dU_i)_{(RI)_0} = (đL)_{(RI)_0} + (đQ)_{(RI)_0}$, *exprimând aceeaşi lege de conservare a energiei totale în procesele mecanice şi termice*, raportată la referenţialul RI în mişcare cu $\vec{v}' \equiv -\vec{v}_T$ faţă de sistemul termodinamic considerat (acesta în mişcare faţă de RI cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$), respectiv la referenţialul propriu $(RI)_0$ (faţă de care sistemul considerat este în repaus).

3.44.1.3 Acţiunea invarianţei relativiste a principiului I prin PRE

Deoarece principiul I dat prin secvenţele precedente este tocmai *principiul conservării energiei*, este rezonabil să-şi păstreze forma generală în toate referenţialele inerţiale şi, deci, şi în raport cu trecerea RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$, descrisă matematic de TrLS (3.61). De aceea, (3.369) şi (3.370) sunt justificate atât ca scriere matematică efectivă, cât şi ca exprimare a invarianţei Lorentz impusă prin PRE.

Trecerea matematică, de la (3.370) ca expresie raportată la referenţialul propriu $(RI)_0$, la (3.369) ca expresie raportată la RI în mişcare relativă faţă de $(RI)_0$, *este determinată în mare măsură* de ceea ce mecanica relativistă a mediilor continue (extindere a mecanicii relativiste a punctului material la sistemul de puncte materiale infinitezimal apropiate) furnizează ca formule de transformare pentru $(dU_i)_{RI}$ şi $(đL)_{RI}$. Acest din urmă fapt fizico-matematic va permite obţinerea transformării căldurii $(đQ)_{RI}$ dependentă de $(đQ)_{(RI)_0} \equiv đQ_0$. Această dublă dependenţă a fost deja demonstrată reunind rezultate din paragrafele 3.38 [rel. (3.344)], 3.40 [rel. (3.359)], 3.41 [rel. (3.361)-(3.362)] şi 3.42 [rel. (3.363)-(3.367)].

3.44.2 Despre reformularea relativistă a principiului II al termodinamicii teoretice. Invarianţa relativistă a entropiei ([e.t.r.(6)])

(a) Unul dintre foarte multele enunţuri echivalente ale principiului II al termodinamicii teoretice afirmă *introducerea unei funcţii de stare termodinamică numită entropie*, manifestându-se matematic ca diferenţială totală exactă: (3.371) $dS = \frac{1}{T} đQ$ în decursul procesului termodinamic cvasistatic şi reversibil, caracterizat de schimbul de căldură $đQ$ la temperatura absolută T.

(b) Cum (3.371) este tocmai o formă matematică a principiului II al termodinamicii, *ar trebui* ca raţionamentele cele mai generale, legate de raportarea relativistă la referenţialele reciproc inerţiale RI $\leftrightarrows$ $(RI)' \equiv (RI)_0$, să afirme că *entropia trebuie să fie un invariant relativist*, adică să se menţină constantă în raport cu TrLS (3.61).

(c) *Concluzia relativistă* (b) *cere răspuns la întrebarea*: <Ce reprezintă de fapt, pentru entropia S, schimbarea de referenţial (RI)'≡(RI)$_0$ cu RI?>.
(d) Răspunsul la întrebarea (c) se obţine ţinând cont că trecerea (RI)$_0$ ⇆ RI, pentru sistemul termodinamic considerat, este *din punct de vedere mecanic trecerea din starea de repaus în starea de mişcare rectilinie şi uniformă.*
(e) Din punctul de vedere al *termodinamicii clasice, trecerea de la starea de repaus la starea de mişcare, echivalentă cu o acceleraţie infinit mică şi fără schimb de căldură.* Astfel, *în decursul trecerii de la repaus la mişcare* [de la (RI)$_0$ la RI], *starea internă a sistemului termodinamic nu se modifică. Informaţional,* trecerea (RI)$_0$ ⇆ RI *nu poate modifica "organizarea"* internă a sistemului termodinamic.
(f) Conform afirmaţiei (e), entropia sistemului termodinamic considerat trebuie să îndeplinească relaţia (3.372) S_{RI} = $S_{(RI)_0}$=const., *sugerând invarianţa entropiei impusă de* PRE şi deci de TRR/TRS.

3.44.3 Demonstrarea invarianţei relativiste a entropiei în raport cu TrLS (3.61)

Relaţia (3.372) se poate justifica, plecând de la (3.371) şi ţinând cont de afirmaţia (e) că trecerea (RI)$_0$ ⇆ RI exprimă o trecere adiabatică, în care $(đQ)_{adiabatică}$=0.

Demonstrarea efectivă a relaţiei (3.372) *se face prin*: (1) *considerarea sistemului termodinamic* [a cărui stare termodinamică este caracterizată prin *entropia* S definită de (3.371)], ca *sistem izolat într-o incintă cu pereţi adiabatici*; (2) *caracterizarea stării termodinamice a sistemului*, raportată la referenţialul propriu (RI)'≡(RI)$_0$, prin entropia $S_{(RI)_0}$ respectiv prin S_{RI} când raportarea se face faţă de RI; (3) *tratarea în spaţiul cuadridimensional Minkowski* ($\mathcal{S}_M$) *a trecerii* (RI)$_0$ ⇆ RI (echivalentă cu trecerea de la repaus la mişcare rectilinie şi uniformă), *prin echivalarea ei cu o rotaţie de unghi complex* $\hat{A}_c$ *în planul* OxOict (v. fig. 3.6); (4) utilizarea relaţiei (3.373) $\hat{A}_c=\sum_k d\hat{A}_c^{(k)}$ (cu $d\hat{A}_c^{(k)}$ unghiul infinitezimal k), pentru obţinerea rotaţiei finite de unghi $\hat{A}_c$, făcând rotaţii infinitezimale de unghi $\hat{A}_c^{(k)}$; (5) *considerarea rotaţiilor infinitezimale infinit de încete*, pentru a putea fi *echivalente fiecare cu un proces cvasistatic reversibil.*

Deoarece procesul cvasistatic reversibil are loc în condiţii de izolare adiabatică a sistemului termodinamic considerat, *nu poate avea loc nici un schimb de căldură*, atunci conform legii (3.349), avem în fiecare proces elementar dm_0=0, iar, prin (3.368), *şi variaţia nulă* $\Delta(đQ)$=0, echivalentă cu $(đQ)_{RI}=(đQ)_{(RI)'}$ sau cu $đQ=đQ_0$. Astfel, entropia S_0 rămânând constantă în decursul şirului de rotaţii infinitezimale ce duc prin (3.373) de la (RI)$_0$ la RI, avem $S_{(RI)_0}=S_{RI}$, adică tocmai (3.372), *care exprimă invarianţa relativistă a entropiei.* Trebuie specificat că procedeul (1)→(5) este echivalent cu cel utilizat în paragraful 3.12 (subparagraful 3.12.2) pentru deducerea TrLS (3.61). Acest fapt explică de ce *invarianţa* (3.372) *este de tip Lorentz, fără a apela direct la relaţiile Lorentz* (3.61).

Ţinând cont că *enunţul general al* PRE, aplicat în particular la principiul II al termodinamicii teoretice ca lege fizică, *afirmă conservativarea definiţiei* (3.371) *a entropiei*, ca formă matematică a principiului, demonstraţia de mai sus a *invarianţei entropiei* detaliază termodinamic relativist *posibilitatea unui nou enunţ* (între cele foarte multe echivalente) *al principiului II, de astă dată, relativist.* De asemenea, drept consecinţă a postulatului invarianţei relativiste a definiţiei entropiei, va apare *efectul termodinamic relativist* [e.t.r.(7)] *de variaţie a temperaturii măsurată în cele două referenţiale reciproc inerţiale*, cum se va preciza în cele ce urmează.

3.44.4 Enunţ relativist al principiului II al termodinamicii teoretice

Din subparagrafele 3.44.2 şi 3.44.3, ca urmare a rezultatelor privitoare la raportarea/măsurarea entropiei (3.371) la/în referenţialele reciproc inerţiale (RI)$_0$ ⇆ RI, *trecerea* de la referenţialul propriu (RI)$_0$ al sistemului termodinamic considerat la oricare alt RI [descrisă matematic prin TrLS (3.61)] *permite formularea următorului enunţ relativist al principiului II al termodinamicii*: <Conservarea

definiției fizico-matematice $dS=\frac{1}{T}đQ$ a entropiei unui sistem termodinamic impusă de principiul relativității einsteiniene (PRE), în trecerea de la referențialul propriu sistemului termodinamic $(RI)_0$ la oricare alt referențial inerțial RI, este echivalentă cu invarianța Lorentz a entropiei sistemului $S_{(RI)_0}=S_{RI}$>.

3.45 Relația relativistă de transformare a temperaturii ([e.t.r.(7)])

3.45.0 Precizări conceptuale și metodologice

Obținerea relației relativiste (3.366)/(3.367) de transformare a cantității de căldură la trecerea $(RI)_0 \leftrightarrows$ RI poate sugera o relație similară și pentru variații de temperatură, de care depinde în general orice schimb de căldură. Fiind vorba de variații de temperatură *și nu de temperaturi*, sugestia din (3.366)/(3.367) rămâne valabilă, dar nu rezolvabilă numai cu ajutorul principiului I al termodinamicii. De aceea, trebuie apelat și la forma matematică (3.371) a principiului II și la rezultatul relativist (3.372), pentru a putea deduce *relația relativistă de transformare a temperaturii în trecerea* $(RI)_0 \leftrightarrows$ RI.

3.45.1 Entropia elementară (corespunzătoare producerii unei cantități de căldură) raportată la referențialele inerțiale reciproce

(a) În raport cu referențialul propriu $(RI)_0$, definiția (3.371) ne dă *entropia proprie (de repaus)* elementară: (3.371') $(dS)_{(RI)_0}=\frac{1}{T_{(RI)_0}}(đQ)_{(RI)_0}$, corespunzătoare producerii cantității de căldură $(đQ)_{(RI)_0}$ măsurată în $(RI)_0$ propriu.

(b) În mod similar, raportarea la oricare alt RI, altul decât $(RI)_0$, conduce la: (3.374) $(dS)_{RI}=\frac{1}{T_{RI}}|đQ|_{RI}$, posibil de scris formal și de justificat principial prin aplicarea în termodinamică a principiului relativității einsteiniene, care afirmă invarianța Lorentz a formei matematice a principiului II al termodinamicii.

3.45.2 Relația relativistă de transformare a temperaturii ([e.t.r.(7)])

Invarianța relativistă (3.372) a entropiei, transcrisă prin (3.371') și (3.374), conduce la egalitatea:

(3.375) (a) $(dS)_{(RI)_0}=(dS)_{RI}$ și (3.375) (b) $\frac{1}{T_{(RI)_0}}(đQ)_{(RI)_0}=\frac{1}{T_{RI}}(đQ)_{RI}$. Din ultima relație avem: (3.376) $T_{RI}=T_{(RI)_0}\,(đQ)_{RI}/(đQ)_{(RI)_0}$, care prin (3.366) se finalizează în:

(3.377) $T_{RI}=T_{(RI)_0}\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}$, ca *relația relativistă de transformare a temperaturii la trecerea de la referențialul propriu* $(RI)_0$ *la oricare alt referențial* RI, reprezentând e.t.r(7) enumerat în subparagraful 3.37.2. În (3.377) $\vec{v}_T=\vec{v}$ indică legarea solidară a $(RI)_0$ de sistemul termodinamic considerat.

3.45.3 Interpretarea relativistă a relației (3.377)

Temperatura absolută caracterizând starea termodinamică a unui sistem termodinamic, măsurată în referențialul inerțial RI în MRU cu $\vec{v}'=-\vec{v}_T$ este mai mică decât aceeași temperatură măsurată în referențialul propriu $(RI)_0$. Astfel, (3.377) *exprimă o "contracție"* ("micșorare") a temperaturii absolute măsurată în referențialul RI în mișcare față de sistemul termodinamic de care este legat solidar $(RI)_0$ ca referențial propriu.

3.45.4 Remarcă finală asupra relației relativiste (3.377) ([e.t.r.(7)])

Legea relativistă (3.377) este similară cu legea relativistă (3.366)/(3.367) și cu alte legi relativiste exprimând "contracții" ale unor mărimi fizice cinematice față de mărimile fizice de repaus (proprii), conform relației (3.67) ce dă contracția relativistă a lungimii cinematice, respectiv relației (3.72) dând contracția relativistă a volumului cinematic.

3.45.5 Observații asupra reformulării relativiste a principiului III al termodinamicii

(O_1) Principiul al III lea al termodinamicii *în formularea Planck se reduce esențial la următorul enunț*: *<Entropia ca funcție de stare a oricărui sistem termodinamic la limita* T →0K *a temperaturii, tinde către o valoare constantă finită, care ar fi nulă pentru cristalele perfecte, dacă acestea s-ar putea afla la* T=0K>.

(O_2) *Consecința fundamentală* a enunțului de mai sus, care afirmă că *<temperatura absolută de* 0K *este principial inaccesibilă*>, poate fi inclusă într-un enunț mai lung al principiului III, drept completare a *enunțului fundamental* dat în (O_1). Includerea din punct de vedere fizico-teoretic n-ar aduce, cum se va putea constat din observațiile următoare, nici o contribuție la reformularea relativistă a principiului III, *consecința fundamentală* formulată mai sus fiind o *concluzie experimentală*, ce nu poate fi influențată de acțiunea principiilor TRR/TRS.

(O_3) Analizând enunțul dat în (O_1), pentru principiul III al termodinamicii, rezultă că acesta face o *precizare principial fundamentală asupra mărimii fizice de stare entropia*, încât ținând cont de *reformularea relativistă a principiului II al termodinamicii* efectuată în subparagraful 3.44.4, rezultă că impunerea PRE asupra *enunțului nerelativist dat de* (O_1), cu raportarea la referențialele reciproc inerțiale RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$, *nu aduce nimic nou* în enunțul relativist al principiului III aflat în afara *invarianței entropiei*.

(O_4) Invarianța amintită în (O_3) este o invarianță relativistă și este impusă de reformularea relativistă a principiului II, încât *comportarea la limită a entropiei* reformulată prin măsurarea ei în referențialele reciproc inerțiale RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$, *nu poate fi influențată relativist*.

(O_5) Enunțul dat în (O_1) pentru principiul III al termodinamicii se poate reformula relativist, cu modificările ce țin de cadrul relativist, astfel: <Entropia oricărui sistem termodinamic măsurată în referențialele reciproc inerțiale RI ⇆ $(RI)_0$ este un invariant relativist, iar la limita T →0K a temperaturii, tinde către *o valoare constantă finită*, care ar fi nulă pentru cristalele perfecte, dacă acestea s-ar putea afla la T=0K>.

(O_6) Reformularea relativistă a principiului III al termodinamicii dată prin (O_5) completează setul celor două principii (I și II) reformulate relativist în paragraful 3.44.

3.46 Precizări finale asupra cap. VIII

(p_1) În cadrul cap.VIII au fost expuse *elemente de termodinamică relativistă*, structurate metodologic prin *efectele termodinamice relativiste* ({e.t.r}) specificate în subparagraful 3.37.2 într-o numerotare (1)→(7), care a fost urmărită pas cu pas în expunerile din paragrafele anterioare 3.38-3.45, corelația dintre cele șapte ({e.t.r}) ca și structurarea după paragrafele capitolului, fiind sintetizată și ilustrată în *figura 3.15*.

(p_2) Toate {e.t.r} (1)→(7) sunt, de fapt, consecințe termodinamice relativiste ale TrLS (3.61), impuse de îndată ce principiile fundamentale ale TRR/TRS (în special PRE) au fost extinse aplicativ asupra fenomenelor termodinamice pe care le suferă sistemele termodinamice (corpurile macroscopice), *figura 3.15 explicitând* {e.t.r} *într-un mod esențializat pentru înțelegerea de sine stătătoare a ceea ce este termodinamica relativistă.*

(p_3) Elaborarea detaliată din cap.VIII a *elementelor de termodinamică relativistă* se justifică în cursul nostru de *fizică teoretică* (FT), atât prin jalonarea unui *model teoretic relativist termodinamic*, cât și prin destinația cursului de FT elaborat pentru studenții secției de chimie fizică și de radiochimie, care nu parcurg termodinamica, decât prin cursul de fizică moleculară și, într-un mod foarte "chimical", prin cursul de termodinamică chimică, care de cele mai multe ori este prezentat fără bazele fizice fundamental specificate.

CAP. IX ELEMENTE DE ELECTRODINAMICĂ RELATIVISTĂ [ELECTRODINAMICĂ CUADRIVECTORIALĂ ŞI CUADRITENSORIALĂ] ≡ EXPLICITAREA INVARIANŢEI RELATIVISTE A LEGILOR ELECTROMAGNETISMULUI. CUADRIVECTORI ŞI CUADRITENSORI ELECTROMAGNETICI

3.47_0 Consideraţii principiale şi metodologice prin raportarea la RI ⇆ (RI)' ≡ $(RI)_0$. Rolul TRR/TRS prin PRE

Conform consideraţiilor generale din cap. VI paragraful 3.31, în special din subparagraful 3.31.4, *modelul teoretic al electromagnetismului elaborat de Maxwell* (1865, 1873, 1878), *ecuaţiile fundamentale ce exprimă matematic legile electromagnetismului, ecuaţiile Maxwell, sunt esenţial relativiste*, chiar cu 50 de ani, înainte de elaborarea TRR/TRS (1905), aceste ecuaţii dovedindu-se invariante nu faţă de transformările Galilei (3.1)-(3.2), ci faţă de transformările Lorentz speciale (3.61). Ceea ce Maxwell n-a făcut (nici nu putea s-o facă) cu adevărat în sensul TRR/TRS (neelaborată pe atunci), a fost studiul comportării ecuaţiilor electromagnetismului în raport cu trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$ de la un referenţial inerţial la altul. De asemenea, nici scrierea cuadridimensională a mărimilor fizice electromagnetice şi a ecuaţiilor reprezentând matematic legile electromagnetismului. În anul dispariţiei lui Maxwell (1879), anul când se năştea Einstein, *bazele teoretice ale electromagnetismului maxwellian încă nu* se confruntau cu problema invarianţei formei matematice a legilor la trecerea de la un referenţial la altul, iar *echivalenţa tuturor referenţialele va fi impusă* doar în 1905 de către Einstein, *ca una din esenţele metodologic-aplicative ale principiului relativităţii einsteiniene* (PRE) *impus de* TRR/TRS. Această echivalenţă a referenţialelor (PRE), corelată cu prezenţa constantei universale $c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ în ecuaţiile Maxwell, pe care Einstein a postulat-o ca *viteză maximă de propagare a interacţiunilor* (PIVMPI), *impunându-i caracterul invariant faţă de orice* RI, au condus la înlocuirea transformărilor Galilei (3.1) cu cele Lorentz speciale (3.61), în descrierea trecerii RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$ ca şi la evidenţierea comportării relativist invariante a ecuaţiilor stabilite de Maxwell în modelul teoretic al electromagnetismului.

Pentru a pune în ordine această invarianţă relativistă, ca o evidenţă deja specificată pentru ecuaţiile Maxwell, este suficientă punerea/prezentarea lor sub formă cuadridimensională, ţinând cont de *evenimentul relativist* (3.378) $e_r=(x_1,x_2,x_3,x_4)\equiv(x,y,z,ict)$, care exprimă cuadridimensionalitatea spaţiului Minkowski ($\mathcal{S}_M$). Această punere/prezentare cuadridimensională va descoperi relaţia de *interdependenţă intimă dintre sarcinile electrice şi intensităţile curenţilor electrici, dintre momentele electrice şi cele magnetice, dintre intensităţile câmpurilor electrice şi cele ale câmpurilor magnetice. Această interdependenţă intimă între anumite mărimi fizice* n-a devenit *evidentă decât după aplicarea metodelor relativiste* (impuse de TRR/TRS) în domeniul *tratării teoretice a fenomenelor electromagnetice*.

În *figura 3.16* a fost sintetizată *structura noţional-conceptuală* şi *metodologic-funcţională* a cap.IX, furnizând asupra *<Elementelor de electrodinamică relativistă>*, alături de *elementele propriu-zise de structură, şi detalieri legate de* (I) *setul de noţiuni* [stare fizică locală, mărime fizică (M_f) electromagnetică şi tipurile ei (scalară, vectorială, cuadrivectorială, cuadritensorială), noţiuni fizico-matematice de investigaţie şi comportare (gradient, divergenţă, rotor etc.), variaţii (spaţiale şi temporale) ale M_f etc.], *respectiv de concepte fizico-matematice* (fenomene fizice cu particularizare la cele electromagnetice, lege fizică şi forma ei matematică, invarianţă fizică şi invarianţă matematică, postulate şi bază postulatorie, enunţuri fizice şi formulări matematice, comportare fizică şi ilustrarea ei matematică etc.), de (II) *setul de principii metodologice de fizică teoretică* (principii generale, principii ale TRR/TRS), respectiv de (III) *setul de şase postulate ale electrodinamicii clasice (maxwelliene) înlocuit relativist* de setul de *trei postulate ale electrodinamicii relativiste cuadrivectoriale şi cuadritensoriale, tocmai structura metodologic-funcţională a capitolului*, structură marcată prin paragrafele fundamentale şi tematica lor, prin corelaţia dintre paragrafe determinată de modul de elaborare şi expunere, *încheiate cu comportarea relativistă a* $\{M_f\}$ *electromagnetice* prin vectori, cuadrivectori şi cuadritensori în raport cu trecerea RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$ de la un referenţial inerţial la altul [matematic,descrisă de TrLS (3.61)] respectiv cu semnalarea *efectelor electrodinamice pur relativiste legate direct de trecerea* RI ⇆ (RI)'.

MĂRIMI FIZICE $\{M_f\}$ DE STARE pentru caracterizarea STĂRII LOCALE A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC ŞI A CORPURILOR AFLATE ÎN CÂMP

$\Sigma^{\text{locală}}_{\text{câmp}} \equiv \{(\vec{E},\vec{H});(\vec{D},\vec{B})\}$ $\qquad$ $\Sigma^{\text{locală}}_{\text{corp in câmp}} \equiv \{(\rho,\vec{J});(\vec{P},\vec{M})\}$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z$$

(operatorul topologic fundamental)

POSTULATELE ELCTRODINAMICII CLASICE MAXWELL		§ 3.47
Grupul I (G_I)	Grupul II (G_{II})	Grupul III (G_{III})
(P_1^I) al densităţii de sarcină el. ρ: (al divergenţei lui $\vec{D}$) $\mathrm{div}\,\vec{D} \equiv \nabla\cdot\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \rho$	(P_1^{II}) al divergenţei lui $\vec{B}$: $\mathrm{div}\,\vec{B} \equiv \nabla\cdot\vec{B} \equiv \nabla\vec{B} = 0$	(P_1^{III}) al relaţiei dintre ($\vec{D},\vec{E},\vec{P}$): $\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E} + \vec{P}$
(P_2^I) al densităţii de crt. el. $\vec{J}$: (al rotorului lui $\vec{H}$) $\mathrm{rot}\,\vec{H} \equiv \nabla\times\vec{H} \equiv \vec{J}_{tot}$ $(\vec{J}_{tot} = \vec{J}_C + \vec{J}_D = \vec{J}_C + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t})$	(P_2^{II}) al rotorului lui $\vec{E}$ $\mathrm{rot}\,\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (*) $P_2^{(r)}$	(P_2^{III}) al relaţiei dintre ($\vec{B},\vec{H},\vec{M}$) $\vec{B} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \equiv$ $\equiv \mu_0\vec{H} + \vec{P}_m$ $(\vec{P}_m = \mu_0\vec{M})$

FORMULAREA CUADRIDIMENSIONALĂ ASIGURĂ INVARIANŢA LORENTZ A FORMELOR MATEMATICE

TRR/TRS şi principiile sale (PRE) ; CUADRIVECTORI (3.386); CUADRITENSORI (3.403) şi (3.410); TrLS (3.61)

(III)

$\{M_f\}$ CUADRIVECTORIALE ŞI CUADRITENSORIALE RELATIVISTE				
§ 3.48 $\{M_F\}$ cuadrivectoriale (c.v.)		$\{M_f\}$ cuadritensoriale (c.t.)		§ 3.50→3.53
c.v. densitate de curent şi de sarcină electrică	c.v. electromagnetic potenţial	c.t. electromagnetic CÂMP	c.t. electromagnetic EXCITAŢIE	c.t. electromagnetic POLARIZARE
$J = J(J_1,J_2,J_3,J_4) = (J_x,J_y,J_z,ic\rho) = (\vec{J},ic\rho)$	$\Phi = \Phi(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4) \equiv (A_x,A_y,A_z,iV/c) \equiv (\vec{A},iV/c)$	$\{\Phi\} \equiv \{\Phi(\vec{E},\vec{B})\} \equiv \{\Phi(B_x,B_y,B_z,-i\vec{E}/c)\} \equiv \{\Phi(\vec{B},-i\vec{E}/c)\}$	$\{\Gamma\} \equiv \{\Gamma(\vec{D},\vec{H})\} \equiv \{\Phi(H_x,H_y,H_z,-ic\vec{D})\} \equiv \{\Phi(\vec{H},-ic\vec{D})\}$	$\{\Pi\} \equiv \{\Pi(\vec{P},\vec{M})\} \equiv \{\Pi(M_x,M_y,M_z,-ic\vec{P})\} \equiv \{\Pi(\vec{M},-ic\vec{P})\}$

(I) $\qquad$ (III)

DEF. DIV $T(\{x_j\})$ (3.397) şi $DIV_4\{T\}$ (3.418)
DEF. ROT$\{T\}$ (3.426)

POSTULATELE ELECTRODINAMICII RELATIVISTE		§ 3.54
$P_1^{(r)}$ al divergenţei tensoriale a c.t. EXCITAŢIE	$P_2^{(r)}$ al rotorului tensorial c.t. CÂMP (*)	$P_3^{(r)}$ al relaţiei dintre cuadritensorii electromagnetici
$DIV_4(\Gamma) = \begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \\ ic\rho \end{pmatrix}$ (3.419)	$ROT\{\Phi\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (3.427)	$\{\Phi\} = \mu_0(\{\Gamma\} + \{\Pi\})$ (3.431)

Problema fundamentală a electrodinamicii corpurilor în mişcare (PFECM)≡Comportarea relativistă a $\{M_f\}$ electromagnetice prin vectori, cuadrivectori şi cuadritensori relativişti	§ 3.55
Efectele electrodinamice pur relativiste evidenţiate teoretic	

Figura 3.16 Structura noţional-conceptuală(*) şi metodologic-funcţională a cap.IX(**)

(*)Prin *structura noţional-conceptuală* se înţelege setul de noţiuni [stare locală, mărime fizică (scalară, vectorială, cuadrivec-

3.47 Postulatele electrodinamicii clasice (Maxwell)

3.47.0 Precizare nerelativistă şi de conţinut

Postulatele electrodinamicii clasice maxwelliene, fiind enunţate pentru corpurile macroscopice în repaus, sunt valabile în raport cu referenţialul inerţial propriu $(RI)_0 \equiv (RI)'$ [v. fig. 3.3(b) şi fig. 3.15].

Ca sistem de enunţuri, aceste postulate dau *un set de afirmaţii fizico-matematice care determină local*: (a) *structura câmpului electromagnetic în regim variabil şi în medii oarecare*; (b) *relaţiile dintre câmpul electromagnetic şi starea locală a corpurilor macroscopice în repaus* şi (c) interacţiunea dintre câmpul electromagnetic şi corpurile *considerate în câmp.*

Esenţială în electrodinamica relativistă este reformularea postulatelor sale în aşa fel încât să fie pusă în evidenţă invarianţa relativistă a formelor matematice, intrinsecă întregii electrodinamici. De aceea, mărimile fizice ale electromagnetismului şi ale electrodinamicii trebuie exprimate corespunzător TRR/TRS, adică fizic cuadridimensional.

3.47.1 Mărimile fizice vectoriale ce descriu starea locală a câmpului electromagnetic

Vectorial, starea locală a câmpului electromagnetic este descrisă de setul:

(3.379) (a) $\Sigma^{\text{locală}}_{\text{câmp}} \equiv \{(\vec{E},\vec{H});(\vec{D},\vec{B})\}$, alcătuit în ordine din *mărimile fizice vectoriale*: *intensitatea câmpului electric* ($\vec{E}$), *intensitatea câmpului magnetic* ($\vec{H}$), *inducţia electrică* ($\vec{D}$) şi *inducţia magnetică* ($\vec{B}$), ultimele două fiind direct legate de proprietăţile electrice respectiv magnetice ale mediului (corpurilor) în care se stabileşte (se află) câmpul.

3.47.2 Mărimile fizice scalare şi vectoriale ce descriu starea locală a corpurilor (mediilor) în câmpul electromagnetic

Scalar şi vectorial, starea locală a corpurilor (mediilor) *macroscopice este descrisă de setul*:

(3.379) (b) $\Sigma^{\text{locală}}_{\text{corp în câmp}} \equiv \{(\rho,\vec{J});(\vec{P},\vec{M})\}$, în care avem: *densitatea volumică de sarcină* (ρ), *densitatea de curent electric* ($\vec{J}$), *vectorul polarizare electrică* ($\vec{P}$) şi *vectorul magnetizare* ($\vec{M}$).

Postulatele electrodinamicii clasice maxwelliene se pot grupa în perechi de câte două, rezultând trei grupuri importante structural şi metodologic pentru reformularea lor relativistă prin TRR/TRS, cu toate că apelarea la principiile relativiste se va reduce la scrierea cuadridimensională a formelor matematice ce exprimă generalizant şi relativist invariant aceste postulate.

3.47.3 Gruparea postulatelor electrodinamicii clasice în vederea reformulării lor relativiste

3.47.3.1 Grupul I (G_I) Postulatele densităţilor de sarcini electrice, respectiv de curent (ale surselor câmpului electromagnetic)

Postulatul $P_1^{(I)}$: <Repartiţiile de sarcini electrice caracterizate de densitatea de sarcină electrică ρ sunt sursele inducţiei electrice $\vec{D}$ prin: (3.380) $\operatorname{div}\vec{D} \equiv \nabla\cdot\vec{D} \equiv \nabla\vec{D} = \rho$>. În (3.380) avem vectorul $\vec{D} = D_x\vec{1}_x + D_y\vec{1}_y + D_z\vec{1}_z$ şi operatorul topologic fundamental în electromagnetism şi/sau electrodinamică,

---

(*) torială, cuadritensorială), noţiuni fizico-matematice (gradient, divergenţă, rotor), variaţii (spaţiale, temporale) ale $\{M_f\}$ etc.], ***respectiv de concepte fizico-matematice*** (fenomen, lege fizică, formă matematică a legii, postulat, invarianţă Lorentz, enunţuri etc.).

(**) ***Structura metodologic-funcţională*** cuprinde: structura ***metodică şi metodologică*** pusă în funcţie de succesiunea şi corelarea dintre paragrafe, structura elaborată de principiile metodologice ale fizicii teroretice (FT) şi ale TRR/TRS, respectiv ***structura postulatorie dată prin*** expunerea postulatelor electrodinamicii clasice necesară pentru reformularea relativistă a electrodinamicii.

operatorul nabla (Hamilton) $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z$, ca operatorul diferențial topologic de cercetare diferențială a proprietăților locale.

Postulatul $P_2^{(I)}$: <Rotorul (vârtejul) intensității câmpului magnetic $\vec{H}$ este determinat local de densitatea totală de curent $\vec{J}_{tot}$, conform cu (3.381) $\mathrm{rot}\vec{H} \equiv \nabla\times\vec{H} = \vec{J}_{tot} \equiv \vec{J}_C + \vec{J}_D \equiv \vec{J}_C + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$>. În (3.381) $\vec{J}_C$ este densitatea curentului de conducție, iar $\vec{J}_D$ densitatea curentului de deplasare (nulă în regim staționar). Conform relațiilor (3.380), respectiv (3.381) *sursa câmpului electric este repartiția de purtători de sarcină electrică*, iar *sursa câmpului magnetic este reprezentată de curenții electrici*. De asemenea, *câmpul* $\vec{H}$ *este rotațional*, adică *prezintă vârtejuri de linii de câmp închise în jurul curenților electrici*. În formularea relativistă a electrodinamicii,postulatele (G_I) vor fi înlocuite cu un singur postulat relativist ($P_1^{(r)}$) *al divergenței tensoriale a cuadritensorului electromagnetic excitație* (Γ) (v. figura 3.16).

3.47.3.2 Grupul II (G_{II}) Postulatele divergenței vectorului inducției magnetice ($\vec{B}$), respectiv rotorului (vârtejului) vectorului câmp electric ($\vec{E}$)

Postulatul ($P_1^{(II)}$): <Deoarece vectorul inducție magnetică $\vec{B}$ are liniile de câmp închise (este solenoidal), în natură nu există repartiții de sarcină magnetică, adică avem *divergența nulă*

(3.382) $\mathrm{div}\vec{B} \equiv \nabla\cdot\vec{B} \equiv \nabla\vec{B} = 0$>. Enunțul, afirmând *divergența nulă a vectorului inducție magnetică*, este echivalent cu *inexistența sarcinilor magnetice*.

Postulatul III (G_{III}): <Rotorul (vârtejul) vectorului intensitate a câmpului electric $\vec{E}$ este determinat de variația în raport cu timpul a inducției magnetice $\vec{B}$, conform cu (3.383) $\mathrm{rot}\vec{E} \equiv \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$>. Experimental fenomenologic, enunțul exprimă legea inducției electromagnetice. În formularea relativistă a electrodinamicii, postulatele din (G_{II}) vor fi înlocuite cu un singur *postulat relativist* ($P_2^{(r)}$) *al rotorului tensorial al cuadritensorului electromagnetic câmp* $\{\Phi\}$ (v. fig. 3.16).

3.47.3.3 Grupul III (G_{III}) Postulatele relațiilor dintre $\{\vec{D}, \vec{E}$ și $\vec{P}\}$, respectiv $\{\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}\}$ (ale stărilor polare de ordinul I)

Postulatul $P_1^{(III)}$: <Starea de polarizare electrică a corpurilor aflate în câmp electric este descrisă local de *vectorul polarizare* $\vec{P}$, care împreună cu vectorii $\vec{D}$ și $\vec{E}$, satisface relația (3.384) $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$>.

Postulatul $P_2^{(III)}$: <Starea de magnetizare a corpurilor aflate în câmp magnetic este descrisă local de *vectorul magnetizare* $\vec{M}$, care împreună cu vectorii $\vec{B}$ și $\vec{H}$, satisface relația (3.385) $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\vec{H} + \vec{P}_m$, cu $\vec{P}_m = \mu_0\vec{M}$ vectorul polarizare magnetică>.

În formularea relativistă a electrodinamicii, postulatele din (G_{III}) vor fi înlocuite *cu un singur postulat relativist* ($P_3^{(r)}$) *al relației dintre cuadritensorii electromagnetici* ($\{\Phi\},\{\Gamma\},\{\Pi\}$) (v. fig.3.16).

3.47.4 Scopul relativist al grupării setului de șase postulate ale electrodinamicii clasice în grupuri de câte două postulate

Cum se observă din subparagraful precedent 3.47.3, setul de șase postulate ale electrodinamicii clasice a fost aranjat în 3 grupuri a câte două postulate. Pe lângă justificări fizico-experimentale ori fizico-matematice, aranjarea amintită are și *justificare metodologică relativistă*, implicată și în similitudini ori în simetrii matematice, deoarece reformularea relativistă a postulatelor electrodinamicii clasice pe baze cuadridimensionale trebuie să asigure *invarianța formei matematice a fiecăreia din relațiile* (3.380)-(3.385), în raport cu transformările Lorentz speciale (3.61) care descriu matematic trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, de la referențialul inerțial propriu (RI)$_0$ aflat în repaus împreună cu câmpul electromagnetic și cu corpurile aflate în el, la RI aflat în mișcare rectilinie și uniformă față de (RI)$_0$ [v. și fig. 3.3(b) și 3.15] (pentru (RI)$_0$ $\leftrightarrows$ RI).

Reformularea cuadridimensională în spațiul Minkowski [al mulțimii de evenimente relativiste de tip (3.378)], spațiul $\mathcal{S}_M$, a enunțurilor din subparagraful 3.43.3 le reduce numărul de la 6 la 3, echivalând câte un singur enunț pentru fiecare din cele trei grupuri de postulate, deoarece fiecărui grup îi corespunde cuadridimensional o singură formă matematică, *formă ce condensează cuadridimensional întreaga informație fizico-matematică din cele două forme matematice tridimensionale* aparținând unui grup de postulate. Acest fapt este posibil, deoarece diversele mărimi fizice electrice și magnetice, care descriu starea locală a câmpului electromagnetic și/sau a corpurilor, devin componente ale unui număr foarte mic de mărimi fizice cuadrivectoriale și/sau cuadritensoriale.

3.48 Mărimile fizice de stare cuadridimensionale descriind starea locală a câmpului electromagnetic și a corpurilor aflate în câmp. Cuadrivectorii electromagnetici $J(\vec{J}, ic\rho)$ și $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$

3.48.0 Definiția cuadrivectorului

Din cap.IV, paragraful 3.17, reluăm *definiția cuadrivectorului* centrată pe relația (3.100).

<Numim *cuadrivector* $\mathcal{C}$ ansamblul de patru mărimi fizice scalare $\{\mathcal{C}_j;\ j=\overline{1,4}\}$, care în trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ se transformă în sens Lorentz (3.386) $\mathcal{C}_j' = \sum_{k=1}^{4} \alpha_{jk} \mathcal{C}_k\ (j=\overline{1,4})$, cu $\{\alpha_{jk}\}$ coeficienții transformării Lorentz generale ((3.42)-(3.45))>.

În continuare, vom defini/construi *doi cuadrivectori electromagnetici relativiști fundamentali în construirea cuadritensorilor relativiști*: (I) *cuadrivectorul densitate de curent și de sarcină electrică* $J(\vec{J}, \rho)$ și (II) *cuadrivectorul electromagnetic potențial* (cuadripotențialul).

3.48.1 Cuadrivectorul electromagnetic densitate de curent și de sarcină electrică $J(\vec{J}, ic\rho)$- cuadrivectorul stării de încărcare cu sarcină electrică (ρ) și al transferului ei în spațiu ($\vec{J}$)

Local, *starea de încărcare electrică a corpurilor* se descrie prin densitatea volumică de sarcină electrică [$\rho \equiv \rho(x,y,z)$], iar *transferul acestei stări dintr-un punct în altul* prin densitatea de curent

(3.387) $\vec{J} = J_x \vec{1}_x + J_y \vec{1}_y + J_z \vec{1}_z$. Ținând cont că ρ este un scalar, iar $\vec{J}$ un vector tridimensional cu componentele în lungul axelor $Ox_1 \equiv Ox$, $Ox_2 \equiv Oy$, $Ox_3 \equiv Oz$, completarea spațiului cuadridimensional Minkowski cu axa $Ox_4 \equiv Oict$ [pentru a genera evenimente relativiste de tipul (3.378)], oferă cadrul matematic necesar atât scrierii TrLS (3.61), cât și *construirii unei a patra componente (3.388)* $J_4 = ic\rho$ [cu modulul în unități de $\vec{J}$ (A/m^2)], a unui *cuadrivector* $J(\vec{J}, ic\rho)$, definit ca:

(3.389) $J = J(J_1, J_2, J_3, J_4) \equiv (J_x, J_y, J_z, ic\rho) \equiv (J_x \vec{1}_x + J_y \vec{1}_y + J_z \vec{1}_z, ic\rho) \equiv (\vec{J}, ic\rho)$. Cuadrivectorul J a fost construit după modelul celui mai simplu cuadrivector $\mathcal{R} = \mathcal{R}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathcal{R}(x, y, z, ict) \equiv \equiv (x \vec{1}_x + y \vec{1}_y + z \vec{1}_z, ict) \equiv (\vec{r}, ict)$ din (3.301). Se poate arăta ușor că *cuadrivectorul* J (3.389) satisface relația (3.386) [la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$], apelând la scrierea matriceală a relației (3.306) prin modul de scriere matriceală din relațiile (3.42)-(3.45), precum și la structura (3.389) precizată prin (3.387) și (3.388). Trebuie specificat că în general $\rho = \rho(\vec{r}, t)$ și $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}, t)$ cu păstrarea caracterului scalar, respectiv vectorial al mărimilor fizice.

3.48.2 Cuadrivectorul electromagnetic potențial $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ (cuadripotențialul electromagnetic)

Deoarece în electromagnetism și/sau în electrodinamică *potențialul vector* $\vec{A}(A_x, A_y, A_z) \equiv \equiv A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y + A_z \vec{1}_z$, respectiv *potențialul scalar* $V \equiv V(x,y,z)$, fiind dependenți și de timp, satisfac fiecare o ecuație de tip D'Alembert:

(3.390) (a) $\square \vec{A} \equiv \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$, respectiv

(3.390) (b) $\square V \equiv \Delta V - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$, *construirea unui cuadrivector electromagnetic potențial* (cuadripotențial) Φ, plecând de la $\vec{A}$ și V, *devine necesară relativist cuadridimensional, pentru caracterizarea/descrierea locală relativistă a câmpului electromagnetic.* În (3.390) avem operatorul Laplace $\Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ și deci operatorul D'Alembert $\square = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, operator a cărui invarianță la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' a fost demonstrată în cap.II (§ 3.11) și a fost utilizată pentru deducerea transformărilor Lorentz generale.

După modelul de construire a cuadrivectorului (3.389), cu componentele (A_x, A_y, A_z) pentru $\vec{A}$ și cu scalarul $V \equiv V(x,y,z)$, avem *cuadrivectorul electromagnetic potențial* Φ *definit* prin:

(3.391) (a) $\Phi = \Phi(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = \Phi(A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}V) \equiv \Phi(A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y + A_z \vec{1}_z, \frac{i}{c}V) \equiv \Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$, sau și

mai condensat (b) $\Phi = \Phi(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = \Phi(A_x \vec{1}_x + A_y \vec{1}_y + A_z \vec{1}_z, \frac{i}{c}V) \equiv \Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$, exprimări cuadridimensionale prin *potențialul magnetic vector* $\vec{A}$ și *potențialul electric scalar* V. Componenta $\Phi_4 = \frac{i}{c}V$ are modulul exprimat *tocmai în unități de potențial magnetic vector* $\vec{A}$.

3.48.3 Ecuația D'Alembert cuadridimensională ca ecuație unică prin cuadrivectorii Φ și J

Ținând cont de *cuadrivectorii electromagnetici relativiști* definiți prin relațiile (3.389) și (3.391), ecuațiile D'Alembert (3.390) (a) și (b) fuzionează în una singură:

(3.394) $\square \Phi = -\mu_0 J$, care se scrie după componente ca:

(3.395) $\square \Phi_j = -\mu_0 J_j \quad (j = \overline{1,4})$, reprezentând *ecuația D'Alembert cuadridimensională* ca ecuație unică. Coincidența primelor trei ecuații din (3.395) $(j = \overline{1,3})$ cu (3.390) (a) este evidentă dacă ținem cont de $\{A_j\ (j = \overline{1,3})\} \equiv \{\Phi_j\ (j = \overline{1,3})\} \equiv \{A_x, A_y, A_z\}$. Pentru j=4, ecuația a patra din (3.395) devine:

(3.396) (a) $\square \Phi_4 \equiv \square(\frac{i}{c}V) = -\mu_0 J_4 \equiv -\mu_0 i c \rho$, sau (3.396) (b) $\square V = -\mu_0 i c \rho$, transformându-se în (3.390) (b), dacă în (3.396) (b) se înlocuiește constanta universală $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$. S-a demonstrat, astfel, că *forma cuadridimensională* (3.394) *a ecuației D'Alembert este o formă relativistă condensată a ecuațiilor clasice* (3.390) (a) și (b).

3.48.4 Despre cuadripotențialul electromagnetic $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ și caracterul său cuadritensorial prin $\{\Phi(\vec{E}, \vec{B})\}$

Necesitățile fizico-matematice, impuse până în această fază *a clarificării mărimilor fizice relativiste* ce caracterizează *local câmpul electromagnetic*, au evidențiat pentru mărimea fizică notată Φ doar *caracterul ei cuadrivectorial de potențial generalizat* exprimat prin dependența $\Phi(\vec{A}, V)$ complet explicitată prin (3.391). Dacă se ține cont că *potențialul magnetic vector* $\vec{A}$ este definit prin intermediul vectorului inducție magnetică $\vec{B}$ conform relației (3.392) $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \equiv \nabla \times \vec{A}$, iar împreună cu *potențialul* *electric scalar* V satisface relaţia (3.393) $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \equiv -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}V$, atunci *dependenţa complet explicitată* $\Phi(\vec{A}, V)$ *este*, de fapt, *de forma* $\Phi(\vec{E}, \vec{B})$ prin vectorii de câmp $\vec{E}$ şi $\vec{B}$. Această dependenţă $\Phi(\vec{E}, \vec{B})$ *impune mărimii fizice notată cu* $\{\Phi\}$ *caracter tensorial*, dacă se are în vedere că fiecare din cei doi vectori impune câte 3 componente carteziene scalare (E_x, E_y, E_z) respectiv (B_x, B_y, B_z), care, conform relaţiei (3.392)-(3.393), implică în explicitarea cuadrivectorului $\Phi(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4)$ o comportare fizico-matematică matriceală 4×4 a lui $\{\Phi(\vec{E}, \vec{B})\}$, paranteza acoladă *desemnând* tocmai caracterul tensorial exprimat matriceal. *Caracterul tensorial al mărimii fizice* $\{\Phi\}$ îi schimbă denumirea în *cuadritensorul electromagnetic relativist CÂMP* $(\{\Phi(\vec{E}, \vec{B})\})$. Tratarea efectivă a cuadritensorului CÂMP $\{\Phi\}$ va fi făcută în paragraful 3.51 după precizări noţional-conceptuale în § 3.50. Această *dublă comportare* relativistă de cuadrivector $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c} V)$ respectiv de cuadritensor $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c} \vec{E})\}$ pentru *mărimea fizică electromagnetică* Φ *relativistă este o faţetă a invarianţei relativiste a legilor electrodinamicii relativiste*, manifestată în cel mai înalt grad de generalitate a exprimării şi a reformulării relativiste a electrodinamicii clasice maxwelliene.

3.49 Invarianţa Lorentz a divergenţei cuadridimensionale a cuadrivectorilor $J(\vec{J}, ic\rho)$ şi $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c} V)$

3.49.1 Legea divergenţei cuadrivectorului $J(\vec{J}, ic\rho)$. Invarianţa Lorentz a unor legi electrodinamice prin invarianţa formei matematice faţă de RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$

Invarianţa formei matematice, faţă de trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$, ca invarianţă Lorentz a unor legi electrodinamice faţă de TrLS (3.61), apare mai evidentă în cazul exprimării cuadridimensionale a acestor legi prin intermediul cuadrivectorilor, *deoarece* componentele cuadrivectorilor, conform definiţiei (3.386), se transformă în sens Lorentz restrâns, făcând ca indiferent de raportarea la RI [definind şi măsurând evenimentul {x,y,z,ict}] sau la (RI)' [definind şi măsurând acelaşi eveniment ca {x',y',z',ict'}], să se obţină *o aceeaşi formă matematică de acelaşi tip a aceleiaşi legi.*

Dacă se aplică, cuadrivectorului $J(\vec{J}, ic\rho)$ *divergenţa cuadridimensională formală*

(3.397) $\mathrm{DIV}\ T(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \nabla_4 T \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{1}_z + \frac{\partial}{\partial x_4}\vec{1}_4\right)(T_1\vec{1}_x + T_2\vec{1}_y + T_3\vec{1}_z + T_4\vec{1}_4)$,

rezultă pe rând:

(3.398) $\mathrm{DIV}\ J \equiv \nabla_4 J = \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} + \frac{\partial J_4}{\partial x_4} \equiv \left(\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial(ic\rho)}{\partial(ict)} = \nabla_3\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \equiv \mathrm{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$,

deoarece ultima egalitate reprezintă *ecuaţia de continuitate* [(3.402) (a)], care exprimă tocmai *legea* (principiul) *conservării sarcinii electrice.* Astfel, cu (3.398) se demonstrează că:

(3.399) DIVJ = 0, *care încorporează în forma sa cuadridimensională şi ecuaţia de continuitate tridimensională*, la rândul ei, exprimând conservarea sarcinii electrice. Dacă, *în loc de raportarea la* RI [cu exprimarea cuadridimensională prin {x,y,z,ict} utilizată în (3.397)-(3.399)] *se va face raportarea la* (RI)' [cu ale sale {x',y',z',ict'}] *atunci* (3.397) *se va scrie formal ca*:

(3.397') $\mathrm{DIV}\ T(x_1',x_2',x_3',x_4') \equiv \nabla_4 T' \equiv$

$$\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x'}\vec{1}_{x'} + \frac{\partial}{\partial y'}\vec{1}_{y'} + \frac{\partial}{\partial z'}\vec{1}_{z'} + \frac{\partial}{\partial x_4'}\vec{1}_{4'}\right)(T_1'\vec{1}_{x'} + T_2'\vec{1}_{y'} + T_3'\vec{1}_{z'} + T_4'\vec{1}_{4'}),$$ cu rezultatul final:

(3.399') $\mathrm{DIV}\ J'(x_1',x_2',x_3',x_4') = 0$, încât este, formal, evidentă pentru $T' \equiv J' \equiv J_{(RI)'}$, în timp ce (3.399) este, formal, evidentă pentru $T \equiv J \equiv J_{RI}$. În acest fel, (3.399) şi (3.399') exprimă faptul că *legea divergenţei cuadrivectoriale nule a cuadrivectorului densitate de curent şi de sarcină* $J(\vec{J}, ic\rho)$ *are forma matematică invariantă faţă de* TrLS (3.61), care descriu matematic trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$.

3.49.2 Legea divergenței cuadrivectorului electromagnetic potențial $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$

Aplicând relația (3.398) a divergenței cuadrivectorului $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$, se obține:

$$(3.400)\ \mathrm{DIV}\ \Phi \equiv \nabla_4\Phi = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial A_j}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial\left(\frac{i}{c}V\right)}{\partial(ict)} = \nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \equiv \mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

deoarece ultima egalitate obținută reprezintă tocmai *condiția Lorentz* (3.402) (b), pe care trebuie să o satisfacă potențialul vector $\vec{A}$ împreună cu potențialul scalar V. Din (3.400), avem *rezultatul important*: (3.401) DIV $\Phi = 0$, forma matematică a legii divergenței cuadrivectorului $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ scrisă prin raportare la referențialul inerțial RI [v. fig. 3.3(b)]. Dacă aceeași relație (3.398) a divergenței se aplică în forma (3.397') la $\Phi' \equiv \Phi_{(RI)'}$, *rezultatul* (3.401') DIV $\Phi' = 0$ este trivial, dar împreună cu (3.401) exprimă *invarianța Lorentz a legii divergenței nule a cuadrivectorului electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$.

3.49.3 Sinteză și concluzie finală

Obținerea simultană a *divergenței cuadridimensionale nule* pentru cuadrivectorul *densitate de curent și de sarcină electrică* $J(\vec{J}, ic\rho)$, respectiv *cuadrivectorul electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ *este echivalentă, atât cu invarianța Lorentz a legilor pe care le exprimă cuadridimensional fiecare din relațiile* (3.399)/(3.399') respectiv (3.401)/(3.401'), *cât și cu conservarea și invarianța Lorentz a legilor pe care acestea le conțin și anume*: (3.402) (a) $\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \equiv \nabla\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ în (3.399)/(3.399'), respectiv *condiția Lorentz impusă potențialelor* $\vec{A}$ și V (3.402) (b) $\mathrm{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} \equiv \nabla\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$. În plus, alături de invarianța Lorentz a legii divergenței nule a cuadrivectorului potențial Φ(3.401)/(3.401'), mai avem și invarianța Lorentz a ecuațiilor potențialelor $\vec{A}$ și V, care sunt exprimate prin ecuațiile D'Alembert (3.390) (a) și (b), ecuații ce satisfac divergența nulă (3.401) a lui Φ.

Astfel, legile electrodinamicii clasice incluse în invarianțele Lorentz ale formei lor cuadridimensionale își vor conserva forma matematică în, oricare referențial inerțial, inclusiv în cele reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, utilizate în TRR/TRS pentru descrierea fizico-matematică completă din punct de vedere relativist.

3.50 Descrierea cuadridimensională a stării locale a câmpului electromagnetic și a corpurilor din câmp prin cuadritensori electromagnetici relativiști

3.50.0 Precizare conceptuală. Enumerarea cuadrivectorilor electromagnetici

Starea fizică locală a câmpului electromagnetic este descrisă cuadridimensional relativist prin trei mărimi fizice cuadritensoriale reprezentate de tensori de ordinul doi antisimetrici. Acești *cuadritensori electromagnetici relativiști* sunt: (a) *cuadritensorul câmp electromagnetic* $\{\Phi\}$, (b) *cuadritensorul excitație* $\{\Gamma\}$ și *cuadritensorul polarizare* $\{\Pi\}$.

(a) *Cuadritensorul câmp electromagnetic* $\{\Phi\}$, ca mărime fizică, descrie/măsoară/caracterizează starea câmpului electromagnetic prin interacțiunile pe care le produce câmpul. Acest fapt va fi ilustrat prin prezența câmpurilor vectoriale $\vec{E}$ și $\vec{B}$ într-o mărime fizică tensorială reprezentată matriceal cu 4×4=16 elemente.

(b) *Cuadritensorul electromagnetic excitație* $\{\Gamma\}$, ca mărime fizică, descrie/măsoară/caracterizează starea câmpului prin distribuțiile de sarcini electrice și prin curenții electrici ce produc câmpul, câmpurile vectoriale fiind prezente prin vectorii $\vec{D}$ și $\vec{H}$ ["produși" de distribuțiile de sarcini electrice, respectiv de curenții electrici].

(c) *Cuadritensorul electromagnetic polarizare* $\{\Pi\}$, ca mărime fizică, descrie/măsoară/ caracterizează starea locală a corpurilor aflate în câmpul electromagnetic, cărora câmpul le produce stări polare de ordinul I (electrice și magnetice). De aceea, $\{\Pi\}$ va conține ca tensor componentele vectorilor polarizare electrică $\vec{P}$ și magnetizare $\vec{M}$. Rolul cuadrivectorilor și al cuadritensorilor relativiști ($\{\Phi\},\{\Gamma\},\{\Pi\}$) în capitolul de față este foarte bine pus în evidență în *figura 3.16.*

Pentru a explicita tensorii numiți mai sus, *sunt necesare definițiile matematice pentru un tensor în general*, respectiv pentru *tensorul antisimetric.*

3.50.1 Definiția cuadritensorului relativist $\{\mathcal{T}\}$ oarecare

Un cuadritensor este o generalizare a cuadrivectorului, ținând cont că fiecare componentă a unui cuadrivector, la rândul ei, ar putea fi un alt cuadrivector, adică ansamblul ar avea 4×4=16 componente, ca elemente matriceale.

Definiție: <Numim cuadritensor un ansamblu de 16 componente $\{T_{jk}\}$, la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$, de la un referențial inerțial la altul, transformându-se după legea:

(3.403) $(T_{km})_{(RI)'} \equiv T_{km}' = \sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\alpha_{kj}\alpha_{ms}T_{js}\ (k,m=\overline{1,4})$>. În (3.403), coeficienții $\{\alpha_{kj}\}$ și $\{\alpha_{ms}\}$ sunt elemente de matrice a transformării Lorentz generale (3.43) (a) sau (3.44) (a).

3.50.2 Proprietatea de antisimetrie a unui cuadritensor

Deoarece toți cuadritensorii $\{\mathcal{T}\}$, ca tensori de ordinul doi relativiști, precum $\{\Phi\}$, $\{\Gamma\}$ și $\{\Pi\}$, sunt antisimetrici, trebuie precizat că *un tensor de ordinul doi este antisimetric, atunci când* în reprezentarea sa matriceală, elementele simetrice față de diagonala principală sunt egale și de semn contrar, adică satisfac relația de antisimetrie:

(3.404) $T_{jk} = -T_{kj}\ (j,k=\overline{1,4})$, cu *elementele de pe diagonala principală nule* [$T_{jj}=T_{kk}=0$ $(j,k=\overline{1,4})$].

3.51 Cuadritensorul relativist electromagnetic *câmp* $\{\Phi(\vec{E},\vec{B})\}\equiv\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$

3.51.0 Precizări metodologice. Cuadrivectorul electromagnetic potențial $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)\equiv$ cuadrivectorul electromagnetic *câmp* $\{\Phi(\vec{E},\vec{B})\}$

În subparagraful 3.48 a fost introdus *cuadrivectorul electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$, *care generalizează cuadridimensional potențialele electrodinamice* $\vec{A}$ (potențialul magnetic vector) și V (potențialul electric scalar). Cum $\vec{A}$ și V sunt legați de vectorii de câmp electromagnetic conform relațiilor (3.392) și (3.393), *cuadrivectorul electromagnetic potențial* Φ, *definit matematic prin* (3.391) și exprimat prin componentele (E_x,E_y,E_z) ale lui $\vec{E}$ și cele (B_x,B_y,B_z) ale lui $\vec{B}$, se transformă într-un *cuadritensor relativist de ordinul doi*, a cărui reprezentare matriceală este de tipul 4×4, adică are 16 elemente matriceale, care satisfac definiția din subparagraful 3.50.1 a cuadritensorului, transformându-se după legea (3.403) impusă de transformările Lorentz generale (3.43)(a)/(3.44)(a). Astfel, *cuadrivectorul electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$, exprimat prin vectorii de câmp $\vec{E}$ și $\vec{B}$, devine *cuadritensorul de* *ordinul doi* **câmp electromagnetic** $\{\Phi(\vec{E},\vec{B})\}$. *Stabilirea matricei acestui cuadritensor* $\{\Phi\}$ *se va face matematic riguros în cele ce urmează, iar forma matematică matricială obținută va fi utilizată pentru scrierea, prin similitudine structurală,* **a matricelor cuadritensorilor** $\{\Gamma\}$ **(excitație), respectiv** $\{\Pi\}$ **(polarizare). Dublul rol de cuadrivector și de cuadritensor relativist pentru aceeași mărime fizică relativistă notată** Φ**, respectiv** $\{\Phi\}$ **este ilustrată foarte detaliat în** *figura 3.16.*

3.51.1 Cuadritensorul electromagnetic relativist de ordinul doi câmp $\{\Phi(\vec{E},\vec{B})\}\equiv\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$

Reluând relațiile (3.392) și (3.393) în forma explicitată:

$$(3.404)\quad \vec{E}=E_x\vec{1}_x+E_y\vec{1}_y+E_z\vec{1}_z=-\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\vec{1}_x-\left(\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial t}\right)\vec{1}_y-\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t}\right)\vec{1}_z,$$

respectiv

$$(3.405)\quad \vec{B}=B_x\vec{1}_x+B_y\vec{1}_y+B_z\vec{1}_z=\mathrm{rot}\,\vec{A}\equiv\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{1}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{1}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{1}_z,$$

vom avea componentele tridimensionale carteziene:

$$(3.406)\quad E_x=-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t};\ E_y=-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t};\ E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}$$ ale lui $\vec{E}$, respectiv:

$$(3.407)\quad B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z};\ B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\ \text{și}\ B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$$ ale lui $\vec{B}$.

Dacă ținem cont de *cuadrivectorul electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$ (3.391) prin componentele sale $\Phi_1\equiv A_x$, $\Phi_2\equiv A_y$, $\Phi_3\equiv A_z$ și $\Phi_4\equiv\frac{i}{c}V$, atunci (3.406) și (3.407) se rescriu:

$$(3.408)\quad E_x\equiv E_1=-\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}=-\frac{c}{i}\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4}ic=ic\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4}\right);$$

$$E_y\equiv E_2=-\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial t}=-\frac{c}{i}\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4}ic=ic\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4}\right);$$

$$E_z\equiv E_3=-\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}=-\frac{c}{i}\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_4}ic=ic\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_4}\right),$$ respectiv

$$(3.409)\quad B_x\equiv B_1=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3};\ B_y\equiv B_2=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}-\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1}$$ și

$$B_z\equiv B_3=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}.$$

Conform relațiilor (3.408)-(3.409), toate componentele vectorilor $\vec{E}$ și $\vec{B}$ apar drept combinații de derivate ale componentelor $\{\Phi_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ ale cuadrivectorului electromagnetic $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$ (3.391), combinații ce reprezintă tocmai *elementele*:

(3.410) $T_{jk} \equiv \Phi_{jk} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_k}$ $(j, k = \overline{1,4})$ ale unui *cuadritensor de ordinul doi antisimetric* $\{\Phi(\vec{E}, \vec{B})\} \equiv \{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E}\}$, *a cărui matrice* 4×4 *are 16 elemente*, conform expresiei:

$$(3.411)\quad \{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E}\} \equiv \{\Phi_{jk}\} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z \\ \frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0 \end{pmatrix}$$

. Că obținem matricea 4×4 dată în (3.411) și că elementele acestei matrici definite prin elementele tensoriale (3.410) nu depind decât $\vec{E}(E_x, E_y, E_z)$ și de $\vec{B}(B_x, B_y, B_z)$ se poate arăta ușor dând indicilor j și k din (3.410) valori de la 1 la 4 și căutând pentru T_{jk} expresiile cu ajutorul componentelor lui $\vec{E}$ și $\vec{B}$ explicitate în (3.408) și (3.409). Anularea elementelor de pe diagonala principală are loc pentru j=k. Conform relației (3.404), tensorul de elemente definite prin (3.410) este un *tensor antisimetric*.

Noua formă a cuadrivectorului electromagnetic potențial (3.391) $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$ *explicitată prin vectorii de câmp electromagnetic* $\vec{E}$ *și* $\vec{B}$ *este tocmai cuadritensorul electromagnetic CÂMP*, scris în *forma condensată*: (3.412) $\{\Phi(\vec{E}, \vec{B})\} \equiv \{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$, cu dispunerea componentelor carteziene ale celor doi vectori conformă aranjării în matricea (3.411), care particularizează *matricea generală* de tip 4×4 elemente:

$$(3.413)\quad \{\Phi\} \equiv (\{\Phi_{jk}\}) = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \Phi_{13} & \Phi_{14} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \Phi_{23} & \Phi_{24} \\ \Phi_{31} & \Phi_{32} & \Phi_{33} & \Phi_{34} \\ \Phi_{41} & \Phi_{42} & \Phi_{43} & \Phi_{44} \end{pmatrix} \equiv (\{T_{jk}\})\ (j, k = \overline{1,4}),$$

cu elementele definite prin (3.410) și ordonate de valorile indicilor j și k asociate în scrierea matricei tensorului.

3.51.2 Semnificația fizică relativistă a existenței cuadritensorului electromagnetic *câmp* $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$ (3.411) prin raportarea la RI ⇆ (RI)'≡(RI)$_0$

Rezultatele (3.410)-(3.411) se disting net de imaginea tridimensională obișnuită referitor la câmpul electromagnetic *neprecizat relativist*. În spațiul cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$) al evenimentelor relativiste de tip (3.378), *câmpul electromagnetic este reprezentat printr-o mărime fizică unică*, dar cu structură fizico-matematică complexă exprimată de *tensorul cuadridimensional relativist de ordinul doi* $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$, *în care câmpurile* $\vec{E}$ *și* $\vec{B}$ *fuzionează*.

Apariția unui cuadritensor în locul a doi vectori tridimensionali are *semnificație fizică evidentă, dar și profundă*, sintetizată prin: (a) câmpurile electric $\vec{E}$ și magnetic $\vec{B}$ sunt inseparabile; (b) "apariția" sau "dispariția" *unuia din cele două câmpuri este o problemă de alegere a unui referențial*; (c) *câmpul "pur" electric* creat de un purtător de sarcină electrică *nu există decât în referențialul purtătorului de sarcină în repaus* [referențialul propriu (RI)$_0$≡(RI)']; (d) *în oricare alt* RI, altul decât (RI)$_0$, *purtătorul de sarcină electrică se mișcă, dând naștere unui curent electric care creează un câmp magnetic*; (e) dacă un *conductor parcurs de curent electric este neutru din punct de vedere electric într-un anumit* RI, *în alt* *referențial de același tip este încărcat electric* și, în consecință, față de acest referențial apare un câmp electric.

3.51.3 Aplicație metodologică a deducerii în 3.51.1 a structurii matriceale (3.411) a cuadritensorului $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$

Deducerea matematic riguroasă a relației (3.410) ce definește elementele matricei (3.411) a cuadritensorului $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$ va fi utilă metodologic, în paragrafele următoare, pentru a scrie formal *cuadritensorii electromagnetici* EXCITAȚIE $\{\Gamma\}$, respectiv POLARIZARE $\{\Pi\}$, care permit analiza cuadridimensională relativistă a câmpului electromagnetic într-un mediu (corp) oarecare. Rolul metodologic al cuadrivectorului Φ, respectiv al cuadritensorului $\{\Phi\}$ în cap.IX se poate extrage din ilustrațiile *figurii 3.16.*

3.52 Cuadritensorul relativist electromagnetic *excitație* $\{\Gamma(\vec{D},\vec{H})\}\equiv\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$

Vectorii $\vec{H}$ și $\vec{D}$ (intensitate a câmpului magnetic, respectiv inducție electrică) formează propriul cuadritensor particular, de dependență $\{\Gamma\}\equiv\{\Gamma(\vec{D},\vec{H})\}\equiv\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$, prin substituirea formală în (3.411) a componentelor carteziene ale vectorului $\vec{B}$ cu cele carteziene corespunzătoare ale lui $\vec{H}$, respectiv a componentelor carteziene ale vectorului $-\frac{i}{c}\vec{E}$ cu cele ale vectorului $-ic\vec{D}$.

Pe această cale a scrierii formale, rezultă:

$$(3.414)\ \{\Gamma\}\equiv\{\Gamma(\vec{D},\vec{H})\}\equiv\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}\equiv(\{\Gamma_{jk}\})=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} & \Gamma_{34}\\ \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} & \Gamma_{44}\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix}0 & H_z & -H_y & -icD_x\\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y\\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z\\ icD_x & icD_y & icD_z & 0\end{pmatrix},$$ ca matricea cuadritensorului electromagnetic EXCITAȚIE, descriind local câmpul electromagnetic prin distribuțiile de sarcini electrice care dau $\vec{D}$ și prin curenții electrici ce produc câmpul magnetic de intensitate $\vec{H}$. Raporturi fizico-matematice și metodologice ale cuadritensorului $\{\Gamma\}$ cu $\{\Phi\}$ și $\{\Pi\}$ pot fi evidențiate și cu ajutorul *figurii 3.16.*

3.53 Cuadritensorul relativist electromagnetic *polarizare* $\{\Pi(\vec{P},\vec{M})\}\equiv\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$

Ținând cont de relațiile (3.384) și (3.385) ce leagă vectorul inducție electrică $\vec{D}$ de vectorul *intensitate a câmpului electric* $\vec{E}$ și *polarizare* $\vec{P}$ a corpului (mediului) în care se află câmpul electromagnetic, respectiv vectorul *inducție magnetică* $\vec{B}$ de vectorul intensitate a câmpului magnetic $\vec{H}$ și vectorul magnetizare $\vec{M}$ a corpului (mediului) aflat în câmp magnetic, *se construiește un al treilea cuadritensor care să depindă de componentele* $\{P_x,P_y,P_z;M_x,M_y,M_z\}$ *ale vectorilor* $\vec{P}$ și $\vec{M}$. În maniera substituției din paragraful 3.52, rezultă că *vectorii* $\vec{P}$ și $\vec{M}$, *în formularea relativistă a electrodinamicii clasice, dau naștere la* propriul cuadritensor particular, *cuadritensorul* POLARIZARE $\{\Pi\}\equiv\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$, dacă se înlocuiesc în (3.414) componentele carteziene (H_x,H_y,H_z) ale vectorului $\vec{H}$ prin componentele carteziene (M_x,M_y,M_z) ale lui $\vec{M}$, respectiv componentele carteziene ale lui $-ic\vec{D}$ cu cele carteziene ale lui $ic\vec{P}$. Astfel, cel de-al treilea cuadritensor electromagnetic relativist, cel care *descrie local polarizarea şi magnetizarea corpurilor (mediilor) aflate în câmpul electromagnetic*, va avea matricea 4×4 explicitată conform cu:

$$(3.415)\ \{\Pi(\vec{P},\vec{M})\}\equiv\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}\equiv(\{\Pi_{jk}\})=\begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Explicitarea completă a *cuadritensorilor electromagnetici relativişti* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ şi $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$, prin matricele lor de tip 4×4 date de relaţiile (3.411), (3.414), respectiv (3.415) va permite formularea *postulatelor electrodinamicii relativiste*, ce vor înlocui, în *electrodinamica relativistă cuadrivectorială şi cuadritensorială*, postulatele electrodinamicii clasice maxwelliene (date în subparagraful 3.47.3). Raporturi fizico-matematice şi metodologice ale cuadritensorului $\{\Pi\}$ cu $\{\Phi\}$ şi $\{\Gamma\}$ se mai pot evidenţia cu ajutorul *figurii 3.16*. Cu *figura 3.16* se poate ilustra şi modul de structurare a cap.IX impus de cuadritensorii ($\{\Phi\},\{\Gamma\},\{\Pi\}$), ca şi intervenţia lor în cadrul postulatelor electrodinamicii relativiste.

3.54 Postulatele electrodinamicii relativiste

3.54.0 Precizare metodologică

Cele trei grupuri a câte două postulate, totalizând cele *şase postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene*, expuse în subparagraful 3.47.3, *vor fi înlocuite, în electrodinamica relativistă, prin trei postulate relativiste*, fiecare corespunzând câte unuia din cele trei grupuri amintite. Din enunţurile relativiste, vor rezulta cu necesitate *formele matematice* ale enunţurilor clasice (nerelativiste), ca forme tridimensionale cazuri particulare ale celor cuadridimensionale tensoriale implicate în formulările relativiste. În cadrul fiecărui subparagraf expunând postulatele electrodinamicii relativiste, se vor specifica şi consecinţele postulatului formulat fizico-matematic relativist.

3.54.1 Postulatul I al electrodinamicii relativiste ($P_1^{(r)}$) (postulatul divergenţei tensoriale a cuadritensorului *excitaţie*) şi consecinţele lui

3.54.1.1 Enunţ

<Divergenţa tensorială (la dreapta) a cuadritensorului *excitaţie electromagnetică* $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ este egală cu cuadrivectorul electromagnetic densitate de curent şi de sarcină electrică J>.

3.54.1.2 Forma matematică a postulatului I al electrodinamicii relativiste ($P_1^{(r)}$)

Conform enunţului de mai sus, forma matematică a postulatului I al electrodinamicii relativiste este:

(3.416) $DIV_d\{\Gamma\}\equiv\nabla_4\{\Gamma\}=J$, sau mai explicită ca dependenţă:

(3.417) $DIV_d\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}\equiv\nabla_4\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}=J(\vec{J},ic\rho)$, în ambele exprimări matematice indicele d din DIV_d desemnând *divergenţă tensorială la dreapta*, iar cuadrivectorul J fiind desemnat printr-o matrice unicoloană de 4 componente.

3.54.1.3 Explicitarea relaţiei (3.416)/(3.417)

Divergenţa tensorială la dreapta a unui cuadritensor se defineşte matematic prin:

$$(3.418)\ DIV_d\{T\}=\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_k}T_{jk}.$$

Utilizând (3.418) în (3.416)/(3.417), *legea divergenței tensoriale a cuadritensorului electromagnetic excitație, exprimată de postulatul* I, devine explicitată matematic matriceal:

$$(3.419)\quad DIV_d\ \{\Gamma\} \equiv \nabla_4\{\Gamma\} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial D_z}{\partial t} \\ ic\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \\ ic\rho \end{pmatrix}.$$

Trebuie specificat că ambele matrici din relația matriceală (3.419) sunt matrici unicoloană de 4 elemente , fapt ce va permite desfacerea relației în 4 egalități după componente, cum se va vedea în cele ce urmează la consecințe ale postulatului I ($P_1^{(r)}$).

3.54.1.4 Consecințe ale postulatului I al electrodinamicii relativiste ($P_1^{(r)}$)

(C_1) Enunțul din 3.54.1.1 al postulatului I al electrodinamicii relativiste generalizează cuadritensorial grupul (G_I) de postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene, făcând o sinteză relativistă a celor două postulate $P_1^{(I)}$ și $P_2^{(I)}$ din G_I, exprimate prin formele matematice (3.380) și (3.381).

(C_2) Consecința (C_1) arată că *trebuie* să se regăsească relațiile (3.380) și (3.381) implicate *direct* în (3.419), aceasta din urmă reprezentând o generalizare cuadridimensională, în formă cuadritensorială, a celor două cazuri vectoriale (tridimensionale) clasice (formulate nerelativist) maxwelliene.

(C_3) Regăsirea relațiilor clasice (3.380) și (3.381) din relația relativistă (3.419) se face prin egalarea elementelor corespunzătoare din matricele unicoloană ale relației condensate (3.419), încât egalarea termenilor de același rang și poziție conduce mai întâi la:

$$(3.420)\ (a)\ \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) - \frac{\partial D_x}{\partial t} = J_x;\ (b)\ \left(-\frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial D_y}{\partial t} = J_y \text{ și}$$

$$(c)\ \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial D_z}{\partial t} = J_z,$$ care sunt tocmai componentele carteziene tridimensionale obținute din succesiunea matematică:

$$(3.421)\ \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial t}(D_x\vec{1}_x + D_y\vec{1}_y\ D_z\vec{1}_z) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z\right)\times$$

$$\times\ (H_x\vec{1}_x + H_y\vec{1}_y + H_z\vec{1}_z) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \equiv \nabla\times\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = J_x\vec{1}_x + J_y\vec{1}_y + J_z\vec{1}_z = \vec{J}.$$ Relația (3.421) se mai scrie:

$$(3.422)\ \nabla\times\vec{H} \equiv \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \equiv \vec{J}_C + \vec{J}_D = \vec{J}_{tot},$$ care reprezintă tocmai relația (3.381) *din exprimarea matematică conținută în enunțul postulatului la doilea din* (G_I) (*postulatul* $P_2^{(I)}$), dacă avem în vedere că $\vec{J} \equiv \vec{J}_C$ (densitatea de curent de conducție) și că $\vec{J}_D \equiv \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ (densitatea de curent de deplasare) dau împreună $\vec{J}_{tot}$ (densitatea de curent total).

Din ultima linie a egalității matriceale (3.419) avem:

$$(3.423)\ ic\left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}\right) = ic\rho,$$ de unde rezultă

$$(3.424)\quad \frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\equiv\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z\right)(D_x\vec{1}_x+D_y\vec{1}_y D_z\vec{1}_z)\equiv\nabla\cdot\vec{D}\equiv \mathrm{div}\vec{D}=\rho,$$

adică tocmai relația (3.380) *din postulatul* $P_1^{(I)}$ *al electrodinamicii clasice maxwelliene.*

(C_4) Forma matematică (3.419) a mai fost scrisă pentru $\{\Phi\}$, dar în contextul scrierii lui Φ *în forma relativistă de potențial cuadrivectorial* (3.391), cu toate avantajele fizico-matematice relativiste ce decurg din explicitarea dependenței $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$ prin potențialul magnetic vector $\vec{A}$ și cel electric scalar V (adică prin potențialele electrodinamice).

(C_5) Forma matematică (3.419) este un invariant relativist în raport cu trecerea RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$ de la un referențial RI la referențialul propriu $(RI)_0$ și asigură invarianța relativistă pentru postulatele maxwelliene din (G_I), pe care $P_1^{(r)}$ le conține în sinteza sa cuadridimensională relativistă (3.419), invariantă față de trecerea reciprocă RI ⇆ (RI)'≡$(RI)_0$ de la un referențial RI la referențialul propriu (RI)'≡$(RI)_0$, față de care câmpul electromagnetic este în repaus, la fel și corpurile aflate în câmp.

(C_6) Consecințe speciale de natură metodologică pentru și prin $P_1^{(r)}$ se pot extrage din fig. 3.16.

3.54.2 Postulatul II al electrodinamicii relativiste ($P_2^{(r)}$) (postulatul rotorului tensorial al cuadritensorului electromagnetic *câmp*) și consecințele sale

3.54.2.1 Enunț

<Rotorul tensorial (vârtejul relativist) al cuadritensorului electromagnetic câmp $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$ este nul, adică cuadritensorul electromagnetic relativist câmp $\{\Phi\}$ este *irotațional*>.

3.54.2.2 Forma matematică a postulatului II al electrodinamicii relativiste ($P_2^{(r)}$)

Afirmația din 3.54.2.1 se exprimă matematic simplu:

(3.425) $\mathrm{ROT}\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}\equiv\nabla_4\times\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=0$. Relația (3.425) conține *operatorul cuadridimensional topologic acționând în spațiul cuadridimensional Minkowski* ($\mathcal{S}_M$):

$$(3.426)\quad \nabla_4\equiv\nabla_3+\frac{\partial}{\partial(ict)}\vec{1}_4=\frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z+\frac{\partial}{\partial(ict)}\vec{1}_4\equiv\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\vec{1}_j,$$ ca operator nabla (Hamilton) *formal generalizat cuadridimensional* în sensul evenimentului relativist, cu $\{\vec{1}_j\}(j=\overline{1,4})\equiv\{\vec{1}_1\equiv\vec{1}_x,\vec{1}_2\equiv\vec{1}_y,\vec{1}_3\equiv\vec{1}_z,\vec{1}_4\equiv\vec{1}_{ict}\}$ versorii axelor de coordonate $\{O_x,O_z,O_y,O_{(ict)}\}$ din $\mathcal{S}_M$.

Rotorul tensorial al unui cuadritensor de ordinul doi antisimetric este definit cuadridimensional prin cele 4 componente ale sale:

$$(3.426)\ (a)\ (\mathrm{ROT}\{T\})_1=\frac{\partial T_{34}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{42}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{23}}{\partial x_4};\ (b)\ (\mathrm{ROT}\{T\})_2=\frac{\partial T_{41}}{\partial x_3}+\frac{\partial T_{13}}{\partial x_4}+\frac{\partial T_{34}}{\partial x_1};$$

$$(c)\ (\mathrm{ROT}\{T\})_3=\frac{\partial T_{12}}{\partial x_4}+\frac{\partial T_{24}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{41}}{\partial x_2};\ (d)\ (\mathrm{ROT}\{T\})_4=\frac{\partial T_{23}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{31}}{\partial x_2}+\frac{\partial T_{12}}{\partial x_3}.$$

Forma matematică explicită pentru (3.425), utilizând explicitarea matriceală (3.411) a lui $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$ și definiția (3.426) a elementelor rotorului tensorial, se obține ca:

$$(3.427)\ \mathrm{ROT}\{\Phi\}\equiv\mathrm{ROT}\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}\equiv\begin{pmatrix}(\mathrm{ROT}\{\Phi\})_1\\(\mathrm{ROT}\{\Phi\})_2\\(\mathrm{ROT}\{\Phi\})_3\\(\mathrm{ROT}\{\Phi\})_4\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -\frac{i}{c}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t}\right) \\ \frac{i}{c}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial t}\right) \\ -\frac{i}{c}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ exprimând *forma matriceală explicitată a postulatului* II *al electrodinamicii relativiste* ($P_2^{(r)}$)

3.54.3 Consecințe ale postulatului II al electrodinamicii relativiste ($P_2^{(r)}$)

(C_1) Enunțul din 3.54.2.1 al postulatului relativist II ($P_2^{(r)}$) generalizează cuadritensorial grupul II (G_{II}) de postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene, realizând o sinteză relativistă a postulatelor $P_1^{(II)}$ și $P_2^{(II)}$ exprimate matematic prin formele matematice (3.382), respectiv (3.383).

(C_2) Consecința (C_1) arată că *trebuie regăsite* formele matematice (3.382) și (3.383) din generalizarea relativistă cuadridimensională (3.427).

(C_3) Pentru a satisface (C_2), este suficient a observà că liniile egalității matriceale (3.427) conțin termenii nuli ai unui cuadrivector proiectat după axele Ox_j ($j=\overline{1,4}$) ale spațiului cuadridimensional Minkowski ($\mathcal{S}_M$), încât avem proiecțiile nule pe cele patru axe:

$$(3.428)\quad \begin{aligned} &(a)\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial B_x}{\partial t}=0;\ (b)\ \left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial B_y}{\partial t}=0;\\ &(c)\ \left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial B_z}{\partial t}=0 \text{ și } (d)\ \frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0. \end{aligned}$$

Din primele trei relații ale (3.428), se obține prin înmulțirea fiecăreia cu versorii $\vec{1}_x$, $\vec{1}_y$, respectiv $\vec{1}_z$ și prin adunarea rezultatelor înmulțirii:

$$(3.429)\ (a)\ \left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{1}_x+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{1}_y+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{1}_z+\frac{\partial}{\partial t}\left(B_x\vec{1}_x+B_y\vec{1}_y+B_z\vec{1}_z\right)\equiv$$

$$\equiv\begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0.$$

Ultima parte a relației (3.429) *reprezintă tocmai forma matematică* (3.383) *a postulatului doi* $P_2^{(II)}$ *din grupul II* (G_{II}) *de postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene.*

Relația (3.428)(d) se mai scrie:

$$(3.430)\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z\right)\left(B_x\vec{1}_x+B_y\vec{1}_y+B_z\vec{1}_z\right)\equiv\nabla\cdot\vec{B}\equiv \operatorname{div}\vec{B}=0,$$ *dând relația* (3.382), *ca formă matematică a postulatului întâi* $P_1^{(II)}$ *din grupul* (G_{II}) *de postulate ale electrodinamicii clasice (formulată nerelativist).*

(C_4) *Postulatul II relativist* ($P_2^{(r)}$) *este prin forma matematică* (3.427) *invariant relativist* și asigură invarianța relativistă și a postulatelor maxwelliene din (G_{II}) [exprimate prin (3.382)-(3.383)], pe care le include ca sinteză cuadridimensională relativistă (3.427), invariantă față de TrLS (3.61), ce descriu matematic trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡(RI)$_0$ de la un RI la referențialul propriu (RI)'≡(RI)$_0$ în repaus față de câmpul electromagnetic și/sau față de corpurile aflate în câmp.

(C_5) Consecințe speciale de natură metodologică se pot formula pentru și prin $P_2^{(r)}$ apelând la *figura 3.16*, care îl implică noțional-conceptual, ca și structural-metodologic în cadrul cap.IX.

3.54.4 Postulatul III al electrodinamicii relativiste ($P_3^{(r)}$) (postulatul relației dintre cuadritensorii electromagnetici *câmp*, *excitație* și *polarizare*)

3.54.4.1 Enunț

<Atunci când în câmpul electromagnetic se află corpuri (sau medii) care suferă trecerea în stări polare de ordinul I [polarizare electrică, respectiv magnetică (magnetizare)] între *cuadritensorii electromagnetici relativiști câmp* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, *excitație* $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ și *polarizare* $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$ se stabilește relația: (3.431) $\{\Phi\}=\mu_0(\{\Gamma\}+\{\Pi\})$>.

3.54.4.2 Exprimarea matematică condensată a postulatului III ($P_3^{(r)}$)

Reluând (3.431), formal, prin scrierea dependențelor implicite:

(3.432) $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=\mu_0[\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}+\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}]$, se evidențiază prezența tuturor vectorilor electromagnetici implicați în caracterizarea stării locale a câmpului electromagnetic și a stării locale a corpurilor (mediilor) aflate în câmp: $\vec{B},\vec{E};\vec{H},\vec{D}$ și $\vec{P},\vec{M}$. În plus, este semnalat și cuplajul relativist cuadridimensional, prin constantele complexe de cuplaj între subspațiul real $\mathcal{S}_{xyz}=\mathcal{S}_R$ și cel imaginar $\mathcal{S}_{ict}$ ale spațiului Minkowski, intervenind în structura matriceală de tip 4×4 a cuadritensorilor.

3.54.4.3 Consecințe ale postulatului III al electrodinamicii relativiste ($P_3^{(r)}$)

(C_1) Postulatul III al electrodinamicii relativiste ($P_3^{(r)}$) înlocuiește grupul III (G_{III}) de două postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene printr-un enunț unic, cu *formă matematică cuadritensorială* (3.431)/(3.432) *unică*, conținând formele matematice (3.384) și (3.385) în structura sa matriceală de 4×4 elemente.

(C_2) Consecința (C_1) poate fi justificată prin obținerea relațiilor (3.384) și (3.385), ținând cont de expresiile matriceale explicite (3.411), (3.414) și (3.415), ale cuadrivectorilor implicați în (3.431). Astfel, cu relațiile (3.414)-(3.415) membrul doi al (3.431)/(3.432) se scrie succesiv:

$$(3.433)\ \mu_0[\{\Gamma\}+\{\Pi\}]=\mu_0\left[\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & M_z & -M_y & icP_x \\ -M_z & 0 & M_x & icP_y \\ M_y & -M_x & 0 & icP_z \\ -icP_x & -icP_y & -icP_z & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\mu_0\left[\begin{pmatrix} 0 & H_z+M_z & -(H_y+M_y) & -ic(D_x-P_x) \\ -(H_z+M_z) & 0 & H_x+M_x & -ic(D_y-P_y) \\ H_y+M_y & -(H_x+M_x) & 0 & -ic(D_z-P_z) \\ ic(D_x-P_x) & ic(D_y-P_y) & ic(D_z-P_z) & 0 \end{pmatrix}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \mu_0(H_z+M_z) & -\mu_0(H_y+M_y) & -i\mu_0c(D_x-P_x) \\ -\mu_0(H_z+M_z) & 0 & \mu_0(H_x+M_x) & -i\mu_0c(D_y-P_y) \\ \mu_0(H_y+M_y) & -\mu_0(H_x+M_x) & 0 & -i\mu_0c(D_z-P_z) \\ i\mu_0c(D_x-P_x) & i\mu_0c(D_y-P_y) & i\mu_0c(D_z-P_z) & 0 \end{pmatrix}=$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_x-P_x)\\
-B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_y-P_y)\\
B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_z-P_z)\\
\frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_x-P_x) & \frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_y-P_y) & \frac{i}{c}\mu_0 c^2(D_z-P_z) & 0
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_x-P_x)\\
-B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_y-P_y)\\
B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_z-P_z)\\
\frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_x-P_x) & \frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_y-P_y) & \frac{i}{c}\frac{1}{\varepsilon_0}(D_z-P_z) & 0
\end{pmatrix}=
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & B_z & -B_y & -\frac{i}{c}E_x\\
-B_z & 0 & B_x & -\frac{i}{c}E_y\\
B_y & -B_x & 0 & -\frac{i}{c}E_z\\
\frac{i}{c}E_x & \frac{i}{c}E_y & \frac{i}{c}E_z & 0
\end{pmatrix} \equiv (\{\Phi_{jk}\}) = \{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}.
$$

Din succesiunea (3.433), se observă că s-a obținut tocmai matricea cuadritensorului câmp $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$ dată de (3.411), verificându-se, astfel, relația fundamentală (3.431)/(3.432), ce exprimă matematic postulatul $P_3^{(r)}$ al electrodinamicii relativiste. Pentru succesiunea de egalități desfășurate în (3.433), s-a făcut apel la relațiile: $c^2=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$, $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})=\mu_0(H_x+M_x)\vec{1}_x+\mu_0(H_y+M_y)\vec{1}_y+\mu_0(H_z+M_z)\vec{1}_z$ și $\vec{D}=(\varepsilon_0E_x+P_x)\vec{1}_x+(\varepsilon_0E_y+P_y)\vec{1}_y+(\varepsilon_0E_z+P_z)\vec{1}_z$, ultimele două relații fiind tocmai (3.385) respectiv (3.384) din grupul III (G_{III}) al postulatelor maxwelliene, a căror implicare directă în structura cuadritensorului relativist $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, tocmai a fost demonstrată.

(C_3) Deoarece relația cuadritensorială (3.431)/(3.432) este invariantă Lorentz la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'≡$(RI)_0$ și deoarece formele matematice (3.384) și (3.385) ale postulatelor electrodinamicii clasice din grupul III (G_{III}) sunt incluse în (3.431), se poate afirma că și relațiile (3.384) și (3.385) sunt invariante față de trecerea de la un referențial RI la referențialul $(RI)_0$ propriu, acesta din urmă în repaus cu câmpul electromagnetic și/sau corpurile aflate în câmp.

(C_4) Alte consecințe de natură metodologică ale $P_3^{(r)}$ sau prin $P_3^{(r)}$ se mai pot formula sau extrage prin analiza modului cum $P_3^{(r)}$ este implicat și corelat în cadrul *figurii 3.16*, ce dă întreaga structură noțional-conceptuală și funcțional-metodologică a cap.IX.

3.54.5 Concluzii generale

(C_1^{g}) *La baza electrodinamicii relativiste*, ca sistem de propoziții fizico-matematice *furnizând teoria fizico-matematică a modelului teoretic relativist* (MTR) *electrodinamic*, stau *postulatele* sale enunțate în număr de trei: $P_1^{(r)}$ *al divergenței tensoriale a cuadritensorului electromagnetic excitație* ($\{\Gamma\}$), $P_2^{(r)}$ *al rotorului tensorial al cuadritensorului electromagnetic câmp* ($\{\Phi\}$) și $P_3^{(r)}$ al relației dintre cuadritensorii electromagnetici câmp ($\{\Phi\}$), excitație ($\{\Gamma\}$) și polarizare ($\{\Pi\}$).

(C_2^{g}) *Postulatele electrodinamicii relativiste* $\{P_k^{(r)}\ (k=\overline{1,3})\}$ sintetizează cuadridimensional [în sensul dimensiunilor spaţiului Minkowski ($\mathcal{S}_M$)]perechi de postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene în număr de şase, *furnizând trei enunţuri relativiste,* ce pun în evidenţă întreaga structură fizico-matematică noţional-conceptuală a postulatelor *neformulate relativist în electrodinamica clasică, dar intrinsec relativiste prin caracterul special relativist ascuns al legilor electrodinamicii clasice, implicat chiar în formele matematice ale acestor legi.*

(C_3^{g}) *O paralelă între* (I) *formele matematice invariante relativist* [invarianţă evidentă în structura cuadritensorială a mărimilor fizice electrodinamice relativiste $(\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$; $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$; $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\})$] impuse de cele trei postulate ale electrodinamicii relativiste, exprimate matematic:

$$(3.434)\ (P_1^{(r)})\ \mathrm{DIV}_4\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}\equiv\nabla_4\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}=J(\vec{J},ic\rho)\ ;$$

$$(P_2^{(r)})\ \mathrm{ROT}\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}\equiv\nabla_4\times\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=0,\ \text{respectiv}$$

$$(P_3^{(r)})\ \{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}=\mu_0[\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}+\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}],$$ şi (II) *formele matematice impuse de cele şase postulate ale electrodinamicii clasice maxwelliene (neformulată explicit relativist)*:

$$(3.435)\ (G_I)\left(\begin{array}{l}(1)\ \mathrm{rot}\vec{H}\equiv\nabla\times\vec{H}=\vec{J}_{tot}\equiv\vec{J}_C+\vec{J}_D\equiv\vec{J}_C+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\quad(P_1^{(I)})\\(2)\ \mathrm{div}\vec{D}\equiv\nabla\cdot\vec{D}\equiv\nabla\vec{D}=\rho\quad(P_2^{(I)})\end{array}\right);$$

$$(G_{II})\left(\begin{array}{l}(3)\ \mathrm{rot}\vec{E}\equiv\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad(P_1^{(II)})\\(4)\ \mathrm{div}\vec{B}\equiv\nabla\cdot\vec{B}\equiv\nabla\vec{B}=0\quad(P_2^{(II)})\end{array}\right)\ \text{şi}$$

$$(G_{III})\left(\begin{array}{l}(5)\ \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\quad(P_1^{(III)})\\(6)\ \vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})\quad(P_2^{(III)})\end{array}\right),$$ *este o paralelă evidentă între relaţiile* (3.434) *şi relaţiile* (3.435) *conform corespondenţei biunivoce*:

$$(3.436)\ (a)\ (P_1^{(r)})\leftrightarrow(G_I);\ (b)\ (P_2^{(r)})\leftrightarrow(G_{II})\ \text{şi}\ (c)\ (P_3^{(r)})\leftrightarrow(G_{III}).$$

(C_4^{g}) Conform corespondenţei (3.436) semnalată în (C_3^{g}), paralela dintre postulatele electrodinamicii relativiste $\{P_k^{(r)}\ (k=\overline{1,3})\}$ şi cele ale electrodinamicii clasice maxwelliene $\{P_{1,2}^{(I)};\ P_{1,2}^{(II)}$ şi $P_{1,2}^{(III)}\}$ *impune şi afirmă invarianţa relativistă faţă de trecerea reciprocă* RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$ [de la referenţialul RI la cel propriu $(RI)_0\equiv(RI)'$ în care câmpul electromagnetic şi/sau corpurile (mediile) aflate în câmp este/sunt în repaus] *a tuturor formelor matematice maxwelliene* (3.435), datorită *implicării directe* a fiecărui grup de relaţii maxwelliene în câte una din *formele matematice* (3.434), prin formularea cuadrivectorială şi cuadritensorială, *apriori* invariante faţă de transformările Lorentz generale (3.43-44) respectiv faţă de TrLS (3.61), care descriu matematic trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ $(RI)'\equiv(RI)_0$.

(C_5^{g}) Prin formulările matematice cuadridimensionale relaţiile (3.434) ($P_1^{(r)}$) şi ($P_2^{(r)}$) dau şi *forma matematică cuadridimensională cuadrivectorial-cuadritensorială a ecuaţiilor Maxwell* (3.435) (1) →(4) $[P_{(k)}^{(n)}$ (n=I,II,III; $k=\overline{1,3}$)], care sunt baza matematică a primelor patru postulate ale electrodinamicii clasice (Maxwell), bază sintetizată prin reformulare relativistă în doar două postulate formulate cuadridimensional.

(C_6^{g}) Relaţiile (3.434) generalizând cuadridimensional relaţiile (3.435) constituie *partea fundamentală relativistă a teoriei modelului teoretic relativist al electromagnetismului*, încât o *fizică teoretică relativistă*, elaborată ca o *electrodinamică relativistă*, ne apare ca o *necesitate în completarea modelelor teoretice relativiste*, posibil de elaborat în *fizica teoretică generală.*

(C_7^{g}) Concluziile precedente sunt ilustrate grafic în *figura 3.16*, care dă structura noţional-conceptuală şi metodologic-funcţională a întregului cap.IX (Elemente de electrodinamică relativistă), figura implicând postulatele electrodinamicii clasice maxwelliene şi pe cele ale electrodinamicii relativiste, cu paralela între ele urmărită şi precizată în detaliile (C_k^{g}) ($k=\overline{1,6}$), dar şi cu alte detalii privitoare la diferitele corelări dintre paragrafele capitolului ilustrând *problematica relativistă de* *elaborare şi expunere, cu partea centrală, tocmai, cele două seturi de postulate* ale electrodinamicii clasice (nerelativiste), respectiv ale electrodinamicii relativiste.

3.55 Problema fundamentală a electrodinamicii corpurilor în mişcare (PFECM). Comportarea relativistă a mărimilor fizice electromagnetice prin cuadrivectori şi cuadritensori relativişti. Efecte electrodinamice pur relativiste legate direct de trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'

3.55.0 Problema fundamentală a electrodinamicii corpurilor în mişcare (PFECM)

După axiomatizarea (formularea axiomatică a postulatelor şi impunerea lor) ce domină teoria fizico-matematică a domeniului teoretic al electromagnetismului (incluzând în el şi electrodinamica corpurilor în mişcare), aplicarea explicită a TRR/TRS pentru a pune pe *baze teoretice relativiste* întregul model al electromagnetismului, conform expunerii noastre de până aici, *problema principală aplicativă a* TRR/TRS *în electromagnetismul teoretic, ca problemă fundamentală a electrodinamicii corpurilor în mişcare* (PFECM) este *tocmai stabilirea formulelor de transformare a mărimilor fizice electromagnetice de stare* (3.436) $\{M'_f\}\equiv\{\rho', \vec{J}'; \vec{B}', \vec{E}'; \vec{H}', \vec{D}'\}\equiv\{M_f\}_{(RI)'}$ în trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' descrisă matematic de TrLS (3.61), *presupunând că setul* (3.436) *este cunoscut prin măsurare în referenţialul propriu* $(RI)_0$ *al câmpului electromagnetic şi/sau al corpurilor aflate în câmp*, cu $(RI)_0$ considerat corespunzător, ca fiind tocmai RI în raport cu care măsurarea setului de mărimi fizice (3.436) este *tocmai* setul de *mărimi fizice electromagnetice proprii* (3.437) $\{M_f\}_{(RI)}\equiv\{M_f\}=\{\rho, \vec{J}; \vec{B}, \vec{E}; \vec{H}, \vec{D}\}$, pe care le considerăm cunoscute, având calitatea că valorile lor numerice sunt invarianţi relativişti, fiind măsurate în referenţialul în repaus cu câmpul electromagnetic considerat şi/sau cu corpul considerat în câmp. În acest fel convenţia $(RI)_0\equiv RI$, impune renunţarea la indicele zero în (3.437) ca fiind mărimile fizice proprii (de repaus), *funcţie de care se vor scrie* (3.436). Urmărind *figura 3.3* (în special 3.3(b)), pentru a identifica trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)', cu $RI\equiv(RI)_0$ în cele ce urmează, trebuie remarcat că (RI)' se mişcă cu viteza de transport $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$=constant în lungul axei Ox, situaţie în care mişcarea relativă a lui RI faţă de (RI)' are loc cu $\vec{v}'\equiv-\vec{v}_T$ în sensul contrar al axei Ox. În acest fel, PFECM *se reduce esenţial la stabilirea expresiilor fizico-matematice relativiste* ce dau setul de mărimi fizice (3.436) considerate în raport cu (RI)', funcţie de acelaşi set de mărimi fizice considerate în raport cu $RI\equiv(RI)_0$ *ca mărimi fizice proprii* (3.437) *cunoscute*.

3.55.1 Procedura cuadrivectorială respectiv cuadritensorială de rezolvare a PFECM

Deoarece cuadritensorii electromagnetici relativişti $\{\Phi\},\{\Gamma\},\{\Pi\}$ se transformă în sens Lorentz (3.403) la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)', fiind invarianţi relativişti în raport cu TrLG (3.43)-(3.44), respectiv în raport cu TrLS (3.61), rezultă că *aplicarea legii de transformare* (3.403) *a componentelor cuadritensorilor de ordinul doi*, asupra cuadritensorilor $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$ (3.411), $\{\Gamma(\vec{H}, -ic\vec{D})\}$ (3.414) şi $\{\Pi(\vec{M}, ic\vec{P})\}$ (3.415), *va rezolva* PFECM, pe rând pentru perechile de mărimi fizice electromagnetice $(\vec{B}, \vec{E})$; $(\vec{H}, \vec{D})$ respectiv $(\vec{M}, \vec{P})$. *Soluţionarea completă a* PFECM *în cadrul electrodinamicii relativiste se rezumă*, de fapt *la transformarea cuadrivectorului densitate de curent şi de sarcină electrică* $J(\vec{J}, ic\rho)$, respectiv *a cuadritensorilor* $(\{\Phi\},\{\Gamma\},\{\Pi\})$ *la rotirea axelor de coordonate în spaţiul cuadridimensional Minkowski* ($\mathcal{S}_M$). Pentru perechea $(\vec{J}, \rho)$, PFECM se va rezolva cu ajutorul cuadritensorului $J(\vec{J}, ic\rho)$ (3.389), care la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)' se transformă după legea (3.100), reluată ca (3.386) în paragraful 3.48.0.

3.55.2 Expresiile de transformare relativistă în sens Lorentz pentru perechea de mărimi fizice ($\vec{J}$,ρ) la trecerea RI ⇆ (RI)'. Efectul electrodinamic pur relativiste de generare a unei distribuţii de sarcini electrice ρ' ≠0 când ρ =0 şi $\vec{J}$ ≠0

Notând în raport cu RI: $\vec{J}_{RI} \equiv \vec{J}$ şi $\rho_{RI} \equiv \rho$, respectiv în raport cu (RI)': $\vec{J}_{(RI)'} \equiv \vec{J}'$ şi $\rho_{(RI)'} \equiv \rho'$ ca mărimile fizice *densitate de curent* $\vec{J}$, respectiv *densitate de sarcină electrică* ρ, în raport cu referenţialul aflat în mişcare rectilinie şi uniformă (MRU) cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$ faţă de RI [în lungul axei Ox, v. figura 3.3(b)), *mărimile fizice proprii* (de repaus) ($\vec{J}$,ρ) *fiind considerate cunoscute*, vor permite scrierea prin ele *a mărimilor fizice de mişcare* (cinematice) ($\vec{J}'$,ρ'), dacă se ţine cont de transformarea componentelor cuadrivectorului $J_{RI} \equiv J(\vec{J}, ic\rho)$ în componentele scrise în raport cu (RI)' $J_{(RI)'} \equiv J'(\vec{J}', ic\rho')$, conform legii (3.386) particularizată la (3.438) $J'_k = \sum_{j=1}^{4} \alpha_{kj} J_j$ cu $\{\alpha_{kj}\}$ $(k, j = \overline{1,4})$ coeficienţii matricei Lorentz generale (3.45). Prin modul de mişcare a lui (RI)' faţă de RI, în relaţia (3.438) avem tocmai $\{\alpha_{kj}\}$ ai TrLS (3.61), încât *cuadrivectorul densitate de curent* şi *de sarcină electrică*, făcând trecerea J → J', *îşi transformă componentele după legea* (3.100) de transformare a cuadrivectorilor, care conduce la *expresiile de transformare relativistă a perechii* ($\vec{J}$,ρ):

$$(3.439)\ (a)\ \vec{J}' \equiv \vec{J}_{(RI)'} = \frac{\vec{J}_{\parallel} + \rho\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{J}_{\perp},\ \text{respectiv (b)}\ \rho' \equiv \rho_{(RI)'} = \frac{\rho + c^2\vec{J}\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}},\ \text{cu}\ \vec{u} = -\vec{v} \equiv -\vec{v}_T.$$

În (3.439) $\vec{J}_{\parallel}$, respectiv $\vec{J}_{\perp}$ sunt componentele vectoriale din $\vec{J} = \vec{J}_{\parallel} + \vec{J}_{\perp}$, cu indicele || arătând componenta vectorială paralelă cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$, iar ⊥ componenta perpendiculară pe $\vec{v}$.

Din (3.439) (a) şi (b) se va putea pune în evidenţă un *efect electrodinamic pur relativist de generare a unei distribuţii de sarcină* $\rho' \equiv \rho_{(RI)'} \neq 0$, când $\rho \equiv \rho_{RI} = 0$ şi $\vec{J} \equiv \vec{J}_{RI} \neq 0$, în cadrul interpretării relativiste ce urmează.

3.55.3 Interpretări relativiste prin expresiile de transformare (3.439) ale mărimilor fizice ($\vec{J}$,ρ) la trecerea RI ⇆ (RI)'. Efectul electrodinamic pur relativist de generare a unei distribuţii de sarcină ρ' ≠0 când ρ =0 şi $\vec{J}$≠0

(I_1) În expresia (3.439) (a) a lui $\vec{J}' \equiv \vec{J}_{(RI)'}$, apare şi *densitatea curentului electric de convecţie* $\vec{J}_C = \rho\vec{u}$, cu $\vec{u} = -\vec{v} \equiv -\vec{v}_T$, tocmai viteza de deplasare a corpului purtător de sarcini electrice caracterizate prin densitatea volumică de sarcină ρ, purtător care, aflat în repaus faţă de RI [considerat referenţialul propriu $(RI)_0$], se deplasează cu $\vec{u} = -\vec{v}_T$ faţă de (RI)' (acesta deplasându-se cu viteza $\vec{v}_T$ faţă de RI).

(I_2) Dacă în raport cu RI *considerat propriu* $(RI)_0$ corpul considerat are ρ=0, adică *nu este încărcat electric, dar are* $\vec{J}$≠0, atunci în raport cu referenţialul (RI)' în mişcare faţă de $(RI)_0$ propriu, din relaţia (3.439) (b) rezultă *densitatea volumică de sarcină nenulă*:

$$(3.440)\ \rho' \equiv \rho_{(RI)'} = \frac{c^2\vec{J}\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0,\ \text{după înlocuirea lui}\ \rho \equiv \rho_{RI} = 0.$$

(I_3) *Rezultatul* (3.440) *este un efect electrodinamic pur relativist, corelat cu relativitatea şi cu simultaneitatea din* TRR/TRS. *El este legat direct de raportarea la referenţialele reciproce* RI ⇆ (RI)' (v figura 3.3(b)) şi *nu contrazice legea conservării sarcinii electrice*, exprimată prin ecuaţia de continuitate (3.402).

(I_4) Din (3.439) (a) şi (b) mai pot fi deduse şi alte *efecte electrodinamice pur relativiste* în afara celui de mai sus ($\rho' \neq 0$, la $\rho = 0$), precum $\vec{J}' \neq 0$ la $\vec{J} = 0$ (dacă $\rho = 0$) însoţit de $\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}}$ care respectă legea conservării sarcinii electrice deoarece având densităţi volumice de sarcină electrică şi volumul tridimensional al corpului de sarcină electrică ρ este afectat relativist, conform cu $V' = V\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}$.

3.55.4 Expresiile de transformare relativistă în sens Lorentz pentru perechile de mărimi fizice electromagnetice vectoriale $(\vec{B}, \vec{E})$; $(\vec{H}, \vec{D})$ şi $(\vec{M}, \vec{P})$. Efecte electrodinamice pur relativiste legate de trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)'

Conform precizărilor din subparagraful 3.55.1, obţinerea *relaţiilor de transformare relativistă a mărimilor fizice electromagnetice vectoriale* $(\vec{B}, \vec{E})$; $(\vec{H}, \vec{D})$ şi $(\vec{M}, \vec{P})$, transformare determinată de raportarea la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' *în cadrul electrodinamicii relativiste, se va face* aplicând cuadrivectorilor de ordinul doi $\{\Phi\}, \{\Gamma\}$ respectiv $\{\Pi\}$, explicitaţi matriceal prin relaţiile (3.411), (3.414), respectiv (3.415), şi asupra elementelor cărora li se va aplica legea (3.403) de transformare a componentelor cuadritensoriale la trecerea reciprocă RI $\leftrightarrows$ (RI)'.

(I) *Aplicarea legii de transformare* (3.403) *cuadritensorului electromagnetic câmp* $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$ de elemente matriceale (3.411) conduce la *setul de expresii relativiste de trecere de la* RI≡(RI)$_0$ *propriu la* (RI)', pentru perechea $(\vec{B}, \vec{E})$ de mărimi, ca trecere $(\vec{B}, \vec{E})_{RI} \rightarrow (\vec{B}, \vec{E})_{(RI)'}$ sau $(\vec{B}, \vec{E}) \rightarrow (\vec{B}', \vec{E}')$, explicitată matematic:

(3.441) (a) $\vec{B}' = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{B}_\parallel$ şi (b) $\vec{E}' = \frac{\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{E}_\parallel$, cu indicii $\parallel$ şi $\perp$ deja specificaţi în subparagraful 3.54.2 (pentru vectorul $\vec{J}$), când $\vec{B} = \vec{B}_\parallel + \vec{B}_\perp$ are componenta $\vec{B}_\parallel$ paralelă cu $\vec{v}$ şi componenta $\vec{B}_\perp$ perpendiculară pe $\vec{v}$.

(II) *Aplicarea legii de transformare* (3.403) *cuadritensorului electromagnetic excitaţie* $\{\Gamma(\vec{H}, -ic\vec{D})\}$ *de elemente matriceale* (3.414), *dă setul de relaţii de trecere* $(\vec{H}, \vec{D})_{RI} \rightarrow (\vec{H}, \vec{D})_{(RI)'}$ sau $(\vec{H}, \vec{D}) \rightarrow (\vec{H}', \vec{D}')$, *exprimate matematic*:

(3.442) (a) $\vec{H}' = \frac{\vec{H}_\perp - \vec{v} \times \vec{D}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{H}_\parallel$ şi (b) $\vec{D}' = \frac{\vec{D}_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{H}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{D}_\parallel$, cu $\vec{D} = \vec{D}_\parallel + \vec{D}_\perp$ având $\vec{D}_\parallel$ paralelă cu $\vec{v}$ şi $\vec{D}_\perp$ perpendiculară pe $\vec{v}$, şi similar pentru $\vec{H} = \vec{H}_\parallel + \vec{H}_\perp$.

(III) *Legea de transformare* (3.403) *aplicată cuadritensorului electromagnetic polarizare* $\{\Pi(\vec{M}, ic\vec{P})\}$ *de elemente matriceale* (3.415) permite *setul de expresii de trecere* $(\vec{M}, \vec{P})_{RI} \rightarrow (\vec{M}, \vec{P})_{(RI)'}$ sau $(\vec{M}, \vec{P}) \rightarrow (\vec{M}', \vec{P}')$, *absolut similare* cu cele din (3.441) şi/sau (3.442) ca exprimare matematică:

(3.443) (a) $\vec{M}' = \frac{\vec{M}_\perp + \vec{v} \times \vec{P}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{M}_\parallel$ şi (b) $\vec{P}' = \frac{\vec{P}_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{M}}{\sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{P}_\parallel$, cu $\vec{M} = \vec{M}_\parallel + \vec{M}_\perp$; $\vec{P} = \vec{P}_\parallel + \vec{P}_\perp$ şi indicierea faţă de direcţia vectorului $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$.

(IV) Cu ajutorul rezultatelor relativiste electrodinamice sintetizate în (3.441)-(3.443), considerații fizice privind câmpul electromagnetic în RI≡(RI)$_0$ [cu $\vec{E}=0$, $\vec{B}=0$ și/sau $\vec{H}=0$] vor conduce la *efecte electrodinamice pur relativiste* precum $\vec{B}'\neq 0$ la $\vec{B}=0$ [prin (3.441(a)], $\vec{E}'\neq 0$ la $\vec{E}=0$ [prin (3.441(b)], și $\vec{H}'\neq 0$ la $\vec{H}=0$ [prin (3.442(a)] etc., cum se va arăta în cele ce urmează.

3.55.5 Interpretări relativiste prin expresiile de transformare (3.441), (3.442) și (3.443) a mărimilor electromagnetice vectoriale ($\vec{B}$, $\vec{E}$); ($\vec{H}$, $\vec{D}$) și ($\vec{M}$, $\vec{P}$) la trecerea RI ⇆ (RI)'. Efecte electrodinamice pur relativiste legate direct de trecerea RI ⇆ (RI)'

(I$_1$) Analiza relațiilor de transformare Lorentz (3.441)-(3.443) arată că *mărimile fizice electromagnetice vectoriale* $\{\vec{B},\vec{E};\vec{H},\vec{D};\vec{M},\vec{P}\}$ ce caracterizează local starea câmpului electromagnetic, respectiv a corpurilor aflate în câmp, *se transformă numai în perechi*: ($\vec{B}$, $\vec{E}$); ($\vec{H}$, $\vec{D}$) respectiv ($\vec{M}$, $\vec{P}$).

(I$_2$) Relațiile (3.441)-(3.443) pot fi scrise și pentru trecerea inversă (RI)'→RI și *pun foarte clar în evidență faptul relativist că atât câmpul electric cât și câmpul magnetic nu sunt forme independente de existență a materiei*, ci doar *aspecte ale aceleași realități obiective*, care este câmpul electromagnetic cu componentele sale electrică și magnetică simultane.

(I$_3$) Afirmația (I$_2$) se poate proba prin intermediul relațiilor (3.441)-(3.442) în care, dacă punem $\vec{E}\neq 0$ și $\vec{D}\neq 0$, respectiv $\vec{B}=0$ și $\vec{H}=0$ ca situație fizică în raport cu referențialul propriu RI≡(RI)$_0$, *în referențialul* (RI)' *în mișcare* (față de RI) *apare câmpul magnetic descris de vectorii*:

$$(3.444)\ (a)\ \vec{B}'\equiv\vec{B}_{(RI)'}=\frac{-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\neq 0\ [\text{la } \vec{B}=0 \text{ în } (3.441)(a)] \text{ și}$$

$$(b)\ \vec{H}'\equiv\vec{H}_{(RI)'}=\frac{-\vec{v}\times\vec{D}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}}\neq 0$$ [la $\vec{H}=0$ în (3.442(a)], chiar dacă $\vec{B}=0$ și $\vec{H}=0$ în raport cu RI ca referențial propriu.

(I$_4$) Exemplificarea de la (I$_3$) se poate continua cu situația în care, *dacă* $\vec{E}=0$ (în referențialul propriu), *atunci în orice alt referențial* (RI)' (altul decât cel propriu), *apare un câmp electric descris prin expresia*:

$$(3.445)\quad \vec{E}'=\vec{E}_{(RI)'}=\frac{\vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}},$$ expresie ce rezultă din (3.441)(b) pentru $\vec{E}\equiv\vec{E}_{\parallel}\equiv\vec{E}_{\perp}=0$.

În (3.445) avem și $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$, ca și în relațiile anterioare (3.441)→(3.444).

(I$_5$) Situații similare celor exemplificate în (I$_3$) și (I$_4$) se pot obține din (3.443) și pentru polarizarea electrică $\vec{P}$, respectiv magnetizarea $\vec{M}$ a corpurilor aflate în câmpul electromagnetic, ca și pentru inducția electrică $\vec{D}$ prin (3.442)(b).

(I$_6$) Atât în relația (3.444) (a) și (b), cât și în relația (3.445), avem *efecte electrodinamice pur relativiste* ($\vec{B}'\neq 0$ la $\vec{B}=0$; $\vec{H}'\neq 0$ la $\vec{H}=0$, respectiv $\vec{E}'\neq 0$ la $\vec{E}=0$), *corelate cu relativitatea și cu simultaneitatea din* TRR/TRS, efecte legate direct *de raportarea la referențialele reciproce* RI ⇆ (RI)', cu particularizare la trecerea RI ⇆ (RI)' și RI=(RI)$_0$ ca referențial propriu în care mărimile fizice proprii (de repaus) sunt considerate cunoscute (date).

(I$_7$) Toate *efectele electrodinamice pur relativiste* puse în evidență pe cale fizico-matematică relativistă în cadrul subparagrafului 3.55.5 (ca urmare a expresiilor de transformare stabilite în subparagraful 3.55.4), ca și cele semnalate în subparagrafele 3.55.2 și 3, *sunt direct legate de trecerea* RI ⇆ (RI)' și respectiv direct *corelate cu relativitatea și simultaneitatea din* TRR/TRS, *plecând de la situații fizice concrete speciale considerate* prin mărimile fizice electromagnetice proprii (de repaus) de valori presupus cunoscute (sau date) în referențialul propriu $(RI)_0$=RI [conform modului de considerare a referențialelor reciproce RI $\leftrightarrows$ (RI)' în cadrul paragrafului 3.55 de față].

3.55.6 Consecințe fizico-matematice relativiste complete ale rezolvării PFECM (problemei fundamentale a electrodinamicii corpurilor în mișcare). Efectele electrodinamice relativiste fizico-matematice virtual posibile prin comportarea relativistă a $\{M_f\}$ electromagnetice (3.436) legiferată matematic în rezultatele relativiste (3.439)-(3.443)

(I) *Rezolvarea* PFECM *în cadrul subparagrafelor* 3.55.2-3.55.4 permite următoarea *sinteză a expresiilor de transformare relativistă în sens Lorentz a perechilor de mărimi fizice electromagnetice de stare locală* [cuprinse în setul (3.436)]:

$$(S_I^{(1)})\quad (3.439)\ (a)\ \vec{J}\,' = \frac{\vec{J}_\parallel + \rho\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{J}_\perp \ \text{şi}\ (b)\ \rho' = \rho + \frac{c^2\vec{J}\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}};$$

$$(S_I^{(2)})\quad (3.441)\ (a)\ \vec{B}\,' = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{B}_\parallel \ \text{şi}\ (b)\ \vec{E}\,' = \frac{\vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{E}_\parallel;$$

$$(S_I^{(3)})\quad (3.442)\ (a)\ \vec{H}\,' = \frac{\vec{H}_\perp - \vec{v}\times\vec{D}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{H}_\parallel \ \text{şi}\ (b)\ \vec{D}\,' = \frac{\vec{D}_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{H}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{D}_\parallel;$$

$$(S_I^{(4)})\quad (3.443)\ (a)\ \vec{M}\,' = \frac{\vec{M}_\perp + \vec{v}\times\vec{P}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{M}_\parallel \quad \text{şi}\ (b)\ \vec{P}\,' = \frac{\vec{P}_\perp + \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{M}}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{P}_\parallel\ ,$$

cuprinzând $\{M'_f\}\equiv\{M_f\}_{(RI)'}$ (3.436) *exprimate în funcție de* $\{M_f\}\equiv\{M_f\}_{RI}$ (3.437) *considerate în raport cu referențialul propriu* RI≡$(RI)_0$, care, ca *mărimi fizice relativiste proprii* (de repaus), cu *valorile invarianți relativiști* și, de aceea, cunoscute sau date pentru a putea calcula *mărimile fizice relativiste cinematice* (de mișcare) [mărimile măsurate în raport cu (RI)' în mișcare față de $(RI)_0$ propriu cu $\vec{v}\equiv\vec{v}_T$].

(II) Grupul de expresii de transformare relativistă pentru perechea de mărimi fizice $(\vec{J},\rho)$ a fost obținut prin aplicarea legii (3.100) de transformare a componentelor cuadrivectorilor asupra cuadrivectorului $J(\vec{J},ic\rho)$, rezultând grupul $(S_I^{(1)})$ obținut prin relațiile (3.439) (a) și (b). Fiecare din cele trei grupuri de expresii de transformare din $\{S_I^{(k)}\}$ $(k=\overline{2,4})$ a fost obținut în urma aplicării *legii de transformare relativistă* (3.403) *fiecăreia din mărimile fizice tensoriale din electrodinamica relativistă cuadridimensională*: (1) *cuadritensorul electromagnetic câmp* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$; (2) *cuadritensorul electromagnetic excitație* $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$, respectiv (3) *cuadritensorul electromagnetic polarizare* $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$.

(III) Expresiile de transformare din $\{S_I^{(k)}\}$ $(k=\overline{1,4})$ expuse în sinteza (I) au drept cazuri particulare speciale, *expresii de transformare* prin care rezultă *valori ale* $\{M'_f\}$ [ca mărimi cinematice (de mișcare)] nenule în (RI)', deși valoarea *corespondentă proprie* (de repaus) $\{M_f\}$ este nulă în RI≡$(RI)_0$ propriu. Situația $M'_f\equiv(M_f)_{(RI)'}\neq 0$ la $M_f\equiv(M_f)_{RI}=0$ definește fizico-matematic relativist un *efect electrodinamic pur relativist*, legat direct de raportarea la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)', care este *corelat cu relativitatea și simultaneitatea* (din TRR/TRS). Cele mai importante *efecte electrodinamice pur relativiste au fost semnalate și interpretate prin relațiile* (3.440); (3.444) (a) și (b); respectiv (3.445).

(IV) *Lista completă a consecințelor fizico-matematice relativiste ale rezolvării* PFECM *sintetizată ca* $\{S_I^{(k)}\}$ $(k=\overline{1,4})$ în (I) conține mult mai multe situații teoretice fizico-matematice, care ar putea constitui setul de *efecte electrodinamice pur relativiste*, precizate în (III) prin $M'_f \neq 0$ când $M_f = 0$, cu specificarea dată *primării* pentru *mărimile fizice cinematice* (de mișcare) funcție de cele *neprimate* [ca *mărimile fizice proprii* (de repaus)]. Această *listă completă este dată de a doua sinteză relativistă*, după cum urmează, pe rând, din relațiile $\{S_I^{(k)}\}$ $(k=\overline{1,4})$:

$$S_I^{(1)} \rightarrow \begin{cases} (S_{II}^{(11)}) \quad (a)\ \vec{J}' = \dfrac{\rho\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0 \text{ și } \quad (b)\ \rho' = \rho, \text{ dacă } \vec{J}=0 \text{ și } \rho \neq 0; \\ (S_{II}^{(12)}) \quad (a)\ \vec{J}' = \dfrac{\vec{J}_{\parallel}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{J}_{\perp} \text{ și } \quad (b)\ \rho' = \dfrac{c^2\vec{J}\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0, \text{ dacă } \rho = 0 \text{ și } \vec{J} \neq 0, \end{cases}$$

$$S_I^{(2)} \rightarrow \begin{cases} (S_{II}^{(21)}) \quad (a)\ \vec{B}' = \dfrac{-\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0 \text{ și } \quad (b)\ \vec{E}' = \dfrac{\vec{E}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{E}_{\parallel}, \text{ dacă } \vec{B}=0 \text{ și } \vec{E} \neq 0; \\ (S_{II}^{(22)}) \quad (a)\ \vec{B}' = \dfrac{\vec{B}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{B}_{\parallel} \neq 0 \text{ și } \quad (b)\ \vec{E}' = \dfrac{\vec{v}\times\vec{B}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0, \text{ dacă } \vec{E}=0 \text{ și } \vec{B} \neq 0, \end{cases}$$

$$S_I^{(3)} \rightarrow \begin{cases} (S_{II}^{(31)}) \quad (a)\ \vec{H}' = \dfrac{-\vec{v}\times\vec{D}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0 \text{ și } \quad (b)\ \vec{D}' = \dfrac{\vec{D}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{D}_{\parallel}, \text{ dacă } \vec{H}=0 \text{ și } \vec{D} \neq 0; \\ (S_{II}^{(32)}) \quad (a)\ \vec{H}' = \dfrac{\vec{H}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{H}_{\parallel} \text{ și } \quad (b)\ \vec{D}' = \dfrac{\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{H}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0, \text{ dacă } \vec{D}=0 \text{ și } \vec{H} \neq 0, \end{cases}$$

respectiv

$$S_I^{(4)} \rightarrow \begin{cases} (S_{II}^{(41)}) \quad (a)\ \vec{M}' = \dfrac{\vec{M}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{M}_{\parallel} \text{ și } \quad (b)\ \vec{P}' = \dfrac{\dfrac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{M}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0, \text{ dacă } \vec{P}=0 \text{ și } \vec{M} \neq 0; \\ (S_{II}^{(42)}) \quad (a)\ \vec{M}' = \dfrac{\vec{v}\times\vec{P}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} \neq 0 \text{ și } \quad (b)\ \vec{P}' = \dfrac{\vec{P}_{\perp}}{\sqrt{1-\dfrac{v_T^2}{c^2}}} + \vec{P}_{\parallel}, \text{ dacă } \vec{M}=0 \text{ și } \vec{P} \neq 0. \end{cases}$$

(V) Printre consecințele teoretice fizico-matematice de mai sus se află și cazurile:(c_1) ($\rho=0$, $\vec{J}\neq 0$)$\rightarrow \rho' \neq 0$ semnalat prin (3.440); (c_2) ($\vec{B}=0$, $\vec{E}\neq 0$)$\rightarrow \vec{B}'\neq 0$ semnalat prin (3.444)(a); (c_3) ($\vec{H}=0$, $\vec{D}\neq 0$)$\rightarrow \vec{H}'\neq 0$ semnalat prin (3.444)(b), respectiv cazul (c_4) ($\vec{E}=0$, $\vec{B}\neq 0$)$\rightarrow \vec{E}'\neq 0$, sublinierea condițiilor fizico-matematice de anulare din paranteze arătând că a doua condiție a fost presupusă ca adevărată. Alte considerații fizico-matematice teoretice relativiste ar putea fi făcute prin analizarea fiecărei *perechi de condiții fizice* impuse de mărimile fizice proprii în referențialul propriu $RI \equiv (RI)_0$ (subliniată în lista completă), pentru a-i justifica posibilitatea și, în cazul confirmării posibilității fizice de realizare, analizarea consecinței asupra perechii de mărimi fizice cinematice marcând un *efect electrodinamic pur relativist confirmabil.*

3.56 Concluzii finale asupra elementelor de electrodinamică relativistă din cap.IX

(C_1) Întregul cap.IX, dedicat *elementelor de electrodinamică relativistă*, are în vedere *formularea cuadrivectorială și cuadritensorială* a electrodinamicii clasice maxwelliene, spre a explicita invarianța relativistă a legilor electromagnetismului care, prin natura fenomenelor electromagnetice, sunt intrinsec relativiste.

(C_2) *Baza acestei reformulări relativiste a electrodinamicii clasice* (și a transformării ei într-o *electrodinamică relativistă* cuadridimensională, cuadrivectorială și cuadritensorială) o constituie *înlocuirea celor șase postulate maxwelliene neexplicit relativiste*, cu un set de trei postulate explicit relativiste, prin generalizarea cuadrivectorială și cuadritensorială a *mărimilor fizice electromagnetice de stare locală* $\{(\vec{J},\rho); (\vec{B},\vec{E}); (\vec{H},\vec{D}); (\vec{M},\vec{P})\}$.

(C_3) *Generalizarea cuadrivectorială și cuadritensorială a mărimilor fizice electromagnetice* din setul dat în (C_2) este realizată prin introducerea, constituirea și utilizarea mărimii fizice cuadrivectoriale relativiste $J(\vec{J},ic\rho)$ *densitate de curent electric și de sarcină electrică*, respectiv a *mărimilor fizice cuadritensoriale electromagnetice relativiste*: *câmp* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, *excitație* $\{\Gamma(\vec{H},-ic\vec{D})\}$ și *polarizare* $\{\Pi(\vec{M},ic\vec{P})\}$, pentru caracterizarea stării locale a câmpului electromagnetic și a stării locale a corpurilor aflate în câmp.

(C_4) Un al doilea cuadrivector relativist (după $J(\vec{J},ic\rho)$) utilizat metodologic în formularea relativistă a electrodinamicii este *cuadrivectorul electromagnetic potențial* $\Phi(\vec{A},\frac{i}{c}V)$ generalizând relativist cuadridimensional *potențialul magnetic vector* $\vec{A}$ reunit cu *potențialul electric scalar* V, care se va demonstra a fi, de fapt, cuadritensorul electromagnetic *câmp* $\{\Phi(\vec{B},-\frac{i}{c}\vec{E})\}$, dacă se va ține cont de relațiile dintre ($\vec{A}$ și $\vec{B}$), (V și $\vec{E}$), respectiv ($\vec{A}$ și V).

(C_5) Prin aplicarea legii de transformare (3.100) a componentelor cuadrivectorilor asupra cuadrivectorului relativist $J(\vec{J},ic\rho)$, respectiv prin aplicarea legii de transformare (3.403) a componentelor cuadritensorilor asupra cuadritensorilor electromagnetici relativiști $\{\Phi\}$, $\{\Gamma\}$ și $\{\Pi\}$, au fost obținute relațiile de transformare a tuturor mărimilor fizice electromagnetice de stare din setul (C_2), când se trece în maniera TRR/TRS, la raportarea stărilor fizice față de referențialele reciproc inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)', cu considerarea referențialului propriu $(RI)_0 \equiv RI$.

(C_6) Cuplajul metodologic în perechi dintre mărimile fizice electromagnetice $(\vec{J},\rho)$; $(\vec{B},\vec{E})$; $(\vec{H},\vec{D})$ și $(\vec{M},\vec{P})$, la nivelul formulării relativiste cuadridimensionale a electrodinamicii, se dovedește a fi o *exprimare fizico-matematică fundamentală a fațetelor duale ale realității fizice relativiste*, reprezentată de *câmpul electromagnetic ca sistem fizic*, respectiv de manifestarea electrodinamică a acestuia prin fenomenele fizice electromagnetice și electrodinamice cele mai complexe.

(C_7) *Efectele electrodinamice pur relativiste obținute teoretic relativist* (în paragraful 3.55) prin raportarea la referențialele inerțiale aflate mișcare relativă unul față de celălalt (RI $\leftrightarrows$ (RI)') se dovedesc, la nivel cuadrivectorial și cuadritensorial, manifestări reale ale acelorași fațete ce dau *natura relativistă a câmpului electromagnetic cel mai general.*

(C_8) Întreaga structură noțional-conceptuală și metodologic-funcțională a cap.IX <Elemente de electrodinamică relativistă> este ilustrată diagramatic în *figura 3.16*, afirmând, totodată, și o sinteză totală a capitolului, cu atribuții logico-metodologice importante în înțelegerea și în însușirea de către studenții utilizatori ai acestei părți a cursului de fizică teoretică.

(C_9) *Formularea cuadridimensională relativistă a legii conservării energiei din electromagnetismul teoretic*, ca lege în electrodinamica relativistă, necesită elemente de *teoria relativistă a câmpurilor Lagrange*, pentru a explicita funcția *densitate de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ *a câmpului electromagnetic*, care este necesară scrierii *tensorului electromagnetic energie-impuls*, funcție la rândul ei dependentă de cuadritensorii *câmp* $\{\Phi\}$, *excitație* $\{\Gamma\}$ și *polarizare* $\{\Pi\}$.

(C_{10}) Datorită (C_9), capitolul X, care urmează, se justifică şi pe această cale sugerată de (C_9), *cerând precizarea completă a modelului teoretic relativist al electromagnetismului* **(şi al teoriei sale), model elaborat esenţial ca o electrodinamică relativistă cuadrivectorială şi cuadritensorială.** *Acest important detaliu* **nu-l vom aborda, în cursul de FT, decât printr-o** *remarcă pentru* **cap.IX,** *în cadrul paragrafului* 3.63 *al* cap.X. *Restul problemei* **fiind conţinut în relaţia tensorială ce dă elementele:**

(3.445 S) $\tau_{jk} = \sum_{j=1}^{4} \Phi_{jl}\Gamma_{kl} - \delta_{jk} f_{\measuredangle} \; (j, k = \overline{1,4})$ *ale cuadritensorului electromagnetic densitate de energie-impuls, scris prin*: **(a)** *elementele cuadritensorului* **{Φ} notate Φ_{jl}, (b)** *elementele cuadritensorului* **{Γ} notate Γ_{kl}, respectiv (c) prin** *funcţia densitate de lagrangeană* $f_{\measuredangle}$ *a câmpului electromagnetic, funcţie care va fi precizată în* cap.X (următor) *prin relaţia* (M_S ***) **din subparagraful** 3.63.2. În (3.445 S), $\delta_{jk} = \begin{Bmatrix} 1\,(j = k) \\ 0\,(j \neq k) \end{Bmatrix}$ este simbolul Kronecker.

CAP. X ELEMENTE DE TEORIA RELATIVISTĂ A CÂMPURILOR LAGRANGE. ECUAŢII RELATIVISTE CUANTICE DE TIP KLEIN-GORDON. ECUAŢIA PROCA

3.57 Prezentare generală

În capitolul VI al părţii $P_3^{(3)}$ (de faţă), a fost precizat termenul de *fizică teoretică relativistă* (FTR) în accepţiunea căruia, în capitolele anterioare au fost expuse *elemente de mecanică relativistă* (cap. VII), *de termodinamică relativistă* (cap.VIII), respectiv de *electrodinamică relativistă cuadridimensională* (cap.IX). La aceste trei aspecte relativiste foarte importante pentru o FTR, vom adăuga, în cele ce urmează, *elemente de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange*, urmând ca în *Partea a 5^a* a cursului de FT (<Mecanica cuantică>) să fie expusă partea de FTR cuantică, înţeleasă prin formularea relativistă Dirac a mecanicii cuantice.

Întreaga elaborare din prezentul capitol urmează să desfăşoare o structură metodologică dând elemente de FTR ca *elemente de teoria câmpurilor cuantice scalare de tip Lagrange*, cu obţinerea unei ecuaţii de tip Klein-Gordon, atât *plecând de la o densitate de lagrangeană*, cât şi de la *corespondenţa dintre mărimile fizice cuantice şi operatorii ataşaţi*, în mecanica cuantică, acestor mărimi fizice, spre a le descrie matematic operaţia de măsurare. Această din urmă corespondenţă va avea în vedere formula relativistă a funcţiei analitice Hamilton a mişcării particulei libere sau a punctului material liber

$$(3.446)\ \mathcal{H}_r \equiv c\sqrt{p_r^2 + m_0^2c^2} \equiv W_t^{(r)} \text{ (ca energia relativistă totală).}$$

Tot ca elemente de teoria relativistă a câmpurilor, deci elemente de FTR, va fi considerată şi problematica ilustrată prin *ecuaţia cuantică Proca, ecuaţie ce generalizează tensorial ecuaţia Klein-Gordon.*

Utilitatea acestor elemente de FTR este, pe de o parte, *extinderea metodelor instituite de* TRR/TRS şi *de principiile ei fundamentale pentru generalizarea relativist-restrânsă a întregii fizici*, iar pe alta, *elaborarea relativistă a teoriei generale a câmpurilor.* Cu toate că ne vom limita la câmpurile fizice scalare, aplicaţiile cuantice, şi mai ales cele relativiste, la descrierea mişcării particulelor cu masă de repaus nenulă ($m_0 \neq 0$), remarcă din nou *invarianţa relativistă a unor ecuaţii ce exprimă completitudinea cuadridimensională a tratării problemelor* în cadrul mai adecvat al *fizicii teoretice relativiste* (FTR).

În *figura 3.17*, este dată *structura diagramatică a capitolului X*, în care conţinutul său <Elemente de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange. Ecuaţii relativiste cuantice de tip Klein-Gordon. Ecuaţia Proca> este ilustrat structurat ca elaborare teoretică, respectiv ca funcţionare metodologică, plecând de la *funcţia de undă scalară* $\Psi(\vec{r},t) \equiv \Psi(x,y,z,t)$ *generalizată relativist ca funcţia analitică de stare pentru sistemul câmp fizic*, implicând formalismul analitic Lagrange al mecanicii analitice extins şi generalizat pentru câmpul fizic, printr-o generalizare relativistă a conceptelor de "coordonate" şi de "viteze" generalizate (3.448) $\Psi(x,y,z,ict) \equiv \Psi\{x_j\}$ $(j=\overline{1,4})$ (ca funcţia de undă relativistă a câmpului scalar), respectiv (3.449) $\left\{\dfrac{\partial\Psi(\{x_j\})}{\partial x_j}\right\}$ $(j=\overline{1,4})$.

Pe baza conceptelor (3.448) şi (3.449), întreaga structură a cap.X este diagramatizată funcţional, introducând şi construind *funcţia* (3.450) $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi\left(\{x_j\},\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right)\right]$ ca *densitate de lagrangeană a câmpului fizic Lagrange*. Cu ajutorul funcţiei locale $f_{\mathcal{L}}$ de stare a câmpului, construindu-se funcţia Lagrange $\mathcal{L}_{câmp}$ (3.451), se instituie *baza fizico-teoretică principială de construire a acţiunii Hamilton relativiste* $S_{câmp}^{1\to2}$ (3.453), numită acţiunea Schwinger, căreia i se aplică varianta relativistă a PVH (principiului variaţional Hamilton) ca PVHR reformulat de Schwinger, şi de aceea numit *principiul acţiunii Schwinger* (PAS), *aplicarea* PAS $\delta S_{câmp}^{1\to2}=0$ (3.457) *furnizându-ne ecuaţia Lagrange generalizată* (3.467) satisfăcută de $f_{\mathcal{L}}$ a câmpului Lagrange. Aceeaşi structură diagramatică, din *figura 3.17*, mai este ilustrată şi în partea sa metodologică de obţinere a ecuaţiilor relativiste de tip D'Alembert (3.472)-(3.475), de tip Klein-Gordon [(3.476)-(3.478); (3.486); (3.490)] scalară, cuadrivectorială respectiv cuadritensorială Proca, apelând la trei modalităţi de explicitare a funcţiei $f_{\mathcal{L}}$ (3.450), conformă relaţiilor (3.470) şi (3.471), respectiv

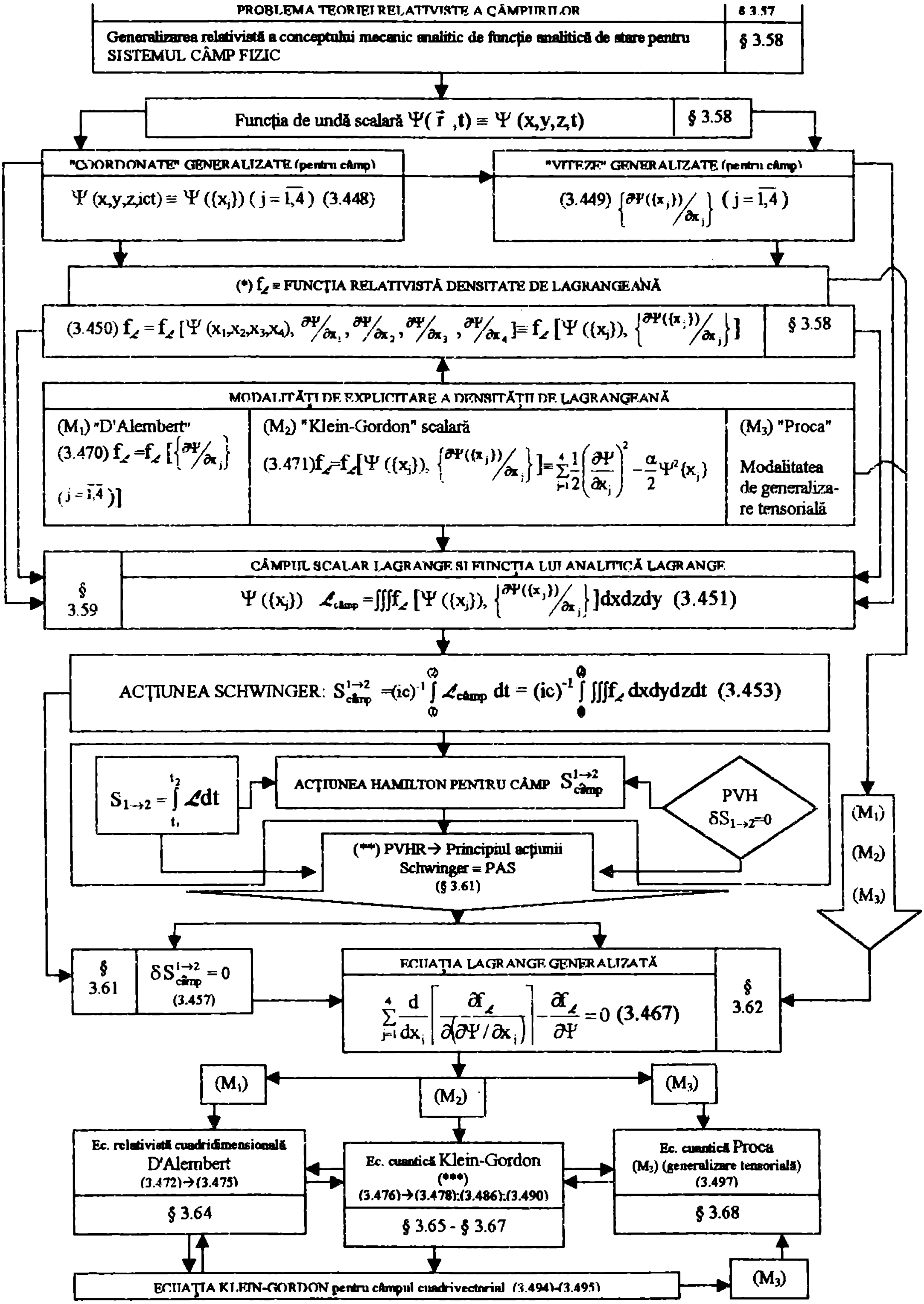


Figura 3.17 (v. explicația în pag. 220)

Figura 3.17 **Structura diagramatică funcţională a CAP.X <*Elemente de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange. Ecuaţii relativiste cuantice de tip Klein-Gordon. Ecuaţia Proca*> prin funcţia relativistă** *DENSITATE DE LAGRANGEANĂ* $f_{\mathcal{L}}$, prin PVHR ≡ PAS (***) şi prin *ECUAŢIA LAGRANGE GENERALIZATĂ* (3.467). Vezi la subsolul paginii:(*),(**) şi (***).

modalităţii Proca de generalizare tensorială a ecuaţiei Klein-Gordon scalare. Obţinerii ecuaţiei relativiste Klein-Gordon scalare, îi sunt menţionate cele două modalităţi: (I) cea pur relativistă plecând de la forma explicită (3.471) a funcţiei $f_{\mathcal{L}}$, respectiv (II) cea cuantică relativistă apelând la corespondenţa cuantică dintre energia totală relativistă $E_{tot} \equiv W_t^{(r)} \equiv \mathcal{H}_r$ şi operatorii cuantici implicaţi în descrierea matematică a măsurării acestei mărimi fizice, în cazul particulei cuantice libere, ori în cazul particulei cuantice evoluând într-un câmp de forţe conservative. Conform *figurii 3.17* conceptele fundamentale care generează cap.X sunt: funcţia scalară $\Psi\{x_j\}$ şi derivatele ei, funcţia densitate de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi\left(\{x_j\},\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right)\right]$ şi ecuaţia Lagrange generalizată (3.467), cu elaborarea de tip analitic furnizată de PVHR aplicat acţiunii Schwinger $S^{1\to2}_{câmp}$ (3.453) generalizând relativist acţiunea Hamilton $S_{1\to2}$.

3.58 Funcţia de undă scalară reprezentând un câmp scalar şi densitatea de lagrangeană ($f_{\mathcal{L}}$) a câmpului

3.58.1 Generalizarea relativistă a conceptului mecanic analitic de funcţie analitică de stare pentru sistemul câmp fizic

3.58.1.0 Consideraţii relativiste şi metodologice

În subparagraful 3.2.3 al paragrafului 3.2 din CAP.0, a fost utilizată ecuaţia (3.4) de propagare a undelor electromagnetice [ca ecuaţie D'Alembert (3.8)-(3.9)] pentru a sugera cuadridimensionalitatea spaţio-temporală a fenomenelor electromagnetice, operatorul D'Alembert (3.10) fiind un operator diferenţial cuadridimensional dependent strict de *evenimentul relativist* (3.6) [reactualizat în (3.378)]. De asemenea, *pentru introducerea coordonatelor relativiste* (3.378) $\{x_j;\ (j=\overline{1,4})\}\equiv\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\equiv\{x,y,z,ict\}$, şi *pentru rescrierea cuadridimensională* (3.10) *a operatorului* D'Alembert, *a cărui invarianţă la trecerea* RI ⇆ (RI)' (v. figura 3.3 (b)) *ne-a permis în, în paragraful 3.11, stabilirea transformărilor Lorentz generale* (TrLG), faţă de care ecuaţia D'Alembert (3.8)-(3.9), prezentând simetrie relativistă, cere *înlocuirea transformărilor Galilei* (3.1), faţă de care este asimetrică [variantă la trecerea RI ⇆ (RI)']. De aceea, ecuaţia D'Alembert (3.8)-(3.9), *ca ecuaţie relativistă satisfăcută de funcţia de undă* $\Psi(\vec{r},t)$ (reprezentând starea locală a câmpului electromagnetic în propagare), va trebui găsită, drept, *caz particular al unei ecuaţii relativiste mai generale, furnizată de o teorie relativistă a câmpurilor* (TRC), parte integrantă a *fizicii teoretice relativiste* (FTR). Această TRC va avea la bază un *principiu variaţional generalizat*, cu plecare de la principiul variaţional Hamilton (PVH) (v. vol.I, "Elemente de fizică teoretică", ref.106).

3.58.1.1 Funcţia de undă scalară $\Psi(\vec{r},t)$ pentru câmpuri fizice de tip Lagrange $\{\Psi(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))\}$. "Coordonata" de câmp generalizată relativist

---

(*) Sintetizează problematica densităţii de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ expusă în § 3.58 şi în § 3.63 (modalităţile de particularizare ca funcţie);

(**) PVHR ≡ principiul variaţional Hamilton relativist/sau PAS ≡ principiul acţiunii Schwinger;

(***) Cu cele două moduri de deducere a ecuaţiei Klein-Gordon [(I) *general relativist* (§ 3.65) prin $f_{\mathcal{L}}$ (3.471) (M_2) şi (II) *cuantic-relativist* plecând de la $E_{tot} \equiv \mathcal{H}_r$ (§ 3.66) (prin 3.446)].

Conceptul de funcție de undă scalară (3.447) $\Psi(\vec{r},t) \equiv \Psi(x,y,z,t)$ este o ***generalizare a funcției de stare a unui sistem fizic oarecare*****, descriind starea unui sistem fizic oarecare** ***în fiecare punct al său*** **(starea locală)** ***și la fiecare moment*** **(descriere instantanee).**

Înțelegerea analitică a introducerii funcției (3.447) ca funcție de stare se poate face în maniera analitică direct legată de funcția analitică Lagrange din *Partea a 2^a* a cursului de FT (v. ref.106, "*Elemente de fizică teoretică*"(I), Ed. Universității, București, 1998). Cum pentru funcția analitică Lagrange au fost utilizate conceptele de *coordonată generalizată* (q) și de *viteză generalizată* ($\dot{q}$), câmpul *fizic scalar oarecare* va fi desemnat, tocmai, prin Ψ (3.447) jucând rol de "*coordonată de câmp*" *generalizată*. Avem astfel: (3.448) $\Psi(\vec{r},t) \equiv \Psi(x,y,z,t) \equiv \Psi(x,y,z,ict) \equiv \Psi(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv \Psi(\{x_j\};\ (j=\overline{1,4}))$ "*coordonata de câmp*" *generalizată relativist, ca descriind câmpul scalar oarecare prin evenimentul relativist* (3.378), *care dă starea instantanee în fiecare punct al câmpului.*

Este de precizat că Ψ din (3.448) va trebui indiciat cu k $(k=\overline{1,g})$, ca $\Psi_k(\{x_j\})$, atunci când *se va ține cont că un câmp fizic are* g *grade de libertate*, acest număr în cazul câmpurilor fizice putând fi oricât de mare (chiar nemărginit în cazul câmpului reprezentat prin *cuantele* sale/particulele cuantice purtătoare).

3.58.1.2 "Viteza" de câmp Ψ (3.448) generalizată relativist $\left[\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\left(j=\overline{1,4}\right)\right\}\right]$

Cum un câmp scalar oarecare este echivalent cu un mediu continuu, *introducerea unei "viteze" de câmp* Ψ *(3.448) generalizată relativist*, pe scurt "*viteză generalizată*", devine posibilă prin *definiția matematică*:

$$(3.449)\quad \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\} \equiv \left\{\frac{\partial\Psi(\{x_j\})}{\partial x_j}(j=\overline{1,4})\right\} \equiv \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_1},\frac{\partial\Psi}{\partial x_2},\frac{\partial\Psi}{\partial x_3},\frac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right\} \equiv \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x},\frac{\partial\Psi}{\partial y},\frac{\partial\Psi}{\partial z},\frac{\partial\Psi}{\partial(ict)}\right\},$$

indicând și *posibilitatea unei funcții de câmp generalizată în maniera*:

$$(3.450)\ f_{Lagrange} \equiv f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}\left[\Psi\left(\{x_j\},\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}(j=\overline{1,4})\right)\right] = f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(x_1,x_2,x_3,x_4),\frac{\partial\Psi}{\partial x_1},\frac{\partial\Psi}{\partial x_2},\frac{\partial\Psi}{\partial x_3},\frac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right]$$

ca *o nouă funcție locală de stare*. Atributul de "viteză" generalizată pentru (3.449) se justifică și prin faptul analitic exprimat de generalizarea în teoria cuantică a câmpurilor (TQC) a relației clasice $p_k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_k}$ $(k=\overline{1,g})$ în forma $\Pi_v = \left\{\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\Psi/\partial x_j}\right\}$ definind "impulsul" generalizat, necesar în TQC pentru introducerea conceptului de cuantă a câmpului (particula cuantică "purtătoare" a câmpului cuantic, cerută de *cuantificarea a doua*).

3.58.2 Funcția relativistă densitate de lagrangeană ($f_{\mathcal{L}}$)

3.58.2.1 Definiție

<**Numim** ***densitate de lagrangeană a unui câmp fizic scalar*****, funcția $f_{\mathcal{L}}$ de dependență (3.450) prin "coordonata de câmp" generalizată relativist (3.448) și prin derivatele acesteia de ordinul întâi (3.449)>.**

3.58.2.2 Observație

Densitatea de lagrangeană (3.450) ilustrează fizico-matematic analitic ***o nouă mărime locală de stare*****, descriind** ***câmpul fizic scalar*** **ca un** ***sistem fizic continuu.*** Acest câmp scalar, permițând $f_{\mathcal{L}}$, îl vom numi *câmp scalar Lagrange.*

3.59 Câmpul scalar Lagrange şi funcţia analitică Lagrange

3.59.0 Precizare conceptuală

Maniera fizico-matematică, în care *funcţia de undă scalară* $\Psi(\vec{r},t)$ permite *generalizarea relativistă cuadridimensională* (3.448) şi *generalizarea de tip Lagrange* ["coordonată de câmp" generalizată şi "viteză" de câmp generalizată (3.449)], sugerează *introducerea funcţiei* (3.450) cu dependenţa similară celei a funcţiei analitice Lagrange $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ din mecanica analitică clasică. În plus, aceeaşi manieră de generalizare, plecând de la sistemele fizice discrete de puncte materiale *la sistemele fizice continue*, permite *introducerea unei funcţii analitice Lagrange a câmpului fizic scalar Lagrange, definit prin parametrii Lagrange generalizaţi pentru câmp*: $\Psi(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))$ şi $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}(j=\overline{1,4})\right\}$ şi, punct cu punct, prin densitatea de lagrangeană (3.450).

3.59.1 Definiţia câmpului scalar Lagrange

<Numim *câmp scalar Lagrange*, câmpul fizic pentru care există parametrii Lagrange generalizaţi $\left\{\Psi(\{x_j\}),\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}(j=\overline{1,4})\right\}$ şi, în plus, *proprietatea de continuitate a câmpului* permiţând *existenţa unei funcţii analitice de stare locală* de tip $f_{\mathcal{L}}$ ca densitate de lagrangeană (3.450)>.

3.59.2 Funcţia analitică Lagrange a câmpului scalar ($\mathcal{L}_{\text{câmp}}$)

Conform consideraţiilor din secvenţa 3.58.1.0 şi ţinând cont că *un câmp fizic scalar reprezintă un sistem fizic continuu, care în fiecare punct al său este descris prin funcţia densitate de lagrangeană* (3.450), *funcţia analitică Lagrange a câmpului scalar* se obţine prin integrarea spaţială a funcţiei $f_{\mathcal{L}}$, încât avem:

$$(3.451)\ \mathcal{L}_{\text{câmp}}=\iiint f_{\mathcal{L}}\,dxdzdy\equiv\iiint f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}),\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]dxdydz\equiv\iiint f_{\mathcal{L}}dV_{(3)},\ \text{cu } dV_{(3)}=dxdydz$$

ca elementul de volum tridimensional.

3.59.3 Remarcă asupra funcţiei $\mathcal{L}_{\text{câmp}}$

Conform expresiei (3.451), $\mathcal{L}_{\text{câmp}}$ este dependentă de timp, încât va permite scrierea *acţiunii Hamilton* $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$ *generalizată la câmpul scalar Lagrange*, cu ajutorul căreia, prin aplicarea unui principiu variaţional Hamilton (PVH) generalizat relativist (PVHR) să se obţină *ecuaţia Lagrange generalizată* (3.467), *pe care o satisface câmpul scalar Lagrange prin densitatea sa de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ (3.450).

3.60 Acţiunea Hamilton $S_{1\to2}$ generalizată ca acţiune Schwinger ($S^{1\to2}_{\text{câmp}}$) pentru câmpul scalar Lagrange

3.60.0 Precizare conceptuală

În *Partea a 2ª* (mecanică analitică) a cursului de FT (v. ref. 106, "Elemente de fizică teoretică (I)", Ed. Universităţii, Bucureşti, 1998), *acţiunea Hamilton clasică*, a fost introdusă ca funcţionala (mărime fizică de proces): (3.452) $S_{1\to2}=\int_{t_1}^{t_2}\mathcal{L}(\{q_i;\dot{q}_i\},t)dt$, reprezentând *integrala în raport cu timpul a funcţiei*

Lagrange (a lagrangeanei). Valabilitatea şi generalitatea fizico-matematice ale definiţiei (3.451) vor permite scrierea acţiunii $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$, fără a preciza încă, pentru scopurile noastre, limitele de integrare.

3.60.1 Acţiunea Hamilton ca acţiune Schwinger ($S^{1\to2}_{\text{câmp}}$)

Renunţând la precizarea limitelor şi *utilizând* în definiţia matematică (3.452), *densitatea de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ (3.450), avem succesiv prin (3.451):

$$(3.453)\ S^{1\to2}_{\text{câmp}} = \int\limits_{(1)}^{(2)} \mathcal{L}_{\text{câmp}}\, dt = (ic)^{-1} \iiiint\limits_{(1)}^{(2)} f_{\mathcal{L}}\, dxdydzd(ict) \equiv (ic)^{-1} \iiiint\limits_{(1)}^{(2)} f_{\mathcal{L}}\, dx_1dx_2dx_3dx_4 \equiv$$

$$\equiv (ic)^{-1} \iiiint\limits_{(1)}^{(2)} f_{\mathcal{L}} \left[\Psi(\{x_j\}), \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right\} \right] dV_{(4)}\text{ , cu } dV_{(4)} = \prod_{j=1}^{4} dx_j \equiv dx_1dx_2dx_3dx_4$$

elementul de volum cuadridimensional din *universul spaţiu-timp sau din spaţiul cuadridimensional Minkowski* ($\mathcal{S}_M$). Din motive istorico-metodologice care vor fi precizate în cele ce urmează, *acţiunea Hamilton relativistă* (3.453) o numim *acţiune Schwinger*.

3.60.2 Remarcă asupra acţiunii $S_{\text{câmp}}$ (3.453)

Factorul $(ic)^{-1}$ apare în faţa integralei multiple din (3.453), deoarece integrarea în raport cu timpul se face pentru timpul t real, nu pentru coordonata x_4=ict, conform definiţiei matematice (3.452) a acţiunii Hamilton.

3.61 Principiul variaţional Hamilton generalizat relativist (PVHR) ca principiul acţiunii Schwinger (PAS)

3.61.0 Asupra principiul variaţional în teoria generală a câmpurilor

În "Introduction to Quantum Theory" (John Wiley, New York, 1969), autorul Paul Roman numeşte *principiul variaţional Hamilton* (PVH) *generalizat relativist* (PVHR), drept, *principiul acţiunii Schwinger* (PAS), *desemnând acţiunea Hamilton* $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$ (3.453) *ca acţiune Schwinger*, datorită generalizării făcute de Julian Schwinger (n. 1918), profesor universitar la Harvard, unul din fondatorii electrodinamicii cuantice. *Schwinger* este cel care a introdus *densitatea de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ (3.450), pentru un câmp fizic oarecare (considerat ca un sistem fizic continuu) şi a utilizat densitatea $f_{\mathcal{L}}$ în definirea (3.451) a funcţiei analitice Lagrange $\mathcal{L}_{\text{câmp}}$, indiferent de tipul câmpului caracterizat prin funcţia de undă $\Psi(\{x_j\})$ (scalar, vector, tensor). Tot Schwinger, a introdus şi acţiunea $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$ ca (3.453) şi a reformulat PVH ca un PVH generalizat relativist, numit, în teoria cuantică relativistă a câmpurilor, *principiul acţiunii Schwinger* (PAS).

Cu ajutorul PAS, va fi obţinută *ecuaţia diferenţială* (3.467) *pe care o satisface* $f_{\mathcal{L}}$ *ca densitate de lagrangeană a câmpului*. Această ecuaţie va fi de tipul ecuaţiilor analitice Lagrange, stabilite în *Partea a* 2^a a cursului de FT, ca ecuaţiile analitice ale mişcării sistemelor de puncte materiale cu g grade de libertate (v. ref.106, cap.I). De aceea ecuaţia (3.467) satisfăcută de $f_{\mathcal{L}}$ (3.450) va fi numită *ecuaţia Lagrange generalizată* a câmpului fizic scalar.

3.61.1 Principiul acţiunii Schwinger (PAS)

3.61.1.0 Necesităţi pentru formularea PAS

Se consideră câmpul fizic reprezentat prin *funcţia de undă* $\Psi(\{x_j\}(\, j=\overline{1,4}\,))$ ca ocupând un domeniu cuadridimensional arbitrar ales $\mathcal{D}_{(4)}$, mărginit de o *frontieră* $\sigma_{(4)}$ ca o *hipersuprafaţă pe care variaţiile arbitrare* (3.454) (a) $\delta\Psi = \Psi' - \Psi$ sau (b) $\Psi' = \Psi + \delta\Psi$ *ale lui* $\Psi(\{x_j\})$ *sunt nule prin definiţie*, adică *în oricare din punctele hipersuprafeţei* $\sigma_{(4)}$ sunt satisfăcute relaţiile:

(3.455) $\delta\,\Psi_{\sigma_{(4)}} = \Psi'_{\sigma_{(4)}} - \Psi_{\sigma_{(4)}} = 0.$

3.61.1.1 Variațiile arbitrare (3.454) ale câmpului $\Psi(\{x_j\})$

Variațiile definite arbitrar prin (3.454) arată că, *în oricare din punctele* $\mathcal{P}'\in\mathcal{D}_{(4)}$, funcția de undă $\Psi(\{x_j\})$ *poate suferi o trecere la valoarea* $\Psi' = \Psi + \delta\Psi$ de la valoarea Ψ dintr-un alt punct $\mathcal{P}\in\mathcal{D}_{(4)}$, între care $\Psi(\{x_j\})$ suferă variația $\delta\Psi = \Psi' - \Psi$.

3.61.1.2 Enunțul PAS

Generalizarea principiului variațional Hamilton (PVH), formulat în *Partea a 2^a* a cursului de FT [mecanica analitică, v. ref.106, cap.I (§ 2.4) și cap.II (§ 2.12)], generalizare trecând de la sistemele discrete de puncte materiale la sistemele fizice continue precum câmpurile fizice scalare, se bazează pe *posibilitatea definirii acțiunii Schwinger* $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$ (3.453). Această generalizare, având și caracter de generalizare relativistă prin dependența cuadridimensională $\Psi(\{x_j\})$ $(j=\overline{1,4})$ a funcției de undă, permite următorul *enunț al principiului acțiunii Schwinger* (PAS):<*Evoluția cuadridimensională a unui câmp fizic scalar*, în interiorul unui domeniu cuadridimensional $\mathcal{D}_{(4)}$ mărginit de o hipersuprafață $\sigma_{(4)}$ *are loc astfel încât acțiunea Schwinger* (3.456) $S^{1\to2}_{\text{câmp}} = \int_{(1)}^{(2)} \mathcal{L}_{\text{câmp}}\, dt = (ic)^{-1} \iiiint_{(1)}^{(2)} f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}), \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right] dV_{(4)}$ *prezintă un extremum pe traiectoria cuadridimensională reală*, în raport cu toate celelalte traiectorii cuadridimensionale virtuale (posibile), dacă traiectoriile din mulțimea de traiectorii posibile din $\mathcal{D}_{(4)}$ *încep* (la momentul t_1) și *sfârșesc* (la momentul t_2) *pe frontiera* $\sigma_{(4)}$ *a domeniului*>.

3.61.1.3 Condiția de extremum impusă de PAS

Echivalarea matematică a PAS, este dată prin variația nulă a acțiunii Schwinger (3.456):

(3.457) $\delta S^{1\to2}_{\text{câmp}} = 0.$

Consecința fundamentală a PAS, după efectuarea variației (3.457), adică după aplicarea matematică completă este *obținerea unei ecuații diferențiale echivalentă cu condiția* (3.457), *ecuație de tip Lagrange generalizată, pe care o va satisface densitatea de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ (3.450).

3.61.2 Efectuarea variației (3.457) a acțiunii Schwinger și obținerea ecuației Lagrange generalizată pentru câmpul scalar

3.61.2.1 Remarcă variațională

Deoarece acțiunea Schwinger $S^{1\to2}_{\text{câmp}}$ (3.456) ne apare ca o *expresie matematică* conținând ca factor unitatea imaginară $i=\sqrt{-1}$ [prin constanta $(ic)^{-1}$ din fața integralei multiple], eventualele dificultăți matematice ivite din manipularea unei forme matematice complexe vor fi evitate prin aplicarea efectivă a PAS în forma matematică (3.457), *deoarece variația anulată, conform acestei forme*, permite *rescrierea relației* (3.457) ca:

(3.458) $ic\,\delta\, S^{1\to2}_{\text{câmp}} \equiv \delta \int_{t_1}^{t_2} f_{\mathcal{L}}\, dV_{(4)} = 0.$

3.61.2.2 Efectuarea variației (3.458)

Reluând (3.458) și ținând cont de dependența densității de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ de $\Psi(\{x_j\})$ $(j=\overline{1,4})$ și de $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}$ $(j=\overline{1,4})$, rezultă succesiv variația:

$$(3.459)\ \delta\int_{t_1}^{t_2} f_{\mathcal{L}}\, dV_{(4)} = \int_{t_1}^{t_2} \delta\,(f_{\mathcal{L}})\, dV_{(4)} \equiv \int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \delta\left(f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}); \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]\right) dV_{(4)} =$$

$$= \int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\Psi}\delta\Psi + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)} \frac{d}{dx_j}(\delta\Psi)\right] dV_{(4)} = 0.$$

Egalarea cu zero a ultimei părţi a succesiunii s-a făcut pentru a respecta enunţul PAS echivalat matematic prin (3.457). În suma din termenul al doilea al parantezei pătrate (din partea ultimă a succesiunii), variaţia $\delta\ \Psi$ trebuie "eliberată" de sub operatorul d/dx_j, încât *întreaga sumă trebuie integrată prin părţi*, conform formulei Leibniz de integrare: (***) $\int_{\alpha}^{\beta} u dv = uv\Big|_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} v du$. Dacă desfacem integrala cvadruplă din (3.459) în aşa fel încât să separăm termenul conţinând $\frac{d}{dx_j}(\delta\Psi)$, avem:

$$(3.460)\ \delta\int_{t_1}^{t_2} f_{\mathcal{L}}\, dV_{(4)} \equiv I_1 + I_2 = 0, \text{ cu}$$

$$(3.461)\ I_1 = \int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\Psi}\delta\Psi\, dV_{(4)} \quad \text{şi} \quad (3.462)\ I_2 = \sum_{j=1}^{4}\int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)} \frac{d}{dx_j}(\delta\Psi) dV_{(4)} = \sum_{j=1}^{4} I_j,$$

specificând I_j prin

$$(3.463)\ I_j = \int\iiint_{\mathcal{D}_4} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)} \frac{d}{dx_j}(\delta\Psi)\cdot dV_{(4)}, \text{ de integrat prin părţi.}$$

Integrarea prin părţi a lui I_j (3.463), aplicând (***), conduce la:

$$(3.464)\quad I_j = -\int\oiiint_{\sigma_{(4)}} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)} \delta\Psi d\sigma_{(4)} - \int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)}\right]\delta\Psi\, dV_{(4)},$$ cu $\sigma_{(4)}$ hipersuprafaţa din $\mathcal{S}_M$ care delimitează domeniul cuadridimensional $\mathcal{D}_{(4)}$. Ţinând cont că: (I) integrala 1[a] din (3.464) este o integrală pe hipersuprafaţa $\sigma_{(4)}$ cu elementul de hipersuprafaţă $d\sigma_{(4)}$ şi că (II) relaţia (3.455) impune variaţiile nule $\delta\Psi\big|_{\sigma_{(4)}} = 0$ pe suprafaţa frontieră a lui $\mathcal{D}_{(4)}$, rezultă anularea integralei de suprafaţă închisă $\sigma_{(4)}$, încât vom avea:

$$(3.465)\ I_j = -\int\iiint_{\mathcal{D}_{(4)}} \frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)}\right]\delta\Psi\, dV_{(4)}.$$ Dacă rezultatul (3.465) se introduce în I_2 (3.462), şi ceea ce se obţine, împreună cu I_1 (3.461), se introduc în relaţia completă (3.460), atunci avem succesiunea:

$$(3.466)\ \delta\int_{t_1}^{t_2} f_{\mathcal{L}}\, dV_{(4)} \equiv \int\iiint_{\mathcal{D}_4} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\Psi}\delta\Psi\, dV_{(4)} - \int\iiint_{\mathcal{D}_4}\sum_{j=1}^{4} \frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)}\right]\delta\Psi\, dV_{(4)} \equiv$$

$$\equiv \int\iiint_{\mathcal{D}_4}\left\{(-)\sum_{j=1}^{4}\frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\left(\partial\Psi/\partial x_j\right)}\right] + \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial\Psi}\right\}\delta\Psi\, dV_{(4)} = 0.$$

Din (3.466), *vom avea*, prin echivalarea anulării variaţiei nule (3.458) finalizată, *o condiţie fizico-matematică de anulare*, care va reprezenta tocmai *ecuaţia Lagrange generalizată* pe care o satisface $f_{\mathcal{L}}$, ca densitate de lagrangeană a câmpului fizic scalar de tip Lagrange.

3.62 Ecuaţia Lagrange generalizată satisfăcută de densitatea de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}), \left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$

3.62.1 Explicitarea ecuaţiei Lagrange generalizată

Finalizarea (3.466) a *condiției* (3.458) *de extremum a acțiunii Schwinger* $S^{1\to 2}_{camp}$ *este echivalentă cu anularea parantezei acoladă de sub integrala multiplă din* (3.466), pentru $dV_{(4)} \neq 0$ şi pentru orice $d\Psi \neq 0$ în "interiorul" lui $\mathcal{D}_{(4)}$. Avem, astfel, ecuația:

(3.467) $\sum_{j=1}^{4} \frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial(\partial\Psi/\partial x_j)}\right] - \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial \Psi} = 0$, ca o *ecuație de tip Lagrange generalizată, pe care o satisface densitatea de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ *a câmpului fizic scalar considerat.* Se observă că (3.467) realizează fizico-matematic cuadridimensional o *generalizare a ecuațiilor analitice Lagrange*

(3.467$_0$) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0\,(k = \overline{1,g})$, *scrise pentru mişcarea unui sistem de puncte materiale cu* g *grade de libertate* [v. *Partea a 2*^{a} a cursului de FT, "Elemente de fizică teoretică (I)", Ed. Universității, Bucureşti, 1998, cap.I (§ 2.5), ref.106].

3.62.2 Consecințe ale existenței ecuației Lagrange generalizată (3.467) a câmpului scalar

Obținerea ecuației (3.467) aplicând PAS exprimat prin enunțul din secvența 3.61.1.2 şi prin condiția de extremum (3.457) şi/sau (3.458), are un set de consecințe dintre cele mai importante în FTR pe care o expune cap.X, de față. Aceste consecințe *se referă, atât la anunțata*, în secvența 3.58.1.0, *obținere a ecuației D'Alembert* (3.8)-(3.9), pe baza teoriei generale a câmpurilor formulată cuadridimensional, *cât şi la consecințe legate direct de*: (I) câmpurile fizice de tip Lagrange, (II) câmpurile fizice cuantice implicate relativist prin ecuația cuantică Klein-Gordon, ori prin ecuația Proca şi (III) extinderea cuadridimensională a formalismului analitic Lagrange (FA$\mathcal{L}$) şi a formalismului analitic Hamilton (FA$\mathcal{H}$) [dacă pentru FA$\mathcal{L}$ şi FA$\mathcal{H}$ se are în vedere că impulsurile generalizate $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\,(k = \overline{1,g})$ din mecanica analitică sugerează impulsuri generalizate şi pentru câmpuri, când se consideră derivatele $\left\{\frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial(\partial\Psi/\partial x_j)}\right\}$ ale densității de lagrangeană prin $\left\{\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}\right\}$].

În continuare, enunțăm câteva dintre anunțatele consecințe.

(C_1) *Definirea câmpului fizic Lagrange în general*, ca fiind *acel câmp fizic* (scalar, vectorial ori tensorial) *a cărui densitate de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ *satisface ecuația Lagrange generalizată* (3.467), respectiv un set de ecuații de tip (3.467), dacă se reformulează problema câmpului ținând cont de numărul g de grade de libertate.

(C_2) *Posibilitatea scrierii unei ecuații de tip* (3.467) *pentru câmpurile fizice vectoriale, respectiv tensoriale*, ținând cont că, până la obținerea ecuației (3.467), câmpurile $\Psi(\{x_j\})$ au fost considerate numai ca fiind scalare.

(C_3) *Posibilitatea obținerii unor ecuații cuantice relativiste, precum ecuația Klein-Gordon ori ecuația Proca*, apelând la *exprimările particulare* (şi pentru sisteme fizice cuantice) *posibile pentru densitatea de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$, în analogie cu structura clasică $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ a funcției analitice Lagrange (prin energia cinetică $\mathcal{T}$ şi cea potențială $\mathcal{U}$).

(C_4) *Extinderea formalismelor analitice* Lagrange (FA$\mathcal{L}$), respectiv Hamilton (FA$\mathcal{H}$) *prin formularea dependențelor cuadridimensionale* $\Psi(\{x_j\})$, respectiv $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}), \left\{\frac{\partial \Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$, *în cadrul teoriei generale a câmpurilor fizice* (scalare, vectoriale, tensoriale), acestea aparținând domeniului fizicii teoretice analitice clasice, respectiv domeniului fizicii teoretice analitice relativiste (în general FTR).

3.63 Posibilități de particularizare a ecuației Lagrange generalizată (3.467) prin specificarea explicită a dependenței (3.450) a densității de lagrangeană ($f_{\mathcal{L}}$)

3.63.0 Remarcă asupra generalității ecuației (3.467)

Pentru orice sistem fizic prezentând proprietățile de stare ale unui *sistem continuu* (de la punct la punct și-n orice moment), există *posibilitatea definirii dependenței* (3.450), care să satisfacă ecuația de tip Lagrange generalizată (3.467). *Sistemul fizic continuu*, cum ar fi câmpul fizic scalar caracterizat local și instantaneu prin $\Psi(\{x_j\})$ de dependență cuadridimensională ($j=\overline{1,4}$), poate prezenta *proprietăți fizice locale de o așa natură fizică încât să permită explicitarea densității de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ (3.450), în cazuri foarte particulare. Această explicitare va arăta că *ecuația Lagrange generalizată* (3.467), datorită generalității dependenței (3.450), se particularizează prin dependențe explicitate de $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}),\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$ în așa fel încât conduce la ecuații relativiste precum: *ecuația relativistă D'Alembert* (3.4) generalizată cuadridimensional ca (3.8)-(3.9), *ecuația cuantică relativistă Klein-Gordon, ecuația cuantică relativistă Proca* etc., toate ecuațiile numite aparținând domeniului *fizicii teoretice relativiste* (FTR), și toate fiind *cazuri particulare ale ecuației Lagrange de tip* (3.467), satisfăcută de o anumită expresie matematică explicitată a lui $f_{\mathcal{L}}$ ca densitate de lagrangeană.

3.63.1 Observații asupra explicitării densității de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ (3.450)

(O_1) Dependența (3.450) a densității $f_{\mathcal{L}}$ de lagrangeană poate fi explicitată în diverse situații de câmp fizic scalar, vectorial ori tensorial.

(O_2) Ținând cont că $f_{\mathcal{L}}$ este un concept fizico-matematic analitic introdus pentru *sistemele fizice continue*, plecând de la tratarea analitică a sistemelor continue prin formalismul analitic Lagrange (FA$\mathcal{L}$), analogia dintre gruparea de termeni din funcția analitică Lagrange (3.468) $\mathcal{L}(\{q_k;\dot{q}_k\},t)=\mathcal{T}(\{\dot{q}_k\})-\mathcal{U}(\{q_k\})$ și o *posibilă structurare a lui* $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}),\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$ ca *o diferență de termeni* a fost deja utilizată în *teoria generală a câmpurilor fizice cuantice*.

(O_3) *Cazurile de explicitare efectivă a densității* $f_{\mathcal{L}}$, plecând de la analogia cu (3.468), și având în vedere dependența implicită de $\Psi(\{x_j\})$ și de $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}$, se obțin ca fiind de două tipuri:

(I) $f_{\mathcal{L}}$ *conține explicit doar termenul dependent de derivatele* $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}$, adică este de forma

(3.469) $$f_{\mathcal{L}}=f_{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1},\frac{\partial\Psi}{\partial x_2},\frac{\partial\Psi}{\partial x_3},\frac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right)\equiv f_{\mathcal{L}}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x},\frac{\partial\Psi}{\partial y},\frac{\partial\Psi}{\partial z},\frac{\partial\Psi}{\partial(ict)}\right)\equiv f_{\mathcal{L}}\left(\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right),$$ ca un termen *desemnând densitatea de lagrangeană de tipul "energiei cinetice"* (depinde de "viteza" generalizată $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}$); respectiv

(II) $f_{\mathcal{L}}$ conține întreaga dependență (3.450), inclusiv cea prin $\Psi(\{x_j\})$, încât $f_{\mathcal{L}}$ prezintă completa analogie cu (3.468).

(O_4) *Cu o dependență de tipul* (I) a lui $f_{\mathcal{L}}$, *ecuația Lagrange generalizată* (3.467) se va particulariza la ecuația D'Alembert (3.4), generalizată cuadridimensional (3.8)-(3.9) și utilizată în cursul de FT pentru stabilirea transformărilor Lorentz generale (3.42)-(3.44).

(O_5) *Cu o dependență de tipul* (II) a lui $f_{\mathcal{L}}$, *ecuația Lagrange generalizată* (3.467) va deveni *ecuația cuantică relativistă Klein-Gordon*, pe care o vom stabili și plecând de la $E_{tot} \equiv W_t^{(r)} = \mathcal{H}_r$ (4.446) în modalitatea aplicată în mecanica cuantică (folosind corespondența mărimilor fizice cu operatorii cuantici ce le descriu operația de măsurare).

(O_6) Generalizarea tensorială de tip Proca a ecuației Klein-Gordon, pe baza specificării dependenței Klein-Gordon de tipul (II) a funcției $f_{\mathcal{L}}$, va conduce la *ecuația relativistă cuantică Proca.*

3.63.2 Modalități de explicitare a densității $f_{\mathcal{L}}$ (3.450)

Conform considerațiilor de mai sus (subparagraful 3.63.1), *modalitățile de explicitare* pe care le avem în vedere pentru dependența funcției $f_{\mathcal{L}}$ (3.450) vor fi cele ce vor conduce la *ecuațiile de câmp* deja amintite. De aceea, vom preciza *trei modalități de explicitare* a dependenței densității de lagrangeană, și anume:

(M_1) (3.470) $f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}\left(\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_j}(j=\overline{1,4})\right\}\right) \equiv f_{\mathcal{L}}\left(\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_3},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right) =$

$$= +\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right)^2\right] = \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right)^2,$$ ca

modalitatea D'Alembert;

(M_2) (3.471) $f_{\mathcal{L}} = f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}),\left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right] \equiv f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\});\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_2},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_3},\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_4}\right] =$

$$\equiv \sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\Psi(\{x_j\}),$$ ca *modalitatea de tip Klein-Gordon*;

respectiv

(M_3) ca modalitatea Proca de generalizare tensorială a modalității scalare de tip Klein-Gordon, trecând printr-o generalizare cuadrivectorială.

3.63.3 Remarcă pentru cap. IX (concluziile ultime din § 3.56)

În cap.IX, concluziile finale (C_9) și (C_{10}) (v. § 3.56) au afirmat *necesitatea explicitării densității de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ *a câmpului electromagnetic*. Având în vedere specificările pe care le face cap.X, până aici, asupra funcției $f_{\mathcal{L}}$, *apare o modalitate specială de explicitare a lui* $f_{\mathcal{L}}$, cea cerută în cap.IX prin relația (3.445S) dând *elementele cuadritensorului electromagnetic densitate de energie-impuls*. În acest caz, $f_{\mathcal{L}}$ *ca densitate de lagrangeană a câmpului electromagnetic se explicitează în modalitatea specială* (M_S):

(M_S ***) $(f_{\mathcal{L}})_{\text{câmp electromagnetic}} = \dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}\Phi_{jk}\Gamma_{jk} - \dfrac{1}{2\mu_0}\Phi_{jk}^2 + f(\{\Pi\})$, cu Φ_{mn} elementele cuadritensorului *câmp* $\{\Phi\}$, Γ_{mn} elementele cuadritensorului *excitație* $\{\Gamma\}$ și $f(\{\Pi\})$ o funcție de cuadritensorul *polarizare* $\{\Pi\}$. În acest fel, relația (3.445S) din cap.IX [v. (C_{10}) din paragraful 3.56], dând cuadritensorul *densitate de energie-impuls*, este complet exprimată prin cunoașterea semnificației fizico-matematice a densității de lagrangeană explicitată în relația (M_S ***), permițând *completa cunoaștere a densității de energie-impuls*, ca formă matematică tensorială relativist-invariantă, care conține în maniera cuadridimensională relativistă și *conservarea vectorului Poynting* cu ajutorul căruia se formulează legea conservării energiei în fenomenele electromagnetice și/sau electrodinamice. Toate considerațiile de mai sus servesc înțelegerii complete a concluziilor ultime ((C_9) și (C_{10})) din cap.IX.

3.64 Ecuaţia relativistă cuadridimensională D'Alembert

3.64.1 Ecuaţia D'Alembert (3.8)-(3.9) caz particular al ecuaţiei Lagrange (3.467)

Dacă, în *ecuaţia Lagrange generalizată pentru câmpul fizic* dată de (3.467), se utilizează densitatea de lagrangeană $f_\mathcal{L}$ de expresie (3.470), *ecuaţia de câmp Lagrange*, prin lipsa termenului $\frac{\partial f_\mathcal{L}}{\partial \Psi}$ ($f_\mathcal{L} \neq f_\mathcal{L}(\Psi)$) trece *din forma generală* (3.472) $\sum_{j=1}^{4}\frac{d}{dx_j}\left[\frac{\partial f_\mathcal{L}}{\partial(\partial\Psi/\partial x_j)}\right]=0$ *în forma finală particulară*:

(3.473) $\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi(\{x_j\}) \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Psi(\{x_j\})=0$, *ca ecuaţie de câmp Lagrange particularizată la o ecuaţie de tip D'Alembert.*

Ţinând cont, în (3.473), că $\Psi(\{x_j\}) = \Psi(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \Psi(x,y,z,ict)$, se obţine uşor forma cunoscută

(3.474) $\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=0$, pe care punând-o şi sub forma:

(3.475) $\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial(ict)^2}\right]\Psi \equiv \Box\Psi(\{x_j\}) = 0$ a *ecuaţiei relativiste D'Alembert* (3.4) şi/sau (3.8)-(3.9) *de propagare a câmpului electromagnetic*, reprezentat prin *funcţia de undă* $\Psi(x,y,z,t)$ (dând starea locală instantanee a câmpului electromagnetic în propagare).

3.64.2 Remarcă metodologică şi conceptuală

Ecuaţia de câmp Lagrange (3.467), deja particularizată la *ecuaţia relativistă D'Alembert* (3.473), va mai putea fi particularizată şi ca *ecuaţie relativistă cuantică de tip Klein-Gordon*, care la rândul ei va putea fi generalizată tensorial ca *ecuaţie cuantică relativistă Proca*. Ţinând cont că ecuaţia relativistă D'Alembert este o ecuaţie de tip Lagrange (3.467) obţinută pentru câmpul electromagnetic reprezentat de *particulele fără masă de repaus* ($m_0=0$) *numite fotoni*, cazul relativist Klein-Gordon va rezolva problema cuantică a evoluţiei particulelor cuantice *cu masă de repaus nenulă* ($m_0\neq0$), *ecuaţia Klein-Gordon ce va fi obţinută din ecuaţia* (3.467), incluzând şi acest caz cu $m_0\neq0$ printre cazurile particulare ale *ecuaţiei Lagrange generalizată* satisfăcută de diferitele dependenţe $f_\mathcal{L}\left[\Psi(\{x_j\}),\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$ explicitate pentru densitatea de lagrangeană a câmpurilor fizice, prin cuantificarea a doua, purtate de *cuantele lor de câmp*, care la rândul lor sunt *particule cuantice cu mase de repaus nule* (ca în cazul câmpului electromagnetic) *sau nenule* (ca în cazul cazurile câmpurilor mezonice şi/sau pionice).

3.64.3 Remarcă relativistă

Ecuaţia D'Alembert (3.473) şi/sau (3.474)/(3.475) este o ecuaţie relativistă, a cărei *invarianţă cuadridimensională* a fost demonstrată, prin invarianţa (3.29') a operatorului D'Alembert $\Box = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, în § 3.11 (cap.II), unde *aceeaşi invarianţă* a fost utilizată pentru stabilirea transformărilor Lorentz generale (3.42)-(3.44). Acest *fapt de invarianţă şi de simetrie fizico-matematică a stat la baza fundamentării fizico-matematice a întregii teorii a relativităţii restrânse* (TRR/TRS), alături de selectarea şi de formularea principiilor fundamentale ale TRR/TRS. De aceea, *ecuaţiei D'Alembert ca ecuaţie de câmp* i s-a acordat un loc important în elaborarea şi expunerea <Elementelor de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange>, tema capitolului de faţă.

3.65 Ecuaţia cuantică relativistă Klein-Gordon (ec. K-G)

3.65.0 Consideraţii generale

Din motive metodologice relativiste, dar mai ales cuantice, *modalităţii "Klein-Gordon"* [(M_2) din subparagraful 3.63.2] *de considerare a densităţii de lagrangeană* $f_{\mathcal{L}}$ *de dependenţă* (3.471)] *i se vor detalia aplicaţiile şi/sau consecinţele fizico-teoretice* prin obţinerea ecuaţiei cuantice Klein-Gordon (ec. K-G), atât pe cale *pur relativistă* prin utilizarea formei matematice (3.471) în ecuaţia relativistă generală (3.467), cât şi pe cale *cuantică relativistă* apelând la $E_{tot} \equiv W_t^{(r)} = \mathcal{H}_r$ (3.446) şi la corespondenţa $\{A_j\} \rightarrow \{\hat{A}_j\}$ dintre o mărime fizică cuantică A_j şi operatorul cuantic corespunzător $\hat{A}_j$ care-i descrie măsurarea.

Deoarece explicitarea (3.471) a densităţii de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ conţine o *constantă fizică scalară neprecizată* α, trebuie remarcat că, plecând de la *valoarea nulă* a acesteia, ec. K-G (ce se va obţine) *se va particulariza la o ecuaţie de tip D'Alembert* (3.473), *dacă* $\alpha = 0$. Cum obţinerea ec.K-G, plecând de la *ecuaţia Lagrange generalizată* (3.467), *nu cere precizarea expresă a constantei* α din $f_{\mathcal{L}}$ (3.471), *a doua modalitate de obţinere a* ec.K-G, cea cuantică-relativistă menţionată, va fi considerată tocmai pentru a *obţine şi precizarea fizică a constantei* α, care la rându-i va clarifica semnificaţia fizico-cuantică a ec.K-G.

Utilitatea teoretică a stabilirii ec.K-G *reiese din consideraţiile de mai sus*, şi se va mai completa cu cea *a stabilirii ecuaţiei cuantice Proca* pentru câmpurile relativiste tensoriale, *generalizând* ec.K-G *stabilită pentru câmpurile fizice scalare.*

3.65.1 Ecuaţia cuantică relativistă Klein-Gordon (ec. K-G) caz particular al ecuaţiei Lagrange generalizată (3.467)

3.65.1.1. Remarcă asupra dependenţei Klein-Gordon (3.471) a lui $f_{\mathcal{L}}$

Forma în care relaţia (3.471) dă dependenţa explicită a densităţii de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ de variabila $\Psi(\{x_j\})$, respectiv de variabilele $\left\{\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}$ ca derivate parţiale ale lui Ψ, implică o *analogie* între termenul al doilea din (3.471) şi expresia energie potenţiale din teoria oscilaţiilor armonice. Cu toate acestea α, încă, *nu poate fi explicitat fizic total ca depinzând de o masă de repaus.*

3.65.1.2 Stabilirea ec. K-G prin ecuaţia Lagrange (3.467)

Cu densitatea de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}$ de tip (3.471) introdusă în ecuaţia Lagrange generalizată (3.467) pentru câmpul scalar descris local şi instantaneu de $\Psi(\{x_j\})$, rezultă ecuaţia:

(3.476) $\sum_{j=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Psi(\{x_j\}) + \alpha\Psi(\{x_j\}) \equiv \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\Psi(\{x_j\}) + \alpha\Psi(\{x_j\}) = 0$, sau ţinând cont că operatorul D'Alembert este de expresie reluată (3.13) $\square = \sum_{j=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, avem ecuaţia în formă condensată:

(3.477) $\square\,\Psi(\{x_j\}) + \alpha\,\Psi(\{x_j\}) = 0$, sau în formă şi mai restrânsă matematic

(3.478) $(\square + \alpha)\,\Psi(\{x_j\}) = 0$, *în toate cazurile* (3.476)-(3.478) fiind forme matematice identice ale aceleiaşi *ecuaţii relativiste cuantice Klein-Gordon* (ec.K-G).

3.65.2 Precizări asupra ec. K-G. Semnificaţii fizice

(p_1) Ec.K-G dată sub formele identice (3.476)-(3.478) este o *ecuaţie relativistă satisfăcută de funcţiile de undă scalare de tipul* $\Psi(\{x_j\})$.

(p_2) În mecanica cuantică, $\Psi(\{x_j\})$ descrie mişcarea particulelor cuantice relativiste cu *masa de repaus diferită de zero* ($m_0\neq0$).

(p_3) Faptul că ec.K-G este o ecuaţie relativistă se obţine *din invarianţa relativistă a operatorului D'Alembert* $\Box$ (deja demonstrată şi utilizată metodologic relativist în § 3.11), respectiv din *invarianţa relativistă a operatorului Klein-Gordon* (3.479) $\hat{O}_{K-G}\equiv\Box+\alpha$, cu α *o constantă fizică scalară, de precizat în cele ce urmează.*

(p_4) Pentru $\alpha = 0$, *operatorul Klein-Gordon* (3.479) se reduce la operatorul D'Alembert şi în acest caz ec.K-G (3.478) se reduce la ecuaţia D'Alembert (3.475), arătând că ecuaţia Lagrange (3.467) pentru câmpurile scalare este o ecuaţie de câmp foarte generală.

(p_5) *Justificarea completă a semnificaţiei fizice* a ec.K-G, afirmată parţial în (p_2), nu poate fi dată decât pe calea *strictă a metodelor cuantice de generare a ecuaţiilor cuantice* pe care le satisface $\Psi(\{x_j\})\equiv\Psi(x,y,z,ict)\equiv\Psi(\vec{r},t)$. De aceea, vom da în cele ce urmează şi o a doua metodă de stabilire a ec.K-G.

3.66 Stabilirea ec. K-G cu ajutorul corespondenţei dintre mărimile fizice cuantice şi operatorii cuantici apelând la $\mathcal{H}_r\equiv(E_{tot})_{rel}$ (3.446)

3.66.0 Justificare metodologică şi precizării conceptuale

Cum s-a arătat mai sus, ec.K-G, exprimată în formele matematice identice (3.476)-(3.478), conţine constanta fizică α, *imposibil de precizat complet prin obţinerea pur relativistă a* ec.K-G din ecuaţia de câmp Lagrange generalizată (3.467). *Ecuaţia Klein-Gordon* (ec.K-G) *fiind o ecuaţie cuantică se poate obţine şi pe calea cuantică-relativistă*, apelând la energia mecanică totală definită analitic drept caz particular al funcţiei analitice Hamilton (3.446) $\mathcal{H}_r\equiv W_t^{(r)}\equiv(E_{tot})_{rel}$, în care apar explicit toate mărimile fizice ce *caracterizează particula relativistă liberă de energie* $W_t^{(r)}\equiv\mathcal{H}_r=c\sqrt{p_r^2+m_0^2c^2}$, sau echivalent (3.480) $[W_t^{(r)}]^2\equiv\mathcal{H}_r^2=c^2p_r^2+m_0^2c^4$, cu $\vec{p}_r$ impulsul relativist şi m_0 masa de repaus ale particulei relativiste. Astfel, plecând de la (3.480), precizarea explicită a constantei fizice α va deveni posibilă, în *ipoteza metodologic-cuantică* că mărimilor fizice $[W_t^{(r)}]^2$ şi p_r^2 li se ataşează operatorii cuantici ce le descriu operaţia de măsurare în mecanica cuantică. În (3.480) apare şi *masa de repaus* m_0 *nenulă*, fapt ce se va ilustra şi cuantic în ecuaţia Klein-Gordon căutată pe cale cuantic-relativistă.

3.66.1 Operatorii cuantici ataşaţi relaţiei (3.480) prin operatorii ataşaţi mărimilor fizice $\vec{p}$ şi E_{tot}

În mecanica cuantică, printre relaţiile generale de corespondenţă între mărimile fizice $\{A_j\}$ şi operatorii ataşaţi $\{\hat{A}_j\}$ se găsesc şi relaţiile de corespondenţă $\{A_j\}\leftrightarrow\{\hat{A}_j\}$ cu $\{A_j\}\equiv\{\vec{p}_r, W_t^{(r)}=$ $=(E_{tot})_{rel}\}\leftrightarrow\{\hat{\vec{p}},\hat{E}\}$specificat conform:

$$(3.481)\ (a)\ \vec{p}_r\leftrightarrow\hat{\vec{p}}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\equiv-i\hbar\nabla\equiv-i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x+\frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z\right)\ \text{şi}$$

$$(b)\ W_t^{(r)}\equiv(E_{tot})_{rel}\leftrightarrow\hat{E}=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}.$$

Cu (3.481), corespondenţa dintre mărimile fizice date şi operatorii corespunzători rămâne valabilă şi prin ridicarea la puterea a doua, conform:

$$(3.482)\ (a)\ \vec{p}_r^{\,2}\equiv p_r^2\leftrightarrow\hat{\vec{p}}^{\,2}\equiv\hat{p}=-\hbar^2\nabla^2\equiv-\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\equiv-\hbar^2\Delta\ \text{şi}$$

$$(b)\ [W_t^{(r)}]^2\equiv(E_{tot})^2_{rel}\leftrightarrow\hat{E}^2=-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

3.66.2 Obținerea cuantică formală a ec. K-G

Considerând, prin (3.482), că și relația (3.480) are un corespondent cuantic tocmai în ecuația pe care trebuie să o satisfacă funcția de undă $\Psi(\{x_j\})$, la fel cum se întâmplă și în cazul ecuației Schrödinger, *operatorii* **(3.482)** ***ar trebui să acționeze asupra lui*** **$\Psi(\{x_j\})$** ***în cadrul unei ecuații,*** **care la limita necuantică ar trebui să regăsească (3.480) ca o** ***limită a corespondenței ecuație cuantică → relație clasică.***

După modelul cuantic nerelativist Schrödinger de corespondență:

(3.483) $E_{tot} \equiv 7 = \dfrac{p^2}{2m} \leftrightarrow i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$ (ecuația Schrödinger pentru particula cuantică liberă nerelativistă), reprezentând corespondența amintită, trebuie să avem și *modelul cuantic relativist al corespondenței cuantice*:

(3.484) $[W_t^{(r)}]^2 \equiv (E_{tot})^2_{rel} = c^2p_r^2 + m_0^2c^4 \leftrightarrow$ *ec. Klein-Gordon* (ec.K-G), apelând la (3.482) (a) și (b). Se obține formal:

(3.484') $[W_t^{(r)}]^2 = c^2p_r^2 + m_0^2c^4 \leftrightarrow -\hbar^2\dfrac{\partial^2\Psi(\{x_j\})}{\partial t^2} = [c^2(-\hbar^2)\nabla^2 + m_0^2c^4]\Psi(\{x_j\})$.

Gruparea ce pune în evidență operatorul D'Alembert în (3.484') rezultă împărțind (3.484') cu $c^2\hbar^2$, încât după gruparea termenilor se obține:

(3.485) $\left(\nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi(\{x_j\}) = \dfrac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi(\{x_j\})$, de unde în final avem:

(3.486) $(\Box + \alpha)\Psi(\{x_j\}) = 0$, *cu constanta fizică* α *explicitată ca* (3.487) $\alpha = -\dfrac{m_0^2c^2}{\hbar^2}$.

În (3.486) avem *tocmai ecuația cuantică relativistă Klein-Gordon* (ec.K-G) *pentru particulele cuantice cu masa de repaus nenulă* ($m_0 \neq 0$), deoarece *precizarea completă a constantei fizice* α arată prezența pătratului masei de repaus a particulei cuantice relativiste, pătrat înmulțit cu raportul $\left(\dfrac{c}{\hbar}\right)^2$ al constantelor universale $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cong 3\cdot 10^8$ m/s și $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ (cu $h \cong 6{,}626\cdot 10^{-34}$ j·s, constanta lui Planck).

3.66.3 Consecințe ale ec. K-G (3.485)-(3.486) prin $\alpha = 0 \Leftrightarrow m_0 = 0$. Ecuația D'Alembert (3.473) ca ec. K-G

(C_1) Punerea în evidență a semnificației fizico-matematice a scalarului α din ec.K-G (3.476)-(3.478) este posibilă numai în cadrul obținerii acestei ecuații pe calea operatorială a formalismului matematic al mecanicii cuantice.

(C_2) *Faptul cuantic că în ecuația* (3.485)-(3.486), ca mai bine precizata ecuație (3.476)-(3.478), s-ar considera $m_0=0$, echivalent $\alpha=0$, conduce la concluzia că *ecuația D'Alembert* (3.473) *este o ecuație de tip Klein-Gordon pentru particulele cuantice fără masă de repaus sau cu masă de repaus nulă.*

(C_3) Deoarece *particulele cuantice* cu $m_0=0$, *sunt tocmai fotonii*, atunci aceștia sunt purtătorii cuantici ai câmpului electromagnetic în propagare (sau cuantele câmpului electromagnetic).

(C_4) Conform (C_2) și (C_3), ecuația D'Alembert (3.473)-(3.475) fiind ecuația de propagare (3.4) sau (3.8)-(3.9) a câmpului electromagnetic, *cuantele câmpului electromagnetic* sau purtătorii câmpului electromagnetic în propagare sunt *fotonii*, particulele relativiste cu masa de repaus nulă.

(C_5) Din consecințele anterioare, rezultă că ec.K-G permite *evidențierea legăturii subtile dintre particulele cuantice și câmpurile fizice ale căror cuante de câmp sunt tocmai aceste particule.*

(C_6) Faptul afirmat în (C_5) devine posibil *datorită generalității ecuației Lagrange* (3.467), prin dependența (3.471) specifică, pe care o permite densitatea de lagrangeană $f_{\mathcal{L}}\left[\Psi(\{x_j\}), \left\{\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_j}\right\}\right]$.

3.67 Concluzii finale asupra ec.K-G

(C_1^f) *Precizarea completă a scalarului* α , ce apare în ec.K-G relativistă (3.476)-(3.478), *a fost realizabilă numai în forma cuantică explicită a* ec.K-G *dată de relațiile* (3.485)-(3.486), *care pleacă* nu de la funcția de undă $\Psi(\{x_j\})$descriind un câmp scalar, *ci de la* $\Psi(\{x_j\})$ *descriind starea cuantică a unei particule cuantice relativiste cu masa de repaus nenulă* ($m_0 \neq 0$).

(C_2^f) Faptul că ec.K-G a fost obținută, atât plecând de la *ecuația Lagrange generalizată* (3.467) pentru câmpul scalar $\Psi(\{x_j\})$, cât și de la starea cuantică a unei particule cu masa de repaus nenulă ($m_0 \neq 0$) [stare caracterizată și prin funcția de undă scalară $\Psi(\{x_j\})$], *pune în evidență posibila legătură dintre câmpurile fizice cuantice și particulele cuantice ce le pot reprezenta cuanta de câmp.*.

(C_3^f) *Modul cum ecuația D'Alembert* (3.473) *devine caz particular al ecuației Lagrange* (3.467), *respectiv al ecuației Klein-Gordon* (ec.K-G) (3.476)-(3.478), *iar acesta caz particular al aceleiași ecuații* (3.467) *precizat complet numai prin (3.485)-(3.486)*, justifică cel puțin două fapte remarcabile: (I) *elementele de teoria* clasică și relativistă a *câmpurilor Lagrange* susțin *utilitatea teoretică a alegerii ecuației Klein-Gordon ca subiect important de tratat în partea de* FTR a cursului de FT (de față) și (II) interdependența dintre tratarea teoretică relativistă a câmpurilor și tratarea teoretică cuantică a acestora, numai astfel având *riguros elemente de* FTR *cuantică.*

(C_4^f) Cea din urmă motivație a introducerii în elementele de FTR a ec.K-G este legată și de *ecuația cuantică relativistă Proca,* pe care o vom preciza în cele ce urmează.

3.68 Ecuația cuantică relativistă Proca între elementele de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange (ca elemente de FTR)

3.68.0 Precizare metodologică și justificativă asupra ecuației cuantice relativiste Proca între elementele de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange

Între elementele de *teoria relativistă a câmpurilor Lagrange* (ca elemente de fizică teoretică relativistă (FTR)), este necesar să se includă și *ecuația cuantică relativistă Proca,* datorită faptului că această ecuație relativistă *generalizează la nivelul tensorial, ecuația cuantică relativistă Klein-Gordon, obținută prin* (3.476)-(3.478) *pentru câmpurile scalare* și precizată complet relativist și cuantic în formele (3.485)-(3.487). Forma matematică de la care pleacă generalizarea tensorială Proca este *forma ce exprimă direct invarianța Lorentz a* ec.K-G, sau *forma covariantă* (relativist invariantă) cuadridimensională, încât, în continuare, vom da *forma covariantă a* ec.K-G. Această *formă covariantă se va obține cu ajutorul cuadriimpulsului* $\mathcal{P}(\{p_j\}) \equiv \mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4)$ (3.195) *și al invariantului relativist* (3.199) (construit ca sumă a pătratelor componentelor scalare ale cuadriimpulsului).

Obținerea efectivă a ecuației cuantice relativiste Proca se va face după obținerea ec.K-G *pentru câmpurile fizice cuadrivectoriale,* care mijlocește generalizarea tensorială a ec.K-G pentru câmpurile scalare. Acest fapt arată *completitudinea problemei câmpurilor fizice considerate prin cele trei tipuri posibile*: scalare, vectoriale/cuadrivectoriale și tensoriale/cuadritensoriale, *completitudine fizico-matematică impusă de ecuația cuantică relativistă Proca,* a cărei luare în considerare justifică necesitatea fizico-matematico-teoretică de introducere a acestei ecuații relativiste între *elementele de teoria relativistă a câmpurilor Lagrange, ca elemente de* FTR incluse în cursul nostru de FT.

3.68.1 Forma covariantă a ec. K-G dată prin componentele cuadrivectorului impuls al particulei relativiste libere cu masa de repaus nenulă

3.68.1.1 Cuadrivectorul impuls $\mathcal{P}(\{p_j\},\ j=\overline{1,4})$ al particulei libere cu $m_0 \neq 0$

Reluăm, din paragraful 3.23 (cap.V), cuadriimpulsul particulei relativiste libere, prin relația:

(3.195) $\mathcal{P}(\{p_j\}(j=\overline{1,4})) \equiv \mathcal{P}(p_1,p_2,p_3,p_4) = (\vec{p}_r, \frac{i}{c}W_t^{(r)})$, în care *energia totală relativistă* $W_t^{(r)} = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_T^2}{c^2}}}c^2$ este *energia particulei relativiste având masa de repaus nenulă* ($m_0 \neq 0$).

3.68.1.2 Invariantul relativist (3.199) construit din $\{p_j^2\}$ ($j=\overline{1,4}$)

Cum se poate vedea în cap.V (subparagraful 3.23.3), din componentele $\{p_j^2\}$ ale cuadrivectorului $\mathcal{P}$ ridicate la pătrat şi însumate rezultă *invariantul relativist*:

(3.199) $I_p \equiv \sum_{j=1}^{4} p_j^2 = -m_0c^2$, pe care îl vom utiliza în *stabilirea formei covariante a* ec.K-G *scalare*, ce va fi generalizată tensorial în sens Proca, pentru a obţine ecuaţia cuantică relativistă Proca.

3.68.1.3 Relaţia de corespondenţă între $\{p_j\}$ şi $\{\hat{p}_j\}$ ca operatorii cuantici ataşaţi componentelor cuadriimpulsului. Ecuaţia K-G covariantă prin operatorii $\{\hat{p}_j\}$ ($j=\overline{1,4}$)

Conform utilizatei corespondenţe (3.481)(a) (scrisă doar vectorial), generalizarea ei **cuadridimensională pentru $\{p_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) dă relaţia de corespondenţă:**

(3.488) (a) $p_j \leftrightarrow \hat{p}_j = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j}$ ($j=\overline{1,4}$) şi (b) $p_j^2 \leftrightarrow \hat{p}_j^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Atunci, *invariantului relativist* (3.199) *îi corespunde operatorul cuantic*:

(3.489) $\sum_{j=1}^{4} \hat{p}_j^2 \Psi(\{x_j\}) = -m_0^2c^2\, \Psi(\{x_j\})$ acţionând asupra funcţiei de undă $\Psi(\{x_j\})$, şi *permiţând în final ecuaţia* (3.490) $(\sum_{j=1}^{4} \hat{p}_j^2 + m_0^2c^2)\Psi(\{x_j\}) = 0$, *ca formă covariantă* (relativist invariantă) *a ecuaţiei Klein-Gordon scalare, de generalizat tensorial în sens Proca.*

Simpla înlocuire a operatorului $\hat{p}_j$ din (3.488) (a) în invariantul relativist (3.199), conformă cu corespondenţa matematic-cuantică (3.488) (b), *pentru a genera ecuaţia cuantică de acţiune a operatorilor* $\{\hat{p}_j^2\}$ *asupra funcţiei de undă* $\Psi(\{x_j\})$, *regăseşte ecuaţia cuantică Klein-Gordon* (ec.K-G) (3.486), cu scalarul α explicitat în *forma redusă* $\alpha' = m_0^2c^2$, datorită "absorbţiei" constantei $\hbar^2$ în expresia matematică a operatorilor $\{\hat{p}_j^2\}$, între α şi α' fiind valabilă relaţia (3.487') $\alpha = -\frac{\alpha'}{\hbar^2}$ [confruntabilă cu (3.487)], care asigură forma covariantă (3.490) a ec.K-G.

3.68.2 Forma covariantă a ec. K-G pentru câmpul cuadrivectorial $\{\Psi_s(\{x_j\})\}$ ($s=\overline{1,4}$)

3.68.2.0 Precizare metodologică

Înainte de a face o *generalizare tensorială* **a ec.K-G, până aici,** *scrisă numai pentru câmpurile fizice scalare în forma* **(3.490)** *covariantă*, **este** *necesară generalizarea* **acestei ecuaţii, mai întâi,** *pentru câmpurile cuadrivectoriale*. **Această generalizare cuadrivectorială nu va afecta formal** *operatorul din* **(3.490), ci** *doar funcţia de undă* Ψ, **care va trebui să fie de** *formă cuadrivectorială*, **cu componentele sale cuadrivectoriale transformându-se în sens Lorentz,** *conform legii* **(3.100)** *de comportare a elementelor cuadrivectorului*, **la trecerea RI $\leftrightarrows$ (RI)' de la un referenţial inerţial la altul.**

3.68.2.1Despre câmpul scalar $\Psi(\{x_j\})$ utilizat în toate considerațiile privitoare la ec. K-G

În considerațiile de până acum, *un câmp scalar caracterizat de funcția* **de undă** $\Psi(\{x_j\})$ *a fost înțeles ca definit prin proprietatea de transformare în sens Lorentz* (3.100) *a componentelor cuadrivectorului de poziție* $\mathcal{R}(\{x_j\}) = \mathcal{R}(x_1,x_2,x_3,x_4) \equiv (\vec{r},ict)$ de care depinde câmpul *scalar* $\Psi(\{x_j\})$, conform legii de transformare ce descrie matematic trecerea directă RI → (RI)' [de la referențialul inerțial RI la (RI)' în mișcare cu $\vec{v} \equiv \vec{v}_T$=const. față de RI (v. figura 3.3 (b)]:

(3.491) $(x_j)_{(RI)'} \equiv x'_j = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{jk}(x_k)_{RI} = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{jk}x_k \; (j=\overline{1,4})$, reprezentând tocmai TrLS (3.61), după precizarea coeficienților α_{jk} ai TrLG.

În această situație $\mathcal{R}(\{x_j\})$ satisface relația: $\mathcal{R}_{(RI)'} \equiv \mathcal{R}'(\{x'_j\}) = \mathcal{R}(\{x_j\}) \equiv \mathcal{R}_{RI}$ adică *cuadrivectorul de poziție* se transformă în sens Lorentz *(invarianță Lorentz)* obligând și *câmpul scalar* $\Psi(\{x_j\})$ *să aibă aceeași comportare*, adică să îndeplinească relația:

(3.492) $\Psi_{(RI)'} \equiv \Psi'(\{x'_j\}) = \Psi(\{x_j\}) \equiv \Psi_{RI}$, *asigurând covarianța ecuației* (3.490) *ca ecuație Klein-Gordon* (ec.K-G) *pentru câmpul scalar* $\Psi(\{x_j\})$.

În cazul în care *funcția de undă* Ψ *va descrie un câmp cuadrivectorial*, va trebui la rândul său să aibă componente după axele de coordonate ale spațiului Minkowski ($\mathcal{S}_M$), *fiecare componentă de tipul scalar* $\Psi(\{x_j\})$.

3.68.2.2Câmpul cuadrivectorial $\Psi[\{\Psi_s(\{x_j\})\}]\,(s=\overline{1,4})$

(a) Prin definiție, *un câmp cuadrivectorial* $\Psi[\{\Psi_s(\{x_j\})\}]$ *este definit prin comportarea Lorentz de tip* (3.100)/(3.386) *a componentelor sale* $\{\Psi_s(\{x_j\})(s=\overline{1,4})\}$, conformă cu:

(3.493) $(\Psi_s)_{(RI)'} \equiv \Psi'_s(\{x'_j\}) = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{sk}\Psi_s(\{x_j\}) = \sum_{k=1}^{4}\alpha_{sk}(\Psi_s)_{RI} \quad (s=\overline{1,4})$.

(b) Îndeplinirea condiției (3.493) în cadrul câmpului cuadrivectorial are loc și cu satisfacerea unei *condiții suplimentare de anulare a derivatelor contravariante ale* $\Psi'_s(\{x'_j\})$, pe care o omitem intenționat din două motive întemeiate: (I) aceste derivate nu intervin în reprezentările matriceale explicite din dezvoltările ulterioare și (II) precizări fizico-matematice de limbaj care complică expunerea, scopul introducerii câmpului cuadrivectorial $\Psi[\{\Psi_s(\{x_j\})\}]$ fiind acela de a *mijloci generalizarea tensorială Proca a* ec.K-G *de la nivelul câmpurilor scalare la cel al câmpurilor tensoriale*, via câmpurile cuadrivectoriale (pentru care se va scrie ec.K-G covariantă).

3.68.2.3Forma covariantă a ec. K-G pentru câmpul cuadrivectorial $\Psi[\{\Psi_s(\{x_j\})\}]\,(s=\overline{1,4})$

Formal, ec.K-G *pentru câmpul cuadrivectorial*

(3.494) $\Psi[\{\Psi_q(\{x_j\})\}] \equiv \Psi[\Psi_1(\{x_j\}),\Psi_2(\{x_j\}),\Psi_3(\{x_j\}),\Psi_4(\{x_j\})]$ *este dată prin patru ecuații de tip* (3.490), *câte una pentru fiecare din scalarii* $\{\Psi_s(\{x_j\}(j=\overline{1,4}))\}\;(s=\overline{1,4})$. Astfel, *are loc o generalizare*, de la forma (3.490) pentru câmpul scalar, *la forma*:

(3.495) $(\sum_{j=1}^{4}\hat{p}_j^2 + m_0{}^2c^2)\Psi_s(\{x_j\}) = 0 \; (s=\overline{1,4})$, care reprezintă *setul de ecuații scalare Klein-Gordon* ({ec.K-G}) *pentru câmpul cuadrivectorial* (3.494).

3.68.2.4Precizare finală asupra subparagrafului 3.68.2

Generalizarea tensorială de tip Proca a ec.K-G *la câmpurile cuadritensoriale* nu poate fi înțeleasă complet fără generalizarea cuadrivectorială (3.495), *pasul cuadrivectorial fiind necesar echivalării lui cu o formulare cuadritensorială.*

3.68.3 Ecuația cuantică Proca-ecuație pentru câmpul cuadritensorial

3.68.3.0 Observație procedurală

În locul uni câmp cuadrivectorial de tipul (3.494), este posibil să apară *un câmp cuadritensorial* reprezentat printr-un *tensor de ordinul doi antisimetric*, cum s-a putut vedea în cazul cuadrivectorului *potențial electromagnetic* $\Phi(\vec{A}, \frac{i}{c}V)$, *care este de fapt un cuadritensor de ordinul doi electromagnetic câmp* $\{\Phi(\vec{B}, -\frac{i}{c}\vec{E})\}$, în paragraful 3.51 din cap.IX. Astfel, va fi *mai convenabil un formalism cuadritensorial în locul celui cuadrivectorial*, expus până la scrierea efectivă a ec.K-G (3.495) pentru câmpurile cuadrivectoriale (3.494). Trebuie specificat faptul că ceea ce numim *ecuația Proca va fi un set de ecuații cuantice cerut de structura cuadritensorului Proca.*

3.68.3.1Considerarea unui câmp fizic cuadritensorial oarecare

Cum s-a văzut în paragraful 3.50, *un câmp fizic cuadritensorial* are elementele transformându-se după legea (3.403) $(T_{km})_{(RI)'} = T_{km}' = \sum_{j=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\alpha_{kj}\alpha_{ms}T_{js}$ $(k,m=\overline{1,4})$, atunci când se face trecerea RI → (RI)' de la un referențial inerțial la altul. În (3.403), avem legea de transformare a elementelor de matrice (4×4), ale unui tensor de ordinul doi și antisimetric în sensul dat de (3.404), valabilă și în cazul câmpurilor cuadritensoriale.

3.68.3.2Cuadritensorul de ordinul doi Proca $\{\Psi_{\mu s}(\{x_j\})\}$ $(\mu, s=\overline{1,4})$

Un câmp cuadritensorial poate fi reprezenta printr-un *cuadritensor de ordinul doi Proca cu elementele matriceale satisfăcând o relație de antisimetrie de tipul particular* (3.410) [precizând cazul general (3.404)], *generalizată la un câmp tensorial oarecare*:

(3.496) $\Psi_{\mu s}(\{x_j\}) = \dfrac{\partial\Psi_s(\{x_j\})}{\partial x_\mu} - \dfrac{\partial\Psi_\mu(\{x_j\})}{\partial x_s}$ $(\mu, s=\overline{1,4})$. Un astfel de câmp tensorial, satisfăcând prin cele 4×4=16 elemente ale sale *proprietatea de antisimetrie* (3.496), este *câmp tensorial Proca*, iar *tensorul de ordinul doi* $\{\Psi_{\mu s}(\{x_j\})\}$ $(\mu, s=\overline{1,4})$ *care îl reprezintă este un cuadritensor Proca* și a fost utilizat de *Alexandru Proca* [1897-1955] (v. ref. 102) pentru *a generaliza* ec.K-G (3.495), din forma pentru câmpul cuadrivectorial, *în forma pentru câmpul cuadritensorial.*

3.68.3.3Ecuația cuantică Proca pentru câmpul cuadritensorial de elemente (3.496)

Ținând cont de elementele de matrice (3.496), *cea mai simplă scriere pentru ecuația relativistă cuantică Proca este o generalizare tensorială a ecuației Klein-Gordon din forma cuadrivectorială* (3.495) *în forma cuadritensorială sau tensorială de ordinul doi*:

(3.497) $\sum_{\mu=1}^{4}\hat{p}_\mu^2\Psi_{\mu s}(\{x_j\}) + m_0^2c^2\Psi_s(\{x_j\}) = 0$ $(s=\overline{1,4})$, ca *ecuație cuantică pentru câmpul cuadritensorial de elemente respectând proprietatea de antisimetrie* (3.496) *a tensorului de ordinul doi* $\{\Psi_{\mu s}(x_j)\}$ $(\mu, s=\overline{1,4})$. Trebuie remarcat că, de fapt, relația (3.497) dă *un set de ecuații Proca.*

3.68.3.4Precizări și interpretări fizico-matematice asupra ecuației Proca (3.497) prin ec. K-G

(p_1) *Ecuația Proca* (3.497) *se reduce la ecuația Klein-Gordon* (3.495), atunci *când cuadritensorul* $\{\Psi_{\mu s}(x_j)\}$ $(\mu, s=\overline{1,4})$ se poate transforma într-un *cuadrivector* $\{\Psi_s(x_j)\}$ $(s=\overline{1,4})$.

(p_2) Formal, *ecuația Proca* (3.497) *prezintă o covarianță de ordinul doi*, exprimată prin respectarea legii (3.403) de transformare a elementelor tensorului de ordinul doi, atunci când se face raportarea la referențialele inerțiale RI $\leftrightarrows$ (RI)', în timp ce covarianța ec.K-G pentru câmpul cuadrivectorial (3.495) este de ordinul întâi, respectând legea de transformare (3.100)/(3.386) a componentelor tensorului de ordinul întâi care este un cuadrivector de tipul $\{\Psi'_s(x_j)\}$ ($s=\overline{1,4}$).

(p_3) Tot formal, ec.K-G pentru câmpul scalar (3.490) prezintă o covarianță de ordinul zero, prin respectarea directă a legii de transformare (3.100) pentru scalarii $\{x_j\}$ ($j=\overline{1,4}$) de care depinde câmpul scalar $\Psi(\{x_j\})$.

(p_4) Cum ec.K-G (3.490), ca formă covariantă a ec.K-G (3.486), prin specificarea (3.487), reprezintă o *ecuație relativistă pentru particulele cuantice cu masa de repaus nenulă* ($m_0\neq0$), mai trebuie specificat că *aceste particule cuantice nu posedă spin* (au spin nul).

(p_5) Ca generalizare a ec.K-G (3.486), chiar dacă generalizarea se face trecând prin forma (3.495), *ecuația cuantică Proca* (3.497) descrie și ea *mișcarea particulelor cuantice relativiste cu masa de repaus nenulă* ($m_0\neq0$) *și spin nul, numite mezoni* π (sau pioni), care sunt "purtătoarele" *câmpurilor tensoriale mezonice*.

(p_6) Ecuația (3.497), ca ecuație cuantică, a fost stabilită și publicată între anii 1934-1936 de către savantul român Alexandru Proca (1897-1955), activând ca cercetător științific în cadrul CNRS din Franța, iar *particulele cuantice pentru care ecuația Proca a făcut predicții teoretice de existență*, ca purtătoare a unor câmpuri fizice cu funcția de undă de tip cuadritensorială (numite câmpuri mezonice), *au fost descoperite experimental în 1949 în radiația cosmică*, premiul Nobel pentru prezicerea existenței mezonilor π (sau pioni) fiind acordat în 1949 japonezului Hideki Yukawa (n. 1907), care independent de Proca, în același an 1934, ca și Proca, a emis ipoteza existenței acelorași particule. Lucrările lui Proca au fost publicate în reviste de fizică prestigioase ale Occidentului și au fost cunoscute de Comitetul Nobel de la Stocholm. Recunoașterea lucrărilor lui Proca, ce au ca rezultat fundamental ecuațiile (3.497), s-a făcut și prin faptul că un autor prestigios precum *Paul Roman* (professor of Physics of Boston University) în lucrarea sa de 634 de pagini "*Introduction to Quantum Field Theory*" (John Wiley, New York, 1969), *fundamentală în teoria cuantică a câmpurilor* (TQC), *numește ecuația* (3.497) *la pagina 7, "Proca equations"*, iar *câmpul cuantic pe care particulele cuantice* [cu starea cuantică descrisă de soluțiile ecuației (3.497)] *îl generează, "Proca field", la pagina 20* (v. ref. 102).

(p_7) Și prin ecuația cuantică Proca (3.497), ca și prin ecuația cuantică Klein-Gordon (3.490) [sau prin (3.485)-(3.486)], rezultă un dublu aspect fizico-matematic implicat de *ecuația Lagrange generalizată* (3.467): (I) ecuațiile în discuție, *prin funcția de undă* Ψ *sunt ecuații de câmp* (scalar, vectorial, tensorial, ori spinorial ca în cazul ecuației cuantice Dirac a electronului) și (II) ecuațiile în discuție, *prin structura operatorului cuantic relativist ce acționează asupra funcției de undă* Ψ, sunt *ecuații ce descriu starea cuantică a unei anumite particule cuantice*.

(p_8) *Îmbinarea celor două aspecte relatate de* (p_7), *în una și aceeași ecuație cuantică relativistă*, furnizează concluzia fizico-teoretică foarte importantă că *teoria relativistă a câmpurilor fizice*, la nivel cuantic, *pune în evidență existența cuantelor de câmp*, care sunt *particulele cuantice ce cuantifică câmpurile fizice*, și, în același timp, sunt "purtătoarele" câmpului fizic în propagare.

(p_9) Ecuația cuantică relativistă pentru descrierea mișcării particulelor cuantice cu masa de repaus nenulă ($m_0\neq0$) și spin nenul (semiîntreg), cum este cazul electronului, aparține *mecanicii cuantice relativiste* (ecuația Dirac în cazul electronului) și va fi tratată în cadrul *Părții a 5^a* (*mecanică cuantică*) a cursului nostru de FT.

(p_{10}) O reluare, pe baze fizico-matematice noi, a problematicii de FTR expuse în cap.X (de față) va fi realizată în *Partea a 5^a* a cursului de FT, într-o sinteză care prin *îmbinarea formalismului matematic al modelului teoretic relativist* (MTR) *cu cel al modelului teoretic cuantic* (MTQ) va da coerență fizico-matematică unui *model teoretic cuantic relativist* (MTQR), în cadrul a ceea ce vom desemna *elemente de mecanică cuantică relativistă*.

3.69 Concluzie finală asupra capitolelor VII-X ca elemente de FTR

Capitolele VII-X, desemnate ca <Elemente de fizică teoretic relativistă (FTR)> în cadrul subpărții $P_3^{(3)}$ a *Părții a 3^a* a cursului de FT, *realizează o extindere a fizicii teoretice relativiste, expusă în capitolele* IV-V [cu bază teoretică în cap.0 și I$\rightarrow$III] *ca mecanică teoretică relativistă*, extinderea vizând *expunerea* (formularea, dezvoltarea şi sintetizarea) *relativist-restrânsă*, pe baza principiilor fundamentale ale teoriei relativităţii restrânse (TRR/TRS), *a unor ramuri ale fizicii teoretice clasice*, precum: mecanica analitică, termodinamica teoretică, electrodinamica clasică şi teoria câmpurilor fizice Lagrange scalare, din reformularea lor relativistă rezultând cele ce au fost numite *elemente de*: *mecanică analitică relativistă, termodinamică relativistă, electrodinamică relativistă*, respectiv *teoria relativistă a câmpurilor*, reuniunea tuturor permiţând să afirmăm elaborarea unei importante modalităţi de modelare teoretică fizico-matematică a fizicii.

LISTA FIGURILOR din *Partea a 3ª* a cursului de FT (FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ)

BIBLIOGRAFIE *Partea a 3a* <FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ>

I. Bibliografie istorică

1. **Galileo Galilei,** *"Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernico"* ("Dialog asupra celor două mari sisteme ale lumii, ptolemaic şi copernician"), Florenţa, 1932.
2. **Galileo Galilei,** *"Discorsi e demonstraţioni matematiche intorno a due nove scienze, attentati alla mecanica ed i movimenti locali"*, Leida, 1638 (tradusă în limba română ca *"Dialoguri asupra ştiinţelor noi"*, Victor Marian, Maria Popescu, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1961).
3. **Isaac Newton,** *"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica"*, London, 1687 (traducere în limba română *"Principiile matematice ale filosofiei naturale"*, Victor Marian, Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1956). Corolarul V.
4. **James Clerk Maxwell,** *"Treatise on Electricity and Magnetism"*, Oxford, 1873.
5. **Albert Abraham Michelson,** *"Mişcarea relativă a Pământului în eterul propagator de lumină"* (<"American Journal of Sciences">, august, 1881).
6. **A. A. Michelson, Edward Williams Morley,** *"Despre mişcarea relativă a Pământului şi eterul propagator de lumină"* (<"American Journal of Sciences">, august, 1887).
7. **Henrik Antoon Lorentz,** *"Michelson's Interference Experiment"* (din *"Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern"*, Leiden, 1895 (§§ 89-22)).
8. **H. A. Lorentz,** *"Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than that of light"* (<"Preceed. Of The Acad. of Sciences of Amsterdam">, 6, 1904, p. 809).
9. **Albert Einstein,** *"Zur Elektrodynamik bewegter Körper"* (*"Asupra electrodinamicii corpurilor în mişcare"*)(<"Annalen der Physik", IV, vol. 17, p. 891-921, 30 iunie 1905>).
10. **Jules Henri Poincaré,** *"Despre dinamica electronului"* (<"Rendiconti del Circolo matematico di Palermo">, vol. XXI, p.129, 23 iulie 1905).
11. **A. Einstein,** *"Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?"* (*"Depinde inerţia unui corp de energia înmagazinată în el?"*) (<"Annalen der Physik", IV, vol. 17, p. 639-641, 1905>).
12. **A. Einstein,** *"Über einem die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunct"* (<"Annalen der Physik">, vol. 17, p.132/148 (1905)).
13. **A. Einstein,** *"Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption"* (<"Annalen der Physik">, vol. 20, p.199-206 (1906)).
14. **Hermann Minkowski,** *"Ecuaţiile de bază pentru procesele electromagnetice din corpurile în mişcare"*, Conferinţă la Universitatea din Göttingen, Göttingen, 1907.
15. **H. Minkowski,** *"Space and Time"*, an Address delivered at the 80th Assembly of German Natural Scientists and Physicians, at Colihne, 2 September 1908.
16. **H. Minkowski,** "Raum und Zeit", Phys. Zeitschrift 10, 104 (1909).
17. **A. Einstein,** *"Über der Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes"* (*"On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light"*), "Annalen der Physik", vol. 35, p.898-908 (1911).
18. **A. Einstein,** *"Die Grundlage der allegmeinen Relativitätstheorie"* (*"The Foundation of The General Theory of Relativity"*), "Annalen der Physik", vol. 49, p. 769-822 (1916).
19. **A. Einstein,** *"Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie"* ("Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity"), <"Sitzung. Der Prenss. Acad. d. Wissenschaften"> (1917).
20. **A. Einstein,** *"Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Role?"* (<"Sitzung. Der Preuss. Acad. d. Wissenschaften"> ,1919).
21. **A. Einstein,** *"The Meaning of Relativity"* (Stafford Conferences of Albert Einstein, Princeton University, Princeton Univ. Press, 1922.
22. **H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl,** *"The Principle of Relativity"* (A colection of original memories on the special and general theory of relativity), dover Publication, Dover, 1923 (first published), ediţia a 2a în 1952 (New York, Dover)

II. Bibliografie de informare şi metodologică

23. **M. Bunge,** "*Foundations of Physics*", Springer-Verlag, Berlin, 1967, chap. 4.
24. **M. Bunge,** "*Philosophy of Physics*", Reidel, Dordrecht-Holland, 1973, chap. 9.
25. **R. Carnap,** "*Philosophical Formulations of Physics*", Basic Books, New York, 1966 (P. III, § 15 şi 16).
26. **K. G. Denbigh,** "*Three Concepts of Time*", Springer-Verlag, Berlin, 1981, chap. 3.
27. **A. Einstein, L. Infeld,** "*L'évolution des idées en physique*", Payot, Paris, 1963.
28. **A. Einstein,** "*Sur L'Electrodinamique des corp en movement*"*"L'inertie d'un corp dépendent de sa capacité d'énergie?" (traduit par M Solovine avec "Annalen der Physik IV, vol. 17 (1905))", Gauthier-Villars, Paris (fără an).
29. **A. Einstein,** "*Teoria relativităţii (O expunere elementară)*", Ed. Humanitas, Bucureşti, 1992 (trad. din limba germană).
30. **A. Einstein,** "*Cum văd eu lumea*", Ed. Humanitas, Bucureşti, 1994 (traducere din limba germană şi engleză), cap.II.
31. **Stephen W. Hawking,** "*Scurtă istorie a timpului*", Ed. Humanitas, Bucureşti, 1994 (trad. din limba engleză).
32. **St. W. Hawking,** "*Visul lui Einstein şi alte eseuri*", Ed. Humanitas, Bucureşti, 1997 (trad. din limba engleză).
33. **H. Hertz,** "*Equations électrodinamique fondamentales des corps en movement et des corps en repos*", Gauthier-Villars, Paris (trad. din limba germană), fără an.
34. **E. H. Hutten,** "*The language of modern Physics*", George Allen & Unwin Ltd, London, 1956, chap.3.
35. **E. H. Hutten,** "*Ideile fundamentale ale fizicii*", Ed. Enciclopedică Română, Bucureşti, 1970, cap. 3 (trad din limba engleză).
36. **A. A. Michelson, G. W. Morley,** "*Expériences sur la vitesse de la lumière*", Gauthier-Villars, Paris, fără an (trad. din limba engleză).
37. *** "*Nobel Lectures Physics (1900-1921)*", Elsevier Publishing Comp., Amsterdam, fără an, p. 477-492 ["*Physics 1921- Albert Einstein << for his services to Theoretical Physics and especially for his discovery of the law of the fotoelectric effect>>*"].
38. **J. H. Poincaré,** "*Ştiinţă şi ipoteză*", Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986, P.III, cap. VII (trad. din limba franceză).
39. **J. H. Poincaré,** "*Ştiinţă şi metodă*", Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1998, Cartea a 2ª (Cap.I), Cartea a 3ª (Cap.II) (trad. din limba franceză).
40. **H. -J. Schmidt,** "*Stable axioms in Physical Theories*", în vol. "*Structures and Approximations in Physical Theories*" (Ed. A. Hartkämper, H. -J. Schmidt), Plenum Press, New York, 1981.
41. **M. A. Tonnelat,** "*Histoire du principe de relativité*", Flammarion, Paris, 1971.
42. **J. Wickert,** "*Albert Einstein*", Seria Universitas-Ed. Teora, Bucureşti, 1998 (trad. din limba germană).

III. Bibliografie curentă

43. **Annequin et Bontigny,** "*Exercices de sciences physiques-mécanique relativiste*", Librairie Vuibert, Paris, 1978 (cinématique et dinamique relativiste).
44. **L. Artsimovitch, S. Loukianov,** "*Mouvement des particules chargées dans des champs électriques et magnétiques*", Edition Mir, Moscow, 1975, chap.IV.
45. **Şt. Bălan,** "*Complemente de mecanică teoretică*", Ed. Did. şi Ped. Bucureşti, 1975 (P.II, cap. 15-16).
46. **N. Bărbulescu,** "*Bazele fizice ale relativităţii einsteiniene*", Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1975.
47. **I. Beju, E. Soos, P. P. Teodorescu,** "Tehnici de calcul tensorial euclidian cu aplicaţii", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1977 (cap. 7 şi 8).
48. **P. Bergman,** "*An Introduction to the Theory of Relativity*", New York, 1942.
49. **H. A. Bethe, E. E. Salpeter,** "*Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms*", Springer-Verlag, Berlin, 1957.
50. **J. D. Bjõrken, S. D. Drell,** "*Relativistic Quantum Mechanics*", McGraw-Hill, New York, 1964.
51. **D. Bõhm,** "*The Special Theory of Relativity*", Benjamin, New York, 1965.

52. **M. Born**, "*Teoria relativității a lui Einstein*", Ed. Științifică, București, 1969.
53. **E. Corinaldesi, F. Strucchi**, "*Relativistic Wave Mechanics*", North-Holland, Amsterdam, 1963.
54. **E. M. Corson**, "*Introduction to tensors, spinors and relativistic wave equations*", Blackie & Son, London, 1954.
55. **O. Costa de Beauregard**, "*La Théorie de la relativité restreinte*", Masson & Cie, Paris, 1949.
56. **O. Costa de Beauregard, R. Daudel, P. Hillion, B. Jouvet, S. Kichenassamy** "*Relativité et Quanta-Les grandes théories de la phisique moderne*", Masson & Cie, Paris, 1968 (P.I).
57. **P. A. M. Dirac**, "*The principles of quantum mechanics*", Clarendon Press, Oxford, 1958.
58. **P. A. M. Dirac**, "*General Theory of Relativity*", John Wiley, New York, 1975, chap.1.
59. **T. P. Das**, "*Relativistic Quantum Mechanics of Electrons*", Harper & Row, New York, 1973, chap.1.
60. **L. Dragoș**, "*Principiile mecanicii analitice*", Ed. Tehnică, București, 1976 [Anexele 2 (Teoria tensorilor de ordinul doi) și 3 (Teoria câmpurilor).
61. **M. Drăgan**, "*Introducere matematică în fizica teoretică modernă*", Ed. Tehnică, București, 1958, vol.II.
62. **A. Einstein**, "*The Meaning of Relativity*", Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1956.
63. **A. Einstein**, "*Teoria Relativității*", Ed. Tehnică, București, 1957 (trad. din limba engleză după "*The Meaning of Relativity*" (1956)).
64. *** "Encyclopedia Britannica", London, 1994-1998 (articles: "Albert Einstein", "Relativity", "relativistic mecanics", "applications of relativistic principles", "Isaac Newton").
65. **R. P. Feynman**, "*Fizica modernă*", vol.I, Ed. Tehnică, București, 1969 (trad din limba engleză) (cap.15-17).
66. **V. A. Fock**, "*The theory of space, time and gravitation*", Pergamon Press, New York, 1959.
67. **V. A. Fock**, "*Teoria spațiului și timpului și gravitației*", Ed. Acad. RPR, 1962 (trad. din limba rusă).
68. **V. A. Fock**, "*Fundamentals of Quantum Mechanics*", Mir Publishers, Moscow, 1978, P.V.
69. **W. Heitler**, "*The Quantum Theory of Radiation*", Clarendon Press, Oxford, 1964.
70. **C. Iacob**, "*Mecanică teoretică*", Ed. Did. Și Ped., București, 1980 (P_I, Elemente de algebră și analiză vectorială și tensorială).
71. **N. Ionescu-Palas**, "*Introducere în mecanica teoretică modernă*", Ed. Acad. RSR, București 1969.
72. **N. Ionescu-Palas**, "*Relativitate generală și cosmologie*", Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1980, cap.III.
73. **J. Jackson**, "*Classical Electrodynamics*", John Wiley, New York, 1975.
74. **N. E. Kocin**, "Calcul vectorial și tensorial", Ed. Tehnică, București, 1954.
75. **V. Kourganoff**, "*Initiation à la théorie de la relativité*", Press. Univ. de France 4, 1964.
76. **L. D. Landau, E. M. Lifchitz, V. Berestetscki, L. Pitayevski**, "Théorie quantique rèlativiste" (P_I),* Mir, Moscow, 1972 (Introduction, chap.IV).
77. **L. D. Landau, L. Pitayevski**, "Théorie quantique rèlativiste" (P.II), Mir, Moscow, 1973 (Avant-propos).
78. **L. D. Landau, E. M. Lifșiț**, "*Teoria câmpurilor*", Ed. Tehnică, București, 1963 (trad. din limba rusă), cap.I-IV.
79. **A. Logunov, M. Mestvirishvili**, "*The Relativistiv Theory of Gravitation*", Mir, Moscow, 1989 (Introduction).
80. **A. J. McConnell**, "*Aplication of tensor analysis*", Dove Publ., New York, 1957 (cap.1).
81. **A. Messiah**, "Mecanică cuantică" (vol.2 (P.a5^a), cap.XX), Ed. Științifică, București, 1974 (trad. din limba franceză).
82. **G. C. Moisil**, (a) "*Lecții de fizică (3. Mecanică cuantică)*", Litografia IPB, București, 1978, cap. 11 (Ec. Klein-Gordon), Anexele 5 și 6.
   (b) "*Termodinamica*", Ed. Academiei RSR, București, 1988, cap. 3 și cap. 5.
83. **G. C. Moisil, E. Curatu**, "*Optică-Teorie și aplicații*", Ed. Tehnică, București, 1986 (P_I, cap. 9 (cuantificarea câmpului electromagnetic-fotonii)).
84. **C. Möller**, "*Relativistic Thermodynamics*", Mat. Phys. Medd. Dan. Vid. Solsk. **36** (1), 1967.
85. **C. Möller**, "*The Theory of Relativity*", Clarendon Press, Oxford, 1972.
86. **Ph. M. Morse, H. Feschbach**, "*Methods of Theoretical Physics*", McGraw-Hill, New York, 1953 (P_I, chap.1, § 17) (Lorentz Transformation, Four-vectors, Spinors).

87. **C. Moţoc, M. Badea**, "*Mecanica. Teoria relativităţii restrânse. Termodinamica*", Litografia IPB, Bucureşti, 1978.
88. **V. Novacu**, "*Electrodinamica*", Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1966, P_3 şi P_4.
89. **V. Novacu**, "*Teoria cuantică a câmpurilor*", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1984, cap. I, III şi V.
90. **Y. V. Novozhilov, Y. A. Yappa**, "*Electrodynamics*", Mir, Moscow, 1981, chap.2.
91. **V. Ougarov**, "*Théorie de la relativité restreinte*", Mir, Moscou, 1979.
92. **O. Onicescu**, "*Mecanica*", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1969 (Partea a doua).
93. **O. Onicescu**, "*Mecanica invariantivă şi cosmologia*", Ed. Academiei RSR, 1974, cap. I şi VII.
94. **W. Pauli**, "*Theory of Relativity*", Pergamon Press, New York, 1958.
95. **I. I. Plăcinţeanu**, "*Mecanica vectorială şi analitică*", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958, cap. IV şi V.
96. **I. M. Popescu**, (a) "*Fizica*", vol. I (cap. II), Ed. Did şi Ped., Bucureşti, 1982.
(b) "*Mecanica analitică*", Ed. Tehnică, Bucureşti 1998, cap. 6.
97. **I. N. Popescu**, "*Gravitatia (Pledoarie pentru o nouă teorie a gravitaţiei)*", Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1982, cap. 4 şi 5.
98. **Rekka Pyykkö**, "*Relativistic theory of atoms and molecules (A bibliography 1916-1985)*", Springer-Verlag, Berlin, 1986 (vol. 41, "*Lectures notes in chemistry*").
99. **R. Roşca**, "*Varietăţi izotrope şi pseudoizotrope incluse într-o varietate relativistă*", Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1972 (Anexa I)
100. **M. E. Rose**, "*Relativistic Electron Theory*", John Wiley, New York, 1961
101. **P. Roman**, "*Introduction to Quantum Field Theory*", John Wiley, New York, 1969, P_I (Lagrangian Field Theory).
102. **P. Roman**, "*Advanced Quantum Theory*", Addison-Wesley, Paolo Alto, 1969, chap. 2 (ec. Klein-Gordon).
103. **B. Rozenfeld**, "*Espaces multidimensionnels*", Nauka, Moscou, 1996.
104. **R. D. Sand**, "*Relativistic Mechanics (Special Relativity and Classical Particle Dynamics*", Benjamin, New York, 1970.
105. **V. Scridonesi-Călin**, *Teza de doctorat (Cap.4 "Generalizarea relativistă a formalismului cuantic Roothaan"*), Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 1993.
106. **V. Scridonesi-Călin, A. R. Ionescu**, "Elemente de fizică teoretică (I)", Ed. Universităţii din Bucureşti, 1998 (cap. V, § 2.36, p. 162-163).
107. **L. Sofonea**, "*Principii de invarianţă în teoria mişcării*", Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1973.
108. **L. Sofonea**, "*Geometrii reprezentative şi teorii fizice*", Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1984, cap.V.
109. **P. Sterian**, "*Mecanica relativistă şi noţiuni de teoria gravitaţiei*", Ed. Tehnică, Bucureşti, 1979.
110. **E. Taylor, J. A. Wheeler**, "*Spacetime Physics*", Freeman, San Francisco, 1966.
111. **C. Teleman, M. Teleman**, "*Elemente de teoria grupurilor cu aplicaţii în topologie şi fizică*", Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973, cap.5.
112. **E. Tocaci**, "*Mecanica relativistă. Timpul şi inerţia*", Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980, Partea A.
113. **R. C. Tolman**, "*Relativity, Thermodynamics and Cosmology*", Dover Publ. Inc., New York, 1987.
114. **M. -A. Tonnellat**, "Les principles de la théorie électromagnetique et de la relativité", Masson, Paris, 1959.
115. **Ş. Ţiţeica**, (a) "*Mecanica cuantică*", Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1984, cap.26.
(b) "*Termodinamica*", Ed. Academiei RSR, Bucureşti, 1982, cap. 2 şi cap.4.
116. **M. Vasiu**, "*Fizică teoretică*", Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1970, P_3.
117. **M. Vasiu**, "*Electrodinamica şi teoria relativităţii*", Ed. Did. Şi Ped., Bucureşti, 1979, cap.III.
118. **Gh. Vrânceanu, C. Teleman**, "*Geometria euclidiană, geometrii neuclidiene, teoria relativităţii*", Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, cap. IV.
119. **C. Vrejoiu**, "*Electrodinamică şi teoria relativităţii*", Ed. Did. Şi Ped. R. A., Bucureşti, 1993, cap.II.

INDICE general de noțiuni și concepte în Partea a 3^a <FIZICĂ TEORETICĂ RELATIVISTĂ>

R

S

INDICE de nume

I

J

K

L

M

N

O

P

Tiparul s-a executat sub cda 627/1999
la Tipografia Editurii Universității din București

SBN: 973-575-401-0

Lei 44600