UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

Seminar științific

SPAȚII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

Conducător științific :
Prof. dr. doc. ROMULUS CRISTESCU
Membru corespondent al Academiei
R. S. România

Nr. 3 (1982)

BUCUREȘTI — 1982

Seminar ştiinţific

SPATII LINIARE ORDONATE TOPOLOGICE

Conducător ştiinţific

PROF. DR. DOC. ROMULUS CRISTESCU

Membru corespondent al Academiei R.S.R.

Nr. 3 (1982)

Tipografia Universităţii din Bucureşti

P R E F A T A

Scopul publicației de față, acum la numărul 3 , este de a prezenta unele rezultate din acele domenii ale analizei funcționale care au constituit obiectul preocupărilor membrilor seminarului științific de Spații liniare ordonate topologice. Funcționînd de 15 ani la Facultatea de Matematică din București, seminarul menționat reunește un număr însemnat de matematicieni din diverse centre universitare din țară. La el au participat și unii matematicieni străini veniți la docotorat sau specializare.

In anul 1980 a fost organizat primul colocviu național al acestui seminar, care s-a desfășurat la Craiova între 25 și 27 octombrie. Au urmat al doilea colocviu desfășurat la Brașov (13-15 iunie 1981) și al treilea colocviu la Craiova (15-17 mai 1982).

Prezentul număr conține cîteva articole al căror conținut a făcut obiectul conferințelor la cel de al treilea colocviu. Sînt incluse de asemenea rezumatele unor comunicări prezentate la același colocviu.

CUPRINS

Articole

Comunicări (rezumate)

Asupra unor topologii local solide pe spații liniare ordonate

de

Romulus Cristescu

In acest articol se presintă unele din principalele resultate privind topologiile local solide semi (ω)-continue pe spații liniare reticulate, precum și cîteva rezultate privind topologiile semi (o)-continue, sau topologiile care satisfac "condiția (A_0)". Prin definiție, o topologie liniară pe un spațiu liniar reticulat, satisface condiția (A_0), dacă orice șir crescător și majorat de elemente ale spațiului, este un șir (τ)-Cauchy. Această condiție este necesară și suficientă pentru ca o topologie local solidă și semi (ω)-continuă, să fie (ω)-continuă.

Conținutul acestui articol se bazează pe rezultatele autorilor trecuți în bibliografia de la sfîrșitul articolului.

Terminologia utilizată este cea din [9].

Pentru diverse noțiuni de teoria spațiilor liniare ordonate a se vedea și [10].

§ 1. Topologii liniare pe spații liniare reticulate

Toate topologiile considerate în acest articol vor fi presupuse topologii separate. Notăm prin N mulțimea numerelor naturale și prin R mulțimea numerelor reale. In cazul unui spațiu liniar ordonat topologic, vom indica prin litera o referirea la ordine (de exemplu: mulțime (o)-mărginită) și prin τ referirea la topologia dată pe spațiul considerat (de exemplu: mulțime (τ)-mărginită).

In tot articolul vom nota cu X un spațiu liniar reticulat arhimedian.

Definiția 1. O mulțime $A \subset X$ se numește mulțime Fatou, dacă este solidă şi dacă pentru orice şir generalizat crescător $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente pozitive din A, pentru care există $x=\bigvee_{\delta\in\Delta} x_\delta$ rezultă $x\in A$. Dacă şirul generalizat se înlocuieşte cu un şir ordinar atunci A se numeşte <u>mulţime</u> σ <u>-Fatou</u>.

<u>Definiţia 2</u>. Se numeşte <u>topologie Fatou</u> pe X, orice topologie liniară τ pe X pentru care există o bază de vecinătăţi ale originii formată din mulţimi Fatou. Dacă mulţimile Fatou se înlocuiesc cu mulţimi σ -Fatou, atunci τ se numeşte <u>topologie</u> σ <u>-Fatou</u>.

Topologiile Fatou (resp. σ -Fatou) se mai numesc şi <u>topologii local solide semi</u> (ω)<u>-continue</u> (resp. semi (o)-continue).

<u>Definiţia 3</u>. Se numeşte <u>seminormă Fatou</u> pe X, orice seminormă solidă p pe X care are proprietatea: dacă $0\le x_\delta \uparrow_{\delta\in\Delta} x$, atunci $p(x_\delta)\uparrow_{\delta\in\Delta} p(x)$. Dacă şirul generalizat se înlocuieşte cu un şir ordinar, atunci p se numeşte <u>seminormă</u> σ <u>-Fatou</u>.

<u>Observaţia 1</u>. Se poate arăta că dacă p este o seminormă solidă pe X, atunci condiţia ca p să fie o seminormă Fatou este echivalentă cu condiţia: dacă $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un şir generalizat de elemente din X şi dacă există $\{v_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ cu $|x_\delta - x|\le v_\delta$, $\forall\delta\in\Delta$ iar $v_\delta \downarrow_{\delta\in\Delta} 0$, atunci

$$p(x)\le \underline{\lim}_{\delta\in\Delta}\, p(x_\delta)$$

Analog, o seminormă solidă p pe X este o seminormă σ -Fatou, dacă şi numai dacă

$$x=(o)\text{-}\lim_{n\in N} x_n \Longrightarrow p(x)\le \underline{\lim}_{n\in N}\, p(x_n)$$

2. O topologie local convexă pe X este o topologie Fatou (resp. σ -Fatou) dacă şi numai dacă este definită de o mulţime de seminorme Fatou (resp. σ -Fatou).

<u>Definiţia 4</u>. O topologie liniară τ pe X satisface <u>condiţia</u> (A_0), dacă orice şir crescător şi majorat de elemente pozitive din X este (τ)-Cauchy.

Observația 3. Dacă o topologie liniară τ pe X satisface condiția (A_0), atunci orice șir generalizat crescător și majorat de elemente pozitive din X este (τ)-Cauchy.

Intr-adevăr, fie $0 \leq x_\delta \uparrow_{\delta \in \Delta}$ și $x_\delta \leq y$, $(\forall \delta \in \Delta)$. Dacă $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ nu ar fi (τ)-Cauchy, atunci fie W o vecinătate a originii astfel ca pentru orice $\delta \in \Delta$ să existe $\delta', \delta'' \geq \delta$ cu $x_{\delta'} - x_{\delta''} \notin W$. Prin inducție, putem obține un șir crescător de indici $\{\delta_n\}_{n \in N}$ așa ca $x_{\delta_{n+1}} - x_{\delta_n} \notin W$ ceea ce contrazice faptul că X satisface condiția (A_0).

Teorema 1. Dacă τ este o topologie local solidă pe X, următoarele condiții sînt echivalente:

(i) Topologia τ este (ω)-continuă,

(ii) Topologia τ este Fatou și satisface condiția (A_0).

Demonstrație. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Dacă topologia τ este (ω)-continuă, atunci orice mulțime solidă și (τ)-închisă este o mulțime Fatou. De aici rezultă că τ este o topologie Fatou.

Fie acum $0 \leq x_n \uparrow_{n \in N}$ și $x_n \leq y_0$, $(\forall n \in N)$. Să notăm cu A mulțimea majorantelor șirului $\{x_n\}_{n \in N}$ și fie

$$B = \{ y - x_n \mid y \in A,\ n \in N \}$$

Evident $B \subset X_+$. Fie acum z un minorant oarecare al lui B. Din $z \leq y - x_n$, $\forall y \in A, \forall n \in N$, rezultă $y - z \in A$. Prin inducție, obținem $y - mz \in A$, $\forall m \in N$, $\forall y \in A$. In particular, $x_1 \leq y_0 - mz$, $\forall m \in N$, deci $mz \leq y_0 - x_1$, $\forall m \in N$. Spațiul fiind arhimedian rezultă $z \leq 0$. Deci $\inf B = 0$. Mulțimile A și B fiind dirigate la stînga, există un șir generalizat $\{y_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de elemente din A, astfel ca, notînd $\Lambda = \Delta \times N$ și $z_\lambda = y_\delta - x_n$ pentru $\lambda = (\delta, n)$, să avem $z_\lambda \downarrow_{\lambda \in \Lambda} 0$. Rezultă, prin ipoteză, $(\tau)\text{-}\lim_{\lambda \in \Lambda} z_\lambda = 0$. Fie W o vecinătate oarecare a originii și W_0 o vecinătate echilibrată a originii așa ca $W_0 + W_0 \subset W$. Fie $\lambda_0 = (\delta_0, n_0) \in \Lambda$ așa ca $z_\lambda \in W_0$ dacă $\lambda \geq \lambda_0$. Dacă $n \geq n_0$, atunci din

$$x_n-x_m=(x_n-y_{\delta_0})+(y_{\delta_0}-x_m)\in W_0+W_0\subset W$$

rezultă că $\{x_n\}_{n\in N}$ este un şir (τ)-Cauchy.

(ii)$\Rightarrow$(i). Fie $x_\delta\downarrow_{\delta\in\Delta} 0$. Cu condiţia (A_0) rezultă că $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un şir generalizat (τ)-Cauchy. Intr-adevăr, în caz contrar, fie W_0 o vecinătate a originii astfel încît pentru orice $\delta\in\Delta$ să existe $\delta',\delta''\geqslant\delta$ cu $x_{\delta'}-x_{\delta''}\notin W_0$. Prin inducţie se poate obţine un şir crescător de indici $\{\delta_n\}_{n\in N}$ astfel încît $x_{\delta_{n+1}}-x_{\delta_n}\notin W_0$, $\forall n\in N$. Avem $0\leq x_{\delta_1}-x_{\delta_n}\uparrow$ şi $x_{\delta_1}-x_{\delta_n}\leq x_{\delta_1}$, dar $\{x_{\delta_1}-x_{\delta_n}\}_{n\in N}$ nu este un şir (τ)-Cauchy, ceea ce contrazice condiţia (A_0).

Fie acum W o vecinătate Fatou oarecare a originii. Există deci $\delta_0\in\Delta$ aşa ca $x_{\delta'}-x_{\delta''}\in W$, dacă $\delta',\delta''\geqslant\delta_0$. Pentru un indice $\delta'\geqslant\delta_0$ avem

$$0\leq x_{\delta'}-x_{\delta''}\uparrow_{\delta''\geqslant\delta'} x_{\delta'}$$

deci $x_{\delta'}\in W$, dacă $\delta'\geqslant\delta_0$. Rezultă $(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta=0$, adică topologia τ este (ω)-continuă.

<u>Observaţia 4</u>. Dacă X este un spaţiu liniar reticulat topologic, (τ)-complet şi cu topologia (ω)-continuă, atunci X este complet reticulat.

Intr-adevăr, dacă $0\leq x_\delta\uparrow_{\delta\in\Delta}$ şi $x_\delta\leq a$, $(\forall\delta\in\Delta)$, atunci cu teorema 1 şi Observaţia 3, rezultă că $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este (τ)-Cauchy. Spaţiul X fiind (τ)-complet, există $x=(\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ şi avem $x_\delta\uparrow_{\delta\in\Delta} x$ (căci spaţiul are con închis).

<u>Exemple</u> (1). Pe spaţiul $C([0,1])$ (al funcţiilor reale continue definite pe segmentul $[0,1]$) înzestrat cu ordinea punctuală, topologia dată de norma obişnuită este semi (ω)-continuă.

(2) Fie $B(T)$ spaţiul liniar complet reticulat (cu ordinea punctuală) al funcţiilor reale mărginite, definite pe o mulţime infinită T. Topologia convergenţei punctuale pe $B(T)$ este o topologie (ω)-continuă, iar topologia dată de norma obişnuită este semi (ω)-continuă, dar nu este (ω)-continuă.

(3) Fie T o mulţime oarecare (nevidă) şi

$c_0(T)=\left\{x:T\longrightarrow R \,\middle|\, \{t\in T \mid |x(t)|\geq\varepsilon\}\text{ finită}, \forall\varepsilon>0\right\}$.

Cu operaţiile obişnuite şi ordinea punctuală $c_0(T)$ este un spaţiu liniar complet reticulat, iar formula

$$\|x\|=\sup\left\{|x(t)| \,\middle|\, t\in T\right\}$$

defineşte o normă solidă şi (ω)-continuă pe $c_0(T)$ (faţă de care spaţiul este şi complet).

(4) Să considerăm spaţiul (l^2) cu ordinea şi norma obişnuite. Topologia normei este solidă şi (ω)-continuă. Dacă $\mathcal{R}((l^2))$ este mulţimea operatorilor regulaţi care aplică (l^2) în el însuşi iar $\mathcal{L}((l^2))$ mulţimea operatorilor liniari (τ)-continui (care aplică (l^2) în el însuşi), atunci $\mathcal{R}((l^2))\subset\mathcal{L}((l^2))$. Cu operaţiile şi ordinea obişnuite, $\mathcal{R}((l^2))$ este un spaţiu liniar complet reticulat, dar restricţia la acest spaţiu, a normei obişnuite de pe $\mathcal{L}((l^2))$, nu este o normă Fatou.

§ 2. Unele proprietăţi ale topologiilor Fatou

<u>Teorema 2</u>. Dacă X este înzestrat cu o topologie Fatou τ, atunci există o topologie Fatou $\tilde{\tau}$ şi numai una pe extensia Dedekind $\tilde{X}$ a lui X, aşa ca $\tilde{\tau}/_X=\tau$

<u>Demonstraţie</u>. Fie $\mathcal{W}$ o bază de (τ)-vecinătăţi Fatou ale originii în X. Pentru orice $V\in\mathcal{W}$ să punem

$$\tilde{V}=\left\{y\in\tilde{X} \,\middle|\, \exists\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}\subset V,\ 0\leq x_\delta\uparrow_{\delta\in\Delta}|y|\right\}$$

Are loc egalitatea

$$\tilde{V}=\left\{y\in\tilde{X} \,\middle|\, 0\leq x\leq|y|,\ x\in X\Longrightarrow x\in V\right\}\qquad(1)$$

Intr-adevăr, dacă $y\in\tilde{V}$, atunci $0\leq x_\delta\uparrow|y|$ cu $x_\delta\in V$; dacă $0\leq x\leq|y|$ cu $x\in X$, atunci $0\leq x_\delta\wedge x\uparrow x$ iar $x_\delta\wedge x\in V$ (căci V este solidă), de unde $x\in V$, căci V este mulţime Fatou. Reciproc, dacă $y\in\tilde{X}$, $0\leq x\leq|y|$ şi $x\in X$ implică $x\in V$, atunci din $0\leq x_\delta\uparrow|y|$ cu $x_\delta\in X$ rezultă, prin ipoteză, $x_\delta\in V$, deci $y\in\tilde{V}$.

Pentru orice $V\in\mathcal{W}$, mulţimea $\tilde{V}$ este absorbantă şi solidă, după cum se verifică cu uşurinţă. Dacă $V, V_0, V_1, V_2\in\mathcal{W}$

atunci

$$\widetilde{V_1 \cap V_2} \subset \widetilde{V_1} \cap \widetilde{V_2}$$

$$V_0 + V_0 \subset V \Rightarrow \widetilde{V_0} + \widetilde{V_0} \subset \widetilde{V}$$

Dacă $0 \leq y_\delta \uparrow y$ în $\widetilde{X}$ cu $y_\delta \in \widetilde{V}$, atunci pentru orice y_δ, există un şir generalizat $\{a_{\delta\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda(\delta)}$ de elemente din $V \cap X_+$ astfel încît $a_{\delta\lambda} \uparrow_\lambda y_\delta$. Pentru orice $\delta_i \in \Delta$ şi $\lambda_i \in \Lambda(\delta_i)$, $(i=1,2,\ldots,n)$ avem (în baza lui (1)) $\bigvee_{i=1}^{n} a_{\delta_i \lambda_i} \in V \cap X_+$ iar mulţimea elementelor de forma $\bigvee_{i=1}^{n} a_{\delta_i \lambda_i}$ este dirijată la dreapta. Deci y se poate reprezenta ca marginea superioară a unui şir generalizat de elemente pozitive din V. Prin urmare $y \in \widetilde{V}$.

In concluzie, sistemul $\widetilde{\mathcal{W}} = \{\widetilde{V} | V \in \mathcal{W}\}$ este o bază de vecinătăţi ale originii pentru o topologie Fatou $\widetilde{\tau}$ pe $\widetilde{X}$ şi evident $\widetilde{\tau}|_X = \tau$.

Fie acum τ' o topologie Fatou pe $\widetilde{X}$ cu $\tau'|_X = \tau$. Dacă W este o (τ')-vecinătate Fatou a originii, atunci mulţimea $V = W \cap X$ este o (τ)-vecinătate a originii în X. Dacă $y \in \widetilde{V}$, atunci din $0 \leq x_\delta \uparrow |y|$ cu $x_\delta \in V$, rezultă $x_\delta \in W$ şi prin urmare $|y| \in W$ căci W este o mulţime Fatou. Deoarece W este în particular o mulţime solidă, rezultă $y \in W$. Deci $\widetilde{V} \subset W$ ceea ce arată că $\tau' \leq \widetilde{\tau}$. Pe de altă parte, dacă $V \in \mathcal{W}$, atunci există o (τ')-vecinătate Fatou a originii aşa ca $W \cap X \subset V$ (căci $\tau'|_X = \tau$). Dacă $y \in W$, atunci există un şir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de elemente din X aşa ca $0 \leq x_\delta \uparrow |y|$ căci $y \in \widetilde{X}$. Rezultă $x_\delta \in W \cap X$ căci W este solidă şi $0 \leq x_\delta \leq |y|$. In consecinţă $x_\delta \in V$ şi deci $y \in \widetilde{V}$. Am arătat astfel că $\widetilde{\tau} \leq \tau'$ şi deci $\tau' = \widetilde{\tau}$.

<u>Definiţia 5</u>. Un spaţiu liniar ordonat Z se zice că este (o)-separabil dacă pentru orice submulţime $A \subset Z$ care admite margine superioară, există o submulţime $B \subset A$, cel mult numărabilă, astfel ca sup A = sup B.

<u>Exemple</u> (5). Orice spaţiu de tip (KB) este un spaţiu

(o)-separabil (a se vedea [10]).

(6) Spaţiul B(T) al funcţiilor reale mărginite,definite pe un segment T,este un spaţiu liniar complet reticulat în raport cu ordinea punctuală,dar nu este (o)-separabil.

(7) Spaţiul (m) al tuturor şirurilor mărginite de numere reale (cu ordinea obişnuită) este un spaţiu liniar complet reticulat (o)-separabil.

In lema care urmează vom ţine seama că într-un spaţiu liniar reticulat arhimedian Z,un subspaţiu liniar reticulat E este (o)-dens,dacă şi numai dacă,pentru orice element $z>0$ din Z, există $a\in E$ aşa ca $0<a\leq z$ (a se vedea [9]).

<u>Lema 1</u>.Dacă E este o bandă într-un spaţiu liniar reticulat arhimedian Z,atunci $E=E^{\perp\perp}$.

<u>Demonstraţie</u>.Mulţimea E fiind solidă,este (o)-densă în $E^{\perp\perp}$. Intr-adevăr,în caz contrar fie $0<z\in E^{\perp\perp}$,astfel ca $\{a\in E \mid 0<a\leq z\}= \emptyset$.Rezultă $|a|\wedge z=0,\ \forall\, a\in E$,deci $z\in E^{\perp}$ şi prin urmare $z=0$,ceea ce este contradictoriu.

Mulţimea E fiind (o)-densă în $E^{\perp\perp}$,pentru orice element pozitiv $z\in E^{\perp\perp}$ avem

$$z=\sup\left\{a\in E \,\middle|\, 0\leq a\leq z\right\}$$

de unde $z\in E$ căci E este o bandă.Deci $E^{\perp\perp}\subset E$,iar incluziunea contrară are loc chiar dacă E ar fi o mulţime oarecare.

<u>Lema 2</u>.Fie Z un spaţiu liniar reticulat arhimedian (o)-separabil înzestrat cu o topologie Fatou.Dacă $\mathcal{S}$ este mulţimea tuturor şirurilor $\{W_n\}_{n\in N}$ de vecinătăţi Fatou ale originii,cu proprietatea $W_{n+1}+W_{n+1}\subset W_n$,atunci

$$Z=\bigcup\left\{F^{\perp} \,\middle|\, F=\bigcap_{n\in N}W_n,\ \{W_n\}_{n\in N}\in\mathcal{S}\right\} \qquad (1)$$

<u>Demonstraţie</u>.Să notăm cu G mulţimea din membrul drept al egalităţii (1).Pentru a arăta că G=Z este suficient să demonstrăm că G este o bandă (o)-densă în Z (a se vedea [9] ,p.153).

Mulţimea G este un subspaţiu liniar al lui Z.

Intr-adevăr, dacă $F_i=\bigcap_{n\in N} W_n^i$, $(i=1,2)$ cu $\{W_n^i\}_{n\in N}\in \mathcal{S}$ şi punem $W_n=W_n^1\cap W_n^2$, atunci $\{W_n\}_{n\in N}\in\mathcal{S}$. Deci dacă $z_i\in F_i^{\perp}$, $(i=1,2)$ şi $\alpha,\beta\in R$, atunci notînd $F=\bigcap_{n\in N} W_n$, atunci

$\alpha z_1+\beta z_2\in F^{\perp}$ căci $F^{\perp}=(F_1\cap F_2)^{\perp}$.

Mulţimea G este evident solidă, deci G este un subspaţiu normal.

Pentru ca G să fie o bandă, este suficient ca

$$0\leq x_{\delta}\uparrow_{\delta\in\Delta} z, z_{\delta}\in G, (\forall\delta\in\Delta)\Longrightarrow z\in G \qquad (2)$$

Cum însă spaţiul Z este (o)-separabil, putem să presupunem în (2) că $\Delta=N$.

Fie deci $0\leq z_n\uparrow_{n\in N} z$ cu $z_n\in G$, $(\forall n\in N)$. Pentru orice $n\in N$ să considerăm un şir $\{W_{nj}\}_{j\in N}\in\mathcal{S}$ astfel ca, punînd

$$F_n=\bigcap_{j\in N} W_{nj},\quad (n\in N)$$

să avem $x_n\in F_n$. Să punem acum

$$W_j=\bigcap_{n=1}^{j} W_{nj}, (j\in N)$$

Se observă că $\{W_j\}_{j\in N}\in\mathcal{S}$ şi că

$$\bigcap_{j\in N} W_j\subset\bigcap_{j\in N} W_{nj}=F_n,\quad (\forall n\in N)$$

Punînd $F=\bigcap_{j\in N} W_j$, avem $F\subset F_n$, de unde $F_n^{\perp}\subset F^{\perp}$ şi deci $z_n\in F^{\perp}$, $(\forall n\in N)$. Rezultă $z\in F^{\perp}\subset G$ deci G este o bandă în Z.

Să arătăm că G este (o)-densă în Z.

Să observăm mai întîi că dacă $F=\bigcap_{n\in N} W_n$ cu $\{W_n\}_{n\in N}\in\mathcal{S}$ atunci F este o bandă. Intr-adevăr, deoarece F este o mulţime Fatou, este suficient să arătăm că F este un subspaţiu liniar. Dar aceasta, rezultă imediat, căci dacă $a,b\in F$, atunci $a,b\in W_{n+1}$, $\forall n\in N$, de unde $a+b\in W_n$, $(\forall n\in N)$ deci $a+b\in F$. Cum F este solidă, F este un subspaţiu liniar.

Fie acum $0<z\in Z$ şi să considerăm o vecinătate Fatou W a originii aşa ca $z\notin W$. Să considerăm un şir $\{W_n\}_{n\in N}\in\mathcal{S}$ cu $W_1=W$. Deoarece spaţiul Z este arhimedian, punînd $F=\bigcap_{n\in N} W_n$

avem $F=F^{\perp\perp}$ (lema 1) deci $z \notin F^{\perp\perp}$. Există atunci $a \in F^{\perp}$, $a>0$, astfel ca, notînd $b=z \wedge a$, să avem $b>0$. Din $0<b\leq a$ şi $a\in E^{\perp}$ rezultă $b\in F^{\perp}$, deci $0<b\leq z$ cu $b \in G$.

Mulţimea G este deci (o)-densă în Z şi lema este demonstrată.

<u>Lema 3</u>. Fie Z un spaţiu liniar σ-reticulat şi $\{A_j\}_{j\in N}$ un şir de submulţimi solide care satisfac condiţiile

(i) $z=(o)\text{-}\lim\limits_{n} z_n, z_n \in A_j, (\forall n \in N) \Rightarrow z \in A_j$

(ii) $A_{j+1}+A_{j+1}\subset A_j$, $(\forall j\in N)$

Fie $\{c_n\}_{n\in N}$ un şir (o)-mărginit de elemente din Z care satisface condiţia

$$c_{n+1}-c_n \in A_{n+2}, \quad (\forall n \in N) \tag{3}$$

Atunci

$$(\underline{\lim}_{m\in N}\, c_m)-c_n \in A_n, \quad (\forall n \in N) \tag{4}$$

$$(\overline{\lim}_{m\in N}\, c_m)-c_n \in A_n, \quad (\forall n \in N) \tag{5}$$

<u>Demonstraţie</u>. Vom stabili (4), relaţia (5) stabilindu-se într-un mod asemănător. Să notăm $b=\underline{\lim}_{m\in N}\, c_m$.

Fie $n,m\in N$. Pentru orice $k\in\{1,2,\dots,m\}$ avem

$$|c_n-c_{n+k}|\leq \sum_{j=1}^{n+m-1}|c_j-c_{j+1}|\in A_{n+2}+\dots+A_{n+m-1}\subset A_{n+1}$$

şi deci

$$0\leq c_n-\bigwedge_{j=n}^{n+m} c_j=\bigvee_{j=n}^{n+m}(c_n-c_j)\leq \bigvee_{j=n}^{n+m}|c_n-c_j|\leq$$

$$\leq \sum_{j=n}^{n+m-1}|c_j-c_{j+1}|\in A_{n+1}$$

Rezultă

$$c_n-\bigwedge_{j=n}^{n+m}c_j \in A_{n+1}, \quad (\forall n,m\in N)$$

şi cu condiţia (i) din enunţul lemei, punînd $b_n=\bigwedge_{j=n}^{\infty} c_j$, deducem

$c_n-b_n \in A_{n+1}, (\forall n\in N)$. Prin urmare

$$|b_{n+m}-c_n| \leq |b_{n+m}-c_{n+m}|+|c_{n+m}-c_n| \leq$$

$$\leq |b_{n+m}-c_{n+m}| + \sum_{j=n}^{n+m-1} |c_{j+1}-c_j| \in A_{n+m+1}+A_{n+1} \subset A_n$$

de unde $b_{n+m}-c_n \in A_n$ şi deci $b-c_n \in A_n$.

<u>Teorema 3</u>. Să presupunem că spaţiul X este (o)-separabil şi înzestrat cu o topologie Fatou. Dacă $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ este un şir generalizat (o)-mărginit de elemente din X şi $x=(\tau)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$, atunci există un şir crescător de indici $\{\delta_n\}_{n\in N}$ aşa ca $x=(o)\text{-}\lim_n x_{\delta_n}$.

<u>Demonstraţie</u>. Să considerăm extensia Dedekind $\widetilde{X}$ a lui X. Ea este un spaţiu liniar complet reticulat (o)-separabil. Inzestrăm $\widetilde{X}$ cu topologia Fatou dată de teorema 2. Are deci loc egalitatea (1) în care $Z=\widetilde{X}$.

Fie $x=(\tau)\text{-}\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$ şi $|x_\delta| \leq c, (\forall\delta\in\Delta)$. Fie $c \in F^\perp$ cu $F=\bigcap_{n\in N} W_n$ iar $\{W_n\}_{n\in N} \in \mathcal{S}$ (cu notaţiile din lema 2). Se observă uşor că există un şir crescător de indici $\{\delta_n\}_{n\in N}$ aşa ca $x_{\delta_n}-x \; W_{n+3} (\forall n\in N)$ deci

$$x_{\delta_n}-x \in W_n, \quad (\forall n\in N) \qquad (6)$$

$$x_{\delta_{n+1}}-x_{\delta_n} \in W_{n+2}, \quad (\forall n\in N) \qquad (7)$$

Punînd $a=\underline{\lim}_{n\in N} x_{\delta_n}$, $b=\overline{\lim}_{n\in N} x_{\delta_n}$ în spaţiul $\widetilde{X}$ şi ţinînd seama de (7), cu lema 3 avem

$$b-x_{\delta_n} \in W_n, \ (\forall n\in N)$$

De aici şi din (6) rezultă

$$b-x=(b-x_{\delta_{n+1}})+(x_{\delta_{n+1}}-x) \in W_{n+1}+W_{n+1} \subset W_n$$

deci $b-x \in F$.

Pe de altă parte, avem $x_\delta \in F^\perp, (\forall\delta\in\Delta)$, de unde $b \in F^\perp$. De asemenea $x\in F^\perp$ căci $|x|\leq c$. Deci $b-x \in F^\perp$ şi cum avem totodată $b-x\in F$ rezultă $b=x$. In mod analog se arată că $a=x$, deci $x=(o)\text{-}\lim_n x_{\delta_n}$.

Definiția 6. Un subspațiu liniar reticulat G al unui spațiu liniar reticulat Z se numește subspațiu exact, dacă din $A \subset G$ și din existența elementului $a = \sup A$ în G rezultă $a = \sup A$ și în spațiul Z.

Lema 4. Dacă G este un subspațiu liniar reticulat (ø)-dens al unui spațiu liniar reticulat arhimedian Z, atunci G este un subspațiu exact. Dacă G este în plus complet reticulat, atunci G este un subspațiu normal.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că dacă $z_{\delta} \downarrow_{\delta\in\Delta} 0$ în G atunci $z_\delta \downarrow 0$ și în spațiul Z. Să presupunem că afirmația n-ar fi adevărată. Fie deci $z_{\delta} \downarrow_{\delta\in\Delta} 0$ în G și $z \in Z$ așa ca $0 < z \leq z_{\delta}$ $(\forall \delta\in\Delta)$. Cum G este (o)-dens în Z (iar Z este arhimedian), există $a \in G$ astfel ca $0 < a \leq z$. Rezultă $0 < a \leq z_{\delta}$, $\forall \delta \in \Delta$ contradictoriu.

Să presupunem acum că G este și complet reticulat.

Fie $0 \leq a \leq b \in G$ cu $a \in Z$. Fie $a_{\delta} \uparrow_{\delta\in\Delta} a$ în Z cu $0 \leq a_{\delta} \in G$, $(\forall \delta\in\Delta)$. Spațiul G fiind complet reticulat, există $c \in G$ așa ca $a_{\delta} \uparrow_{\delta\in\Delta} c$ în G. Cum G este un subspațiu exact al lui Z, rezultă $a_{\delta} \uparrow_{\delta\in\Delta} c$ și în Z. In consecință $a = c \in G$ și lema este demonstrată.

Dacă Z și Y sînt două spații liniare topologice, o funcție $f: Z \longrightarrow Y$ se spune că este uniform continuă, dacă pentru orice vecinătate V a originii în Y, există o vecinătate W a originii în X astfel ca $f(z_1) - f(z_2) \in V$ dacă $z_1 - z_2 \in W$.

Lema 5. Pentru ca o topologie liniară τ pe un spațiu liniar reticulat Z, să fie local solidă, este necesar și suficient ca funcția $f: Z \longrightarrow Z$ dată de formula $f(z) = z_+$ să fie uniform (τ)-continuă.

Demonstrație. Necesitatea rezultă din inegalitatea

$$|a_+ - b_+| \leq |a - b|, \quad (\forall a, b \in Z)$$

Reciproc, să presupunem că f este uniform (τ)-continuă. Fie V o vecinătate oarecare a originii și V_1 o vecinătate echilibrată a originii astfel ca $V_1 + V_1 \subset V$. Fie de asemenea W_1, V_2, W_2

vecinătăţi echilibrate ale originii astfel ca $V_2+W_2 \subset W_1$, iar din $a-b \in W_1$, să rezulte $a_+ - b_+ \in V_1$, $(i=1,2)$. Să notăm cu V_0 acoperirea solidă a lui W_2. Avem $V_0 \subset V$. Intr-adevăr, fie $|z| \leq |c|$ cu $c \in W_2$. Avem c_+, $c_- \in V_2$ şi deci $|c| \in W_1$. Din $z_+ - (z_+ - |c|) = |c| \in W_1$ rezultă

$$z_+ = z_+ - (z_+ - |c|)_+ \in V_1$$

In mod analog, $z_- \in V_1$ şi deci $z \in V$.

Teorema 4. Să presupunem că X este înzestrat cu o topologie local solidă şi fie Y completatul lui X ca spaţiu liniar topologic. Au loc următoarele:

(i) (τ) - Inchiderea în Y a mulţimii X_+ este un con în Y, şi în raport cu ordinea dată de acest con, Y este un spaţiu liniar reticulat topologic, iar X este un subspaţiu liniar reticulat.

(ii) Pentru ca X să fie un subspaţiu normal al lui Y este necesar şi suficient sa orice (o)-segment al lui X să fie (τ)-complet.

Demonstraţie. (i) Să notăm cu H închiderea lui X_+ în Y. Este evident că H este un clin în Y. Fie acum $y \in H \cap (-H)$ şi

$$y = (\tau)\text{-}\lim_{\delta' \in \Delta'} a_{\delta'} = -(\tau)\text{-}\lim_{\delta'' \in \Delta''} b_{\delta''}$$

cu $a_{\delta'}$, $b_{\delta''} \in X_+$. Atunci

$$(\tau)\text{-}\lim_{(\delta',\delta'') \in \Delta' \times \Delta''} (a_{\delta'} + b_{\delta''}) = 0$$

în spaţiul X. Fie V o vecinătate solidă a originii în X şi $(\delta'_0, \delta''_0) \in \Delta' \times \Delta''$ astfel ca

$$(\delta', \delta'') \geq (\delta'_0, \delta''_0) \implies a_{\delta'} + b_{\delta''} \in V$$

Din $0 \leq a_{\delta'} \leq a_{\delta'} + b_{\delta''}$ rezultă atunci

$$\delta' \geq \delta_0 \implies a_{\delta'} \in V$$

deci $(\tau)\text{-}\lim_{\delta' \in \Delta'} a_{\delta'} = 0$ în X. Rezultă $y=0$, deci H este un con în spaţiul Y.

Funcţia $f_0 : X \longrightarrow Y$ dată de formula $f_0(x) = x_+$ este uniform (τ)-continuă. Spaţiul Y fiind (τ)-complet, f_0 se prelungeşte în mod unic într-o funcţie uniform (τ)-continuă $f: Y \longrightarrow Y$. Pentru orice $y \in Y$ avem $f(y)=y_+$. Intr-adevăr, fie $y=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ cu $x_\delta \in X$, $(\forall\delta\in\Delta)$. Din

$$f(x_\delta)-x_\delta=(x_\delta)_+-x_\delta \in X_+$$

rezultă $f(y)-y \in Y_+$, deci $f(y) \geqslant y$ în Y. Avem evident şi $f(y) \geqslant 0$ în Y. Fie acum $z \geqslant y, 0$ în Y. Se pot considera două şiruri generalizate $\{a_\delta\}_{\delta\in\Delta}$, $\{b_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din X_+ (avînd aceeaşi mulţime de indici Δ) aşa ca $z=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} a_\delta$ şi $z-y=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} b_\delta$. Notînd $c_\delta=a_\delta-b_\delta$ avem $y=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} c_\delta$ şi

$$a_\delta-f(c_\delta)=a_\delta-(c_\delta)_+ \geqslant 0$$

de unde, trecînd la (τ)-limită, $z-f(y) \geqslant 0$. Am arătat astfel că $f(y)=y_+$ în spaţiul Y. Deci Y este un spaţiu liniar reticulat, iar X este evident un subspaţiu liniar reticulat. Pe de altă parte, aplicaţia $y \longrightarrow y_+$ fiind uniform (τ)-continuă, topologia lui Y este local solidă (lema 5).

(ii) Să presupunem că X este un subspaţiu normal al lui Y. Fie $0< x \in X$ şi $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ un şir generalizat (τ)-Cauchy de elemente din X cu $0 \leq x_\delta \leq x$, $(\forall\delta\in\Delta)$. Există atunci $y=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ în spaţiul Y şi $0 \leq y \leq x$ în Y. Cum X este subspaţiu normal al lui Y, rezultă $y \in X$.

Prin urmare, segmentul $[0,x]$ al spaţiului X este (τ)-complet în X. Dacă $a,b \in X$ şi $a < b$, atunci $[a,b]=a+[0,b-a]$, deci $[a,b]$ este (τ)-complet în X.

Reciproc, să presupunem că orice (o)-segment al lui X este (τ)-complet. Fie $0 \leq y \leq x \in X$ cu $y \in Y$. Fie $y=(\tau)-\lim\limits_{\delta\in\Delta} x_\delta$ cu $0 \leq x_\delta \in X$, $(\forall\delta\in\Delta)$. Putem evident presupune $0 \leq x_\delta \leq x$, $\forall\delta\in\Delta$ (căci în caz contrar, înlocuim x_δ prin $x_\delta \wedge x$). Cu ipoteza, rezultă $y \in Y$. Ţinînd seama că X este şi subspaţiu liniar reticulat rezultă că X este subspaţiu normal.

<u>Observaţia 5.</u> Se poate arăta că dacă X este înzestrat cu

o topologie local solidă iar Y este completatul lui X ca spaţiu liniar topologic, atunci (τ)-închiderea în Y a unei submulţimi solide a lui X este o mulţime solidă în Y.

<u>Teorema 5</u>. Dacă X este înzestrat cu o topologie Fatou, atunci orice submulţime Fatou a lui X este (τ)-închisă.

<u>Demonstraţie</u>. Să notăm cu $\mathcal{S}$ mulţimea tuturor şirurilor $\{W_n\}_{n\in N}$ de vecinătăţi Fatou ale originii în X, cu proprietatea $W_{n+1}+W_{n+1}\subset W_n$. Să notăm cu G mulţimea din membrul drept al egalităţii (1). Mulţimea G este (o)-densă în X (a se vedea demonstraţia lemei 2 în care s-a arătat că G este (o)-densă în Z fără a folosi (o)-separabilitatea lui Z).

Să presupunem că X este complet reticulat.

Fie A o submulţime Fatou a lui X şi $x_0\in \overline{A}$. Dacă $x\in G$ şi $0\leq x\leq |x_0|$ atunci $x\in \overline{A}$ căci $\overline{A}$ este solidă. Fie acum $x\in F^{\perp}$ cu $F=\bigcap_{n\in N}W_n$, $\{W_n\}_{n\in N}\in \mathcal{S}$. Pentru orice $n\in N$ există $x_n\in A$ aşa ca $x-x_n\in W_{n+3}$. Putem presupune $0\leq x_n\leq x$ (în caz contrar înlocuim x_n prin $|x_n|\wedge x$) deci $x_n\in F^{\perp}$, $(\forall n\in N)$. Cu lema 3, notînd $z=\underline{\lim}_{n\in N}x_n$, avem $z-x_n\in W_n$ şi prin urmare $z-x\in W_n$ (căci $x_n\leq x$). Dar atunci $z-x\in F$ şi cum din $x\in F^{\perp}$ şi $z\in F^{\perp}$ rezultă $z-x\in F^{\perp}$, deducem $x=z\in A$.

Am arătat deci că dacă $0\leq x\leq |x_0|$ cu $x\in G$ atunci $x\in A$. Pe de altă parte, G fiind (o)-densă în X, există un şir generalizat $\{v_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din G aşa ca $0\leq v_\delta\uparrow_{\delta\in\Delta}|x|$. Deci $v_\delta\in A$, $(\forall\delta\in\Delta)$ şi în consecinţă $x\in A$, deci A este (τ)-închisă.

Dacă X nu este complet reticulat, vom considera extensia Dedekind $\widetilde{X}$ a lui X, înzestrată cu topologia Fatou dată de teorema 2. Punînd

$$\widetilde{A}=\left\{y\in\widetilde{X}\ \middle|\ \exists\ \{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}\subset A;\ 0\leq x_\delta\uparrow|y|\right\}$$

$\widetilde{A}$ este o mulţime Fatou în $\widetilde{X}$, deci este închisă în topologia lui $\widetilde{X}$. Rămîne să observăm că $A=\widetilde{A}\cap X$ iar $\widetilde{A}\cap X$ este (τ)-închisă în X.

Teorema este demonstrată.

Următoarea teoremă a lui H.Nakano, a fost redemonstrată de C.D.Aliprantis şi O.Burkinshaw.

Teorema 6. Dacă X este un spaţiu liniar complet reticulat şi înzestrat cu o topologie Fatou, atunci orice (o)-segment al lui X este (τ)-complet.

Demonstraţie. In baza teoremei 4, este suficient să arătăm că X este un subspaţiu normal în completatul topologic Y. In acest scop, vom arăta că X este (o)-dens în subspaţiul normal Z generat de X în Y. Cu lema 4 va rezulta X=Z.

Fie deci $0 < y \leq x \in X$ cu $y \in Y$. Fie $\{V_n\}_{n\in N}$ un şir de vecinătăţi Fatou ale originii în X care satisfac condiţia $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n, (\forall n \in N)$. Să notăm cu W_1 închiderea lui V_1 în Y şi fie $y \notin W_1$. Să considerăm un şir generalizat $\{x_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elemente din X astfel ca $0 \leq x_\delta \leq x, (\forall \delta\in\Delta)$ şi $y=(\tau)-\lim_{\delta\in\Delta} x_\delta$ în Y. Notînd cu W_n închiderea lui V_n în Y, fie $\{\delta_n\}_{n\in N}$ un şir de indici, aşa ca, notînd $a_n = x_{\delta_n}$ să avem

$$y-a_n \in W_n, a_{n+m}-a_n \in V_{n+2}, (\forall n,m \in N)$$

Cu lema 3, notînd $c=\overline{\lim_{n\in N}} a_n$, avem $c-a_n \in V_n$ deci $y-c \in W_n$ $(\forall n \in N)$. Să punem $E = \bigcap_{n\in N} V_n$ şi

$$B=\{z \in X_+ \mid z-c \in E\}$$

Avem $B\neq\emptyset$, căci $c \in B$. Fie $b=\inf B$ în X. Deoarece E este o bandă în X, avem $b-c \in E$. Rezultă $b > 0$ căci dacă am avea $b=0$, ar rezulta $c \in E$ şi deci $y \in W_1$, contradictoriu.

Fie acum S_1 o vecinătate Fatou a originii în X, cu $S_1 \subset V_1$. Fie $\{S_n\}_{n\in N}$ un şir de vecinătăţi Fatou cu $S_{n+1}+S_{n+1} \subset S_n$ iar $S_n \subset V_n, (\forall n \in N)$. Ca şi mai înainte, notînd cu T_n închiderea lui S_n în Y, putem găsi $e \in X_+$ aşa ca $y-e \in T_n, (\forall n \in N)$. Rezultă, tot ca mai înainte, $b-e \in \bigcap_{n\in N} S_n$

Cu definiţia lui b, obţinem $b \leq e$ şi deci

$$0 \leq (b-y)_+ \leq (e-y)_+ \in T_1$$

de unde $(b-y)_+ \in T_1$ căci T_1 este solidă. Deoarece S_1 a fost o vecinătate Fatou oarecare a originii în X, conţinută în V_1, rezultă $(b-y)_+ = 0$ deci $b-y \leq 0$. Prin urmare $0 < b \leq y$ cu $b \in X$, deci X este (o)-dens în Z.

Lema 6. Să presupunem că X este înzestrat cu o topologie local solidă şi fie Y completatul lui X ca spaţiu liniar topologic. Dacă X este un subspaţiu normal al lui Y, atunci X este (o)-dens în Y.

Demonstraţie. Fie $0 < y \in Y$ şi $y = (\tau)\text{-}\lim\limits_{\delta \in \Delta} x_\delta$ cu $0 \leq x_\delta \in X$ $(\forall \delta \in \Delta)$. Putem presupune $x_\delta \leq y$, $(\forall \delta \in \Delta)$ căci în caz contrar înlocuim x_δ prin $x_\delta \wedge y$ şi cum X este subspaţiu normal al lui Y, avem $x_\delta \wedge y \in X$. Avem deci $0 \leq x_\delta \leq y$ şi cum $y > 0$, există $\delta_0 \in \Delta$ astfel încît $x_{\delta_0} > 0$. Spaţiul Y fiind arhimedian rezultă că X este (o)-dens în Y ([9], pag.151).

Teorema 7. Dacă X este înzestrat cu o topologie Fatou, atunci X este (o)-dens în completatul topologic Y al lui X iar topologia lui Y este o topologie Fatou.

Demonstraţie. Dacă X este complet reticulat, atunci cu teoremele 6 şi 4 rezultă că X este un subspaţiu normal al lui Y, iar cu lema 6, X este (o)-dens în Y.

Dacă X nu este complet reticulat, atunci considerăm extensia Dedekind $\widetilde{X}$ a lui X înzestrată cu topologia Fatou dată de teorema 2. Spaţiul $\widetilde{X}$ este (o)-dens în completatul său topologic Z. Dar închiderea topologică a lui X în Z reprezintă completatul topologic Y al spaţiului X. Rezultă că X este (o)-dens în Y.

Fie acum $\mathcal{W}$ o bază de vecinătăţi Fatou ale originii în X. Pentru orice $V \in \mathcal{W}$ să notăm cu V' (τ)-închiderea lui V în spaţiul Y. Deoarece familia $\{V' \mid V \in \mathcal{W}\}$ este o bază de vecinătăţi ale originii în spaţiul Y rămîne să arătăm că dacă $V \in \mathcal{W}$ atunci V' este o mulţime Fatou. Cu observaţia 5, mulţimea V' este solidă. Fie acum

$\{y_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ un şir generalizat de elemente din V' aşa ca $0\leq y_\delta \uparrow_{\delta\in\Delta} y$ în Y. Pentru orice $\delta\in\Delta$ există un şir generalizat $\{a_{\delta\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda(\delta)}$ de elemente din X aşa ca $0\leq a_{\delta\lambda}\uparrow_\lambda y_\delta$ (deoarece X este (o)-densă în Y). Cum V' este solidă iar $y_\delta\in V'$ rezultă $a_{\delta\lambda}\in V'\cap X$. Există atunci (ca şi în demonstraţia teoremei 2) un şir generalizat $\{b_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ de elemente din V aşa ca $0\leq b_\xi\uparrow y$. In consecinţă $y\in V'$.

Observaţia 6. Să presupunem că X este înzestrat cu o topologie local convexă definită de o mulţime $\mathcal{P}$ de seminorme Fatou. Fie Y completatul topologic al lui X şi pentru orice $p\in\mathcal{P}$ să notăm cu $\bar{p}$ prelungirea prin (τ)-continuitate a lui p la Y. După cum se ştie, topologia lui Y este definită de familia de seminorme $\{\bar{p}\mid p\in\mathcal{P}\}$.

Se poate arăta că fiecare funcţională $\bar{p}$ este o seminormă Fatou şi că

$$\bar{p}(y)=\sup\left\{p(x)\,\middle|\,0\leq x\leq|y|;\ x\in X\right\},\ (y\in Y)$$

7. Dacă X este un spaţiu reticulat local convex atunci topologia tare $\beta(X^*_\tau, X)$ este o topologie Fatou.

Intr-adevăr, fie A o submulţime (τ)-mărginită a lui X şi pentru $f\in X^*_\tau$ să punem

$$p_A(f)=\sup\left\{|f(x)|\,\middle|\,x\in A\right\}$$

După cum se ştie, topologia $\beta(X^*_\tau, X)$ este definită de mulţimea tuturor seminormelor p_A.

Orice seminormă p_A este evident solidă. Fie acum $0\leq f_\delta\uparrow_{\delta\in\Delta} f$ în X^*_τ. Dacă nu am avea $p_A(f_\delta)\uparrow_{\delta\in\Delta} p_A(f)$, atunci ar exista un număr $\varepsilon>0$ astfel ca

$$p_A(f_\delta)\leq p_A(f)-\varepsilon\ ,\ (\forall\delta\in\Delta).$$

Considerînd un element pozitiv $a\in A$ astfel ca $p_A(f)-\varepsilon<$ $< f(a)$, şirul generalizat $\{f_\delta(a)\}_{\delta\in\Delta}$ nu converge către f(a) ceea ce este contradictoriu.

§ 3. Unele proprietăţi ale topologiilor σ-Fatou

Teorema 8. Dacă X este un spaţiu liniar complet reticulat înzestrat cu o topologie σ-Fatou, atunci orice (o)-segment al lui X este secvenţial (τ)-complet.

Demonstraţie. Să notăm cu Y completatul lui X ca spaţiu liniar topologic şi fie

$$Z=\left\{ y \in Y \;\middle|\; y=(\tau)\text{-}\lim_{n\in N} x_n;\ x_n \in X, \forall n \in N \right\}$$

Mulţimea Z este un subspaţiu liniar reticulat al lui Y, iar X este un subspaţiu liniar reticulat al lui Z. Vom arăta că X este un subspaţiu normal al lui Z. In baza lemei 4, este suficient să arătăm că X este (o)-dens în Z.

Fie $0 < y \leq x \in X$ cu $y \in Z$. Există deci un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ de elemente din X aşa ca $y=(\tau)\text{-}\lim\limits_{n} x_n$ şi $0 \leq x_n \leq x$, $\forall n \in N$. Fie W o vecinătate σ-Fatou a originii în X astfel ca $y \notin \overline{W}$ şi să considerăm un şir $\{W_n\}_{n\in N}$ de vecinătăţi σ-Fatou ale originii în X cu $W_1=W$ şi $W_{n+1}+W_{n+1} \subset W_n$, $(\forall n \in N)$.

Se poate presupune că $x_{n+1}-x_n \in W_{n+2}$, $(\forall n \in N)$ (în caz contrar putem considera un subşir convenabil al şirului $\{W_n\}_{n\in N}$). Notînd $a=\underline{\lim\limits_{n\in N}} x_n$, cu lema 3 şi cu faptul că $W_n \subset W$, $(\forall n \in N)$ rezultă $a-x_n \in W$, $(\forall n \in N)$. Cum $y \notin \overline{W}$, avem $a > 0$.

Să considerăm acum o vecinătate σ-Fatou oarecare V a originii în X şi fie $\{V_n\}_{n\in N}$ un şir de vecinătăţi σ-Fatou ale originii în X, astfel ca $V_1=V$ şi $V_{n+1}+V_{n+1} \subset V_n$, $(\forall n \in N)$. Să considerăm un subşir $\{x_{k_n}\}_{n\in N}$ al şirului $\{x_n\}_{n\in N}$ aşa ca

$$x_{k_{n+1}}-x_{k_n} \in V_{n+2}, \quad (\forall n \in N)$$

Notînd $b=\underline{\lim\limits_{n}}\, x_{k_n}$, avem $0 < a \leq b$ şi cu lema 3, avem $b-x_{k_n} \in V$ căci $V_n \subset V$. Rezultă $b-y \in V$ şi cum $(a-y)_+ \leq (b-y)_+$ rezultă mai departe $(a-y)_+ \in V$. Deoarece V a fost o vecinătate σ-Fatou a originii, oarecare, rezultă $(a-y)_+=0$. Deci $0 < a \leq y$ cu $a \in X$.

Am arătat astfel că X este (o)-densă în Z şi în consecinţă

X este subspaţiu normal al lui Z. Fie acum $0<x\in X$ şi $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir (τ)-Cauchy de elemente din X, cu $0\leq x_n\leq x$. Există atunci $y=(\tau)\text{-}\lim_n x_n$ în spaţiul Y şi deci $y\in Z$. Dar atunci $0\leq y\leq x$ în Z şi cum X este subspaţiu normal al lui Z rezultă $y\in X$ şi deci segmentul $[0,x]$ este secvenţial (τ)-complet. Pentru un segment oarecare, ţinem seama de egalitatea: $[a,b]=a+[0,b-a]$, $(a<b)$.

<u>Teorema 9</u>. Dacă X este un spaţiu liniar σ-reticulat înzestrat cu o topologie σ-Fatou, iar G este un subspaţiu normal secvenţial (o)-închis, atunci topologia cît în X/G este o topologie σ-Fatou.

<u>Demonstraţie</u>. Fie $l: X\longrightarrow X/G$ aplicaţia canonică şi V o vecinătate σ-Fatou a originii în X. Mulţimea $\hat{V}=l(V)$ este solidă. Intr-adevăr, dacă $|l(x)|\leq|l(y)|$ cu $y\in V$, atunci punînd

$$z=((-|y|)\vee x)\wedge|x|$$

avem $|z|\leq y$ deci $z\in V$. Deci, din

$$l(z)=((-|l(y)|)\vee l(x))\wedge|l(x)|=l(x)$$

rezultă $l(x)\in\hat{V}$.

Fie acum $0\leq\hat{x}_n\uparrow\hat{x}$ în X/G unde $\{\hat{x}_n\}_{n\in N}$ este un şir de elemente din $\hat{V}$. Punînd $\hat{x}_n=l(x_n)$, $\hat{x}=l(x)$, putem presupune $0\leq x_n\leq x$ cu $x_n\in V$, $(\forall n\in N)$. Notînd $a=\underline{\lim}_n x_n$, avem $a\in V$, de unde

$$\hat{x}=\bigvee_{n\in N}\hat{x}_n=\underline{\lim}_{n\in N}\hat{x}_n=\hat{a}=\hat{V}$$

şi teorema este demonstrată.

<u>Observaţia 8</u>. Se poate demonstra că dacă X este înzestrat cu o topologie σ-Fatou (sau Fatou) atunci topologia cît în X/G este o topologie σ-Fatou (resp. Fatou).

§ 4. <u>Unele proprietăţi ale topologiilor care satisfac condiţia</u> (A_0).

<u>Teorema 10</u>. Dacă X este înzestrat cu topologie local solidă, următoarele condiţii sînt echivalente :

(i) Topologia lui X satisface condiţia (A_0),

(ii) Orice şir (o)-mărginit şi ortogonal de elemente din X este (τ)-convergent către 0.

(iii) Dacă un şir $\{x_n\}_{n\in N}$ (o)-mărginit de elemente din X are proprietatea că pentru un anumit $m\in N$ are loc egalitatea $\bigwedge_{i=1}^{m} |x_{j_i}| = 0$ oricare ar fi numerele naturale $j_1 < j_2 < \dots < j_m$, atunci $(\tau)\text{-}\lim_n x_n = 0$.

Demonstraţie. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Fie $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir ortogonal de elemente din X şi $|x_n| \leq y, (\forall n\in N)$. Punînd

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \bigvee_{i=1}^{n} |x_i|$$

avem $0\leq y_n \uparrow$ şi $y_n \leq y$, $\forall n\in N$. Cu (i) rezultă că şirul $\{y_n\}_{n\in N}$ este (τ)-Cauchy. Dacă W este o vecinătate solidă oarecare a originii atunci există $n_o \in N$ aşa ca $y_m - y_n \in W$ dacă $m,n \geq n_o$. Luînd $m=n+1$ rezultă $|x_n| \in W$ dacă $n\geq n_o$ şi deci $x_n\in W$ dacă $n\geq n_o$. Prin urmare $(\tau)\text{-}\lim_n x_n = 0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Afirmaţia (iii) este adevărată pentru $m=1$ în baza lui (ii). Să presupunem că este adevărată pentru un anumit m şi fie acum $\{x_n\}_{n\in N}$ un şir (o)-mărginit aşa ca $\bigwedge_{i=1}^{m+1} |x_{j_i}| = 0$ dacă $j_1 < j_2 < \dots < j_{m+1}$. Putem evident presupune $x_n \geq 0$, $\forall n\in N$. Fie $d\in X$ aşa ca $x_n \leq d$, $\forall n\in N$.

Să punem acum $y_1 = 0$ şi

$$y_n = \Big(x_n - n\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \frac{1}{n} d\Big)_+ \quad ,(2 \leq n \in N)$$

Se observă imediat că $0\leq y_n \leq d$, $\forall n\in N$.

Sirul $\{y_n\}_{n\in N}$ este ortogonal. Intr-adevăr, este suficient să ţinem seama că dacă $1<n<m$ atunci

$$\frac{1}{m} y_m = \Big(\frac{1}{m} x_m - \sum_{i=1}^{m-1} x_i - \frac{1}{m^2} d\Big)_+ \leq \Big(\frac{1}{m} d - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - x_n - \frac{1}{m^2} d\Big)_+ \leq$$

$$\leq \Big(\frac{1}{n} d - \sum_{i=1}^{n-1} x_i - x_n\Big)_+ \leq \Big(\frac{1}{n} d + n\sum_{i=1}^{n-1} x_i - x_n\Big)_+ = \Big(x_n - n\sum_{i=1}^{n-1} x_i - \frac{1}{n} d\Big)_-$$

Cu (ii) rezultă $(\tau)\text{-}\lim_n y_n = 0$.

Mai departe, să definim $z_1=0$ şi

$$z_n=(n\sum_{i=1}^{n-1} x_i)\wedge x_n, \quad (2\leq n\in N)$$

Fie $1\leq j_1<j_2<\ldots<j_m$ cu $j_i\in N$. Dacă $j_1=1$, atunci evident $\bigwedge_{i=1}^{m} z_{j_i}=0$. Această egalitate are loc şi dacă $j_1>1$ deoarece

$$\bigwedge_{i=1}^{m} z_{j_i}\leq (j_1\sum_{i=1}^{j_1-1} x_i)\wedge(\bigwedge_{i=1}^{m} x_{j_i})\leq j_1\sum_{i=1}^{j_1-1}\Big(\bigwedge_{k=1}^{m} x_{j_k}\Big)\wedge x_i=0$$

Prin ipoteza inducţiei rezultă $(\tau)\text{-}\lim_n z_n=0$.

Faptul că $(\tau)\text{-}\lim_n x_n=0$ rezultă acum din inegalităţile

$$0\leq x_n\leq y_n+z_n+\frac{1}{n}d, \quad (2\leq n\in N)$$

valabile datorită egalităţii

$$x_n=y_n+(n\sum_{i=1}^{n-1} x_i+\frac{1}{n}d)\wedge x_n$$

(căci pentru orice $a,b\in X$ avem $a=(a-b)_+ +(a\wedge b)$)

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Fie $0\leq x_n\uparrow_{n\in N}$ şi $x_n\leq y$, $(\forall n\in N)$ şi să presupunem că şirul $\{x_n\}_{n\in N}$ nu este (τ)-Cauchy. Există atunci o vecinătate W a originii şi un subşir $\{x_{k_n}\}_{n\in N}$ aşa ca $x_{k_{n+1}}-x_{k_n}\notin W$, $(\forall n\in N)$. Fie W_o o vecinătate solidă a originii aşa ca $W_o+W_o\subset W$ şi fie $m\in N$ aşa ca $\frac{1}{m}y\in W_o$. Să notăm $z_n=x_{k_n}$ şi să punem

$$y_n=(z_{n+1}-z_n-\frac{1}{m}y)_+, \quad (n\in N)$$

Evident $0\leq y_n\leq y$, $\forall n\in N$.

Să considerăm acum m numere naturale $j_1<j_2<\ldots<j_m$. Notînd

$$e=\bigwedge_{i=1}^{m} y_i$$

avem

$$e\wedge\sum_{i=1}^{m}(z_{j_{i+1}}-z_{j_i}-\frac{1}{m}y)_- =e\wedge\sum_{i=1}^{m}(\frac{1}{m}y+z_{j_i}-z_{j_{i+1}}+y_{j_i})\geq$$

$$\geq e\wedge\sum_{i=1}^{m} y_{j_i}=e$$

de unde $e=0$. Cu (iii) rezultă $(\tau)\text{-}\lim_n y_n=0$, deci există $n_o\in N$ aşa ca $y_n \in W_0$ dacă $n \geqslant n_0$. Dar

$$z_{n+1}-z_n \in W, (n \geqslant n_0)$$

căci (folosind iarăşi identitatea $a=(a-b)_+ + a\wedge b$) avem

$$z_{n+1}-z_n=y_n+(z_{n+1}-z_n)\wedge \frac{1}{m}\, y \in W_0+W_0$$

dacă $n \geqslant n_0$.

Am ajuns astfel la o contradicţie.

<u>Teorema 11</u>. Fie X un spaţiu liniar reticulat topologic iar Y completatul topologic al lui X. Dacă topologia lui X satisface condiţia (A_0) atunci şi topologia lui Y satisface condiţia (A_0).

<u>Demonstraţie</u>. Fie $0 \leq y_n \uparrow_{n\in N}$ şi $y_n \leq y, (\forall n \in N)$ în spaţiul Y. Notînd $z_n=y-y_n$, avem $0 \leq z_n \downarrow$ şi este suficient să arătăm că $\{z_n\}_{n\in N}$ este un şir (τ)-Cauchy. Fie deci W o vecinătate solidă a originii în Y. Fie $\{W_n\}_{n\in N}$ un şir de vecinătăţi solide ale originii în Y astfel ca

$$W_1+W_1+W_1 \subset W \qquad (8)$$

$$W_{n+1}+W_{n+1} \subset W_n, (\forall n \in N) \qquad (9)$$

Deoarece X este (τ)-densă în Y, pentru orice $n \in N$ există un element pozitiv $x_n \in X$ aşa ca $x_n \in W_{n+1}+z_n$. Punînd $a_n=\bigwedge_{i=1}^{n} x_i$, avem $0 \leq a_n \downarrow$ în X şi prin urmare $\{a_n\}_{n\in N}$ este un şir (τ)-Cauchy. Există deci $n_1 \in N$ aşa ca $a_m-a_n \in W_1$ dacă $m,n \geqslant n_1$. Dar

$$|a_n-z_n| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i| \qquad (1o)$$

căci

$$a_n-z_n=\bigwedge_{i=1}^{n} x_i-z_n \leq x_n-z_n \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|$$

iar

$$z_n-a_n=z_n-\bigwedge_{i=1}^{n} x_i=\bigvee_{i=1}^{n} (z_n-x_i) \leq \bigvee_{i=1}^{n} (z_i-x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|$$

Să ţinem acum seama că $|x_i-z_i| \in W_{i+1}$ şi deci cu (9)

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i| \in W_2+\ldots+W_{n+1} \subset W_1$$

Cu (1o) rezultă $|a_n-z_n| \in W_1$, $(\forall n \in N)$. Avem deci pentru $m,n \geqslant n_1$

(folosind (8))

$$|z_m-z_n|\le|z_m-a_m|+|a_m-a_n|+|a_n-z_n|\in W$$

deci $\{z_n\}_{n\in N}$ este un şir (τ)-Cauchy.

Teorema este demonstrată.

In definiţia următoare se notează cu No(A) subspaţiul normal generat de o mulţime $A\subset X$.

Definiţia 7. Dacă X este înzestrat cu o topologie liniară, o submulţime A a lui X se zice că este cvasi (o) -precompactă (resp. (o)-precompactă), dacă pentru orice vecinătate W a originii, există un element pozitiv $x\in X$ (resp. $x\in No(A)$) astfel ca

$$A\subset W+[-x,x]$$

Lema şi teorema care urmează au fost demonstrate recent de M.Duhoux [11].

Vom nota cu co(B) acoperirea convexă a unei mulţimi B.

Lema 7. Fie Z un subspaţiu reticulat local convex şi B o submulţime solidă şi (τ)-mărginită a lui Z cu proprietăţile

(i) orice şir ortogonal de elemente din B este (τ)-convergent către 0;

(ii) orice şir crescător şi (τ)-Cauchy de elemente pozitive din co(B) este majorat.

In aceste condiţii mulţimea B este (o)-precompactă.

Demonstraţie. Dacă B nu este (o)-precompactă, atunci fie W o vecinătate solidă a originii astfel ca, pentru orice element pozitiv $z\in No(B)$ să existe un element pozitiv $y\in B$ cu $y\notin W+[-z,z]$. In particular $(y-z)_+\notin W$ căci $(y-z)_+=y-z\wedge y$. Prin inducţie, rezultă existenţa unui şir $\{y_n\}_{n\in N}$ de elemente pozitive din B astfel ca

$$(y_{n+1}-4^n\sum_{i=1}^{n}y_i)_+\notin W,\ (\forall n\in N)$$

Sirul $\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}y_i\right\}_{n\in N}$ este crescător şi elementele sale sînt în co(B). Acest şir este (τ)-Cauchy (căci mulţimea co(B) este (τ)-mărginită şi deci şirul este (τ)-mărginit). Cu condiţia (ii) există un majorant z_o al şirului. Notînd

$$a_n=y_{n+1}-4^n\sum_{i=1}^{n} y_i;\quad z_n=(a_n-\frac{1}{2^n}z)_+ \ ,\ (n\in N)$$

avem $z_n \in B,(\forall n\in N)$ căci $0\leq z_n \leq (a_n)_+ \leq y_{n+1}\in B$. Dacă $m>n$, atunci

$$\frac{1}{4^m}z_m \leq \frac{1}{4^m}(a_m)_+ \leq (\frac{1}{4^m}y_{m+1}-y_{n+1})_+ \leq (\frac{1}{2^n}\ \frac{1}{2^{m+1}}y_{m+1}-y_{n+1})_+ \leq$$

$$\leq (\frac{1}{2^n}z_o+4^n\sum_{i=1}^{n}y_i-y_{n+1})_+=(a_n-\frac{1}{2^n}z_o)_-$$

de unde rezultă $z_m \perp z_n$. Dar din relaţiile

$$z_n+\frac{1}{2^n}z_o \geqslant (a_n)_+ \notin W$$

rezultă $z_n+\frac{1}{2^n}z_o \notin W$ şi prin urmare şirul $\{z_n\}_{n\in N}$ nu este (τ)-convergent către 0, contrar condiţiei (i).

<u>Observaţia 9.</u> Condiţia (ii) din lema precedentă este îndeplinită dacă Z este (τ)-complet.

<u>Teorema 12.</u> Dacă X este un spaţiu reticulat local convex, topologia lui X satisface condiţia (A_o), dacă şi numai dacă orice submulţime cvasi (o)-precompactă a lui X este (o)-precompactă.

<u>Demonstraţie.</u> Să presupunem că topologia lui X satisface condiţia (A_o). Cu teorema 11 în completatul topologic Y al lui X, topologia satisface de asemenea condiţia (A_o). Fie A o submulţime cvasi (o)-precompactă a lui X şi B acoperirea solidă a lui A în spaţiul Y. Mulţimea B este cvasi (o)-precompactă în Y.

Să arătăm acum că orice şir ortogonal de elemente din B este (τ)-convergent către 0. Fie deci $\{z_n\}_{n\in N}$ un şir ortogonal de elemente din B. Putem presupune $z_n\geqslant 0$ căci B este solidă. Să considerăm o vecinătate oarecare W a originii în Y şi fie W_o o vecinătate solidă a originii în Y aşa ca $W_o+W_o\subset W$. Mulţimea B fiind cvasi (o)-precompactă, există un element pozitiv $z\in Y$ aşa ca $B\subset W_o+[-z,z]$. In particular $z_n-z_n\wedge z\in W_o$, $(\forall n\in N)$ (căci dacă $0\leq y\in B$ atunci există $0 \leq a \in W_0$ aşa ca $y \leq a+z$ de unde $0 \leq y-y\wedge z=(y-z)_+ \leq a \in W_0$). Pe de altă parte, topologia lui Y satisfăcînd condiţia (A_0) (în baza teoremei 11), rezultă că (τ)-$\lim_n z_n \wedge z=0$ (cu teorema 10). Fie deci $n_0 \in N$ aşa ca $z_n \wedge z \in W_0$ dacă $n \geq n_0$. Rezultă

$$z_n=z_n\wedge z+(z_n-z_n \wedge z) \in W_0+W_0 \subset W$$

dacă $n \geq n_0$, deci (τ)-$\lim_n z_n=0$. Cu lema 7 şi Observaţia 9, mulţimea B şi deci şi A este (o)-precompactă în Y. Rezultă că A este (o)-precompactă în X.

Reciproc, să presupunem că orice submulţime cvasi (o)-precompactă a lui X este (o)-precompactă. Fie $\{x_n\}_{n \in N}$ un şir ortogonal şi (o)-mărginit de elemente pozitive din X. El este evident cvasi (o)-precompact şi, prin ipoteză, rezultă că este (o)-precompact. Să considerăm o vecinătate oarecare W a originii şi fie $0 \leq z \in No(\{x_n | n \in N\})$ astfel ca $x_n - x_n \wedge z \in W, (\forall n \in N)$. Există $\alpha_i \in R_+$ şi $j_i \in N, (i=1,\dots,k)$, astfel ca $z \leq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{j_i}$, deci dacă $n > j_i, (i=1,\dots,k)$, atunci $x_n \wedge z=0$ şi în consecinţă $x_n \in W$. Avem deci (τ)-$\lim_n x_n=0$ şi cu teorema 10, topologia lui X satisface condiţia (A_0).

Complemente[x)]

1. Se poate demonstra că un spaţiu liniar reticulat arhimedian este (o)-separabil, dacă şi numai dacă orice submulţime ortogonală şi (o)-mărginită a spaţiului este cel mult numărabilă.

2. Un spaţiu liniar reticulat se zice că este σ-lateral complet (resp. lateral complet) dacă pentru orice şir ortogonal (resp. orice mulţime ortogonală) de elemente pozitive, există marginea superioară).[xx)]

---

x) Amintim că topologiile liniare considerate în acest articol se presupun topologii separate.

xx) Un spaţiu liniar complet reticulat care este lateral complet, a fost numit în [10] spaţiu maximal.

Spaţiul liniar R^2 înzestrat cu ordinea lexicografică, este un exemplu de spaţiu liniar reticulat lateral complet, care nu este arhimedian.

Spaţiul liniar al tuturor funcţiilor reale măsurabile (L) definite pe un segment $[a,b] \subset R$, este un spaţiu liniar σ-reticulat şi σ-lateral complet în raport cu ordinea punctuală, dar nu este nici complet reticulat, nici lateral complet.

A.I.Veksler şi V.A.Geiler [2o] au demonstrat următoarea propoziţie, redemonstrată apoi pe o cale mai simplă de S.J.Bernau [6] .

Dacă X este un spaţiu liniar reticulat arhimedian, lateral complet, atunci orice bandă a lui X este o componentă.

3.Următoarele rezultate au fost stabilite de D.H.Fremlin [13] pentru spaţii maximale şi generalizate de C.D. Aliprantis şi O.Burkinshaw [5] .

Dacă Z este un spaţiu liniar reticulat σ-lateral complet atunci există cel mult o topologie Fatou pe Z şi această topologie este (ω)-continuă.

Dacă Z este un spaţiu liniar reticulat, lateral complet, înzestrat cu o topologie local solidă, atunci pentru ca această topologie să fie metrizabilă este necesar şi suficient ca Z să fie (o)-separabil.

4.Fie X un spaţiu reticulat local convex (cu topologia τ) şi să notăm cu $|\sigma|(X,X^*_\tau)$ topologia local convexă definită de familia $\{p_f\}_{f\in X^*_\tau}$ a seminormelor de forma

$$p_f(x)=|f|(|x|) \quad ,(x\in X)$$

Se poate arăta că pentru ca topologia τ a spaţiului X să fie (ω)-continuă, este necesar şi suficient ca topologia $|\sigma|(X,X^*_\tau)$ să fie o topologie Fatou.

5.Dacă Z este un spaţiu liniar complet reticulat, atunci orice element $z \in Z$ se reprezintă în mod unic sub forma z=y+a, unde y este un element difuz, iar a un element atomic ([9], Cap.V, § 2).

Fie Z un spaţiu liniar complet reticulat înzestrat cu o topologie local convexă, local plină şi (ω)-continuă. Un element $y_0 > 0$ din Z este difuz, dacă şi numai dacă pentru orice seminormă monotonă şi (τ)-continuă p pe Z şi pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există elementele orotogonale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ aşa ca $\sum_{i=1}^{n} y_i = y_0$ iar $\max_{i=1}^{n} p(y_i) \leq \varepsilon$ (a se vedea [8]).

6. Dacă Z este un spaţiu liniar, o funcţională $p: Z \to R_+$ se numeşte <u>pseudonormă</u>, dacă $p(z_1+z_2) \leq p(z_1)+p(z_2)$ şi $\lim_{\alpha \to 0} p(\alpha z)=0$. O pseudonormă p definită pe un spaţiu liniar reticulat Z se zice că este <u>solidă</u>, dacă $|z_1| \leq |z_2| \Longrightarrow p(z_1) \leq p(z_2)$. O topologie local solidă pe un spaţiu liniar reticulat Z este definită de mulţimea pseudonormelor (τ)-continue şi solide, adică pentru orice vecinătate W a originii, există o pseudonormă (τ)-continuă şi solidă p pe Z astfel ca $\{z \in Z \mid p(z) < 1\} \subset W$.

O pseudonormă p definită pe un spaţiu liniar reticulat Z se numeşte <u>pseudonormă Fatou</u>, dacă este solidă şi dacă: $0 \leq z_\delta \uparrow_{\delta \in \Delta} z \Longrightarrow p(z_\delta) \uparrow p(z)$. O topologie Fatou, pe un spaţiu liniar reticulat Z este definită de mulţimea pseudonormelor Fatou, (τ)-continue.

7. Se poate arăta că dacă Z este un spaţiu liniar reticulat topologic (τ)-complet, atunci pentru ca topologia lui Z să satisfacă condiţia (A_0), este necesar şi suficient ca topologia lui Z să fie (ω)-continuă.

Cu teorema 11 (din prezentul articol) rezultă că dacă X este un spaţiu liniar reticulat topologic iar Y este completatul topologic al lui X, atunci pentru ca topologia lui X să satisfacă condiţia (A_0) este necesar şi suficient ca topologia lui Y să fie (ω)-continuă.

Bibliografie

1.C.D.Aliprantis,On the completion of Hausdorff locally solid Riesz spaces.Trans Amer.Math.Soc.196 (1974),104-125.

2.C.D.Aliprantis,Riesz seminorms with Fatou properties.Proc.Amer. Math.Soc.45 (1974),383-388.

3.C.D.Aliprantis and O.Burkinshaw,A new proof of Nakano's theorem in locally solid Riesz spaces.Math.Z. 144 (1975), 25-33.

4.C.D.Aliprantis and O.Burkinshaw,Nakano's theorem revisited.Michigan Math.J. 23 (1976),173-176.

5.C.D.Aliprantis and O.Burkinshaw,On universally complete Riesz spaces.Pacific Math.J.,71 (1977),1-12.

6.S.J.Bernau,Lateral and Dedekind completion of Archimedian lattice group.J.London Math.Soc. 12 (1976),320-322.

7.Romulus Cristescu,Clase de spaţii liniare semiordonate pseudonormate.Studii şi cerc.mat. 7 (1956),291-309.

8.Romulus Cristescu,Elemente difuze în spaţii ordonate local convexe.Studii şi cerc.mat.,26 (1974),1289-1292.

9.Romulus Cristescu,Spaţii liniare topologice.Editura Academiei, 1974.

10.Romulus Cristescu,Ordered vector spaces and linear operators. Abacus Press 1976.

11.M.Duhoux,Order precompactness în topological Riesz spaces.J.London Math.Soc. 23 (1981),509-522.

12.D.H.Fremlin,On the completion of locally solid vector lattices. Pacific J.Math.43 (1972),341-347.

13.D.H.Fremlin,Inextensible Riesz spaces.Math Proc.Cambridge Phil. Soc. 77 (1975),71-89.

14.C.Goffman,Completeness in topologically vector lattices.Amer.Math. Monthly 66 (1959),87-92.

15.E.Langford and C.D.Aliprantis,Regularity properties of quotient

Riesz seminorms.Nederl.Akad.Wetensch.Proc.Ser.A,78 (1975),199-212.

16.I.Kawai,Locally convex lattices.J.Math.Soc.Japan 9 (1957),281-314.

17.W.A.J.Luxemburg and A.C.Zaanen,Notes on Banach function spaces. Nederl.Akad.Wettensch.Proc.Ser.A 66 (1963) Note II, 148-153,Note III,239-250.

18.H.Nakano,Linear topologies on semi-ordered linear spaces.J.Fac. Sci.Hokkaido Univ.Ser.I.,12 (1953),87-104.

19.H.H.Schaefer,On the completness of topological vector lattices. Michigan Math.J., 7 (1960),303-309.

20.A.I.Veksler,V.A.Geiler,Siberian Math.J.,13 (1972),30-35.

PROGRESE RECENTE IN TEORIA OPERATORILOR DEFINITI PE LATICI BANACH

de Constantin P. Niculescu

Scopul conferinţei noastre este acela de a face o trecere în revistă a cîtorva rezultate mai reprezentative obţinute după 1977 în teoria operatorilor definiţi pe latici Banach. Subiectele ce vor fi dezbătute sînt următoarele:

1. Operatori con absolut sumabili şi majorizanţi
2. Operatori compacţi definiţi pe latici Banach
3. Operatori continui în sensul ordinei.

In seminarul profesorului R.Cristescu, desfăşurat la Facultatea de matematică din Bucureşti, au fost deja tratate subiecte adiacente precum comportarea operatorilor p-absolut sumabili definiţi pe latici Banach, o teoremă de structură a operatorilor slab compacţi etc, motiv pentru care nu vor mai fi menţionate şi aici.

Autorul doreşte să mulţumească colegilor Al.Leonte şi G. Turcitu pentru sprijinul acordat în redactarea prezentei conferinţe.

1. Operatori con absolut sumabili şi majorizanţi

Schlotterbeck [16] a remarcat că laticile Banach de tip AL şi AM se pot caracteriza prin comportarea (din punctul de vedere al sumabilităţii) a şirurilor de elemente pozitive disjuncte :

(AL) O latice Banach este izomorfă cu un AL-spaţiu dacă şi numai dacă orice şir (slab) sumabil de elemente pozitive ,disjuncte două cîte două,este absolut sumabil.

(AM) O latice Banach este izomorfă cu un AM-spaţiu dacă şi numai dacă orice şir normic convergent la 0 este o - mărginit .

Analogul operatorial al acestor rezultate îl reprezintă studiul (iniţiat deasemeni de Schlotterbeck) operatorilor con absolut sumabili şi majorizanţi.

Fie L o latice Banach, X un spaţiu Banach şi T

Un operator $T \in \mathcal{L}(L,X)$ se numeşte con absolut sumabil dacă transformă orice şir sumabil de elemente pozitive într-un şir absolut sumabil.

Un operator $T \in \mathcal{L}(X,L)$ se numeşte majorizant dacă transformă orice şir normic convergent la 0 într-un şir o -mărginit.

T este con absolut sumabil (majorizant) dacă şi numai dacă T' este majorizant (con absolut sumabil).

Operatorii con absolut sumabili admit factorizări prin AL -spaţii iar cei majorizanţi prin AM-spaţii.

In anul 1977 Cartwright şi Lotz au caracterizat aceste clase de operatori folosind şirurile disjuncte. Rezultatele lor sînt în particular importante pentru evidenţierea de noi tehnici de disjunctare.

1.1 LEMA. Cartwright şi Lotz [3]). Fie L o latice Banach, $0 \leq d'_k \in L'$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ funcţionale disjuncte, $0 \leq x_k \in L$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ şi $\varepsilon > 0$. Atunci există elemente disjuncte $d_k \in [0, x_k]$ astfel că

$$d'_k(x_k - d_k) < \varepsilon$$

pentru orice $k = 1,2,\ldots,n$.

Demonstraţie. Considerăm aici numai cazul $n = 2$, cazul general rezultînd prin inducţie. Fie $x = x_1 \vee x_2$. Deoarece $d'_1 \vee d'_2(x) = 0$, rezultă că există două elemente pozitive u_1 şi u_2 în E astfel că $x = u_1 + u_2$ şi

$$d'_1(u_1) + d'_2(u_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $w_1 = u_2 - u_1 \wedge u_2$ şi $w_2 = u_1 - u_1 \wedge u_2$. Atunci $w_1 \wedge w_2 = 0$, $w_1, w_2 \in [0, x]$ şi $d'_1(x - w_1) = d'_1(u_1 + u_1 \wedge u_2) \leq \leq 2\, d'_1(u_1) < \varepsilon$. Analog $d'_2(x - w_2) < \varepsilon$. Fie $d_k = x_k \wedge w_k$, $k = 1,2$. Atunci $d_1 \wedge d_2 = 0$, $d_k \in [0, x_k]$ şi $x_k - d_k = (x_k - w_k)^+ \leq x - w_k$, astfel că $d'_k(x_k - d_k) < \varepsilon$ pentru $k = 1,2$. ∎

LEMA. (Cartwright şi Lotz [4]). Fie L o latice Banach, $\{x_k\}_k \subset E_+$ şi $\{d'_k\}_k \subset L'$ un şir de elemente disjuncte astfel că $\sum d'_k(x_k) = \infty$.

Atunci există un şir $\{d_k\}_k \subset L_+$ de elemente disjuncte astfel că $0 \leq d_k \leq x_k$ pentru orice k şi $\sum d'_k(d_k) = \infty$.

Demonstraţie. Fie $u = \sum \frac{x_k}{2^k(1+\|x_k\|)}$. Conform teoremei lui Kakutani de reprezentare a spaţiilor de tip AM putem identifica idealul L_u (înzestrat cu norma $\| \|_u$) cu un spaţiu C(S) cu S compact. Fiece x_k se interpretează ca o funcţie $f_k \in C(S)$ şi fiece d'_k se interpretează ca o măsură $\mu_k \in C(S)'_+$. Măsurile $\nu_k = f_k \mu_k$ sînt mutual disjuncte şi $\sum \|\nu_k\| = \infty$. Fie $\{A_j\}_j$ un o descompunere a lui $\mathbb{N}$ în părţi finite şi disjuncte astfel că $\|\lambda_j\| \geq 1$ pentru orice j , unde $\lambda_j = \sum_{k \in A_j} \nu_k$. Inmulţind cu constante pozitive convenabile, putem chiar presupune că $\|\lambda_j\| = 1$. Şirul $\{\lambda_j\}_j$ fiind echivalent cu baza naturală a lui ℓ_1, un cunoscut criteriu de slab compacitate a lui Grothendieck ne asigură existenţa unui $\delta > 0$, a unui subşir $\{\lambda_{n_j}\}_j$ şi a unui şir de elemente disjuncte , $g_j \in C(S)$, astfel că

$$0 \leq g_j \leq 1_S$$

şi

$$\lambda_{n_j}(g_j) > \delta$$

pentru orice j . Fie $B_j = A_{n_j}$. Intrucît $\sum_{k \in B_j} \nu_k(g_j) = \lambda_{n_j}(g_j) > \delta$ Lema 1.1 ne asigură existenţa pentru fiece j a unei familii disjuncte de funcţii $h_k \in [0, g_j]$ $(k \in B_j)$ astfel că $\sum_{k \in B_j} \nu_k(h_k) > \delta$. Să punem $h_k = 0$ pentru $k \notin \bigcup B_j$. Atunci $\sum \nu_k(h_k) = \infty$ deci $\sum \mu_k(f_k h_k) = \infty$ şi putem lua $d_k = f_k h_k$, $k \in \mathbb{N}$. ∎

1.3 LEMA. (Cartwright și Lotz [4]). Fie I un ideal închis în laticea Banach L și fie $\varphi : L \longrightarrow L/I$ surjecția canonică. Fie $\{x_k\}_k$ un șir de elemente din L_+ și $\{v_k\}_k$ un șir de elemente disjuncte din L/I astfel că $0 \leq v_k \leq \varphi(x_k)$ pentru orice k. Atunci există un șir de elemente disjuncte $\{d_k\}_k$ în L încît

$$\varphi(d_k) = v_k$$

și

$$0 \leq d_k \leq x_k$$

pentru orice k.

Demonstrație. Înmulțind cu constante pozitive convenabile putem presupune că $\sum \| x_k \| < \infty$. Pentru fiece k alegem un $z_k \in [0, x_k]$ încît $\varphi(z_k) = v_k$ și punem $d_k = z_k - z_k \wedge (\sum\limits_{j \neq k} z_j)$. Avem

$$0 \leq d_k \wedge d_j \leq (z_k - z_k \wedge z_j) \wedge (z_j - z_k \wedge z_j) = 0$$

și deci elementele d_j sînt disjuncte. Este clar că $d_k \in [0, x_k]$. Apoi,

$$\varphi(d_k) = \varphi(z_k) - \varphi(z_k) \wedge \varphi(\sum_{j \neq k} z_j) = v_k \quad \blacksquare$$

1.4 LEMA (Cartwright și Lotz [4]). Fie L o latice Banach și $\{x_k\}_k$ un șir normic mărginit din L care nu este o-mărginit nici măcar în L''.

Atunci există un șir de elemente disjuncte d_k în L_+ cu $0 \leq d_k \leq x_k$ care nu este o-mărginit în L''.

Demonstrația. Considerăm mai întîi cazul cînd L este un spațiu $L_1(X, \Sigma, \mu)$ cu $\mu(X) < \infty$. Fie $x^*(t) = \sup x_k(t)$, $t \in X$. Funcția x^* nu este integrabilă.

Fie $X_0 = \{ t \in X \; ; \; x^*(t) < \infty \}$.

Considerăm cazul cînd $\mu(X \setminus X_0) = 0$. şi punem $B_k = \{t \in X_0 ; x_k(t) > x^*(t) - 1\}$ şi $A_k = B_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} B_j$ pentru fiece k. Mulţimile A_k sînt mutual disjuncte şi pe $X_0 = \bigcup A_k$ avem $\underbrace{\sup}_{k} x_k(t) \chi_{A_k}(t) > x^*(t) - 1$. Intrucît funcţia $\sup_k x_k(t) \chi_{A_k}(t)$ nu este integrabilă, putem lua $d_k = x_k \chi_{A_k} \in L$.

In cazul cînd $\mu(X \setminus X_0) > 0$ vom observa că deoarece şirul $\{x_k\}_k$ este normic mărginit, mulţimea $X \setminus X_0$ nu poate conţine nici-un atom. Atunci există o funcţie măsurabilă şi pozitivă h pe X astfel că $h(t) = 0$ pe X_0 şi $\int h \, d\mu = \infty$. Alegem $d_n = x_n \wedge h$.

Revenim la cazul general al unei latici L. Deoarece şirul $\{x_k\}_k$ nu este o-mărginit în L'', există un $x' \in L'_+$ astfel că

$$\sup x'\Big(\bigvee_{k=1}^{n} x_k \Big) = \infty$$

Fie u_k imaginea canonică a lui x_k în AL-spaţiul (E'', x'). Alegem un şir $\{v_k\}_k$ în (E'', x') de elemente disjuncte care să nu fie majorat şi $0 \leq v_k \leq u_k$ pentru orice k. Deoarece x' este funcţională o-continuă pe E'', atunci E''/I este un ideal în (E'', x'). Am notat $I = \{x'' \in E''; \; |x''|(x') = 0\}$. Conform Lemei 1.3 există un şir y''_k în E'' încît $0 \leq y''_k \leq x_k$ şi imaginea canonică a lui y''_k în (E'', x') este v_k. Avem

$$\sum_{k=1}^{n} y''_k(x') = \bigvee_{k=1}^{n} y''_k(x') = \Big\| \bigvee_{k=1}^{n} v_k \Big\| .$$

şi conform Lemei 1.2 există un şir de elemente mutual disjuncte

$x'_k \in [0,x']$ încît $\sum y^n_k(x'_k) = \infty$ Avem deasemeni $\sum x'_k(x_k) = \infty$ şi o nouă aplicare a Lemei 1.2 ne dă un şir $\{d_k\}_k$ de elemente disjuncte din L_+ cu $0 \leq d_k \leq x_k$ pentru fiece k şi $\sum x'_k(d_k) = \infty$. Deoarece $0 \leq x'_k \leq x'$ rezultă

$$\sup x'(\bigvee_{k=1}^{n} d_k) = \sum x'(d_k) = \infty$$

şi deci $\{d_k\}_k$ nu este o-mărginit în L''. ∎

1.5 TEOREMA (Cartwright şi Lotz [4]). Fie L o latice Banach şi X un spaţiu Banach.

(a) Un operator $T \in \mathcal{L}(L,X)$ este con absolut sumabil dacă şi numai dacă $\sum \| T(x_k) \| < \infty$ pentru orice şir sumabil de elemente disjuncte x_k din L_+.

(b) Un operator $T \in \mathcal{L}(X,L)$ este majorizant dacă şi numai dacă pentru orice şir $\{z_k\}_k$ convergent la 0 în X şi orice şir $\{x_k\}_k$ de elemente disjuncte din L_+ cu $0 \leq x_k \leq |Tz_k|$ $(k \in \mathbb{N})$, şirul $\{x_k\}_k$ este slab sumabil.

Demonstraţie. Partea de necesitate este clară. Suficienţa la punctul (b) rezultă din Lema 1.4.

Fie $T \in \mathcal{L}(L,X)$ un operator care transformă orice şir sumabil de elemente disjuncte din L_+ într-un şir absolut sumabil. Vrem să arătăm că T este con absolut sumabil sau, echivalent, că T' este majorizant. Intr-adevăr, presupunînd contrariul ar rezulta din afirmaţia (b) existenţa unui şir $\{z'_k\}_k$ convergent la 0 în X', a unui şir $\{x'_k\}_k$ de elemente disjuncte din L'_+ care nu este slab sumabil dar $0 \leq x'_k \leq |T'z'_k|$ $(k \in N)$. Alegem $x \in L_+$ încît

$$\sum x'_k(x) = \infty$$

Din Lema 1.2 rezultă un şir de elemente disjuncte $x_k \in [0,x]$ încît $\sum x'_k(x_k) = \infty$. Rezultă $\sum |T'z'_k| x_k = \infty$.

Dar

$$|T'z'_k| x_k = \sup \{ T'z'_k(y_k) ; \ y_k \in [-x_k, x_k] \}$$

şi deci pentru fiece k există elemente $y_k \in [-x_k, x_k]$ încît $\sum z'_k(Ty_k) = \infty$. Aceasta contrazice ipoteza căci şirurile $\{\|z'_k\| y_k^+\}$ şi $\{\|z'_k\| y_k^-\}$ sînt sumabile şi disjuncte în L_+ şi

$$\sum |z'_k(Ty_k)| \leq \sum \|z'_k\| \cdot \|Ty_k\| \leq$$
$$\leq \sum \|z'_k\| \cdot \|Ty_k^+\| + \sum \|z'_k\| \cdot \|Ty_k^-\| \ \blacksquare$$

Din Teorema 1.5 rezultă noi caracterizări ale laticilor de tip AM :

O latice Banach L este izomorfă cu o latice de tip AM dacă şi numai dacă orice şir de elemente disjuncte şi pozitive, normic convergent la 0 în L este o-mărginit în L".

O latice Banach L este izomorfă cu o latice de tip AM dacă şi numai dacă orice şir normalizat de elemente disjuncte din L_+ este echivalent cu baza naturală a lui c_0.

Tehnicile de disjunctare permit însă demonstrarea şi a altor rezultate ca de exemplu următoarea precizare la o teoremă a lui Bessaga şi Pelczynski :

1.6 TEOREMA. Fie L o latice Banach astfel că L' conține o sublatice izomorfă cu c_0. Atunci L conține o sublatice izomorfă cu .

Demonstrație. Conform ipotezei există un şir $\{d'_k\}_k$ de elemente disjuncte din L'_+ şi constante m, M > 0 astfel că pentru orice familie de scalari $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ avem

$$m \max |\lambda_k| \le \| \sum \lambda_k d'_k \| \le M \max |\lambda_k| .$$

Există $d' = \sup_k d'_k \in L'$ şi $\|d'\| \le M$. Fie $1>\varepsilon>0$. Pentru fiece indice k alegem cîte un element $x_k \in L_+$ încît $\|x_k\| \le 1$ şi $d'_k(x_k) \ge (1-\varepsilon)\|d'_k\| \ge (1-\varepsilon)m$. Conform demonstrației la Lema 1.2 ,pentru $\delta > 0$ există un subşir $\{d'_{n_k}\}$ a lui $\{d'_k\}_k$ şi un subşir de elemente disjuncte $\{d_k\}_k \subset L$ încît $0 \le d_k \le x_{n_k}$ şi $d'_{n_k}(d_k) \ge \delta\, d'_{n_k}(x_{n_k}) \ge \delta(1-\varepsilon)m$ pentru orice k .Atunci pentru orice familie finită $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ avem

$$\sum |\lambda_k| \ge \| \sum \lambda_k d_k \| = \| \sum |\lambda_k| d_k \| \ge$$

$$\ge \frac{1}{M} x'\left(\sum |\lambda_k| d_k\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{M} \sum |\lambda_k|\, x'(d_k) \ge$$

$$\ge \frac{m\delta(1-\varepsilon)}{M} \sum |\lambda_k|$$

ceea ce implică faptul că $\{d_k\}_k$ este echivalent cu baza naturală a lui ℓ_1 . ■

2. OPERATORI COMPACȚI DEFINIȚI PE LATICI BANACH

Principalele rezultate obținute în această problematică se datoresc lui Dodds și Fremlin [6] și Aliprantis și Burkinshaw [1]. Ei propun realizarea operatorilor compacți dintr-un produs de trei operatori cu diferite grade de compacitate.

Fie E latice Banach, F latice Banach și $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Spunem că T este <u>aproape o-mărginit</u> dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element $u \in F_+$ astfel că

$$Tx \in \varepsilon B(F) + [-u, u] \qquad \text{pentru orice } x \in E.$$

Am notat cu $B(F)$ bula unitate a lui F.

Spunem că T este <u>$(\sigma, |\sigma|)$-precompact</u> dacă toate compunerile $E_x \xrightarrow{i_x} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{1} (F, |\sigma|)$ sînt precompacte ; $|\sigma|$ semnifică topologia dată de seminormele $y'(|\cdot|)$ cu $y' \in F'_+$.

Spunem că T este <u>aproape absolut</u> continuu dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $x' \in E'_+$ astfel încît

$$\|Tx\| \le \varepsilon \|x\| + x'(|x|) \qquad \text{pentru orice } x \in E.$$

Orice operator compact este simultan de una din formele specificate mai sus și dacă compunem un operator aproape absolut continuu cu un operator $(\sigma, |\sigma|)$-compact și apoi cu un operator aproape o-mărginit obținem un operator compact.

2.1 TEOREMA. (Aliprantis şi Burkinshaw [1]). Fie $T \in \mathcal{L}(E,E)$ un operator compact şi pozitiv. şi fie $S \in \mathcal{L}(E,E)$ un operator pozitiv astfel că $0 \leq S \leq T$.

Atunci S^3 este un operator compact.

Demonstraţia se reduce în esenţă la motivarea faptului că fiecare din cele 3 clase de operatori semnalate mai sus sînt ideale în sensul ordinei, adică verifică condiţia

$$0 \leq S \leq T \ , \ T \in \mathcal{C} \quad \text{implică} \quad S \in \mathcal{C}.$$

Un exemplu care ne arată că puterea 3 nu poate fi redusă se obţine astfel. Notăm cu $\{r_n\}_n$ sistemul funcţiilor Rademacher şi considerăm operatorii $S_1 : \ell_1 \longrightarrow L_2[0,1]$ $S_2 : L_2[0,1] \longrightarrow \ell_\infty$, $T_1 : \ell_1 \longrightarrow L_2[0,1]$ şi $T_2 : L_2[0,1] \longrightarrow \ell_\infty$ definiţi prin

$$S_1(\{a_n\}_n) = \sum a_n r_n^+$$
$$S_2(f) = \left(\int_0^1 f r_1^+ dx \ , \ \int_0^1 f r_2^+ dx, \ldots\right)$$
$$T_1(\{a_n\}_n) = \left(\sum a_n\right) \cdot \chi_{[0,1]}$$
$$T_2(f) = \left(\int_0^1 f dx \ , \ \int_0^1 f dx, \ldots\right)$$

Considerăm $E = \ell_1 \oplus L_2[0,1] \oplus \ell_\infty$ şi

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ S_1 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Atunci $0 \leq S \leq T$, T este compact şi

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ S_2 S_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nu este compact.

3. OPERATORI CONTINUI IN SENSUL ORDINEI

Fie L o latice Banach şi X un spaţiu Banach.
Spunem că un operator $T \in \mathcal{L}(L,X)$ este de tip A dacă

$0 \leq x_n \downarrow$ în E implică $\{Tx_n\}_n$ este normic convergent

Spunem că T este de tip B dacă

$0 \leq x_n \uparrow$, $\|x_n\| \leq K$ în L implică $\{Tx_n\}_n$ este normic convergent în X.

Dacă L este o latice Banach σ- completă atunci I_L este de tip A $\iff$ L este o latice cu topologie σ-continuă şi I_L este de tip B $\iff$ L este o latice Banach slab secvenţial completă. Rezultatele obţinute de Lozanovski [9] Meyer-Nieberg [10], [11] şi Lotz [8] privind aceste două clase de latici au reprezentat principalele rezultate obţinute în teoria laticilor Banach în jurul anilor 70. Este interesant de remarcat că analogul operatorial al acestor rezultate este încă adevărat şi contextul lor de valabilitate poate fi extins.

Vom nota că Dodds [5] a fost primul care a dat atenţie operatorilor de tip A (numindu-i O- slab compacţi, deoarece se arată imediat că aceşti operatori sînt precis operatorii care transformă intervalele în mulţimi relativ slab compacte). Rezultatele noastre, expuse în [12] şi [13] le conţin pe acelea ale lui Dodds.

Incercînd să prezentăm un rezumat al acestor rezultate vom începe cu o extensie a noțiunii de σ -completitudine a unei latici Banach .

O latice Banach L se numește <u>aproape σ- completă</u> dacă pentru orice șir o-mărginit de elemente pozitive mutual disjuncte $d_n \in L$ există un opertor $T \in \mathcal{L}(\ell_\infty, L)$ astfel că $Te_n = d_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Am notat cu $\{e_n\}_n$ baza naturală a lui c_0 .

Un șir $\{d_n\}_n$ ca în definiția de mai sus este slab sumabil și deci asociat unui operator $T \in \mathcal{L}(c_0, L)$. Definiția spune că dacă L este aproape σ-complet atunci T se extinde la ℓ_∞ .

Este clar că orice latice Banach σ-completă este și aproape σ - completă.

3.1 LEMA. Fie L o latice Banach aproape σ-completă și I un ideal închis al său .Atunci L/I este deasemeni aproape σ- completă.

In particular laticea Banach $C(\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}) = \ell_\infty/c_0$ este aproape σ - completă deși nu este σ -completă.

3.2 LEMA .Admitem axioma continuului.Atunci orice latice Banach care are proprietatea interpolatorie este aproape σ - completă.

Amintim că o latice Banach L are proprietatea interpolatorie dacă pentru orice șiruri $\{x_n\}_n$ și $\{y_n\}_n$ din L cu $x_m \leq y_n$ pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$ există un $x \in L$ încît $x_n \leq x \leq y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3.3 LEMA. Orice sublatice complementată a unei latici aproape σ-completă este aproape σ-completă.

Se ştie că proprietatea interpolatorie nu se transmite în mod necesar subLaticilor complementate. Vezi [15]. Rezultă că proprietatea interpolatorie este distinctă de proprietatea de aproape σ - completitudine.

3.4 TEOREMA. Fie L o latice Banach aproape σ-completă, X un spaţiu Banach şi $T \in \mathcal{L}(L,X)$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente

i) T este de tip A ;

ii) T" transformă idealul I_E, generat de E în E", într-o parte a lui F ;

iii) T are proprietatea lui Pelczynski (u), adică pentru orice şir slab Cauchy $\{x_n\}_n$ în E există un şir slab sumabil $\{y_n\}_n$ în $\overline{T(L)}$ astfel că

$$Tx_n - \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow{w} 0 ;$$

iv) Nu există nici-un subspaţiu Z a lui L, izomorf cu $C[0,1]$ astfel că $T|Z$ să fieun izomorfism

v) Nu există nici-un subspaţiu Z a lui L, izomorf cu ℓ_∞ astfel că $T|Z$ este un izomorfism .

3.5 TEOREMA. Fie L o latice Banach, X un spaţiu Banach şi $T \in \mathcal{L}(L,X)$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

i) T este de tip B ;

ii) Dacă $\{x_n\}_n$ este un şir slab sumabil de elemente pozitive a lui L atunci $\|Tx_n\| \longrightarrow 0$;

iii) Nu există nici o sublatice Z a lui L, izomorfă cu c_0 astfel că $T|Z$ este un izomorfism.

Cititorul interesat va găsi detaliile de demonstrații în [12].

Menționăm în încheiere faptul că autorul nu cunoaște dacă operatorii de tip B sînt precis operatorii care transformă șirurile slab Cauchy în șiruri slab convergente.

BIBLIOGRAFIE

1. C.D.Aliprantis and O.Burkinshaw,Positive compact operators on Banach lattices,Math.Z. 174(1980),289-298
2. A.V.Buhvalov,A.I.Veksler și G.Ia.Lozanovski,Latici Banach.Aspecte izomorfe, Uspehi Mat.Nauk 34(1979), 137-183 (In limba rusă).
3. D.I.Cartwright and H.P.Lotz,Some characterisations of AM- and AL- spaces, Math.Z. 142(1975),97-103
4. D.I.Cartwright and H.P.Lotz, Disjuncte Folgen in Banachverbanden und Kegel-absolutsummierende operatoren,Archiv der Math. XXVIII(1977) ,525-532
5. P.G.Dodds, o-weakly compact mappings of Riesz spaces, Trans.A.M.S. 214 (1975), 389-402
6. P.G.Dodds and D.H.Fremlin ,Compact operators in Banach lattices ,Israel J.Math. 24(1979),287-320
7. A.Grothendieck ,Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C(K),Canad.J.Math.5(1953) 129- 173

8. H.P.Lotz ,Minimal and reflexive Banach lattices, Math. Ann 209 (1974),117- 126

9. Lozanovski G.Ja., On ordered Banach spaces and bases, Funkt.Analiz i Priloz. 3(1967), 92

10.P.Meyer-Nieberg ,Zur schwachen Kompaktheit in Banach - verbanden ,Math.Z. 134(1973),303-315

11.P.Meyer-Nieberg.Charakterisierung einiger topologischer und ordnungstheoretischer Eigenschaften von Banachver- banden mit Hilfe diejunkter Folgen, Arch.Math. 24(1973), 640 - 647

12.C.Niculescu , On σ-continuous operators ,to appear

13.C.Niculescu , Latici Banach aproape σ-complete,comunicare la Acad.R.S.R., 13 mai 1982

14.H.P.Rosenthal, On relatively disjoint families of mea- sures with some applications to Banach space theory, Studia Math. 37(1970),13-36

15.G.L.Seever, Measures on F-spaces,Trans.A.M.S. 133(1968), 267-280

16. U.Schlotterbeck, Uber Klasenn Majorisierbarer Operatoren auf Banachverbanden ,Revista de la Academia de ciencias exactas, fis.-quimicas y naturales Zaragoza II Ser.26 (1971),585-614

CONURI LATICIALE IN TEORIA APROXIMARII

de

G.Păltineanu

Prin con laticial se înţelege un con convex de funcţii reale şi mărginite pe o mulţime X, care conţine funcţiile constante şi este închis la operaţiile laticiale. Pentru un asemenea con se poate stabili o teoremă de tip Kakutani-Stone care permite apoi construirea unei teorii a compactificării ordonate a unui spaţiu topologic ordonat.

In lucrarea de faţă se prezintă în mod unitar şi concis această teorie, folosindu-se de regulă demonstraţii directe, care diferă de cele întîlnite în literatura de specialitate.

§ 1. Teorema de caracterizare

In cele ce urmează, pentru orice mulţime X vom nota cu B(X) spaţiul funcţiilor reale şi mărginite pe X. Pe acest spaţiu se consideră topologia convergenţei uniforme dată de norma
$f \longrightarrow \|f\| = \sup \{ |f(x)| \; ; x \in X \}$.

Definiţia 1. Un con $\Gamma \subset B(X)$ se numeşte con laticial (de funcţii) pe X dacă

1) Conţine funcţiile constante,

2) Γ este latice ($f \vee g \in \Gamma$ şi $f \wedge g \in \Gamma$ pentru orice $f, g \in \Gamma$).

Definiţia 2. Dacă $\Gamma \subset B(X)$ este un con laticial pe X, atunci vom nota cu $\overline{\Gamma}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f \in B(X)$ care au proprietatea că pentru orice $s, r \in \mathbb{R}$ în situaţia $s > r$, există $g_{sr} \in \Gamma$ cu proprietăţile:

1) $0 \leq g_{sr} \leq 1$

2) $g_{sr}(x)=1$ dacă $f(x)\geqslant s$

3) $g_{sr}(x)=0$ dacă $f(x)< r$

<u>Observația 1</u>. Dacă pentru orice $f\in B(X)$ și orice $t\in\mathbb{R}$, notăm cu $\{f\geqslant t\}=\{x\in X;\ f(x)\geqslant t\}$, atunci $f\in\widetilde{\Gamma}$ dacă și numai dacă pentru orice $s,r\in\mathbb{R}$, $s>r$, există $g_{sr}\in\Gamma$ astfel încît

$$\mathbb{1}_{\{f\geqslant s\}}\leqslant g_{sr}\leqslant \mathbb{1}_{\{f\geqslant r\}}\quad{}^{1)}$$

<u>Observația 2</u>. Dacă Γ este con laticial pe X, atunci $\Gamma\subset\widetilde{\Gamma}$

Intr-adevăr, dacă $f\in\Gamma$ și $s>r$, atunci fie

$$(1)\quad g_{sr}=\frac{\mathbb{1}\wedge[(f-r)\vee 0]}{s-r}$$

Deoarece Γ este con laticial, rezultă imediat că $g_{sr}\in\Gamma$. Pe de altă parte se verifică ușor că funcția definită de (1) are proprietatea $\mathbb{1}_{\{f\geqslant s\}}\leqslant g_{sr}\leqslant \mathbb{1}_{\{f\geqslant r\}}$

<u>Lema 1.</u> Dacă Γ este con laticial pe X, atunci $\widetilde{\Gamma}$ este <u>con laticial închis</u> pe X.

<u>Demonstrație</u>.

Pentru început vom arăta că dacă $f_1,f_2\in\widetilde{\Gamma}$ atunci $f_1+f_2\in\widetilde{\Gamma}$. Intr-adevăr, fie $s>r$ și $\varepsilon=\frac{s-r}{3}$

Pentru orice $x\in X$, există $m=m(x)\in Z$ astfel încît

$$(2)\quad s-(m-1)\varepsilon > f_1(x)\geqslant s-m\varepsilon$$

Dacă presupunem în plus că $x\in\{f_1+f_2\geqslant s\}$, atunci $f_2(x)\geqslant s-f_1(x)$ și deci avem

$$(3)\quad f_2(x)\geqslant (m-1)\varepsilon$$

---

1) Pentru orice mulțime $A\subset X$ se notează cu $\mathbb{1}_A$ funcția sa caracteristică.

Din (2) şi (3) rezultă

$$(4)\quad \{f_1+f_2 \geqslant s\} \subset \bigcup_{m\in Z} \left[\{f_1 \geqslant s-m\varepsilon\}\cap\{f_2 \geqslant (m-1)\varepsilon\}\right] = E$$

Deoarece f_1 şi f_2 sînt mărginite pe X, numai un număr finit de mulţimi din reuniunea din dreapta vor fi nevide . Fie $Z_0 \subset Z$, Z_0 finită, astfel încît

$$(5)\quad E = \bigcup_{m\in Z_0} \left[\{f_1 \geqslant s-m\varepsilon\} \cap \{f_2 \geqslant (m-1)\varepsilon\}\right]$$

Cum $f_1, f_2 \in \widetilde{\Gamma}$, pentru orice $m \in Z$ există $h_m, g_m \in \Gamma$ astfel încît:

$$(6)\quad 1_{\{f_1 \geqslant s-m\varepsilon\}} \leqslant h_m \leqslant 1_{\{f_1 \geqslant s-(m+1)\varepsilon\}}$$

$$(7)\quad 1_{\{f_2 \geqslant (m-1)\varepsilon\}} \leqslant g_m \leqslant 1_{\{f_2 \geqslant (m-2)\varepsilon\}}$$

In continuare avem

$$1_{\{f_1+f_2 \geqslant s\}} \leqslant 1_E = \bigvee_{m\in Z_0} 1_{\{f_1 \geqslant s-m\varepsilon\}\cap\{f_2 \geqslant (m-1)\varepsilon\}} \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_{m\in Z_0}(h_m \wedge g_m) \leqslant \bigvee_{m\in Z_0} 1_{\{f_1 \geqslant s-(m+1)\varepsilon\}\cap\{f_2 \geqslant (m-2)\varepsilon\}} \leqslant$$

$$\leqslant 1_{\{f_1+f_2 \geqslant s-3\varepsilon\}} = 1_{\{f_1+f_2 \geqslant r\}}$$

Aşadar, rezultă

$$(8)\quad 1_{\{f_1+f_2 \geqslant s\}} \leqslant \bigvee_{m\in Z_0} (h_m \wedge g_m) \leqslant 1_{\{f_1+f_2 \geqslant r\}}$$

Deoarece Z_0 este finită şi Γ este latice, rezultă că

$\bigvee_{m\in Z_0} (h_m \wedge g_m) \in \Gamma$ şi deci că $f_1+f_2 \in \widetilde{\Gamma}$

Fie $f \in \widetilde{\Gamma}$, $\alpha > 0$ şi $s > r$. Atunci există $g \in \Gamma$ astfel încît

$$\mathbb{1}_{\{f \geq \frac{s}{\alpha}\}} \leq g \leq \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{r}{\alpha}\}}$$, de unde rezultă

(9) $\mathbb{1}_{\{\alpha f \geq s\}} \leq g \leq \mathbb{1}_{\{\alpha f \geq r\}}$ și deci că $\alpha f \in \widetilde{\Gamma}$

Am arătat deci că $\widetilde{\Gamma}$ este con convex. Faptul că $\widetilde{\Gamma}$ conține funcțiile constante este evident. Este de asemenea imediat că $\widetilde{\Gamma}$ este latice. Rămîne să arătăm că $\widetilde{\Gamma}$ este închis în topologia convergenței uniforme pe X.

Pentru aceasta, fie $\{f_n\} \subset \widetilde{\Gamma}$, $f_n \longrightarrow f$ și $s > r$.

Pentru $\varepsilon = \frac{s-r}{3}$, există $n_\varepsilon \in N$ așa ca

(10) $\|f_{n_\varepsilon} - f\| < \varepsilon$ și deci

(11) $f - \varepsilon \leq f_{n_\varepsilon} \leq f + \varepsilon$

Deoarece $f_{n_\varepsilon} \in \Gamma$, din Observația 2 rezultă că există $h \in \Gamma$ astfel încît

(12) $\mathbb{1}_{\{f_{n_\varepsilon} \geq s-\varepsilon\}} \leq h \leq \mathbb{1}_{\{f_{n_\varepsilon} \geq s-2\varepsilon\}}$

In continuare, din (11) și (12) rezultă

$$\mathbb{1}_{\{f \geq s\}} \leq \mathbb{1}_{\{f_{n_\varepsilon} \geq s-\varepsilon\}} \leq h \leq \mathbb{1}_{\{f_{n_\varepsilon} \geq s-2\varepsilon\}} \leq \mathbb{1}_{\{f \geq s-3\varepsilon\}} \leq \mathbb{1}_{\{f \geq r\}}$$

Așadar, $f \in \widetilde{\Gamma}$ și cu aceasta demonstrația lemei este terminată.

<u>Teorema 1 (de caracterizare).</u>

Dacă Γ este un con laticial pe X, atunci $\overline{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}$

<u>Demonstrație</u>.

Faptul că $\overline{\Gamma} \subset \widetilde{\Gamma}$, rezultă din Observația 1 și Lema 1.

Rămîne să verificăm incluziunea inversă. Pentru aceasta, fie $f \in \widetilde{\Gamma}$. Deoarece $\widetilde{\Gamma} \subset B(X)$, este con convex și conține funcțiile constante, putem presupune că $f \geq 0$.

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar și fie $n_0 \in N$ astfel încît

(13) $f \leq n_0 \varepsilon$

Cum $f \in \widetilde{\Gamma}$, rezultă că pentru orice $n \in N$ există $g_n \in \Gamma$ cu proprietatea

(14) $\quad \mathbb{1}_{\{f \geq n\varepsilon\}} \leq g_n \leq \mathbb{1}_{\{f \geq (n-1)\varepsilon\}}$

In continuare, avem

$n\varepsilon g_n \leq n\varepsilon\, \mathbb{1}_{\{f \geq (n-1)\varepsilon\}} \leq f+\varepsilon$ pentru orice $n \in N$, de unde rezultă acum

(15) $\quad f+\varepsilon \geq g = \bigvee_{n=1}^{n_0+1} n\varepsilon g_n \in \Gamma$

Pe de altă parte, pentru orice $x \in X$, există $m=m(x) \in N$ astfel încît

(16) $\quad m\varepsilon \leq f(x) \leq (m+1)\varepsilon$

Evident, $m+1 \leq n_0$ şi deci avem

(17) $\quad g(x) \geq m\varepsilon\, g_m(x)$

In continuare, din (16) rezultă că $x \in \{f \geq m\varepsilon\}$ şi din (14)

(18) $\quad g_m(x)=1$. Acum din (16), (17) şi (18) vom avea

(19) $\quad g(x) \geq m\varepsilon \geq f(x)-\varepsilon$. Din (15) şi (19) rezultă că

$\|f-g\| < \varepsilon$ şi deci că $f \in \overline{\Gamma}$

§ 2. Teorema Kakutani-Stone pentru conuri laticiale

In acest paragraf cu X se notează un spaţiu Hausdorff compact şi cu C(X) mulţimea funcţiilor continue pe X cu valori reale.

Dacă $\Gamma \subset C(X)$ este un con laticial, vom introduce următoarea relaţie de preordine pe X:

(1) $x \leq_{\Gamma} y$ dacă şi numai dacă $g(x) \leq g(y), (\forall) g \in \Gamma$

Este clar că dacă presupunem în plus că Γ separă punctele lui X, rezultă că relaţia definită de (1) este chiar o relaţie de ordine.

Teorema 2 (Kakutani-Stone).

Dacă X este un spaţiu Hausdorff compact şi $\Gamma \subset C(X)$ este un con laticial, atunci închiderea sa $\overline{\Gamma}$ coincide cu mulţimea tuturor funcţiilor $f \in C(X)$ care sînt crescătoare faţă de relaţia de preordine $\underset{\Gamma}{\leq}$ definită de (1).

Demonstraţie.

Fie $\mathcal{F}$ mulţimea tuturor funcţiilor $f \in C(X)$ care au proprietatea că $f(x) \leq f(y)$ dacă $x \underset{\Gamma}{\leq} y$.

Deoarece incluziunea $\overline{\Gamma} \subset \mathcal{F}$ este evidentă, rămîne să verificăm incluziunea inversă. Din Teorema 1 rezultă că este suficient să arătăm că $\mathcal{F} \subset \widetilde{\Gamma}$. Fie deci $f \in \mathcal{F}$ şi $s, r \in \mathbb{R}$, în situaţia $s > r$. Presupunem prin absurd că $f \notin \widetilde{\Gamma}$. Atunci există $x_0 \in \{f \geq s\}$ şi $y_0 \in \overline{\{f < r\}}$ astfel încît $x_0 \underset{\Gamma}{\leq} y_0$. Intr-adevăr, dacă nu ar fi aşa, pentru orice $x \in \{f \geq s\}$ şi orice $y \in \overline{\{f < r\}}$, ar exista $g_{xy} \in \Gamma$ astfel încît $g_{xy}(x) > g_{xy}(y)$. Fără a restrînge generalitatea (Γ fiind con laticial), putem presupune că $0 \leq g_{xy} \leq 1$, $g_{xy}(x)=1$ şi $g_{xy}(y)=0$.

Fixăm $x \in \{f \geq s\}$. Din cele de mai sus rezultă că pentru orice $y \in \overline{\{f < r\}}$, există $g_y \in \Gamma$, cu proprietăţile $0 \leq g_y \leq 1$, $g_y(x)=1$ şi $g_y(y)=0$.

Fie $U_y = \{g_y < \frac{1}{4}\}$. Evident, U_y este deschisă şi $y \in U_y$. Deoarece $\overline{\{f < r\}}$ este compactă, rezultă că există un număr finit $y_1, \ldots, y_n \in \overline{\{f < r\}}$ astfel încît $\overline{\{f < r\}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$

Dacă notăm cu $g_x = \bigvee_{i=1}^{n} g_{y_i}$, atunci $g_x \in \Gamma$, $g_x(x)=1$ şi $g_x(y) < \frac{1}{4}$ pentru orice $y \in \overline{\{f < r\}}$.

Fie acum $V_x = \{g_x > \frac{3}{4}\}$. Evident, $\{V_x\}_{x \in \{f \geq s\}}$ este o acoperire deschisă a mulţimii compacte $\{f \geq s\}$ şi deci există $x_1, \ldots, x_m \in \{f \geq s\}$ astfel încît

$$\{f \geq s\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$$

Dacă notăm acum cu $g = \bigwedge_{i=1} g_{x_i}$, atunci $g \in \Gamma$, $0 \leq g \leq 1$, $g > \frac{3}{4}$ pe mulţimea $\{f \geq s\}$ şi $g < \frac{1}{4}$ pe mulţimea $\overline{\{f < r\}}$.

In continuare avem:

$$(2) \quad \mathbb{1}_{\{f \geq s\}} \leq \mathbb{1}_{\{g \geq \frac{3}{4}\}} \leq 2\left[(g - \tfrac{1}{4}) \vee 0\right] \leq \mathbb{1}_{\{g \geq \frac{1}{4}\}} \leq \mathbb{1}_{\{f \geq r\}}$$

Deoarece Γ este con laticial, rezultă că $2\left[(g-\frac{1}{4}) \vee 0\right] \in \Gamma$

Cum şi s şi r au fost luaţi arbitrari cu condiţia $s > r$, înseamnă că din (2) rezultă că $f \in \widetilde{\Gamma}$, contrar ipotezei de absurd.

Aşadar, dacă presupunem prin absurd că $f \notin \widetilde{\Gamma}$, atunci există $x_0 \in \{f \geq s\}$ şi $y_0 \in \overline{\{f < r\}}$, astfel încît $x_0 \underset{\Gamma}{\leq} y_0$. Deoarece $f \in \mathcal{F}$, rezultă $f(x_0) \leq f(y_0)$.

Dacă notăm cu $E = \{f \geq s\}$ şi cu $F = \{f < r\}$ în continuare vom avea:

$$s \leq \inf f(E) \leq f(x_0) \leq f(y_0) \leq \sup f(\overline{F}) = \sup f(F) \leq r$$

Am ajuns astfel la o contradicţie, deoarece s-a presupus că $s > r$.

<u>Observaţia 3</u>. Dacă în enunţul Teoremei 2 presupunem în plus că Γ este subspaţiu liniar, reobţinem o binecunoscută generalisare a teoremei Stone-Weierstrass pentru latici.

Intr-adevăr, dacă Γ este latice vectorială, atunci $x \underset{\Gamma}{\leq} y$ dacă şi numai dacă $g(x) = g(y)$ pentru orice $g \in \Gamma$. Pe de altă parte, a spune că f este crescătoare faţă de $\underset{\Gamma}{\leq}$ revine la a spune că $f(x) = f(y)$ ori de cîte ori $g(x) = g(y)$ pentru orice $g \in \Gamma$.

Dacă pentru orice $x \in X$, notăm cu

$A(x) = \{y \in X;\ g(y) = g(x),\ (\forall)\ g \in \Gamma\}$, atunci din Teorema 2 şi precizările de mai sus rezultă:

$$\overline{\Gamma} = \{f \in C(X);\ f|A(x) = \text{constant, pentru orice } x \in X\}$$

Evident, dacă se presupune în plus că Γ separă punctele lui X va rezulta că

$$\overline{\Gamma} = C(X)$$

§ 3. Conuri laticiale compatibile pe spaţii ordonate topologice

Fie X o mulţime oarecare şi $\Gamma \subset B(X)$ un con laticial. Vom nota cu τ_Γ cea mai slabă topologie pe X pentru care funcţiile din Γ rămîn continue.

Propoziţia 1. O bază pentru topologia τ_Γ este formată din mulţimile de forma $\{f > 0 > g\}$ cînd f şi g parcurg mulţimea Γ.

Demonstraţie.

Fie $\mathcal{B} = \{f > 0 > g\}_{f,g \in \Gamma}$. Deoarece Γ este latice şi conţine funcţiile constante, rezultă imediat că $X \in \mathcal{B}$ şi că $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ dacă $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

Pentru orice $a \in X$, fie $\mathcal{V}(a)$ mulţimea tuturor submulţimilor $V \subset X$ care au proprietatea că există $f,g \in \Gamma$ astfel încît $V \supset \{f > 0 > g\} \ni a$

Fie $\tilde{\tau}$ topologia pe X în care $\mathcal{V}(a)$ este familia de vecinătăţi ale punctului a. Este evident că $\mathcal{B}$ este baza topologiei $\tilde{\tau}$.

Deoarece pentru orice $f,g \in \Gamma$ mulţimea $\{f > 0 > g\}$ este τ_Γ-deschisă, rezultă că $\tilde{\tau}$ este mai puţin fină ca τ_Γ.

Fie acum $h \in \Gamma$, $a \in X$ şi $\varepsilon > 0$. Dacă notăm cu $f = h - h(a) + \varepsilon$ şi $g = h - h(a) - \varepsilon$, atunci $f,g \in \Gamma$ şi

$$V = \{x;\ |h(x) - h(a)| < \varepsilon\} = \{x;\ f(x) > 0 > g(x)\} \in \mathcal{B}.$$

Prin urmare h este $\tilde{\tau}$-continuă pe X pentru orice $h \in \Gamma$. Cum τ_Γ este cea mai slabă topologie cu această proprietate, rezultă că τ_Γ este mai puţin fină decît $\tilde{\tau}$.

Aşadar, $\tilde{\tau} = \tau_\Gamma$ şi cu aceasta, propoziţia este demonstrată.

Definiţia 3. Se numeşte spaţiu topologic ordonat o mulţime X înzestrată cu o structură topologică τ şi o structură de ordine $\leq$, cu proprietatea că $G = \{(x,y); x \leq y\}$ este o submulţime închisă a lui $X \times X$ faţă de topologia produs.

Propoziţia 2. Orice spaţiu topologic ordonat este Hausdorff.

Demonstraţie.

Să observăm că dacă $x \neq y$, atunci $(x,y) \notin \overline{\Delta}$, unde cu Δ am notat diagonala lui X.

Intr-adevăr, dacă $(x,y) \in \overline{\Delta}$, atunci există un şir generalizat $(z_i, z_i) \in \Delta$ astfel încît $(z_i, z_i) \longrightarrow (x,y)$.

Din definiţia spaţiului topologic ordonat rezultă că avem $x \leq y$ şi $y \leq x$ şi deci $x = y$.

Aşadar, dacă $x \neq y$, atunci $(x,y) \notin \overline{\Delta}$ şi deci există o vecinătate U a lui x şi o vecinătate V a lui y, astfel încît $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. Rezultă că $U \cap V = \emptyset$ şi deci că X este Hausdorff.

Definiţia 4. Fie $(X, \tau, \leq)$ un spaţiu topologic ordonat. Un con laticial închis $\Gamma \subset B(X)$ se numeşte compatibil dacă

a) τ este cea mai slabă topologie pe X pentru care toate funcţiile din Γ sînt continue;

b) $\leq$ este cea mai mare ordine pe X pentru care toate funcţiile din Γ sînt crescătoare.

In continuare, vom nota cu $C_b(X, \leq)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f \in C(X)$ mărginite şi crescătoare.

Propoziţia 3. Un con laticial închis $\Gamma \subset B(X)$ este compatibil dacă şi numai dacă

1) $\Gamma \subset C_b(X, \leq)$

2) Pentru orice $x \in X$ şi orice vecinătate U a sa, există $f \in \Gamma$ şi $g \in -\Gamma$ astfel încît

$$1_{\{x\}} \leq f \wedge g \leq 1_U$$

3) $x \leq y$ dacă şi numai dacă $x \underset{\Gamma}{\leq} y$ [dacă $h(x) \leq h(y)$ pentru orice $h \in \Gamma$]

Demonstraţie.

Necesitatea. Dacă Γ este compatibil, atunci $\tau = \tau_{\Gamma}$ şi funcţiile din Γ sînt crescătoare. Rezultă deci că $\Gamma \subset C_b(X, \leq)$. Mai mult, observăm că Γ separă punctele lui X. Intr-adevăr, din propoziţiile 1 şi 2 rezultă că dacă $x_1 \neq x_2$, atunci există $f_i, g_i \in \Gamma$ $(i=1,2)$ astfel încît $x_i \in U_i = \{ f_i > 0 > g_i \}$ şi $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

Să observăm acum că sau $f_1(x_1) \neq f_1(x_2)$ sau $g_1(x_1) \neq g_1(x_2)$ deoarece în caz contrar, rezultă că $f_1(x_2) > 0 > g_1(x_2)$ şi deci că $x_2 \in U_1$, ceea ce este absurd.

Aşadar, Γ separă punctele lui X şi deci $\underset{\Gamma}{\leq}$ este o relaţie de ordine pe X.

Deoarece Γ este compatibil şi funcţiile din Γ sînt evident crescătoare faţă de $\underset{\Gamma}{\leq}$, rezultă că $x \underset{\Gamma}{\leq} y \Rightarrow x \leq y$.

Pe de altă parte este evident că $x \leq y \Rightarrow x \underset{\Gamma}{\leq} y$. Prin urmare avem demonstraţia lui 3).

Fie acum U o τ-vecinătate a lui x. Cum $\tau = \tau_{\Gamma}$, putem presupunem că există $f, g \in \Gamma$ astfel încît

$x \in U = \{ f > 0 > g \} = \{ (f \wedge -g) > 0 \}$. Dacă introducem notaţiile $\tilde{f} = f \vee 0 \in \Gamma$, $\tilde{g} = (-g \vee 0) \in -\Gamma$ şi

$$h = 1 \wedge \left[\frac{1}{\tilde{f}(x)} \tilde{f} \right], \quad \ell = 1 \wedge \left[\frac{1}{\tilde{g}(x)} \tilde{g} \right] \in -\Gamma \text{ ,atunci}$$

observăm că avem $\quad 1_{\{x\}} \leq h \wedge \ell \leq 1_U$.

Intr-adevăr, dacă $z \notin U$ atunci $f(z) \leq 0$ sau $g(z) \geq 0$ şi deci $\tilde{f}(z) = 0$ sau $\tilde{g}(z) = 0$. Rezultă că $(h \wedge \ell)(z) = 0$. Restul afirmaţiei este evident.

Suficienţa.

Dacă $\Gamma \subset C_b(X, \leq)$, atunci orice funcţie din Γ este τ-continuă şi deci τ este mai fină ca τ_{Γ}

Fie U o τ -vecinătate a lui x. Din (2) rezultă că există $f \in \Gamma$ şi $g \in -\Gamma$ astfel încît

$$1_{\{x\}} \leq f \wedge g \leq 1_U$$

Rezultă atunci că $U \supset \{f > 0 > -g\} \ni x$ şi deci că U este τ_Γ-vecinătate. Aşadar $\tau = \tau_\Gamma$.

Fie $\leq_1$ o altă ordine pe X cu proprietatea că orice funcţie din Γ este crescătoare faţă de această ordine.

Dacă $x \leq_1 y$, atunci $h(x) \leq h(y)$ pentru orice $h \in \Gamma$ şi deci $x \leq_\Gamma y$. Din 3) rezultă acum că $x \leq y$ şi cu aceasta propoziţia este demonstrată.

<u>Definiţia 5.</u> Un spaţiu topologic ordonat se numeşte <u>complet regulat</u> dacă conul $C_b(X,\leq)$ este compatibil.

<u>Observaţia 4.</u> Pe un spaţiu topologic ordonat <u>compact</u>, există cel mult un con laticial închis compatibil.

Intr-adevăr, dacă Γ este un con laticial închis compatibil, atunci $\tau = \tau_\Gamma$ şi "$\leq$" = "$\leq_\Gamma$". Din Teorema 2 rezultă $\Gamma = C(X,\leq)$.

Următorul rezultat este suficient de cunoscut şi de aceea nu-l mai demonstrăm. Pentru demonstraţie indicăm [4], pag.116.

<u>Teorema 3.</u> (Nachbin). Fie X un spaţiu topologic ordonat compact. Dacă φ este o funcţie reală pe X, superior semicontinuă şi crescătoare şi ψ este o funcţie reală pe X, inferior semicontinuă şi crescătoare în situaţia $\varphi \leq \psi$, atunci există o funcţie $f: X \to R$ continuă şi crescătoare astfel încît $\varphi \leq f \leq \psi$.

<u>Propoziţia 4.</u> Orice spaţiu topologic ordonat compact este complet regulat.

<u>Demonstraţie.</u>

Trebuie să arătăm că $\Gamma = C(X,\leq)$ este con laticial închis compatibil.

Pentru început să arătăm că "$\leq$" = "$\leq_\Gamma$"

Faptul că $x \leq y \implies x \leq_\Gamma y$ este evident. Fie acum $x \leq_\Gamma y$

şi să presupunem prin absurd că $x \nleq y$.

Dacă notăm cu

$A = i(x) = \{z;\ x \leq z\}$ şi $B = d(y) = \{z;\ z \leq y\}$, atunci 1_A este superior semicontinuă şi crescătoare, $1_{X \setminus B}$ este inferior semicontinuă şi crescătoare şi

$$1_A \leq 1_{X \setminus B}$$

Din Teorema 3 rezultă că există $f \in C(X, \leq)$ astfel încît $1_A \leq f \leq 1_{X \setminus B}$

In particular, vom avea $f(x)=1$ şi $f(y)=0$ ceea ce contrazice ipoteza $x \leq_{\Gamma} y$. Aşadar, "$\leq$" = "$\leq_{\Gamma}$".

Faptul că τ_Γ este mai puţin fină ca τ este evident.

Să observăm însă că $\Gamma = C(X, \leq)$ separă punctele lui X. Intr-adevăr, dacă $x \neq y$, atunci sau $x < y$ sau $x \nleq y$. In prima situaţie există $f \in \Gamma$ astfel încît $f(x) < f(y)$, pentru că în caz contrar am avea $h(x)=h(y)$ pentru orice $h \in \Gamma$ şi deci $x=y$, contrar ipotezei. In a doua situaţie, există $f \in \Gamma$ astfel încît $f(x)=1 > f(y)=0$, aşa cum am arătat în prima parte a demonstraţiei. Rezultă că topologia τ_Γ este Hausdorff.

Observăm că aplicaţia identică

$$i:\ (X, \tau) \longrightarrow (X, \tau_\Gamma)$$

este o bijecţie continuă de la un compact pe un spaţiu Hausdorff. Conform unui binecunoscut rezultat de topologie "i" este un homeomorfism şi deci $\tau = \tau_\Gamma$.

§ 4. Compactifisarea spaţiilor topologice ordonate

Definiţia 6. Fie X un spaţiu topologic ordonat. Se numeşte compactificare ordonată a lui X o pereche (Y, k) unde Y este un spaţiu topologic ordonat compact iar $k:\ X \longrightarrow Y$ are proprietăţile:

a) k este homeomorfism topologic de la X pe $k(X)$,

b) $x \leq y$ dacă şi numai dacă $k(x) \leq k(y)$

c) $k(X)$ este densă în Y.

Teorema 4. Un spaţiu topologic ordonat X pe care există un con laticial închis compatibil, admite o compactificare ordonată.

Demonstratie.

Fie Γ un con laticial închis compatibil pe X. Vom nota cu Y mulţimea tuturor funcţionalelor $\mu : \Gamma \longrightarrow R$ cu proprietăţile:

a) $\mu(f+g)=\mu(f)+\mu(g)$

b) $\mu(\lambda f)=\lambda\mu(f)$ pentru $\lambda \geq 0$

c) $\mu(f \vee g)=\mu(f) \vee \mu(g)$ şi $\mu(f \wedge g)=\mu(f) \wedge \mu(g)$

d) $\mu(\lambda \mathbb{1})=\lambda$, $(\forall)\lambda \in R$.

Dacă înzestrăm mulţimea Y cu topologia convergenţei punctuale şi ordinea punctuală, rezultă că Y este un spaţiu topologic ordonat. Definim $\kappa : X \longrightarrow Y$ astfel

$$[\kappa(x)](f)=f(x), \quad (\forall) f \in \Gamma.$$

De asemenea, pentru orice $f \in \Gamma$ vom defini $\hat{f} : Y \longrightarrow R$ astfel $\hat{f}(\mu)=\mu(f), (\forall)\mu \in Y$. Este evident că avem $\hat{f}\circ\kappa=f$. In continuare rezultă:

$$\|\hat{f}-\hat{g}\| = \sup\{|(\hat{f}-\hat{g})(\mu)| ; \mu \in Y\} \leq \sup \{|(\hat{f}-\hat{g})[\kappa(x)]| ; x \in X\} =$$

$= \|f-g\|$. Pe de altă parte, dacă notăm cu $\alpha = \|f-g\|$, atunci avem $f-\alpha \leq g \leq f+\alpha$ şi deci $\hat{f}-\alpha \leq \hat{g} \leq \hat{f}+\alpha \Longrightarrow \|\hat{f}-\hat{g}\| \leq \alpha$. Aşadar, are loc egalitatea $\|f-g\| = \|\hat{f}-\hat{g}\|$ şi deci conul $\hat{\Gamma}=\{\hat{f} ; f \in \Gamma\}$ este de asemenea închis în B(Y).

In continuare, vom arăta că Y este compact în raport cu topologia convergenţei punctuale determinată de Γ. Dacă $f \in \Gamma$, atunci $-\|f\| \leq f \leq \|f\|$ şi pentru orice $\mu \in Y$ avem $-\|f\| \leq \mu(f) \leq \|f\|$. Rezultă că $|\mu(f)| \leq \|f\|$, $(\forall)\mu \in Y$. Dacă notăm cu $I(f)=[-\|f\|, \|f\|] \subset R$ şi cu $I=\prod_{f \in \Gamma} I(f)$, atunci I este compact în topologia produs a lui R^{Γ}.

Definim $\varphi : Y \longrightarrow I$ astfel

$$\varphi(\mu)= \prod_{f\in\Gamma}\mu(f)$$

Se verifică uşor că φ este un homeomorfism de la Y înzestrat cu Γ-topologia, la $\varphi(Y)$ înzestrat cu topologia indusă de topologia produs din R^{Γ}. Rezultă că dacă arătăm că $\varphi(Y)$ este închis în topologia produs, va rezulta că Y este compact în topologia slabă. Faptul că $\varphi(Y)$ este închis rezultă din egalitatea

$$\varphi(Y)= \bigcap_{f,g\in\Gamma}\{z\in I;\, pr_{f+g}z= pr_f z+ pr_g z\}\cap$$

$$\bigcap_{f\in\Gamma,\ \alpha\in R_+}\{z\in I;\ \alpha\, pr_f z=pr_{\alpha f}z\}\cap$$

$$\bigcap_{f,g\in\Gamma}\{z\in I; pr_{f\vee g}z=pr_f\vee pr_g z \text{ şi } pr_{f\wedge g}z=pr_f z\wedge pr_g z\}\cap$$

$$\bigcap_{\lambda\in R}\{z\in I; pr_{\lambda 1} z=\lambda\}$$

Aşadar, Y este compact în raport cu Γ-topologia.

Din Propoziţia 4 rezultă că $C(Y,\leq)$ este compatibil.

Pe de altă parte, deoarece $\hat{\Gamma}$ este închis, din Teorema 2 rezultă că $\hat{\Gamma}=C(Y,\leq)$ şi deci $\hat{\Gamma}$ este con laticial închis compatibil.

Dacă $\kappa(x)=\kappa(y)$, atunci $f(x)=f(y)$ pentru orice $f\in\Gamma$ şi deci $x=y$, deoarece Γ este compatibil şi deci separă punctele lui X. Aşadar, κ este o bijecţie de la X la $\kappa(X)$.

Dacă $\{x_i\}\subset X$ este un şir generalizat şi $x_i\longrightarrow x$, atunci $[\kappa(x_i)](f)=f(x_i)\longrightarrow f(x)=[\kappa(x)](f)$ pentru orice $f\in\Gamma$, ceea ce ne arată că şirul $\kappa(x_i)\longrightarrow\kappa(x)$ în Γ-topologia lui Y, adică

κ este continuă.

Reciproc, dacă $\kappa(x_i) \longrightarrow \kappa(x)$ în Y, atunci pentru orice $f \in \Gamma$ avem $f(x_i) \longrightarrow f(x)$. Rezultă că $\{x_i\}$ converge la x în τ_Γ pe X. Deoarece Γ este compatibil, $\tau = \tau_\Gamma$ şi deci $x_i \longrightarrow x$ în raport cu τ. Aşadar şi κ^{-1} este continuă. In continuare avem

$$x \leq y \iff x \underset{\Gamma}{\leq} y \iff [\kappa(x)](h) \leq [\kappa(y)](h),\ (\forall)\ h \in \Gamma \iff \kappa(x) \leq \kappa(y)$$

Rămîne să verificăm că imaginea $\kappa(X)$ este densă în Y.

Presupunem prin absurd, că, există $\mu \in Y \setminus \kappa(X)$. Atunci există o vecinătate U a lui μ astfel încît

$U \cap \kappa(X) = \emptyset$. Cum $\hat{\Gamma}$ este compatibil pe Y, rezultă că există $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{\Gamma}$ astfel încît $U \supset \{\nu ; \hat{f}(\nu) > 0 > \hat{g}(\nu)\} \ni \mu$

Cum $U \cap \kappa(X) = \emptyset$, vom avea sau $\hat{f}[\kappa(x)] \leq 0$ sau $\hat{g}[\kappa(x)] \geq 0$ pentru oride $x \in X$. Rezultă că $(-f) \vee g \geq 0$ pe X.

In continuare, avem

$$f + (-f) \vee g = 0 \vee (f+g) \geq f \text{ şi deci } \hat{f} \leq 0 \vee (\hat{f} + \hat{g}),$$

de unde rezultă contradicţia $U = \emptyset$. Intr-adevăr, dacă ar exista $\nu \in U$, atunci am avea $\hat{f}(\nu) > 0 > \hat{g}(\nu)$.

Pe de altă parte avem

$$0 < \hat{f}(\nu) \leq 0 \vee [\hat{f}(\nu) + \hat{g}(\nu)] \Longrightarrow \hat{g}(\nu) \geq 0,$$ ceea ce este absurd. Prin urmare, $\kappa(X)$ este dens în Y şi cu aceasta teorema este demonstrată.

Definiţia 7. Dacă (Y, κ) este o compactifîzare ordonată a spaţiului ordonat topologic X, atunci se numeşte conul laticial închis asociat acestei compactificări următorul con : $\Gamma_a = \{f \circ \kappa ;\ f \in C(Y, \leq)\}$.

Propoziţia 5. Conul laticial închis asociat unei compactificări ordonate (Y, κ) este compatibil.

Demonstrație.

Faptul că Γ_a este con laticial rezultă imediat din faptul că $C(Y,\leq)$ este con laticial. Deoarece $\kappa(X)$ este dens în Y avem $\|f\circ\kappa\| = \|f\|$ și deci Γ_a este închis în $B(X)$. Este de asemenea imediat că $\Gamma_a \subset C_b(X,\leq)$.

Cum $C(Y,\leq)$ este compatibil, rezultă că $x\leq y \Longleftrightarrow \kappa(x)\leq\kappa(y)$ $\Longleftrightarrow (f\circ\kappa)(x)\leq (f\circ\kappa)(y)$, $(\forall)\ f\in C(Y,\leq) \Longleftrightarrow h(x)\leq h(y)$, $(\forall)\ h\in\Gamma_a \Longleftrightarrow x \underset{\Gamma_a}{\leq} y$.

Dacă U este o submulțime τ-deschisă a lui X, atunci $\kappa(U)$ este deschisă în Y și deci există $f,g\in C(Y,\leq)$ astfel încît $\kappa(U)\supset\{f>0>g\}$. In particular, avem $\kappa(U)\supset\{k(x);f[k(x)]>0>g[k(x)]\}$ și deoarece κ este injectivă avem

$$U\supset\{x;\ (f\circ k)(x)>0>(g\circ\kappa)(x)\}$$

Cum $f\circ\kappa\in\Gamma_a$ și $g\circ\kappa\in\Gamma_a$, rezultă că U este τ_{Γ_a}-deschisă. Așadar, avem și $\tau=\tau_{\Gamma_a}$, adică Γ_a este compatibil.

Observația 5. Fie X un spațiu topologic ordonat și Γ un con laticial închis compatibil pe X. Așa cum am văzut în Teorema 4, în acest caz X admite o compactificare ordonată (Y,κ). Din demonstrația Teoremei 4 rezultă că $C(Y,\leq)=\hat{\Gamma}=\{\hat{f};f\in\Gamma\}$

Prin urmare conul laticial asociat va fi

$$\Gamma_a=\{\hat{f}\circ\kappa\ ;\hat{f}\in\hat{\Gamma}\}=\{f;f\in\Gamma\}=\Gamma$$

Observația 6. Un spațiu topologic ordonat admite o compactificare ordonată dacă și numai dacă este complet regulat.

Intr-adevăr, dacă X este complet regulat, atunci $C_b(X,\leq)$ este compatibil și în virtutea Teoremei 4 va admite o compactificare ordonată. Reciproc, dacă (Y,κ) este o compactificare ordonată a lui X, atunci Γ_a este compatibil și deci cu atît mai mult $C_b(X,\leq)$ va fi compatibil, adică X este complet regulat.

Pe mulţimea compactificărilor ordonate ale unui spaţiu topologic ordonat X se introduce următoarea relaţie de preordine $(Y_1,k_1) \leq (Y_2,k_2)$ dacă există $\varphi : Y_2 \longrightarrow Y_1$ cu proprietăţile:

a) φ este continuă,

b) $\varphi \circ k_2 = k_1$,

<u>Observaţia 7</u>. Dacă (Y_i,k_i) sînt compactificări ordonate ale spaţiului topologic ordonat X, unde i=1,2 şi Γ_{ia} sînt conurile laticiale asociate, atunci $(Y_1,k_1) \leq (Y_2,k_2)$ dacă şi numai dacă $\Gamma_{1a} \leq \Gamma_{2a}$.

<u>Definiţia 8</u>. O compactificare ordonată (Y,k) a lui X se numeşte <u>compactificare Nachbin</u>, dacă ordinea sa este cea mai mică ordine pe Y pentru care $k : X \longrightarrow Y$ este izomorfism în ordine.

<u>Teorema 5.</u> Fie (Y,k) o compactificare ordonată a spaţiului topologic ordonat X şi fie Γ_a conul laticial asociat. Dacă notăm cu $\Delta = \{f \in C(Y);\ f \circ k \in C_b(X,\leq)\}$, atunci:

1) "$\underset{\Delta}{\leq}$" este cea mai mică ordine pe Y în raport cu care k este izomorfism în ordine,

2) $\{f \circ k;\ f \in C(Y)\} = \overline{\Gamma_a - \Gamma_a}$

3) (Y,k) este compactificare Nachbin dacă şi numai dacă
$$\Gamma_a = \overline{\Gamma_a - \Gamma_a} \cap C_b(X,\leq)$$

<u>Demonstraţie.</u>

1) Evident "$\underset{\Delta}{\leq}$" este o preordine pe Y. Deoarece $C(Y,\leq) \subset \Delta$, rezultă că Δ separă punctele lui Y şi deci "$\underset{\Delta}{\leq}$" este chiar ordine pe Y. Este de asemenea imediat faptul că $x \leq y$ dacă şi numai dacă $k(x) \underset{\Delta}{\leq} k(y)$.

Fie "$\leq_1$" o altă ordine pe Y astfel încît $k : (X,\leq) \longrightarrow (Y,\leq_1)$ este izomorfism în ordine şi fie $f \in C(Y,\leq_1)$. Dacă $x,y \in X$ şi $x \leq y$, atunci $\kappa(x) \leq_1 \kappa(y) \Longrightarrow (f\circ k)(x) \leq (f\circ\kappa)(y) \Rightarrow f\circ k \in C_b(X,\leq) \Rightarrow f\in\Delta$

Prin urmare avem $C(Y,\leq_1)\subset\Delta$, de unde rezultă acum că dacă $u \underset{\Delta}{\leq} v \Longrightarrow u \leq_1 v$.

2) Să observăm că dacă $M=\Gamma_a-\Gamma_a$, atunci M este o latice vectorială în $C_b(X)$.

Intr-adevăr, dacă $f=f_1-f_2$ şi $g=g_1-g_2$, atunci

$f\vee g=(f_1+g_2)\vee(g_1+f_2)-(f_2+g_2)\in\Gamma_a-\Gamma_a\in M$ şi

$f\wedge g=-[(-f)\vee(-g)]\in\Gamma_a-\Gamma_a=M.$

Dacă notăm cu $L=\{f\in C(Y);\ f\circ\kappa\in\overline{M}\}$, atunci L este o sublatice vectorială a lui $C(Y)$, care conţine funcţiile constante şi separă punctele lui Y, deoarece $C(Y,\leq)\subset L$.

Mai mult, deoarece $\kappa(X)$ este dens în Y, pentru orice $f,g\in L$ avem

$$\|f-g\|=\sup\{|(f-g)(y)|;y\in Y\}=\sup\{|(f-g)[k(x)]|;\ x\in X\}$$

$=\|f\circ k-g\circ k\|$, ceea ce ne arată că L este şi închisă.

Din teorema Stone-Weierstrass rezultă că $L=C(Y)$ sau

$$\{f\circ k;f\in C(Y)\}=\{f\circ k;f\in L\}=\overline{M}=\overline{\Gamma_a-\Gamma_a}$$

3) Dacă (Y,κ) este o compactificare Nachbin a lui X, atunci ordinea de pe Y coincide cu ordinea $\underset{\Delta}{\leq}$, aşa cum rezultă din afirmaţia 1) din această teoremă.

Dacă $f\in C(Y,\leq)$ şi $u\underset{\Delta}{\leq} v$, atunci $u\leq v$ şi deci $f(u)\leq f(v)$. Din teorema 2 rezultă atunci că $f\in\Delta$. Prin urmare $\{f\in C(Y),$ $f\circ k\in C_b(X,\leq)\}=C(Y,\leq)$ şi deci

$$\Gamma_a=\{f\circ k;f\in C(Y,\leq)\}=\{f\circ k;f\in C(Y)\}\cap C_b(X,\leq)=\overline{\Gamma_a-\Gamma_a}\cap C_b(X,\leq)$$

Reciproc, să presupunem că $\Gamma_a=\overline{\Gamma_a-\Gamma_a}\cap C_b(X,\leq)$. Atunci dacă $f\in C(Y)$ este astfel încît $f\circ\kappa\in C_b(X,\leq)$, există $g\in C(Y,\leq)$ astfel încît $f\circ k=g\circ k$. Cum $\kappa(X)$ este dens în Y, rezultă că $f=g$.

Rezultă că $\Delta \subset C(Y,\leq)$.Cum incluziunea inversă este întotdeauna adevărată,înseamnă că $\Delta = C(Y,\leq)$ şi deci "$\underset{\Delta}{\leq}$" coincide cu ordinea lui Y.

Observaţia 8.Un spaţiu topologic ordonat admite o compactificare Nachbin dacă şi numai dacă este complet regulat.

Afirmaţia rezultă din Observaţia 6 şi din Teorema 5,punctul 1).

Propoziţia 6.Dacă X este spaţiu topologic ordonat complet regulat şi (Y,κ) este o compactificare ordonată a sa, atunci (Y,κ) este compactificare Nachbin dacă şi numai dacă oricare ar fi $f \in C_b(X,\leq)$, există $\hat{f} \in C(Y,\leq)$ astfel încît $\hat{f} \mid X=f$.

Demonstraţie.

Necesitatea.Fie $f \in C_b(X,\leq)$ şi $g: \kappa(X) \longrightarrow R$ definită prin $g[\kappa(x)]=f(x),(\forall)\ x \in X$.Cum $\kappa(X)$ este dens în Y,g se prelungeşte în mod unic la o funcţie continuă $\hat{f} \in C(Y)$.Conform Teoremei 5,dacă (Y,κ) este compactificare Nachbin,atunci $\Gamma_a = \overline{\Gamma_a - \Gamma_a} \cap C_b(X,\leq)$ şi deci $\hat{f}\circ k \in \Gamma_a$,de unde rezultă că $\hat{f} \in C(Y,\leq)$.

Suficienţa.Dacă $g \in \overline{\Gamma_a - \Gamma_a} \cap C_b(X,\leq)$,atunci există $\hat{f} \in C(Y,\leq)$ astfel încît $g=\hat{f}\circ k$.Rezultă că $g \in \Gamma_a$ şi deci că (Y,k) este compactificare Nachbin a lui X,conform Teoremei 5.

Definiţia 9.Două compactificări Nachbin ale lui X se numesc echivalente dacă:

$$(Y_1,\kappa_1) \leq (Y_2,\kappa_2) \text{ şi } (Y_2,\kappa_2) \leq (Y_1,\kappa_1)$$

Teorema 6.Dacă X este un spaţiu topologic ordonat complet regulat,atunci există o cea mai mare compactificare Nachbin a sa, unică în afara unei echivalenţe.Această compactificare se notează cu $(\beta_c X, k_\beta)$.

Demonstraţie.

Deoarece X este complet regulat, rezultă că $C_b(X,\leq)$ este compatibil.Notăm cu $(\beta_c X, \kappa_\beta)$ compactificarea ordonată corespunzătoare conului $C_b(X,\leq)$.Conul laticial închis asociat va fi chiar $C_b(X,\leq)$.Cum orice alt con laticial închis compatibil pe X este inclus în $C_b(X,\leq)$,din Observaţia 7 rezultă că $(Y,k)\leq(\beta_c X,\kappa_\beta)$ pentru orice compactificare ordonată (Y,κ) a lui X.

Dacă $\Delta=\{f\in C(\beta_c X);\ f\circ\kappa_\beta\in C_b(X,\leq)\}$ şi înzestrăm spaţiul $\beta_c X$ cu ordinea "$\underset{\Delta}{\leq}$" ,atunci $(\beta_c X,\kappa_\beta)$ va fi o compactificare Nachbin maximală.

<u>Observaţia 9.</u>Din propoziţia 6 rezultă că pentru orice $f\in C_b(X,\leq)$ există $\hat{f}\in C(\beta_c X,\leq)$ astfel încît $\hat{f}\mid X=f$.

<u>Observaţia lo.</u>Fie X un spaţiu topologic complet regulat .Dacă considerăm pe X ordinea dată de egalitate,atunci $C_b(X,\leq)=C_b(X)$.Fie (Y,k) o compactificare Nachbin a lui X.Deoarece pentru orice $x,y\in X$, $x=y$ dacă şi numai dacă $\kappa(x)=\kappa(y)$, rezultă că ordinea pe Y este tot egalitatea.Aşadar,orice compactificare Nachbin a lui X este de fapt o compactificare topologică a lui X.In particular $\beta_c X$ va coincide în acest caz cu compactificarea Stone-Čech a lui X.

<u>BIBLIOGRAFIE</u>

[1] J.Blatter,G.L.Seever,Interposition and lattice cones a functions. Trans.Amer.Math.Soc.222,1976,65-96.

[2] J.Blatter,Order compactifications of totally ordered topological spaces.Memorias de Matematica U.F.R.J.,Nr.39,1974.

[3] J.Blatter,Hewitt's Stone -Weierstrass theorems for ordered topological spaces.Memorias de Matematica U.F.R.J.,Nr.45, 1974.

[4] L.Nachbin,Topology and order.Van Nostrand Mathematical Studies No.4,D.Van Nostrand,Princeton,1965.

SPAȚII SIMETRICE p-NORMATE CU $0<p\leq 1$

Nicolae POPA

In această lucrare se introduce conceptul de spațiu simetric p-normat, unde $0<p\leq 1$, care generalizează noțiunea de spațiu simetric normat. (A se vedea de exemplu [4] .)

Pentru spațiile simetrice p-normate, cu $0<p\leq 1$, se extind apoi (fără a se da demonstrații) unele rezultate ale lui I.C. Gohberg și M. G. Krein [4] , J. Arazy [1] , [2] , arătîndu-se printre altele că dacă indicii Boyd p_E și q_E ai unui spațiu simetric p-normat de șiruri E nu sînt triviali atunci proiecția triangulară T definită prin $(Tx)(i,j)=\begin{cases} x(i,j) & \text{dacă } i\leq j \\ 0 & \text{altfel}\end{cases}$ este continuă pe spațiul simetric p-normat corespunzător C_E și reciproc dacă T este continuă pe C_E atunci indicii Boyd nu sînt triviali. In particular $C_{q,p}$ cu $q>1$, $0<p<1$, este un spațiu simetric p-normat pentru care T este continuă, pe cînd T nu este continuă pe C_p , cu $0<p<1$.

Un alt rezultat este că spațiile C_p , $0<p<1$, sînt primare.

1 - Teoria generală a spațiilor simetrice p-normate, $0<p\leq 1$.

Vom folosi în continuare terminologia din [4] și din [1] .

Pentru a introduce noțiunea de spațiu simetric p-normat cu $0<p\leq 1$, avem nevoie de o altă noțiune și anume de cea de p-normă simetrică.

Definiția 1.1 O funcție pozitivă $|X|_s$ definită pe un ideal bilateral $C\subset B(\ell_2)$ ($B(\ell_2)$ este spațiul tuturor operatorilor liniari şi continui pe ℓ_2) se numeşte <u>p-normă simetrică</u> dacă are următoarele proprietăţi:

1) $|X|_s = 0$ dacă şi numai dacă $X = 0$.

2) $|\lambda X|_s = |\lambda| \cdot |X|_s$ pentru $X \in C$, $\lambda \in C$.

3) (Proprietatea de p-convexitate) Pentru orice două şiruri $(\xi_{1j})_{j=1}^{\infty}$, $(\xi_{2j})_{j=1}^{\infty}$ de numere reale şi pentru orice sistem ortonormat de vectori din ℓ_2 $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ are loc inegalitatea

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{1j}^{p}+\xi_{2j}^{p})^{1/p}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big|_s \leq \Big(\Big|\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{1j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big|_s^{p}+\Big|\sum_{j}\xi_{2j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big|_s^{p}\Big)^{1/p}.$$

(Aici $\xi_{1j}^{p} = |\xi_{1j}|^{p}\, \mathrm{sign}\, \xi_{1j}$)

4) $|AXB|_s \leq \|A\| \cdot |X|_s \cdot \|B\|$, pentru $A, B \in B(\ell_2)$, $X \in C$.

5) Pentru un X unidimensional avem

$$|X|_s = \|X\| \equiv s_1(X).$$

Dacă vom înlocui pe 4) prin relaţia

4') $|UX|_s = |XU|_s = |X|_s$ pentru orice $X \in C$ şi orice operator unitar U, atunci $|X|_s$ se numeşte o p-<u>normă unitară.</u>

<u>Remarca 1.2</u> Se va arăta mai departe că denumirea de p-normă dată funcţiei $|X|_s$ este justificată în sensul că vom arăta că ea îndeplineşte inegalitatea generalizată a triunghiului

$$|X+Y|_s^p \leq |X|_s^p + |Y|_s^p \quad \text{pentru orice } X, Y \in C.$$

Vom arăta de asemenea mai tîrziu că pe spaţiile simetrice p-normate separabile (care vor fi numite spaţii p-<u>unitare de matrici</u>) noţiunile de p-normă unitară şi de p-normă simetrică coincid.

Deocamdată putem remarca urmatorul rezultat evident. (A se vedea [4] p. 68 .)

<u>Lema 1.3</u> Orice p-normă simetrică este o p-normă invariantă.

De asemenea se demonstrează standard următoarea propoziţie. (A se vedea [4] p. 68-69 .)

<u>Propoziţia 1.4</u> a) Fie $|X|_s$ o p-normă simetrică pe C.

Atunci

$$|X|_s = |X^*|_s = |(XX^*)^{1/2}|_s = |(X^*X)^{1/2}|_s \quad \text{pentru orice } X \in C.$$

b) Dacă avem inegalitățile

$$s_j(Y) \leq c.s_j(X) \quad , \; j=1,2,3,\ldots$$

unde $X \in C$, Y este un operator compact, iar $c > 0$ este o constantă, atunci $Y \in C$ şi, în plus,

$$|Y|_s \leq c|X|_s.$$

Din propoziţia 1.4 rezultă că o p-normă simetrică $|X|_s$ depinde numai de numerele singulare ale unui operator X, $s_j(X)$, adică din $s_j(X_1) = s_j(X_2)$, $j=1,2,3,\ldots$ rezultă că $|X_1|_s = |X_2|_s$.

Dacă $C = \mathcal{F}$, idealul tuturor operatorilor de rang finit, atunci punînd

$$|X|_s = \Phi(s_1(X), s_2(X), \ldots)$$

obţinem o funcţie Φ definită pe mulţimea şirurilor descrescătoare de numere pozitive care au cel mult un număr finit de termeni nenuli.

Studiul acestei funcţii este util pentru a arăta că $|X|_s$ verifică inegalitatea generalizată a triunghiului.

Fie c_0 spaţiul şirurilor de numere reale care converg la 0 şi $\hat{c}$ subspaţiul lui c_0 format din şirurile care au numai un număr finit de termeni nenuli.

Definiţia 1.5 O funcţie reală $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ definită pe $\hat{c}$ se numeşte funcţie p-normantă dacă are proprietăţile următoare:

I $\quad \Phi(\xi) > 0$ dacă $\xi \neq 0$, $\quad \xi \in \hat{c}$

II $\quad \Phi(\alpha\xi) = |\alpha|\Phi(\xi)$ pentru $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\xi \in \hat{c}$

III $\quad \Phi((\xi^p + \eta^p)^{1/p}) \leq (\Phi(\xi)^p + \Phi(\eta)^p)^{1/p}$ pentru $\xi, \eta \in \hat{c}$.

Această proprietate poartă numele de p-convexitatea funcţiei Φ. (Aici ξ^p, pentru ξ real, înseamnă numărul $|\xi|^p \operatorname{sign} \xi$.)

IV $\quad \Phi(1,0,0,\ldots) = 1.$

O funcţie p-normantă $\Phi(\xi)$ se numeşte funcţie simetrică p-normantă, prescurtat funcţie s.p.n., dacă

V $\Phi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,0,0,\ldots)=\Phi(|\xi_{\pi(1)}|,|\xi_{\pi(2)}|,\ldots,|\xi_{\pi(n)}|,0,0,\ldots)$

unde $\xi=(\xi_i)_{i=1}^{\infty}\in\hat{c}$, iar π este o permutare a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$.

Vom nota $\psi(\xi_1,\xi_2,\ldots)=\Phi(\xi_1^{1/p},\xi_2^{1/p},\ldots)^p$ pentru $\xi=(\xi_i)_{i=1}^{\infty}\in\hat{c}$.

Atunci ψ verifică proprietăţile I - V în care înlocuim proprietatea III prin inegalitatea

$$\psi(\xi+\eta)\le\psi(\xi)+\psi(\eta) \qquad \text{pentru } \xi,\eta\in\hat{c}.$$

Prin urmare ψ este o funcţie simetrică normantă în sensul lui [4] şi deci următoarea propoziţie este o consecinţă imediată a consideraţiilor făcute în [4] p.71-74 .

<u>Propoziţia 1.6</u> a) Dacă $|\xi_j|\le|\eta_j|$ $j=1,2,\ldots$ are loc pentru vectorii $\xi=(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, $\eta=(\eta_j)_{j=1}^{\infty}\in\hat{c}$, atunci

$$\Phi(\xi)\le\Phi(\eta)$$

b) (Generalizează o lemă a lui Ky Fan.) Presupunem că $\xi=(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$, $\eta=(\eta_j)_{j=1}^{\infty}\in\hat{c}$. Dacă $\xi_1\ge\xi_2\ge\cdots\ge0$, $\eta_1\ge\eta_2\ge\cdots\ge0$ şi

$$\sum_{j=1}^{k}\xi_j^p\le\sum_{j=1}^{k}\eta_j^p \qquad k=1,2,\ldots$$

atunci pentru orice funcţie simetrică p-normantă $\Phi(\xi)$ avem:

$$\Phi(\xi)\le\Phi(\eta).$$

Cîteodată se dovedeşte util să definim o funcţie simetrică p-normantă numai pe conul $\hat{k}$ format din şirurile descrescătoare şi pozitive din $\hat{c}$.

Pentru $\xi\in\hat{c}$ vom nota cu ξ^* şirul ξ rearanjat descrescător.

Evident $\xi^*=(|\xi_{\pi(j)}|)_j$, unde π este o permutare a numerelor naturale.

Atunci din V rezultă că $\Phi(\xi)=\Phi(\xi^*)$ şi deci Φ poate fi dedusă cunoscîndu-i numai valorile pe $\hat{k}$.

Lema următoare, care se obţine din lema 3.2 -p.75 [4] prin acelaşi procedeu ca propoziţia 1.6, ne arată că Φ poate fi determinată de o funcţie definită numai pe $\hat{k}$ cu proprietăţi în care intră numai elementele lui $\hat{k}$.

<u>Lema 1.7</u> Fie $\Phi(\xi)$ o funcţie definită pe $\hat{k}$. Pentru ca egalitatea

$$\Phi(\xi)=\Phi(\xi)^*\ ,\ \xi\in\hat{c}$$

să definească o funcție simetrică p-normantă este necesar și suficient ca să fie îndeplinite condițiile:

I' $\Phi(\xi) > 0$ pentru $\xi \in \hat{k}$, $\xi \neq 0$.

II' $\Phi(\alpha \xi) = \alpha \Phi(\xi)$ pentru $\alpha \geq 0$ și $\xi \in \hat{k}$

III' $\Phi((\xi^p + \eta^p)^{1/p}) \leq (\Phi(\xi)^p + \Phi(\eta)^p)^{1/p}$ $\xi, \eta \in \hat{k}$

IV' $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$

V' Dacă $\xi = (\xi_j)_j$, $\eta = (\eta_j)_j \in \hat{k}$ și

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j^p \leq \sum_{j=1}^{n} \eta_j^p \qquad n = 1, 2, \cdots$$

atunci

$$\Phi(\xi) \leq \Phi(\eta).$$

Exemple de funcții simetrice p-normante sînt

$\Phi_\infty(\xi) = \max\limits_{n \in N} |\xi_n|$ și $\Phi_p(\xi) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p}$ pentru $\xi \in \hat{c}$, iar din propoziția 1.6 a) este ușor de remarcat că pentru orice funcție simetrică p-normantă Φ avem

$$\Phi_\infty(\xi) \leq \Phi(\xi) \leq \Phi_p(\xi) \qquad \text{cu } \xi \in \hat{k}.$$

Deci Φ_∞ este <u>minimală</u> și Φ_p este <u>maximală</u> printre funcțiile simetrice p-normante.

In plus să remarcăm că din proprietatea III și din propoziția 1.6 a) rezultă că

$$\Phi(\xi + \eta)^p \leq \Phi(\xi)^p + \Phi(\eta)^p \qquad \text{pentru } \xi, \eta \in \hat{c}.$$

Prin urmare avem inegalitatea

$$|\Phi(\xi)^p - \Phi(\eta)^p| \leq \Phi(\xi - \eta)^p \leq \sum_j |\xi_j - \eta_j|^p \qquad \xi, \eta \in \hat{c},$$

ceea ce implică în particular că orice <u>funcție s.p.n. $\Phi(\xi)$ este continuă</u>.

Două funcții s.p.n. $\Phi(\xi)$ și $\Psi(\xi)$ sînt <u>echivalente</u> dacă

$$\sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\Phi(\xi)}{\Psi(\xi)} < \infty \qquad \text{și} \qquad \sup_{\xi \in \hat{c}} \frac{\Psi(\xi)}{\Phi(\xi)} < \infty.$$

Este ușor de remarcat că: <u>O funcție s.p.n. $\Phi(\xi)$ este echivalentă cu funcția minimală dacă și numai dacă</u>

$$\sup_n \Phi(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n}, 0, 0, \dots) < \infty$$

și $\Phi(\xi)$ este echivalentă cu funcția maximală dacă și numai dacă

$$\sup_n \frac{n^{1/p}}{\Phi(\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,0,\dots)} < \infty ,$$

Teorema următoare ne va arăta corespondența ce există între funcțiile s.p.n. pe $\hat{k}$ și p-normele invariante pe $\mathcal{F}$.

Teorema 1.8 Fie $|A|_s$ o p-normă invariantă pe $\mathcal{F}$ .Atunci egalitatea

$$\Phi(s(A)) = |A|_s \quad \text{unde } A \in \mathcal{F} \text{ și } s(A) = (s_j(A))_{j=1}^{\infty}$$

definește o funcție s.p.n. $\Phi(\xi)$. Invers dacă $\Phi(\xi)$ este o funcție s.p.n., atunci egalitatea

$$|A|_{\Phi} = \Phi(s(A)) \qquad \text{pentru } A \in \mathcal{F}$$

definește o p-normă invariantă pe $\mathcal{F}$.

Demonstrație Dacă $|A|_s$ este o p-normă invariantă, atunci egalitatea $s_j(A) = s_j(B)$, $j=1,2,\dots$ implică egalitatea $|A|_s = |B|_s$, ceea ce rezultă observînd că $A = W^{-1}BZ$, W și Z fiind operatori unitari definiți de relațiile $WU\varphi_j = V\psi_j$, $Z\varphi_j = \psi_j$, $j=1,2,\dots$.
(Aici U și V sînt operatorii parțial izometrici dați de descompunerea polară a lui A și B, iar φ_j și ψ_j sînt sisteme ortonormale de vectori proprii ai lui A și B.)

Atunci putem scrie $\Phi(\xi) = |\sum_j \xi_j^*(\cdot,\psi_j)\psi_j|_\Delta$ unde $(\psi_j)_j$ este un sistem ortonormat fixat și $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ un șir din $\hat{c}$.

Să verificăm proprietățile I - V pentru Φ . Singura dintre ele care este mai dificil de verificat este proprietatea III.

Fie $\xi,\eta \in \hat{c}$. Atunci

$$\Phi(\xi)^p + \Phi(\eta)^p = |\sum_j \xi_j^*(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_\Delta^p + |\sum_j \eta_j^*(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_\Delta^p =$$

$=$(din cauză că $|A|_s$ este invariantă $) = |\sum_j \xi_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_\Delta^p +$

$+ |\sum_j \eta_j(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_\Delta^p \geq$ (din proprietatea 3) $\geq$

$$\geq |\sum_j (\xi_j^p + \eta_j^p)^{1/p}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_\Delta^p = \Phi((\xi^p+\eta^p)^{1/p}).$$

Deci Φ este o funcție s.p.n. definită pe $\hat{c}$.

Reciproc fie Φ o funcție s.p.n. definită pe $\hat{c}$ și să punem

$$|A|_{\Phi} = \Phi(s(A))$$

pentru $A \in \mathcal{F}$.

Să arătăm că $|A|_{\Phi}$ este o p-normă invariantă. Proprietățile 1) și 2) sînt imediate. Să verificăm 3) . Fie $(\xi_{1j})_j, (\xi_{2j})_j$ două șiruri de numere reale și (φ_j) un sistem ortonormat.

Atunci

$$|\sum_j (\xi_{1j}^p + \xi_{2j}^p)^{1/p}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_{\Phi}^p = \Phi((\xi_{1j}^p + \xi_{2j}^p)^{1/p})^p \leq \text{ (din proprietatea III)}$$
$$\leq \Phi(\xi_1)^p + \Phi(\xi_2)^p = |\sum_j \xi_{1j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_{\Phi}^p + |\sum_j \xi_{2j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j|_{\Phi}^p .$$

Dacă U este un operator izometric, atunci $|UA|_{\Phi} = \Phi(s(UA)) =$ $= \Phi(A) = |A|_{\Phi}$ și analog $|AU|_{\Phi} = |A|_{\Phi}$.

Deci proprietatea 4') este îndeplinită.

In sfîrșit, pentru un operator unidimensional A, avem $s_1(A) = |A|$ și $s_j(A) = 0$ pentru $j = 2,3,\ldots$ Deci $|A|_{\Phi} = \Phi(s(A)) = \Phi(|A|,0,0,\ldots) =$ $=$ (din IV și II) $= |A| \equiv s_1(A)$.

Prin urmare teorema este demonstrată. ∎

<u>Corolarul 1.9</u> Orice p-normă invariantă pe idealul $\mathcal{F}$ este o p-normă simetrică.

<u>Demonstrație</u> Fie $|A|_{\Phi}$ o p-normă invariantă pe $\mathcal{F}$ și $B, C \in B(\ell_2)$ Deoarece $s_j(BAC) \leq |B|\cdot|C|\cdot s_j(A)$ $j = 1,2,3,\ldots,$ rezultă din propoziția 1.6 a) că

$$|BAC|_{\Phi} = \Phi(s(BAC)) \leq \Phi(|B|\cdot|C|\cdot s(A)) = |B|\cdot|C|\cdot\Phi(s(A)) = |B|\cdot|C|\cdot|A|_{\Phi} \ \blacksquare$$

Putem acum justifica denumirea de p-normă dată anterior.

<u>Corolarul 1.10</u> Orice p-normă $|A|_s$ pe $\mathcal{F}$ verifică inegalitatea generalizată a triunghiului

$$|A+B|_s^p \leq |A|_s^p + |B|_s^p \quad , A,B \in \mathcal{F}$$

și este, prin urmare, o adevărată p-normă.

<u>Demonstrația</u> Conform teoremei 2.? - [3] rezultă că

$$\sum_j s_j^p(A+B) \leq \sum_j s_j^p(A) + \sum_j s_j^p(B) \quad \text{pentru } A,B \in \mathcal{F}.$$

Prin urmare din proprietatea V' - lema 1.7 rezultă că

$$|A+B|_{\Phi}^p = \Phi(s(A+B))^p \leq \Phi((s^p(A) + s^p(B))^{1/p})^p \leq (\text{conform III'-}$$

- lema 1.7) $\leq \Phi(s(A))^p + \Phi(s(B))^p = |A|^p_\Phi + |B|^p_\Phi$. ∎

Să remarcăm acum că orice p-normă simetrică definită pe $\mathcal{F}$ se află mereu situată între două p-norme speciale. Mai precis are loc următoarea propoziţie.

Propoziţia 1.11 Pentru orice p-normă simetrică definită pe un ideal C, avem

$$s_1(X) \leq |X|_s,$$

iar dacă dim $X < \infty$ atunci

$$|X|_s \leq \left(\sum_j s_j^p(X)\right)^{1/p}.$$

Demonstraţie Fie $Y = s_1(X)(\cdot,\varphi)\varphi$, unde φ este un element fixat în ℓ_2 cu $\|\varphi\| = 1$. Din propoziţia 1.4 -b) şi din proprietatea 5 - definiţia 1.1 rezultă că

$$s_1(X) = \|Y\| = |Y|_s \leq |X|_s.$$

Pe de altă parte, fie $X = \sum_j s_j(X)(\cdot,\psi_j)\varphi_j$ o dezvoltare Schmidt a operatorului X. Din corolarul 1.10 şi folosind proprietatea 5) a unei p-norme simetrice rezultă că

$$|X|_s^p = \left|\sum_j s_j(X)(\cdot,\psi_j)\varphi_j\right|_s^p \leq \sum_j s_j^p(X)|(\cdot,\psi_j)\varphi_j|_s^p = \sum_j s_j^p(X). \blacksquare$$

Definiţie 1.12 Un ideal bilateral C în spaţiul $B(\ell_2)$ pe care există o p-normă simetrică care-l transformă pe C într-un spaţiu p-Banach se numeşte ideal simetric p-normat sau, prescurtat, ideal s.p.n.

Este uşor de arătat că două ideale s.p.n. care coincid ca mulţimi au normele topologic echivalente.

Exemple de ideale simetrice p-normate sînt C_p, unde
$C_p = \{X \in B(\ell_2)\ ;\ |X|_p = (\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(X))^{1/p} < \infty\}$ dacă p este finit, iar
$C_\infty = \{X \in B(\ell_2);\ X$ un operator compact şi $|X|_\infty = \|X\|\}$.

Dacă $p \geq 1$ C_p este un spaţiu Banach, iar dacă $0 < p < 1$, C_p este un spaţiu p-Banach.

Vom prezenta în continuare o metodă de a genera ideale simetrice p-normate.

Fie ξ un şir arbitrar de numere reale care converge la 0, adica $\xi \in c_0$. Notăm cu $\xi^{(n)}=(\xi_1,\dots,\xi_n,0,0,\dots)$ Dacă Φ este o funcţie s.p.n. atunci $(\Phi(\xi^{(n)}))_n$ este un şir crescător de numere pozitive.

Fie $c_{\Phi}=\{\xi\in c_0;\ \sup\limits_n \Phi(\xi^{(n)})<\infty\}$ şi vom extinde pe Φ la c_{Φ} punînd

$$\Phi(\xi)=\lim_n \Phi(\xi^{(n)}) \qquad \text{pentru } \xi\in c_{\Phi}$$

c_{Φ} are următoarele proprietăţi:

a) $\xi,\eta \in c_{\Phi}$ implică $\xi+\eta \in c_{\Phi}$.

Intr-adevăr

$$\Phi(((\xi+\eta)^{(n)})^p \le \Phi((|\xi|^p+|\eta|^p)^{(n)})^p \le \Phi(\xi^{(n)})^p+\Phi(\eta^{(n)})^p<\infty,\ n\in\mathbb{N}.$$

b) Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $\xi\in c_{\Phi}$, atunci $\alpha\xi\in c_{\Phi}$.

c) Dacă $\xi=(\xi_j)_j\in c_{\Phi}$ şi $\eta=(\eta_j)_{j=1}^{\infty}\in c_0$ verifică condiţia

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^{*p}\le\sum_{j=1}^{n}\xi_j^{*p} \qquad n=1,2,\dots$$

atunci η aparţine de asemenea lui c_{Φ}.

Din c) rezultă şi o altă proprietate

d) $\xi=(\xi_j)_j \in c_{\Phi}$ implică că $\xi^*=(\xi_j^*)_j\in c_{\Phi}$.

Este clar acum că Φ extinsă la c_{Φ} posedă proprietăţile I - V. Atunci c_{Φ} se va numi domeniul natural al funcţiei s.p.n. $\Phi(\xi)$.

Definiţia 1.13 Pentru o funcţie s.p.n. Φ vom construi mulţimea C_{Φ} a operatorilor $X\in C_{\infty}$ pentru care $s(X)=(s_j(X))_j\in c_{\Phi}$.

Pentru orice $X\in C_{\Phi}$ punem

$$|X|_{\Phi}=\Phi(s(X)).$$

Este clar că $X\in C_{\Phi}$ dacă şi numai dacă $\sup\limits_n |X_n|_{\Phi}<\infty$, unde X_n este suma primilor n termeni din dezvoltarea Schmidt a lui X, iar $|X|_{\Phi}=\lim\limits_n |X_n|_{\Phi}=\Phi(s(X))$.

Următoarea teoremă, analogă teoremei 4.1 - p. 80 - [4], ne dă posibilitatea de a construi diferite ideale s.p.n.

<u>Teorema 1.14</u> Fie $\Phi(\xi)$ o funcţie s.p.n. Atunci mulţimea C_Φ este un ideal s.p.n. cu p-norma simetrică

$$|A|_\Phi = |A|_{C_\Phi} = \Phi(s(A)) \quad \text{pentru } A \in C_\Phi .$$

<u>Demonstraţie</u> Fie $A_1, A_2 \in C_\Phi$, atunci $s(A_1) + s(A_2) \in c_\Phi$ şi din teorema 2.8 -[3] rezultă că

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p(A_1 + A_2) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A_1) + \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A_2) \quad \text{pentru } n = 1,2,\ldots$$

Atunci

$$\Phi(s(A_1+A_2)^{(n)})^p \leq (\text{din V}') \leq \Phi((s(A_1)^p + s(A_2)^p)^{1/p\,(n)})^p \leq$$

$$\leq (\text{din III}') \leq \Phi(s(A_1)^{(n)})^p + \Phi(s(A_2)^{(n)})^p \leq |A_1|_\Phi^p + |A_2|_\Phi^p,$$

de unde rezultă că $A_1 + A_2 \in C_\Phi$ şi $|A_1 + A_2|_\Phi^p \leq |A_1|_\Phi^p + |A_2|_\Phi^p$.

Este clar că pentru $A \in C_\Phi$ şi $\alpha \in C$, avem $\alpha A \in C_\Phi$ şi

$$|\lambda A|_\Phi = |\lambda| |A|_\Phi$$

Evident C_Φ este şi un ideal bilateral. Să arătăm acum că $|A|_\Phi$ este o p-normă simetrică. Singură proprietatea 3) necesită puţină atenţie. Fie $\xi_1 = (\xi_{1j})_{j=1}^{\infty}$, $\xi_2 = (\xi_{2j})_{j=1}^{\infty}$ două şiruri de numere reale şi $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ un sistem ortonormat fixat în ℓ_2.

Atunci

$$\Big\|\sum_j (\xi_{1j}^p + \xi_{2j}^p)^{1/p}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big\|_\Phi^p = \Phi((\xi_1^p + \xi_2^p)^{1/p})^p \leq (\text{din III}) \leq \Phi(\xi_1)^p + \Phi(\xi_2)^p =$$

$$= \Big\|\sum_j \xi_{1j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big\|_\Phi^p + \Big\|\sum_j \xi_{2j}(\cdot,\varphi_j)\varphi_j\Big\|_\Phi^p .$$

In sfîrşit vom arăta că C_Φ este complet topologic. Fie (A_n) un şir Cauchy în C_Φ. Conform propoziţiei 1.11 avem

$$\|A_m - A_n\| = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_\Phi \xrightarrow[m,n]{} 0$$

Deci $A_n \longrightarrow A$ în spaţiul $B(\ell_2)$ şi $A \in C_\infty$. In plus, din corolarul 2.3 - p.30 - [4], rezultă că

$$\lim_n s_j(A_n) = s_j(A) \qquad j = 1,2,\ldots$$

Pe de altă parte, cum Φ este continuă pe $\hat{c}$, avem

$$\Phi(s_1(A), s_2(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) = \lim_k \Phi(s_1(A_k), \ldots, s_n(A_k), 0, \ldots) \leq$$

$$\leq \sup_k |A_k|_\Phi, \qquad \text{pentru } n = 1,2,\ldots$$

Prin urmare $|A|_{\Phi} \leq \sup_{k} |A_k|_{\Phi} < \infty$ şi deci $A \in C_{\Phi}$.

Să arătăm că $A_k \xrightarrow[k]{} A$ în C_{Φ}. Fie $\varepsilon > 0$ şi N un număr natural astfel că pentru $m,q > N$ avem

$$|A_m - A_q|_{\Phi} < \varepsilon$$

Atunci $\Phi(s_1(A_m - A_q),\ldots,s_n(A_m - A_q),0,\ldots) < \varepsilon$, $n=1,2,\ldots$, $m,q > N$. Deoarece $s_j(A_m - A_q) \xrightarrow[q]{} s_j(A_m - A)$, pentru $j=1,2,\ldots$, atunci $\Phi(s_1(A_m - A),\ldots,s_n(A_m - A),0,\ldots) \leq \varepsilon$ pentru $n=1,2,\ldots$ şi $m>N$. Deci $|A_m - A|_{\Phi} \leq \varepsilon$ pentru $m>N$. ∎

Să notăm că $|A|_{\Phi}$ verifică o proprietate importantă.

<u>Proprietatea de dominanţă</u> Dacă $A \in C_{\Phi}$ şi $B \in C_{\infty}$ are proprietatea că

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p(B) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A) \qquad n=1,2,\ldots$$

atunci $B \in C_{\Phi}$ şi $|B|_{\Phi} \leq |A|_{\Phi}$.

Este clar de asemenea că <u>idealele s.p.n. C_{Φ_1} şi C_{Φ_2} coincid ca mulţimi dacă şi numai dacă funcţiile s.p.n. Φ_1 şi Φ_2 sînt echivalente.</u>

Vom mai da o aplicaţie utilă a proprietăţii de dominanţă.

<u>Teorema 1.15</u> Fie A un operator din C_{Φ} şi $(P_j)_{j=1}^{\omega}$ $(\omega \leq \infty)$ un sistem de proiectori ortogonali. Atunci operatorul

$$\hat{A} = \sum_{j=1}^{\omega} P_j A P_j$$

aparţine de asemenea lui C_{Φ} şi

$$|\hat{A}|_{\Phi} \leq |A|_{\Phi}.$$

<u>Demonstraţie</u> Fie $A_j = P_j A^* P_j A P_j$. Atunci $\hat{A}^* \hat{A} = \sum_{j=1}^{\omega} P_j A^* P_j A P_j$.

Pe de altă parte, pentru φ din imaginea lui P_j avem

$$(A_j \varphi, \varphi) = (A^* P_j A \varphi, \varphi) = (P_j A \varphi, P_j A \varphi) \leq (A^* A \varphi, \varphi) = (P_j A^* A P_j \varphi, \varphi), \quad j = 1,\ldots,\omega.$$

Deci $0 \leq A_j \leq P_j A^* A P_j$ şi atunci, conform lemei 1.1 - p.25 - [4], avem $s_k(A_j) \leq s_k(P_j A^* A P_j)$ $k=1,2,\ldots,$ $j=1,2,\ldots,\omega$ (*)

Atunci

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k^p(\hat{A}) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{p/2}(\hat{A}^*\hat{A}) \leq \text{(conform teoremei 2.8 - [3])} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{p/2}(A_j)\Big) \leq \big(\text{conform } (*)\big) \leq \sum_{j=1}^{\omega}\sum_{k=1}^{\infty} s_k^{p/2}(P_jA^*AP_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\omega} s_k^{p/2}(P_jA^*AP_j) \leq \Big(\text{deoarece } \bigcup_{j=1}^{\omega}\{s_k(P_jA^*AP_j)\ ;\ k\in\mathbb{N}\}\subset$$

$$\subset\{s_k(A^*A)\ ;\ k\in\mathbb{N}\}\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{p/2}(A^*A) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{p}(A)\ .$$

Din proprietatea de dominanță rezultă acum că $A \in C_{\Phi}$ și că $|\hat{A}|_{\Phi} \leq |A|_{\Phi}$. ∎

<u>Corolarul 1.16</u> Dacă $A\in C_{\Phi}$ atunci valorile proprii $\lambda_j(A)$, $j=1,2,\ldots$ satisfac relația

$$\Phi\big(|\lambda_1(A)|,|\lambda_2(A)|,\ldots\big)\leq |A|_{\Phi} \qquad \text{pentru } A\in C_{\Phi}\ .$$

Demonstrația este aceeași cu cea a teoremei 4.3 -p.83 - [4] și o omitem.

Vom prezenta acum o extensie a teoremei 5.1 - p.85 - [4] care ne va fi de folos în găsirea dualului unui ideal s.p.n.

Mai întîi vom demonstra o lemă ce constituie analogul lemei 5.1-p. 83 - [4] .

<u>Lema 1.17</u> Fie un operator liniar și continuu A care este limita slabă a șirului de operatori $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ din C_{∞} .

Dacă

$$\lim_{j\to\infty}\sup_m s_j(A_m) = 0 \quad \Big(\text{respectiv } \lim_{j\to\infty}\overline{\lim_m}\, s_j(A_m)=0\Big)$$

atunci operatorul A este compact și

$$\sum_{j=1}^{n} s_j^p(A) \leq \sum_{j=1}^{n}\sup_m s_j^p(A_m) \quad \Big(\text{resp. } \sum_{j=1}^{n} s_j^p(A)\leq \sum_{j=1}^{n}\overline{\lim_m}\, s_j^p(A_m)\Big)\ .$$

<u>Demonstrație</u> Procedînd la fel ce în lema 5.1 -p.83-84 - [4] se arată că A este un operator compact și că, în plus

$$s_j(A)=\lim_{n_r\to\infty} s_j(A_{n_r}) \qquad j=1,2,\ldots$$

Deci $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} s_j^p(A) = \lim_{n_r\to\infty}\sum_{j=1}^{n} s_j^p(A_{n_r}) \leq \sum_{j=1}^{n}\overline{\lim_m}\, s_j^p(A_m)$, $n=1,2,\ldots$ ∎

<u>Teorema 1.18</u> Fie $\Phi(\xi)$ o funcție s.p.n. neechivalentă cu funcția minimală (adică $C_{\Phi}\neq C_{\infty}$). Dacă un operator $A\in B(\ell_2)$ este limita slabă a unui șir de operatori $(A_m)_m$ din C_{Φ} și dacă

$$\sup_m |A_m|_{\Phi} < \infty$$

atunci operatorul A aparţine de asemenea lui C_Φ şi

$$|A|_\Phi \leq \sup_m |A_m|_\Phi$$

Demonstraţia care foloseşte lema 1.17, urmează linia demonstraţiei teoremei 5.1 - p.35 - [4] şi o omitem.

Corolarul 1.19 Fie $C_\Phi \neq C_\infty$; Dacă $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ este un şir monoton crescător de proiectori ortogonali finit dimensionali care tinde tare la identitate, adică pentru care $\lim_n \|P_n\varphi-\varphi\| = 0$ pentru $\varphi \in \ell_2$, atunci $A \in C_\Phi$ dacă şi numai dacă

$$M = \sup_n |P_n A P_n|_\Phi < \infty .$$

Vom studia acum o clasă interesantă şi importantă de ideale s.p.n. şi anume idealele s.p.n. separabile, sau folosind terminologia lui J. Arazy [1] - p-spaţiile unitare de matrici.

Vom considera o funcţie s.p.n. Φ şi idealul C_Φ . Vom nota cu C_Φ^{o} închiderea spaţiului $\mathcal{F}$ în C_Φ . Din lema 6.1 -p.37 - [4] , care rămîne valabilă şi în acest caz, rezultă că C_Φ^{o} este format din toţi operatorii $A \in C_\Phi$ pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A) , \ldots) = 0$$

sau

$$\lim_{n,p\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \ldots, s_{n+p}(A), 0, 0, \ldots) = 0.$$

Vom spune că o funcţie s.p.n. este mononormalizată dacă este îndeplinită condiţia

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots) = 0 \qquad \text{pentru } \xi \in c_\Phi$$

sau, echivalent, dacă

$$\lim_{n,p\to\infty} \Phi(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_{n+p}, 0, 0, \ldots) = 0 \qquad \text{pentru } \xi \in c_\Phi$$

Deci $C_\Phi = C_\Phi^{o}$ dacă şi numai dacă Φ este mononormalizată.

Dacă Φ este mononormalizată şi dacă $A \in C_\Phi$ seria Schmidt a operatorului A converge la A în norma $|\ |_\Phi$.

Orice funcţie s.p.n. care nu este mononormalizată se va numi binormalizată.

Exemple de funcţii mononormalizate sînt funcţiile minimală şi maximală.

Un exemplu de funcţie binormalizată este următorul:

$$\Phi(\xi) = \sup_n \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^{*p}\right)^{1/p}}{\sum_{i=1}^{n} w_i}, \text{ unde } 1=w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq 0 \text{ cu } \lim_{i\to\infty} w_i = 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{\infty} w_i = \infty$$

Este clar că subspaţiul C_Φ^0 este <u>ideal s.p.n. separabil</u> (vezi teorema 6.1 -p.88 - [4]). Repetînd demonstraţia teoremei 6.2 - p. 89 - [4] obţinem

<u>Teorema 1.20</u> Orice ideal s.p.n. separabil coincide cu un anumit ideal C_Φ^0 .

După cum am văzut în corolarul 1.10 o p-normă invariantă pe $\mathcal{F}$ verifică inegalitatea generalizată a triunghiului. Un rol important în demonstrarea acestui fapt îl joacă proprietatea de p-convexitate a p-normei.

Din corolarul 1.10 rezultă că pentru $p=1$, pe idealul $\mathcal{F}$ ansamblul proprietăţilor 1) - 5) este echivalent cu 1) - 5) în care proprietatea 3) este înlocuită cu inegalitatea obişnuită a triunghiului.

Se poate pune întrebarea dacă această echivalenţă se păstrează şi pentru $0 < p < 1$. Răspunsul negativ la această întrebare a fost dat de matematicianul sovietic Rotfeld [8] . El a arătat că $C_{p,\infty} = \{ T \in B(\ell_2) \ ; \ |T|_{p,\infty} = \sup_k k^{1/p} \cdot s_k(T) < \infty \}$ este un contraexemplu la întrebarea de mai sus.

La fel ca în teorema III- 12.1 - [4] se arată că <u>dualul lui C_p $0<p<1$, este</u> $B(\ell_2)$ <u>şi că corespondenţa dintre o funcţională liniară şi continuă</u> F <u>pe</u> C_p <u>şi un element</u> $A \in B(\ell_2)$ <u>este dată de formula</u> $F(X) = \operatorname{tr}(AX)$, $X \in C_p$, <u>iar</u> $|F| = \sup_{X\in C_p} \frac{|\operatorname{tr}(AX)|}{|X|_p} = \|A\|$.

Dacă notăm cu $\Phi_{(p)}(\xi)$ funcţia $\Phi(\xi^{1/p})^p$ (pentru $\xi \in \hat{k}$), Φ fiind o funcţie s.p.n., şi dacă punem $\Phi_{(p)}^*(\eta) = \max_{\xi\in\hat{k}} \frac{1}{\Phi(\xi^{1/p})^p} \sum_j \eta_j \xi_j$, atunci $\Phi_{(p)}^*$ este o funcţie s.n. şi avem analogul teoremei 12.2 - [4].

<u>Teorema 1.21</u> Fie $\Phi(\xi)$ o funcţie s.p.n. neechivalentă cu funcţia maximală. Atunci forma generală a unei funcţionale liniare şi continue $F(X)$ pe spaţiul C_{Φ}^{o} este dată de formula

$$F(X) = tr(AX)$$

unde A este un operator din $C_{\Phi^{*}_{(p)}}$ şi

$$|F| = \sup_{X \in C^{o}_{\Phi_{(p)}}} \frac{|tr\, AX|}{|X|_{\Phi_{(p)}}} = |A|_{\Phi^{*}_{(p)}} .$$

<u>Demonstraţie</u> Fie $A \in C_{\Phi^{*}_{(p)}}$ şi X un operator din $\mathcal{F}$. Atunci $AX \in \widetilde{\mathcal{F}}$ şi deci

$|F(X)| = |tr\, AX| = \left|\sum_j \lambda_j(AX)\right| \leq$ (conform cor. 3.1 - [4]) $\leq \sum_j s_j(AX) \leq$
$\leq$ (cor. II 4.1 - [4]) $\leq \sum_j s_j(A) \cdot s_j(X) \leq$ (din definiţia lui $\Phi^{*}_{(p)}$) $\leq$
$\leq \Phi_{(p)}(s(X)) \cdot \Phi^{*}_{(p)}(s(A)) = |X|_{\Phi_{(p)}} \cdot |A|_{\Phi^{*}_{(p)}} < \infty$.

Dar presupunînd că $\|X\|_{\Phi} \leq 1$, atunci $s_j(X) \leq 1$, $j = 1,2,\ldots$, de unde $s_j^{1/p}(X) \leq s_j(X)$, $j = 1,2,\ldots$ şi atunci, din propoziţia 1.6 - a) rezultă că $\Phi(s_j^{1/p}(X)) \leq \Phi(s_j(X)) = |X|_{\Phi} \leq 1$.

Deci $|X|^{p}_{\Phi_{(p)}} \leq 1$, şi prin urmare $|F(X)| \leq |X|_{\Phi} \cdot |A|_{\Phi^{*}_{(p)}}$ pentru $X \in \mathcal{F}$. Dacă $X \in C^{o}_{\Phi}$ şi $X_n \longrightarrow X$ în C^{o}_{Φ}, atunci $X_n \longrightarrow X$ în $C^{o}_{\Phi_{(p)}}$ şi deci $F(X_n) \xrightarrow[n]{} F(X)$ şi atunci $|F(X)| \leq |X|_{\Phi} \cdot |A|_{\Phi^{*}_{(p)}}$, prin urmare $F(X) = tr(AX)$ este o funcţională liniară şi continuă pe C^{o}_{Φ} şi

$$(*) \qquad \|F\| \leq |A|_{\Phi^{*}_{(p)}}$$

Vom arăta egalitatea în $(*)$. Pentru aceasta se procedează ca în [4] p. 131 înlocuind pe $\xi_j^{(n)}$ prin $\xi_j^{(n)p}$

Mai departe demonstraţia continuă ca în [4] p. 131-132. ∎

<u>Remarea 1.22</u> Dacă Φ este o funcţie s.p.n., atunci conform teoremei de mai înainte C^{o}_{Φ} este separat de dualul său şi deci putem considera completatul Mackey al său (vezi [5]) $\widetilde{C^{o}_{\Phi}}$. De asemenea se poate verifica că $\mathcal{C}_{\Phi}$ este un p-spaţiu invariant la rearanjări de şiruri (vezi [7]) şi prin urmare putem considera completatul său Mackey $\widetilde{\mathcal{C}}_{\Phi}$, care este un spaţiu invariant la rearanjări separabil de şiruri.

Se poate pune întrebarea dacă nu cumva $\widetilde{C^o_\Phi} = C^o_{\tilde{c}_\Phi}$, unde prin C^o_E am notat spaţiul operatorilor compacţi X cu proprietatea că $s_j(X) \in E$. De remarcat că C^o_E este un ideal s.p.n. separabil.

Intrebarea de mai sus este justificată deoarece $\widetilde{C}_p = C_1$ pentru $0 < p < 1$.

Răspunsul este negativ. Intr-adevăr fie $\Phi(\xi) = (\sum_{n=1}^{\infty} w_n \xi_n^{*p})^{1/p}$ unde $\xi \in \hat{k}$ şi $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ este un şir pozitiv descrescător cu $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = \infty$ şi $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$. Atunci, pentru $p = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ şi pentru $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ un şir cu aceleaşi proprietăţi ca şi $(w_n)_n$ şi pentru care $\sum_{i=1}^{n} v_i \sim (\sum_{i=1}^{n} w_i)^k$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$, $\tilde{c}_\Phi = c_\psi$, unde $\psi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \xi_n^*$. (A se vedea [6].) Deci $C^o_{\tilde{c}_\Phi} = C_v$ cu notaţiile din [4] cap. III -§15, şi prin urmare $(C_v)^* = C_V$ (cu aceleaşi notaţii). Dar dacă $\widetilde{C^o_\Phi} = C^o_{\tilde{c}_\Phi} = C_v$, atunci $C_V = (\widetilde{C^o_\Phi})^* = (C^o_\Phi)^* =$ $=$(teorema 1.21) $= C_{\Phi^*_{(p)}} = C_W$ (cu notaţiile lui [4]).

Dar este evident că $C_W \neq C_V$, deoarece $\sum_{j=1}^{n} v_j \not\sim \sum_{j=1}^{n} w_j$ ∎

§2 - Teoreme de interpolare şi aplicaţii în ideale s.p.n.

In acest paragraf vom indica posibilitatea extinderii unor rezultate ale lui J. Arazy [1], [2] privind, în special, teoreme de interpolare în ideale s.p.n.

Rezultatele sînt numai enunţate, fără a se da demonstraţii.

De asemenea unele noţiuni nu vor mai fi explicate ci se va indica doar locul în care pot fi găsite explicaţii mai detaliate.

Fie E un p-spaţiu separabil de şiruri invariant la rearanjări (pe scurt un spaţiu simetric p-normat). Atunci

$$C_E = \{ T \in C_\infty \;;\; s(T) \in E \quad \text{dotat cu p-norma} \quad \|T\| = \|s(T)\|_E \}$$

este un ideal s.p.n. separabil.

Definim proiecţia triangulară $\mathcal{T} : C_E \longrightarrow C_E$, ca fiind dată în felul următor: dacă $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sînt două baze ortonormate în ℓ_2, iar $A \in C_E$ atunci A se identifică cu matricea $\left(a(n,m)\right)_{n,m=1}^{\infty}$ relativă la cele două baze, unde $a(n,m) = = (Ae_n, f_m)$ şi

$$T(A)(i,j) = \begin{cases} a(i,j) & i \leq j \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

O primă întrebare care se poate pune este cea privind continuitatea lui T. Răspunsul este dat de

<u>Teorema 2.1</u> Fie E un spaţiu simetric p-normat. Proiecţia triangulară T este continuă pe C_E dacă şi numai dacă indicii Boyd ai lui E verifică inegalităţile

$$1 < p_E \leq q_E < \infty .$$

(Pentru definiţia indicilor Boyd a se vedea de exemplu [7].)

Dacă X este un p-spaţiu Banach, o <u>descompunere finit dimensională</u> (prescurtat d.f.d.) a lui X în spaţii $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ este un şir $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ de subspaţii finit dimensionale ale lui X cu proprietatea că orice $x \in X$ se scrie unic sub forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ cu $x_n \in X_n$. Cînd scrierea $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge necondiţionat, atunci $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ se numeşte <u>d.f.d. necondiţionată</u> a lui X.

Vom defini acum proiecţiile $P_n : C_E \longrightarrow C_E$ date de

$$P_n(A)(i,j) = \begin{cases} a(i,j) & \max(i,j) \leq n \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Fie $Z_n = Sp\left(e_{i,j} \,;\, \max(i,j) = n \right)$, unde $(e_{i,j})(k,l) = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$

La fel ca în [1] se demonstrează că:

<u>Teorema 2.2</u> Fie C_E un p-spaţiu unitar de matrici. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) T este mărginit pe C_E.

2) C_E este izomorf cu un subspaţiu al unui spaţiu p-Banach cu o d.f.d. necondiţionată.

3) C_E are o descompunere f.d. necondiţionată.

4) $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ este o descompunere f.d. necondiţionată a lui C_E.

5) $1 < p_E$ şi $q_E < \infty$.

Exemple de spaţii C_E astfel încît $1 < p_E \le q_E < \infty$ şi care sînt nelocal-convexe sînt spaţiile $C_{p,q} = C_{\ell_{p,q}}$, unde $p > 1 > q > 0$.

Aici $\ell_{p,q} = \left\{ x \in c_0 \; ; \; |x|_{p,q} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^*(n)^q \cdot n^{(q/p)-1} \right)^{1/q} \right\}$

unde $(x^*(n))_n$ este şirul $(x(n))_n$ rearanjat descrescător.

Reamintim că un spaţiu vectorial topologic X se numeşte __primar__ dacă din faptul că $X = Y \oplus Z$ atunci sau $Y \approx X$, sau $Z \approx X$.

Cu aceeaşi demonstraţie ca în [2] se poate demonstra teorema.

__Teorema 2.3__ Spaţiile C_p, unde $0 < p < 1$, sînt primare.

BIBLIOGRAFIE

[1] Arazy, J. - Some remarks on interpolation theorems and the boundness of the triangular projection in unitary matrix spaces. Int. Eq. and Operator Th. vol 1, 453-495 (1978).

[2] Arazy, J. - A remark on complemented subspaces of unitary matrix spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 79, 601-608 (1980).

[3] Mc Carthy, Ch.A. - C_p. Israel J. Math. 5, 249-271 (1967).

[4] Gohberg, I.C., Krein, M.G. - Introduction to the theory of linear nonself-adjoint operators. Amer. Math. Soc. Translations, vol. 18.

[5] Kalton, N.J. - Orlicz sequence spaces without local-convexity Proc. Cambridge Philos. Soc. 81, 253-277 (1977).

[6] Popa, N. - Basic sequences and subspaces in Lorentz sequence spaces without local convexity. Trans. Amer. Math. Soc. 263, 431-456 (1981).

[7] Popa, N. - p-Spaţii de funcţii invariante la rearanjări, $0 < p < 1$, va apare în Editura Academiei.

[8] Rotfeld, S. Yu. - The singular numbers of the sum of completely continuous operators. Topics in Math. Phys. 3 , 73-81 (1969) .

Secţia de Matematică INCREST
Bucureşti, Bd. Păcii 220

OPERATORI LINIARI CARLEMAN

MIRCEA CÎRNU

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI

Se dă noțiunea-extinsă de autor la generalitatea prezentată în comunicare- de operator liniar Carleman și cîteva din cazurile sale particulare, care dovedesc sfera largă de cuprindere aacestei noțiuni.

Fie S o mulțime, E și G spații vectoriale topologice pe corpul K al numerelor reale sau complexe, F un spațiu vectorial pe K format din funcții definite pe S cu valori în G. Un operator liniar U cu domeniul de definiție D(U) inclus în E și cu valori în F se numește <u>Carleman</u> dacă există o funcție φ numită funcție generatoare sau nucleu definită pe S cu valori în spațiul vectorial L(E,G)pe K al tuturor operatorilor liniari și continui de la E la G, astfel încît

(1) $D(U) \subseteq \{e \in E : \varphi(.)e \in F\}$

(2) $Ue(s) = \varphi(s)e, \quad e \in D(U), \quad s \in S.$

Cazuri particulare de operatori liniari Carleman:

<u>Operatorii liniari și continui.</u> Dacă F este spațiu vectorial topologic cu topologia mai fină decît topologia convergenței punctuale și U este un operator liniar și continuu peste tot definit, atunci U este Carleman.

<u>Exemplu:</u> <u>Operatorii liniari între spații finit dimensionale.</u> Dacă U este un operator liniar de la R^n la R^m cu matricea asociată $A = \| a_{ij} \|$, el este Carleman avînd ca nucleu matricea A. Mai precis avem $S=\{1,2,\dots,m\}$, $G=K, E=R^n$, $F = R^m$, $\varphi(i) = \| a_{i1} \dots a_{in} \| \in R^n \simeq (R^n)' = E'$, $i \in S$.

<u>Operatorii generați de matrici infinite, care acționează între spații de șiruri</u> .

<u>Noţiunea iniţială de operator Carleman şi extinderile sale.</u>

Dacă $S=(a,b)\subseteq R$ înzestrat cu măsura Lebesgue, $G=K$, $E=F=L^2(a,b)$, se obţine noţiunea dată de Carleman în 1923. In această situaţie nucleul este o funcţie de două variabile $\varphi(s)=K(s,.)\in L^2(a,b)$, iar operatorul are forma $Ue(s)=\int_a^b K(s,t)e(t)dt$, pentru e în $D(U)$ şi s a.p.t. în (a,b).

In cazul $S=R^n$, E spaţiu Banach, F spaţiu Banach compus din clase de funcţii măsurabile, noţiunea de operator Carleman a fost dat de Jdanov, 1974, iar în cazul cînd S e un spaţiu cu măsură σ-finită, $G=K$, $F=L^2(S)$, noţiunea de operator Carleman a fost dată de J. Weidmann, 1975.

<u>Exemplu.</u> <u>Operatorii Hilbert Schmidt</u> de la un spaţiu Hilbert E la $F=L^2(s)$ sînt operatori Carleman cu nucleul $\varphi(s)=\sum_n \overline{Ue_n(s)}\, e_n$, dacă $\sum_n |Ue_n(s)|<\infty$ şi 0 în rest, unde $\{e_n\}$ este un sistem ortonormat din $N(U)^{\perp}$.

<u>Operatorii liniari şi continui între spaţii de distribuţii</u>, $U:\mathcal{D}'\to\mathcal{D}'$, sînt adjuncţi de operatori Carleman cu nucleele familii compozabile de distribuţii în sensul definiţiei date de R. Cristescu, 1964.

<u>Operatorii de convoluţie.</u> Dacă S este un semigrup, F un spaţiu vectorial topologic, D un spaţiu vectorial, E este compus din funcţii de la S la D, invariant la translaţiile la dreapta τ^s, $s\in S$, definite prin $\tau^s e(t)=e(t\cdot s)$, $t\in S$ şi are translaţiile continue. Un operator $u\in L(E,F)$, se numeşte convolutor(E;F) dacă $(u*e)(.)\overset{def}{=}u(\tau^{\cdot}e)\in F$, Operatorul de convoluţie U definit de un convolutor u prin $U(e)=u*e$ este Carleman cu nucleul $\varphi(s)=\tau^s u$, unde $(\tau^s u)e=u(\tau^s e)$.

<u>Exemplu.</u> <u>Operatorul de derivare</u> de la $\mathcal{D}$ la $\mathcal{D}$ este Carleman cu nucleul $\varphi(s)=\tau^s\delta'$, unde δ' este derivata distribuţiei Dirac.

Operatori liniari pe spaţii de funcţii vectoriale

de

Romulus Cristescu

Rezumat

Fie X un spaţiu reticulat local convex şi $\mathcal{P}$ mulţimea tuturor seminormelor solide şi (τ)-continue definite pe X. Fie Y un spaţiu liniar complet reticulat. Pentru orice $p \in \mathcal{P}$ vom nota cu Z_p mulţimea tuturor operatorilor liniari $U: X \longrightarrow Y$ pentru care mulţimea $\{U(x); p(x) \leq 1\}$ este (o)-mărginită. Dacă $U \in Z_p$, vom pune $\|U\|_p = \sup\{|U(x)|; p(x) \leq 1\}$. Vom nota $Z = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} Z_p$

Fie T un spaţiu local compact şi $\mathcal{K}$ mulţimea tuturor părţilor compacte ale lui T. Pentru orice $E \in \mathcal{K}$ vom nota cu $\mathcal{B}_E$ mulţimea tuturor părţilor boreliene ale lui E şi $\mathcal{B} = \bigcup_{E \in \mathcal{K}} \mathcal{B}_E$. Vom nota cu $M(T,X)$ mulţimea tuturor funcţiilor $f: T \longrightarrow X$ cu proprietatea: există $E \in \mathcal{K}$ şi un şir generalizat $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ de funcţii $\mathcal{B}$-simple (care aplică T în X) aşa ca spt $f_\delta \subset E$ şi care să fie uniform convergent către f. Spunem că $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un şir aproximant pentru f. Mulţimea $M(T,X)$ este un spaţiu reticulat local convex în raport cu ordinea punctuală şi topologia dată de mulţimea seminormelor $\{\tilde{p} \mid p \in \mathcal{P}\}$ unde $\tilde{p}(f) = \sup\{p(f(t)); t \in T\}$. Pentru orice $E \in \mathcal{K}$ notăm

$$M_E(T,X) = \{f \in M(T,X); \text{spt} \cdot f \subset E\}$$

Fie acum $m: \mathcal{B} \longrightarrow Z$ aditivă, cu proprietatea: $\forall E \in \mathcal{K}, \exists p \in \mathcal{P}$ astfel ca $m(\mathcal{B}_E) \subset Z_p$ iar mulţimea

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} \|m(A_i)\|_p ; (A_1, \ldots, A_k)\ \mathcal{B}\text{-partiţie a lui } E \right\}$$

este (o)-mărginită. Vom nota cu $v_m(E,p)$ marginea superioară a acestei mulţimi şi vom spune că m este de tip (vm). Dacă $f \in M(T,X)$ este $\mathcal{B}$-simplă, definim integrala $I(f;m)$ în mod obişnuit. Dacă $f \in M(T,X)$ este oarecare iar $\{f_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ este un şir aproximant oarecare, punem

$I(f;m)=(\rho)-\lim_{\delta\in\Delta} I(f_\delta;m)$ (limita cu regulator existînd şi nedepinzînd de şirul aproximant).

Integrala $I(.;m)$ este un operator liniar pe $M(T,X)$ cu proprietatea că pentru orice $E\in\mathcal{K}$, restricţia sa la $M_E(T,X)$ este un operator (po)-mărginit.

Reciproc, dacă $U:M(T,X)\longrightarrow Y$ este un operator liniar pentru care restricţia U_E la $M_E(T,X)$ este un operator (po)-mărginit ($\forall E\in\mathcal{K}$), atunci există o funcţie aditivă $m:\mathcal{B}\longrightarrow Z$, de tip (vm) astfel ca $U=I(\cdot,m)$ şi $\| U_E \|^{\sim}_{p} = v_m(E,p)$ ori de cîte ori membrul stîng (al ultimei egalităţi) are sens.

In particular, se poate ţine seama că spaţiul $C_0(T,X)$ al funcţiilor (τ) continue cu suport compact (care aplică T în X) este un subspaţiu liniar reticulat al spaţiului $M(T,X)$. De exemplu, un operator liniar (po)-mărginit pe $C_0(T,X)$ cu valori în Y se poate prelungi pînă la un operator liniar (po)-mărginit pe $M(T,X)$.

Bibliografie

Romulus Cristescu, Ordered vector spaces and linear operators. Abacus Press, 1976.

Şiruri Vitali convergente

Gh. Grigore

In [1] şi [2] s-a degajat ca instrument de lucru, o teoremă de tip Lebesgue-Vitali de derivare a unor măsuri, teoremă în care am înlocuit sistemele Vitali cu şiruri generalizate Vitali.

Fie T o mulţime, $\mathcal{T}$ o σ-algebră de părţi ale lui T, m o măsură pozitivă definită pe $\mathcal{T}$. Vom numi partiţie a lui T un sistem finit $\Delta = \{E_1, \dots, E_n\}$ de mulţimi din $\mathcal{T}$ astfel încît $E_i \cap E_j = \emptyset (j \neq i)$, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = T$, $m(E_i) > 0$. Vom nota cu $\mathcal{D}$ familia tuturor partiţiilor lui T şi o vom ordona după fineţe. Fie $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un şir generalizat crescător de partiţii şi fie $\mathcal{B} = \{E \mid E \in \Delta_\alpha, \alpha \in A\}$ Vom nota cu $\mathcal{B}_\sigma$ familia reuniunilor numărabile de mulţimi din $\mathcal{B}$.

Definiţia 1 Spunem că şirul de partiţii $\{\Delta_\alpha\}_{\alpha \in A}$ este total dacă

(1) $(\forall) E \in \mathcal{T}$ şi $\varepsilon > 0$ există $\alpha \in A$ şi E_0 o reuniune de mulţimi din Δ_α aşa ca $m(E \Delta E_0) < \varepsilon$.

(2) $\forall Z \in \mathcal{T}$ cu $m(Z) = 0$ şi $\varepsilon > 0$ $(\exists) B \in \mathcal{B}_\sigma$ aşa ca $B \supseteq Z$ şi $m(B) < \varepsilon$

Dacă $\Delta \in \mathcal{D}$ vom nota $\|\Delta\| = \max\limits_{E \in \Delta} m(E)$

Definiţia 2 Vom spune că şirul de partiţii $\{\Delta_\alpha\}$ este un şir Vitali dacă este total, crescător şi $\lim\limits_{\alpha} \|\Delta_\alpha\| = 0$

Teorema care urmează generalizează un rezultat din [3]

Teorema 1 Dacă $\{\Delta_\alpha\}$ este un şir generalizat de partiţii, crescător şi cu proprietatea (1) iar măsura m nu are atomi atunci $\lim\limits_{\alpha} \|\Delta_\alpha\| = 0$

Fie X un spaţiu Banach şi L(T,X) spaţiul funcţiilor m-integrabile Bochner cu valori în X. Pentru $f \in L(T,X)$ fie

$$f_\alpha = \sum_{E \in \Delta_\alpha} \frac{1}{m(E)} \left(\int_E f(t)\, dm \right) \chi_E \quad \text{şi} \quad f^*(E) = \int_E f\, dm \quad (E \in \mathcal{T})$$

Teorema 2 Dacă $f \in L(T,X)$ şi $\{\Delta_\alpha\}$ este un şir Vitali atunci $\lim\limits_{\alpha} f_\alpha(t) = f(t)$ m-a.p.t. şi $\lim\limits_{\alpha} \mathrm{var}\,(f^* - f_\alpha^*) = 0$

<u>Teorema 2</u> Fie μ o măsură reală pe $\mathcal{T}$ şi pentru fiecare $x_0 \in T$ fie $E_{x_0}^{\alpha} \in \Delta_{\alpha}$, $x_0 \in E_{x_0}^{\alpha}$. Atunci $\lim\limits_{\alpha} \frac{\mu(E_{x_0}^{\alpha})}{m(E_{x_0}^{\alpha})}$ există a.p.t. şi este egală cu densitatea părţii m-absolut continui a lui μ.

Bibliografie

[1] Ismat Beg-Gh. Grigore Reprezentarea unor operatori liniari (sub tipar)

[2] Gh. Grigore Reprezentarea unor operatori liniari (ne)-mărginiţi Analele Univ. din Craiova 2-1974 103-107

[3] P. Halmos Measure Theory New York 1951

[4] Г.Е. Шилов, В. Гуревич Интеграл, мера и производная Изд. Наука Москва 1964.

Universitatea din Bucureşti

Facultatea de matematică

MASURI VECTORIALE PE LATICI

Stelian Găină

Institutul de Arhitectură București

In tot acest rezumat $\mathcal{X}$ va însemna un grup topologic separat, complet și comutativ, în care operația va fi notată aditiv și elementul unitate cu 0, X o mulțime nevidă arbitrară, $\mathcal{P}(X)$ mulțimea tuturor părților lui X, $\mathcal{L}\subset\mathcal{P}(X)$ o latice de mulțimi, adică o mulțime de părți cu proprietățile 1) $\emptyset\in\mathcal{L}$; 2) $A,B\in\mathcal{L}\Rightarrow A\cup B, A\cap B\in\mathcal{L}$. și $\lambda:\mathcal{L}\to\mathcal{X}$ o funcție modulară, adică o funcție cu proprietățile 1) $\lambda(\emptyset)=0$; 2) $\lambda(A\cup B)+\lambda(A\cap B)=\lambda(A)+\lambda(B)$, $\forall A,B\in\mathcal{L}$.

Prin σ-măsură vom înțelege o funcție numărabil aditivă de mulțime și cu valori în $\mathcal{X}$. Pentru orice funcție $\varphi:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{X}$ vom nota

$$\mathcal{M}_\varphi=\{A\subseteq X \mid \varphi(B)=\varphi(B\cap A)+\varphi(B\setminus A),\ \forall B\subseteq X\}$$

In lucrarea [2], noi am generalizat noțiunile de măsură interioară și exterioară, la cazul funcțiilor cu valori în $\mathcal{X}$, în maniera de mai jos.

<u>Definiția 1.1</u> Funcția $\varphi:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{X}$ se numește <u>semi-măsură interioară</u> dacă 1) $\varphi(\emptyset)=0$; 2) $((A_n)_n\subset\mathcal{P}(X),\ A_n\downarrow\emptyset)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(\emptyset)$

Dacă, în această definiție, condiția 2) se înlocuiește cu condiția mai tare următoare:

2') $((A_n)_n\subset\mathcal{P}(X),\ A_n\downarrow A)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\varphi(A_n)=\varphi(A)$.

atunci vom spune că φ este o <u>măsură interioară</u>

<u>Definiția 1.2</u>. Funcția $\psi:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{X}$ se numeste <u>semi-măsură exterioară</u> dacă 1) $\psi(\emptyset)=0$; 2) $((A_n)_n\subset\mathcal{P}(X),\ A_n\uparrow X)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\psi(A_n)=\psi(X)$.

Dacă, în această definiție, condiția 2) se înlocuieste cu condiția mai tare următoare:

2') $((A_n)_n\subset\mathcal{P}(X),\ A_n\uparrow A)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\psi(A_n)=\psi(A)$.

atunci vom spune că ψ este o măsură exterioară.

De asemenea, în lucrarea [2], noi am demonstrat teoremele următoare, care generalizează binecunoscuta teoremă a lui Carathéodory.

<u>Teorema 1.3.</u> Fie $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{X}$ o semi-măsură interioară, $\mathcal{A} = \mathcal{M}_\varphi$ și

$$\mathcal{A}_\sigma = \left\{ A \subset X \mid (\exists)\ (A_n)_n \subset \mathcal{A}, \text{ astfel încît } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

Atunci avem 1) $\mathcal{A}$ este o algebră de mulţimi şi $\varphi/_{\mathcal{A}}$ este o σ-măsură. 2) $\left((A_n)_n \subset \mathcal{A}_\sigma,\ A_n \uparrow A\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n) = \varphi(A)$.

3) $\left((A_n)_n \subset \mathcal{A}_\sigma,\ A_n \downarrow\right) \Rightarrow (\varphi(A_n))_n$ este convergent.

4) $\mathcal{A}_\sigma$ este o latice de mulţimi, $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\sigma$ şi $\varphi/_{\mathcal{A}_\sigma}$ este o funcţie modulară.

5) Dacă φ este o măsură interioară, atunci $\mathcal{A}$ este σ-algebră şi $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{A}$

<u>Observaţie</u> Funcţia $\varphi/_{\mathcal{A}}$ va fi numită în continuare σ-măsura generată de φ.

<u>Teorema 1.4.</u> Fie $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{X}$ o semi-măsură exterioară, $\mathcal{B} = \mathcal{M}_\psi$ şi

$$\mathcal{B}_\sigma = \left\{ B \subset X \mid (\exists)(B_n)_n \subset \mathcal{B}, \text{ astfel încît } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \right\}$$

Atunci avem 1) $\mathcal{B}$ este o algebră de mulţimi şi $\psi_{\mathcal{B}}$ este o σ-măsură. 2) $\left((B_n)_n \subset \mathcal{B}_\sigma,\ B_n \downarrow B\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \psi(B_n) = \psi(B)$.

3) $\left((B_n)_n \subset \mathcal{B}_\sigma,\ B_n \uparrow\right) \Rightarrow ((\psi(B_n))_n$ este convergent.

4) $\mathcal{B}_\sigma$ este o latice de mulţimi, $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\sigma$ şi $\psi/_{\mathcal{B}_\sigma}$ este o funcţie modulară.

5) Dacă ψ este o măsură exterioară, atunci $\mathcal{B}$ este σ-algebră şi $\mathcal{B}_\sigma = \mathcal{B}$.

<u>Observaţie</u> Funcţia $\psi/_{\mathcal{B}}$ va fi numită în continuare σ-măsură generată de ψ.

După cum se arată în [1] şi [4], orice σ-măsură $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ unde $\mathcal{C}$ este un clan care posedă proprietatea că pentru orice şir monoton $(E_n) \subset \mathcal{C}$, şirul $(\mu(E_n))$ este convergent, se poate prelungi la o σ-măsură pe o σ-algebră. Astfel, de aici şi din proprietăţile 2) şi 3) din teoremele de mai sus, rezultă că deşi funcţiile φ şi ψ sînt numai semi-măsuri, interioară şi respectiv exterioară, acest fapt nu reprezintă un impediment pentru generarea, cu ajutorul lor, a unei σ-măsuri pe o σ-algebră.

Scopul lucrării pe care o rezumăm aici şi care va apare în Revue Roum. de Math. pures et appl. , este de a arăta în ce mod se pot construi, plecînd de la funcţia modulară λ , semi-măsuri şi măsuri interioare şi exterioare în sensul definiţiilor 1.1. şi 1.2. şi de a da condiţii necesare şi suficiente în care σ-măsurile generate de ele prelungesc pe λ .

2. Pentru realizarea acestui deziderat vom presupune în plus că funcţia λ posedă în plus proprietăţile următoare :

$$\mathrm{I})\begin{cases} ((E_n)_n \subset \mathcal{L},\ E_n \uparrow) \Rightarrow (\lambda(E_n)) \text{ este convergent} \\ ((E_n)_n \subset \mathcal{L},\ E_n \downarrow \emptyset) \Rightarrow \lim \lambda(E_n) = 0 \end{cases}$$

şi vom folosi următoarea lemă care este binecunoscută (v. [4])

Lema 2.1. Fie $(x_i)_{i\in(I,\leq)}$ un şir generalizat în $\mathcal{X}$. Dacă pentru orice şir crescător $(i_n) \subset I$, şirul $(x_{i_n})_n$ este un sir Cauchy , atunci $(x_i)_{i\in(I,\leq)}$ este un şir Cauchy generalizat.

Pentru orice mulţime $A \subset X$, vom nota $\mathcal{L}^-(A) = \{E\in\mathcal{L} \mid E\subset A\}$ şi vom ordona această mulţime cu relaţia de incluziune. Atunci $\mathcal{L}^-(A)$ este o mulţime dirijată şi din proprietatea (I) şi lema 2.1. , rezultă că $(\lambda(E))_{E\in\mathcal{L}^-(A)}$ este un şir Cauchy generalizat în $\mathcal{X}$ şi deci convergent. Notînd limita sa prin $\nu(A)$, obţinem astfel o funcţie $\nu : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{X}$ cu proprietatea evidentă $\nu|_{\mathcal{L}} = \lambda$..

Teorema 2.2. Avem 1) ν este o semi-măsură interioară.

2) $((A_n)_n \subset \mathcal{P}(X),\ A_n\uparrow) \Rightarrow ((\nu(A_n))$ Convergent$)$.

3) Dacă $A \subseteq X$ atunci $A \in \mathcal{M}_\nu \Leftrightarrow \lambda(E) = \nu(E\cap A) + \nu(E\setminus A),\ \forall E\in\mathcal{L}$.

4) $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_\nu \Leftrightarrow A,B\in\mathcal{L},\ A\subseteq B \Rightarrow \nu(B\setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$.

Observaţie Dacă $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}_\nu$, atunci pentru orice şir monotn $(E_n)_n \subset \mathcal{L}$ cu limita $E\in\mathcal{L}$, avem $\lambda(E_n) \to \lambda(E)$ deoarece în baza teoremelor 1.3. 2.2., $\nu|_{\mathcal{M}_\nu}$ este o σ-măsură şi $\nu|_{\mathcal{L}} = \lambda$. In particular rezultă că λ este numărabil aditivă pe $\mathcal{L}$. Afirmaţia inversă nu este însă adevărată, după cum arată exemplul următor

Fie R mulţimea numerelor reale, $X=(0,1]\subset R$, $\mathcal{L}=\{(0,a]\mid a\in(0,1]\}$ şi $\lambda:\mathcal{L}\to[0,1]$, $\lambda((0,a])=a$. Atunci $\phi=(0,0]\in\mathcal{L}$, $X\in\mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}$ este o latice stabilă în raport cu operaţia de intersecţie numărabilă. De asemenea, este evident că λ este o funcţie modulară si că pentru orice şir $(E_n)_n\subset\mathcal{L}$, $E_n\downarrow E$ avem $\lambda(E_n)\to\lambda(E)$ iar pentru orice şir $(F_n)_n\subset\mathcal{L}$, $F_n\uparrow$ şirul $\lambda(F_n)$ este convergent; dacă $F\in\mathcal{L}$, atunci avem chiar $\lambda(F_n)\to\lambda(F)$.

Totuşi, dacă $A=(0,a]$, $B=(0,b]$ unde $0<a<b\le 1$, atunci $\lambda(B)-\lambda(A)=b-a>0$ iar $\gamma(B\setminus A)=\lambda(\phi)=0$, deci <u>nu</u> avem $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{M}_\gamma$.

<u>Teorema 2.3.</u> Dacă $\mathcal{L}$ este stabilă în raport cu operaţia de intersecţie numărabilă şi dacă λ posedă în plus proprietatea

$$(*)\left((E_n)_n\subset\mathcal{L},\ E_n\downarrow E\right)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n)=\lambda(E).$$

atunci γ este o măsură interioară.

<u>Observaţie</u> Exemplele tipice de latici ce satisfac condiţia din teorema 2.3. sînt laticea $\mathcal{K}$ a părţilor compacte ale unui spaţiu topologic separat si laticea $\mathcal{F}$ a părţilor închise ale aceluiaşi spaţiu. De asemenea remarcăm că dacă în teoremele 2.2. şi 2.3., mulţimea X este un spaţiu topologic separat si $\mathcal{L}=\mathcal{K}\subseteq\mathcal{M}_\gamma$, atunci $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{M}_\gamma$ după cum rezultă imediat din afirmaţia 3) a teoremei 2.2. Mai mult, dacă $\mathcal{B}_o$ este σ-algebra mulţimilor boreliene ale lui X şi γ este măsură interioară, atunci $\mathcal{B}_o\subseteq\mathcal{M}_\gamma$, căci $\mathcal{M}_\gamma$ este σ-algebră (v.teorema 1.3.).

In propoziţia următoare vom da o condiţie suficientă pentru ca $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{M}_\gamma$. Pentru aceasta vom introduce o noţiune nouă şi vom generaliza noţiunea de volum regulat (v.[3], cap X, §54).

<u>Definiţia 2.4.</u> Funcţia $\alpha:\mathcal{L}\to\mathcal{P}(X)$ se numeşte operator de regularizare pentru laticea $\mathcal{L}$ dacă : 1) $\alpha(A)\subseteq A$, $\forall A\in\mathcal{L}$.

2) $(A,B,E\in\mathcal{L},\ A\subseteq\alpha(B\setminus E))\Rightarrow\exists F\in\mathcal{L}$, astfel încît $A\subseteq\alpha(F)\subseteq F\subseteq\alpha(B)\setminus E$.

3) $A,B\in\mathcal{L}\Rightarrow A\setminus\alpha(B)\in\mathcal{L}$.

<u>Observaţie</u> Cu notaţiile din observaţia făcută la teorema 2.3., este evident că dacă X este un spaţiu local compact şi separat, iar

$\mathcal{L}=\mathcal{K}$, atunci restricţia operatorului interior la $\mathcal{K}$ este un operator de regularizare pentru $\mathcal{K}$. De asemenea, dacă X este un spaţiu normal şi $\mathcal{L}=\mathcal{F}$, atunci restricţia operatorului interior la $\mathcal{F}$ este un operator de regularizare pentru $\mathcal{F}$.

Definiţia 2.5. Funcţia modulară $\lambda:\mathcal{L}\to\mathcal{X}$ se numeşte volum regulat dacă există un operator de regularizare α pentru laticea $\mathcal{L}$ astfel încît pentru orice $A\in\mathcal{L}$ şi orice vecinătate V a lui 0 în $\mathcal{X}$ există $B\in\mathcal{L}$, aşa încît $A\subseteq\alpha(B)$ şi $\lambda(A)-\lambda(E)\in V$ pentru orice $E\in\mathcal{L}$, astfel încît $A\subseteq E\subseteq B$.

Propozitia 2.6. Dacă $\lambda:\mathcal{L}\to\mathcal{X}$ este un volum regulat cu proprietatea 1), atunci $\mathcal{L}\subseteq\mathcal{M}_\nu$.

3) In continuare vom arăta în ce mod se pot construi, plecînd de la funcţia modulară λ, semi-măsuri si măsuri exterioare. Pentru aceasta vom presupune că $X\in\mathcal{L}$ si că λ posedă proprietatea următoare

$$\mathrm{II})\begin{cases}((E_n)_n\subset\mathcal{L},\ E_n\downarrow)\Rightarrow(\lambda(E_n))_n \text{ este convergent}\\ ((E_n)_n\subset\mathcal{L},\ E_n\uparrow X)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(E_n)=\lambda(X).\end{cases}$$

Pentru orice $A\subseteq X$ vom ordona mulţimea $\mathcal{L}^+(A)=\{E\in\mathcal{L}\mid A\subseteq E\}$ cu relaţia duală incluziunii. Atunci $\mathcal{L}^+(A)$ este o mulţime filtrantă şi din lema 2.1. şi ipoteza II rezultă că $(\lambda(E))_{E\in\mathcal{L}^+(A)}$ este un sir Cauchy generalizat în $\mathcal{X}$, deci convergent. Notînd limita sa prin $\mu(A)$ obţinem astfel o funcţie $\mu:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{X}$ cu proprietatea $\mu|_{\mathcal{L}}=\lambda$.

Teorema 3.1. Avem: 1) μ este o semi-măsură exterioară.

2) $((A_n)_n\subset\mathcal{P}(X),\ A_n\downarrow)\Rightarrow(\mu(A_n))_n$ este convergent

3) Dacă $A\subseteq X$, atunci $A\in\mathcal{M}_\mu \Leftrightarrow \lambda(X)+\lambda(E)=\mu(E\cup A)+\mu(E\cup CA)\ \forall E\in\mathcal{L}$

4) Dacă $\mathcal{L}$ este stabilă la reuniuni numărabile şi λ posedă în plus proprietatea :

$$(**)\ ((E_n)_n\subset\mathcal{L},\ E_n\uparrow E)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\lambda(E_n)=\lambda(E).$$

atunci μ este măsură exterioară.

Observaţie O latice importantă care satisface condiţia din afirmaţia 4) a teoremei 3.1. este laticea mulţimilor deschise ale unui spaţiu topologic .

In continuarea lucrării se dau condiţii necesare şi suficiente pentru ca funcţia λ să fie prelungibilă la o funcţie modulară care să îndeplinească condiţiile din teorema 2.3. şi din afirmaţia 4) a teoremei 3.1.

Bibliografie

1. Găină, S. , Prolongement des mesures à valeurs dans un groupe topologique , Bull. Math. Soc.Sci. Math.R.S.R. , 14(62), no2 (197o), pp.171-179

2. Găină, S., Dualité dans la theorie de la mesure , Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. (va apare) .

3. Halmos, P.R. , Measure Theory, New York , 195o .

4. Sion , M. , Outher measures with values in a topological group, Proc. London Math. Soc. , 19,3, 89-1o6 (1969)

O TEOREMA DE REPREZENTARE CU APLICATII IN TERMODINAMICA

de Eufrosina Mânzatu

- Rezumat -

Lucrarea pornește de la ideea că al doilea postulat al termodinamicii exprimat prin ecuația calorică de stare, care precizează dependența energiei interne a unui sistem în stare de echilibru la un moment notat t de parametrii externi și de temperatura θ a sistemului este o dependență funcțională :

$U=F[g]$, cu $g=g(\tau)=(a_i(\tau),\theta(\tau))$, $\tau\in(-\infty,t]$, $i=1,\dots,n$ cu F funcțională continuă pe spațiul local conex notat $D(-\infty,t]$ al funcțiilor vectoriale indefinit derivabile $g: (-\infty,t]\to R^{n+1}$ înzestrat cu familia de seminorme:

$$|g|_\lambda = \sup_{\tau\in[t-\infty,t]} \sqrt{\sum_i a_i^2(\tau)+\theta^2(\tau)},\quad \lambda>0 \text{ real.}$$

In ipoteza că F este diferențiabilă Fréchet într-un punct fixat $g_1\in D(-\infty,t]$, notînd cu δF diferențiala Fréchet corespunzătoare, se demonstrează :

Teorema : Există un $\lambda>0$ și o funcție vectorială $f(\tau)=(b_i(\tau),q(\tau))$, b_i și q funcții de pătrat integrabil pe $[t-\lambda,t]$, așa încît $\delta F[g_1;h]$ admite în punctul $h=g_2-g_1\in D(-\infty,t]$ pentru care $g_j=(a_{ji},\theta_j)$, $j=1,2$, $g_2(\tau)=g_1(\tau)$ pentru $\tau\in(-\infty,t-\lambda]$, o reprezentare integrală de forma :

$$\delta F[g_1;g_2-g_1]=\int_{t-\lambda}^{t}\left\{\sum_{i=1}^{n}[a_{2i}(\tau)-a_{1i}(\tau)]'b_i(\tau)+[\theta_2(\tau)-\theta_1(\tau)]'q(\tau)\right\}d\tau$$

Formula lui Taylor dă, în notația $U_2=F[g_2]$, $U_1=F[g_1]$ și cu ipotezele suplimentare că funcțiile b_i și q au derivată a.p.t. continuă pe $[t-\lambda,t]$ și că $a_{2i}(t)=a_{1i}(t)$, $\theta_2(t)=\theta_1(t)$:

$$U_2-U_1=\int_{t-\lambda}^{t}\left\{\sum_i[a_{2i}(\tau)-a_{1i}(\tau)][-b_i'(\tau)]+[\theta_2(\tau)-\theta_1(\tau)][-q'(\tau)]\right\}d\tau+$$

$$+R_1[g_1;g_2-g_1]$$

cu

$$\lim_{g_2\to g_1}\frac{R_1[g_1;g_2-g_1]}{|g_2-g_1|_\lambda}=0$$

Renunțînd la termenul complementar R_1, această formulă reprezintă egalitatea lui Gouy(echivalentă cu principiul II al termodinamicii pentru procese complet reversibile)deoarece variațiile $a_{2i}-a_{1i}$ ale parametrilor externi(deformările)în produs cu forțele $(-b_i')$ integrat pe perioada de timp cît au avut loc deformările se poate interpreta cu lucrul mecanic efectuat de sistem prin trecerea de la o stare la alta; valoarea diferențială $-q'(\tau)d\tau$ reprezintă entropia $dS=\frac{dQ}{\theta_2}$ a sistemului, $\theta_2-\theta_1$ diferența temperaturilor în cele două stări.

BIBLIOGRAFIE

1. Bruhat G., Cours de physique générale-Thermodynamique, Paris, 1938.

2. Marinescu G., Espace, vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions, Berlin, 1963.

3. Mânzatu E., Contribuții la studiul topologiilor admisibile...., Studii și cercetări matematice, 29/6, 1977.

O TEOREMA DE PRELUNGIRE A UNOR OPERATORI AFINI

Octav Olteanu

Institutul Politehnic București

Se dă o teoremă de prelungire a unui operator afin, cu păstrarea proprietății acestuia de a fi majorat de un operator concav și minorat de un operator convex .

Notație Fie X un spațiu liniar real și $A_1 \subseteq X$ o submulțime convexă. Vom nota:

$$\text{lin } A_1 = \left\{ \alpha a_1 + \beta a_2 \mid a_1, a_2 \in A_1 , \alpha, \beta \in R, \alpha+\beta=1 \right\}$$

Teoremă Fie X un spațiu liniar , Y un spațiu liniar preordonat , $A \subseteq X$ convexă, $q: A \longrightarrow Y$ un operator concav, $p: A \rightarrow Y$ un operator convex, astfel încît $p \leq q$. Fie $B \subseteq A$ o submulțime convexă și $h: B \longrightarrow Y$ un operator afin astfel încît

$$p|_B \leq h \leq q|_B$$

Atunci există o submulțime convexă $A_1 \subseteq A$ astfel încît $B \subseteq A_1 \subseteq A \subseteq \text{lin} A_1$ și un operator afin $h_1 : A_1 \longrightarrow Y$ astfel încît

1) $h_1|_B = h$

2) $p|_{A_1} \leq h_1 \leq q|_{A_1}$.

Bibliografie

1) Peressini, A.L. Ordered Topological Vector Sapces, New-York , 1967 .

2) Schaefer, H. Topological vector spaces, Mac Millan, New-York , 1966 .

ULTRAPRODUSE DE SPATII RETICULATE CVASINORMATE

Mircea Popovici și Ovidiu Sandru

Considerăm familia $\{E_i\}_{i\in I}$ de spații liniare, cvasinormate cu cvasinormele q_i subomogene ($q_i(\alpha x)\leq q(x)$ dacă $|\alpha|<1$) .

Notăm $l_\infty(I,E_i) = \{ x=(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in E_i \text{ , } \sup_i q_i(x_i) < \infty \}$ și $q(x) = \sup_i q_i(x_i)$

<u>Definiția 1</u> Dacă $\mathcal{U}$ este un ultrafiltru peste I , numim ultraprodusul spațiilor $\{E_i\}_{i\in I}$ spațiul cft $l_\infty(I,E_i)/N_{\mathcal{U}}$, unde $N_{\mathcal{U}}$ este subspațiul lui $l_\infty(I,E_i)$ foemat din acei $x = (x_i)$ pentru care $\lim_{\mathcal{U}} q_i(x_i) = 0$. Notăm ultraprodusul cu $(E_i)_{\mathcal{U}}$.

<u>Propozitia 1</u> Ultraprodusul $(E_i)_{i\in I}$ este spațiu liniar cvasinormat cu cvasinorma subomogenă.

<u>Definiția 2</u> Spunem că un spațiu reticulat E este spațiu reticulat cvasinormat dacă cvasinorma este solidă.

<u>Propoziția 2</u> Ultraprodusul de spații reticulate cvasinormate este spațiu reticulat cvasinormat.

<u>Propozitia 3</u> Fie $\{E_i\}_{i\in I}$ o familie de spații σ-reticulate cvasinormate și $(x_n)_{n\in N}\subset(E_i)_{\mathcal{U}}$. Dacă $x_n \xrightarrow{o} x$ în $(E_i)_{\mathcal{U}}$, atunci pentru fiecare $i\in I$, există șirul $(x_n^i)_{n\in N}\subset E_i$ și $x^i \in E_i$ astfel încît $x_n^i \xrightarrow{o} x^i$ în E_i și $(x_n^i) = x_n$, $(x^i)_n = x$.

Propoziția care urmează conduce la generalizarea următoarei teoreme a lui Krivine :

Fie L o latice Banach K-izomorfă laticial cu l_p $(p \geq 1)$. Atunci l_p este finit reprezentabil laticial în L .

<u>Propoziția 4</u> Fie L o latice Banach K-izomorfă laticial cu $L_p[0,1]$ $(p\geq 1)$. Atunci $L_p[0,1]$ este finit reprezentabil laticial în L .

APLICATII ALE NUMERELOR DE ENTROPIE ALE UNUI OPERATOR

Nicolae Tiţa şi Horiana Tudor

Universitatea din Braşov

In lucrare se studiază măsura necompacităţii unui operator liniar cu ajutorul numerelor de entropie şi a numerelor lui Ghelfand şi Kolmogorov [1], [2], [3].

Fie L(E) mulţimea operatorilor liniari şi mărginiţi $T : E \longrightarrow E$, unde E este un spaţiu normat.

Numerele de entropie se definesc astfel :

$$e_n(T) = \inf \{ \sigma \geq 0 \mid \exists\, y_1, y_2, \dots, y_q \in E \text{ a.î. } TU \subset \bigcup_1^q \{ y_i + \sigma U \} \},\quad n=1,2,\dots,\quad U = \{ x \in E,\ \|x\| \leq 1 \},\ q < n.$$

In [1] se arată că măsura de necompacitate $\beta(T)$ a operatorului T (în sensul lui G.Darbo) este egală cu $E(T) = \lim_{n\to\infty} e_n(t)$, în cazul cînd E este spaţiu Hilbert şi $T = T^*$. In lucrare, cu E(T) se notează măsura de necompacitate a unui operator pe un spaţiu normat oarecare, cu $d_n(T)$ şi $\delta_n(T)$ se notează numerele lui Ghelfand şi respectiv Kolmogorov, iar cu $d(T) = \lim_{n\to\infty} d_n(T)$.

Tinînd cont de proprietăţile numerelor $e_n(T)$, $d_n(T)$ şi $\delta_n(T)$ ([3], [2]) şi de relaţia

$$C^{-1} E(T) \leq d(T) \leq C\, E(T), \qquad (*)$$

unde C e o constantă independentă de E, rezultă unele relaţii pentru E(T).

1. $E(T_1+T_2) \leq E(T_1)+E(T_2)$

2. $E(T_1 T_2) \leq E(T_1) E(T_2)$

3. $E(T+S) = E(T) \Leftrightarrow T$ este compact

4. $E(T_1 \otimes_\theta T_2) \leq K [E(T_1) \|T_2\| + \|T_1\| E(T_2)]$, unde K este o constantă, iar θ o normă tensorială $\varepsilon \leq \theta \leq \pi$.

Relaţia 4 se obţine ţinînd cont de (*) şi de expresia numerelor $d_n(T_1 \otimes T_2)$ ([3]). Celelalte relaţii se obţin din proprietăţile numerelor $e_n(T)$ date de :

<u>Lemă.</u> Numerele de entropie verifică relaţiile

1. $e_{m\,n}(T_1+T_2) \leq e_m(T_1) + e_n(T_2)$, $m,n=1,2,\ldots$

2. $e_{m\,n}(T_1 T_2) \leq e_m(T_1) e_n(T_2)$

Pentru demonstraţia relaţiei (2) se procedează astfel. Fie $\sigma_1 \geq e_m(T_1)$ şi $\sigma_2 \geq e_n(T_2)$. Din definiţia lui $e_m(T_1)$ rezultă că pentru $x \in U$ există $y_i \in E$ şi $\bar{x} \in U$ astfel ca

$$T_1 x = y_i + \sigma_1 \bar{x} \quad , \quad 1 \leq i \leq q < m$$

Atunci : $T_2 T_1 x = T_2 y_i + \sigma_1 T_2 \bar{x}$

Din definiţia lui $e_n(T_2)$ rezultă că există $y_j \in E$ $1 \leq j \leq r < n$ şi $x^* \in U$ astfel încît

$$T_2 T_1 x = T_2 y_i + \sigma_1 (y_j + \sigma_2 x^*) = T_2 y_i + \sigma_1 y_j + \sigma_1 \sigma_2 x^*$$

Deci

$$(T_2 T_1) U \subset \bigcup_{i=1}^{q} \bigcup_{j=1}^{r} \{\bar{y}_i + \bar{y}_j + \sigma_1 \sigma_2 U\}, \quad \bar{y}_i = T_2 y_i$$

$$\text{şi} \quad \bar{y}_j = \sigma_1 y_j$$

Cum $q \cdot r < m \cdot n$, ţinînd cont de definiţia numerelor $e_n(T)$ se obţine (2). Relaţia (1) se justifică analog.

<u>Bibliografie.</u>

1 D.EDMUNDS, H.TRIEBEL : Entropy Numbers for Non-Compact Self-Adjoint Operators in Hilbert Spaces, Math.Nachr. 100, 213-219 (1981).

2 B.CARL : Math.Nachr. 1o3, 39-43, 1981.

3 N.TITA : Consecinţe ale aplicării n-diametrilor în studiul operatorilor liniari, Ses.St.Univ.Craiova, 1971.

OPERATORI MARGINITI PE LATICI BANACH

de

George Turcitu

1. Dacă E este o latice Banach (l.B.) , este uşor de arătat că pentru $A \subset E$ următoarele afirmaţii sînt echivalente :

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists u \in E^+ : \ A \subseteq \varepsilon B_1 + [-u,u]$;

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists u \in E^+ : \ \|(|x| - u)^+\| \leq \varepsilon$, $\forall x \in A$;

iii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists u \in E^+ : \ \| |x| - |x| \wedge u \| \leq \varepsilon$, $\forall x \in A$.

unde B_1 este bula unitate închisă a lui E .

2. Definiţie Fie E l.B. şi $A \subset E$. A se zice aproape o-mărginită dacă verifică una din condiţiile de mai sus .

3. Dacă E este l.B. şi $A \subset E$, atunci , mulţimile : A , soA , coA , co(soA), so(coA) sînt a.o-mărginite de îndată ce oricare dintre ele este a.o-mărginită .

4. Teoremă ([1] , 83A) Fie E un L-spaţiu şi $A \subset E$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente :

i) A este a.o-mărginită ;

ii) A este relativ slab compactă

5. Definiţie Fie E spaţiu Banach , F l.B. şi $T \in L(E,F)$. T se numeşte operator a.o-mărginit dacă duce mulţimi normic mărginite în mulţimi a.o-mărginite .

6. Cu 4. este clar că dacă E s.B. iar F L-spaţiu , atunci $T \in L(E,F)$ este a.o-mărginit dacă şi numai dacă este slab compact .

7. Ţinînd cont de caracterizările operatorilor slab compacţi definiţi pe C(S) (vezi [2] 6.) şi din 6. obţinem :

Teorema Fie E şi F latici Banach şi $T \in L(E,F)$. Dacă T este un operator a.o-mărginit , atunci :

i) T' aplică orice şir o-mărginit disjunc într-un şir normic convergent ;

ii) T' aplică orice şir monoton o-mărginit într-un şir normic convergent ;

iii) T' este un operator de tip B . (vezi [2], 2.)

8. Definiţie Fie E,F latici Banach , $T \in L(E,F)$ se numeşte operator absolut continuu (a.c.) dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x' \in E'^{+}$ ca : $\|Tx\| \leq \varepsilon\|x\| + x'(|x|)$, $\forall\ x \in B_1$.

9. Teoremă Fie E,F latici Banach şi $T \in L(E,F)$, atunci , T este un operator absolut continuu dacă şi numai dacă T' este un operator a.o-mărginit .

10. Dacă T este un operator a.c. , atunci , T aplică mulţimi $|\sigma|$-total mărginite în mulţimi normic compacte .

11. Teoremă Fie E l.B. şi $T \in L(E)$ pozitiv compact şi fie $S : E \longrightarrow E$, $0 \leq S \leq T$. Atunci :

i) S este un operator a.o-mărginit ;

ii) S aplică o-intervalele în mulţimi $|\sigma|$-total mărginite

iii) S este un operator absolut continuu ;

iv) S^3 este un operator compact . (vezi şi [3])

BIBLIOGRAFIE

[1] Fremlin,D.H.,"Topological Riesz Spaces and Measure Theory", Cambridge at the U.Press,1974 .

[2] Niculescu,C.,"Operatori slab compacţi ...",Sem."Spaţii Lin. Ordonate Top.",Nr.2(1981)Braşov .

[3] Aliprantis,cC.D.,Burkinshaw,O.,"Positive Compact Operators in Banach Latices",Math.Zeisch.Heft 3,198o .

SEMIGRUPURI POZITIVE PE LATICI LOCAL CONVEXE

MIHAI VOICU

- INSTITUTUL DE CONSTRUCTII BUCURESTI -

Fie X un spaţiu local convex şi P familia seminormelor continue pe X.

Def.1

Familia $R_\lambda \in L(X), \lambda>0$ se numeşte rezolvantă dacă verifică ecuaţia

$$R_\lambda f - R_\mu f = (\mu-\lambda) R_\lambda R_\mu f.$$

Def.2

O rezolvantă $R_\lambda, \lambda>0$ este de tip L_0 (L_∞) dacă :

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda R_\lambda f = 0, \left(\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda f = f \right), \forall f\in X.$$

Observaţie

Dacă $R_\lambda, \lambda>0$ este de tip L_0, notăm cu $V : D \longrightarrow X$ operatorul definit astfel : $Vf = \lim_{\lambda\to 0} R_\lambda f, f \in D$.

V se numeşte cogeneratorul asociat.

Dacă $R_\lambda, \lambda>0$ este de tip L_∞, notăm cu $A : D_1 \longrightarrow X$ operatorul definit astfel $Af = \lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda R_\lambda f - f), f\in D_1$

A se numeşte generatorul asociat.

Def.3

Spunem că familia $P_t \in L(X), t\geqslant 0$ este un semigrup de clasă C_0 dacă :

1. $P_t P_s = P_{t+s}$
2. $P_0 = I$
3. $\lim_{t\to t_0} P_t f = P_{t_0} f$,

Notăm cu $V: D \longrightarrow X$, generatorul infinitezimal al semigrupului.

$$Vf = \lim_{t\to 0} \frac{P_t f - f}{t}, f \in D.$$

Teorema 1

Fie X o latice local convexă (în sensul din / 1 /),

R_λ, $\lambda>0$ o familie rezolvantă de tip L_0 şi L_∞ şi $V:D \longrightarrow X$ generatorul asociat. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1) R_λ este pozitiv, pentru orice $\lambda > 0$

2) $f \in D, \lambda>0$ şi $(\lambda I - V) f \wedge (-Vf) \leq 0 \Rightarrow f \leq 0$

3) $f \in D, \lambda>0$ şi $(\lambda I - V) f \leq 0 \Rightarrow f \leq 0$

<u>Teorema 2</u>

Fie X o latice local convexă, secvenţional completă, P_t, $t \geq 0$ un semigrup de clasă C_0 şi $V: D \longrightarrow X$ generatorul infinitezimal. Presupunem că sînt îndeplinite condiţiile:

1. Pentru orice $p \in P$, există $q \in P$, astfel încît $p(P_t f) \leq q(f)$, $\forall (t \geq 0, f \in X)$.
2. $\overline{\mathrm{Im} V} = X$. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(1) P_t este pozitiv, pentru orice $t > 0$

(2) $f \in D, \lambda>0$ şi $(\lambda I-V)f \wedge (-Vf) \leq 0 \Rightarrow f \leq 0$

- B i b l i o g r a f i e -

/1/. Cristescu R. - Spaţii liniare topologice. Ed.Acad. RSR, 1974.

/2/. Sato, Ken-iti. - Positive pseudoresolvents in Banach lattices. J.-Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect. I 17 (1970).

/3/. Voicu M. - Familii rezolvante pe spaţii local convexe. St.cerc.mat.29,2 (1977).

/4/. Voicu M. - Operatori asociaţi rezolvantelor pe spaţii local convexe. St.cerc.Mat. 29; 5 (1977).

/5/. Yosida K. - Functional Analysis, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.

SPATII BANACH SEPARABILE CU DUAL NESEPARABIL

Constantin Volintiru

Facultatea de Matematică Bucureşti

Dacă X este un spaţiu Banach real separabil cu dualul X^* neseparabil, se poate demonstra următoarea afirmaţie :

" Pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir bazic $(x_n) \subset X$ şi $x^* \in X^*$ astfel încît $\|x^*\| = 1$ şi

$$\|x_n\| = 1 \ , \ x^*(x_n) > 1 - \varepsilon$$

pentru orice $n \in N$."

O interpretare a acestui enunţ este aceea că dacă X este separabil cu dual neseparabil, atunci conţine aproape izometric conul pozitiv din ℓ_1 .

Rezultatul acesta este o alternativă la contraexemplele obţinute în [1] la ipoteza (Banach) că dacă X este un spaţiu Banach separabil cu dual neseparabil, atunci $\ell_1 \subset X$.

<u>Bibliografie</u> :

1. J.Lindenstrauss, C,Stegall Examples of separable spaces which do not contain ℓ_1 and whose duals are non-separable. Studia Math. T.LIV (1975) .

M-PRODUSE TENSORIALE PERFECTE DE LATICI BANACH PERFECTE

Dan Vuza

INCREST București

Fie E o latice Banach ; notăm cu $E^{\times}$ spațiul formelor liniare ω-continue pe E și cu C(E) idealul elementelor $x \in E$ pentru care restricția lui E la idealul generat de x este ω-continuă .

O latice Banach perfectă este a latice Banach E pentru care aplicația canonică $E \to E^{\times\times}$ este izometrică și surjectivă. $|\sigma|$-topologia unei latici Banach perfecte E este topologia dată de seminormele $x \to f(|x|)$ unde $f \in E_{+}^{\times}$.

Fiind date două latici Banach perfecte E_1, E_2, M-produsul lor tensorial $E_1 \widehat{\otimes}_M E_2$ în sensul lui Levin nu este în general latice Banach perfectă (de exemplu , $E_1 = E_2 = L_{\infty}([0,1])$) ; apare deci necesară introducerea produsului tensorial perfect $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}}_M E_2$ care să fie latice Banach perfectă.

Fie E_1, E_2 latici Banach perfecte; notăm cu $\mathcal{L}_m^{\times}(E_1, E_2)$ spațiul operatorilor σo -mărginiți și ω-continui $U : E_1 \to E_2$. Introducînd pe acest spațiu norma $\|u\| = \| \sup\{|U(x)| \mid x \in E_1, \|x\| \leq 1\} \|$, devine latice Banach perfectă; notăm cu $L_{am}^{\times}(E_1, E_2)$ închiderea subspațiului operatorilor de rang finit din $\mathcal{L}_m^{\times}(E_1, E_2)$ în $|\sigma|$-topologia lui $\mathcal{L}_m^{\times}(E_1, E_2)$.

Prin definiție , $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}}_M E_2 = L_{am}^{\times}(E_1, E_2)$; $E_1 \widehat{\otimes}_M E_2$ este subspațiu în $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}}_M E_2$.

Teoria M-produselor tensoriale perfecte este dezvoltată în lucrarea " The perfect M-tensor product of perfect Banach lattices" , Preprint-INCREST Nr.35/1982 si a fost prezentată într-un ciclu de expuneri în cadrul seminarului de Spații liniare ordonate topologice. Ultimul rezultat din această lucrare a făcut obiectul prezentei comunicări.

Fie E_i (i=1,2) latici Banach perfecte și fie F_i un ideal închis conţinut în $C(E_i)$. Atunci subspaţiul închis generat de $F_1 \otimes F_2$ în $E_1 \widehat{\widehat{\otimes}}_M E_2$ este un ideal în $L_r(E_1^{\times}, E_2)$ conţinut în $C(E_1 \widehat{\otimes}_M E_2)$.

Demonstraţia foloseşte teoria modulelor tare reticulati şi unele procedee ale lui Dodds şi Fremlin .

Rezultatul de mai sus permite precizarea unor rezultate ale lui Nicolae Popa referitoare la M-produsele tensoriale .

Referate prezentate la seminarul ştiinţific de
Spaţii liniare ordonate topologice
în anul universitar 1981-1982

1.Romulus Cristescu - Topologii cu proprietatea lui Fatou.
- Mulţimi (o)-precompacte şi topologii pre-Lebesgue .

2.Gh.Grigore- Spaţiul lui Schwrtz cu ordinea punctuală.

3.C.Niculescu- Latici cu topologii (o)-continuă.
- Operatori -continui.

4.O.Olteanu-Operatori -liniari.

5.G.Păltineanu- Teorema lui Hewitt pentru spaţii topologice ordonate

6.Nicolae Popa - Spaţii Orlicz.

7.M.Popovici - Ultraproduse de latici Banach.

8.O.Sandru - Teorema lui Dvoretzki.
O generalizare a unei teoreme a lui Krivin.

9.G.Turcitu - Operatori pozitivi compacţi pe latici Banach.

10. M.Voicu - Semigrupuri pozitive pe latici Banach .

11. C. Volintiru- Spaţii Banach separabile cu dual neseparabil.
Proprietatea Radon-Nikodym în spaţii Banach.

12.Dan Vuza - Caracterizarea laticilor vectoriale folosind seminorme solide extinse.
- M-Produse tensoriale perfecte de latici Banach.

13.Ismat Beg(Pakistan) - Reprezentarea integrală a unor operatori liniari.

Autorii referatelor au prezentat rezultatele într-una sau mai multe şedinţe ale seminarului.

Lei 8,40