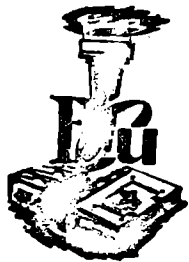


Constantin Cioacă

Bogdan Iorga

**ELEMENTE
DE
ELECTROMAGNETISM
ȘI OPTICĂ**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI



BIBLIOTECA CENTRALĂ
UNIVERSITARĂ
București

Cota

III 472647

Inventar

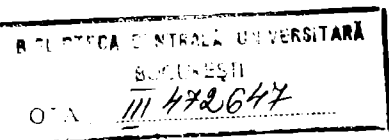
C10002313

Constantin Cioacă

Bogdan Iorga

**ELEMENTE
DE
ELECTROMAGNETISM
ȘI
OPTICĂ**

EDITURA UNIVERSITĂȚII DIN BUCUREȘTI
- 2000 -



410/00

B.C.U. București



C20002313

Tehnoredactarea computerizată a fost realizată de către BOGDAN IORGA.

© Editura Universității din București

Șos. Panduri, 90-92, București - 76235; Telefon/Fax 410.23.84.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
CIOACĂ, CONSTANTIN

Elemente de electromagnetism și optică / Constantin Cioacă

București: Editura Universității din București, 2000

224 p; 23,5 cm

Bibliografie

ISBN: 973-575-428-2

I. Iorga, Bogdan

537.8+535(075.8)

Cuprins

Cuprins	3
Prefața	9
Capitolul 1: Electrostatică	11
1.1. Introducere	11
1.2. Materia sub formă de substanță. Particule elementare	11
1.3. Nucleul atomic. Atomul. Molecula. Substanța la scară macroscopică	13
1.4. Conducători și izolatori	16
1.5. Sarcina electrică	17
1.6. Materia sub formă de câmp (materie-câmp)	19
1.7. Legea lui Coulomb	20
1.8. Câmpul electric	26
1.8.1. Modelul acțiunii la distanță și al acțiunii din aproape în aproape.....	26
1.8.2. Vectorul câmp electric al unei sarcini punctiforme. Principiul superpoziției pentru vectorul câmp electric ...	28
1.8.3. Vectorul câmp electric al unui sistem de n sarcini punctiforme	30
1.8.4. Câmpul dipolului electric	31
1.8.5. Reprezentarea vectorului câmp electric prin linii de câmp	36
1.9. Fluxul câmpului electric	38
1.10. Legea (teorema) lui Gauss pentru electrostatică	41
1.10.1. Cazul suprafeței sferice. Forma matematică a legii lui Gauss.....	41
1.10.2. Enunțurile legii lui Gauss. Cazul unei suprafețe oarecare	42
1.10.3. Legea lui Gauss sub formă integrală și diferențială pentru distribuții discrete și continue de sarcini	47
1.11. Energia potențială a sarcinii q_0 în câmpul sarcinii Q	49

1.11.1. Lucrul produs de o forță coulombiană asupra unei sarcini de probă punctuale	49
1.11.2. Conservativitatea forței de tip coulombian	50
1.11.3. Energia potențială a unei sarcini aflată sub acțiunea unei forțe de tip coulombian. Energia potențială de interacție dintre două sarcini electrice	52
1.12. Potențialul câmpului electrostatic	54
1.12.1. Potențialul câmpului sarcinii punctiforme	54
1.12.2. Diferența de potențial dintre două puncte. Tensiunea electrică U	55
1.12.3. Lucrul efectuat de forța câmpului electric pentru deplasarea sarcinii q_0	56
1.12.4. Unitatea de măsură în S.I. pentru diferența de potențial	57
1.12.5. Potențialul absolut al unui punct din câmp	57
1.12.6. Relația dintre vectorul câmp electric \vec{E} și potențialul V	58
1.12.7. Expresiile vectorului câmp electric \vec{E} și a potențialului V în cazul unor distribuții de sarcini	59
1.12.8. Ecuațiile locale și integrale ale vectorului câmp electric \vec{E} și ale potențialului electrostatic V	60
1.13. Câmpul electrostatic în mediile macroscopice	65
Capitolul 2: Electrocinetică	77
2.1. Curentul electric. Intensitatea curentului electric - Densitatea de curent electric	77
2.1.1. Definiția curentului electric	77
2.1.2. Intensitatea curentului electric	77
2.1.3. Modulul vectorului densității de curent de conducție. Intensitatea curentului în funcție de densitatea de curent de conducție	78
2.1.4. Ecuația de continuitate din electrocinetică	81
2.2. Teoria electronică a conducției în metale	83
2.2.1. Purtătorii de sarcină în metale. Modelul P. Drude și G. A. Lorentz	83
2.2.2. Calculul vitezei termice medii a electronilor	84
2.2.3. Timp liber mediu dintre două ciocniri. Viteza medie în curent	84
2.2.4. Forma diferențială (locală) și integrală a legii lui Ohm ...	85
2.2.5. Rezistența electrică a unei porțiuni de conductor. Unități de măsură. Cauzele rezistenței electrice	87

2.3. Energia curentului electric de conducție. Legea lui Joule-Lenz sub formă integrală și diferențială	88
2.4. Tensiunea electromotoare	89
2.4.1. Punerea problemei. Conceptele de generator și forță imprimată	89
2.4.2. Tensiunea electrică și tensiunea electromotoare	91
Capitolul 3: Magnetism	93
3.1. Noțiunea de câmp magnetic	93
3.1.1. Forțele de natură magnetică	93
3.1.2. Câmpul magnetic. Caracteristici	94
3.1.3. Legea lui Lorentz. Legea forței electromagnetice (magnetice)	94
3.1.4. Liniile câmpului magnetic	95
3.1.5. Fluxul câmpului magnetic	96
3.1.6. Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic	97
3.2 Acțiunea câmpului magnetic asupra curentului electric	99
3.2.1. Vectorul element de curent	99
3.2.2. Legea lui Laplace	99
3.2.3. Câmpul magnetic al unei sarcini electrice punctiforme aflate în mișcare	102
3.2.4. Legea lui Biot-Savart-Laplace	103
3.2.5. Legea lui Ampère din electromagnetism	107
3.3. Fenomene electromagnetice variabile în timp	111
3.3.1. Legea inducției lui Faraday	111
3.3.2. Inducția magnetoelectrică	118
3.4. Câmpul magnetic în materie	124
Capitolul 4: Electromagnetism	133
4.1. Ecuațiile fundamentale ale electromagnetismului	133
4.2. Soluțiile ecuațiilor lui Maxwell date sub formă generală. Potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic. Transformări de etalon. Invarianța de etalon sau de gradient.	141
4.2.1. Relații de algebră vectorială utilizate	141
4.2.2. Soluțiile ecuațiilor lui Maxwell sub formă generală. Potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic	141
4.2.3. Transformări de etalon. Invarianța de etalon sau de gradient	142
4.3. Câmpul electromagnetic	143

4.3.1. Condiția de etalonare al lui Lorentz. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediul fără surse	144
4.3.2. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediu cu surse	147
Capitolul 5: Unde electromagnetice. Optică	150
5.1. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale pentru intensitatea câmpului electric și inducția câmpului magnetic în cazul unui mediu fără surse. Ecuațiile de propagare a unei unde electromagnetice într-un mediu fără surse	150
5.2. Comentarii de natură fizică privind ecuațiile diferențiale satisfăcute de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ și $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Ecuațiile de propagare a undelor electromagnetice	152
5.3. Ecuația elongației unei unde electromagnetice armonice plane tridimensionale	153
5.4. Soluțiile particulare ale ecuațiilor de propagare a undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse	157
5.5. Proprietățile undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse	158
5.6. Energia undelor electromagnetice. Vectorul Poynting. Teorema Heaviside-Umov-Poynting	162
5.6.1. Energia undelor electromagnetice. Densitatea de energie electromagnetică	162
5.6.2. Densitatea de energie electromagnetică	163
5.6.3. Definiția vectorului Poynting. Semnificație fizică. Unitate de măsură	163
5.6.4. Teorema Heaviside-Umov-Poynting. Legea conservării energiei electromagnetice	165
5.7. Intensitatea unei unde electromagnetice armonice plane	167
5.7.1. Teoremele relativ la intensitatea unei unde electromagnetice plane	168
Capitolul 6: Interferența undelor electromagnetice	172
6.1. Introducere	172
6.2. Condiția necesară și suficientă de interferență. Termenul de interferență	173
6.3. Definiția coerenței a două unde luminoase. Condiția de coerență a două unde luminoase	175
6.4. Intensitatea luminoasă a două surse coerente într-un punct din spațiu	178

Capitolul 7: Difracția undelor electromagnetice	181
7.1. Definițiile fenomenului de difracție. Descriere experimentală	181
7.2. Principiul Huygens-Fresnel	185
7.2.1. Enunțurile principiului Huygens-Fresnel	185
7.2.2. Explicația difracției undelor în spatele unui semiplan infini și în spatele unui disc finit cu ajutorul principiului lui Huygens	186
7.3. Forma matematică a principiului Huygens-Fresnel	187
7.4. Metoda zonelor lui Fresnel	189
7.5. Difracția printr-o apertură circulară (difracția Fresnel)	193
7.5.1. Expresia numărului total de zone Fresnel N în funcție de parametrii R , ρ , r_0 și λ	193
7.5.2. Concluzii ale relației lui Fresnel	195
7.6. Difracția Fraunhofer	197
7.6.1. Elemente matematice utilizate	198
7.6.2. Difracția Fraunhofer printr-o fantă dreptunghiulară	202
7.6.3. Difracția Fraunhofer pe o rețea de difracție	208
Arexă	216
Bibliografie	223

Prefață

Prezentul curs de Electromagnetism se adresează tuturor studenților din Facultatea de Chimie a Universității din București, dar mai ales studenților anului I de la secția Radiochimie care urmează cursul semestrial de Electricitate și Magnetism. Acest curs poate fi utilizat și de către studenții de la alte facultăți din învățământul superior care urmează un curs de fizică.

Lucrarea este structurată după programa analitică a cursului de fizică ținut la secția Radiochimie din Facultatea de Chimie din Universitatea din București și conține șapte capitole: Electrostatică, Electrodinamică, Magnetism, Electromagnetism, Unde Electromagnetice–Optică, Interferența undelor electromagnetice, și Difracția undelor electromagnetice. Conține, în plus, o anexă în care sunt întâlnite constante utile, relații matematice și fizice importante folosite în acest curs și în rezolvarea problemelor de electromagnetism.

Lucrarea reprezintă o expunere de ansamblu a electricității, magnetismului și opticii, în cadrul căreia se reliefează legile fundamentale care le guvernează. Modul de tratare diferă de cel tradițional deoarece se subliniază unele chestiuni importante precum: conservarea și invarianța sarcinii electrice, fenomenul interacției electrice, noțiunea de câmp electric, magnetic, electromagnetic și proprietățile acestora, abordarea matematică a fenomenului de interferență, descrierea fenomenului fizic de difracție și unele amănunte legate de rețelele de difracție. Preponderentă este preocuparea pentru aspectul microscopic al legilor și fenomenelor fizice; în unele cazuri însă, ele sunt interpretate și din punct de vedere microscopic. Acolo unde s-a considerat necesar, considerațiile teoretice au fost însoțite de descrieri experimentale practice sau imaginare sugestive. S-a considerat util să se exemplifice adesea valorile mărimilor experimentale care intervin într-un fenomen și să se prezinte date numerice. Prin procedeul "observațiilor" s-a atras atenția asupra unor subtilități care scapă în mod curent cititorilor.

Prefață

Mărimile ce se definesc pe parcursul cursului sunt exprimate în Sistemul Internațional de unități. Pentru înțelegerea cursului sunt necesare cunoștințe de matematică ce includ calculul diferențial și integral.

În lucrare mărimile vectoriale sunt reprezentate prin litere nefngroșate cu o săgeată deasupra lor. Pentru operatorii gradient, rotor și divergență au fost folosite ambele notații: $\text{grad}\varphi$, $\text{rot}\vec{A}$, $\text{div}\vec{A}$ și, respectiv, $\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$, tocmai pentru a obișnui studenții cu ele, unde φ și \vec{A} reprezintă o mărime scalară și, respectiv, una vectorială arbitrară.

Intenția autorilor este de a prezenta noțiunile de electricitate, magnetism și optică electromagnetică în modul în care sunt ele utilizate de către studenții Facultății de Chimie. Prin această lucrare cititorii pot fi ajutați să-și formeze o privire de ansamblu asupra electricității, magnetismului și opticii și să-și sistematizeze cunoștințele din acest domeniu, în acord cu spiritul modern al științei fizicii.

În esență, lucrarea este alcătuită astfel ca să aibă un caracter formativ, prin aplicarea procedurii de la simplu la complex.

Cititorii care reușesc să-și însușească ceea ce le oferă această lucrare vor poseda o pregătire fundamentală care să le asigure succesul la aplicarea cunoștințelor dobândite sau la predarea fizicii în liceu și în facultăți.

Considerând că această lucrare este absolut necesară studenților de la secția de Radiochimie în cadrul programului lor de studiu, autorii au convingerea că ea le va fi de un real folos în înțelegerea fenomenelor electromagnetismului și sunt deschiși oricăror sugestii din partea cititorilor.

Autorii. octombrie 1999.

Capitolul 1

ELECTROSTATICĂ

1.1. Introducere

Fizica, știință a naturii, studiază cele mai generale și mai simple forme de mișcare a materiei.

Mecanica studiază forma de mișcare mecanică, termodinamica studiază forma de mișcare termică, electromagnetismul – forma de mișcare electrică și magnetică, fizica nucleară – forma de mișcare a constituenților nucleului atomic, etc.

Materia, reprezintă o realitate obiectivă, care există independent de conștiința omului și este reflectată adecvat de aceasta.

Atributul fundamental al materiei, modul său de existență este **mișcarea**. Fenomenele fizice, inclusiv cele electromagnetice, reprezintă o formă de mișcare a materiei. Materia poate exista sub două aspecte (forme): (a) substanță și (b) câmp.

1.2. Materia sub formă de substanță.

Particule elementare

***Definiția particulei elementare:** Orice particulă, care la momentul actual de dezvoltare a științei pare a nu fi constituită din părți mai mici (par a nu avea o structură internă) se numește particulă elementară.*

Materia sub formă de substanță (materie – substanță) este formată din **particule elementare**. Cu alte cuvinte, se spune că aceasta are **structură discretă**.

S-au pus în evidență până în prezent un număr de peste 300 de particule elementare, majoritatea dintre ele fiind **instabile**, dispărând după un timp de viață foarte scurt.

Fenomenele electromagnetice pot fi riguros explicate plecând de la existența a trei particule elementare: **electronul, protonul și neutronul.**

Fizica modernă a arătat că numai electronul este particulă elementară (nu are structură), protonul și neutronul dovedindu-se a fi constituiți din particule elementare mai mici, numite **quarkuri** (up, down, strange, charm, bottom, top).

Conform modelului quarkurilor, (M. Gell-Mann, S.U.A., 1961) protonul are o structură internă, fiind format din două quarkuri cu sarcinile electrice egale cu $(+2/3)e$ și un quark cu sarcina electrică egală cu $(-1/3)e$, astfel încât sarcina totală a protonului să fie egală cu sarcina electrică $+e$, ($p = uud$).

Neutronul, neutru din punct de vedere electric, este constituit după modelul quarkurilor, dintr-un quark cu sarcina electrică $(+2/3)e$ și două quarkuri cu sarcina $(-1/3)e$, ($n = udd$). Sarcina globală a neutronului este:

$$(+2/3)e + (+2/3)e + (-1/3)e = e,$$

iar sarcina globală a neutronului, conform celor spuse anterior, este:

$$(+2/3)e + (-1/3)e + (-1/3)e = 0.$$

Am notat cu "e" sarcina elementară a electronului: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}C$.

Observație: Quarkurile nu au putut fi descoperite experimental, până în prezent, motiv pentru care vom continua să considerăm protonul și neutronul ca particule elementare.

Protonii și neutronii sunt constituenții stabili ai nucleelor atomilor, iar electronii intră, de asemenea, în constituția atomilor și moleculelor.

Înțelegerea corectă a fenomenelor electromagnetice se bazează pe cea mai importantă proprietate a particulelor elementare, aceea de a avea sarcină electrică.

Definiția clasică a sarcinii electrice: Tipul de sarcină proprie electronului se numește sarcină electrică negativă, iar tipul de sarcină proprie protonului se numește sarcină electrică pozitivă.

Valoarea absolută a sarcinii electronului este egală cu sarcina protonului și se numește sarcină electrică elementară.

Valoarea sarcinii elementare în S.I. este: $e = 1,602 \cdot 10^{-19}C$.

Caracteristici: Numeroase fapte experimentale confirmă ipoteza că în natură există două și numai două tipuri de sarcină electrică:

pozitivă și negativă. Între corpurile încărcate cu sarcină electrică, precum și între particulele elementare care posedă sarcină electrică se manifestă interacțiuni numite **interacțiuni electromagnetice**.

Una din cele patru tipuri de interacțiuni fundamentale existente în natură, o reprezintă interacția electromagnetică (e.m.). Aceasta guvernează și explică stabilitatea unor sisteme complexe, cum ar fi: sistemele atomice, sistemele moleculare și substanța la scară macroscopică. În concluzie:

Sarcina electrică este o mărime fizică scalară, caracteristică unor particule elementare. Ea reprezintă o proprietate intrinsecă a acestora și determină existența interacțiunilor electromagnetice dintre aceste particule precum și valoarea energiei (tăria) acestor interacțiuni.

1.3. Nucleul atomic. Atomul. Molecula. Substanța la scară macroscopică.

Definiția nucleului atomic: Nucleul unui atom reprezintă cel mai mic edificiu format din particule elementare de tip proton și neutron.

Proprietăți ale nucleului atomic: Dimensiunea liniară (diametrul) este de ordinul: $(10^{-11} - 10^{-14})\text{m}$. Volumul nucleului este: $V = (4/3)\pi r^3 = (\pi/6)d^3$, unde d reprezintă diametrul nucleului ($d = 2r$), iar r — raza sa. Prin urmare, ordinul de mărime pentru volumul nuclear este: $V = (10^{-41} - 10^{-44})\text{m}^3$. Densitatea materiei nucleare se exprimă prin relația: $\rho = m/V$, unde "m" este masa nucleului. Deoarece masa protonului și a neutronului are valoarea: $m_p \approx m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{Kg}$, rezultă că $\rho \approx 10^{17}\text{Kg/m}^3$. Comparând această densitate cu cea a corpurilor macroscopice, de exemplu cu densitatea apei ($\rho = 10^3\text{Kg/m}^3$), constatăm că aceasta are o valoare foarte mare (de 10^{14} ori mai mare!).

Nucleul este un sistem microscopic cu sarcină electrică pozitivă. Conținutul său fiind protonii (cu sarcină electrică pozitivă) și neutronii (fără sarcină electrică), nucleul va fi întotdeauna pozitiv din punct de vedere electric.

Conținutul nucleului (protonii și neutronii) se numesc nucleoni. Se notează cu Z numărul protonilor dintr-un nucleu, cu N numărul neutronilor din nucleu și cu $A = Z + N$ numărul total al nucleonilor din

nucleul dat. Valoarea sarcinii electrice a nucleului este egală cu suma sarcinilor protonilor ce intră în compoziția lui: $Q_{\text{nucleu}} = +(Ze)$.

Nucleul este un sistem stabil. Această stabilitate nu poate fi explicată numai pe baza interacțiunilor electromagnetice dintre nucleoni. Într-adevăr, deoarece sarcinile electrice de același tip (semn) se resping, iar cele de semn contrar se atrag (experiența confirmă acest fenomen), ar rezulta că forța de respingere dintre protonii unui nucleu (încărcați pozitiv) ar trebui să ducă la dezmembrarea nucleului!

Deci, stabilitatea nucleului trebuie explicată admitând ipoteza că între nucleonii din nucleu trebuie să existe un nou tip de interacție fundamentală, numită **Interacție nucleară** (interacție tare), care este o forță de atracție mult mai puternică decât interacția electrostatică dintre nucleoni.

Definiția atomului: Atomul este cel mai mic sistem fizic stabil în constituția căruia intră nucleul și particule elementare de tip electroni.

Proprietăți ale atomului: Atomul este format dintr-un nucleu, în jurul căruia gravitează un nor de electroni, aflați la distanțe mari de nucleu, comparativ cu dimensiunea nucleului. Diametrul atomului este de ordinul a 10^{-10}m .

Numărul electronilor dintr-un atom este egal cu numărul Z al protonilor din nucleul atomului respectiv, ceea ce implică faptul că **atomii sunt sisteme fizice neutre din punct de vedere electric** (suma algebrică a tuturor sarcinilor elementare dintr-un atom este egală cu zero).

Stabilitatea atomului este asigurată de interacțiile electromagnetice dintre nucleu, cu sarcina $+(Ze)$, și sarcina electrică negativă a norului electronic, $-(Ze)$. Deși electronii sunt atrași de sarcina pozitivă a nucleului, este posibil să fie scoși din atom cu o anumită cheltuială de energie din exterior, unul, doi, sau mai mulți electroni (atom ionizat o dată, de două ori, etc...).

Reciproc, este posibil ca un atom să prindă în "capcana electrică" a nucleului unul sau mai mulți electroni (atomii devin ioni încărcăți cu sarcină negativă spre deosebire de primul caz când ionii sunt încărcăți cu sarcină pozitivă). Faptul că atomii pot pierde sau câștiga electroni are o importanță crucială în explicarea fenomenelor electromagnetice.

Definiția moleculei: Molecula este cel mai mic sistem fizic stabil în structura căreia intră mai mulți atomi.

Proprietăți ale moleculei: Numărul și tipul de atomi ce participă la formarea moleculelor determină o mare varietate a acestora. Stabilitatea moleculelor este determinată, de asemenea, de interacțiile electromagnetice dintre constituenții electrici din edificiul moleculei. În starea normală moleculele sunt neutre din punct de vedere electric. În anumite situații excepționale, moleculele pot pierde sau dobândi electroni devenind ioni moleculari pozitivi, respectiv negativi.

Definiția substanței: Substanța la scară macroscopică reprezintă materia pe care o percepem la nivel macroscopic, în diferite stări de agregare.

Proprietăți ale substanței: Substanța este formată dintr-un număr foarte mare de atomi și molecule.

În stările de agregare condensate (starea lichidă și solidă) distanța dintre atomii vecini este de ordinul a 10^{-9} m.

Între starea solidă și cea lichidă există unele deosebiri privind:

– Ordonarea spațială a atomilor: în starea solidă cristalină există o ordine la distanță mare (macroscopică), iar în starea lichidă există doar o ordine locală, pe distanțe ce cuprind doar primii vecini ai fiecărui atom (vecinii de ordinul întâi).

– Mobilitatea atomilor: în starea solidă atomii execută oscilații în jurul pozițiilor lor de echilibru fixe, iar în starea lichidă atomii se pot deplasa unii față de alții pe distanțe macroscopice (ceea ce explică fluiditatea lichidelor).

În starea de agregare gazoasă distanța dintre moleculele vecine (sau atomii vecini) este cam de 10 ori mai mare decât în cazul stărilor de agregare solidă și lichidă.

La aceste distanțe interacțiile intermoleculare (sau dintre atomi) este aproximativ nulă, fapt care imprimă acestora o mișcare haotică și independentă.

Starea de agregare, numită plasmă, reprezintă un gaz puternic ionizat format din ioni pozitivi și electroni, care, în ansamblu, este electric neutră. Majoritatea substanței din Univers (din stelele active, cozile cometelor) se găsește în stare de plasmă.

Plasma este considerată ca fiind a patra stare de agregare a substanței.

La temperaturi de 10^4 K toate substanțele pot fi aduse în stare de plasmă.

Corpurile macroscopice pot fi **electrizate** prin diferite metode; un exemplu ar fi metoda electrizării prin frecare. La o vergea de sticlă frecată cu mătase, un număr întreg de electroni trec de pe sticlă pe

mătase. Sticla se încarcă (electrizează) pozitiv, iar mătasea se încarcă (electrizează) negativ.

Dacă frecăm o vergea de ebonită cu blană de pisică, un număr întreg de electroni trec de pe blană pe ebonită. Blana rămâne încărcată pozitiv, iar ebonita se încarcă cu sarcină negativă.

1.4. Conductorii și Izolatorii.

Definiția conductorilor: Conductorii sunt substanțe în interiorul cărora există particule cu sarcină electrică capabilă să se deplaseze prin substanță pe distanțe macroscopice. Particulele încărcate electric din conductori se numesc purtători liberi de sarcină.

Observație: Orice sarcină în exces, transmisă punctual conductorului, nu rămâne poziționată în locul respectiv ci se repartizează, instantaneu, pe toată suprafața conductorului. Exemple de conductoare: metalele, electroliții, gazele ionizate.

Metalele sunt conductori de clasa întâi. Purtătorii de sarcină electrică din metale sunt electronii liberi denumiți și **electroni de conducție**.

Electroliții sunt conductori de clasa a doua. Purtătorii de sarcină electrică sunt ionii liberi de ambele semne.

Gazele ionizate sunt conductori de clasa a doua. Purtătorii de sarcină electrică sunt ionii de ambele semne și **electronii**.

Definiția semiconductorilor: Semiconductorii sunt substanțe cu concentrații ale purtătorilor de sarcină electrică de $10^4 + 10^5$ ori mai mică decât în metale. Purtătorii de sarcină pot fi **electronii (negativi)** sau **golurile (pozitivi)**.

Definiția Izolatorilor (dielectricilor): Izolatorii sunt substanțe fără purtători liberi de sarcină electrică. Sarcinile electrice din dielectrici sunt legate de atomii sau moleculele de care aparțin și se numesc **sarcini electrice legate**.

Sarcinile electrice legate se pot deplasa pe distanțe foarte mici de ordinul a 10^{-10} m ($1\text{Å} = 10^{-10}$ m), ceea ce are ca efect polarizarea dielectricului. Orice sarcină în exces comunicată izolatorului într-un

punct al acestuia rămâne localizată, deci nu se repartizează pe toată suprafața acestuia ca la conductori.

1.5. Sarcina electrică.

Definiția modernă a sarcinii electrice: *Sarcina electrică este o mărime fizică cuantificată, relativist invariantă care în sistemele izolate se conservă.*

Proprietăți ale sarcinii electrice:

Cuantificarea sarcinii electrice. Sarcina netă a oricărui corp este egală cu suma algebrică a sarcinilor particulelor elementare din care este constituit corpul respectiv.

Deoarece singurele particule elementare încărcate din atomi sunt protonii cu sarcina $+e$ și electronii cu sarcina $-e$, rezultă că valoarea sumei algebrice a sarcinilor oricărui corp trebuie să fie un multiplu întreg al sarcinii elementare "e".

Sarcina elementară "e" reprezintă cuanta de sarcină electrică.

Dacă Q este sarcina electrică netă a unui corp microscopic atunci vom putea scrie: $Q = +Ne$, $N = 0, 1, 2, 3, \dots$

a) Caracterul discret al sarcinii electrice este evident pentru particule microscopice. Ex: Na^+ , Cl^- , Cu^{2+}, \dots

b) Caracterul discret al sarcinii electrice se estompează (aparent sarcina electrică variază continuu) în cazul corpurilor macroscopice încărcate: o sarcină electrică în plus sau în minus nu poate modifica vizibil sarcina Q a corpului, pentru care valoarea numărului N este foarte mare (de ordinul 10^n).

Invarianța relativistă a sarcinii electrice. Fie o particulă elementară cu masa de repaus m_0 , viteza v și sarcina electrică q . Presupunem că viteza particulei este foarte mare (comparabilă cu viteza luminii în vid, c).

Conform teoriei relativității, la aceasta viteză, masa particulei (masa de mișcare sau sarcina gravitațională) $m = m_0/(1-\beta^2)^{1/2}$, unde $\beta = v/c$.

Cu toate cuvintele, masa particulei variază cu viteza. Deci, *masa nu este invariantă în teoria relativității.*

Spre deosebire de masă, sarcina electrică a unei particule elementare are aceeași valoare, indiferent de viteza cu care se deplasează: *sarcina electrică este relativist invariantă.*

Experiențe dintre cele mai sensibile nu au putut detecta variația sarcinii electrice cu viteza. În concluzie: *În orice sistem de referință inerțial în care s-ar măsura sarcina electrică se obține același rezultat.*

Conservarea sarcinii electrice. *Într-un sistem izolat, sarcina electrică totală, adică suma algebrică a sarcinilor pozitive și negative, se conservă (rămâne constantă).*

Printr-un sistem izolat se înțelege că nici un fel de substanță nu traversează granițele ce delimitează sistemul, deci nu se schimbă sarcină electrică cu exteriorul.

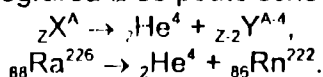
Observație: Lumina poate interacționa cu sistemul, fără a afecta acest principiu, deoarece *fotonul este neutru din punct de vedere electric.*

Legea conservării sarcinii poate fi formulată ca un postulat sau ca o lege empirică, verificată de toate observațiile fără excepție. Această lege este tot atât de fundamentală pentru înțelegerea fenomenelor naturii ca și celelalte legi de conservare ale fizicii: impulsului, momentului cinetic, a energiei, etc...

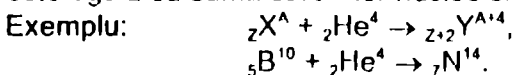
Exemple care atestă legea conservării sarcinii electrice:

a) În procesele de dezintegrare radioactivă a nucleelor *suma sarcinilor nucleului și particulei ce rezultă în urma dezintegrării este egală cu sarcina nucleului ce se dezintegrează.*

Exemplu: dezintegrarea α se poate scrie sub forma:



b) În reacțiile nucleare suma sarcinilor nucleelor ce intră în reacție este egală cu suma sarcinilor nucleelor ce rezultă din reacții.



c) În procesul de electrizare prin frecare sarcina pozitivă netă cu care rămâne încărcată sticla frecată cu mătase este egală cu sarcina negativă cu care se încarcă mătasea. Din faptul că $1\text{e} = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ rezultă: $1\text{C} = e/1,602 \cdot 10^{-19} = 6,24 \cdot 10^{18}\text{e}$.

Unitatea de sarcină electrică în sistemul internațional de unități de măsură este Coulombul egal cu sarcina a $6,24 \cdot 10^{18}$ electroni

Concluzie: Mișcarea particulelor clasice de substanță este descrisă de mecanica clasică newtoniană și de mecanica clasică relativistă.

Mișcarea particulelor cuantice (microparticule) este descrisă de mecanica cuantică nerelativistă și relativistă.

Mișcarea materiei–substanță poate fi descrisă de mecanica clasică sau de mecanică cuantică.

1.6. Materia sub formă de câmp (materie–câmp).

Mecanica newtoniană nu poate descrie și explica orice fenomen al naturii. De exemplu, studiul fenomenelor electromagnetice, care nu necesită pentru manifestarea lor existența materiei sub formă de substanță, nu poate fi studiată de mecanica newtoniană.

Fenomenele electromagnetice pot fi descrise cu ajutorul unei forme speciale, diferite de existența și manifestarea materiei: **câmpul electromagnet**.

Materia–câmp (câmpul electromagnet) nu poate fi descrisă de legile mecanicii newtoniene, ci de **ecuațiile lui Maxwell**.

Teoria care are la bază ecuațiile lui Maxwell se numește **electrodinamică clasică**.

Câmpul (materia–câmp) este generat de sarcinile electrice în repaus și în mișcare, acționând, la rândul său, asupra sarcinilor electrice.

Câmpul electromagnet are două componente: câmpul electric și câmpul magnetic.

Definiția câmpului electric: *Partea din câmpul electromagnetic care acționează cu o forță asupra sarcinilor electrice aflate în repaus sau în mișcare în câmpul electromagnetic se numește câmp electric.*

Câmpul electric generat de sarcina electrică aflată numai în repaus se numește câmp electrostatic.

Definiția câmpului magnetic: *Partea din câmpul electromagnetic care acționează cu o forță suplimentară numai asupra sarcinilor electrice aflate în mișcare în câmpul electromagnetic se numește câmp magnetic.*

Prin urmare, câmpul electric este generat de sarcinile electrice aflate în mișcare sau în repaus, iar câmpul magnetic este generat numai de sarcinile electrice aflate în mișcare.

Câmpurile electrice sau magnetice generate de sarcini electrice (sau de curenți electrice) variabile în timp sunt variabile în timp.

Un câmp electric variabil în timp generează un câmp magnetic variabil în timp și reciproc. Aceste câmpuri electrice și magnetice variabile în timp ce se generează reciproc coexistă în același punct din spațiu și în același moment (sunt în fază), formând câmpul electromagnetic.

Manifestarea lui reală sub formă de câmp electric pur sau câmp magnetic pur depinde de sistemul de referință inerțial din care se face observația.

Materia-câmp ca și materia-substanță este caracterizată prin energie, impuls, moment cinetic, etc...

1.7. Legea lui Coulomb.

Interacția dintre sarcinile electrice punctiforme aflate în repaus este descrisă de legea lui Coulomb denumită și legea fundamentală a electrostaticii. O altă formă a acestei legi este cunoscută sub numele de teorema lui Gauss. Sub formă scalară și atunci când sarcinile care interacționează sunt plasate în vid, legea lui Coulomb se prezintă astfel:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Enunțul acestei legi este următorul (forma scalară):

Două sarcini electrice punctiforme în repaus (corpuri punctiforme electrizate), situate în vid, interacționează cu o forță a cărei mărime F este direct proporțională cu produsul mărimilor celor două sarcini electrice q_1 și q_2 și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Observație: Legea lui Coulomb este valabilă pentru obiecte încărcate electric (cu purtători de sarcină electrică) ale căror dimensiuni sunt mult mai mici decât distanța dintre ele. Se spune că ea este validă numai pentru *sarcini punctiforme*.

Valoarea numerică a constantei care apare în forma matematică a legii lui Coulomb exprimată în S.I. este:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2,$$

ϵ_0 reprezentând o constantă universală numită *permitivitatea electrică a vidului*, $\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Dacă sarcinile punctiforme se află într-un mediu oarecare legea lui Coulomb se scrie astfel:

Forma scalară: $F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$; Forma vectorială: $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{n}$,

unde ϵ este o constantă de material numită *permitivitatea mediului*.

Cele două sarcini electrice sunt considerate în repaus (staționare) pentru că dacă acestea s-ar afla în mișcare ar apărea în plus forțe de natură magnetică, de care ne vom ocupa în capitolul 3.

Sub formă vectorială forța coulombiană de interacție, \vec{F}_{12} , dintre sarcinile q_1 și q_2 situate la distanța \vec{r} în vid are una dintre formele următoare:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^3} \cdot \vec{r}_{12} \quad \text{sau} \quad \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{n}$$

Vectorul \vec{n} este prin definiție versorul vectorului de poziție $\vec{r}_{12} = \vec{r}$ având originea în sarcina q_1 și vârful în sarcina q_2 . Expresia matematică a versorului \vec{n} este: $\vec{n} = \vec{r}/|\vec{r}|$ în care $|\vec{r}|$ este modulul vectorului \vec{r} și are expresia: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, x , y , z fiind coordonatele sarcinii q_2 (v. fig. 1.1).

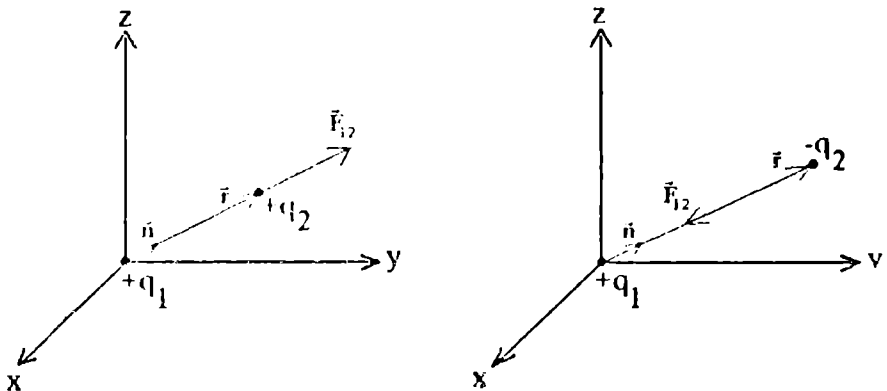


Fig. 1.1

Caracteristicile forței \vec{F}_1 , sunt următoarele:

a) Este direct proporțională cu produsul $q_1 q_2$.

b) Este invers proporțională cu pătratul distanței dintre sarcinile q_1 și q_2 .

c) Este o forță care acționează de-a lungul dreptei care trece prin sarcinile q_1 și q_2 , fiind, deci, o *forță de tip central*.

d) Este o forță centrală repulsivă dacă $q_1 q_2 > 0$ (sarcinile au același semn).

e) Este o forță centrală atractivă dacă $q_1 q_2 < 0$ (sarcinile au semne opuse).

Cele două desene de mai sus arată că dacă forța este paralelă cu vectorul de poziție \vec{r} sarcinile se resping, iar dacă suportul vectorului forță este antiparalel cu vectorul de poziție, sarcinile q_1 și q_2 se atrag. În primul caz forța \vec{F}_{12} se consideră *pozitivă*, iar în al doilea caz se consideră *negativă*.

În concluzie, legea lui Coulomb arată că: două sarcini electrice de același semn se resping, iar două sarcini electrice de semn contrar se atrag.

f) Din caracterul de forță centrală, din mecanică, rezultă și alte proprietăți ale forței coulombiene:

f₁) Traectoria pe care o poate descrie sarcina q_2 este întotdeauna plană.

f₂) Vectorul moment cinetic, \vec{L} , al particulei q_2 se conservă în timpul mișcării acesteia.

f₃) Vectorul viteză areolară, $\vec{\Omega}$, a particulei q_2 se conservă.

f₄) Forța centrală, \vec{F}_{12} , nedepinzând explicit de timp, este o *forță conservativă*.

g) Forțele coulombiene satisfac legea a treia a lui Newton.

Într-adevăr, fie \vec{F}_{12} forța cu care q_1 acționează asupra lui q_2 și fie \vec{F}_{21} forța cu care sarcina q_2 acționează asupra sarcinii q_1 . În acest caz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{n} = -\vec{F}_{21}$$

$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$, iar cele două forțe sunt orientate în sens invers (v. fig.1.2.a).

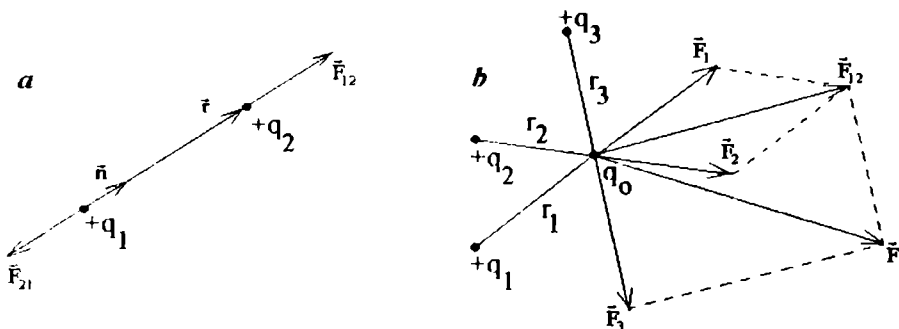


Fig. 1.2

h) Forțele coulombiene satisfac **principiul suprapunerii (principiul superpoziției)**.

Fie sarcinile $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ situate la distanțele $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ de o sarcină oarecare q_0 , atunci forța rezultantă \vec{F} , ce acționează asupra sarcinii q_0 din partea sistemului format din cele n sarcini este egală cu suma vectorială a forțelor cu care acționează independent, fiecare sarcină asupra lui q_0 (v. fig. 1.2. b, pentru cazul particular $n = 3$).

Matematic acest principiu se scrie:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \text{ cu } \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i q_0}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i.$$

În cazul din desen putem scrie:

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad \vec{F}_{123} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}.$$

i) Forța de interacție electrostatică este extrem de slabă. Fie două sarcini $q_1 = -e$ și $q_2 = +e$ (de exemplu, un electron și un proton) aflate la distanța $r = 10^2 \text{ m}$. În acest caz:

$$F_e = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38}}{(10^2)^2} = -2,3 \cdot 10^{-24} \text{ N}.$$

j) Forța de atracție gravitațională este neglijabilă în raport cu forța de interacție electrică.

Fie un electron cu masa $m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$ și un proton cu masa $m_p = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$ aflați la distanța 10^2 m . Cunoscând constanta atracției universale $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$, se poate calcula forța de atracție gravitațională:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{9 \cdot 10^{-31} \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{(10^2)^2} = 9,6 \cdot 10^{-64} \text{ N}.$$

Forța electrică F_e este: $F_e = -2,3 \cdot 10^{24} \text{ N}$ și deci: $F_e/F = 2,4 \cdot 10^{39}$.

Concluzie: Pentru particulele electron și proton interacția electrostatică este mai puternică decât cea gravitațională de peste 10^{39} ori. Deci, în domeniul microparticulelor cu sarcină electrică, forța (interacțiunea) gravitațională se poate neglija în comparație cu interacțiunea electrostatică.

În domeniul corpurilor macroscopice cu masă foarte mare (cum sunt corpurile cerești), care sunt neutre din punct de vedere electric, interacția electrostatică dintre ele se poate neglija comparativ cu forța gravitațională.

Densitatea de sarcină electrică:

Sarcina electrică Q poate fi distribuită neuniform unidimensional (pe fire), bidimensional (pe suprafețe) sau tridimensional (în volumul corpurilor).

a) Densitatea medie liniară și densitatea liniară se definesc astfel:

- densitatea medie liniară: $\lambda_m = \frac{\Delta q}{\Delta l}$,

- densitatea liniară de sarcină: $\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$.

b) Densitatea medie superficială și densitatea superficială de sarcină se definesc astfel:

- densitatea medie superficială: $\sigma_m = \frac{\Delta q}{\Delta s}$,

- densitatea superficială de sarcină: $\sigma = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$.

c) Densitatea medie volumică și densitatea volumică de sarcină se definesc astfel ($d\tau$ reprezintă elementul infinezimal volumic):

- densitatea medie volumică: $\rho_m = \frac{\Delta q}{\Delta \tau}$,

- densitatea volumică de sarcină: $\rho = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta \tau} = \frac{dq}{d\tau}$.

Dacă sarcina q este distribuită uniform în lungime, în suprafață și în volum, atunci:

$\lambda = q/l =$ sarcina unității de lungime,

$\sigma = q/s =$ sarcina unității de suprafață,

$\rho = q/\tau =$ sarcina unității de volum.

Unitățile de măsură sunt următoarele:

$[\lambda]_{S.I.} = C/m, [\sigma]_{S.I.} = C/m^2, [\rho]_{S.I.} = C/m^3$.

În ipoteza că dl , ds , $d\tau$ sunt suficient de mici, elementele de sarcină: $dq = \lambda dl$, $dq = \sigma ds$, $dq = \rho d\tau$ se pot considera sarcini punctiforme care pot satisface legea lui Coulomb.

Observație: Influențele (interacțiile) nu se pot propaga mai repede decât cu o anumită viteză fundamentală c , viteza luminii. De aceea nu este posibil să știm unde se află sarcina și la ce distanță în momentul prezent în care se "simte" interacția.

Singurul lucru care poate afecta câmpul de forțe coulombiene într-un loc și la un moment dat este comportarea sarcinilor în trecut. Întârzierea în timp (timpul retardat, notat cu r'/c) este timpul necesar pentru a se ajunge, cu viteza c , de la o sarcină electrică Q până în punctul P unde se află cealaltă sarcină electrică q (deci, unde se determină interacția). r' din raportul r'/c reprezintă poziția unde se afla sarcina atunci când informația (efectul de interacție) care ajunge în punctul P "părăsea" sarcina Q .

Să presupunem că sarcina Q ar emite semnale luminoase și că lumina ar putea sosi în P cu viteza c . Atunci când am privi sarcina Q , nu am vedea-o unde se află acum, ci unde era la un moment de timp anterior $t' = t - r'/c$.

Sub forma cea mai generală, forța de interacție dintre cele două sarcini Q și q se poate scrie (fără demonstrație):

$$\vec{F} = \frac{-Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{n}'}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{n}'}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{n}'}{dt^2} \right]$$

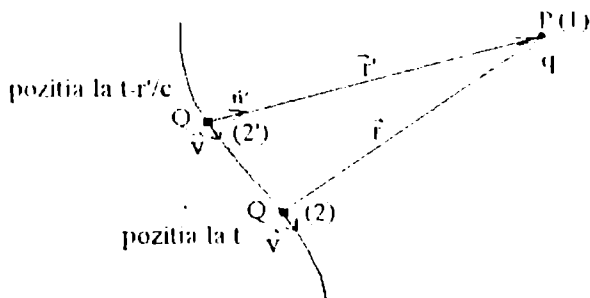


Fig. 1.3

În această relație intervine direcția aparentă \vec{n}' (direcția retardată) și distanța retardată r' . Primul termen reprezintă legea lui Coulomb. Al doilea termen, calitativ vorbind, se datorește faptului că natura ar încerca să țină seama de faptul că efectul este retardat. Acest termen reprezintă o corecție la termenul coulombian retardat, egală cu variația acestuia în unitatea de timp și înmulțită cu retardarea care intervine. Există și un al treilea termen de corecție, și anume derivata a doua, în raport cu timpul t , a vectorului unitate în direcția sarcinii.

1.8. Câmpul electric

Definiția câmpului electric: *Câmpul electric (electrostatic) este o formă suis generis de existență în spațiu și timp a materiei, a cărei prezență se manifestă printr-o forță de natură coulombiană ce acționează asupra oricărei sarcini electrice care se găsește în spațiul cu câmp electric.*

1.8.1. Modelul acțiunii la distanță și al acțiunii din aproape în aproape

Legea lui Coulomb care descrie exact interacțiunea dintre sarcini electrice punctiforme nu explică mecanismul prin care o sarcină q situată la o distanță r de sarcina Q "simte" forța cu care Q acționează asupra lui q (sau invers). Fizica clasică nu menționează cât timp trebuie să treacă pentru ca forța generată de Q să ajungă în punctul în care se află q și presupune că forța electrică se propagă instantaneu la orice distanță, adică cu viteză infinită. *Aceasta este ipoteza acțiunii la distanță a interacțiunilor.* Cu alte cuvinte, dacă r s-ar micșora cu o anumită valoare Δr atunci noua forță de interacție (de respingere) F' cu care $+Q$ acționează asupra lui $+q$ este *sesizată instantaneu* de aceasta din urmă. Această ipoteză este admisă fără nici o explicație.

$$F' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{(r - \Delta r)^2}$$

Teoria relativității arată, în schimb, faptul că *viteza maximă de propagare a semnalelor (interacțiunilor) în Univers este finită și egală cu viteza luminii în vid, c .*

Fizica modernă arată că modelul acțiunii la distanță nu este valabil și este înlocuit cu *modelul acțiunii din aproape în aproape*, prin intermediul câmpului electromagnetic care se propagă cu viteză finită, egală cu viteza luminii în vid, c .

Conform acestui model în exemplul anterior sarcina $+q$ va sesiza scăderea distanței r cu Δr după un timp finit egal ca valoare cu timpul necesar luminii să ajungă din punctul A în punctul B (v. fig. 1.4).

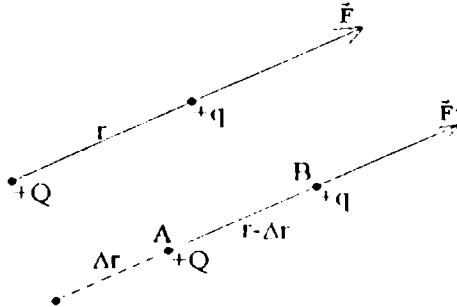


Fig. 1.4

Mecanismul acțiunii din aproape în aproape a sarcinii Q asupra sarcinii q este următorul:

a) Sarcina Q generează în jurul ei un câmp electric, care se propagă în tot spațiul cu viteza luminii, c .

b) După ce câmpul electric generat de Q a apărut și în locul unde se află situată sarcina q, acesta acționează asupra sarcinii q cu o forță dată de legea lui Coulomb:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{ii}$$

Observație: Sarcinile electrostatice q_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dintr-un sistem de sarcini, conțin un număr întreg de sarcini elementare e . Dacă se va ține seama de principiul superpoziției efectelor liniare de interacție ale acestor sarcini elementare, se deduce că reuniunea tuturor interacțiilor sarcinilor elementare conduce la efectul final de interacție globală a sarcinilor q_i . Deci, dacă se înțelege mecanismul interacției a doi electroni se poate explica și cum interacționează ionii de același semn sau de semn contrar sau corpurile macroscopice încărcate electrostatic pe baza mecanismului acțiunii din aproape în aproape.

La baza interacției a doi electroni se află procesele virtuale de schimb fonic.

Pentru înțelegerea unui proces virtual se apelează la relația de nedeterminare: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$. În acest caz, nu este vorba numai despre nedeterminare ci și despre o limitare care apare în timp: Δt reprezintă durata stării a cărei energie se măsoară. Prin urmare, cu cât este mai mică durata Δt , cu atât energia va fi mai imprecis determinată. În concluzie, putem privi ΔE ca o fluctuație (o abatere de la valoarea normală) a energiei unui sistem cuantic (compus, de exemplu, dintr-un electron și un foton), cu condiția ca această fluctuație să dureze numai $\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}$ și nu mai mult! Acest raționament se poate aplica tocmai unui

proces de tipul $e^- \rightarrow e^- + \gamma^0$ care ar sta la baza explicării interacției electrostatice dintre doi electroni. Deși se pare că intră în contradicție cu legea conservării energiei, acest proces este posibil cu condiția ca fotonul γ^0 să existe doar virtual, adică să apară și să dispară foarte repede, într-un interval de timp $\tau \leq \frac{\hbar}{\Delta E}$, ΔE fiind energia lui, $\Delta E = \hbar\omega$.

Un proces analog are loc și cu celălalt electron. Electronii își vor "pasa" continuu unul altuia un foton virtual, respingându-se reciproc, realizându-se astfel două procese virtuale cuplate de schimb fonic. Procesul este atât de rapid, încât legea conservării energiei nu este deloc deranjată.

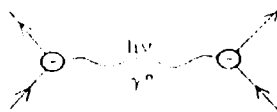


Fig. 1.5

Acest tip de proces virtual de schimb de fotoni stă la baza tuturor interacțiilor electromagnetice.

1.8.2. Vectorul câmp electric al unei sarcini punctiforme. Principiul superpoziției pentru vectorul câmp electric.

Prin definiție, vectorul câmp electric generat de sarcina punctiformă Q la distanța r are expresia următoare:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n}$$

Modulul său este :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

E este direct proporțional cu sarcina Q și invers proporțional cu r^2 .

Valoarea (modulul) vectorului câmp electric al sarcinii Q , într-un punct din spațiu ce o înconjoară, depinde atât de valoarea sarcinii Q care îl generează, cât și de distanța r de la Q până la punctul respectiv.

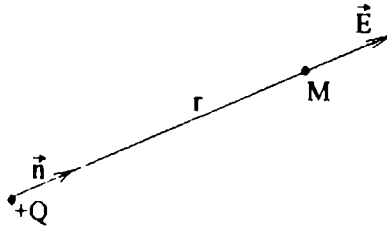


Fig. 1.6

Sarcina de probă q_0 reprezintă sarcină cu care se stabilește dacă într-un punct din spațiu există un câmp electric sau nu.

Cerințele sarcinii de probă sunt:

- să fie pozitivă;
- să fie atât de mică încât câmpul electric propriu să nu modifice câmpul electric existent în spațiu înainte de aducere ei în câmp.

Pentru a arăta legătura dintre vectorul câmp electric \vec{E} și vectorul forță de interacție coulombiană, \vec{F} , se consideră o sarcină de probă q_0 plasată într-un punct M , unde vectorul câmp electric \vec{E} este dat de relația de definiție.

Conform legii lui Coulomb putem scrie următoarele:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r^2} \cdot \vec{n} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n} \right) \cdot q_0 = \vec{E} \cdot q_0, \text{ deci: } \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}.$$

Dacă în relația anterioară se pune $q_0=1C$, atunci rezultă definiția:

Vectorul câmp electric \vec{E} într-un punct din spațiu este egal cu forța \vec{F} ce acționează asupra unității de sarcină pozitivă $q_0 = +1C$ aflată în punctul respectiv.

Matematic, intensitatea câmpului electric se poate defini astfel:

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

pentru a sugera cerința (b) ca sarcina de probă, q_0 , să fie atât de mică încât să nu perturbe câmpul electric existent, care trebuie determinat.

Unitatea de măsură în sistemul internațional pentru vectorul câmp electric rezultă din relația de definiție:

$$[E]_{S.I.} = [F]_{S.I.}/[q_0]_{S.I.} = N/C = \text{newton/coulomb.}$$

1.8.3. Vectorul câmp electric al unui sistem de n sarcini punctiforme

Fie n sarcini pozitive punctiforme în vid $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ situate la distanțele $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ de o sarcină de probă q_0 .

Conform principiului suprapunerii se poate scrie expresia forței rezultante coulombiene \vec{F} ce acționează asupra sarcinii de probă q_0 :

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i, \text{ unde: } \vec{n}_i = \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = \frac{\vec{r}_i}{r_i}.$$

Din această relație rezultă prin împărțirea cu q_0 că vectorul câmp electric rezultat în punctul în care se află sarcina de probă are valoarea:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{n}_i.$$

Din această relație rezultă *principiul suprapunerii* pentru vectorul câmp electric \vec{E} :

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cdot \vec{n}_1 + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cdot \vec{n}_2 + \dots + \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \cdot \vec{n}_n = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

Principiul suprapunerii: Acțiunile unor vectori câmp electric care există în același timp într-un punct din spațiu, se suprapun, fiind egale cu acțiunea unui vector câmp electric egal cu suma vectorială a acestor vectori câmp electric.

Concluzie: Concluzia asupra suprapunerii liniare a câmpurilor în vid este că în domeniul clasic de dimensiuni și la intensități ale câmpului realizabile există o evidență abundentă a valabilității suprapunerii liniare și lipsesc argumente împotriva ei. În domeniul atomic și subatomic există efecte cuantice neliniare a căror origine se află în cuplajul dintre particulele încărcate și câmpul electromagnetic. Ele modifică interacțiile dintre particulele încărcate și provoacă interacții între câmpurile electromagnetice chiar dacă sunt absente particulele fizice.

1.8.4. Câmpul dipolului electric

Definiția dipolului electric: Două sarcini punctiforme, egale în modul și de semn opus, situate la distanța "a" una față de alta formează un sistem care se numește **dipol electric**. Dreapta care trece prin cele două sarcini se numește **axa dipolului electric**.

Definiția momentului dipolului electric: Momentul unui dipol electric este o mărime vectorială notată cu \vec{p} , egală cu produsul uneia dintre sarcinile dipolului și vectorul \vec{a} , dus de la sarcina "-q" la sarcina "+q":

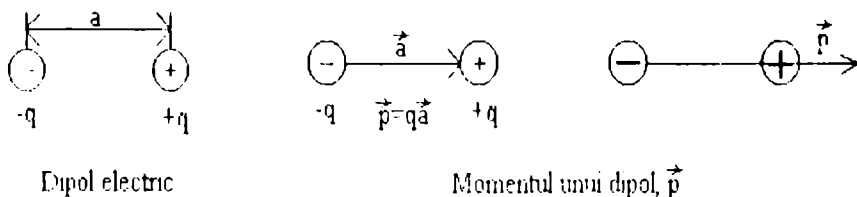
$$\vec{p} = q \vec{a} .$$


Fig. 1.7

Mărimea vectorului câmp electric a unui dipol electric într-un punct P din spațiu se determină în funcție de poziția punctului P față de dipol.

a) Punctul P se află pe prelungirea axei dipolului.

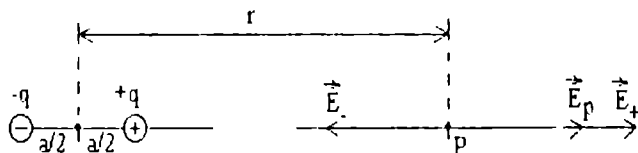


Fig. 1.8.

$$\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \text{ sau } \vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2} \cdot \vec{n}_+ + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2} \cdot \vec{n}_-,$$

În care \vec{E}_+ este vectorul câmp electric creat de sarcina $+q$ în punctul P, iar \vec{E}_- este vectorul câmp electric creat de sarcina $-q$ în punctul P.

Conform principiului suprapunerii, \vec{E}_p , vectorul câmp rezultat, este suma vectorilor câmp electric \vec{E}_+ și \vec{E}_- .

Pentru deducerea modului vectorului \vec{E}_p , ridicăm la pătrat vectorul $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$:

$$E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 + 2\vec{E}_+ \cdot \vec{E}_- = E_+^2 + E_-^2 + 2E_+ \cdot E_- \cdot \cos(\vec{E}_+, \vec{E}_-).$$

Deoarece \vec{E}_+ și \vec{E}_- sunt vectori antiparaleli atunci rezultă că: $\cos(\vec{E}_+, \vec{E}_-) = \cos\pi = -1$ și deci $E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 - 2E_+ \cdot E_- = (E_+ - E_-)^2 \Rightarrow$

$$|\vec{E}_p| = \sqrt{E_p^2} = \sqrt{(E_+ - E_-)^2} = |E_+ - E_-|.$$

Deoarece $E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2}$ și $E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2}$ rezultă:

$$E_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left| \frac{1}{\left(r - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{a}{2}\right)^2} \right| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2ar}{\left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}.$$

Prin urmare, vectorul rezultat \vec{E}_p are direcția axei dipolului. Sensul vectorului \vec{E}_p este dirijat de la $-q$ către $+q$. Modulul lui \vec{E}_p este:

$$E_p = \frac{2qar}{4\pi\epsilon_0 \left(r^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}.$$

Caz particular: Punctul P se află pe axa dipolului la o distanță mare de centrul acestuia: $r \gg a$. În acest caz:

$$E_p = \frac{2qar}{4\pi\epsilon_0 r^4} = \frac{2q\epsilon}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

în care $p=qa$ este modulul vectorului moment al dipolului electric. Deci:

$$E_p = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Deci, E_p , modulul vectorului câmp electric al dipolului, este direct proporțional cu mărimea momentului dipolului p și invers proporțional cu cubul distanței r .

b) Punctul P este situat pe normala ce trece prin centrul dipolului.

Vectorii câmp electric \vec{E}_+ și \vec{E}_- nu sunt coliniari, iar vectorul câmp rezultat \vec{E}_p este egal cu suma vectorială a vectorului câmp \vec{E}_+ și \vec{E}_- : $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.

Deoarece $r_+ = r_- = r$, rezultă că $|\vec{E}_+| = |\vec{E}_-|$ și, deci, $|\vec{E}_p|$ este egal cu lungimea diagonalei rombului ale cărui laturi sunt egale cu $|\vec{E}_+|$ și $|\vec{E}_-|$.

Prin ridicarea la pătrat a relației $\vec{E}_p = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$, rezultă:

$$E_p^2 = E_+^2 + E_-^2 + 2\vec{E}_+ \cdot \vec{E}_- = 2E_+^2 + 2E_+^2 \cdot \cos 2\alpha = 2E_+^2 (1 + \cos 2\alpha) = 4E_+^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

unde s-a utilizat formula: $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$ (v. anexa).

Rezultă: $E_p = 2E_+ \cdot \cos \alpha = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+^2} \cos \alpha$.

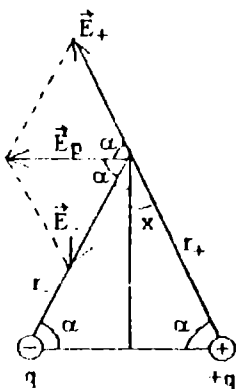


Fig. 1.9

Deoarece $\cos \alpha = a/(2r_+)$, rezultă: $E_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r_+^3}$, unde $p = qa$ reprezintă modulul momentului de dipol electric.

În plus, se observă că $\vec{E}_p \perp \vec{r}$ ($\alpha + \chi = \pi/2$). Sensul lui! \vec{E}_p este de la sarcina $+q$ către sarcina $-q$.

Caz particular: Punctul P este foarte îndepărtat de dipol ($r \gg a$). Rezultă că: $r_+ = r_- \approx r$ și deci:

$$\vec{E}_p = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

c) Punctul P este arbitrar și îndepărtat de dipol ($r \gg a$).

Descompunem momentul de dipol \vec{p} în două componente: \vec{p}_1 paralel cu \vec{r} și \vec{p}_2 perpendicular pe \vec{r} . Din figură rezultă: $p_1 = p \cos\theta$, $p_2 = p \sin\theta$.

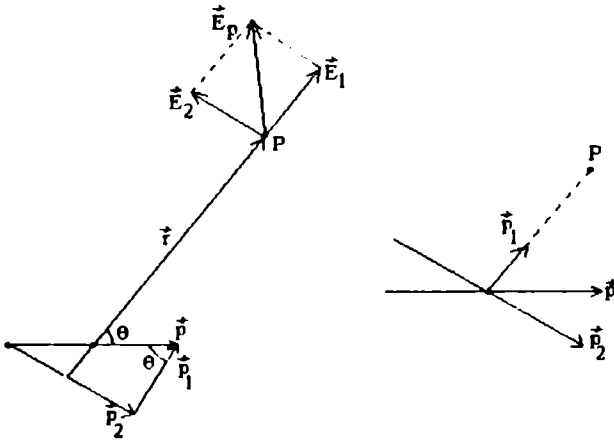


Fig. 1.10

Punctul P se află în prelungirea axei dipolului \vec{p}_1 , având câmpul dat de formula $E_{p_1} = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ și pe normala la axa dipolului \vec{p}_2 , având câmpul

dat de formula $E_{p_2} = \frac{p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Deci: $E_1 = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p \cos\theta}{r^3}$ și

$E_2 = \frac{p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p \sin\theta}{r^3}$ și deoarece: $\vec{E}_2 \perp \vec{E}_1$ rezultă că

$E_p = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$. Prin urmare,

$$E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cdot \cos^2 \theta + 1}$$

reprezintă modulul câmpului rezultant într-un punct oarecare îndepărtat de dipol. Din formulele încadrate rezultă următoarea concluzie:

Intensitatea vectorului câmp electric generat de dipolul electric, într-un punct îndepărtat de dipol, este direct proporțională cu modulul p al momentului dipolului, invers proporțională cu puterea a treia a distanței r de la centrul dipolului la punctul în care se calculează câmpul și depinde de unghiul θ format de axa dipolului cu direcția vectorului de poziție \vec{r} .

Fără a demonstra putem preciza că în urma dezvoltării multipolare (în momente de unipol, dipol, și quadripol) a potențialului electrostatic creat de o distribuție oarecare de sarcini electrice în spațiu se deduce potențialul unui dipol electric, \bar{p} , într-un punct al cărui vector de poziție este \vec{r} :

$$\varphi(r) = \frac{\vec{r} \cdot \bar{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Pentru a deduce de aici expresia vectorială a câmpului electric generat de un dipol electric se utilizează relația dintre câmpul și potențialul electric:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Deoarece gradientul este un operator de derivare, rezultă:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r} \cdot \bar{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \cdot \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \bar{p}) + (\vec{r} \cdot \bar{p}) \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right]$$

Cum pentru o distribuție dată, momentul de dipol electric este un vector constant, rezultă:

$$\vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \bar{p}) = \bar{p} \quad \text{și folosind}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right) \vec{e}_r = -3 \frac{\vec{r}}{r^5},$$

rezultă expresia sub formă vectorială pentru câmpul electrostatic creat de un dipol electric într-un punct din spațiu ce are vectorul de poziție \vec{r} :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{r} \cdot \bar{p}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\bar{p}}{r^3} \right]$$

Dacă un dipol electric format din două sarcini $+q$ și $-q$ aflate la distanța d una de alta se găsește într-un câmp electric uniform, asupra celor două sarcini vor acționa două forțe egale și de sens contrar, paralele cu direcția câmpului. Datorită acestor forțe, asupra dipolului va acționa un cuplu de rotație:

$$\vec{N} = \vec{d} \times \vec{F} = \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Când dipolul este orientat de-a lungul liniilor câmpului electric, deci când vectorii \vec{p} și \vec{E} au același sens, cuplul de rotație se anulează.

1.8.5. Reprezentarea vectorului câmp electric prin linii de câmp.

Când am definit vectorul câmp electric \vec{E} al unei sarcini punctiforme $+Q$ am constatat că într-un punct M arbitrar din spațiu situat la distanța r față de sarcina Q , acesta are expresia:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{n}.$$

Deci fiecărui punct aflat în câmpul electric generat de sarcină l se poate atașa un vector \vec{E} . Prin urmare, câmpul electric este un câmp vectorial.

Definiția liniei de câmp electric: Se numește linie de câmp electric orice curbă din spațiul cu câmp, care are ca tangentă în fiecare punct un vector câmp electric \vec{E} .

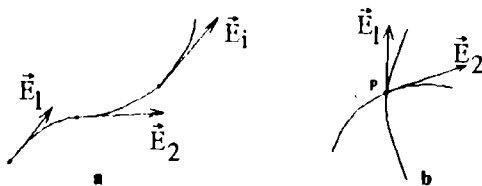


Fig. 1.11

Proprietate a liniei de câmp: Prin orice punct al spațiului trece o linie de câmp și numai una (liniile de câmp electric nu se pot intersecta).

Consecință: Această proprietate antrenează faptul că fiecărui punct din spațiu cu câmp electric \vec{E} se poate atașa un vector câmp electric \vec{E} și numai unul.

Demonstrația proprietății: Prin reducere la absurd, se presupune că există un punct P căruia \vec{E} se pot atașa doi vectori, \vec{E}_1 și \vec{E}_2 (v. fig. 1.11.b). Dacă acest lucru ar fi posibil înseamnă că prin punctul P se pot duce două linii de câmp, astfel încât \vec{E}_1 și \vec{E}_2 să fie tangenți în P la acestea. Însă acest lucru este absurd, deoarece contrazice proprietatea a două linii de câmp de a nu se putea intersecta într-un punct.

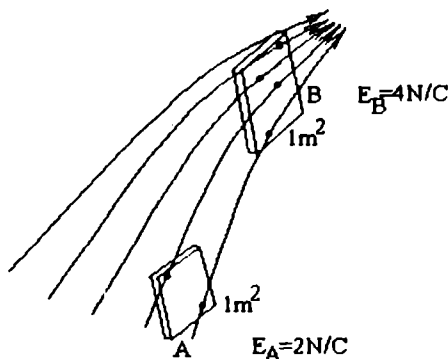


Fig. 1.12

Convenția cu privire la trasarea liniilor de câmp electric: Liniile de câmp electric se trasează astfel încât în orice regiune din spațiu numărul liniilor de câmp ce străbat o suprafață normală la linii egală cu unitatea (1m^2), să fie egală cu modulul vectorului câmp electric în regiunea respectivă.

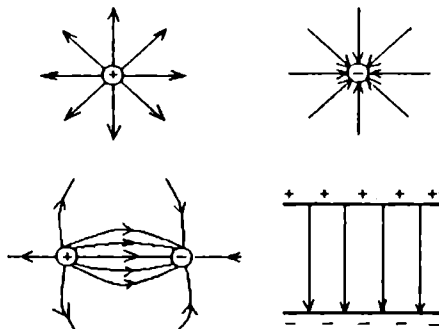


Fig. 1.13

Spectrul liniilor de câmp electric (v. fig.1.13) este descris în continuare:

a) *Sarcina electrică punctiformă pozitivă*: liniile de câmp pornesc radial din punctul unde se află sarcina și continuă până la infinit. Vectorul câmp electric \vec{E} fiind tangent la linie, în acest caz suportul său coincide cu linia. Sensul lui \vec{E} este de la sarcina pozitivă spre infinit.

b) *Sarcina electrică punctiformă negativă*: liniile de câmp pornesc radial de la infinit și converg în punctul unde se află sarcina negativă. Suportul vectorului câmp electric \vec{E} , fiind tangent la linie, coincide cu linia de câmp. Sensul lui \vec{E} este de la infinit spre sarcina negativă.

c) *Dipolul electric*: liniile câmpului electric încep pe sarcina pozitivă și se termină pe sarcina negativă.

d) *Condensatorul plan încărcat*: liniile câmpului electric sunt segmente paralele și echidistante (câmp omogen), care pornesc de la armătura încărcată pozitiv spre armătura încărcată negativ.

1.9. Fluxul câmpului electric.

Definiția fluxului electric: Numărul liniilor de câmp electric care traversează o suprafață S arbitrară așezată perpendicular pe liniile de câmp se numește flux al câmpului electric prin suprafața S . Fluxul electric este o mărime scalară.

a) Fluxul câmpului electric omogen ($\vec{E} = \text{constant}$) printr-o suprafață S normală la linii.

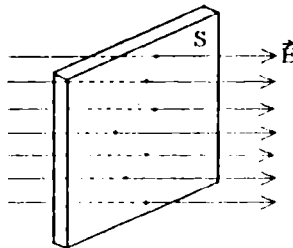


Fig. 1.14

Deoarece $|\vec{E}|$ reprezintă numărul de linii de câmp ce străbat o unitate de suprafață aparținând lui S și deoarece liniile de câmp sunt

paralele și echidistante (câmp omogen), atunci numărul total de linii care străbat suprafața S este: $\Phi_E = E \cdot S$.

Unitatea de măsură în S.I. pentru fluxul electric este:

$$[\Phi]_{S.I.} = [E]_{S.I.} [S]_{S.I.} = \text{Nm}^2/\text{C}.$$

b) Câmpul electric omogen, iar vectorul \vec{E} face un unghi θ cu versorul \vec{n} al normalei la suprafața S .

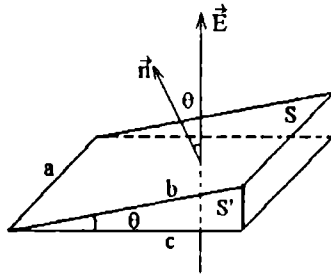


Fig. 1.15

Cazul se reduce la cel precedent dacă se observă că prin S' , reprezentând proiecția suprafeței S pe planul perpendicular la liniile de câmp, trece același număr de linii de câmp ca și prin S . Cu alte cuvinte:

$$\Phi_E^{S'} = \Phi_E^S.$$

În virtutea cazului (a) $\Phi_E^{S'} = E \cdot S'$. Din figură rezultă că: $S' = ac = ab \cos\theta = S \cos\theta$ (unde s-a presupus că suprafețele S și S' sunt dreptunghice).

Deci: $\Phi_E = ES \cos\theta$. Deoarece suprafața S are atașat versorul \vec{n} devine suprafață orientată și deci: $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$.

Deoarece $\vec{E} \cdot \vec{S} = |\vec{E}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\theta = E \cdot S \cdot \cos\theta$ putem scrie în final expresia fluxului câmpului electric prin suprafața S ca fiind produsul scalar dintre vectorii câmp electric \vec{E} și suprafață orientată \vec{S} :

$$\boxed{\Phi_E = E \cdot S \cdot \cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$

Observație: Dacă $\theta = \pi/2$ (S este paralelă cu liniile câmpului electric), atunci fluxul electric $\Phi_E = ES \cos(\pi/2) = 0$ (nici o linie de câmp nu traversează suprafața S).

c) Câmp electric neomogen traversând o suprafață care nu este plană, S .

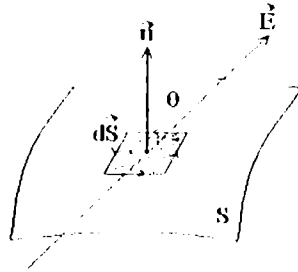


Fig. 1.16

Fie un element de suprafață infitezimal orientat $d\vec{s}$ aparținând suprafeței S , care are proprietatea că vectorul câmp electric \vec{E} prin orice punct al acesteia este constant (câmp electric omogen) și face un unghi θ cu versorul normalei \vec{n} atașată acestei suprafețe.

Fluxul elementar $d\Phi_E$ corespunzător acestei suprafețe elementare $d\vec{s}$ se calculează după relația de la cazul (b):

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot ds \cdot \cos\theta$$

Integrând această relație pe întreaga suprafață dată, S , rezultă fluxul total prin aceasta:

$$\Phi_E = \iint_S d\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S E \cdot ds \cdot \cos\theta$$

Observație: Versorul \vec{n} se duce la suprafața ds astfel încât, alegând un sens convențional de parcurgere a acesteia, acesta să aibă ca sens acela dat de **regula burghiului**.

d) Fluxul câmpului electric neomogen printr-o suprafață închisă. Formula dedusă la punctul (c) se poate aplica și în acest caz particular cu următoarele precizări:

- 1) normala la suprafața închisă S se duce întotdeauna în exteriorul acesteia;
- 2) fluxul printr-o suprafață închisă se marchează cu un cerculeț aplicat la simbolul pentru integrală. Prin urmare:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oiint_S E \cdot ds \cdot \cos\theta$$

Teorema adunării fluxurilor electrice: Fluxul printr-o suprafață oarecare S datorat mai multor vectori câmp electric: $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$, este egal cu suma algebrică a fluxurilor datorate acestor vectori câmp electric.

$$\Phi_E := \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n = \sum_{i=1}^n \Phi_i.$$

Demonstrație: Conform principiului suprapunerii vectorilor câmp electric putem scrie: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$. Utilizând formula încadrată de la punctul (c), rezultă următoarele:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(\sum_{i=1}^n \vec{E}_i \right) \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \iint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \sum_{i=1}^n \Phi_i = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n,$$

$$\Phi_E = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n. \quad (\text{q.e.d})$$

1.10. Legea (teorema) lui Gauss pentru electrostatică

1.10.1. Cazul suprafeței sferice.

Forma matematică a legii lui Gauss

Fie o suprafață închisă S de formă sferică, de rază r , având în centru o sarcină punctiformă pozitivă $+q$.

Modulul vectorului câmp electric al sarcinii $+q$ calculat într-un punct arbitrar M al suprafeței S de rază r este constant și are valoarea:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}. \text{ Vectorul câmp electric este: } \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n}, \text{ în care}$$

$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$ este versorul vectorului \vec{E} , coliniar cu vectorul \vec{r} și deci paralel cu vectorul \vec{E} și perpendicular în orice punct la suprafața sferică (v. fig. 1.17).

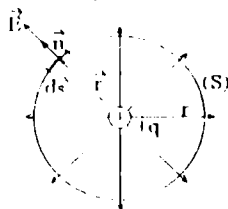


Fig. 1.17

Să calculăm acum fluxul total Φ_E prin suprafața închisă S:

$$\Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot \iint_{(S)} \vec{n} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \iint_{(S)} \vec{n} \cdot \vec{n} \cdot ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \iint_{(S)} ds$$

$$\Phi_E = \frac{qS}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q \cdot 4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(am utilizat: $\vec{n} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ și $S_{\text{sferică}} = 4\pi r^2$). În concluzie:

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

reprezintă expresia matematică a legii lui Gauss pentru electrostatică.

1.10.2. Enunțurile legii lui Gauss.

Cazul unei suprafețe oarecare

a) Fluxul vectorului câmp electric \vec{E} al unei sarcini punctiforme $+q$, care se află în interiorul unei suprafețe închise S' , de formă oarecare, prin suprafața respectivă, este egal cu fluxul prin suprafața sferică S centrată pe sarcină (v. fig. 1.18).

Într-adevăr, se vede că numărul total de linii de câmp emise de sarcină, care traversează suprafața sferică S este egal cu numărul liniilor de câmp ce străbat suprafața dată S' de formă oarecare. Deci, se pot da următoarele enunțuri ale legii lui Gauss:

Fluxul vectorului câmp electric \vec{E} al unei sarcini electrice q pozitive punctiforme așezată în vid și în interiorul unei suprafețe oarecare închisă este egal cu raportul dintre sarcina q și permitivitatea vidului.

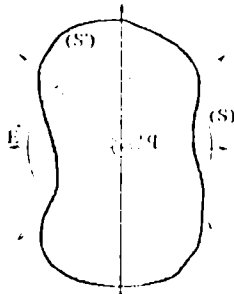


Fig. 1.18

Numărul liniilor de câmp electric emise de sarcina +q plasată în interiorul unei suprafețe închise este egal cu raportul q/ϵ_0 .

Observație: Suprafața închisă S' se numește **gaussiană**.

Caz particular: Dacă sarcina $+q = 1C$, atunci numărul liniilor de câmp emise de această sarcină și care traversează suprafața S' închisă este $1/\epsilon_0$.

b) O sarcină negativă "-q" situată în interiorul unei suprafețe închise S' , nu emite, ci captează de la infinit (q/ϵ_0) linii de câmp, lucru care se scrie astfel: $\Phi_E = -q/\epsilon_0$.

Fluxul unei sarcini pozitive $+q$, aflată în interiorul lui S' , este pozitiv $\Phi_E = +q/\epsilon_0$, iar fluxul unei sarcini negative -q, aflată în interiorul lui S' , este negativ $\Phi_E = -q/\epsilon_0$.

c) Dacă în interiorul suprafeței S' se află un sistem de n sarcini punctiforme pozitive și negative, de sarcină netă egală cu suma algebrică a celor n sarcini, $Q = \sum_{i=1}^n q_i$, atunci legea lui Gauss devine:

$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$. Dacă suma algebrică este nulă. $Q=0$, atunci, evident, $\Phi_E = 0$.

Deci, se poate formula legea lui Gauss sub forma următoare:

Fluxul vectorului câmp electric \vec{E} printr-o suprafață închisă este egal cu sarcina netă din interiorul suprafeței raportată la valoarea constantă a permitivității dielectrice a vidului, ϵ_0 .

d) Dacă sarcinile electrice sunt în exteriorul suprafeței închise S' , fluxul vectorului câmp electric al fiecărei sarcini în parte (pozitivă sau negativă) este nul. Demonstrația este indicată pe cale grafică în figura 1.19.

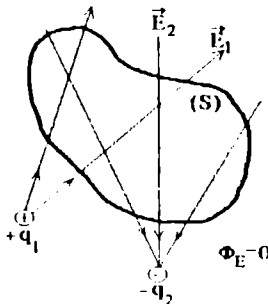


Fig. 1.19

Pentru aceasta considerăm o suprafață S închisă arbitrară și, de exemplu, două sarcini punctiforme, q_1 și $-q_2$, una pozitivă iar cealaltă negativă, aflate în exteriorul suprafeței S . Deoarece, în acest caz, orice linie de câmp care intră în interiorul lui S , trebuie să iasă, rezultă că numărul total de linii generate de o sarcină și care traversează suprafața S intrând (număr prin convenție negativ) este egal și de semn contrar cu numărul liniilor care traversează suprafața S ieșind din aceasta (număr prin convenție pozitiv).

Deci suma algebrică a acestor două numere (fluxul total al unei sarcini exterioare lui S) este, evident, zero: $\Phi_E = 0$.

e) O altă demonstrație a legii lui Gauss pentru cazul în care sarcina $+q$ nu aparține domeniului delimitat de suprafața S_1 , examinat la punctul (d) este prezentată în continuare (v. fig. 1.20.a).

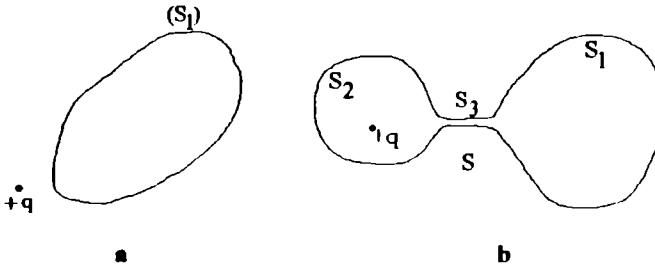


Fig. 1.20

Să arătăm că fluxul sarcinii $+q$ prin suprafața S_1 este egal cu zero:

$$\oiint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = 0.$$

În acest scop vom considera o suprafață S_2 de formă arbitrară, care delimitează un volum ce conține sarcina $+q$ și care comunică cu volumul delimitat de suprafața S_1 printr-o regiune de volum neglijabil delimitat de suprafața S_3 (v. fig. 1.20.b). Să notăm cu S suprafața totală obținută: $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \approx S_1 \cup S_2$, (S_3 se neglijează).

Deoarece sarcina $+q$ se află în interiorul suprafeței S , se poate aplica legea lui Gauss de la subcapitolul 1.10.2.a. Prin urmare se poate scrie:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Având în vedere că $S = S_1 \cup S_2$, integrala de mai sus se poate descompune în alte două:

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Aplicând din nou legea lui Gauss de la 1.10.2.a în cazul suprafeței S_2 , în interiorul căreia se află sarcina $+q$, rezultă:

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}_2 = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Înlocuind acest rezultat în relația precedentă, se obține rezultatul căutat:

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s}_1 = 0.$$

f) În continuare prezentăm o nouă demonstrație a legii lui Gauss pentru cazul sarcinii $+q$ ce aparține volumului delimitat de suprafața S , caz examinat la punctul a.

În acest scop vom introduce mai întâi conceptul de *element de suprafață sferic (diferențial)* în coordonate sferice.

Fie coordonatele sferice r, θ, φ ($r \in [0, \infty)$; $\theta \in [0, \pi]$; $\varphi \in [0, 2\pi]$), ale unui punct M arbitrar aflat pe o suprafață sferică de rază dată r (v. fig.1.21.a). Se consideră creșterile infinitezimale $d\theta$ și $d\varphi$ ale coordonatelor sferice θ și φ . Cele două meridiane și paralele definesc pe suprafața sferei un *element de suprafață* ds cu laturile egale cu ab și cd . Pornind de la triunghiurile dreptunghice OaN , Oad și ONb segmentele aN , ab și ad pot fi exprimate în coordonate sferice astfel: din triunghiul dreptunghic OaN rezultă $aN = r \sin\theta$. Unghiul cu vârful în N fiind egal cu $d\varphi$, din triunghiul aNb rezultă că $ab = aNd\varphi = r \sin\theta d\varphi$. Din triunghiul Oda care are unghiul din O egal cu $d\theta$ rezultă: $ad = rd\theta$. Prin urmare, elementul de suprafață în coordonate sferice $ds = abad = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Acest rezultat va fi utilizat în demonstrarea legii lui Gauss.

Demonstrația legii lui Gauss: Se consideră o sarcină punctiformă $+q$ care se află în interiorul unui volum arbitrar delimitat de suprafața închisă S' (v. fig.1.21.b). Fie elementul de suprafață orientat $d\vec{s}' = ds' \cdot \vec{n}'$, care aparține ariei S' . Vectorul \vec{n}' este versorul suprafeței ds' și este, prin definiție, perpendicular pe ds' . Considerăm o suprafață sferică S de rază r , care trece prin punctul A și este centrată pe sarcina $+q$. Dacă se unesc punctele A și B cu centrul sferei S , pe suprafața acesteia se pune în evidență elementul de suprafață orientat $d\vec{s} = ds \cdot \vec{n}$, versorul \vec{n} fiind perpendicular pe suprafața ds și în același timp coliniar cu vectorul câmp electric \vec{E} , care are originea în punctul O . Prin

urmare, $\vec{E} \cdot \vec{n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \cdot \vec{n}$. Deoarece ds este proiecția ortogonală

a lui ds' pe suprafața sferică S , se poate scrie $ds = ds' \cos \alpha$. α reprezintă unghiul dintre versorii \vec{n} și \vec{n}' și este egal cu unghiul BAC din triunghiul dreptunghic curbiliniu BAC (unghiuri cu laturi perpendiculare).

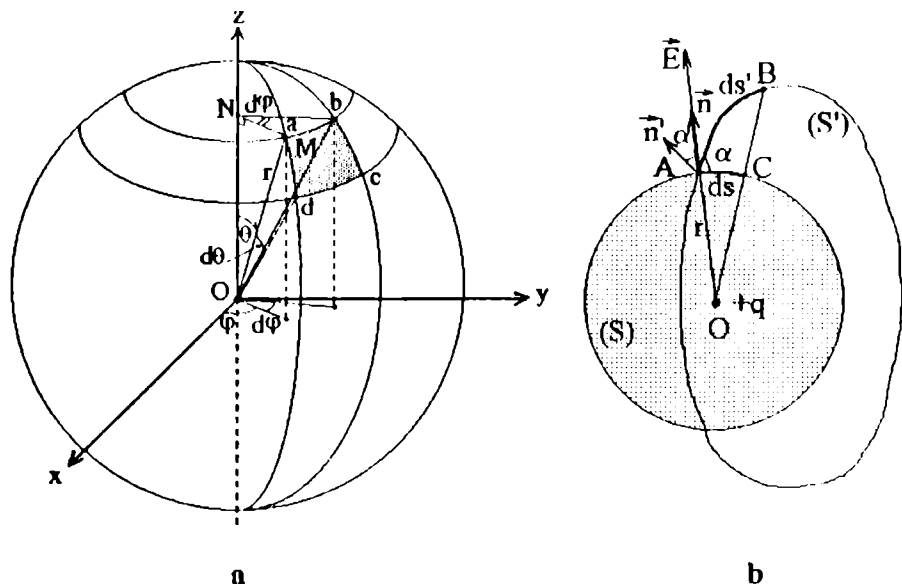


Fig. 1.21

Fluxul câmpului electric emis de sarcina $+q$ prin suprafața S' este prin definiție dat de integrala:

$$\Phi_{S'} = \iint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{s}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{r^2} \cdot ds' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{ds' \cos \alpha}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \frac{ds}{r^2}.$$

În conformitate cu observația matematică făcută anterior putem scrie în coordonate sferice expresia lui ds :

$$ds = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi,$$

în care coordonatele sferice θ și φ sunt definite în intervalele următoare: $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Prin urmare, după simplificarea cu r^2 , fluxul $\Phi_{S'}$ devine:

$$\Phi_{S'} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{S'} \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

În concluzie, rezultă expresia matematică a legii lui Gauss:

$$\Phi_{S'} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Corolar: Dacă în interiorul suprafeței închise se află n sarcini electrice, q_1, q_2, \dots, q_n , având în vedere că fluxul câmpului electric este o mărime aditivă, atunci fluxul total $\Phi_{S'}$, creat de cele n sarcini va fi:

$$\Phi_{S'} = \Phi_{S'}(q_1) + \Phi_{S'}(q_2) + \dots + \Phi_{S'}(q_n) = \frac{1}{\epsilon_0}(q_1 + q_2 + \dots + q_n) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i$$

Concluzie: Fluxul câmpului electric printr-o suprafață închisă nu trebuie să depindă de dimensiunile și forma ei. Aceasta se explică prin faptul că intensitatea câmpului electric este invers proporțională cu pătratul distanței.

Legea lui Gauss este o lege fundamentală a interacțiunilor electrostatice echivalentă cu legea lui Coulomb. Cele două legi nu sunt independente, ci reprezintă una și aceeași lege exprimată în moduri diferite. Există o diferență, neesențială aici, dar importantă la studiul câmpurilor sarcinilor în mișcare. Legea lui Gauss este valabilă pentru o clasă mai largă de câmpuri decât cel electrostatic. În particular, un câmp fără simetrie sferică, poate satisface legea lui Gauss. Deci această lege nu implică simetria sferică a câmpului unei surse punctiforme care în legea lui Coulomb era evidentă.

Această lege a lui Gauss relevă legătura dintre câmp și sursele sale, în mod opus legii lui Coulomb. Dacă sunt date sarcinile, legea lui Coulomb indică cum să se determine câmpul într-o regiune precizată, însă cu legea lui Gauss se poate determina sarcina dacă se cunoaște câmpul. În plus, legea lui Gauss reprezintă un instrument analitic util în rezolvarea problemelor mai complicate.

1.10.3. Legea lui Gauss sub formă integrală și diferențială pentru distribuții discrete și continue de sarcini

a) Cazul distribuțiilor discrete de sarcină aflate în interiorul unei suprafețe închise S .

Fluxul vectorului câmp electric \vec{E} , printr-o suprafață S oarecare închisă, are expresia:

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

În virtutea teoremei lui Gauss, fluxul Φ_E are pentru cazul unui sistem de n sarcini discrete q_1, q_2, \dots, q_n , expresia următoare:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{și deci} \quad \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau_s} \rho d\tau.$$

(forma integrală a legii lui Gauss)

Dacă utilizăm teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\tau$$

pe care o combinăm cu relația anterioară, în final, se va obține:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

(forma diferențială a legii lui Gauss).

b) Cazul distribuțiilor continue de sarcină aflate în interiorul unei suprafețe închise S .

Sarcina netă Q din interiorul suprafeței gaussiene poate fi distribuită continuu cu o densitate liniară λ , superficială σ , sau volumică ρ :

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}, \quad \sigma = \frac{dQ}{ds}, \quad \rho = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Prin urmare: $dQ = \lambda dl$, $dQ = \sigma ds$ și $dQ = \rho d\tau$. Prin integrare rezultă următoarele expresii pentru sarcina totală liniară Q_l , superficială Q_s și volumică Q_v :

$$Q_l = \int \lambda dl, \quad Q_s = \iint \sigma ds \quad \text{și} \quad Q_v = \iiint \rho d\tau.$$

În acest caz, legea lui Gauss se scrie sub formă integrală:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \lambda dl,$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint \sigma ds,$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau,$$

și sub formă diferențială (urmând același raționament ca la punctul a) pentru cazul distribuției volumice de sarcină electrică:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

1.11. Energia potențială a sarcinii q_0 în câmpul sarcinii Q

1.11.1. Lucrul produs de o forță coulombiană asupra unei sarcini de probă punctuale

a) Lucrul elementar.

Fie o sarcină de probă q_0 , care se deplasează pe o traiectorie oarecare într-un câmp electrostatic \vec{E} produs de o sarcină electrică punctiformă Q , între punctele A și B , sub acțiunea forței coulombiene \vec{F} (v. fig. 1.22).

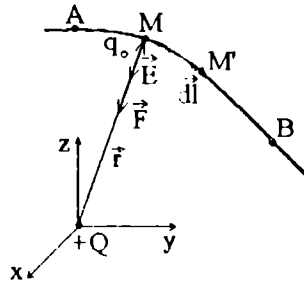


Fig. 1.22

Fie \vec{E} vectorul câmp electric în punctul M , $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$ și fie vectorul

deplasare elementară (infinit de mic) $d\vec{l} = \vec{MM}'$ a sarcinii q_0 .

Observație: $d\vec{l}$ este notat adesea cu $d\vec{r}$. Dacă $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ este vectorul de poziție al punctului M , de coordonate x , y , z , în care se află sarcina q_0 , atunci $d\vec{r} \equiv d\vec{l}$ este diferențiala acestui vector, $d\vec{r} \equiv d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$.

Lucrul elementar dW corespunzător acestei deplasări elementare este, prin definiție, expresia: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$

b) Lucrul finit, total sau integral, efectuat de forța \vec{F} la deplasarea sarcinii q_0 de la A la B are expresia:

$$W_{AB} = \int_A^B dW = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Integrala curbilinie (integrala de linie) notată cu $C_{\hat{A}\hat{B}} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ reprezintă circulația vectorului câmp electric \vec{E} de-a lungul arcului de curbă $\hat{A}\hat{B}$. Deci, $W_{\hat{A}\hat{B}} = q_0 C_{\hat{A}\hat{B}}$. Prin urmare:

Prin deplasarea unei sarcini punctiforme de-a lungul unei traectorii situată într-un câmp electric se produce un lucru egal cu produsul dintre sarcina electrică și circulația vectorului câmp electric de-a lungul acelei traectorii.

1.11.2. Conservativitatea forței de tip coulombian.

Definiție: O forță \vec{F} este conservativă dacă există o funcție scalară $U(x,y,z)$, care nu depinde explicit de timp, denumită funcție de forță astfel încât:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0.$$

În cazul nostru, F_x , F_y , F_z sunt componentele scalare ale forței coulombiene:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^3} x, \quad F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^3} y, \quad F_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r^3} z.$$

Cu alte cuvinte (se mai spune că forța \vec{F} derivă din funcția U),

$$\vec{F} = -\nabla U(x,y,z) = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} = \text{grad}U.$$

Teoremă: Forța de interacție electrostatică de tip coulombian, este o forță conservativă.

Demonstrație: Deoarece $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ și $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, atunci $F_x = k \frac{x}{r^3}$, $F_y = k \frac{y}{r^3}$, $F_z = k \frac{z}{r^3}$, $k = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0}$.

Forța \vec{F} este, conform definiției, conservativă dacă există funcția $U=U(x,y,z)$ astfel încât: $\frac{\partial U}{\partial x} = k \frac{x}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial y} = k \frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial U}{\partial z} = k \frac{z}{r^3}$.

Înmulțind cele trei egalități cu dx , dy , dz și adunându-le, rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = k \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3}.$$

Ținând cont că membrul stâng reprezintă prin definiție diferențiala totală, dU , a funcției $U(x,y,z)$ și că numărătorul din membrul drept se poate scrie sub forma:

$$xdx + ydy + zdz = \frac{1}{2} d(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{1}{2} 2r \cdot dr = r \cdot dr,$$

rezultă: $dU = \frac{r \cdot dr}{r^3} \cdot k = \frac{dr}{r^2} \cdot k$. Prin integrare rezultă:

$$U = \int dU = k \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{k}{r} + C$$

deci, $U(r) = -\frac{k}{r} + C$, sau $U(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r} + C$, unde C reprezintă o constantă arbitrară de integrare.

Prin urmare forța coulombiană, \vec{F} , este conservativă.

Proprietățile lucrului efectuat de forța conservativă coulombiană:

a) Lucrul elementar dW al forței coulombiene este egal cu diferențiala totală exactă a funcției de forță U , dU , din care derivă forța coulombiană \vec{F} .

Demonstrație: Lucrul elementar este $dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ unde:

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \quad \text{și} \quad d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}, \text{ iar}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot dz = dU;$$

$$dW = dU.$$

b) *Lucrul efectuat de forța coulombiană \vec{F} de-a lungul unei curbe, între două puncte arbitrare aparținând acesteia, nu depinde de forma*

curbei, ci numai de coordonatele punctelor arbitrare alese pe curbă. Lucrul, în acest caz, este o funcție de stare.

Demonstrație: Pornim de la expresia lucrului elementar: $dW=dU$. Integrând această egalitate între punctele arbitrare A și B ale curbei obținem (v fig. 1.22):

$$W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} dW = \int_A^B dU = U|_A^B = U(B) - U(A) = U(x_B, y_B, z_B) - U(x_A, y_A, z_A).$$

Notând variația funcției U, $\Delta U = U(B) - U(A)$, rezultă:

$$W_{\widehat{AB}} = \Delta U = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right).$$

Prin urmare, lucrul forței coulombiene \vec{F} nu depinde de forma curbei care trece prin punctele A și B arbitrare, ci numai de coordonatele lor.

c) *Lucrul forței coulombiene calculat pe o curbă închisă este egal cu zero.*

Demonstrație: Deoarece pentru o curbă deschisă ($A \neq B$) se poate scrie $W_{\widehat{AB}} = U(B) - U(A)$ rezultă că în cazul unei curbe închise

($A=B$) se poate scrie $W_{\widehat{AB}} = U(B) - U(A) = 0$. Deoarece $W_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{l}$

reprezintă circulația vectorului forță de-a lungul curbei \widehat{AB} , în cazul în care curba este închisă rezultă: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$, unde semnul \oint reprezintă integrala curbilinie pe o curbă închisă.

1.11.3. Energia potențială a unei sarcini aflată sub acțiunea unei forțe de tip coulombian. Energia potențială de interacție dintre două sarcini electrice

Definiție: Energia potențială a sarcinii q_0 aflată la distanța r de sarcina punctiformă Q este o mărime scalară care se notează cu $E_p(r)$ și este egală cu funcția de forță $U(r)$ luată cu semn schimbat din care derivă forța de tip coulombian \vec{F} :

$$E_p(r) = -U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r} - C.$$

Observație: Constanța arbitrară de integrare C poate fi determinată dacă se admite valabilă din punct de vedere fizic următoarea condiție: pentru $r \rightarrow \infty$, $E_p(r) = 0$. Rezultă, deci, $C = 0$.

În general, energia potențială de interacțiune dintre două sarcini în vid Q_1 , Q_2 punctiforme se scrie sub forma:

$$E_p(r_{12}) = \pm \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

unde r_{12} este distanța dintre sarcinile punctiforme Q_1 și Q_2 .

Dacă sarcinile Q_1 și Q_2 au același semn E_p este pozitivă, iar în caz contrar aceasta este negativă.

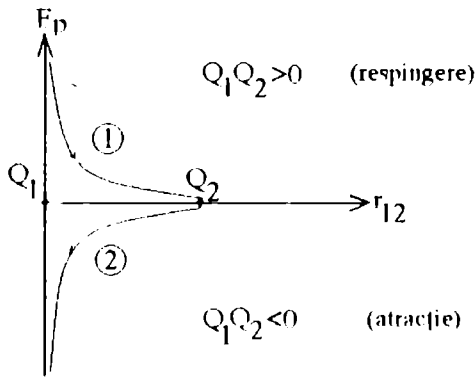


Fig. 1.23

Reprezentarea grafică a dependenței energiei potențiale de interacțiune a două sarcini în funcție de distanța dintre ele este dată în figura 1.23. Cele două curbe reprezintă hiperbole echilatre.

Curba (1) corespunde cazului $Q_1 Q_2 > 0$ (sarcinile au același semn). Curba (2) corespunde cazului $Q_1 Q_2 < 0$ (sarcinile sunt semn contrar). Din analiza curbelor (1) și (2) din figură rezultă că energia potențială E_p de interacțiune reciprocă dintre două sarcini punctiforme Q_1 , Q_2 nu are extreme (minime) ceea ce înseamnă că sistemul celor două sarcini nu se poate găsi în echilibru stabil pentru nici o valoare a distanței r_{12} dintre ele.

Cu alte cuvinte, sarcinile cu același semn se vor respinge până la infinit, iar sarcinile de semn contrare se vor atrage până ajung la contact, neutralizându-se reciproc. Dacă sarcinile nu sunt egale în valoare absolută, neutralizarea se produce parțial.

Proprietatea de aditivitate a energiei potențiale de interacție electrostatică: Energia potențială de interacție a unui sistem de mai multe sarcini punctiforme este egală cu suma energiilor potențiale a interacțiunii reciproce dintre toate perechile de sarcini.

a) Cazul sistemului format din 3 sarcini electrice punctiforme Q_1, Q_2, Q_3 :

$$E_p = E_p(1,2) + E_p(1,3) + E_p(2,3),$$

$$E_p = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}.$$

b) Energia de interacție electrostatică a unui sistem de n sarcini electrice punctiforme.

Considerăm mai întâi interacțiunea dintre sarcina q_i oarecare a sistemului cu toate celelalte sarcini:

$$E_p^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_i q_1}{r_{i1}} + \frac{q_i q_2}{r_{i2}} + \dots + \frac{q_i q_n}{r_{in}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

La însumare se exclude indicele $j=i$ deoarece sarcina i nu poate interacționa cu ea însăși.

Energia potențială totală E_p a sistemului se obține ținând cont de faptul că pentru fiecare sarcină din sistemul celor n sarcini putem scrie câte o expresie similară ca pentru sarcina q_i . Cu alte cuvinte:

$$E_p = E_p^{(1)} + E_p^{(2)} + \dots + E_p^{(i)} + \dots + E_p^{(n)} = \sum_{i=1}^n E_p^{(i)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}}.$$

Pentru a nu include în sumă de două ori energia unei perechi de sarcini, odată cu energia interacțiunii sarcinii i cu sarcina j și a doua oară cu energia de interacțiune dintre sarcina j cu sarcina i , la însumare luăm numai termenii cu $i < j$.

1.12. Potențialul câmpului electrostatic

1.12.1. Potențialul câmpului sarcinii punctiforme

Definiție: Potențialul câmpului electric al unei sarcini punctiforme Q într-un punct arbitrar al câmpului electrostatic reprezintă raportul dintre energia potențială a unei sarcini punctiforme q_0 în acel punct și sarcina respectivă.

Uzual, se notează cu litera V sau cu litera grecească φ .

Potențialul este o mărime fizică scalară care este funcție numai de punctul în care este definit. Câmpul electrostatic poate fi caracterizat atât de potențialul V cât și de vectorul câmp electric \vec{E} .

Cantitativ, conceptul de potențial se introduce astfel. Fie o sarcină Q punctiformă, care creează în jurul său un câmp electric caracterizat în fiecare punct de vectorul câmp electric \vec{E} . Fie o sarcină liberă punctiformă q_0 , aflată în câmpul electrostatic \vec{E} la distanța r de sarcina Q într-un punct M al acestuia. Energia potențială de interacție electrostatică dintre cele două sarcini este:

$$E_p(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Qq_0}{r}.$$

Conform definiției conceptului de potențial V acesta are expresia:

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r},$$

unde $V(r)$ reprezintă potențialul câmpului sarcinii electrice punctiforme Q într-un punct situat la distanța r de sarcină.

1.12.2. Diferența de potențial dintre două puncte. Tensiunea electrică U_{AB}

Fie E_p^A și E_p^B energiile potențiale ale sarcinii punctiforme q_0 , libere în punctele A , respectiv B aflate în câmpul electrostatic al sarcinii punctiforme Q generatoare de câmp.

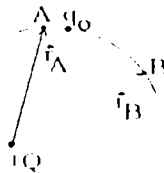


Fig. 1.24

Să calculăm mărimea fizică $E_p^A - E_p^B =$ scăderea energiei potențiale a sarcinii între cele două puncte, A și B. Să evaluăm pentru aceasta $E_p(A)$ și $E_p(B)$: $E_p(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r_A}$, $E_p(B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq_0}{r_B}$.

Prin urmare: $E_p(A) - E_p(B) = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = W_{AB}$. Împărțind

această relație cu q_0 rezultă:

$$\frac{W_{AB}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = V(A) - V(B) \equiv U_{AB}.$$

Definiție: Mărimea următoare

$$U_{AB} = \frac{W_{AB}}{q_0} \equiv V(A) - V(B) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

poartă denumirea de **diferență de potențial electric scalar** dintre punctele A și B sau **tensiunea electrică** dintre cele două puncte și reprezintă, deci, **câștul** dintre lucrul efectuat de câmp pentru a deplasa sarcina q_0 între două puncte A și B și sarcina q_0 .

1.12.3. Lucrul efectuat de forța câmpului electric pentru deplasarea sarcinii q_0

Lucrul efectuat de forța câmpului electric pentru deplasarea sarcinii q_0 din punctul A în punctul B exprimat în funcție de diferența de potențial între cele două puncte A și B rezultă din subcapitolul anterior (1.12.2.):

$$W_{AB} = q_0 [V(A) - V(B)] \quad (*)$$

Concluzie: Lucrul efectuat de forța electrică la deplasarea sarcinii q_0 din punctul cu potențialul $V(A)$ până în punctul cu potențialul $V(B)$ este egal cu produsul dintre sarcina q_0 și diferența de potențial $V(A) - V(B)$.

1.12.4. Unitatea de măsură în S.I. pentru diferența de potențial

Unitatea de măsură în S.I. pentru diferența de potențial electric scalar se numește volt (V). Pentru a găsi definiția voltului utilizăm relația:

$$U_{AB} = V(A) - V(B) = \frac{W_{\hat{AB}}}{q_0}$$

Deci $\langle U_{AB} \rangle_{S.I.} = \langle W_{AB} \rangle_{S.I.} / \langle q_0 \rangle_{S.I.}$ sau $1\text{Volt} = 1\text{J}/1\text{C}$.

Diferența de potențial electric scalar dintre două puncte din câmp este de 1 volt dacă la deplasarea sarcinii egală cu 1C între cele două puncte se efectuează un lucru mecanic egal cu 1J.

1.12.5. Potențialul absolut al unui punct din câmp

Pornim de la relația lucrului între două puncte A, B (*) și de la

expresia $W_{\hat{AB}} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ rezultă că diferența de potențial

$U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ poate fi calculată (cunoscută) dacă se

cunoaște câmpul \vec{E} , dar nu se pot calcula (cunoaște) valorile $V(A)$ și $V(B)$ ale potențialului în cele două puncte A și B.

Pentru a calcula valoarea potențialului $V(B)$, de exemplu, trebuie luat potențialul celuilalt punct $V(A)$ ca potențial de referință cunoscut. Putem, deci, scrie:

$$V(B) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + V(A)$$

Prin convenție se consideră că punctul de referință A se află la infinit și are un potențial egal cu zero: $V_{ref}(\infty) = 0$. Prin urmare:

$$V(B) = -q_c \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \equiv -W_{\infty, B} \text{ și } q_0 = 1\text{C}$$

Deci, potențialul absolut al unui punct este egal cu lucrul efectuat de forța câmpului pentru a aduce sarcina pozitivă, egală cu unitatea $q_0 = 1\text{C}$ de la infinit până la punctul dat al câmpului, luat cu semn schimbat.

1.12.6. Relația dintre vectorul câmp electric \vec{E} și potențialul electric scalar V

Pornind de la formula diferenței de potențial electric scalar U_{AB} dintre două puncte A și B: $U_{AB} \equiv V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Ținând cont de faptul că:

$$-\int_A^B dV = -V|_A^B = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_A^B dV = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Fie E_x , E_y , E_z și dx , dy , dz , componentele scalare ale vectorilor câmp electric \vec{E} și deplasare elementară $d\vec{l}$ într-un sistem de axe rectangulare de coordonate carteziene. Deci:

$$\vec{E} = E_x \cdot \vec{i} + E_y \cdot \vec{j} + E_z \cdot \vec{k}, \quad d\vec{l} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$$

$$\text{Relația } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ devine } dV = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz).$$

Deoarece potențialul V este funcție de punct, deci de coordonatele x , y , z , și dV reprezintă *diferențiala totală exactă* a funcției $V(x,y,z)$:

$$dV(x,y,z) = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \equiv dV$$

prin înlocuirea acesteia în cea de dinainte rezultă relațiile:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Cu alte cuvinte:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \vec{k} = \text{grad}V(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

În care simbolul $\vec{\nabla}$ (nabla) reprezintă operatorul vectorial gradient (sau operatorul lui Hamilton): $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{k}$. De obicei acest

operator apare în diverse cărți fără săgeată: ∇ .

Relația care exprimă legătura dintre vectorul câmp electric \vec{E} și mărimea scalară, funcția potențial electric scalar $V(x,y,z)$, este:

$$\vec{E} = -\text{grad}V(x,y,z) = -\vec{\nabla}V(x,y,z)$$

Relația arată că vectorul câmp electric \vec{E} derivă dintr-un potențial $V(x,y,z)$, cu alte cuvinte \vec{E} este un câmp (vector) conservativ.

Semnul minus arată că o sarcină pozitivă se deplasează în sensul descreșterii câmpului electric \vec{E} . Pentru ca sarcina să se deplaseze în sens contrar lui \vec{E} , este necesar să se chelluiască lucru mecanic.

1.12.7. Expresiile vectorului câmp electric \vec{E} și a potențialului V în cazul unor distribuții de sarcini

a) Expresiile vectorului câmp electric \vec{E} .

◆ Cazul distribuției discrete de sarcini.

Fie $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ un sistem de n sarcini discrete și M un punct arbitrar în spațiu. Fie $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ vectorii câmp electric corespunzători creați de cele n sarcini punctiforme în punctul M .

Conform *principiului superpoziției*, vectorul câmp electric total (rezultant) \vec{E} reprezintă *suma vectorială* a vectorilor $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$. Deci:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

(*Principiul superpoziției pentru câmpul electric în cazul unei distribuții discrete de sarcini*).

◆ Cazul distribuției continue de sarcini: liniară, superficială și volumică.

Dacă sarcinile sunt distribuite continuu pe o curbă C , o suprafață S sau un volum τ cu densitățile liniară, superficială și volumică λ, σ, ρ atunci sarcinile elementare corespunzătoare $\lambda dl, \sigma ds, \rho d\tau$ vor genera într-un punct dat M aflat la distanța r , vectorii câmp electric elementar $d\vec{E}$ corespunzători:

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda dl}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma ds}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\rho d\tau}{r^3} \cdot \vec{r}$$

Vectorii câmp electric \vec{E} în punctul dat M generați de *sarcinile totale* de pe curba C , suprafața S și volumul τ se obțin prin integrare:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r^3} \vec{r}, \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\tau} \frac{\rho d\tau}{r^3} \vec{r}$$

(*Principiul superpoziției câmpurilor electrice pentru distribuții continue de sarcini*).

b) Expresiile potențialului electric scalar.

◆ Cazul distribuției discrete de sarcini.

Fie q_1, q_2, \dots, q_n , n sarcini punctiforme aflate în punctele P_1, P_2, \dots, P_n , dintr-o regiune finită a spațiului. Potențialul într-un punct oarecare M , față de care sarcinile se află la distanțele r_1, r_2, \dots, r_n , va fi egal cu *suma algebrică* a potențialelor datorate fiecărei sarcini în parte în punctul M :

$$V_M = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

(Principiul superpoziției potențialelor pentru o distribuție discretă de sarcini).

◆ Distribuții continue de sarcini: liniare, superficiale, și volumice.

Fie distribuțiile de sarcină: liniară, de densitate liniară λ , superficială, de densitate superficială σ și volumică, de densitate volumică ρ . Potențialele elementare dV produse într-un punct M din spațiu de sarcinile elementare λdl , σds și $\rho d\tau$ sunt:

$$dV_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r}, \quad dV_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma ds}{r}, \quad dV_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho d\tau}{r}$$

unde: dl este elementul de lungime, ds este elementul de suprafață, $d\tau$ este elementul de volum, iar r reprezintă distanța de la sarcina elementară respectivă, la punctul M . Expresia potențialului total V în cele 3 cazuri se obține prin integrare, integralele fiind extinse pe curba C , suprafața S și volumul τ :

$$V_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda dl}{r}, \quad V_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r}, \quad V_v = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

(Principiul superpoziției pentru funcția potențial în cazul unei distribuții continue de sarcini).

1.12.8. Ecuațiile locale și integrale ale vectorului câmp electric \vec{E} și ale potențialului electrostatic V .

Definiții: 1. Relațiile dintre derivatele parțiale ale vectorului câmp electric \vec{E} , sau ale potențialului electric scalar V și densitatea volumică de sarcină ρ într-un punct considerat și în vecinătatea acestuia, se numesc **ecuații locale**.

2. Relațiile în care intervin valorile vectorului câmp electric \vec{E} sau ale potențialului electric scalar V , pe care le au într-o regiune din spațiu, se numesc **ecuații integrale**.

a) Rotorul vectorului câmp electric \vec{E} . Rotorul vectorului $\vec{E} = -\text{grad}V$. Teorema lui Stokes.

Definiție: Rotorul vectorului câmp electric \vec{E} , $\text{rot}\vec{E}$, reprezintă un vector definit astfel:

$$\text{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k}.$$

Mărimea $\text{rot}\vec{E}$ se poate exprima prin intermediul unui determinant de ordin trei în modul următor:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix},$$

unde operatorul notat cu nabla este: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$.

Într-adevăr, produsul vectorial $\vec{\nabla} \times \vec{E}$, dintre operatorul notat cu nabla și \vec{E} , scris sub formă de determinant, pe componente, se reduce la definiția vectorului $\text{rot}\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}, \text{ în care } \vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}.$$

◆ Rotorul vectorului $\vec{E} = -\text{grad}V$.

Teoremă: Un câmp electrostatic de vector $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ este un câmp de rotor nul. Deci, dacă $\vec{E} = -\text{grad}V$ rezultă că $\text{rot}\vec{E} = 0$.

Demonstrație: Să calculăm expresia $\text{rot}\vec{E}$ în care:

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}. \text{ Deci: } E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Într-adevăr,

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{i} \cdot \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \vec{j} \cdot \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \right) + \vec{k} \cdot \left(-\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

(Am utilizat faptul că funcția $V=V(x,y,z)$ fiind, prin ipoteză, diferentiabilă, în virtutea teoremei lui Schwartz nu contează ordinea de derivare parțială în raport cu variabilele x, y, z).

Teorema lui Stokes (fără demonstrație): Fie o curbă Γ închisă situată într-o regiune cu câmp electric de intensitate \vec{E} și o suprafață S_Γ arbitrară care se sprijină pe curba Γ . Fluxul vectorului $\text{rot} \vec{E}$ prin suprafața S_Γ este egal cu circulația vectorului câmp electric \vec{E} de-a lungul curbei închise Γ .

$$\Phi_{\text{rot} \vec{E}}^{(S_\Gamma)} = C_{\vec{E}}^{(\Gamma)} \text{ sau } \iint_{S_\Gamma} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

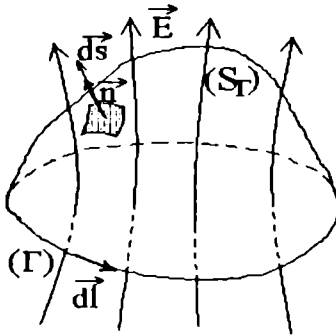


Fig. 1.25

Consecință a teoremei lui Stokes:

În teorema lui Stokes vom scrie că:

- (A) $\text{rot} \vec{E} = 0$, fapt stabilit mai înainte și, deci, rezultă că
- (B) $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$.

Ecuția (A) este un exemplu de ecuație locală, iar ecuația (B) reprezintă forma integrală a relației (A).

b) Divergența vectorului câmp electric \vec{E} .**Teorema lui Gauss-Ostrogradski.****Ecuția lui Poisson pentru vectorul câmpului electric**

Definiție: Divergența vectorului $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ reprezintă o mărime scalară definită astfel:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Mărimea $\operatorname{div} \vec{E}$ se poate reprezenta ca produsul scalar dintre operatorul vectorial $\vec{\nabla}$ și vectorul \vec{E} astfel: $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$.

Demonstrație: Putem scrie $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$ și $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$. Produsul scalar dintre cei doi vectori (forma analitică) este: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{E}$.

Teorema Gauss-Ostrogradski (fără demonstrație): Fie o suprafață închisă S care mărginește în interiorul său volumul τ , și în care se presupune că se află sarcina electrică Q distribuită în volum. Fluxul vectorului câmp electric \vec{E} , generat de sarcina electrică Q , prin suprafața S este egal cu integrala de volum din divergența vectorului \vec{E} extinsă la întreg volumul τ :

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\tau$$

Consecință a teoremei lui Gauss-Ostrogradski.
Ecuția lui Poisson

Deoarece în interiorul suprafeței S se află o sarcină Q distribuită în volumul τ , și având densitatea ρ , atunci putem scrie:

$\rho = \frac{dQ}{d\tau} \Rightarrow Q = \iiint_{\tau} \rho d\tau$. Pe de altă parte, conform legii lui Gauss sub

formă integrală $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, se poate scrie: $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho d\tau$.

Deci, $\iiint_{\tau} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \iiint_{\tau} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \cdot d\tau$ ceea ce implică:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Explicit ecuația lui Poisson (ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul întâi) se mai poate scrie astfel:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Aceasta reprezintă o *ecuație locală* a vectorului câmp electric \vec{E} , care se numește *ecuația lui Poisson* pentru vectorul câmp electric \vec{E} .

Caz particular: Dacă în interiorul suprafeței S nu există sarcini ($\rho = 0$) atunci $\text{div } \vec{E} = 0$, ceea ce implică $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$. Cu alte cuvinte

fluxul vectorului câmp electric \vec{E} prin suprafața S închisă, care nu conține sarcini electrice, este nul. Un câmp electric \vec{E} cu această proprietate se spune că este *de flux conservativ*. Câmpurile vectoriale (vectorii) cu proprietatea că sunt conservative se numesc *câmpuri laplaciene*.

c) Ecuația lui Poisson și ecuația lui Laplace pentru potențialul electrostatic scalar.

Deoarece vectorul \vec{E} derivă din funcția potențial V putem scrie $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Introducem \vec{E} în ecuația lui Poisson $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ și rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (*)$$

Pe de altă parte:

$$\vec{\nabla}(-\vec{\nabla}V) = \vec{\nabla}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}\right) = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\Delta V,$$

în care expresia: $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ reprezintă *laplaceanul* funcției

$V(x,y,z)$. Deci, putem scrie relația (*) astfel: $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$, sau

$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, sau sub formă explicită:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad (**).$$

Relația (**) reprezintă o ecuație locală de ordinul doi cu derivate parțiale pentru potențialul electrostatic scalar V denumită **ecuația lui Poisson**.

Caz particular: Dacă nu există sarcini electrice ($\rho = 0$) rezultă $\Delta V = 0$, care este o ecuație locală a potențialului electrostatic scalar (**Ecuația lui Laplace**). Scrisă explicit aceasta are forma următoare:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

sau $\nabla^2 V = 0$, sau $\Delta V = 0$.

1.13. Câmpul electrostatic în mediile macroscopice

Așa cum o să se observe în capitoul următor, unii electroni dintr-un conductor sunt liberi să se deplaseze printre ionii pozitivi relativ fixați în nodurile rețelei atunci când conductorul este plasat într-un câmp electric extern. Alăa este situația când se consideră un material izolator în câmp electric exterior. În acest caz, electronii nu au această libertate de mișcare. Ei sunt puternic legați de nucleele atomilor constituenți, astfel încât în absența unui câmp electric exterior, datorită mișcării lor rapide pe orbitele din jurul nucleului, fiecare atom este neutru din punct de vedere electric. Dacă acești atomi sunt introduși într-un câmp electric

omogen \vec{E} , simetria norilor electronici este perturbată. Centrul sarcinilor negative nu se mai suprapune peste centrul nucleului, iar un asemenea atom va prezenta un moment electric de dipol indus și se va denumi *atom polarizat*, iar dipolul asociat va fi un dipol indus de câmpul electric extern. Între momentul electric dipolar asociat atomului polarizat, \vec{p} , și câmpul electric extern, \vec{E} , există o proporționalitate valabilă doar pentru câmpuri electrice (perturbații electrice) relativ mici:

$$\vec{p} = \alpha \cdot \vec{E} \quad (1),$$

unde constanta α este o mărime caracteristică fiecărui atom care se numește *polarizabilitate atomică*.

Definiție: *Proprietatea atomilor de a dobândi un moment electric dipolar atunci când sunt introduși într-un câmp electric exterior se numește polarizație atomică.*

Pentru moleculele nepolare fenomenul de polarizație se poate descrie în mod similar. În câmp electric exterior, în astfel de molecule se induc momente electrice dipolare asemănătoare. Aceste constatări sunt valabile și în cazul moleculelor polare pentru care cele două centre de sarcină nu coincid, adică pentru moleculele care posedă un moment dipolar permanent în absența unui câmp electric exterior lor (Ex.: HCl, HBr, NH₃, H₂O, ...). Între moleculele care nu posedă moment electric dipolar permanent (molecule nepolare) se disting două categorii: molecule cu o simetrie sferică (înaltă) și molecule cu simetrie mai joasă.

În cazul moleculelor cu simetrie sferică (Ex.: CH₄, BCl₃, ...) valoarea momentului de dipol indus, în primă aproximație, nu depinde de direcția câmpului exterior. Pentru aceste molecule este valabilă relația (1), însă polarizabilitatea moleculară α nu este egală cu suma polarizabilității atomilor constituenți. Această diferență este atribuită deformării norilor electronici ai atomilor constituenți în urma formării moleculei și ea a fost folosită pentru a se stabili structura diferitelor molecule.

În cazul unor molecule ce au o simetrie mai joasă decât cea sferică, polarizarea moleculei depinde de direcția câmpului electric aplicat (Ex.: CO₂) și este diferită de aceasta.

Definiție: *Direcția după care se dispune vectorul rezultat \vec{p} se numește direcție de ușoară polarizare.*

Prin urmare, polarizabilitatea unei molecule nu este o simplă mărime scalară, ci este compusă dintr-un ansamblu de coeficienți

scalari ce exprimă o dependență liniară între componentele vectorului \vec{p} și cele ale vectorului \vec{E} : $\vec{p} = \hat{\epsilon}_p \cdot \vec{E}$ (2), unde $\hat{\epsilon}_p$ se numește tensorul polarizabilitate electrică și are componentele:

$$\hat{\epsilon}_p = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix}.$$

Valorile componentelor acestui tensor sunt funcție de modul de alegere al sistemului de coordonate în raport cu axele de simetrie ale moleculei.

În cazul moleculelor polare formate din mai mulți atomi, momentul dipolar permanent asociat lor poate fi considerat ca rezultatul compunerii momentelor dipolare ale unor molecule biatomice. Valoarea momentului de dipol al unei molecule multiatomice este funcție de unghiul dintre momentele dipolare asociate perechilor de atomi din moleculă.

Un material (mediu macroscopic) oarecare poate fi considerat ca un ansamblu format dintr-un număr foarte mare de atomi și molecule. Aplicarea unui câmp electric exterior unui material omogen produce polarizarea atomilor sau a moleculelor respective. Dacă fiecare dipol indus are momentul electric dipolar \vec{p} , iar densitatea de dipoli în unitatea de volum este egală cu N , momentul dipolar asociat unui element de volum infinitesimal $d\tau$ din material, ce conține $Nd\tau$ dipoli orientați paralel, este egal cu $\vec{p} \cdot N \cdot d\tau$. Produsul $\vec{p} \cdot N$ se numește *densitate de polarizare* (sau *polarizare*) și se notează cu \vec{P} . Orientarea paralelă a acestor dipoli atomici (moleculari) conduce la concluzia că rămân necompensate doar sarcinile de pe suprafața materialului, cele din interior compensându-se reciproc.

Definiție: Sarcinile care apar pe suprafața materialului plasat în câmp electric extern se numesc sarcini de polarizare sau sarcini legate.

Se poate arăta că datorită compensării câmpurilor electrice create de sarcinile electrice din moleculele sau atomii polarizați, câmpul electric în interiorul materialului polarizat, \vec{E}_p , este echivalent cu cel creat de cele două distribuții superficiale de sarcină.

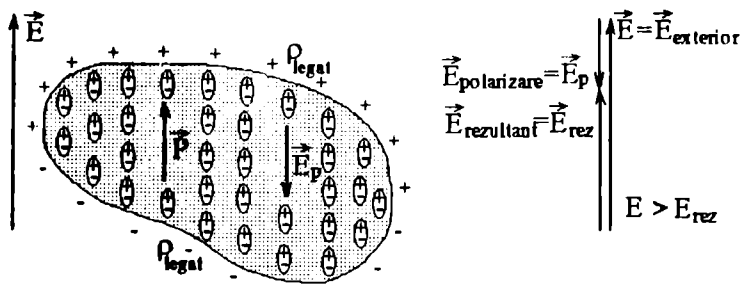


Fig. 1.26

Câmpul electric din interiorul materialului \vec{E}_p este o mărime macroscopică și este orientat antiparalel cu densitatea de polarizare \vec{P} . Câmpul electric polarizant extern, \vec{E} , se va suprapune peste cel creat de materialul polarizat, \vec{E}_p , atât în interiorul cât și în afara lui, conducând la un câmp electric rezultat \vec{E}_{rez} :

$$\vec{E}_{rez} = \vec{E} + \vec{E}_p \quad (3).$$

După cum se observă din figura 1.26, în modul, $|\vec{E}_{rez}| < |\vec{E}|$.

Fie un număr real pozitiv și nenul, k , astfel încât să transformăm inegalitatea anterioară în egalitate:

$$E_{rez} = \frac{1}{k} \cdot E \quad (4).$$

Putem considera că acest câmp electric extern, \vec{E} , în care este plasat materialul este generat de o sarcină punctiformă Q . Deci:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (5), \text{ iar } E_{rez} = \frac{1}{k} \cdot E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{4\pi k\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (6).$$

Mărimea $\epsilon = k\epsilon_0$ se numește permitivitate electrică a materialului și este o constantă caracteristică materialului. De obicei, numărul k se notează cu ϵ_r . Mărimea ϵ_0 reprezintă permitivitatea electrică a spațiului vid.

Prin urmare, alături de sarcina Q generatoare de câmp electric, care constituie cauza perturbației electrice, există și sarcinile legate sau de polarizare, care constituie efectul perturbației.

Este util să se facă distincția între sarcina externă Q și sarcinile de polarizare din material. Asupra primeia există un oarecare grad de control: sarcina poate fi adăugată sau îndepărtată (variabilă) și adesea este denumită *sarcină liberă*. Celelalte sarcini care sunt părți integrale ale atomilor sau moleculelor materialului sunt *sarcini legate* sau *sarcini structurale*. Acestea nu sunt mobile dar sunt mai mult sau mai puțin elastic legate și contribuie prin micile lor deplasări la polarizarea materialului.

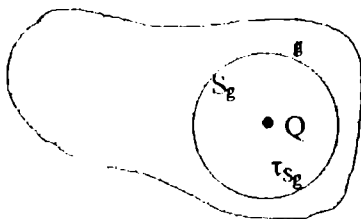


Fig. 1.27

Considerăm o gaussiană, g , sferică în material în jurul sarcinii Q . Suprafața acesteia este S_g , iar volumul delimitat de această suprafață închisă este τ_s (v. fig.1.27).

Sarcina globală din interiorul volumului materialului polarizat nu este Q ci Q/k .

În continuare, aplicăm legea lui Gauss pentru electrostatică pentru acest model:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (8), \text{ unde } \Phi_E = \iint_{S_g} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_g} k \cdot \vec{E}_{rez} \cdot d\vec{s}, \text{ iar } Q = \iiint_{\tau_s} \rho_{liber} \cdot d\tau, \text{ deci:}$$

$$\iint_{S_g} k \cdot \vec{E}_{rez} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau_s} \rho_{liber} \cdot d\tau \quad (9).$$

O relație integrală ca aceasta implică o relație locală între divergența câmpului vectorial $k \cdot \vec{E}_{rez}$ și densitatea de sarcină liberă ρ_{liber} (se utilizează teorema Gauss-Ostrogradski):

$$\vec{\nabla} \cdot (k \cdot \vec{E}_{rez}) = \frac{\rho_{liber}}{\epsilon_0} \quad (10).$$

Această relație ajută la identificarea rolului sarcinii izolate, deoarece k este presupus constant în tot mediul.

Într-un sistem oarecare, relația fundamentală între câmpul electric global (rezultant) și densitatea de sarcină totală $\rho = \rho_{\text{liber}} + \rho_{\text{legat}}$ rămâne valabilă:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{rez}} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{liber}} + \rho_{\text{legat}}) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (11).$$

Din ultimele două ecuații (10) și (11) rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot (k - 1) \cdot \vec{E}_{\text{rez}} = -\frac{\rho_{\text{legat}}}{\epsilon_0} \quad (12).$$

Se notează $k-1$ cu χ_e , denumită susceptibilitate electrică a materialului respectiv, $k - 1 \equiv \chi_e$ (13), deci:

$$\vec{\nabla} \cdot (\chi_e \cdot \vec{E}_{\text{rez}}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{legat}} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{\text{rez}}) = -\rho_{\text{legat}} \quad (14).$$

Mărimea vectorială $\epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{\text{rez}}$ se numește vectorul polarizare electrică a materialului:

$$\vec{P} \equiv \epsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{E}_{\text{rez}} \quad (15).$$

Ecuația diferențială (14) devine:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{legat}}} \quad (16).$$

Această ecuație nu depinde de condițiile din altă parte a sistemului și nici de modul în care este menținută aranjarea particulară a sarcinilor legate (fiind o ecuație locală). Orice aranjament (structurare) de sarcină legată care are un anumit exces local, pe unitatea de volum, de protoni față de electroni trebuie să reprezinte o polarizare cu o anumită divergență. Astfel, ecuația trebuie să aibă loc în mod general.

Din ecuațiile (11) și (16) se obține ecuația următoare:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_{\text{rez}} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_{\text{liber}}}{\epsilon_0} \quad (17),$$

care este complet independentă de orice altă relație între \vec{E}_{rez} și \vec{P} . Ea nu este limitată numai la acele materiale, denumite dielectrics, în care \vec{P} este proporțional cu \vec{E} .

Se obișnuiește a se da combinației liniare dintre vectorii \vec{E}_{rez} și \vec{P} , denumirea de vector *deplasare electrică* (sau vector *inducție electrică*) care se notează cu \vec{D} :

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E}_{rez} + \vec{P} \quad (18).$$

Ecuția următoare $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liber}$ (19) are loc în orice situație în care mărimile macroscopice \vec{P} , \vec{E}_{rez} și ρ pot fi deținute.

Se poate considera \vec{D} drept un câmp vectorial a cărui sursă este distribuția de sarcină liberă ρ_{liber} , așa cum distribuția de sarcină totală $\rho = \rho_{liber} + \rho_{legat}$ este sursa lui \vec{E}_{rez} .

Câmpul electrostatic \vec{E}_{rez} este determinat în mod unic, cu excepția adăugării unui câmp constant de distribuție de sarcină ρ deoarece se poate completa legea $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{rez} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (20), cu condiția

universală $\vec{\nabla} \times \vec{E}_{rez} = 0$ (21) valabilă pentru câmpul electrostatic.

Nu este adevărat, în general, că $\vec{\nabla} \times \vec{D} = 0$ (22). Astfel distribuția de sarcină liberă nu este suficientă pentru a determina \vec{D} din ecuația (19).

În plus, mai este necesară cunoașterea condițiilor de frontieră la interfața dintre diferite medii.

Considerăm diagrama schematică a frontierei dintre două medii distincte din figura 1.28. Se presupune că regiunea de frontieră conține sarcini electrice superficiale distribuite cu densitatea σ . Volumul τ_s este un domeniu cilindric imaginar infinitezimal gaussian ce intersectează interfața dintre cele două medii și care are o suprafață totală S ce delimitează volumul τ_s . Normala \vec{n} la suprafața de deasupra frontierei este îndreptată din mediul 1 spre mediul 2. Conturul dreptunghiular infinitezimal C , de grosime neglijabilă, este parțial într-un mediu și parțial în celălalt și este orientat perpendicular pe suprafața interfeței astfel că normala la contur este tangentă la interfață.

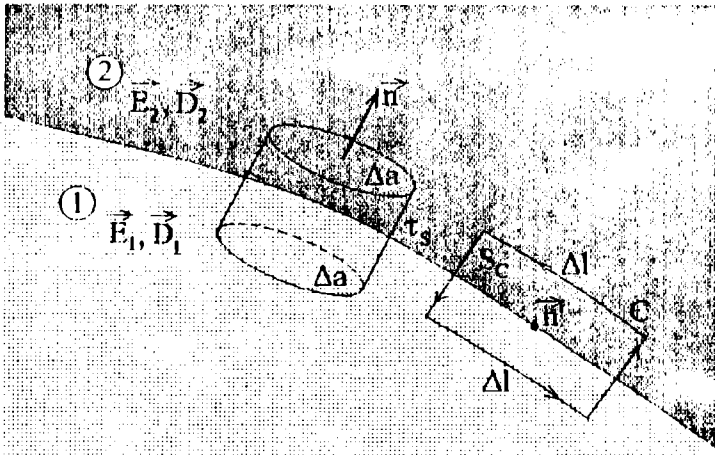


Fig. 1.28

În figura 1.28 versorul \vec{n}' este orientat perpendicular pe planul figurii și tangent la interfață.

Legea lui Gauss pentru medii macroscopice analoagă celei din subcapitolul 1.12.8 este:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot ds = \iiint_{\tau_g} \rho \cdot d\tau \quad (23).$$

Având o înălțime neglijabilă, suprafața laterală a gaussienei cilindrice nu contribuie la calculul integralei din stânga în ecuația (23). Contribuie numai cele două baze de arie Δa care sunt paralele și tangente la suprafața interfeței. În acest caz:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \cdot ds = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \cdot \Delta a, \text{ iar } \iiint_{\tau_g} \rho \cdot d\tau = \sigma \cdot \Delta a.$$

Astfel, relația care leagă componentele normale ale lui \vec{D} în ambele zone ale frontierei este următoarea:

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma \quad (24).$$

Se poate spune că discontinuitatea componentei normale a lui \vec{D} în orice punct este dată de densitatea superficială de sarcină în acel punct.

Câmpul electrostatic fiind conservativ rezultă $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ sau sub forma integrală: $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, unde C este curba infinitesimală de lățime

neglijabilă construită în figura 1.28. Cum laturile curbei C de lungime Δl sunt paralele cu interfața, atunci:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{n}' \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \Delta l = [\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)] \cdot \vec{n}' \cdot \Delta l \quad (25),$$

unde s-a utilizat o proprietate a produsului mixt: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

Prin urmare, *componentele tangențiale* ale lui \vec{E} de ambele părți ale frontierei sunt legate de relația:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (26),$$

care arată că, de-a curmezișul unei interfețe, componenta tangențială a lui \vec{E} este continuă.

Concluzie: În concluzie, se pot scrie **ecuațiile de stare** pentru mediile macroscopice:

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \cdot \vec{E}},$$

unde s-a notat \vec{E}_{nz} cu \vec{E} și **ecuațiile de trecere** (sau condițiile de frontieră la trecerea dintr-un mediu în altul):

$$\boxed{(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma} \quad \text{și} \quad \boxed{\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0}.$$

Materia poate fi polarizată, starea sa putând fi descrisă complet, atât timp cât câmpul macroscopic se consideră definit printr-o densitate de polarizare \vec{P} , care este și momentul dipolar pe unitatea de volum. Contribuția unei astfel de materii la câmpul electric \vec{E} este identică cu aceea a unei distribuții de sarcină de densitate $\rho_{\text{legat}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$, existând în vid. În particular, la suprafața unei substanțe polarizate, unde există o discontinuitate în \vec{P} , aceasta se reduce la o sarcină superficială de densitate $\sigma = -P$. Dacă se adaugă orice distribuție de sarcină liberă care poate fi prezentă, câmpul electric este câmpul pe care această distribuție de sarcină

totală l-ar produce în vid. Acesta este câmpul macroscopic, \vec{E} , atât în interiorul cât și în afara mediului, cu mențiunea că în interiorul materiei este media spațială a câmpului macroscopic adevărat.

Definiție: Dacă \vec{P} este proporțional cu \vec{E} într-un material, atunci materialul se numește dielectric.

Observație: Sarcinile libere introduse într-un dielectric generează câmpuri electrice care au $1/\epsilon_r$ din intensitatea pe care aceleași sarcini le-ar produce în vid.

Capitolul 2

ELECTROCINETICĂ

2.1. Curentul electric. Intensitatea curentului electric. Densitatea de curent electric

2.1.1. Definiția curentului electric

Definiție: Mișcarea ordonată într-o singură direcție a purtătorilor de sarcină electrică se numește curent electric.

Curentul electric de conducție apare când mișcarea ordonată a sarcinilor are loc în medii conductoare sau în vid.

Curentul de convecție reprezintă mișcarea ordonată a sarcinilor electrice de pe un corp încărcat, odată cu mișcarea corpului.

Cauza apariției curentului electric de conducție: *câmpul electric din conductor*. Sensul curentului electric coincide cu sensul vectorului câmp electric din conductor. Sensul curentului este același cu sensul deplasării în câmp a sarcinilor pozitive. (În câmp electric purtătorii de sarcină pozitivi se deplasează în sensul câmpului electric, iar cei negativi în sens opus lui).

Exemple de curent de conducție: mișcarea electronilor liberi în metale, mișcarea electronilor de la catod la anod în tuburi electronice, mișcarea ordonată a ionilor în electroliți.

2.1.2. Intensitatea curentului electric

Definiție: Intensitatea curentului electric printr-un conductor reprezintă sarcina electrică transportată de purtătorii de sarcină în unitatea de timp, prin orice secțiune transversală a conductorului, fiind o mărime fizică fundamentală de tip scalar în Sistemul Internațional de unități.

Intensitatea medie, I_m , a unui curent variabil în timp este definită ca fiind $I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$, unde ΔQ este sarcina electrică ce trece printr-o secțiune transversală arbitrară a conductorului în intervalul de timp Δt .

Intensitatea instantanee, I , a unui curent variabil în timp este definită astfel: $I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \equiv \dot{Q}$, unde I reprezintă derivata cantității de sarcină $Q = Q(t)$ în raport cu variabila timp t .

Curentul continuu (staționar) reprezintă curentul electric a cărui intensitate și direcție nu se modifică în timp. Se notează tot cu litera I . Expresia lui I se obține din condiția $I = \text{constant}$. Deci $I = dQ/dt = \text{const.} \Rightarrow dQ = I dt \Rightarrow Q = It$ sau $I = Q/t$. În acest caz, curentul transportă prin secțiunea conductorului aceeași cantitate de sarcină în fiecare secundă.

Unitatea de măsură pentru intensitatea curentului în S.I. este amperul.

Definiția amperului: Intensitatea unui curent electric constant (staționar), care traversând doi conductori paraleli, rectilinii, infinit de lungi, de secțiune neglijabilă, situați în vid, la un metru distanță unul de celălalt, dă naștere la o forță de interacțiune magnetică între conductori de $2 \cdot 10^{-7}$ newtoni pe metru de lungime, se numește amper.

2.1.3. Modulul vectorului densității de curent de conducție. Intensitatea curentului în funcție de densitatea de curent de conducție

a) Cazul conductorului omogen, rectiliniu aflat într-un câmp electric exterior \vec{E} și versorul \vec{n} paralel cu \vec{v} .

Ipoteză: În conductor se mișcă un singur tip de purtători de sarcină (electroni, de exemplu). Fie n concentrația purtătorilor de sarcină (numărul de electroni din unitatea de volum a conductorului), q sarcina unui purtător și \vec{v} viteza în câmpul electric \vec{E} în care se află conductorul, a fiecărui purtător de sarcină (se presupune că toți purtătorii au aceeași viteză \vec{v}). Într-un interval de timp Δt toți electronii vor străbate spațiul $\Delta l = v \Delta t$; Δl constituie generatoarea cilindrului de volum $\Delta \tau = S \Delta l = S v \Delta t$; S reprezintă secțiunea transversală a conductorului. Numărul purtătorilor de sarcină din volumul $\Delta \tau$ este $\Delta N = n \Delta \tau =$

$=nSv\Delta t$. Sarcina totală transportată de aceștia este $\Delta Q = q\Delta N = qnSv\Delta t$. Intensitatea curentului din conductor este: $I = \Delta Q/\Delta t = qnSv$.

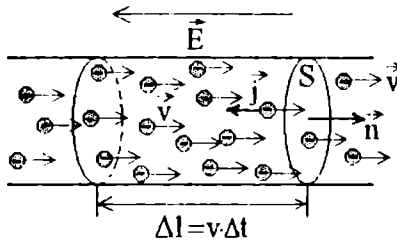


Fig.2.1

Mărimea notată cu $j = I/S = qn v$ definește valoarea (modulul) densității de curent din conductorul omogen cu un singur tip de purtători de sarcină.

Definiție: Modulul vectorului densității de curent de conducție este dat de raportul dintre intensitatea curentului electric și suprafața situată normal pe direcția curentului.

sau

Densitatea de curent j este numeric egală cu intensitatea curentului electric I care străbate normal unitatea de suprafață.

$$j = \frac{I}{S}$$

Unitatea de măsură pentru j este: $\langle j \rangle_{SI} = A/m^2$.

Relația $I = jS$ care rezultă din definiția pentru j , este valabilă în ipotezele: S este perpendicular pe vectorul \vec{v} (deci și pe \vec{j}) și modulul lui \vec{j} este constant în toate punctele secțiunii S .

Definiția vectorului densitate de curent de conducție \vec{j} : Densitatea de curent de conducție este o mărime vectorială, care se notează cu \vec{j} , are modulul egal cu $j = nqv$, iar direcția și sensul coincide cu orientarea vectorului viteză, \vec{v} , al purtătorilor de sarcină dacă sarcina este pozitivă și este de sens contrar dacă sarcina este negativă:

$$\vec{j} = n \cdot q \cdot \vec{v}.$$

b) Conductor omogen și rectiliniu aflat într-un câmp electric exterior de intensitate \vec{E} . Versorul \vec{n} face un unghi θ cu $\vec{j} = \text{const}$. Intensitatea curentului de conducție în funcție de densitatea curentului de conducție

În acest caz S' reprezintă proiecția ortogonală a lui S pe un plan perpendicular pe conductor: $S' = S \cos\theta$. Pentru secțiunea S' , normală la \vec{j} , este valabilă relația: $I = j S' = j S \cos\theta$. Prin definiție vectorul suprafață orientată $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ și deci relația $I = j S \cos\theta$ se scrie $I = \vec{j} \cdot \vec{S}$. Într-adevăr, produsul scalar este: $\vec{j} \cdot \vec{S} = \vec{j} \cdot \vec{n} \cdot S = j \cdot S \cdot \cos\theta$ (v. figura 2.2).

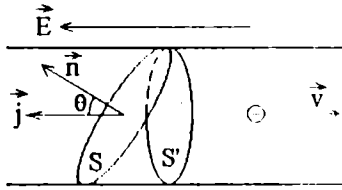


Fig.2.2

Deci, intensitatea curentului I printr-un conductor omogen este egal cu produsul scalar dintre vectorul densitate de curent \vec{j} și vectorul \vec{S} .

c) Conductor neomogen de formă oarecare aflat într-un câmp electric exterior de intensitate \vec{E} . Intensitatea curentului de conducție în funcție de densitatea de curent de conducție

În conductorii neomogeni vectorul densitate de curent, \vec{j} , are valori și orientări diferite în puncte diferite din conductor (v. figura 2.3). Delimităm în secțiunea S arbitrară dusă prin conductor un element de suprafață ds atât de mic încât \vec{j} este constant în orice punct din ds . Intensitatea curentului prin ds va fi: $dI = \vec{j} \cdot d\vec{s}$.

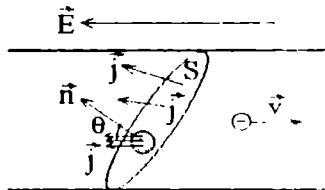


Fig.2.3

Intensitatea curentului prin întreaga secțiune S a conductorului neomogen se obține prin integrare. Rezultă:

$$I = \int dI = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}.$$

Deci, *intensitatea curentului I printr-un conductor neomogen este egală cu fluxul vectorului densitate de curent de conducție \vec{j} prin suprafața secțiunii S considerate a conductorului.*

2.1.4. Ecuația de continuitate din electrocinetică

Fie o suprafață imaginară S închisă care delimitează volumul τ_v , în interiorul unui conductor neomogen de formă oarecare străbătut de un curent variabil caracterizat de densitatea de curent de conducție: $\vec{j} = \vec{j}(x, y, z, t)$ (v. figura 2.4).

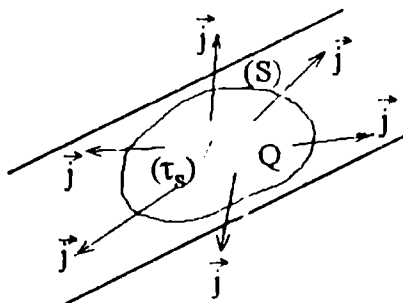


Fig.2.4

Fie densitatea volumică de sarcină $\rho(x, y, z, t)$, care depinde de punctele de coordonate (x, y, z) ale conductorului neomogen și de timpul t . Sarcina totală Q din volumul τ_v este:

$$Q = \iiint_{\tau_v} \rho(x, y, z, t) d\tau$$

Putem, deci, scrie: $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$, unde $I = \frac{dQ'}{dt}$ reprezintă sarcina electrică dQ' ce iese din interiorul suprafeței S în timpul dt .

În conformitate cu *principiul conservării sarcinii electrice*, sarcina ce iese din interiorul suprafeței S , dQ' în intervalul dt , trebuie să fie egală cu sarcina cu care s-a micșorat sarcina totală Q din interiorul volumului τ_s în același interval de timp dt . Prin convenție această cantitate se ia cu semnul minus: $(-dQ)$.

Cu alte cuvinte, $\frac{dQ'}{dt} = -\frac{dQ}{dt}$ reprezintă diminuarea sarcinii electrice din volumul delimitat de S .

Putem, deci, scrie: integrala $\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \frac{dQ}{dt}$ reprezintă fluxul densității de curent prin suprafața S , care este egal cu diminuarea sarcinii electrice din interiorul suprafeței S , în intervalul de timp dt .

Utilizând relația $Q = \iiint_{\tau_s} \rho(x, y, z, t) dt$ rezultă:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_{\tau_s} \rho(x, y, z, t) dt = -\iiint_{\tau_s} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt.$$

Deoarece volumul τ_s este constant prin ipoteză (limitele de integrare nu depind de timp), este posibilă operația de derivare parțială în raport cu timpul sub integrală.

Conform teoremei lui Gauss-Ostrogradski:

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot dt.$$

rezultă

$$\iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \cdot dt = -\iiint_{\tau_s} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

ceea ce conduce la **ecuația de continuitate**:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\vec{j} + \vec{\nabla} \frac{\rho}{\partial t} = 0}$$

care este o *ecuație locală fundamentală a electrocineticii*. Aceasta exprimă legea conservării sarcinii electrice totale.

În cazul curentului electric staționar, prin definiție, densitatea de curent ρ în fiecare punct al conductorului nu depinde explicit de timp: $\rho =$

$= \rho(x, y, z)$. Matematic acest lucru se scrie $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Rezultă:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0}$$

Sensul fizic: În conductor nu există puncte din care "izvorăște" densitate de curent \vec{j} ($\text{div} \vec{j} = 0$). Sarcina electrică ce intră în volumul τ oarecare din conductor în unitatea de timp este egală cu sarcina ce iese din acel volum în unitatea de timp prin suprafața S .

Observație: Intensitatea curentului de conducție I și densitatea curentului de conducție j se notează uneori în literatură cu I_c , respectiv, j_c .

2.2. Teoria electronică a conducției în metale

2.2.1. Purtătorii de sarcină în metale. Modelul P. Drude și G. A. Lorentz

Conform modelului Drude-Lorentz, purtătorii de sarcină în metale sunt electronii, iar teoria care explică procesul de conducție pe această bază se numește teoria electronică a conducției metalelor.

Conform acestui model rețeaua cristalină a metalului este formată din ioni pozitivi și electroni liberi, care provin din electronii de valență ai atomilor metalului așezați în nodurile rețelei cristaline.

În absența câmpului electric exterior electronii liberi din metale se află într-o mișcare termică, haotică și continuă cu viteza termică medie v_T .

Electronii liberi din metale se comportă ca moleculele unui gaz ideal; ansamblul electronilor liberi poate fi asimilat cu un "gaz de electroni", căruii i se pot aplica legile gazelor ideale.

Dacă la capetele conductorului metalic se menține o diferență de potențial $V_1 - V_2$, câmpul electric \vec{E} ce apare în interiorul metalului imprimă electronilor liberi o mișcare suplimentară, ordonată, cu viteza medie $\vec{v} =$ viteza de curent = viteza de drift, având sens invers vectorului câmp electric \vec{E} .

Apariția mișcării ordonate a electronilor este echivalentă cu apariția în conductor a curentului electric.

Experimentul lui Rickie (1901).

Scopul: Demonstrarea faptului că purtătorii de sarcină în metale sunt electronii. Trecând timp de un an un curent electric printr-un cilindru

format din trei bucăți lipite între ele la baze, formate din Cu-Al-Cu, sarcina totală care a traversat suprafața de separare între două bucăți, dacă aceasta ar fi fost purtată din ioni (Cu, Al) și nu din electroni s-ar fi putut observa trecerea de material (ioni) dintr-un cilindru în altul.

Concluzie: În metale curentul nu apare în urma mișcării ionilor (de natură diferită în metale diferite), ci în urma mișcării altor particule, de aceeași natură în toate metalele, adică în urma mișcării orientate a electronilor.

2.2.2. Calculul vitezei termice medii a electronilor

La temperatura $T=300\text{K}$ din relația:

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} = 1,38 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Viteza de drift a electronilor (viteza în curent), v , este pentru $j = 10^6 \text{ A/m}^2 =$ densitatea de curent maximă admisă în Cu, $q = e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $n = 10^{29} \text{ electroni/m}^3$: $v = j/ne = 10^6 / (10^{29} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 10^{-4} \text{ m/s}$. Deci $v \ll v_T$. **Viteza de curent a electronilor este foarte mică (neglijabilă) față de viteza medie termică v_T .**

Observație: Nu trebuie confundată viteza în curent a electronilor cu viteza de transmitere a semnalului electric prin conductori. Se știe că la închiderea întrerupătorului, situat la sute de km față de consumator, curentul se instalează instantaneu (practic) pe toată lungimea conductorului, de la generator la consumator. Ceea ce se instalează practic instantaneu în conductor este câmpul electric, care se propagă cu viteza luminii, c , în mediul conductor dat. Câmpul electric pune electronii în mișcare în mod instantaneu și simultan pe toată lungimea conductorului.

Așadar, viteza de transmisie a semnalului (câmpului) electric prin conductor, egală cu viteza luminii, nu coincide cu viteza de curent a electronilor.

2.2.3. Timp liber mediu dintre două ciocniri. Viteza medie în curent

În metale aflate în câmp electric mișcarea ordonată a electronilor este stânjenită de prezența ionilor rețelei metalului cu care se pot ciocni în mod întâmplător.

Presupunem că la capetele unui conductor metallic se aplică o diferență de potențial. Aceasta determină apariția în metal a unui câmp electric \vec{E} . Sub acțiunea forței $\vec{F} = e\vec{E}$ fiecare electron va avea o mișcare accelerată în timpul dintre două ciocniri succesive cu nodurile rețelei: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}$, unde e este sarcina electronului, iar m este masa

electronului. În intervalul de timp Δt_1 dintre două ciocniri succesive electronul parcurge spațiul $\Delta x_1 = \frac{a(\Delta t_1)^2}{2}$. În intervalul de timp Δt_2 dintre următoarele două ciocniri cu nodurile rețelei electronul parcurge spațiul $\Delta x_2 = \frac{a(\Delta t_2)^2}{2}$. În timpul total, $t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n$, electronul parcurge distanța totală $x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n = (a/2)((\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_n)^2)$.

Viteza medie în curent a mișcării electronului este prin definiție:

$$\langle v \rangle = \frac{x}{t} = \frac{a}{2} \tau \quad \text{sau vectorial} \quad \langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{a}}{2} \tau, \quad \text{unde:} \quad \tau = \frac{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_n)^2}{t}$$

reprezintă timpul mediu dintre două ciocniri sau timpul liber mediu.

2.2.4. Forma diferențială (locală) și integrală a legii lui Ohm

a) Forma locală a legii lui Ohm.

Pornesc de la relațiile $\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{a}}{2} \tau$ și $\vec{a} = \frac{e\vec{E}}{m}$ și rezultă:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{e\tau}{2m} \cdot \vec{E}$$

care reprezintă viteza medie a electronului. Pe de altă parte vectorul densitate de curent de conducție este: $\vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle$ și deci $\vec{j} = \frac{e^2 n \tau}{2m} \cdot \vec{E}$.

Prin urmare:

$$\vec{j}(x, y, z) = \sigma \vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{\rho} \vec{E}(x, y, z),$$

unde: $\sigma = 1/\rho = e^2 n \tau / 2m$, σ este conductivitatea electrică, iar ρ este rezistivitatea electrică. Aceste mărimi sunt constante caracteristice materialului din care este făcut conductorul.

Ecuția anterioară constituie *forma locală (diferențială) a legii lui Ohm*, care se enunță astfel:

În fiecare punct $P(x,y,z)$ din conductor densitatea de curent de conducție \vec{j} este direct proporțională cu vectorul intensitate câmp electric \vec{E} în acel punct. Sensul vectorului \vec{j} coincide cu cel al vectorului \vec{E} .

b) Forma integrală a legii lui Ohm.

Considerăm un conductor omogen, de secțiune uniformă S și de lungime l , prin care trece un curent de intensitate I constantă. Rezultă, deci, $\vec{E} = \text{const.}$, deoarece $\vec{j} = \text{const.}$ Purtătorii de sarcină se mișcă în interiorul conductorului sub acțiunea unui câmp electric constant de intensitate \vec{E} care derivă dintr-un potențial V .

Deci, $\vec{E} = -\text{grad}V$, care, dacă se ia axa Ox ca în fig.2.5, se scrie astfel:

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{i}. \text{ Sau } E_x \equiv E = -\frac{dV}{dx}, E dx = -dV \Rightarrow -\int_0^l dV = E \int_0^l dx \Rightarrow \\ \Rightarrow V(0) - V(l) = E l \quad (1).$$

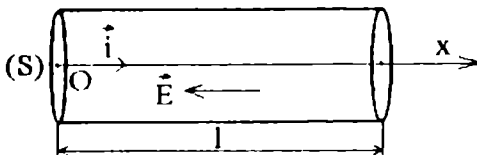


Fig.2.5

Notăm cu $V(0) = V_1$ și $V(l) = V_2$ potențialele punctelor celor două suprafețe extreme ale conductorului și presupunem că $V_1 > V_2$. Scriind legea lui Ohm sub formă locală $j = \sigma E = I/S$ (2) prin eliminarea lui E din relațiile (1) și (2) rezultă:

$$\sigma \frac{V_1 - V_2}{l} = \frac{I}{S} \quad \text{sau} \quad I = \frac{S\sigma(V_1 - V_2)}{l}$$

unde mărimea $R = \frac{l}{\sigma S} = \rho \frac{l}{S}$ reprezintă rezistența electrică a conductorului omogen și de secțiune uniformă, $V_1 - V_2 = U =$ tensiunea electrică dintre cele două suprafețe extreme. Deci,

$$I = \frac{U}{R}$$

reprezintă *legea lui Ohm sub formă integrală*, care se enunță astfel:

Intensitatea curentului electric care străbate o porțiune de circuit, dintr-un conductor omogen, este direct proporțională cu diferența de potențial aplicată la capetele acelei porțiuni de circuit și invers proporțională cu rezistența electrică a porțiunii de circuit.

2.2.5. Rezistența electrică a unei porțiuni de conductor. Unități de măsură. Cauzele rezistenței electrice

Definiție: Rezistența electrică R a unei porțiuni de conductor este o mărime fizică scalară derivată, direct proporțională cu lungimea conductorului, invers proporțională cu aria secțiunii transversale a conductorului și depinde prin rezistivitatea ρ de natura materialului din care este confecționat conductorul:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Cauze: Rezistența electrică R a unui conductor este determinată de faptul că în mișcarea lor, electronii suferă ciocniri cu ionii rețelei cristaline a conductorului. Aceste ciocniri frânează mișcarea electronilor, jucând rolul unei forțe de frecare specifică.

Unitatea de măsură în S.I. pentru rezistența electrică R este ohm-ul (Ω), iar unitatea de măsură în S.I. pentru rezistivitatea ρ este ohm-metru (Ωm).

Definiție: Un ohm reprezintă rezistența electrică dintre două puncte ale unui conductor când aplicarea unei tensiuni electrice constante de un volt între cele două puncte, determină un curent de un amper prin conductor, dacă acesta nu este sediul unor tensiuni electromotoare. Relația de definiție este $R = U/I$; $\langle R \rangle_{S.I.} = 1\text{V}/1\text{A} = 1\Omega$.

Definiție: Un ohm-metru este egal cu rezistivitatea materialului omogen și izotrop al unui conductor cu lungimea de 1m și aria secțiunii drepte de 1m^2 , care are rezistența electrică de 1Ω . Relația de definiție este: $\rho = RS/l$; $\langle \rho \rangle_{S.I.} = 1\text{m}^2 \cdot 1\Omega/1\text{m} = 1\Omega\text{m}$.

2.3. Energia curentului electric de conducție. Legea lui Joule-Lenz sub formă integrală și diferențială

a) Prima forma integrală a legii Joule-Lenz.

Sub prima formă integrală (fără demonstrație), această lege caracterizează cantitatea de energie (căldură), W , disipată de un conductor având rezistența electrică R , în timpul t , când acesta este parcurs de un curent electric de intensitate I :

$$W = R \cdot I^2 t, \quad R = \rho l/S,$$

unde: ρ este rezistivitatea electrică a conductorului, $\sigma = 1/\rho$ este conductivitatea electrică a conductorului, l este lungimea conductorului, iar S – aria secțiunii transversale a conductorului.

b) Forma diferențială a legii Joule-Lenz.

Demonstrație: Fie un element de lungime infinitezimal dl din conductorul electric. Rezistența electrică a acestui element va fi dată de relația: $dR = \rho dl/S$, obținută prin diferențierea relației $R = \rho l/S$, păstrând S și ρ constante.

Energia disipată prin efect Joule de elementul de conductor dl în timpul t prin care circulă curentul electric de intensitate I se obține prin diferențierea relației $W = R \cdot I^2 t$ în raport cu R , rezultând: $dW = dR \cdot I^2 t$. Prin urmare, făcând înlocuirea lui dR , rezultă:

$$dW = \rho \cdot \frac{dl}{S} \cdot I^2 \cdot t.$$

Dacă curentul electric de intensitate I se caracterizează prin densitatea de curent j , $I = jS$, atunci relația anterioară se transcrie astfel:

$$dW = \rho \cdot \frac{dl}{S} \cdot j^2 \cdot S \cdot t = \frac{1}{\sigma} \cdot dl \cdot j^2 \cdot S \cdot t.$$

Având în vedere, în continuare, relația:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E},$$

unde \vec{E} reprezintă vectorul câmp electric din interiorul conductorului, care constituie *legea lui Ohm sub formă diferențială*, egalitatea anterioară se rescrie:

$$dW = \sigma \cdot E^2 \cdot S \cdot dl \cdot t .$$

Deoarece $S dl = d\tau$ reprezintă volumul porțiunii de conductor de secțiune S și lungime dl rezultă: $dW = \sigma \cdot E^2 \cdot t \cdot d\tau$.

Definiție: Densitatea de energie, w , disipată de conductor

$$w = \frac{dW}{d\tau} , \text{ cu unitatea de măsură } \langle w \rangle_{s.l.} = \frac{J}{m^3} ,$$

reprezintă energia degajată (disipată) în unitatea de volum din conductor.

Prin urmare, rezultă: $w = \sigma \cdot E^2 \cdot t$ care reprezintă *forma diferențială a legii Joule-Lenz*.

c) A doua formă integrală a legii Joule-Lenz

A doua formă integrală a legii Joule-Lenz echivalentă cu cealaltă se obține din relația de definiție, $w = \frac{dW}{d\tau}$. Prin integrare, rezultă:

$$W \equiv \iiint_{\tau_s} dw = \sigma \cdot t \cdot \iiint_{\tau_s} E^2 \cdot d\tau .$$

d) A treia formă integrală a legii Joule-Lenz.

A treia formă integrală a legii Joule-Lenz se obține derivând parțial relația anterioară în raport cu timpul, t :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sigma \cdot \iiint_{\tau_s} E^2 \cdot d\tau ,$$

unde $\frac{\partial W}{\partial t}$ = rata de variație în timp = viteza de variație reprezintă căldura (energia) dezvoltată în unitatea de timp prin efect Joule în volumul τ_s mărginit de suprafața S , traversat de câmpul electric de intensitate \vec{E} .

2.4. Tensiunea electromotoare

2.4.1. Punerea problemei. Conceptele de generator și forță imprimată

a) Într-un conductor are loc deplasarea ordonată a purtătorilor de sarcină electrică (există un curent electric), atât timp cât în acesta există un câmp electric caracterizat de vectorul \vec{E} .

Experiment:

Fie două sfere metalice 1 și 2 încărcate cu sarcinile $+Q_1$, respectiv $-Q_2$ și având potențialele V_1 , respectiv V_2 . Între sferele 1 și 2 există diferența de potențial $V_1 - V_2 > 0$ și un câmp electrostatic caracterizat de vectorul câmp electric \vec{E}_e (v. figura 2.6.a, b, c).

Dacă legăm sferele cu conductorul C, electronii liberi din acesta vor începe să se deplaseze ordonat sub acțiunea câmpului \vec{E}_e , având viteza dirijată în sensul opus vectorului \vec{E}_e . Acest curent electric se menține atâta timp cât este necesar pentru ca sarcinile aflate pe cele două sfere să se neutralizeze reciproc.

După aceasta, potențialele celor două sfere devin egale în valoare, iar câmpul electric dispare.

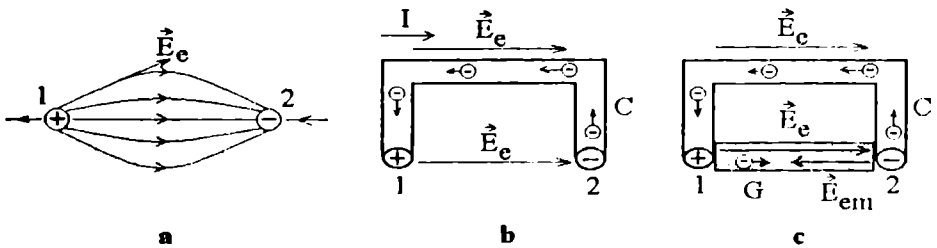


Fig.2.6

Generatorul. În vederea menținerii unui curent constant prin C se închide circuitul prin intermediul unui dispozitiv numit generator (sursă) G. Rolul lui G este de a menține constantă diferența de potențial $V_1 - V_2$, prin readucerea electronilor de la sfera 1 la sfera 2 cu debitul cu care aceștia circulă de la sfera 2 la sfera 1 prin conductorul C (circuitul exterior al generatorului).

b) În generator electronii circulă de la borna + spre borna -, în sens invers forței electrice $\vec{F}_e = -e\vec{E}_e$ a câmpului electrostatic și care nu reprezintă, deci, cauza mișcării acestora.

Definiție: Forța care determină mișcarea electronilor în interiorul generatorului de la borna + la borna - în sens invers vectorului \vec{E}_e se numește **forță electromotoare, forță indusă, sau forță imprimată**. Se notează cu \vec{F}_{em} , iar vectorul câmp electromotor se definește astfel:

$$\vec{E}_{em} = \frac{\vec{F}_{em}}{q}$$

Forța electromotoare (e.m.) are drept cauză, cel mai frecvent, energia degajată în reacțiile chimice din generator. În interiorul lui G apare un vector câmp electric total:

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{em}$$

Dacă prin conductorul C nu trece curent electric (circuit deschis) în interiorul generatorului $\vec{E}_e + \vec{E}_{em} = 0$.

Dacă circuitul este închis, sub influența câmpului $E = E_{em} - E_e > 0$ ($E_{em} > E_e$) electronii se vor deplasa în interiorul generatorului G de la borna 1 la borna 2 în sens invers vectorului $\vec{F}_e = -e\vec{E}_e$, menținându-se astfel constantă diferența de potențial $V_1 - V_2$, precum și valoarea curentului în conductorul C.

2.4.2. Tensiunea electrică și tensiunea electromotoare

a) Căderea de tensiune (U) dintre două puncte ale unui circuit electric închis

Definiție: Lucrul efectuat de forța câmpului electric total din circuit, $\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_{em}$, pentru deplasarea unității de sarcină electrică pozitivă între două puncte date a și b ale circuitului reprezintă tensiunea electrică (diferența de potențial) dintre acele puncte.

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$U_{ab} = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{E}_e + \vec{E}_{em}) \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$$

b) Diferența de potențial între două puncte ale unui circuit închis

Definiție: Lucrul efectuat de forța câmpului electrostatic \vec{E}_e , pentru deplasarea unității de sarcină pozitivă între două puncte a și b ale circuitului reprezintă diferența de potențial între cele două puncte.

Matematic, aceasta se scrie astfel:

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l}.$$

c) Tensiunea electromotoare (t.e.m) \mathcal{E} între două puncte ale unui circuit

Definiție: *Lucrul efectuat de forța câmpului electromotor \vec{E}_{em} , pentru deplasarea unității de sarcină pozitivă între două puncte date a și b ale circuitului constituie tensiunea electromotoare între cele două puncte.*

Matematic, aceasta se poate scrie astfel: $\mathcal{E}_{ab} = \frac{W_{ab}}{q_0} = \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$.

d) Relația dintre U_{ab} , V_{ab} , și \mathcal{E}_{ab}

Din relațiile scrise anterior se deduce relația de legătură:

$$U_{ab} = V_{ab} + \mathcal{E}_{ab}.$$

Căderea de tensiune între două puncte a și b ale unui circuit închis este egală cu suma dintre diferența de potențial și tensiunea electromotoare (t.e.m.) între cele două puncte.

e) Căderea de tensiune pe întreg circuitul închis.

Considerăm relația pentru U_{ab} în care facem ca "a" și "b" să coincidă cu bornele generatorului:

$$U_{ab} = \int_a^b \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} \text{ și } a=b.$$

Deoarece vectorul câmp electric \vec{E}_e este conservativ, circulația acestuia pe o curbă închisă este zero:

$$\oint_C \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = 0$$

și deci în acest caz relația pentru U_{ab} devine:

$$U_{ab} = \mathcal{E} = \oint_C \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} \text{ și } a=b.$$

Cu alte cuvinte, *într-un circuit electric închis tensiunea electromotoare (t.e.m.) este egală cu circulația vectorului câmp electromotor, \vec{E}_{em} , calculată pe conturul închis C al circuitului.*

Capitolul 3

MAGNETISM

3.1. Noțiunea de câmp magnetic

3.1.1. Forțele de natură magnetică

a) Constatări experimentale.

Experimental s-a constatat că între doi conductori paraleli parcurși de un curent electric continuu se manifestă:

- forțe de atracție dacă curenții în conductori au același sens;
- forțe de respingere dacă curenții au sens opus.

b) Natura forțelor magnetice.

Să stabilim natura forțelor de interacție dintre conductorii parcurși de curenți electrici. Deoarece sarcina pozitivă totală a ionilor din nodurile rețelei cristaline a conductorului este egală în valoare absolută cu sarcina negativă a electronilor liberi, în ansamblu conductorii rămân neutri din punct de vedere electric, indiferent dacă electronii liberi participă sau nu la mișcare în curentul care circulă prin aceștia.

În concluzie, conductorii fiind neutri (chiar parcurși de curenți) câmpul electric generat de aceștia este egal cu zero. Deci, forța de natură electrică dintre ei este, de asemenea, nulă.

Definiție: Forța care se manifestă între conductorii parcurși de curent electric continuu se numește forță magnetică.

Denumirea provine de la faptul că asupra unui conductor parcurs de curent, aflat în vecinătatea unui magnet, acționează o forță de aceeași natură ca între doi curenți. Existența forței magnetice nu poate fi explicată pe baza mecanicii newtoniene. În mecanica newtoniană existența forțelor este însoțită de existența accelerațiilor, pe când

mișcarea în curent a electronilor este uniformă. Mecanica relativistă poate explica originea forței magnetice.

3.1.2. Câmpul magnetic. Caracteristici

Definiție: *Câmpul magnetic (c.m.) este o formă de existență a materiei care se manifestă prin acțiunea cu o forță de natură magnetică asupra sarcinilor electrice în mișcare, deci și asupra curenților electrice.*

Interacțiunile magnetice se transmit de la un punct din spațiu la altul cu viteză finită, din aproape în aproape, prin intermediul câmpului magnetic. Viteza de propagare a interacțiunii magnetice este egală cu viteza "c" a luminii în spațiu liber (în vid). Interacțiunea magnetică între două sarcini electrice în mișcare se realizează astfel:

- în prima etapă, sarcina în mișcare q_0 generează în jurul ei un câmp magnetic, care se propagă cu viteza luminii în spațiu;
- în a doua etapă, când câmpul magnetic s-a propagat până la locul sarcinii a doua, q , aflată în mișcare, prin sarcina q_0 acționează asupra sarcinii q o forță magnetică \vec{F}_m .

Într-o regiune din spațiu există un *câmp magnetic*, dacă introducând în acea regiune o spiră circulară de dimensiuni mici parcursă de un curent constant (buclă de curent) sau un ac magnetic suspendat (magnetometru), asupra lor se exercită forțe, care nu există în absența acestui câmp. Câmpul magnetic se caracterizează în fiecare punct din spațiu prin vectorul inducție magnetică \vec{B} și prin vectorul câmp magnetic \vec{H} (excitație magnetică) tangenți la linia de câmp magnetic ($\vec{B} = \mu \vec{H}$, pentru vid: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\mu = \mu_r \mu_0$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m. μ_0 reprezintă permeabilitatea magnetică a vidului).

3.1.3. Legea lui Lorentz. Legea forței electromagnetice (magnetice)

Din considerente experimentale rezultă că: forța cu care acționează o mulțime de sarcini punctuale q_i ce se deplasează cu vitezele \vec{v}_i , asupra unei alte sarcini punctuale q aflată în mișcare cu viteza \vec{v} are expresia următoare: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Această relație

constituie forma matematică a *legii lui Lorentz*. Primul termen $\vec{F}_e = q\vec{E}$ se numește forță electrică; vectorul \vec{E} descrie câmpul electric creat de sarcinile q în punctul în care se află sarcina q . Termenul al doilea $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ se numește *forță magnetică*. Vectorul inducție magnetică \vec{B} caracterizează câmpul magnetic în punctul în care se află sarcina q , produs de sarcinile q , aflate în mișcare.

Forța \vec{F}_m depinde de sarcina q și există numai dacă atât sarcinile q_i care acționează cât și sarcina care suferă acțiunea q sunt în mișcare; \vec{F}_m este deci o *forță electrodinamică*.

Caracteristicile forței magnetice \vec{F}_m :

Mărimea (modulul): $|\vec{F}_m| = qvB \sin \alpha$, unde α este unghiul dintre

vectorii \vec{v} și \vec{B} .

$$F_m = |\vec{v} \times \vec{B}| = \begin{cases} vB & , \text{daca } \vec{v} \perp \vec{B} \\ vB \sin \alpha & , \text{daca } \alpha = (\vec{v}, \vec{B}) \neq 0, \alpha \text{ este oarecare} \\ 0 & , \text{daca } \vec{v} \parallel \vec{B} \end{cases}$$

Direcția: \vec{F}_m este un vector perpendicular pe planul format de vectorii \vec{v} și \vec{B} .

Sensul: este dat de regula mâinii drepte. Dacă degetele mâinii drepte deschise sunt orientate în sensul vectorului \vec{B} , în așa fel încât degetul mare să fie orientat în direcția vectorului viteză \vec{v} a sarcinii, atunci vectorul forță \vec{F}_m iese din palmă, dacă $q > 0$, și din dosul palmei, dacă $q < 0$.

3.1.4. Liniile câmpului magnetic

Câmpul magnetic este un câmp vectorial: fiecărui punct din spațiul cu câmp magnetic i se poate atașa un vector \vec{B} , numit vectorul inducție magnetică.

Definiție: Linia din câmp cu proprietatea că are ca tangentă în orice punct al ei un vector câmp magnetic \vec{B} se numește linie de câmp magnetic.

Proprietățile liniei de câmp magnetic:

a) Printr-un punct din spațiu poate trece o singură linie de câmp, deci liniile de câmp magnetic (ca și cele de câmp electric) nu se pot intersecta.

b) Liniile câmpului magnetic sunt curbe închise (spre deosebire de liniile câmpului electrostatic).

c) Liniile de câmp sunt curbe orientate. Orientarea liniei este dată de orientarea polului nord al unui ac magnetic de busolă plasat în punctul respectiv.

d) Un fascicul de linii de câmp care se sprijină pe un contur închis formează un tub de câmp. În orice secțiune a tubului de câmp, numărul liniilor de câmp este constant (v. fig.3.1). Tuburile de câmp pot avea secțiune transversală variabilă. Acestea pot fi de două feluri: *câmp convergent* (v. fig.3.1.a), *câmp divergent* (v. fig.3.1.b). *Câmpul omogen* se caracterizează printr-o secțiune constantă a tubului de câmp (v. fig.3.1.c).

Consecință: Liniile câmpului magnetic omogen sunt paralele și echidistante.

Pornind de la expresia forței Lorentz se poate deduce unitatea de măsură în S.I. pentru inducția câmpului magnetic: *tesla*.

$$\langle B \rangle_{S.I.} = (1N \cdot 1s) / (1C \cdot 1m) = 1N / (1A \cdot 1m) = 1T.$$

O altă unitate de măsură frecvent utilizată este gauss (Gs). Între cele două unități există relația: $1T = 10^4 Gs$.

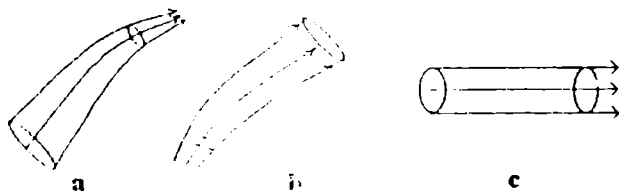


Fig.3.1

3.1.5. Fluxul câmpului magnetic

a) În cazul în care câmpul magnetic este *omogen*, iar suprafața S este normală la liniile de câmp fluxul câmpului magnetic este: $\Phi_B = BS$.

b) În cazul în care câmpul magnetic este *omogen*, iar normala \vec{n} la suprafața S face un unghi α cu liniile de câmp, fluxul câmpului magnetic este:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot S = B \cdot S \cdot \cos \alpha;$$

c) În cazul în care câmpul magnetic este *neomogen*, iar suprafața S nu este plană, *fluxul magnetic elementar*, $d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{s}$ corespunde unei suprafețe orientate mici $d\vec{s}$ cu proprietatea că în orice punct al acesteia $\vec{B} = \text{const.}$

$$\text{Fluxul total (integral): } \Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S B ds \cos \alpha .$$

d) Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafață închisă:

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oiint_S B ds \cos \alpha$$

Unitatea de măsură a fluxului magnetic în S.I. se numește *weber*, cu simbolul Wb :

$$1\text{Wb} = 1\text{T} \cdot 1\text{m}^2.$$

3.1.6. Legea lui Gauss pentru câmpul magnetic

a) Forma integrală a legii lui Gauss.

Câmpul magnetic, spre deosebire de câmpul electrostatic, se caracterizează prin linii de câmp închise. Cu alte cuvinte, orice linie de câmp magnetic, care intră într-o suprafață închisă S , trebuie să iasă din aceasta, ceea ce înseamnă că fluxul Φ_B al inducției câmpului magnetic prin suprafața S închisă este egal cu zero.

Fluxul câmpului magnetic printr-o suprafață închisă este nul.

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

Observație: Legea lui Gauss este satisfăcută și de câmpurile magnetice variabile în timp, (nu numai de cele statice) precum și de cele neomogene (nu numai de cele omogene). Această lege argumentează inexistența monopolilor magnetici.

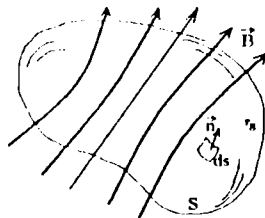


Fig. 3.2

b) Forma diferențială a legii lui Gauss.

Pentru a se obține legea lui Gauss sub această formă se aplică teorema Gauss-Ostrogradski : $\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_{V_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) \cdot d\tau$, care împreună

cu relația anterioară: $\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$, conduce la: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$. Aceasta

reprezintă *forma diferențială a legii lui Gauss*. Aici, ds este elementul de arie de pe suprafața S , iar $d\tau$ este elementul de volum din volumul τ_S delimitat de suprafața închisă S . Elementul de arie ds se consideră a avea orientare și se reliefează acest lucru printr-un versor orientat \vec{n} normal pe elementul de arie, astfel că: $d\vec{s} = \vec{n} \cdot ds$ (v. fig.3.2). Nabla, $\vec{\nabla}$, reprezintă un operator denumit *divergență* și care se mai notează cu *div*. Aplicat unui vector, cum este vectorul inducție magnetică \vec{B} , rezultatul este un scalar (un număr) fapt sugerat de modul de scriere analog produsului scalar: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \equiv \text{div} \vec{B} = \text{scalar}$.

c) Consecință a legii lui Gauss:

Lemă: Fie (S') o suprafață arbitrară ce se sprijină pe curba (C) care închide o suprafață (S). Atunci, în valoare absolută: $\Phi_{S'}^{\vec{B}} = \Phi_S^{\vec{B}}$.

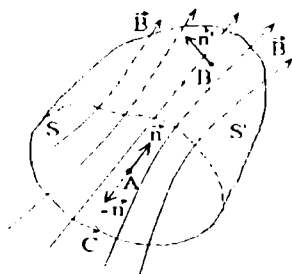


Fig.3.3

Demonstrație: Fie suprafața S arbitrară mărginită de curba închisă (C). Pe această curbă se sprijină o suprafață arbitrară S' , astfel încât reuniunea $S \cup S' = \Sigma$ reprezintă o suprafață închisă ce delimitează un volum τ_Σ . După regula burghiului drept, asociem suprafeței S versorul \vec{n} într-un punct oarecare A și îndreptat în sus.

Versorul \vec{n}' într-un punct oarecare B al suprafeței S' va fi orientat după regula burghiului drept spre exteriorul suprafeței S' .

Convenție referitoare la normala (versorul) dusă într-un punct arbitrar la o suprafață închisă: Normala într-un punct oarecare aparținând la o suprafață închisă este orientată întotdeauna spre regiunea pozitivă a suprafeței, adică spre exteriorul ei.

În cazul problemei de față, versorul dus în punctul A care respectă această convenție va fi orientat în sens opus lui \vec{n} , adică: $-\vec{n}$. Pentru a arăta că fluxul câmpului magnetic prin (S) este egal cu fluxul câmpului magnetic prin (S'), scriem teorema lui Gauss pentru magnetostatică, relativ la suprafața închisă Σ :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0, \quad d\vec{s} \in \Sigma.$$

Deoarece $\Sigma = S \cup S'$, rezultă: $\oiint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}' = 0$, unde

$$d\vec{s} \in S, \quad d\vec{s}' \in S', \quad d\vec{s} = ds \cdot (-\vec{n}). \quad \text{Prin urmare: } -\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{s}' = 0.$$

Cu alte cuvinte: $\Phi_S^{\vec{B}} = \Phi_{S'}^{\vec{B}}$, adică ceea ce trebuia demonstrat.

3.2. Acțiunea câmpului magnetic asupra curentului electric

3.2.1. Vectorul element de curent

Fie o porțiune de lungime dl dintr-un conductor subțire, atât de mică încât sarcina totală dQ a purtătorilor de curent din interiorul lui poate fi considerată punctiformă.

Definiție: Dacă intensitatea curentului electric prin conductor este I , atunci elementul de curent se definește prin vectorul $I d\vec{l}$, având modulul egal cu produsul dintre intensitatea curentului I și lungimea dl a porțiunii de conductor. Sensul vectorului este, prin convenție, același cu sensul curentului I în conductor.

3.2.2. Legea lui Laplace

a) Forma diferențială a forței magnetice (legii lui Laplace) ce acționează asupra unui element de curent.

Fie un conductor parcurs de un curent I , pe care definim un element de curent $I d\vec{l}$. Presupunem că conductorul se află într-un câmp magnetic omogen de inducție \vec{B} (v. fig.3.4).

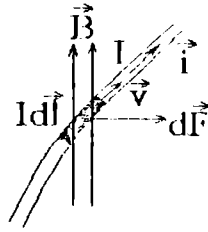


Fig.3.4

Expresia forței elementare $d\vec{F}$ cu care acționează câmpul magnetic omogen de inducție \vec{B} asupra sarcinii dQ conținută în elementul de curent $I d\vec{l}$, în conformitate cu relația lui Lorentz este:

$$d\vec{F} = dQ \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

unde \vec{v} reprezintă viteza în curent a purtătorilor de sarcină din conductor. Dacă aria secțiunii transversale a conductorului este S , sarcina unui purtător de curent q , iar concentrația lor este n , atunci sarcina totală din elementul de curent este $dQ = n \cdot qS \cdot dl$. Se poate scrie succesiv:

$$d\vec{F} = n \cdot q \cdot S \cdot dl \cdot (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Deoarece viteza \vec{v} a electronilor este în lungul conductorului deci de-a lungul elementului de lungime dl , putem scrie

$$dl \cdot \vec{v} = dl \cdot (v \cdot \vec{i}) = v \cdot (dl \cdot \vec{i}) = v \cdot d\vec{l} \text{ unde } \vec{i} \text{ reprezintă versorul lui } d\vec{l}.$$

$$d\vec{F} = dQ \cdot (\vec{v} \times \vec{B}), \quad I = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow dQ = I dt; \quad d\vec{F} = I dt (\vec{v} \times \vec{B});$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{l}}{dt}; \quad d\vec{l} = \vec{v} dt; \quad d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$$

În concluzie, putem formula *legea (forța) lui Laplace sub forma diferențială*:

Legea lui Laplace: *Asupra elementului de curent $I d\vec{l}$ aflat în câmpul magnetic omogen \vec{B} , acționează forța elementară $d\vec{F} = I \cdot (d\vec{l} \times \vec{B})$. Aceasta este dirijată perpendicular pe planul format de vectorii $I d\vec{l}$ și \vec{B} , iar sensul forței $d\vec{F}$ este același cu al produsului vectorial $d\vec{l} \times \vec{B}$.*

Cazuri particulare:

Dacă elementul de curent $d\vec{l}$ este paralel cu vectorul \vec{B} , atunci

$$|d\vec{l} \times \vec{B}| = dl \cdot B \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ și, deci, forța magnetică } d\vec{F} \text{ este zero.}$$

Dacă $d\vec{l}$ este perpendicular pe \vec{B} , atunci:

$$|d\vec{l} \times \vec{B}| = dl \cdot B = \max \text{ și deci forța } dF \text{ este maximă, } dF = I \cdot dl \cdot B.$$

b) Forma integrală a forței magnetice (legii lui Laplace) ce acționează asupra unui curent liniar finit de lungime L

Fie un conductor rectiliniu de lungime L parcurs de un curent electric de intensitate $I = \text{const.}$ și care se află într-un câmp magnetic omogen de inducție magnetică $\vec{B} = \vec{\text{const.}}$. Pentru a obține expresia forței magnetice ce acționează asupra întregului conductor trebuie efectuată suma vectorială (integrala) a tuturor forțelor elementare:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B})$$

$$\vec{F} = \int_0^L d\vec{F} = I \int_0^L d\vec{l} \times \vec{B}.$$

În continuare să scriem vectorul $d\vec{l} \times \vec{B}$ prin versorul său \vec{n} , în care α este unghiul dintre vectorul \vec{B} și conductorul aflat în câmp magnetic:

$$d\vec{l} \times \vec{B} = |d\vec{l} \times \vec{B}| \cdot \vec{n} = dl \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot \vec{n}$$

$$\text{Rezultă: } \vec{F} = I \cdot B \cdot \sin \alpha \cdot \vec{n} \int_0^L dl = I \cdot B \cdot L \cdot \sin \alpha \cdot \vec{n} = I \cdot (\vec{L} \times \vec{B}).$$

$\vec{F} = I(\vec{L} \times \vec{B})$ reprezintă *forma integrală a legii (forței) lui Laplace* pentru un curent liniar de lungime L (legea lui Laplace).

Modulul forței Laplace: $F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin \alpha.$

Direcția forței Laplace este perpendiculara pe planul format de vectorii \vec{L} și \vec{B} .

Sensul este dat de regula burghiului drept (v. fig.3.5.a).

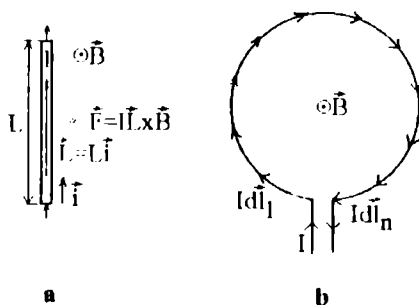


Fig.3.5

c) Aplicație la legea lui Laplace: Forța magnetică Laplace ce acționează asupra unui curent închis aflat în câmp magnetic omogen de inducție constantă

Împărțim conductorul închis în elemente de curent $Id\vec{l}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ asupra cărora vor acționa forțele magnetice elementare $d\vec{F}_i$ a căror rezultantă vectorială este:

$$\vec{F} = d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 + \dots + d\vec{F}_n = Id\vec{l}_1 \times \vec{B} + Id\vec{l}_2 \times \vec{B} + \dots + Id\vec{l}_n \times \vec{B}$$

Deci:

$$\vec{F} = I(d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + \dots + d\vec{l}_n) \times \vec{B}.$$

Deoarece suma $d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + \dots + d\vec{l}_n = 0$ (Rezultanta a n vectori care formează o linie poligonală închisă este zero), rezultă $\vec{F} = 0$ (v. fig3.5.b).

Concluzie: Forța magnetică ce acționează asupra unui circuit închis aflat în câmp magnetic omogen este nulă.

3.2.3. Câmpul magnetic al unei sarcini electrice punctiforme aflate în mișcare

Fie un punct P , aflat la momentul t la distanța instantanee $\vec{r}(t)$ de sarcina q , aflată în mișcare cu viteza $\vec{v}(t)$, care generează câmpul magnetic $\vec{B}(t)$ (v. fig.3.6).

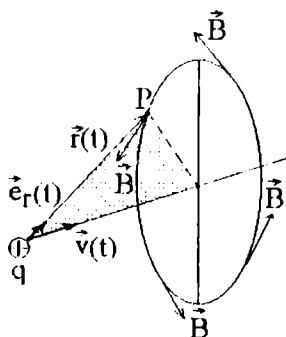


Fig.3.6

Fie $\vec{e}_r(t)$ versorul vectorului de poziție $\vec{r}(t)$, dus de la sarcina q la punctul P . Expresia vectorului inducție magnetică $\vec{B}(t)$ ce caracterizează câmpul magnetic al sarcinii punctiforme q , în punctul P , are forma următoare (fără demonstrație):

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{[r(t)]^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot q \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{[r(t)]^3}, (*)$$

unde $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$.

Concluzie: Inducția câmpului magnetic \vec{B} generat de o sarcină punctiformă q , mobilă într-un punct oarecare P este perpendicular pe planul format de vectorii \vec{v} și \vec{e}_r și este orientat în sensul vectorului produs vectorial $\vec{v} \times \vec{e}_r$.

3.2.4. Legea lui Biot-Savart-Laplace

a) Forma diferențială a legii lui Biot-Savart-Laplace

Această lege exprimă inducția câmpului magnetic generat de un element de curent. Fie un conductor de o formă oarecare parcurs de un curent electric de intensitate I . Fie elementul de curent $I d\vec{l}$ aparținând conductorului și P un punct arbitrar din spațiu. Dacă $r(t)$ este distanța la un moment dat de la elementul de curent la punctul P și $\vec{e}_r(t)$ este

versorul vectorului de poziție $\vec{r}(t)$, atunci vectorul inducție a câmpului magnetic elementar, $d\vec{B}$, generat de elementul de curent $I d\vec{l}$ în punctul P are expresia următoare:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(Legea Biot-Savart-Laplace)

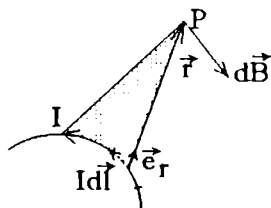


Fig.3.7

Demonstrație: Din relația (*) de mai sus rezultă:

$$d\vec{B} = k \cdot dq \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \cdot dt \frac{\vec{v} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = k \cdot I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3},$$

unde dq este sarcina electrică cuprinsă în elementul dl , iar $k = \frac{\mu_0}{4\pi}$.

Această lege furnizează valoarea și orientarea vectorului $d\vec{B}$ (inducția câmpului magnetic elementar) generat de elementul de curent $I d\vec{l}$, într-un punct P situat la distanța $r = r(t)$ de elementul de curent. Acesta este perpendicular pe planul format de vectorii $d\vec{l}$ și versorul \vec{e}_r , al vectorului de poziție corespunzător punctului P. Sensul lui $d\vec{B}$ este dat de regula burghiului.

b) Forma integrală a legii lui Biot-Savart-Laplace

Fie un conductor oarecare de lungime finită L, parcurs de un curent electric de intensitate I. Câmpul magnetic de inducție \vec{B} creat de conductor în punctul P arbitrar din spațiu se obține prin integrarea relației anterioare. Prin urmare, forma integrală a legii Biot-Savart-Laplace are următoarea expresie:

$$\vec{B} = \int_0^L d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Integrala se extinde asupra întregii lungimi, L , a conductorului. Orientarea lui \vec{B} în punctul P depinde de forma conductorului și coincide cu orientarea rezultantei tuturor vectorilor elementari $d\vec{B}$ generați de elementele de curent din care este constituit conductorul.

c) Aplicații ale legii lui Biot-Savart-Laplace.

◆ Inducția magnetică produsă de o spiră circulară de rază R în centrul acesteia.

Fie o spiră conductoare de rază R parcursă de un curent electric de intensitate constantă, I .

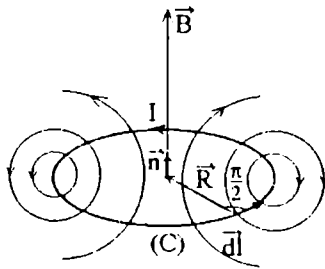


Fig.3.8

Aplicăm legea lui Biot-Savart-Laplace sub formă integrală:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{l} \times \vec{R}}{R^3}$$

$d\vec{l} \times \vec{R} = |d\vec{l} \times \vec{R}| \cdot \vec{n}$, unde \vec{n} este versorul normal la planul spirei,

$$|d\vec{l} \times \vec{R}| = dl \cdot R \cdot \sin \frac{\pi}{2} = dl \cdot R, \text{ deci:}$$

$$\vec{B} = \vec{n} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot \oint_C dl = \vec{n} \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \vec{n} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Prin urmare, inducția câmpului magnetic în centrul spirei de rază R este direct proporțională cu intensitatea curentului prin spiră și invers proporțională cu raza acesteia. Sensul câmpului \vec{B} este dat de regula burghiului drept, iar direcția este dată de normala la planul spirei.

- ◆ **Inducția magnetică produsă de un fir liniar, infinit de lung, parcurs de un curent I constant, într-un punct exterior lui.**

Fie un conductor rectiliniu, infinit de lung, parcurs de un curent electric constant de intensitate I și un punct P situat la distanța b față de conductor (v. fig.3.9). Să calculăm inducția magnetică în punctul P .

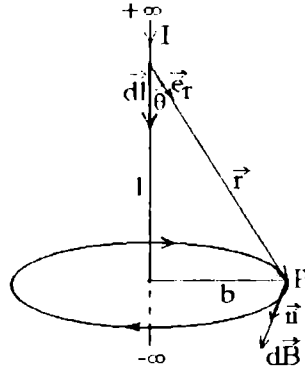


Fig.3.9

Utilizând formula Biot-Savart-Laplace rezultă următoarele:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (**), \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{|d\vec{l} \times \vec{e}_r|}{r^2} \cdot \vec{n},$$

unde $d\vec{l} \times \vec{e}_r = |d\vec{l} \times \vec{e}_r| \cdot \vec{n}$, iar \vec{n} este versorul vectorului $d\vec{l} \times \vec{e}_r$.

Deoarece $|d\vec{l} \times \vec{e}_r| = dl \cdot \sin\theta$ și $\lg\theta = b/l$, $l = b/\lg\theta = b(\cos\theta)/(\sin\theta)$

rezultă: $dl = -b(d\theta)/(\sin^2\theta)$. Pe de altă parte, din figura 3.9 rezultă că $r^2 = l^2 + b^2 = b^2/\sin^2\theta$. Deci din (**):

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \vec{n} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi b} \cdot \vec{n} \cdot \cos\theta \Big|_0^\pi = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \vec{n}$$

(la "+∞" unghiul $\theta = \pi$, iar la "-∞" unghiul $\theta = 0$), deci: $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \cdot \vec{n}$.

Modulul inducției câmpului magnetic este, prin urmare, $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}$.

direcția este dată de tangenta în punctul P la linia de câmp magnetic care trece prin P , iar sensul se stabilește cu regula burghiului drept.

Concluzie: Inducția câmpului magnetic al curentului liniar, infinit de lung, într-un punct din spațiu este direct proporțională cu intensitatea curentului electric și invers proporțională cu distanța de la axa conductorului la punctul considerat.

Liniile câmpului magnetic al curentului rectiliniu, infinit de lung, sunt cercuri concentrice în plane perpendiculare la conductor și centrate pe axa conductorului.

Sensul liniei de câmp este dat de regula burghiului drept: se rotește burghiul astfel încât acesta să avanseze în sensul curentului din conductor. Sensul de rotație al mânerului burghiului dă sensul liniei de câmp magnetic.

3.2.5. Legea lui Ampère din electromagnetism

a) Prima formă integrală a legii lui Ampère.

Legea lui Ampère reprezintă una din legile fundamentale ale electromagnetismului.

Fie un conductor infinit, rectiliniu, parcurs de un curent de intensitate I . Acest curent creează în jurul conductorului un câmp magnetic ale cărui linii sunt cercuri concentrice și este caracterizat în fiecare punct de vectorul inducție magnetică \vec{B} tangent la linia de câmp. Legea lui Ampère are următoarea formă matematică:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 0, & \text{daca conturul } C \text{ nu incercuiește curentul } I \\ \mu_0 I, & \text{daca conturul } C \text{ incercuiește curentul } I \end{cases} \quad (***)$$

unde \mathcal{E} (tensiunea magnetomotoare) reprezintă circulația vectorului inducție magnetică a unui câmp staționar \vec{B} , pe un contur C închis din spațiu.

Demonstrație:

α) Conturul de integrare C nu încercuiește curentul I .

Fie un contur de integrare particular $abcd$ închis, în câmpul magnetic produs de curentul electric I , care intră în pagină normal pe aceasta (v. fig.3.10). Descompunem, în continuare, integrala pe conturul închis C în patru integrale:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\hat{a}\hat{b}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 + \int_{\hat{b}\hat{c}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 + \int_{\hat{c}\hat{d}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_3 + \int_{\hat{d}\hat{a}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_4$$

Deoarece pe punctele segmentelor ab și cd ale conturului este îndeplinită condiția $\vec{B} \perp d\vec{l}_1$, și $\vec{B} \perp d\vec{l}_3$, rezultă $\vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = B \cdot dl_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$, respectiv $\vec{B} \cdot d\vec{l}_3 = B \cdot dl_3 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$ (v. fig.3.10).

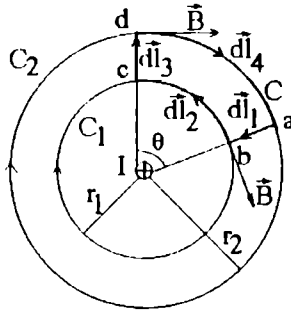


Fig.3.10

Deci, $\int_{\widehat{ab}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_1 = \int_{\widehat{cd}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_3 = 0$. Pe arcul de cerc bc vectorii \vec{B} și $d\vec{l}_2$ sunt antiparaleli, $\vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = B \cdot dl_2 \cos \pi = -B \cdot dl_2$, iar $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$ (a se vedea punctul (c) din subcapitolul 3.24).

$$\text{Deci, } \int_{\widehat{bc}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_2 = - \int_{\widehat{bc}} B \cdot dl_2 = -B \int_{\widehat{bc}} dl_2 = -B l_2 = -B r_1 \theta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \theta,$$

unde l_2 reprezintă lungimea arcului bc , iar θ unghiul la centru.

Pe arcul de cerc da vectorii \vec{B} și $d\vec{l}_4$ sunt paraleli,

$$\vec{B} \cdot d\vec{l}_4 = B dl_4 \cos 0 = B dl_4, \text{ iar } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

$$\text{Deci, } \int_{\widehat{da}} \vec{B} \cdot d\vec{l}_4 = \int_{\widehat{da}} B \cdot dl_4 = B \int_{\widehat{da}} dl_4 = B \cdot l_4 = B \cdot r_2 \cdot \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \theta, \text{ unde } l_4$$

reprezintă lungimea arcului de cerc da . Rezultă că:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0.$$

β) Conturul de integrare încercuiește curentul I.

Cel mai simplu contur care încercuiește curentul este un cerc de rază $r_2 = r$ (o linie de câmp) C_2 (v. fig.3.10). Deoarece \vec{B} este tangent în orice punct al cercului putem scrie:

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{C_2} B \cdot dl \cdot \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \oint_{C_2} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

adică ceea ce trebuia demonstrat.

Observație:

1) Deoarece orice curbă din planul normal la curent poate fi descompusă într-o înfinitate de *drumuri radiale* și de *arce de cerc*, relația (***) este adevărată *indiferent de forma conturului* (chiar dacă conturul este o curbă care nu este plană).

2) Dacă conturul de integrare C încercuiește mai mulți curenți de direcție și sens diferite, atunci în relația (***) intră *suma algebrică* a acestor curenți $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, iar legea lui Ampère se enunță astfel:

Circulația vectorului inducției magnetice pe un contur închis este egală cu produsul dintre constanta universală μ_0 și suma algebrică a curenților electrici încercuiți de conturul de integrare C .

$$\mathcal{B} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k$$

și $\mathcal{B} = 0$

dacă conturul C nu încercuiește curenții.

Constanta universală μ_0 se numește *permeabilitatea magnetică a vidului* și are valoarea următoare: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m.

b) A doua formă integrală a legii lui Ampère.

Dacă conductorul este masiv și printr-o suprafață S arbitrară din acesta circulă un curent variabil I a cărui intensitate este dată în funcție de densitatea de curent $\vec{j} = j(x, y, z)$, $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{s}$, atunci rezultă *legea lui*

Ampère sub forma integrală:

Circulația vectorului inducție magnetică \vec{B} pe curba închisă C , care înconjoară curentul I , este egală cu produsul dintre permeabilitatea magnetică a vidului, μ_0 , și fluxul vectorului densitate de curent \vec{j} calculat pe o suprafață S_c arbitrară care se sprijină pe conturul de integrare C .

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_c} \vec{j} \cdot d\vec{s}$$

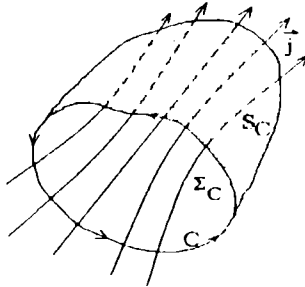


Fig. 3.11

Suprafața S_c , străbătută de distribuția continuă de curent de densitate $\vec{j}(x, y, z)$, pe care se calculează integrala din membrul drept, are o formă arbitrară și se sprijină pe conturul închis de integrare (curba C). Această suprafață este diferită de cea mărginită (subîntinsă) de curba C și notată în figura 3.11 cu Σ_c .

c) Forma diferențială a legii lui Ampère.

Pentru a obține legea lui Ampère sub formă diferențială sau locală se va aplica teorema lui Stokes, $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s}$, în relația anterioară (a doua formă integrală a legii lui Ampère):

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{S_c} \vec{j} \cdot d\vec{s}, \text{ de unde:}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j},$$

unde *nabla*, $\vec{\nabla}$, reprezintă operatorul *rotor* care se aplică unei mărimi fizice vectoriale reprezentată aici prin vectorul inducție magnetică \vec{B} și care se mai notează cu *rot*. Aplicat unui vector, operatorul rotor este tot un vector, fapt sugerat de modul de scriere analog produsului vectorial:

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{vector}$. S_C reprezintă suprafața S pe care se calculează integrala anterioară și care se "sprijină" pe conturul închis de formă oarecare C .

Din cele două relații rezultă *legea lui Ampère sub forma diferențială*:

Rotorul vectorului inducție magnetică este proporțional cu vectorul densitatea de curent \vec{j} , având aceeași orientare cu aceasta: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Aceasta este cea mai simplă și cea mai generală expresie care leagă inducția câmpului magnetic (\vec{B}) de purtătorii de sarcină în mișcare (\vec{j}), care constituie sursele lui.

3.3. Fenomene electromagnetice variabile în timp

3.3.1. Legea inducției lui Faraday

a) Constatări experimentale.

Se apropie polul nord al unui magnet de o spiră conductoare închisă. În circuit apare un curent indus I_i , pus în evidență de un galvanometru G , inclus în circuit. Vectorii inducție magnetică al magnetului și al curentului indus sunt ilustrate prin linii de câmp, iar sensul curentului indus printr-o săgeată. Curentul I_i dispare când magnetul nu se mai deplasează.

Se îndepărtează de spiră polul nord al magnetului. În spiră apare un curent electric indus I_i de sens opus celui de la experimentul anterior. Acul galvanometrului va devia în direcție opusă.

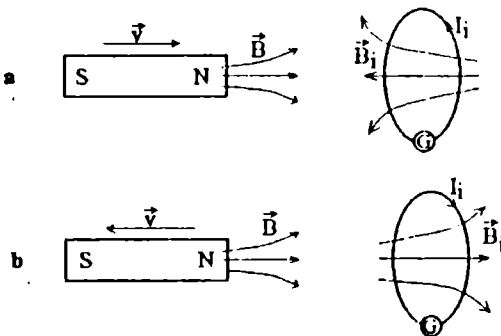


Fig. 3.12

Experiențelor anterioare le este caracteristic faptul că are loc o variație a fluxului câmpului magnetic ce străbate suprafața mărginită de spiră. În primul experiment, fluxul crește, iar în al doilea, fluxul scade.

Concluzia lui Faraday:

Într-un circuit conductor închis se induce un curent ori de câte ori variază fluxul câmpului magnetic prin suprafața mărginită de conturul circuitului.

Definiția 1: *Curentul electric generat (excitat) de câmpul magnetic, într-un circuit închis fără sursă, se numește curent de inducție, iar fenomenul de producere a curentului electric cu ajutorul câmpului magnetic se numește inducție electromagnetică.*

Definiția 2: *Tensiunea electromotoare (t.e.m.), \mathcal{E} , care determină existența curentului electric indus I , se numește tensiune electromotoare indusă.*

b) Legea inducției a lui Faraday pentru un circuit.

α) Prima formă diferențială a legii lui Faraday.

Enunțul legii inducției lui Faraday este următorul:

Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variație a fluxului câmpului magnetic, luată cu semn schimbat

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt} = -\dot{\Phi}(t)$$

Această lege este universal valabilă. O altă formulare posibilă poate fi și următoarea:

Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu derivata fluxului câmpului magnetic în raport cu timpul luată cu semn schimbat.

Demonstrație: În cele ce urmează este prezentată demonstrația legii lui Faraday sub formă diferențială.

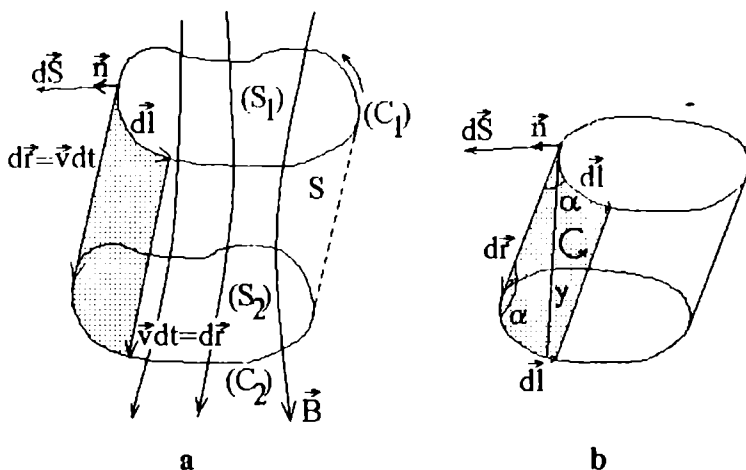


Fig. 3.13

Presupunem un câmp magnetic \vec{B} neomogen și constant în timp (adică, sursele care îl generează sunt staționare). Considerăm că circuitul C de formă oarecare din figura 3.13.a se deplasează din poziția (C_1) în poziția (C_2) în intervalul de timp dt . Un element oarecare $d\vec{l}$ din conturul (C_1) se va deplasa în intervalul de timp dt cu viteza \vec{v} , parcurgând distanța $d\vec{r}$. Fie (S_1) suprafața mărginită de conturul (C_1) , iar (S_2) suprafața mărginită de conturul (C_2) .

Fluxul inducției câmpului magnetic prin suprafața (S_1) , la momentul de timp t , este:

$$\Phi(t) = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s}, \quad ds \in S_1.$$

În virtutea lemei demonstrată în subcapitolul 3.1.6.c putem scrie următoarele (v. fig.3.13.a):

$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_{S \cup S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

unde $\Sigma = S_1 \cup S$, suprafața Σ sprijinindu-se pe S_2 . Deci, putem scrie:

$$\Phi(t + dt) \equiv \iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \Phi(t) + \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

unde $\Phi(t+dt) - \Phi(t) \equiv d\Phi$ reprezintă *variația elementară* a fluxului magnetic în timpul dt . Elementul de arie $d\vec{s} \in S$. Deoarece (v.fig.3.13.b):

$$d\vec{s} = ds \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot d\vec{l} \cdot d\vec{r} \cdot \sin \alpha = \vec{n} \cdot d\vec{l} \cdot \vec{v} \cdot dt \cdot \sin \alpha,$$

$$d\vec{s} \equiv \vec{n} \left| \vec{v} \cdot dt \times d\vec{l} \right| = \vec{n} \left| \vec{v} \times d\vec{l} \right| dt = (\vec{v} \times d\vec{l}) dt,$$

relația scrisă anterior devine:

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = dt \oint_{C_1} (\vec{v} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B} = -dt \oint_{C_1} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -dt \oint_{C_1} \vec{E}_i \cdot d\vec{l},$$

unde s-a folosit în ultima egalitate următoarea proprietate a produsului mixt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}).$$

Datorită deplasării elementului de circuit $d\vec{l}$ în câmp magnetic de inducție \vec{B} cu viteza \vec{v} , asupra sarcinilor electrice conținute în acest element de circuit acționează o forță Lorentz $\vec{F}_L = e \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$.

Având în vedere că tensiunea electromotoare (t.e.m.) este definită prin circulația forței ce acționează asupra unității de sarcină

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{F}_L}{|e|} = -\vec{v} \times \vec{B}, \text{ unde } \vec{E}_i \text{ reprezintă câmpul electric indus în circuit,}$$

rezultă:

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -dt \oint_{C_1} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -dt \cdot \mathcal{E}_i,$$

unde \mathcal{E}_i este t.e.m. indusă în circuitul (C_1): $\mathcal{E}_i = \oint_{C_1} \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$, \vec{E}_i este câmpul

electric indus. Prin urmare: $d\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -dt \cdot \mathcal{E}_i$.

În consecință:

$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Am demonstrat astfel că tensiunea indusă într-un circuit aflat în mișcare este egală cu viteza de variație a fluxului câmpului magnetic printr-o suprafață mărginită de circuitul considerat. Acest enunț constituie *legea inducției a lui Faraday* sub formă diferențială sau locală. Legea lui Lenz explică existența semnului minus din legea lui Faraday.

Legea lui Lenz: Sensul curentului electric indus, I_i , este în așa fel, încât inducția câmpului magnetic propriu, \vec{B}_i , tinde să anihileze variația fluxului magnetic care produce curentul I_i .

O altă formulare posibilă ar putea fi și următoarea:

Curentul electric indus are sensul în care câmpul magnetic generat de el se opune variației câmpului magnetic inductor.

β) Forma integrală a legii lui Faraday.

Fie un circuit închis format dintr-o spirală conductoare, care se află în repaus și de care se apropie (sau se depărtează) polul nord al unui magnet permanent. În spirală apare o mișcare ordonată a electronilor (curent indus), având drept cauză un câmp electric indus \vec{E}_i , a cărui apariție este determinată în virtutea legii lui Faraday de variația fluxului câmpului magnetic.

Tensiunea electromotoare (t.e.m.) indusă \mathcal{E}_i în circuit este:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Pe de altă parte, expresia t.e.m. de-a lungul circuitului închis C are expresia: $\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$ = circulația vectorului câmp electric indus \vec{E}_i de-a

lungul spirei conductoare. Din punct de vedere fizic \mathcal{E}_i reprezintă lucrul efectuat de câmpul electric indus \vec{E}_i pentru deplasarea unității de sarcină pozitivă de-a lungul circuitului dat C.

Deoarece $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$, rezultă:

$$\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B}(t) \cdot d\vec{s} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

unde S reprezintă suprafața spirei conductoare, iar C este curba care închide această suprafață; S este fixă deoarece spira este în repaus prin ipoteză. S-a utilizat aici următoarea teoremă din analiza matematică:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x, t) dx = \frac{d\beta}{dt} f[\beta(t), t] - \frac{d\alpha}{dt} f[\alpha(t), t] + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

Dacă limitele de integrare nu depind de variabila timp t, (ca în cazul nostru) atunci:

$$\frac{d\beta}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Prin urmare, în acest caz se poate scrie:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, t) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial f}{\partial t} dx$$

Acest lucru a fost utilizat pentru a scrie forma integrală a legii lui Faraday în cazul în care se consideră S fixă.

Dacă $\vec{B} = \vec{B}(t; x, y, z)$ atunci:
$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Forma integrală a legii lui Faraday este:

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}.$$

γ) A doua formă diferențială a legii lui Faraday.

Forma diferențială a legii lui Faraday se poate scrie utilizând teorema lui Stokes:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

în felul următor:

$$\mathcal{E}_i \equiv \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \text{rot} \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = - \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ rezultă } \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Observație: Dacă \vec{B} nu este funcție numai de timp, t, ci și de

poziție, (de coordonatele x, y, z) atunci
$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

c) Câmp electric neconservativ. Caracteristici.

Definiție: Vectorul câmp electric, \vec{E}_i , asociat cu variația în timp a vectorului câmp magnetic, $\vec{B}(t)$, nu este conservativ deoarece circulația sa pe un contur închis nu este nulă,

$$\oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \neq 0.$$

Un astfel de vector electric, \vec{E}_i , se numește *indus, imprimat sau electromotor*.

Observație: În ecuațiile lui Maxwell care vor urma în capitolul 4 câmpul electric neconservativ \vec{E}_i va fi notat fără indicele "i" fără ca să existe pericolul confuziei dintre acesta și câmpul electric de natură electrostatică, notat la fel.

Caracteristici:

- Câmpul magnetic variabil în timp $\vec{B}(t)$ generează câmpul electric neconservativ \vec{E}_i , adică: $\mathcal{E}_i = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \neq 0$.

- Pentru apariția câmpului electric indus \vec{E}_i , la variația în timp a câmpului magnetic $\vec{B}(t)$ nu este necesară prezența circuitului exterior. Câmpul electric \vec{E}_i apare și în vid.

- Apariția curentului indus I_i presupune, spre deosebire de curentul de deplasare, existența unui mediu conductor, cu purtători de sarcină capabili să se deplaseze ordonat sub influența câmpului electric indus \vec{E}_i . În esență, t.e.m. (\mathcal{E}_i) indusă într-un circuit este rezultatul separării în conductori a sarcinilor de semn opus sub influența câmpului electric indus \vec{E}_i .

- Liniile câmpului electric indus \vec{E}_i neconservativ sunt curbe închise. Dacă, de exemplu, câmpul magnetic omogen $\vec{B}(t)$ crește ($\dot{B}(t) > 0$) atunci liniile de câmp electric sunt cercuri concentrice în plane normale la liniile câmpului magnetic, care înconjoară liniile acestuia (v. fig.3.14).

- Sensul liniilor câmpului indus este dat de legea (regula) lui Lenz.

- În figurile 3.14.a și b în care $\vec{B}(t)$ descrește, respectiv, crește, este prezentat sensul liniilor de câmp electric indus corespunzător.

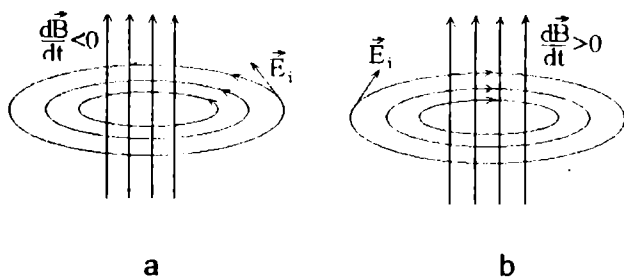


Fig.3.14

3.3.2. Inducția magnetoelectrică

a) **Încărcarea unui condensator. Circuit RC în curent continuu.**

Experiment:

Să urmărim modul în care se încarcă condensatorul C între plăcile căruia este vid prin rezistorul R , când în circuit se află sursa de tensiune electromotoare, \mathcal{E} . Dacă comutatorul K este închis, tensiunea electromotoare a sursei creează în circuit un curent electric $i(t)$ variabil, placa superioară a condensatorului încărcându-se pozitiv, iar placa inferioară, negativ (v. fig.3.15).

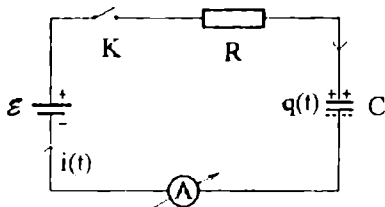


Fig.3.15

Experiența arată că încărcarea condensatorului nu are loc instantaneu ci într-un timp finit, intensitatea curentului electric $i(t)$ fiind maximă la momentul inițial $t = 0$, $i_{(t=0)} = i(0) = I_0$, (momentul când se închide circuitul) și scade exponențial apoi către zero după un timp suficient de lung (matematic, $t \rightarrow \infty$).

Expresia matematică a curentului $i(t)$ se află astfel: notând cu $u_c = q/C$ diferența de potențial la un moment dat t , de la bornele condensatorului C , legea a 2-a a lui Kirchhoff conduce la ecuația

$\mathcal{E} - u_c - iR = 0$ sau $\mathcal{E} = iR + q/C$. Mărimile \mathcal{E} , R și C sunt constante, iar i și q sunt mărimi variabile în timp. La momentul $t=0$, la închiderea comutatorului, condensatorul este considerat complet descărcat, adică $u_c(0) = 0$ și singura tensiune în circuit este tensiunea electromotoare \mathcal{E} a sursei. Deci, intensitatea inițială a curentului, $i(0) = I_0$ este dată de ecuația $\mathcal{E} = u_c(0) + i(0) \cdot R = i(0) \cdot R = I_0 R$, de unde rezultă $I_0 = \mathcal{E}/R$. Derivând ecuația $\mathcal{E} = iR + q/C$ în raport cu timpul t și înlocuind $I = dq/dt$, rezultă:

$$\frac{di}{dt} R = -\frac{i}{C} \text{ sau } \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}; (u_{c(t=0)} = u_c(0) = 0).$$

Integrând acum această ecuație între momentele $t = 0$, când $I = I_0$ și $t > 0$, când intensitatea curentului electric este I , rezultă:

$$\int_{I_0}^I \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \Rightarrow \ln(i) - \ln(I_0) = -t/RC,$$

de unde:

$$i(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Concluzie:

La închiderea unui circuit de curent continuu care conține un rezistor R (de rezistență electrică egală cu R) și un condensator C (de capacitate electrică egală cu C), intensitatea curentului este maximă la momentul inițial $t = 0$ și scade exponențial către zero când $t \rightarrow \infty$.

Să calculăm în continuare variația în timp a sarcinii electrice pe condensator. Pentru un interval de timp suficient de mare $i(t)$ scade exponențial la zero, $i(t \rightarrow \infty) = 0$, iar sarcina de pe armătura condensatorului capătă o valoare maximă Q : $q(t \rightarrow \infty) = Q$. Aceste două condiții permit scrierea relației $\mathcal{E} = Q/C$. Într-adevăr, la un moment de timp, t , oarecare putem scrie: $\mathcal{E} = i(t) \cdot R + q(t)/C$. Pentru $t \rightarrow \infty$ această relație devine: $\mathcal{E} = i(t \rightarrow \infty) \cdot R + q(t \rightarrow \infty)/C$ sau $\mathcal{E} = Q/C$. De unde $Q = \mathcal{E}C$. Cele două relații obținute $\mathcal{E} = I_0 \cdot R$ și $Q = \mathcal{E}C$ vor fi utilizate în continuare la calculul variației în timp a sarcinii electrice pe condensator.

Deoarece, în conformitate cu cele amintite mai sus, $I_0 = \mathcal{E}/R$ și $Q = \mathcal{E}C$, după înlocuirea relației $i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ în $\mathcal{E} = l(t) \cdot R + q(t)/C$

se obține expresia următoare:
$$q(t) = Q \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right].$$

b) Expresia Intensității câmpului electric între armăturile unui condensator încărcat.

În continuare, utilizăm legea lui Gauss, $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$, pentru a

deduce expresia intensității câmpului electric, \vec{E} , dintre plăcile unui condensator (unde este vid) încărcat electric și calculăm separat produsul:

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = (E \cdot \vec{n}) \cdot (ds \cdot \vec{n}) = E \cdot ds, \quad E = \text{constant.}$$

Aplicând teorema lui Gauss de mai sus, rezultă succesiv:

$$\oiint_{\Sigma} E \cdot ds = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \oiint_{\Sigma} ds = E \cdot S = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{S\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \text{ unde: } \sigma = \frac{q}{S}.$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

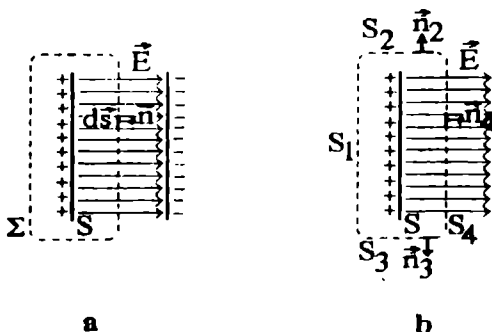


Fig.3.16

Observație: Urmărind figura 3.16 rezultă:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

unde:

$$\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4.$$

Câmpul electric care traversează S_1 este nul, iar $\vec{E} \perp \vec{S}_2$, $\vec{E} \perp \vec{S}_3$,

$\vec{E} \parallel \vec{S}_4$. Prin urmare: $\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 + 0 + 0 + E \iint_{S_4} ds = ES_4 = ES$, unde $S_4 = S$.

c) Curentul de deplasare.

Întrebare: Cum este posibil trecerea curentului electric continuu printr-un circuit electric întrerupt de un condensator, între armăturile acestuia fiind vid?

Răspuns: Pe măsură ce condensatorul se încarcă, între plăcile lui apare un câmp electric crescător $\vec{E}(t)$. Intensitatea curentului electric dintre armăturile condensatorului poate fi explicată prin variația câmpului electric $\vec{E}(t)$ dintre ele.

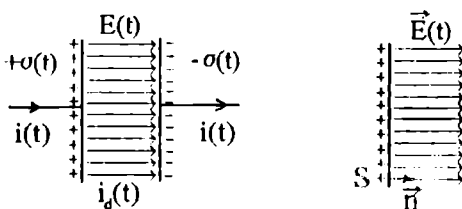


Fig.3.17

$$\vec{S} = \vec{n}S, \quad \vec{E} = \vec{n}E, \quad \text{deci: } \vec{S} \cdot \vec{E} = SE$$

Într-adevăr, deoarece intensitatea curentului electric i trebuie să fie aceeași în toate punctele circuitului neramificat, oricare ar fi t , (v. fig.3.17), rezultă că intensitatea curentului de conducție $i(t)$ din firele care duc la plăcile condensatorului la orice moment, t , trebuie să fie egală cu intensitatea curentului electric $I_d(t)$ dintre plăcile condensatorului (care nu este de conducție): $i(t) = I_d(t)$.

Să găsim în continuare expresia lui I_d dintre armături.

Dacă aria unei armături a condensatorului este S și densitatea instantanee de sarcină superficială este $\sigma(t)$, atunci valoarea instantanee a sarcinii electrice pe fiecare placă este: $q(t) = \sigma(t)S$. Deoarece vectorii $\vec{S} = S \cdot \vec{n}$ și $\vec{E} = E \cdot \vec{n}$ au același versor \vec{n} , rezultă: $\vec{S} \cdot \vec{E} = S \cdot E$. Pe de altă parte, având în vedere că expresia intensității

câmpului electric \vec{E} între plăcile unui condensator este, în modul, $E = \sigma/\epsilon_0$ rezultă că $q(t) = \epsilon_0 \cdot \vec{E}(t) \cdot \vec{S} = \epsilon_0 \cdot E(t) \cdot S$. Deoarece intensitatea curentului de conducție are expresia $I = dq/dt$ și $i(t) = I_d(t)$ rezultă:

$I_d(t) = \epsilon_0 \vec{S} \frac{d\vec{E}(t)}{dt}$. Întrucât se derivează $\vec{E}(t)$ numai în raport cu variabila

t și, în general $\vec{E}(x, y, z, t)$, se înlocuiește $\frac{d}{dt}$ cu $\frac{\partial}{\partial t}$ (derivata parțială în

raport cu t): $I_d = \epsilon_0 \vec{S} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$.

Acest curent se numește *curent de deplasare*, iar intensitatea lui o vom nota în cele ce urmează cu I_d .

Dacă curentul de deplasare este repartizat neuniform pe suprafața S , elementului de suprafață infinitesimal ds îi revine curentul de deplasare dI_d , iar curentul I_d prin suprafața S se obține prin integrare:

$$I_d = \int_0^{I_d} dI_d = \iint_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{s}.$$

Pe de altă parte se știe că $I_d = \iint_S \vec{j}_d \cdot d\vec{s}$ și comparând cele două expresii ale lui I_d rezultă expresia densității curentului de deplasare în vid \vec{j}_d :

$$\vec{j}_d(t) = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}.$$

Observație: Din expresia curentului de deplasare rezultă că curentul existent între plăcile condensatorului *nu este de conducție*. Acesta depinde, după cum se cunoaște, de concentrația n a purtătorilor de sarcină, de modulul vitezei v și sarcina q a acestora: $I = n \cdot v \cdot q \cdot S$. Expresia curentului de deplasare arată, în schimb, că acest curent depinde de viteza de variație a intensității câmpului electric, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, dintre plăci.

d) Fenomenul de inducție magnetoelectrică. Legea lui Maxwell.

Curentul de conducție, i , care circulă prin conductorul care leagă condensatorul de sursa de tensiune electromotoare \mathcal{E} este înconjurat de linii de câmp magnetic, care sunt cercuri concentrice cu centrul pe axul firului și se află în plane normale la fir (v. fig.3.18).

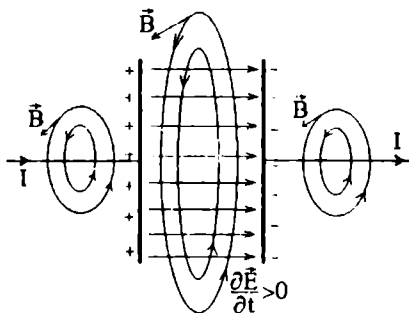


Fig.3.18

Întrebare: Curentul de deplasare I_d nu generează câmp magnetic ca și curentul de conducție I ?

Răspuns: Curentul de deplasare I_d , al cărui conținut fizic este câmpul electric variabil în timp, generează un câmp magnetic, asemenea curentului de conducție i ,

$$I_d(t) = \epsilon_0 \vec{S} \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t}$$

Definiție: Fenomenul de producere a câmpului magnetic, de către un câmp electric variabil în timp se numește inducție magnetoelectrică (m.e.), ce reprezintă fenomenul invers fenomenului de inducție electromagnetică (e.m.).

Legea lui Maxwell: Orice câmp electric $\vec{E}(t)$ variabil în timp generează în spațiul înconjurător un câmp magnetic $\vec{B}(t)$ variabil în timp, numit câmp magnetic indus.

Sensul liniilor câmpului magnetic indus (v. fig.3.19).

Dacă câmpul electric variază crescător, atunci liniile câmpului magnetic indus înconjoară liniile câmpului electric inductor în sensul în care ele înconjoară un curent electric ce are sensul câmpului electric și invers.

Dacă $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} > 0$, atunci câmpul electric este crescător, iar dacă

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} < 0$, atunci câmpul electric este descrescător.

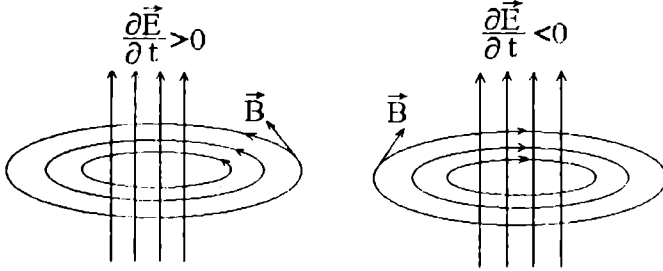


Fig.3.19.

3.4. Câmpul magnetic în materie

Atomii sunt caracterizați printr-un moment cinetic total căruia îi este asociat momentul magnetic \vec{m} . Valoarea acestor momente poate fi egală cu zero pentru unii atomi. Pe de altă parte, fiecare moment magnetic generează în jurul său un câmp magnetic. În general, dacă substanța nu este în câmp magnetic, momentele magnetice ale atomilor sunt orientate cu probabilitate egală în toate direcțiile. Ca urmare, câmpul magnetic generat de mulțimea momentelor magnetice ale atomilor dintr-o bucată de material este egal cu zero. Plasând substanța în câmp magnetic, toți atomii capătă moment magnetic nenul, asupra căruia câmpul acționează cu un cuplu de forțe care tinde să orienteze toate momentele magnetice paralel cu direcția câmpului. Chiar dacă orientarea momentelor nu este perfectă din cauza agitației termice, există o orientare preferențială în direcția câmpului. Se spune că în câmp magnetic substanța se magnetizează și că substanța magnetizată generează un câmp magnetic propriu. Substanța magnetizată se caracterizează prin *vectorul magnetizare* \vec{M} .

Vectorul magnetizare \vec{M} se definește ca suma vectorială a momentelor magnetice din unitatea de volum a substanței plasată într-un câmp magnetic exterior. Unitatea de măsură în S.I. prin care se exprimă magnetizarea este A/m.

Întreg materialul poate fi divizat în volume infinitezimale $d\tau$. Dacă substanța este omogen constituită dintr-un singur tip de atomi având momentele magnetice orientate paralel cu câmpul magnetic exterior atunci: $\vec{M} = n \cdot \vec{m}$, unde n este numărul momentelor magnetice din unitatea de volum. Momentul magnetic elementar al unui element de volum $d\tau$ este:

$$d\vec{M} = n \cdot \vec{m} \cdot d\tau \quad (1).$$

Fiecărui moment magnetic elementar $d\vec{M}$ i se poate asocia o buclă de curent electric de magnetizare astfel încât $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_m$, unde \vec{j}_m reprezintă densitatea curentului de magnetizare din interiorul materialului. În continuare, remarcând simetria ce există între fenomenele electrice din dielectrici și fenomenele magnetice din materialele magnetizate, se poate calcula câmpul magnetic total într-un material magnetizat.

Considerăm un material de formă cilindrică care este magnetizat de un câmp magnetic exterior de inducție \vec{B}_0 , creat de un solenoid bobinat pe cilindru, cu N spire pe unitatea de lungime, iar intensitatea curentului prin spirele lui este $I_{\text{conducție}}$.

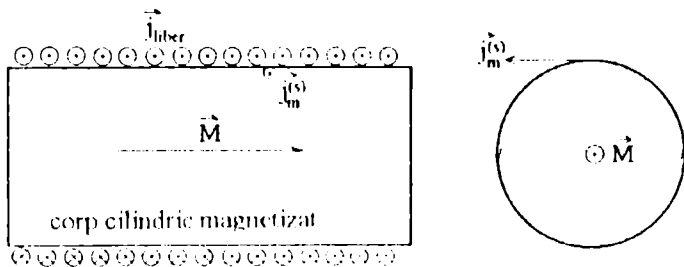


Fig.3.20

Dacă $N I_{\text{conducție}}$ reprezintă intensitatea curentului ce revine unității de lungime a solenoidului, atunci:

$$B_0 = \mu_0 \cdot N \cdot I_{\text{conducție}} \quad (2).$$

Echivalând curentul de magnetizare ce "curge" pe suprafața materialului cilindric cu un "solenoid", se exprimă câmpul magnetic creat de acesta, astfel:

$$B_m = \mu_0 I_m^{(s)} = \mu_0 M \quad (3).$$

unde $I_m^{(s)}$ este curentul ce revine unității de lungime a solenoidului.

Câmpul total în materialul magnetizat uniform este egal cu suma vectorială a câmpurilor \vec{B}_0 creat de solenoidul propriu-zis și \vec{B}_m creat de "solenoidul" curentului de magnetizare:

$$\vec{E} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} \quad (4).$$

În concluzie, sursele câmpului magnetic total din interiorul unui material magnetizat sunt curenții de conducție și curenții de magnetizare. Curenții de conducție se mai numesc și *curenți liberi* și există un oarecare control asupra lor: pot fi produși, opriți, măsurăți, etc. Spre deosebire de aceștia, curenții de magnetizare sunt curenții asociați momentelor magnetice sau moleculare, incluzând momentul magnetic intrinsec al particulelor cu spin. Acești curenți sunt denumiți *curenți legați* sau *curenți moleculari* și nu există un control asupra lor.

Densitatea de curent \vec{j}_m este media macroscopică a curenților legați:

$$\vec{j}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad (5).$$

La o suprafață unde \vec{M} este discontinuu, ca marginea materialului magnetizat de formă cilindrică, există o densitate de curent superficial $\vec{j}_m^{(s)}$ care reprezintă tot un curent legat.

În legea lui Ampère prezentată în subcapitolul 3.2.5. s-a avut în vedere numai curenții liberi, \vec{j}_{liber} , deși nu s-a făcut nici o precizare privind tipul de curent implicat. În cazul mediilor magnetizate trebuie să se înțeleagă prin densitatea de curent \vec{j} o densitate totală:

$$\vec{j} = \vec{j}_{\text{legat}} + \vec{j}_{\text{liber}} \quad (6),$$

unde:

$$\vec{j}_{\text{liber}} = \vec{j}_{\text{conducție}},$$

iar

$$\vec{j}_{\text{legat}} = \vec{j}_m + \vec{j}_m^{(s)} = \vec{j}_{\text{magnetizare}} \quad (7).$$

Deci, în astfel de medii, legea lui Ampère se rescrie:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{liber}} + \vec{j}_{\text{legat}}) \quad (8).$$

Rotorul se exprimă funcție de derivatele spațiale a'e lui \vec{B} . În consecință, ecuația (8) nu are sens pentru punctele din spațiu în care \vec{B} are discontinuități, adică pe suprafața laterală a cilindrului magnetizat luat în considerație. Cum densitatea curentului de magnetizare

superficial $\vec{j}_{lm}^{(s)}$ este definit tocmai pe suprafața laterală a cilindrului, în ecuația (8) nu vom lua $\vec{j}_{legat} = \vec{j}_{lm}^{(s)} + \vec{j}_{lm}$ ci numai $\vec{j}_{legat} = \vec{j}_{lm}$.

Deci: $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{legat}$ (9). Înlocuind (9) în (8) se obține:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_{liber} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) \quad (10),$$

sau

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_{liber} \quad (10').$$

Se poate astfel defini, în fiecare punct din spațiu, mărimea fizică vectorială *intensitate a câmpului magnetic* ale cărei surse sunt doar curenții liberi:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (11).$$

Cele două mărimi \vec{H} și \vec{M} au aceeași dimensiune și se exprimă în aceleași unități de măsură: A/m.

Astfel, forma diferențială a legii Ampère se rescrie în funcție de intensitatea câmpului magnetic:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{liber} \quad (12),$$

iar forma integrală cu teorema lui Stokes:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j}_{liber} \cdot d\vec{s} = I_{liber} \quad (13),$$

unde I_{liber} este intensitatea curentului electric liber încercuit de conturul de integrare C.

Relația (11) poate fi rescrisă sub forma următoare:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (11').$$

Comparând (11') cu (4) rezultă că inducția magnetică în interiorul solenoidului fără miez (plasat în vid) este:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} \quad (14).$$

Materialele pentru care magnetizarea \vec{M} este direct proporțională și paralelă (sau antiparalelă) cu \vec{H} , adică pentru care există numărul real $\chi_m \neq 0$ astfel încât:

$$\vec{M} = \chi_m \cdot \vec{H} \quad (15)$$

se numesc *materiale magnetice liniare, omogene și izotrope*.

Constanta de proporționalitate χ_m se numește *susceptibilitate magnetică* și este o mărime fizică adimensională.

Înlocuind relația (15) în (11') se obține:

$$\vec{B} = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_o \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (16),$$

unde mărimea fizică adimensională $\mu_r = 1 + \chi_m$ se numește *permeabilitate magnetică relativă* a materialului (mediului) magnetic, iar $\mu = \mu_o \mu_r$ se numește *permeabilitate magnetică absolută* a mediului respectiv.

Pentru materialele liniare, omogene și izotrope, μ_r este o constantă de material.

Ținând cont de (16) și de faptul că densitatea curenților liberi este nulă în material, ecuația $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ (17) se poate scrie astfel:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (18).$$

Ecuația (18) este valabilă numai în lipsa curenților liberi. În prezența acestora $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} \neq 0$ chiar dacă, întotdeauna, $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$! Pentru materialele liniare, omogene și izotrope, din ecuațiile (17), (18) și (11) rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0 \quad (19).$$

Acest rezultat poate fi interpretat ca fiind condiția necesară și suficientă ca materialul caracterizat de magnetizarea \vec{M} să fie liniar, omogen și izotrop.

Așadar, vectorul \vec{H} definit în (11) este corelat cu curentul liber așa cum \vec{B} este corelat cu curentul total, legat plus cel liber. Paralela nu este totuși completă, deoarece avem mereu $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, în timp ce \vec{H} nu are în mod necesar divergența nulă.

Pentru majoritatea substanțelor magnetice liniare și izotrope, $\chi_m \ll 1$. Susceptibilitatea magnetică χ_m poate fi pozitivă sau negativă.

Mediile (materialele) pentru care $\chi_m < 0$ se numesc *diamagnetice*, iar cele pentru care $\chi_m > 0$ se numesc *paramagnetice*.

Susceptibilitatea materialelor diamagnetice nu depinde de temperatură. Pentru aceste substanțe vectorul magnetizare \vec{M} este orientat antiparalel cu câmpul magnetizator \vec{B}_o , ceea ce face ca substanțele diamagnetice să fie respinse din câmpul magnetic. De asemenea, câmpul magnetic total (rezultant) în diamagnetice este mai mic decât câmpul magnetizator \vec{B}_o . Pentru aceste substanțe se poate lua mereu $\mu_r = 1$ deoarece $\chi_m \sim -10^{-9}$.

Diamagnetismul este propriu tuturor substanțelor. Cu toate acestea, el se poate manifesta numai în cazul substanțelor ai căror atomi nu posedă moment magnetic permanent. În cazul în care atomii substanței au moment magnetic permanent, valoarea acestuia este mai mare decât valoarea momentului magnetic indus de câmpul magnetic extern de inducție \vec{B}_0 și îl maschează pe acesta din urmă.

Susceptibilitatea substanțelor paramagnetice depinde de temperatură invers proporțional după o lege cunoscută sub denumirea de *legea lui Curie*:

$$\chi_m = \frac{C}{T} \quad (20),$$

unde C e o constantă numită constanta Curie.

Pentru substanțele paramagnetice ordinul de mărime pentru susceptibilitatea magnetică este $\chi_m \sim 10^{-7}$. Deși aceasta este mai mare de 100 de ori decât susceptibilitatea diamagneticilor și în acest caz $\chi_m \ll 1$ și se poate lua $\mu_r \approx 1$.

O altă categorie de materiale sunt cele feromagnetice, care nu sunt liniare, iar unele nu sunt nici izotrope. Aceste substanțe reacționează la câmpul magnetic extern \vec{B}_0 într-un mod specific, cu totul diferit de cel descris în cazul diamagneticilor și paramagneticilor, valoarea magnetizării fiind mult mai mare. Toate materialele feromagnetice își pierd proprietățile când sunt încălzite peste o anumită temperatură critică, caracteristică fiecărei substanțe, numită temperatura Curie, când se comportă ca materialele paramagnetice. Prin răcire sub punctul Curie ele își recapătă proprietățile feromagnetice.

Nefiind materiale liniare, dependența $B = B(H)$ nu este liniară și este caracteristică fiecărei substanțe în parte.

În feromagnetice poate exista o magnetizare nenulă chiar și în lipsa câmpului magnetizator \vec{B}_0 extern. Pentru aceste substanțe χ_m este mare și crește foarte repede cu B_0 , iar la valori mari ale acestuia χ_m atinge o valoare de saturație constantă. De aceea $\mu_r > 1$.

Pentru caracterizarea câmpului magnetic în materiale magnetice, alături de relațiile

$$B = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

este necesară și impunerea condițiilor de frontieră la interfața dintre diferite medii magnetice.

Considerăm diagrama schematică a frontierei dintre două medii diferite din figura 3.21. Regiunea de frontieră este presupusă că poartă densități de curent superficial \vec{j} . Volumul τ este un domeniu gaussian cilindric infinitezimal, jumătate într-un mediu, jumătate în celălalt, cu normala \vec{n} la suprafața de deasupra frontierei îndreptată din mediul 1 spre mediul 2. Conturul dreptunghiular infinitezimal C , de grosime neglijabilă este parțial într-un mediu și parțial în celălalt și este orientat perpendicular pe suprafața interfeței astfel că normala la suprafața subîntinsă de contur, \vec{n}' , este tangentă interfeței.

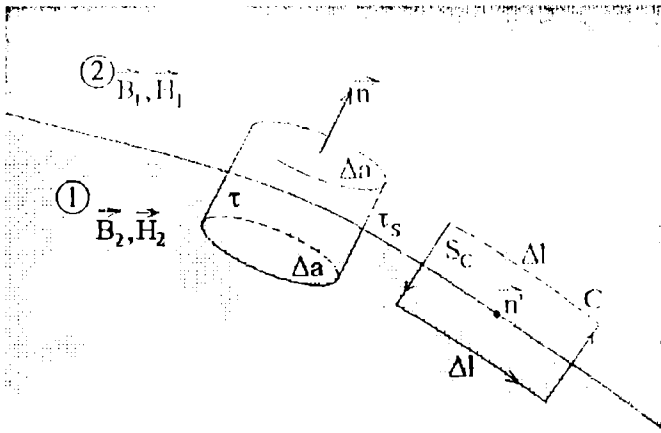


Fig.3.21

Din legea lui Gauss pentru magnetism rezultă:

$$\oiint_{S_v} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot ds = 0 \text{ sau } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (21)$$

unde S_v este suprafața gaussienei ce delimitează volumul τ .

Conturul închis C delimitează o suprafață S_c deschisă, iar $d\vec{l}$ este elementul de linie al conturului C . \vec{n}' reprezintă normala la suprafața S_c îndreptată în sensul dat de regula burghiului drept rotit în sensul de parcurs al conturului și tangentă la suprafața interfeței dintre cele două medii. Din legea lui Ampère rezultă:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \vec{j} \cdot \vec{n}' dS \text{ sau } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad (22)$$

La limita cilindrului infinitezimal gaussian, suprafața laterală nu contribuie la calculul integralei din stânga expresiei din (21), contribuind

numai bazele cilindrului care sunt paralele și tangente la suprafața interfeței notate cu Δa . Deci:

$$\oint_{S_c} \vec{B} \cdot \vec{n} \cdot dS = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} \cdot \Delta a = 0, \text{ adică}$$

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (23).$$

Prin urmare, componenta normală a lui \vec{B} este continuă la trecerea dintr-un mediu magnetic în altul.

Bucula C infinitezimală poate fi utilizată pentru determinarea discontinuităților componentelor tangențiale ale lui \vec{H} . Dacă laturile scurte ale conturului C au o lungime neglijabilă și laturile lungi sunt ambele paralele cu suprafața și au lungimea Δl , atunci integrala din stânga expresiei din (22) este:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{n} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \Delta l = [\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] \cdot \vec{n}' \Delta l \quad (24)$$

unde s-a utilizat o proprietate a produsului mixt:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}.$$

Partea din dreapta ecuației sub forma integrală din (22) nu se anulează deoarece există o densitate de curent superficială \vec{j} :

$$\iint_{S_c} \vec{j} \cdot \vec{n}' \cdot dS = \vec{j} \cdot \vec{n}' \Delta l \quad (25).$$

Din (22), (24) și (25) rezultă relația care exprimă legătura dintre componentele tangențiale ale lui \vec{H} din ambele părți ale frontierei:

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j} \quad (26).$$

În această ecuație se înțelege că densitatea de curent \vec{j} are numai componente paralele cu suprafața interfeței în fiecare punct. Componenta tangențială a lui \vec{H} este discontinuă cu mărimea \vec{j} și are direcția paralelă cu $\vec{j} \times \vec{n}$.

În concluzie, pentru descrierea câmpului magnetic în medii macroscopice este necesar să se utilizeze *ecuația de stare*:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H} \text{ sau } \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

și *ecuațiile de trecere* (sau *condițiile de frontieră* la trecerea dintr-un mediu în altul):

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \text{ și } \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}.$$

În continuare, trebuie subliniată simetria existentă între mărimile ce caracterizează câmpul electric și mărimile ce caracterizează câmpul magnetic în substanță.

- Vectorului intensitate a câmpului electric, \vec{E} , ale cărui surse sunt sarcinile libere și cele legate, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{liber}} + \rho_{\text{legat}})$, îi corespunde vectorul inducție a câmpului magnetic, \vec{B} , ale cărui surse sunt curenții liberi și legați, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{liber}} + \vec{j}_{\text{legat}})$.
- Vectorului polarizare electrică, \vec{P} , ale cărui surse sunt numai sarcinile legate, $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{\text{legat}}$, îi corespunde vectorul magnetizare, \vec{M} , ale cărui surse sunt numai curenții legați, $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{legat}}$.
- Vectorului deplasare electrică, \vec{D} , ale cărui surse sunt numai sarcinile electrice libere, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{\text{liber}}$, îi corespunde vectorul intensitate a câmpului magnetic \vec{H} , ale cărui surse sunt numai curenții liberi $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{liber}}$.

În electromagnetism, vectori fundamentali se consideră a fi \vec{E} și \vec{B} . Sursele acestor vectori fiind sarcinile totale, respectiv curenții totali, ei se pot defini în toate împrejurările. Din punct de vedere practic însă, sunt mai importanți vectorii \vec{E} și \vec{H} deoarece \vec{H} se calculează din $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{\text{liber}}$ cunoscând curenții liberi, iar \vec{E} din $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ cunoscând diferențele de potențial electric dintre două puncte accesibile măsurătorilor.

Capitolul 4

ELECTROMAGNETISM

4.1. Ecuațiile fundamentale ale electromagnetismului

Pentru descrierea clasică a fenomenelor electromagnetice au fost stabilite următoarele patru *ecuații fundamentale*:

1) **Legea lui Gauss din electrostatică:** $\Phi_{\vec{E}} \equiv \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$, $Q \in \text{Int}\{S\}$;

2) **Legea lui Gauss din magnetostatică:** $\Phi_{\vec{B}} \equiv \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$;

3) **Legea lui Faraday:** $\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{\vec{B}}}{dt}$, dacă suprafața S_C este mobilă

și $\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$, dacă suprafața S_C este fixă.

4) **Legea lui Ampère:** $\mathcal{B} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{j}} = \mu_0 I$, unde \vec{j} inter-

sectează suprafața S_C . Suprafața S_C este suprafața ce se sprijină pe curba închisă C pe care se calculează integrala curbilinie respectivă.

Aceste patru ecuații sunt aplicabile în spațiul vid. În medii dielectrice ϵ_0 se înlocuiește cu produsul: $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, iar în medii magnetice μ_0 se înlocuiește cu $\mu = \mu_0 \mu_r$.

a) Legea Ampère-Maxwell

Dacă în a patra ecuație, care exprimă legea lui Ampère, vectorul densitate de curent de conducție, \vec{j} , se înlocuiește cu densitatea totală

a curentului, $\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_d$, unde \vec{j}_d reprezintă curentul de deplasare definit în subcapitolul 3.3.2. paragraful (c), se obține legea Ampère-Maxwell:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(\iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_C} \vec{j}_d \cdot d\vec{s} \right) = \mu_0 (I + I_d).$$

Prin urmare:

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\Phi_j + \Phi_k) = \mu_0 \left(\Phi_j + \epsilon_0 \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \right), \text{ indiferent dacă } S_C \text{ este}$$

fixă sau mobilă și

$$\mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \left(\Phi_j + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = \mu_0 \left(\Phi_j + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} \right), \text{ dacă } S_C \text{ este fixă.}$$

În cazul în care suprafața de integrare (domeniul de integrare) S_C nu variază în timp (este fixă) derivata parțială în raport cu timpul poate fi scoasă în afara integralei; în caz contrar ea rămâne sub integrală.

b) Forma integrală a ecuațiilor lui Maxwell în vid

Cele patru ecuații fundamentale scrise anterior sunt cunoscute sub numele de ecuațiile lui Maxwell.

Definiție: O regiune din spațiu în care nu există sarcini electrice ($q = 0$ sau $\rho = 0$) și curenți de conducție ($I = 0$ sau $\vec{j} = 0$) se numește mediu fără surse.

Sistemul de ecuații următor:

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V_S} \rho d\tau;$$

$$2) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0;$$

$$3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s}, \text{ dacă } S_C \text{ este mobilă sau}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ dacă } S_C \text{ este fixă;}$$

$$4) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \text{ numai dac\u0103 } S_C \text{ este fix\u0103 sau}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \epsilon_0 \mu_0 \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ indiferent dac\u0103 } S_C \text{ este mobil\u0103 ori}$$

fix\u0103, se nume\u0219te *sistemul ecua\u021biilor lui Maxwell \u00een vidul cu surse* ($\rho \neq 0$ \u0219i $\vec{j} \neq 0$) *sub form\u0103 integral\u0103.*

Dup\u0103 cum se observ\u0103, acestea *nu sunt simetrice* \u00een raport cu \vec{E} \u0219i \vec{B} .

\u00cEn vidul f\u0103r\u0103 surse ($\rho = 0$ \u0219i $\vec{j} = 0$), *ecua\u021biile lui Maxwell sub form\u0103 integral\u0103 sunt:*

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0;$$

$$2) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0;$$

$$3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s}, \text{ dac\u0103 } S_C \text{ este mobil\u0103 sau}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ dac\u0103 } S_C \text{ este fix\u0103;}$$

$$4) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{E} \cdot d\vec{s}, \text{ numai dac\u0103 } S_C \text{ este fix\u0103 sau}$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \epsilon_0 \mu_0 \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ \u00een cazul general.}$$

\u00cEn acest caz, *ecua\u021biile sunt simetrice* \u00een raport cu \vec{E} \u0219i \vec{B} .

c) Forma diferen\u021bial\u0103 a ecua\u021biilor lui Maxwell \u00een vid.

Vom utiliza teoremele lui Gauss-Ostrogradski \u0219i Stokes:

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_S} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \cdot d\tau, \quad \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} (\vec{\nabla} \times \vec{a}) \cdot d\vec{s},$$

unde \vec{a} reprezintă un câmp de vectori oarecare, în sistemele de ecuații de mai sus pentru a obține ecuațiile lui Maxwell sub forma diferențială.

$$1) \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} \text{div} \vec{E} \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau_s} \rho d\tau \Rightarrow \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

$$2) \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \iiint_{\tau_s} \text{div} \vec{B} \cdot d\tau = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{B} = 0;$$

$$3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \iint_{S_c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}, \text{ dacă } S_c \text{ este fixă} \Rightarrow \text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$4) \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_c} \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \iint_{S_c} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}, \text{ indiferent dacă } S_c \text{ este}$$

fixă sau mobilă deoarece ne interesează numai cazul când derivata

$$\text{parțială este sub integrală} \Rightarrow \text{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d) = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right).$$

Observație: Ecuația Maxwell 3 sub formă diferențială este valabilă numai în ipoteza în care suprafața S_c este imobilă (fixă); altfel, dacă S_c este mobilă, această ecuație a lui Maxwell este valabilă doar sub forma integrală.

Prin urmare, *ecuațiile lui Maxwell în vidul cu surse ($\rho \neq 0$ și $j \neq 0$) sub formă diferențială sau locală sunt:*

$$1) \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

$$2) \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$3) \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$4) \boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)}$$

În vidul fără surse ($\rho = 0$ și $j = 0$), ecuațiile lui Maxwell sub formă diferențială sau locală sunt:

$$1) \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0}$$

$$2) \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$3) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$4) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Obse.vafie: Simetria acestor ecuații în \vec{E} și \vec{B} este o consecință nemijlocită a introducerii curentului de deplasare. Scrise în această formă, ultimele două ecuații ale lui Maxwell ne arată că în cazul unor câmpuri variabile există o dublă legătură cauzală între câmpul electric și câmpul magnetic, legătură care condiționează existența câmpului electromagnetic sub formă de unde electromagnetice în regiuni îndepărtate de sursele de sarcină electrică (unde $\rho=0$ și $j=0$).

Proprietăți: Ecuațiile lui Maxwell sunt omogene în raport cu \vec{E} și \vec{B} . Acest lucru înseamnă că dacă \vec{E} și \vec{B} sunt două soluții pentru ecuațiile de mai sus atunci și $a \cdot \vec{E}$, $a \cdot \vec{B}$, reprezintă soluții ale celor patru ecuații, a fiind o constantă arbitrară.

Ecuațiile lui Maxwell sunt liniare. Dacă \vec{E}_1 , \vec{B}_1 și \vec{E}_2 , \vec{B}_2 sunt două seturi de soluții ale acestor ecuații, atunci combinațiile liniare $a \cdot \vec{E}_1 + b \cdot \vec{E}_2$ și $a \cdot \vec{B}_1 + b \cdot \vec{B}_2$ sunt de asemenea soluții ale ecuațiilor lui Maxwell, oricare ar fi constantele a și b .

d) Sensul fizic al ecuațiilor lui Maxwell

Ecuația (1) arată caracterul *potențial* al câmpului electrostatic (divergența lui \vec{E} este nenulă). Cu alte cuvinte, liniile câmpului electrostatic nu sunt închise. Această ecuație reprezintă o generalizare a legii lui Coulomb.

Ecuația (2) arată că în toate cazurile câmpul magnetic de inducție \vec{B} nu poate fi *potențial*. Cu alte cuvinte liniile câmpului magnetic sunt întotdeauna închise (divergența lui \vec{B} este nulă).

Ecuația (3) prevede existența unui *câmp electric solenoidal* \vec{E} (rotorul lui \vec{E} este nenul) cu linii de câmp închise produs de variația în timp a câmpului magnetic. În acest caz, $\vec{E} \perp \vec{B}$. Ecuația (3) constituie o generalizare a legii lui Faraday.

Ecuația (4) arată caracterul *solenoidal* al câmpului magnetic (rot $\vec{B} \neq 0$, linii de câmp închise) și subliniază cauzele care îl produc: curentul electric de conducție și variația în timp a câmpului electric.

Observație: Ecuațiile (3) și (4) arată că între câmpul electric și cel magnetic există o strânsă interdependență, liniile celor două câmpuri aflându-se în plane perpendiculare.

Din ecuația (4) se observă că variația în timp a câmpului electric produce un câmp magnetic solenoidal:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} \neq 0.$$

Din ecuația (3) se observă că variația în timp a câmpului magnetic determină apariția unui câmp electric solenoidal:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} \neq 0.$$

e) Ecuațiile lui Maxwell în cazul unui mediu material

Ecuațiile lui Maxwell cu surse ($\rho \neq 0$ și $j \neq 0$) pentru un mediu material oarecare în forma integrală și diferențială sunt următoarele:

$$1) \left[\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \iiint_{V_S} \rho d\tau \right] \text{ (forma integrală),}$$

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \right] \text{ (forma diferențială),}$$

unde $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ reprezintă vectorul inducției câmpului electric (sau vectorul deplasare), χ_e susceptibilitatea electrică a mediului dielectric, ϵ_r permitivitatea electrică relativă a mediului dielectric, iar $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ reprezintă vectorul polarizației electrice a dielectricului respectiv;

$$2) \left[\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \right] \text{ (forma integrală),}$$

$$\left[\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \right] \text{ (forma diferențială),}$$

unde \vec{B} este vectorul inducției câmpului magnetic, $\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$, \vec{H} reprezintă vectorul intensității câmpului magnetic, χ_m reprezintă susceptibilitatea magnetică a mediului respectiv, μ_r permeabilitatea magnetică a

mediului, iar $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ reprezintă vectorul magnetizației mediului respectiv;

$$3) \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t} \quad (\text{forma integrală}), \text{ dacă suprafața } S_C$$

este mobilă,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{forma integrală}), \text{ dacă suprafața } S_C \text{ este fixă;}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{forma diferențială}), \text{ numai dacă suprafața } S_C \text{ este fixă;}$$

$$4) \oint_C \vec{I} \cdot d\vec{l} = I + I_d = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \iint_{S_C} \vec{j}_d \cdot d\vec{s} = \Phi_j + \Phi_{j_d} = \iint_{S_C} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} \quad (\text{forma integrală});$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \vec{j} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Phi_j + \frac{\partial \Phi_{j_d}}{\partial t} \quad (\text{forma integrală}), \text{ numai}$$

dacă suprafața S_C este fixă.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} + \vec{j}_d \quad (\text{forma diferențială}).$$

Ecuatiile lui Maxwell fără surse ($q=0$ sau $\rho=0$ și $I=0$ sau $j=0$) pentru un mediu material oarecare în forma integrală și diferențială sunt următoarele:

$$1) \Phi_{\vec{D}} = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{forma integrală}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{forma diferențială});$$

$$2) \Phi_{\vec{B}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (\text{forma integrală}),$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{forma diferențială});$$

$$3) \mathcal{E} \equiv \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{B} \cdot d\vec{s} \equiv -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} \quad (\text{forma integrală}), \text{ dacă suprafața}$$

$$S_C \text{ este mobilă sau } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_{S_C} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{forma integrală}), \text{ dacă suprafața}$$

S_C este fixă;

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{forma diferențială}), \text{ numai dacă suprafața } S_C \text{ este fixă;}$$

$$4) \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_C} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \quad (\text{forma integrală}), \text{ sau}$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_C} \vec{D} \cdot d\vec{s} \equiv \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} \quad (\text{forma integrală}), \text{ dacă suprafața } S_C \text{ este fixă și}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{forma diferențială}).$$

f) Importanța ecuațiilor lui Maxwell

- ◆ Ecuațiile lui Maxwell scot în evidență legătura indisolubilă care există între fenomenele electrice (prin câmpul electric \vec{E}) și cele magnetice (prin câmpul magnetic \vec{B}).
- ◆ Pornind de la sistemul ecuațiilor lui Maxwell se pot obține toate relațiile din electricitate și magnetism și, în plus, se pot prevedea noi fenomene electromagnetice.
- ◆ Aceste ecuații au pus în evidență o nouă legătură dintre electricitate și magnetism: *inducția magnetoelectrică*.
- ◆ Au prezis existența undelor electromagnetice și natura electromagnetică a luminii.
- ◆ Au unificat pentru prima dată fenomenele de natură electrică cu cele de natură magnetică, sub forma teoriei clasice a electromagnetismului.

Contribuția lui Maxwell pentru înțelegerea fenomenelor electromagnetice poate fi considerată una dintre cele mai înalte realizări

atinse de om în procesul cunoașterii. Prin aceste ecuații, Maxwell a realizat o sinteză a interacțiunilor electrice și magnetice ce reprezintă una dintre cele mai importante sinteze în fizică.

4.2. Soluțiile ecuațiilor lui Maxwell date sub formă generală. Potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic. Transformări de etalon. Invarianța de etalon sau de gradient

4.2.1. Relații de algebră vectorială utilizate

a) Dacă $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$ atunci $\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ și reciproc, dacă $\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ atunci $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$, oricare ar fi vectorul $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z; t)$.

b) Dacă $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$ rezultă $\vec{a} = \vec{\nabla} f(x, y, z; t)$ și reciproc, dacă $\vec{a} = \vec{\nabla} f(x, y, z; t)$ atunci $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$, unde $f = f(x, y, z; t)$ este o funcție scalară arbitrară dependentă de x, y, z și t .

c) $\vec{\nabla} \times (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{a} + \mu \vec{\nabla} \times \vec{b}$, unde λ, μ sunt constante arbitrare,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right),$$

$$\vec{\nabla}(-V) = -\vec{\nabla}V.$$

4.2.2. Soluțiile ecuațiilor lui Maxwell sub formă generală. Potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic

Teoremă: Ecuațiile lui Maxwell $\text{div} \vec{B} = 0$ și $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ au

următoarele soluții: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$ și $\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Mărimea \vec{A} se numește potențialul vectorial al câmpului magnetic \vec{B} , iar V reprezintă potențialul scalar al câmpului electric \vec{E} .

Mărimile \vec{A} și V sunt funcții de parametrul timp t și de punctul din spațiu de coordonate x, y, z în care se calculează \vec{E} și \vec{B} : $\vec{A}(x, y, z; t)$, $V(x, y, z; t)$. \vec{A} și V se mai numesc potențiale electrodinamice ale câmpului electromagnetic.

Demonstrație: Prima ecuație Maxwell, $\text{div}\vec{B}=0$, implică, dacă se utilizează relația (a) existența unui vector pe care, în continuare, îl vom nota cu \vec{A} și-l vom derumi *potențial vectorial* (sau *potențial magnetic vectorial*), astfel încât:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

A doua ecuație Maxwell, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, împreună cu relația anterioară, conduc la concluzia următoare dacă se utilizează relațiile matematice (b) și (c):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ sau}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Relațiile anterioare încadrate reprezintă o pereche de soluții ale ecuațiilor lui Maxwell.

4.2.3. Transformări de etalon. Invarianța de etalon sau de gradient

Pornind de la egalitatea $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ să arătăm că mărimea \vec{A} din această ecuație *nu este unic determinată*.

Demonstrație: Orice expresie de forma $\vec{A} + \vec{\nabla}f \equiv \vec{A}'$, unde f este o funcție arbitrară depinzând de x, y, z, t , satisface, de asemenea, egalitatea $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ obținându-se aceeași formă pentru această relație.

$\vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, deoarece în conformitate cu relația matematică (b) avem: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$.

De asemenea, ecuația $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ne arată că dacă înlocuim

aici funcția V cu $V - \frac{\partial f}{\partial t} \equiv V'$ și \vec{A} cu \vec{A}' se obține aceeași expresie pentru \vec{E} :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \left(V - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = -\vec{\nabla} V + \vec{\nabla} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} f).$$

Deoarece $\vec{\nabla} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} f)$ și $\vec{\nabla} (\lambda \cdot f \pm \mu \cdot g) = \lambda \cdot \vec{\nabla} f \pm \mu \cdot \vec{\nabla} g$, cu μ și λ constante arbitrare, rezultă: $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ ceea ce trebuie demonstrat.

Prin urmare, nici mărimea V nu este unic determinată. Deci, potențialele \vec{A} și V nu sunt unice, putându-se obține o infinitate de potențiale prin transformările:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f,$$

$$V' = V - \frac{\partial f}{\partial t},$$

numite *transformări etalon*. Așa cum s-a văzut, acestea lasă neschimbat câmpul electromagnetic, adică expresiile lui \vec{E} și \vec{B} .

Definiție: Invarianța câmpului electromagnetic la aceste transformări se numește invarianța de etalon sau de gradient.

4.3. Câmpul electromagnetic

Definiție: Ansamblul câmpurilor electric și magnetic variabile în timp și în spațiu și care se generează reciproc, se numește câmp electromagnetic. Perturbația electromagnetică are proprietatea că se poate propaga în spațiu, inclusiv în spațiul vid.

Câmpul electromagnetic se poate reprezenta, de asemenea, cu ajutorul potențialului vectorial $\vec{A}(\vec{r}, t)$ (magnetic) și a potențialului scalar $V(\vec{r}, t)$ (electric) care reprezintă potențialele electrodinamice ale câmpului electromagnetic.

4.3.1. Condiția de etalonare al lui Lorentz. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediul fără surse

Notă matematică: În analiza matematică vectorială sunt valabile (fără demonstrație) următoarele relații:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a} \quad (\alpha),$$

unde $\nabla^2 V = \Delta V = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = \text{div}(\text{grad} V)$.

a) Condiția de etalonare al lui Lorentz.

Se înlocuiesc mărimile \vec{B} și \vec{E} , definite prin relațiile cunoscute:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{și} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1),$$

în ecuația lui Maxwell scrisă în absența surselor ($\vec{j} = 0$):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2).$$

Rezultă: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$. Aplicând relația

vectorială (α) se obține:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (3).$$

Deoarece

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} V) = \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad \text{și} \quad \vec{\nabla}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\nabla} u + \vec{\nabla} v \quad (3')$$

(fără demonstrație), relația (3) se poate scrie succesiv:

$$-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (4),$$

$$-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (5).$$

Deoarece mărimea \vec{A} nu este unic determinată, avem libertatea de a alege pe \vec{A} cum dorim, dar cu respectarea condiției ca $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. În cele ce urmează vom face acea selecție pentru \vec{A} astfel încât să avem îndeplinită relația:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0} \quad (6).$$

Egalitatea (6) se numește *condiția de etalonare a lui Lorentz*.

b) Ecuația lui d'Alembert pentru potențialul vectorial \vec{A} .

În aceste condiții din (5) și (6) se obține ecuația diferențială de ordinul doi de tip hiperbolic cu derivate parțiale satisfăcută de potențialul vectorial \vec{A} :

$$\Delta \vec{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (7),$$

Dacă introducem operatorul lui d'Alembert:

$$\square \equiv \Delta - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (8),$$

atunci ecuația din (7) se scrie sub forma abreviată:

$$\square \vec{A} = 0 \quad (9).$$

Această ecuație, (9), se numește *ecuația lui d'Alembert relativ la potențialul vectorial \vec{A}* , care se poate scrie explicit astfel:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0}.$$

Dacă \vec{A} nu depinde explicit de timpul t (cazul staționar) ecuația (9) devine

$$\Delta \vec{A} = 0 \text{ sau } \nabla^2 \vec{A} = 0 \quad (9').$$

c) Ecuația lui d'Alembert pentru potențialul scalar V .

Să obținem, în continuare, ecuația corespunzătoare pentru potențialul scalar V . Se pornește de la ecuația lui Maxwell următoare (scrisă pentru un mediu fără surse):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (10).$$

Deoarece:

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (11),$$

rezultă:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12).$$

Se poate arăta (fără demonstrație) că:

$$\vec{\nabla} \cdot (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{b} \quad (13),$$

unde λ , μ sunt constante arbitrare

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{a}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \quad \text{și} \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) = \Delta V = \nabla^2 V \quad (13').$$

Prin urmare relația (12) devine:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (14).$$

Se poate arăta (fără demonstrație) că:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \equiv \frac{\partial (\text{div} \vec{A})}{\partial t} \quad (15).$$

În aceste condiții, dacă se ține seama de relația (α), de relația (15) și de condiția de etalonare a lui Lorentz (6), ecuația (14) devine:

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0 \quad (16).$$

În concluzie: $\Delta V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$ sau $\square V = 0$ (17). Această ecuație (17)

se mai numește și **ecuația lui d'Alembert relativ la potențialul scalar V**, care se poate scrie explicit astfel:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Dacă V nu depinde explicit de timpul t (cazul staționar) ecuația (17) devine $\Delta V = 0$ sau $\nabla^2 V = 0$ (17').

Relațiile (9) și (17) reprezintă ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediul liber (fără surse) relativ la potențialele vectorial \vec{A} și scalar V (sau ecuațiile lui d'Alembert relativ la mărimile \vec{A} și V).

4.3.2. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru mediul cu surse

a) Ecuația diferențială pentru potențialul vectorial \vec{A} .

În ecuația lui Maxwell sub forma diferențială pentru un mediu cu surse:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1),$$

se înlocuiesc expresiile potențialelor electrodinamice $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ și

$$\vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2).$$

În acest caz (1) devine:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (3).$$

Deoarece (fără demonstrație)

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad (4),$$

ecuația (3) se scrie:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \mu \epsilon \vec{\nabla} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j} \quad (5) \text{ sau}$$

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \Delta \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \mu \vec{j} \quad (5').$$

Aplicând în (5') condiția de etalonare a lui Lorentz

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (6),$$

rezultă: $[\vec{A} = -\mu \vec{j}]$ sau

$$\boxed{\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}} \quad (7).$$

Dacă potențialul vectorial \vec{A} nu depinde explicit de timp (regim staționar), adică $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ este funcție doar de coordonatele spațiale, atunci ecuația (7) devine:

$$\Delta \vec{A} = -\mu \vec{j} \text{ sau } \nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j} \quad (7').$$

Ecuția (7') mai poartă denumirea de *ecuația lui Poisson pentru potențialul vectorial \vec{A} în regim staționar*. Soluția ecuației lui Poisson (7') are forma următoare (fără demonstrație):

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}}{r} d\tau \quad (8),$$

unde integrarea se face pe întregul volum τ caracterizat prin densitatea de curent \vec{j} , iar r este distanța dintre elementul de volum $d\tau$ și punctul în care se calculează potențialul vectorial \vec{A} (v. fig.4.1).

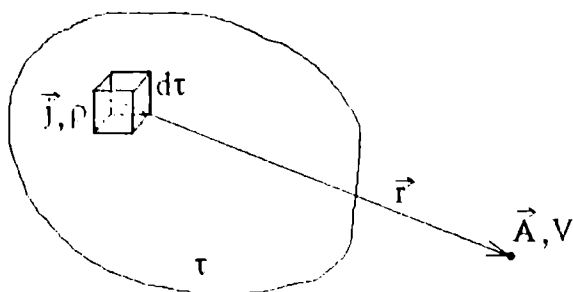


Fig. 4.1

b) Ecuția diferențială pentru potențialul scalar V.

În mod asemănător se obține o ecuație pentru V. Pornind de la prima ecuație a lui Maxwell sub formă diferențială scrisă pentru un mediu cu surse și de la expresia lui \vec{E} funcție de \vec{A} și V:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad \vec{E} = -\text{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (9),$$

se găsește:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) + \vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}V) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \\ &= -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (9'). \end{aligned}$$

Dacă se recurge în (9') la condiția de etalonare a lui Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0, \text{ rezultă: } -\Delta V + \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}.$$

Alte forme echivalente sunt: $\Delta V = -\rho/\epsilon$, sau

$$\boxed{\nabla^2 V - \mu\epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon}} \quad (9'')$$

Dacă potențialul scalar V nu depinde explicit de timp (regim staționar), adică $V = V(x,y,z)$ este funcție doar de coordonatele spațiale, atunci ecuația (9'') devine *ecuația lui Poisson relativ la potențialul scalar V* :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon} \text{ sau } \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (10).$$

Soluția ecuației lui Poisson (10) are forma următoare (fără demonstrație):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho}{r} d\tau \quad (11),$$

unde ρ reprezintă densitatea volumică de sarcină electrică (v. fig.4.1).

Ecuațiile (7) și (9'') sau ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale ale lui Maxwell pentru un mediu cu surse, arată legătura dintre potențialele electrodinamice \vec{A} și V ale câmpului electric și magnetic, care se generează reciproc formând astfel câmpul electromagnetic, și sursele care îi produc: densitatea de curent electric \vec{j} și densitatea de sarcină electrică ρ . Determinând astfel cele două potențiale \vec{A} și V cu ajutorul relației (7) și (10) sau (7') și (10) prin intermediul relațiilor (2) se pot calcula vectorii \vec{B} și \vec{E} .

Capitolul 5

UNDE ELECTROMAGNETICE OPTICĂ

5.1. Ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale pentru intensitatea câmpului electric și inducția câmpului magnetic în cazul unui mediu fără surse. Ecuațiile de propagare a undei electromagnetice într-un mediu fără surse.

Pentru a ajunge la ecuațiile de propagare a undei electromagnetice într-un mediu fără surse, se pornește de la ecuația lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1).$$

Se aplică operatorul "rotor" ecuației (1):

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (2).$$

Deoarece se presupune cunoscută relația vectorială următoarea:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} \quad (3),$$

ecuația anterioară (2) devine:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (4).$$

Se recurge, în continuare, la ecuațiile lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \text{și} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5).$$

Deoarece $\text{grad}(\text{div} \vec{E}) = \text{grad}(0) = 0$, din (4) și (5) rezultă:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

care se mai poate scrie și sub formele echivalente:

$$\square \vec{E} = 0 \quad (6)$$

sau

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

(Ecuția lui d'Alembert pentru câmpul electric \vec{E}).

În mod analog se obține ecuația pentru inducția câmpului magnetic, pornind de la următoarea ecuație a lui Maxwell în care $\vec{j} = 0$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (7).$$

Prin aplicarea în (7) a operatorului "rotor", se obține:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (8).$$

Deoarece: $\text{rot}(c \cdot \vec{a}) = c \cdot \text{rot}(\vec{a})$, $c = \text{const}$, $\text{rot}(\text{rot}(\vec{a})) = \text{grad}(\text{div}(\vec{a})) - \Delta \vec{a}$ (fără demonstrație) și

$$\text{rot} \left(\mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu\epsilon \cdot \text{rot} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu\epsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}(\vec{E})) \quad (9),$$

rezultă din (8):

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \quad (10).$$

Având în vedere ecuațiile lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{și} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11),$$

egalitatea (10) devine:

$$\vec{\nabla} 0 - \Delta \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \quad (12).$$

Într-o formă echivalentă ecuația (12) se transcrie astfel:

$$\square \vec{B} = 0 \quad (13)$$

sau

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

(Ecuția lui d'Alembert pentru inducția câmpului magnetic \vec{B}).

Observație: Mărimile potențial vectorial \vec{A} și potențial scalar V satisfac același tip de ecuații: $\square \vec{A} = 0$, $\square V = 0$.

5.2. Comentarii de natură fizică privind ecuațiile diferențiale satisfăcute de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ și $\vec{B}(\vec{r}, t)$. Ecuațiile de propagare a undelor electromagnetice.

a) Intensitatea câmpului electric $\vec{E}(\vec{r}, t)$ și inducția câmpului magnetic $\vec{B}(\vec{r}, t)$, ce caracterizează câmpul electromagnetic, satisfac același tip de ecuație diferențială (d'Alembert) ca și cele două potențiale electrodinamice $\vec{A}(\vec{r}, t)$ și $V(\vec{r}, t)$.

b) Acest tip de ecuație este similar cu cel reprezentat de ecuația de propagare a undelor mecanice:

$$\vec{\nabla}^2 \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

unde v este viteza de propagare a undelor mecanice în mediul respectiv, (care nu poate fi mediul vid), iar $\Psi(\vec{r}, t)$ reprezintă elongația oscilației în punctul de vector de poziție \vec{r} , la momentul t .

c) Comparând cele patru ecuații diferențiale de tip d'Alembert:

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, \quad \square V(\vec{r}, t) = 0, \quad \square \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad \square \vec{B}(\vec{r}, t) = 0,$$

cu ecuația de propagare a undelor mecanice $\square \Psi(\vec{r}, t) = 0$, Maxwell a constatat că perturbația (variația modului acestora în timp) mărimilor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, $V(\vec{r}, t)$, $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sunt funcții variabile în timp și spațiu, care descriu mărimi a căror perturbație (variația modului acestora în timp) se propagă într-un mediu caracterizat de constantele de material ϵ și μ cu o viteză dată de relația:

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon \mu \quad \text{sau} \quad v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}.$$

Această constatare făcută de Maxwell în anul 1865 a constituit actul de naștere al teoriei undelor electromagnetice, care au fost confirmate experimental de Hertz.

d) Deci, când într-o regiune din spațiu se creează un câmp electric variabil în timp, acesta generează la rândul său un câmp magnetic variabil în timp, și reciproc, obținându-se ansamblul numit

câmp electromagnetic a cărei perturbație se propagă în spațiu sub formă de unde electromagnetice cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

e) La această constatare făcută de Maxwell, s-a adăugat încă una, tot a lui Maxwell, referitoare la natura electromagnetică a luminii. Maxwell a calculat viteza undelor electromagnetice *in vid*:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}} \cong 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \equiv c,$$

unde c este cunoscută ca fiind viteza luminii în vid, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$,

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Prin urmare, lumina este de natură electromagnetică.

5.3. Ecuația elongației unei unde electromagnetice armonice plane tridimensionale.

a) Expresii matematice.

Forma complexă a elongației unei unde plane tridimensionale (cazul vectorului câmp electric), într-un punct de vector de poziție \vec{r} și la momentul t , este:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\left\{\pm i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)\right\} \quad (1).$$

Forma reală a elongației acestei unde se obține pornind de la formele lui Euler:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \cdot \sin\alpha \quad (2)$$

(v. anexa). Deci relația (1) devine:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \left[\cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \pm i \cdot \sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) \right] \quad (3).$$

Observație: În cele ce urmează convenim ca exponentul unei unde plane să fie luat cu semnul plus.

Forma reală a elongației unei unde plane este, prin definiție, egală cu partea reală sau imaginară a expresiei complexe (3) definite astfel:

$$\text{Re}\left\{\vec{E}(\vec{r}, t)\right\} = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0), \text{ sau}$$

$$\text{Im}\left\{\vec{E}(\vec{r}, t)\right\} = \vec{E}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0).$$

De obicei, $\text{Re} \{ \vec{E}(\vec{r}, t) \}$ și $\text{Im} \{ \vec{E}(\vec{r}, t) \}$ sunt notate, pentru simplitate, tot cu litera $\vec{E}(\vec{r}, t)$.

Observație: Aceleași considerații sunt valabile și pentru vectorul inducție al câmpului magnetic: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)\}$;

Deoarece calculele matematice se simplifică foarte mult, în practică, se preferă utilizarea formei complexe (1). De multe ori, faza inițială este inițializată cu valoarea zero ($\varphi_0 = 0$).

b) Semnificația fizică a mărimilor.

Semnificația fizică a mărimilor care intervin în relația (1) este următoarea:

- ◆ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ reprezintă *elongația unde electrice* în punctul de vector de poziție \vec{r} la momentul de timp t . Dacă punctul de vector de poziție \vec{r} se alege ca origine a unui sistem de coordonate, atunci $\vec{r} = 0$ și în acest caz avem $\vec{E}(t) = E_0 \cdot e^{i\omega t}$ sau $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cdot \cos\omega t$, dacă alegem faza inițială $\varphi_0 = 0$.
- ◆ \vec{E}_0 reprezintă *amplitudinea unde plane armonice*.
- ◆ $\Phi(\vec{r}, t) = \omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$ reprezintă *faza unde plane armonice*.
- ◆ ω este *pulsajia unde*.
- ◆ \vec{k} este *vectorul de undă* ce are direcția și sensul vitezei de deplasare \vec{v} a unde. Modulul, k , al vectorului de undă se numește *număr de undă*.

Nu trebuie să se confunde vectorul de undă \vec{k} cu versorul axei Oz notat uneori tot cu \vec{k} , $|\vec{k}| = 1$.

c) Relații care intervin între mărimile enumerate.

Modulul vectorului de undă: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, unde λ este lungimea de undă a unde armonice plane.

Vectorul de undă: $\vec{k} = k \cdot \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{n}$, unde \vec{n} reprezintă versorul vectorului \vec{k} .

Pulsația (frecvență unghiulară): $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$, unde ν reprezintă frecvența de oscilație a undei, T este perioada de oscilație a undei.

Lungimea de undă a undei. $\lambda = vT$, unde v reprezintă viteza de fază a undei (viteza de deplasare a fazei undei).

Din relațiile $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$ și $\lambda = vT$ rezultă:

$$\frac{\omega}{k} = v \quad (4).$$

Dacă se scriu expresiile analitice pentru vectorii \vec{k} și \vec{r} :

$$\vec{k} = k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z, \quad \vec{r} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z,$$

unde \vec{e}_x , \vec{e}_y și \vec{e}_z reprezintă versorii asociați unui sistem de referință cartezian ($|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1$), alții decât cei notați până acum cu \vec{i} , \vec{j} și \vec{k} pentru a se putea evita confuzia ultimului cu vectorul de undă (notat tot cu \vec{k}) și a primului cu numărul complex imaginar i (care are proprietatea: $i^2 = -1$).

Atunci, produsul scalar $\vec{k} \cdot \vec{r}$ are expresia analitică următoare:

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z \quad (5).$$

d) Suprafața de undă.

În procesul de propagare a unei unde plane (monocromatice) se poate întotdeauna găsi locul geometric al punctelor care au aceeași fază (se găsesc în fază), adică cu proprietatea următoare:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const.} \equiv c_1 \quad (6)$$

Pentru un t dat, $t=t_0$, ecuația (6) reprezintă ecuația unui plan în spațiu:

$$\omega t_0 - k_x x - k_y y - k_z z \equiv c_1 \quad (7),$$

care are forma generală: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Totalitatea punctelor dintr-un astfel de plan definesc o suprafață denumită *suprafață de undă a undei plane*. În concluzie, se poate aborda următoarea definiție:

Definiție: *Locul geometric al punctelor din spațiu (mediu) în care se propagă o perturbație, pentru care Ψ are la un moment dat " t_0 " aceeași valoare constantă " a " este o suprafață, denumită suprafață de undă: $\Psi \equiv \Psi(x, y, z, t_0) = \text{const.} = a$.*

Suprafața în care punctele oscilează în concordanță de fază reprezintă o suprafață de undă.

e) Ecuația elongației unei unde electromagnetice armonice sferice progresive.

Dacă izvorul generator de unde electromagnetice (izvorul perturbației electromagnetice) are dimensiuni mici (punctuale) și viteza de propagare a perturbației în toate direcțiile este aceeași (mediul este izotrop) suprafața de undă a unei trebuie să aibă forma unei suprafețe sferice, de ecuație $r = \text{const.}$, a cărei centru coincide cu izvorul. Într-un asemenea caz, unda electromagnetică se numește sferică. Suprafața de undă poate fi considerată ca fiind sferică dacă distanța r este mai mare sau egală cu de zece ori dimensiunile liniare ale izvorului.

Ecuația elongației unei asemenea unde sferice monocromatice are următoarea formă matematică (fără demonstrație):

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot \sin \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \frac{A}{r} \cdot \sin(\omega t - kr) \quad (8),$$

sau

$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) = \frac{A}{r} \cdot \cos(\omega t - kr) \quad (8'),$$

iar sub formă complexă:
$$\Psi(r, t) = \frac{A}{r} \cdot e^{i(\omega t - kr)} = \frac{A}{r} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{r}{v} \right)} \quad (8'').$$

Observație: Dacă în ecuația (8) v devine $-v$ se obține ecuația unei armonice sferice regresive.

A este amplitudinea $\mathcal{A} = A/r$ la distanța $r = 1\text{m}$ de sursă, iar $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ reprezintă distanța de la sursă la un punct arbitrar de coordonate (x, y, z) aparținând unei suprafețe de undă sferice oarecare, centrată pe sursă. Expresiile (8) și (8') arată că amplitudinea unei unde sferice $\mathcal{A} = A/r$ scade invers proporțional cu distanța r față de izvor și prin urmare, intensitatea unei, proporționale cu pătratul amplitudinii (a se vedea capitolul dedicat interferenței luminii), descrește cu pătratul distanței față de izvor. Dacă r devine suficient de mare, suprafața de undă sferică poate fi considerată aproximativ ca fiind plană. Orice dreaptă pornind din izvor constituie o *rază*. Orice rază este perpendiculară pe suprafața unei.

5.4. Soluțiile particulare ale ecuațiilor de propagare a undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse

Să demonstrăm că soluțiile particulare ale ecuațiilor de propagare a undelor electromagnetice (când $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$),

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1),$$

sunt de forma undelor armonice plane tridimensionale:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})\}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cdot \exp\{i(\omega \cdot t - \vec{k} \cdot \vec{r})\}. \quad (2).$$

Printr-un calcul direct se arată că (2) verifică, de exemplu, ecuația de propagare a undelor electromagnetice $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, și $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Într-adevăr, dacă se rescrie soluția pentru câmpul electric sub forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega \cdot t - k_x \cdot x - k_y \cdot y - k_z \cdot z)\} \quad (2')$$

și se evaluează expresia $\Delta \vec{E} = \nabla^2 \vec{E}$ care apare în ecuația (1):

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} \quad (3),$$

se obțin pe rând derivatele spațiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} &= -i \cdot k_x \cdot \vec{E}; & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} &= -k_x^2 \vec{E}; \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} &= -i \cdot k_y \cdot \vec{E}; & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} &= -k_y^2 \vec{E}; \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} &= -i \cdot k_z \cdot \vec{E}; & \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} &= -k_z^2 \vec{E}. \end{aligned} \quad (4)$$

Deoarece $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$, prin adunarea relațiilor (4) rezultă:

$$\Delta \vec{E} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot \vec{E} = -k^2 \cdot \vec{E} \quad (5).$$

În continuare vom evalua derivata temporală $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$, care intervine în ecuația (1). Rezultă:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \vec{E}, \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \quad (6).$$

Deoarece, $\omega^2 = k^2 v^2$, după înlocuirea relațiilor (5) și (6) în (1) se obține:

$$-k^2 \vec{E} + \frac{1}{v^2} k^2 v^2 \vec{E} = 0 \quad (7).$$

În concluzie (2) este o soluție a ecuației (1). Se arată la fel că (2) este o soluție a celei de-a doua ecuație diferențială din (1).

5.5. Proprietățile undelor electromagnetice pentru un mediu fără surse.

a) Undele electromagnetice sunt unde transversale, adică vectorii \vec{E} și \vec{B} sunt perpendiculari pe direcția \vec{k} de propagare a unde.

$$\vec{E} \perp \vec{k} \text{ sau } \vec{E} \perp \vec{v} \text{ și } \vec{B} \perp \vec{k} \text{ sau } \vec{B} \perp \vec{k}$$

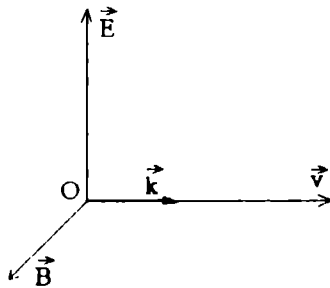


Fig. 5.1

Demonstrație: Se pornește de la expresia sub formă complexă a intensității câmpului electric:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)\} \quad (1),$$

care se derivează parțial în raport cu x , y , z :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} = -i \cdot k_x \cdot \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = -i \cdot k_y \cdot \vec{E}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -i \cdot k_z \cdot \vec{E} \quad (2).$$

După înmulțirea relațiilor (2) cu versorii ortogonali \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z și adunarea lor, rezultă:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = -i \cdot (k_x \cdot \vec{e}_x + k_y \cdot \vec{e}_y + k_z \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{E} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E} \quad (3).$$

Întrucât $\vec{E} = E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z$ și deoarece $\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = 1$,
 $\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_x = 0$, din relația (3) se obține:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial}{\partial x} (E_x \cdot \vec{e}_x + E_y \cdot \vec{e}_y + E_z \cdot \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x = \frac{\partial E_x}{\partial x} (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x) + \frac{\partial E_y}{\partial x} (\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x) + \frac{\partial E_z}{\partial x} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_x) = \frac{\partial E_x}{\partial x}$$

$$\text{Analog: } \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Prin urmare:

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \cdot \vec{e}_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \equiv \text{div} \vec{E} \quad (4).$$

Substituind (4) în (3) se obține relația: $\text{div} \vec{E} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E}$ sau
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E}$ (4').

După simplificarea cu vectorul \vec{E} relația (4') devine:

$$\boxed{\vec{\nabla} = -i \cdot \vec{k}} \quad (5).$$

Analog, se arată că:

$$\text{div} \vec{B} = -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{B} \quad (6).$$

Deoarece mediul este, prin ipoteză, fără surse: $\rho=0$ și $\vec{j} = 0$, ecuațiile

lui Maxwell, $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ și $\text{div} \vec{B} = 0$, devin:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0} \quad \text{și} \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad (7).$$

Atunci din ecuația (4') și (6) se obține:

$$-i \cdot \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{și} \quad -i \cdot \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8).$$

După simplificarea cu (-i) rezultă egalitățile importante:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{și} \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (9).$$

Pe de altă parte, prin definiție, produsele scalare:

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = |\vec{k}| \cdot |\vec{E}| \cdot \cos \theta_1 \stackrel{(9)}{=} 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pi/2$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = |\vec{k}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \theta_2 \stackrel{(9)}{=} 0 \Rightarrow \cos \theta_2 = 0 \Rightarrow \theta_2 = \pi/2.$$

Concluzia este $\vec{E} \perp \vec{k}$ și $\vec{B} \perp \vec{k}$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Vectorii \vec{E} și \vec{B} sunt reciproc perpendiculari: $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Demonstrație: Se pornește de la ecuația lui Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (10)$$

Deoarece $\vec{B}(\vec{r}, t)$ se poate scrie sub forma unei unde armonice plane complexe,

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (11)$$

după efectuarea derivatei parțiale în raport cu t în relația (11):

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (12),$$

ecuația (10) se scrie astfel:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B} \quad (13).$$

Dar în virtutea relației (6), operatorul nabla se scrie, $\vec{\nabla} = -i \cdot \vec{k}$ care înlocuit în (13) conduce la relația:

$$-i \cdot \vec{k} \times \vec{E} = -i \cdot \omega \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \quad (14).$$

Dacă se înmulțește scalar egalitatea (14) cu vectorul \vec{E} se obține:

$$\vec{E} \cdot (\vec{k} \times \vec{E}) = \omega \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (15).$$

Întrucât produsul mixt din stânga egalității (15) are doi factori identici, rezultă că acesta este egal cu zero. În concluzie:

$$\omega \cdot \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B},$$

ceea ce trebuie demonstrat.

c) Oscilațiile vectorilor \vec{E} și \vec{B} sunt în fază, adică, modulele lor $E(\vec{r}, t)$ și $B(\vec{r}, t)$ ating concomitent și în aceleași puncte din spațiu valorile maxime, respectiv, minime.

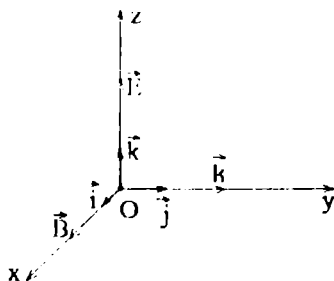


Fig.5.2

Demonstrație: Considerăm că unda electromagnetică se propagă în sensul axei y , iar vectorii \vec{E} și \vec{B} sunt orientați ca în figura 5.2. Ținând seama de aceste orientări ale vectorilor, dacă se pleacă de la relația (14), se obține:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & E \end{vmatrix} = \vec{e}_x \cdot k \cdot E \quad (15).$$

În acest caz relația (14), $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$, se va scrie astfel:

$$\vec{e}_x k E = \omega \vec{B} = \omega B \vec{e}_x \quad (16).$$

Rezultă:

$$kE = \omega B \quad (17).$$

Ținând seama de egalitatea

$$\omega/k = (2\pi/T) \cdot (\lambda/2\pi) = \lambda/T = v = 1/(\mu\epsilon)^{1/2} \quad (18),$$

care este cunoscută, se obține:

$$E = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} B \Rightarrow \sqrt{\epsilon} E = \frac{B}{\sqrt{\mu}},$$

sau

$$\boxed{E = \frac{B}{v}} \quad (19).$$

Din relația (19) rezultă că dacă $E = 0$ atunci $B = 0$, sau dacă $E = E_{\max}$ atunci $B = B_{\max}$. Cu alte cuvinte vectorii \vec{E} și \vec{B} oscilează în fază (sur.t în concordanță de fază). În consecință, forma undei electromagnetice este (v. fig.5.3):

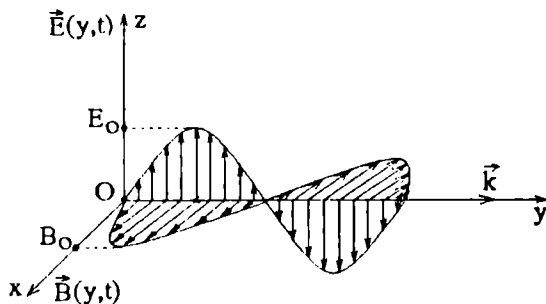


Fig.5.3

Cei trei vectori \vec{E} , \vec{B} și \vec{k} formează un triedru drept.

5.6. Energia undelor electromagnetice. Vectorul Poynting. Teorema Heaviside-Umov-Poynting

5.6.1. Energia undelor electromagnetice. Densitatea de energie electromagnetică

Ca și în cazul altor tipuri de unde, undelor electromagnetice le putem asocia un transport de energie, deoarece câmpurile \vec{E} și \vec{B} implică înmagazinarea de energie.

Definiție: Considerăm o regiune din spațiu a unui mediu material prin care se propagă o undă electromagnetică și fie S o suprafață ce închide în această regiune un volum τ_s . Dacă \vec{E} și \vec{B} sunt câmpurile asociate undei electromagnetice, energia totală, $W_{e.m.}$, asociată undei electromagnetice din interiorul acestei suprafețe este egală, prin definiție, cu:

$$W_{e.m.} = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\tau} \vec{E}^2 d\tau + \frac{1}{2\mu} \iiint_{\tau} \vec{B}^2 d\tau \quad (1),$$

unde

$$W_{el.} = \frac{\epsilon}{2} \iiint_{\tau} \vec{E}^2 d\tau \quad (2)$$

reprezintă energia înmagazinată în câmpul electric, iar

$$W_{mg.} = \frac{1}{2\mu} \iiint_{\tau} \vec{B}^2 d\tau \quad (2')$$

reprezintă energia înmagazinată în câmpul magnetic din unda electromagnetică ce străbate mediul material considerat.

Deoarece prin propagarea undei electromagnetice, valorile lui \vec{E} și \vec{B} , în interiorul suprafeței S , se modifică, se va modifica și energia electromagnetică $W_{e.m.}$ din volumul τ .

Altfel spus, propagării undei electromagnetice i se asociază un transport de energie prin suprafața S .

În cazul spațiului liber (vid) în relațiile (1), (2) și (2') constantele de material ϵ și μ se vor înlocui cu ϵ_0 și, respectiv, μ_0 .

5.6.2. Densitatea de energie electromagnetică

Densitatea de energie electromagnetică $w_{e.m.}$ se definește astfel:

$$w_{e.m.} = \frac{dW_{e.m.}}{d\tau} = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 = w_{el.} + w_{mg.}, \quad (1')$$

unde

$$w_{el.} = \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \text{ și } w_{mg.} = \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 \quad (2'')$$

reprezintă densitățile de energie electrică, respectiv magnetică.

5.6.3. Definiția vectorului Poynting. Semnificație fizică. Unitate de măsură

a) Definiția vectorului Poynting.

Definiție: Pentru a caracteriza transportul de energie electromagnetică vom defini un vector $\vec{\Pi}$, denumit vectorul Poynting:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \quad (3).$$

Modulul vectorului Poynting

$$|\vec{\Pi}| \equiv \Pi = \frac{1}{\mu} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{1}{\mu} E \cdot B \quad (4)$$

reprezintă din punct de vedere fizic densitatea fluxului de energie, adică energia transportată prin unitatea de arie a suprafeței S normală la direcția de propagare a unde în unitatea de timp.

Această interpretare rezultă din analiza dimensională a relației (4) sau din unitatea de măsură a lui $|\vec{\Pi}|$. Astfel, dacă $d\vec{s}$ este un element de arie orientat al suprafeței închise S , atunci produsul scalar (fluxul elementar al vectorului Poynting)

$$d\Phi_{\vec{\Pi}}^S = \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Pi \cdot ds \cdot \cos(\vec{\Pi}, \vec{n}) = \Pi \cdot ds_n, \text{ unde } d\vec{s} = ds \cdot \vec{n} \quad (5)$$

reprezintă cantitatea de energie (elementară) electromagnetică, $dW_{e.m.}$, ce iese din suprafața închisă S , prin elementul de arie $d\vec{s}$, în unitatea

de timp sau fluxul elementar al energiei electromagnetice prin suprafața $d\vec{s}$ ($ds_{\vec{n}} = ds \cdot \cos(\vec{\Pi}, \vec{n})$, $ds_{\vec{n}} \perp \vec{\Pi}$):

$$dW_{e.m.} \equiv d\Phi_{\vec{n}}^S = \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Pi \cdot ds_{\vec{n}} \quad (6).$$

În acest caz, energia totală (integrală) electromagnetice, $W_{e.m.}$, care iese prin suprafața închisă S , în unitatea de timp, sau fluxul energiei electromagnetice prin suprafața S , se obține prin integrarea relației (6):

$$W_{e.m.} = \iiint_S dW_{e.m.} = \iiint_S d\Phi_{\vec{n}}^S = \iiint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} = \Phi_{\vec{n}}^S \quad (7)$$

și este egală cu fluxul vectorului Poynting extins la suprafața închisă S .

b) Orientarea vectorului Poynting.

Vectorul $\vec{\Pi}$ este perpendicular pe planul vectorilor \vec{E} și \vec{B} și coincide ca direcție și sens cu vectorul viteză \vec{v} al undei electromagnetice (sau cu vectorul de undă \vec{k}). Direcția și sensul vectorului $\vec{\Pi}$ arată direcția și sensul de propagare a energiei electromagnetice.

c) Unitatea de măsură în S.I. a modulului vectorului $\vec{\Pi}$.

Deoarece:

$$\Pi = \frac{|\vec{E} \times \vec{B}|}{\mu} = \frac{1}{\mu} E \cdot B, \quad |\vec{E} \times \vec{B}| = E \cdot B \cdot \sin \frac{\pi}{2} = E \cdot B \quad (8)$$

și dacă se au în vedere relațiile cunoscute

$$B = \frac{\mu I}{2r} \quad \text{și} \quad E = \frac{U}{d} \quad (9),$$

rezultă:

$$\langle B \rangle = \langle \mu \rangle \frac{\langle I \rangle}{\langle r \rangle} \quad \text{și} \quad \langle E \rangle = \frac{\langle U \rangle}{\langle d \rangle} \quad (10).$$

Deci, unitatea de măsură în S.I. pentru Π este:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{1}{\langle \mu \rangle} \cdot \langle E \rangle \cdot \langle B \rangle = \frac{1}{\langle \mu \rangle} \cdot \left(\frac{\langle U \rangle}{\langle d \rangle} \right) \cdot \langle \mu \rangle \cdot \left(\frac{\langle I \rangle}{\langle r \rangle} \right) = \frac{V \cdot A}{m^2} \quad (11).$$

Pe de altă parte, din expresia legii lui Joule-Lenz $W=UIt$ rezultă:

$$\langle U \cdot I \rangle = \langle U \rangle \cdot \langle I \rangle = V \cdot A = \frac{\langle W \rangle}{\langle t \rangle} = \frac{J}{s} \quad (12).$$

Cu alte cuvinte,

$$V \cdot A = J/s \quad (13)$$

și în concluzie:

$$\langle \Pi \rangle = \frac{J}{m^2 \cdot s} = \frac{J/s}{m^2} = \frac{\text{watt}}{m^2} \quad (14).$$

Din relația (14) rezultă semnificația fizică a modulului vectorului Poynting ca fiind energia transferată prin unitatea de arie a suprafeței S în unitatea de timp.

Prin urmare, vectorul Poynting are dimensiunea unei puteri pe unitatea de arie sau a unei energii pe unitatea de arie și unitatea de timp, adică: $\langle \Pi \rangle_{S,t} = J/(s \cdot m^2) = \text{watt}/m^2$.

5.6.4. Teorema Heaviside-Umov-Poynting. Legea conservării energiei electromagnetice

Legea conservării energiei electromagnetice: Rata de scădere în timp (viteza de variație sau scădere în unitatea de timp) a energiei înmagazinate în câmpul electromagnetic care se propagă printr-un volum finit τ_S din spațiu, mărginit de suprafața S , este egală cu fluxul vectorului Poynting (sau fluxul energiei electromagnetice) prin suprafața S plus pierderile prin efect Joule-Lenz care au loc în domeniul de volum τ_S .

sau

Scăderea energiei electromagnetice în unitatea de timp

$\left(-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t} \right)$ în domeniul considerat de volumul τ_S este egală cu suma

dintre fluxul de energie electromagnetică $\Phi_{\vec{n}}^S$ care străbate suprafața S ce mărginește volumul dat τ și căldura degajată în domeniul respectiv în unitatea de timp prin efect Joule-Lenz, $\left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)$.

Forma matematică a acestei legi:
$$\boxed{-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t} = \Phi_{\vec{n}}^S + \frac{\partial W}{\partial t}}$$
, unde

$\Phi_{\vec{n}}^S = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$ reprezintă fluxul de energie electromagnetică ce străbate

suprafața închisă S (sau cantitatea de energie ce traversează suprafața S în unitatea de timp).

Demonstrație: Se pornește de la sistemul ecuațiilor lui Maxwell sub formă diferențială pentru un mediu cu surse ($\rho \neq 0$, $j \neq 0$). Prin ipoteză, mediul este considerat omogen și izotrop, adică mărimile de material ϵ , μ și σ sunt constante.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (15), \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (16).$$

Dacă se înmulțește scalar prima ecuație cu \vec{B} și a doua ecuație cu \vec{E} , după scăderea acestora se obține:

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu \vec{E} \cdot \vec{j} + \epsilon \mu \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (17).$$

Deoarece:

$$\epsilon \mu \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \mu \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right) \quad (18)$$

și dacă se face apel la egalitatea vectorială

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (19)$$

(fără demonstrație), după împărțirea cu μ , relația (17) devine:

$$\frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{E} \cdot \vec{j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) \quad (20).$$

Dacă se integrează egalitatea (20) pe domeniul de volum τ_s , mărginit de suprafața S , se obține:

$$\frac{1}{\mu} \iiint_{\tau_s} \vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\tau = - \iiint_{\tau_s} \vec{E} \cdot \vec{j} \cdot d\tau - \frac{1}{2} \iiint_{\tau_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{\mu} \right) \cdot d\tau \quad (21).$$

Având în vedere legea lui Ohm sub formă diferențială $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, sub forma integrală a legii Joule-Lenz:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_{\tau_s} \sigma \vec{E}^2 d\tau = \sigma \iiint_{\tau_s} \vec{E}^2 d\tau \quad (22)$$

relația (21) se va scrie astfel:

$$-\frac{1}{2} \iiint_{\tau_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) d\tau = \frac{1}{\mu} \iiint_{\tau_s} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d\tau + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (23).$$

Deci volumul τ_s mărginit de suprafața S este considerat imobil (deci acesta nu depinde de t), atunci:

$$-\frac{1}{2} \iiint_{\tau_s} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) d\tau = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau_s} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) d\tau \quad (24).$$

Deoarece, prin definiție, mărimea:

$$W_{e.m.} = \frac{1}{2} \iiint_{\tau_s} \left(\epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu} \vec{B}^2 \right) d\tau \quad (25)$$

reprezintă energia electromagnetică totală conținută în volumul τ_s , iar

vectorul $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$ este vectorul Poynting asociat undeii

electromagnetice considerate. Dacă se ține seama de (24), egalitatea (23) devine:

$$-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) d\tau \quad (26).$$

În continuare, în relația (26) vom utiliza teorema Gauss-Ostrogradski:

$$\iiint_{\tau_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}) d\tau = \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{s} \equiv \Phi_{\vec{\Pi}}^S \quad (27).$$

Relația (26) devine:

$$\boxed{-\frac{\partial W_{e.m.}}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \Phi_{\vec{\Pi}}^S} \quad (28),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Expresia (28) reprezintă *legea conservării energiei* pentru câmpul electromagnetic. Din această teoremă rezultă că în cazul proceselor electromagnetice energia se conservă, putând să se transforme în alte forme de mișcare cum ar fi mișcarea termică.

5.7. Intensitatea undeii electromagnetice armonice plane

Definiție: Intensitatea I a undeii electromagnetice este media temporală a valorii (modulului) vectorului Poynting asociat undeii electromagnetice (u.e.m): $I = \langle \Pi \rangle$.

Definiția mediei temporale a unei funcții periodice: Fie funcția $f(t)$ periodică cu perioada T , adică $f(t + T) = f(t)$ (1), T este un număr real. Media temporală pe intervalul de timp $t = T$, a funcției $f(t)$ este prin definiție:

$$f(t) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2).$$

Observație: Nu trebuie să se confunde semnul “<>” de la media temporală, cu același semn de la definiția unității de măsură a unei mărimi fizice.

5.7.1. Teoremele relativ la intensitatea undei electromagnetice plane

Teorema 1: Modulul (valoare) vectorului Poynting are expresia

următoare: $|\vec{\Pi}| \equiv \Pi = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2.$

Demonstrație: Fie $\vec{\Pi}$ vectorul Poynting al unei unde electromagnetice caracterizată de vectorii \vec{E} și \vec{B} :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = |\vec{\Pi}| \cdot \vec{n} = \left| \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} \right| \cdot \vec{n} = \frac{1}{\mu} |\vec{E} \times \vec{B}| \cdot \vec{n} \quad (3),$$

unde \vec{n} este versorul vectorului Poynting $\vec{\Pi}$. Deoarece $\vec{E} \perp \vec{B}$ rezultă că:

$$|\vec{E} \times \vec{B}| = E \cdot B \cdot \sin \frac{\pi}{2} = E \cdot B \quad (4)$$

și prin urmare relația (3) devine:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \cdot E \cdot B \cdot \vec{n} \quad (5).$$

În continuare, ne prevalăm de relațiile care ne arată că vectorii \vec{E} și \vec{B} sunt în concordanță de fază și care au fost deja demonstrați anterior:

$$B = \sqrt{\epsilon\mu} \cdot E \text{ sau } \frac{B}{\sqrt{\epsilon\mu}} = E \text{ sau } v \cdot B = E \quad (6).$$

În acest caz (6) devine:

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu} \sqrt{\epsilon\mu} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} \quad (7).$$

Deoarece prin ipoteză vectorul intensitatea câmpului electric \vec{E} are forma unei unde armonice plane tridimensionale:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (8),$$

substituind (8) în (7) se obține:

$$\vec{\Pi} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \cdot \vec{n} \quad (9).$$

Întrucât \vec{n} este versorul vectorului $\vec{\Pi}$ și deci $|\vec{n}|=1$, valoarea (modulul) vectorului Poynting Π se poate scrie dacă se pornește de la relațiile (9) sub formele următoare:

$$|\vec{\Pi}| \equiv \Pi = \left| \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{n} \right| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \cdot |\vec{n}| \quad (10),$$

Deci:

$$\Pi = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 \quad (10').$$

Aici s-au folosit proprietățile modulului și faptul că mărimile $\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$, \vec{E}_0^2 $\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ sunt pozitive. Relația (10') demonstrează teorema 1.

Deoarece, prin definiție, densitatea de energie electrică este

$$w_{el.} = \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2, \text{ din (9) rezultă, de asemenea, că:}$$

$$|\vec{\Pi}| \equiv \Pi = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}^2 = \frac{2}{\sqrt{\epsilon \mu}} \cdot w_{el.} = 2 \cdot v \cdot w_{el.} \quad (11).$$

Teorema 2: Intensitatea I a unei unde electromagnetice armonice plane tridimensionale este proporțională (\sim) cu pătratul amplitudinii \vec{E}_0^2 a

vectorului intensitate a câmpului electric și are expresia: $I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow I \sim \vec{E}_0^2.$$

Demonstrație: În virtutea relației (10') și a definiției intensității I a unei unde electromagnetice armonice se poate scrie:

$$I \equiv \langle \Pi \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \frac{1}{T} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2 \cdot J \quad (12),$$

unde T este perioada funcției periodice $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Pentru a evalua integrala notată cu J care apare în (12) se va utiliza relația trigonometrică cunoscută:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (13)$$

(v. anexa). Rezultă:

$$J \equiv \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r})}{2} dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}) dt$$

deci:

$$J = \frac{T}{2} + J_1 \quad (14).$$

În continuare vom arăta că integrala $J_1 = 0$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^T \cos(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \frac{1}{2\omega} \cdot \sin(2\omega t - 2\vec{k} \cdot \vec{r}) \Big|_0^T = \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\sin\left(\frac{4\pi}{T} \cdot T - 2\vec{k} \cdot \vec{r}\right) - \sin(-2\vec{k} \cdot \vec{r}) \right] \quad (15). \end{aligned}$$

Deoarece sunt cunoscute relațiile trigonometrice:

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha, \quad k = 2$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (16),$$

rezultă imediat că: $J_1 = \frac{1}{2\omega} (-\sin 2\vec{k} \cdot \vec{r} + \sin 2\vec{k} \cdot \vec{r}) = 0$. Înlocuind $J = T/2$

în (12) rezultă că intensitatea unde electromagnetice $I = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \vec{E}_0^2$,

ceea ce trebuia demonstrat.

Observații: (relativ la conceptul de intensitate a unde electromagnetice)

1) În optică se întrebuințează pentru intensitatea unde electromagnetice (intensitatea luminoasă, $\bar{I} = I$ mare cu bară deasupra) următoarea definiție:

$$\bar{I} = \langle \bar{E}^2 \rangle = \langle \bar{E}_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle \quad (17).$$

Efectuând integrala din expresia (17) se obține, până la un factor egal cu $\sqrt{\epsilon/\mu}$, aceeași expresie ca în teorema 2. Într-adevăr, rezultă relația

$$\bar{I} = \langle \bar{E}^2 \rangle = \frac{1}{T} \cdot \bar{E}_0^2 \cdot \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \rangle = \bar{E}_0^2 \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt = \frac{1}{T} \cdot \bar{E}_0^2 \cdot I = \frac{1}{2} \cdot \bar{E}_0^2$$

(18), deoarece integrala I , care apare aici, are valoarea cunoscută dedusă anterior: $I = T/2$. Din cele spuse mai înainte (teorema 2) avem relația:

$$I = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \bar{E}_0^2 \quad (19),$$

ceea ce arată că cele două mărimi I și \bar{I} diferă una de alta doar prin

$$\text{factorul } \sqrt{\epsilon/\mu} : I = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cdot \bar{I}.$$

În abordarea subiectului relativ la interferența luminii, care va urma, se va utiliza pentru definiția intensității luminoase relația (18)

$$\bar{I} = \langle \bar{E}^2 \rangle = \frac{1}{2} \bar{E}_0^2 \quad (20).$$

În cele ce urmează, mărimea \bar{I} , chiar dacă diferă de I printr-un factor, va fi notată, în continuare, tot cu I .

2) Intensitatea undei electromagnetice (intensitatea câmpului luminos \bar{E}) este o mărime proporțională cu valoarea medie a energiei conținută în unitatea de volum a câmpului electromagnetic, deci cu densitatea $w_{e.m.}$ de energie radiantă. Într-adevăr:

$$w_{e.m.} = \frac{1}{2} \cdot \epsilon \cdot \bar{E}^2 \quad (21),$$

$$\text{și deci } \bar{I} = \langle \bar{E}^2 \rangle = \left\langle \frac{2}{\epsilon} \cdot w_{e1} \right\rangle = \frac{2}{\epsilon} \langle w_{e1} \rangle \quad (22).$$

Cu alte cuvinte:

$$\bar{I} \sim \langle w_{e1} \rangle \quad (23).$$

3) Wiener a demonstrat experimental că în fenomenele luminoase vectorul inducției magnetice \vec{B} din unda electromagnetică nu joacă nici un rol. Important este doar vectorul intensitate electrică \vec{E} (vectorul luminos).

Capitolul 6

INTERFERENȚA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

6.1. Introducere

a) Definiția fenomenului de interferență.

Spre deosebire de undele mecanice la care rezultatul interferenței (suprapunerii) undelor se putea observa direct urmărind amplitudinea rezultantă, în cazul luminii, rezultatul interferenței se poate aprecia numai după intensitatea luminoasă I (definită anterior) în punctul respectiv. Ochiul sau orice receptor optic prezintă o anumită inerție și din acest motiv acestea vor sesiza doar acțiunea medie în timp a energiei undelor electromagnetice conținută în unitatea de volum a câmpului electromagnetic. (Prima definiție a fenomenului de interferență este generală, iar a doua este mai precisă).

Definiția 1: Prin interferența luminii se înțelege compunerea (suprapunerea) în același loc din spațiu a undelor electromagnetice provenite de la două sau de la un număr finit de surse coerente de radiație optică, ce oscilează după aceeași direcție și care au aceeași frecvență (sau aceeași lungime de undă).

Definiția 2: Două unde luminoase de aceeași frecvență interferă într-un punct, dacă intensitatea luminoasă rezultantă, I , în acel punct nu este egală cu suma intensităților componente: $I \neq I_1 + I_2$, (când termenul de interferență este nenul).

b) Condițiile necesare interferenței a două unde.

Pentru ca două unde electromagnetice să interfere este necesar ca ele să îndeplinească următoarele condiții:

- să se intersecteze într-o regiune din spațiu,
- să fie monocromatice (sau omogene),
- să îndeplinească condițiile de coerență,
- să aibă aceeași stare de polarizare.

c) Proprietățile mediei temporale.

Fie o funcție periodică $f(t)$ de perioadă

$$T: f(t + T) = f(t) \quad (1).$$

Prin definiție, media temporală a funcției $f(t)$ pe un interval de timp egal cu T este:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt \quad (2).$$

Se demonstrează ușor următoarele proprietăți ale mediei temporale:

I. Dacă $f(t)$, $g(t)$ sunt două funcții periodice temporale având aceeași perioadă T , atunci:

$$\langle \alpha \cdot f(t) \pm \beta \cdot g(t) \rangle = \alpha \cdot \langle f(t) \rangle \pm \beta \cdot \langle g(t) \rangle \quad (3),$$

unde α , β sunt constante arbitrare. Caz particular:

$$\langle \alpha \cdot f(t) \rangle = \alpha \cdot \langle f(t) \rangle \quad (4).$$

II. Dacă $f(t)$, $g(t)$ sunt două funcții periodice în timp având aceeași perioadă T , atunci:

$$\langle f(t) \cdot g(t) \rangle \neq \langle f(t) \rangle \cdot \langle g(t) \rangle \quad (5).$$

III. $\langle \alpha \rangle = \alpha$, unde α este o constantă.

6.2. Condiția necesară și suficientă de interferență. Termenul de interferență

a) Teorema care exprimă condiția de interferență.

Teoremă: Condiția necesară și suficientă pentru ca două unde de aceeași frecvență, caracterizate de vectorii intensitate a câmpului electric (vectorii luminoși) $\vec{E}_1(t)$ și $\vec{E}_2(t)$ să interfere într-un anumit punct din spațiu este ca media temporală

$$\langle \vec{E}_1(t) \cdot \vec{E}_2(t) \rangle \neq 0 \quad (1)$$

să fie nenulă.

Demonstrație: Să arătăm necesitatea. Dacă relația (1) are loc, rezultă $I \neq I_1 + I_2$. Pentru aceasta, presupunem că într-un punct arbitrar P din spațiu există două unde electrice (de tip armonic) cu aceeași frecvență, caracterizate de vectorii intensitate a câmpului electric $\vec{E}_1(t)$ și $\vec{E}_2(t)$.

În conformitate cu *principiul superpoziției*, câmpul electric rezultat în acest punct va fi suma vectorială a intensităților câmpurilor \vec{E}_1 și \vec{E}_2 , adică:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (2).$$

Deoarece \vec{E}_1 și \vec{E}_2 sunt funcții de timp și \vec{E} va fi, de asemenea, funcție de timp.

Să evaluăm intensitatea I rezultantă a câmpului electric total $\vec{E}(t)$ în punctul P considerat. În acest scop reamintim definiția intensității unei electromagnetice (utilizată în optică) ca medie temporală a pătratului vectorului câmp electric:

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle \quad (3).$$

Prin urmare, intensitatea totală a luminii I în punctul dat P va fi:

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (4).$$

Observație: Când se ridică la pătrat o sumă de doi vectori, termenul mixt se scrie ca un produs scalar a doi vectori. În acest caz:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot \cos(\widehat{\vec{E}_1, \vec{E}_2}) \quad (5).$$

Dacă vom utiliza în (4) proprietățile (3) și (4) din subcapitolul 6.1. ale mediei temporale, se obține:

$$I = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (6),$$

în care $I_1 = \langle \vec{E}_1^2 \rangle$ și $I_2 = \langle \vec{E}_2^2 \rangle$ reprezintă intensitățile luminoase pe care le-ar produce separat în punctul P vectorii \vec{E}_1 și \vec{E}_2 .

Examinând relația (6) se pot desprinde două situații distincte:

Situația 1: Dacă $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = 0$, atunci $\langle \vec{E}^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle$ sau $I = I_1 + I_2$. În virtutea definiției 2 care a fost dată interferenței, nu există interferență a celor două unde deoarece $I \neq I_1 + I_2$.

Situația 2: Dacă $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$, atunci $\langle \vec{E}^2 \rangle \neq \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle$ sau $I \neq I_1 + I_2$. În acest caz cele două unde interferă, fiind îndeplinită definiția 2. Reciproca teoremei (suficiența) se demonstrează în mod similar.

Termenul $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$, care apare în relația (6), se numește *termen de interferență*.

În concluzie, condiția necesară și suficientă pentru ca două unde luminoase de aceeași frecvență să interfereze într-un punct din spațiu este ca $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$. Prin urmare: $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0 \Leftrightarrow I \neq I_1 + I_2$.

b) Cicumstanțele matematice de validitate ale condiției de interferență: $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$.

Să explicităm produsul scalar care apare în inegalitatea $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \langle E_1 \cdot E_2 \cdot \cos\theta \rangle \neq 0 \quad (7).$$

Deoarece unghiul θ dintre vectorii \vec{E}_1 și \vec{E}_2 este presupus constant, rezultă $\cos\theta = \text{constant}$ și atunci, în virtutea proprietății mediei $\langle \alpha \cdot f(t) \rangle = \alpha \cdot \langle f(t) \rangle$, se poate scrie:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \cos\theta \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0 \quad (8).$$

Examinând inegalitatea (8) se constată că aceasta este satisfăcută dacă sunt îndeplinite *simultan* două condiții:

$$\cos\theta \neq 0 \quad \text{și} \quad \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0 \quad (9).$$

În cele ce urmează vom admite că undele luminoase reprezentate de vectorii \vec{E}_1 și \vec{E}_2 sunt *liniar polarizate*, cu alte cuvinte, $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ sau $\theta = 0$ ceea ce implică:

$$\cos\theta = \cos 0 = 1 \neq 0 \quad (10).$$

Prin urmare, din (8) rezultă:

$$\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0 \quad (11).$$

În concluzie, situațiile matematice de valabilitate pentru relația $\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \neq 0$ sunt următoarele:

$$\cos\theta \neq 0 \quad \text{și} \quad \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0 \quad (12).$$

6.3. Definiția coerenței a două unde luminoase. Condiția de coerență a două unde luminoase

a) Diferența de fază și de drum a două unde monocromatice

Să considerăm două surse luminoase punctiforme S_1 și S_2 (v. fig. 6.1) care emit radiații de aceeași pulsație $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2\pi\nu$ (aceleași

frecvență ν sau aceeași lungime de undă λ). Într-un punct P arbitrar din spațiu, elongațiile celor două unde \vec{E}_1 și \vec{E}_2 , prin ipoteză paralele ($\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$), presupunem că au ecuațiile:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1, t) = \vec{E}_{1_0} \cdot \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1), \quad \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \vec{E}_{2_0} \cdot \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2) \quad (1).$$

Pentru simplitatea calculului vom considera că cele două unde au aceeași amplitudine

$$\vec{E}_0: \vec{E}_{1_0} = \vec{E}_{2_0} = \vec{E}_0 = \text{constant}. \quad (2).$$

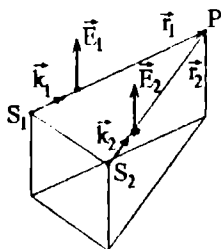


Fig. 6.1

Direcțiile de propagare a celor două unde sunt specificate de vectorii de undă \vec{k}_1 și \vec{k}_2 , care au același modul (deoarece $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$):

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3).$$

În plus, cei doi vectori au aceeași direcție și sens cu vectorii de poziție \vec{r}_1 și \vec{r}_2 al punctului P, față de sursele S_1 și S_2 . De aceea:

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1 = k_1 \cdot r_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_1 \equiv \varphi_1, \quad \vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2 = k_2 \cdot r_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r_2 \equiv \varphi_2,$$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = k_1 = k_2 = k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4).$$

În aceste condiții ecuațiile (1) se pot retranscrie astfel:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1), \quad \vec{E}_2(\vec{r}_2, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (5).$$

Dacă notăm cu ϕ_1 și ϕ_2 fazele celor două unde:

$$\phi_1 = \omega t - \varphi_1, \quad \phi_2 = \omega t - \varphi_2, \quad (6)$$

prin definiție, *diferența de fază* a celor două unde este:

$$\Delta\varphi = \phi_1 - \phi_2 = \omega t - \varphi_1 - (\omega t - \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1) = k\Delta r = (2\pi/\lambda) \cdot \Delta r \quad (7).$$

În concluzie, $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda) \cdot \Delta r$, unde Δr reprezintă *diferența de drum* a celor două unde.

b) Definiția coerenței și condiția de coerență a două unde liniar polarizate, monocromatice (sau omogene) și armonice.

Să examinăm în ce situație matematică este valabilă condiția $\langle E_1 \cdot E_2 \rangle \neq 0$ la care am ajuns în subcapitolul 6.2. Deoarece cele două unde sunt considerate liniar polarizate ($\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$), atunci prima condiție de interferență $\cos\theta = \cos 0 = 1 \neq 0$ este îndeplinită și prin urmare:

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot \cos\theta = E_1 \cdot E_2 = E_0^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \quad (8).$$

Să evaluăm, pornind de la (8), media temporală a produsului $E_1 E_2$ și să vedem în ce condiții aceasta este diferită de zero:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \langle E_0^2 \cdot \cos(\omega t - \varphi_1) \cdot \cos(\omega t - \varphi_2) \rangle \quad (9).$$

Pentru a evalua integrala care apare în (9) se utilizează relația trigonometrică cunoscută:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad (10).$$

Rezultă:

$$\begin{aligned} \langle E_1 \cdot E_2 \rangle &= \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \langle \cos[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] + \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \left\{ \langle \cos[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] \rangle + \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle \right\} \quad (11). \end{aligned}$$

În (11) s-a utilizat proprietatea mediei: $\langle f(t) + g(t) \rangle = \langle f(t) \rangle + \langle g(t) \rangle$.

În continuare, să arătăm că:

$$\langle \cos[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] \rangle = 0 \quad (12).$$

Într-adevăr:

$$\begin{aligned} \langle \cos[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] \rangle &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \cos[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \left\{ \frac{1}{2\omega} \cdot \sin[2\omega t - (\varphi_1 + \varphi_2)] \right\} \Big|_0^T = \\ &= \frac{1}{2\omega T} \cdot \left\{ \sin[2\omega T - (\varphi_1 + \varphi_2)] - \sin[-(\varphi_1 + \varphi_2)] \right\} \quad (13). \end{aligned}$$

Întrucât:

$$2\omega T = 2 \cdot 2\pi\nu T = 4\pi = 2k\pi, \quad k = 2;$$

$$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin\alpha; \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad (14)$$

rezultă că integrala de mai sus are valoarea zero. În consecință:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \langle \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \langle \cos \Delta\varphi \rangle \quad (15).$$

Definiția coerenței a două unde monocromatice: Dacă diferența de fază $\Delta\varphi$ a două unde de aceeași frecvență, care se compun într-un punct din spațiu, este constantă în timp, se spune că cele două unde, respectiv cele două surse, sunt **coerente**:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \text{constant}. \quad (16)$$

(condiția de coerență).

Relația:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = k(r_2 - r_1) = (2\pi) \Delta r / \lambda = \text{constant}. \quad (17)$$

constituie condiția de coerență a două unde luminoase. În această ipoteză (15) devine:

$$\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \cdot \langle \cos \Delta\varphi \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 \cos \Delta\varphi = \text{constant} \neq 0. \quad (18).$$

În concluzie, cele două unde monocromatice liniar polarizate interferă, adică $\langle E_1 E_2 \rangle \neq 0$, dacă $\Delta\varphi = \text{const.}$, cu alte cuvinte în cazul în care acestea sunt și coerente. Din relația (18) mai rezultă că $\cos \Delta\varphi = \text{constant} \neq 0$ dacă $\Delta\varphi \neq (2k + 1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$.

6.4. Intensitatea luminoasă a două surse coerente într-un punct din spațiu.

Prin definiție, această mărime are expresia:

$$I = \langle \vec{E}^2 \rangle = \langle (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2 \cdot \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle,$$

$$I = I_1 + I_2 + 2 \cdot \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle \quad (1).$$

Să scriem în continuare expresiile intensităților luminoase funcție de amplitudinile undelor care le produc (v. teorema 2, cap 5):

$$I_1 = \frac{1}{2} E_{10}^2 \quad \text{și} \quad I_2 = \frac{1}{2} E_{20}^2 \quad (2).$$

Prin ipoteză, $E_{10} = E_{20} = E_0$ și $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ (unde liniar polarizate). Prin urmare,

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cos(\vec{E}_1, \vec{E}_2) = E_1 \cdot E_2 \cos 0 = E_1 E_2 \quad (3)$$

și

$$I = \frac{1}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} E_0^2 + 2 \cdot \langle E_1 \cdot E_2 \rangle \quad (3')$$

În virtutea relației (15) $\langle E_1 \cdot E_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \langle \cos \Delta\varphi \rangle$. Putem, deci, scrie:

$$I = \frac{1}{2} E_0^2 + \frac{1}{2} E_0^2 + 2 \frac{1}{2} E_0^2 \langle \cos \Delta\varphi \rangle \quad (3'')$$

Deoarece cele două unde sunt coerente (prin ipoteză), $\Delta\varphi = \text{constant}$, rezultă $\cos \Delta\varphi = \text{constant} \neq 0$ și prin urmare:

$$\langle \cos \Delta\varphi \rangle = \cos \Delta\varphi \neq 0 \quad (4).$$

S-a utilizat aici proprietatea mediei temporale care afirmă că dacă $\alpha = \text{constant}$, atunci $\langle \alpha \rangle = \alpha$. Rezultă că intensitatea luminoasă totală I în punctul P se poate scrie astfel:

$$I = E_0^2 (1 + \cos \Delta\varphi) \quad (5).$$

Dacă ne amintim relația trigonometrică pentru semiunghi:

$$\cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \Delta\varphi}{2}} \quad (6),$$

expresia (5) se poate exprima astfel:

$$I = 2E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2} = 2E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{k \cdot \Delta r}{2} = 2E_0^2 \cos^2 \frac{2\pi \Delta r}{2\lambda} = 2E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta r}{\lambda} \quad (7).$$

Să comentăm din punct de vedere fizic relația (7):

$$I = 2E_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\pi \Delta r}{\lambda}. \quad (8)$$

a) Intensitatea luminoasă I va fi maximă în punctul P în cazul în care

$$\cos^2 \frac{\pi \Delta r}{\lambda} = 1 \Rightarrow \frac{\pi \Delta r}{\lambda} = k\pi \quad (9),$$

adică atunci când diferența de drum dintre cele două unde

$$\Delta r = r_2 - r_1 = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (10),$$

unde k este un număr întreg ($0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Intensitatea luminoasă, în acest caz, are valoarea:

$$I_{\max} = 2E_0^2 \quad (11).$$

b) Intensitatea luminoasă atinge, în punctul dat P, valori minime

dacă: $\cos^2 \frac{\pi \Delta r}{\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{\pi \Delta r}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$ adică, atunci când diferența de drum dintre cele două unde

$$\Delta r = r_1 - r_2 = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (12).$$

Din relația (8) se obține: $\cos^2 \frac{\pi \Delta r}{\lambda} = \cos^2 (2k + 1) \frac{\pi}{2} = 0$ și prin urmare:

$$I_{\min} = 0 \quad (13).$$

Drumul geometric și optic: Diferența $r_2 - r_1$ este o diferență de drum geometric și reprezintă diferența dintre distanțele parcurse de razele de lumină în vid până în punctul dat.

Dacă într-un mediu transparent având indicele de refracție n , lumina străbate o distanță r , produsul nr se numește drum optic și se notează cu:

$$(r) = nr \quad (14).$$

În acest caz condițiile de maxim și minim de interferență se vor transcrie astfel ($k \in \mathbb{Z}$):

Pentru maxime:

$$(\Delta r)_M = n \cdot \Delta r = n \cdot (r_2 - r_1) = 2k \frac{\lambda}{2} \quad (15)$$

și

Pentru minime:

$$(\Delta r)_m = n \cdot \Delta r = n \cdot (r_2 - r_1) = (2k + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (16).$$

Capitolul 7

DIFRACTIA UNDELOR ELECTROMAGNETICE

7.1. Definițiile fenomenului de difracție. Descriere experimentală.

Un fenomen fizic important produs de lumină, care confirmă natura ondulatorie a acesteia, îl constituie *difracția*. Aceasta este specifică tuturor undelor (radiațiilor) electromagnetice.

În continuare prezentăm trei (a, b, c) definiții fenomenologice și una (d) cu un caracter mai exact ale fenomenului de difracție a undelor electromagnetice.

a) Prima definiție.

Definiția 1: Fenomenul de difracție constă, în esență, în devierea direcției de propagare rectilinie a unei electromagnetice în prezența unor obstacole (paravane, fante, grile, etc...).

Astfel, unda electromagnetică poate pătrunde în spatele obstacolelor considerate opace pentru lungimea de undă a radiației utilizate.

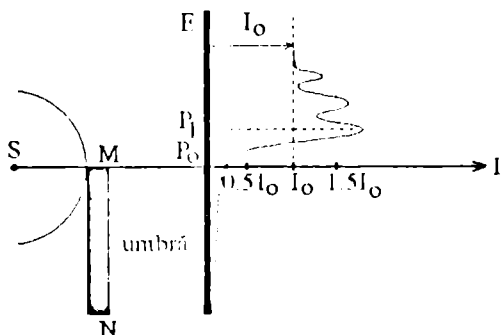


Fig. 7.1

Procesul poate fi urmărit ușor dacă se analizează modul de comportare al luminii în cazul plasării în drumul acesteia a unui paravan MN opac de forma unui semiplan (fig.7.1). Lumina care pleacă de la izvorul punctiform S în toate direcțiile și care, în absența semiplanului MN ar da pe un ecran E o intensitate I_0 în punctul P_0 , dă în prezența acestuia, tot în P_0 , numai $0,25I_0$ (25% din I_0) scăzând continuu până la zero în regiunea de umbră. În zona (regiunea) luminoasă se obțin maxime și minime de intensitate, primul maxim din P_1 depășind valoarea I_0 .

Cauza acestor fenomene complexe care apar la limita de separare dintre umbra geometrică (regiunea din umbră) și lumina geometrică (regiunea luminoasă) este fenomenul de difracție a luminii.

b) A doua definiție.

Efecte asemănătoare se observă dacă o sursă punctiformă monocromatică (omogenă) luminează un plan opac în care este practică o fantă dreptunghiulară sau un orificiu circular (apertură de formă circulară) de dimensiuni mici, comparabile cu lungimea de undă a radiației electromagnetice incidente. Pe un ecran se observă franje luminoase în alternanță cu franje întunecate de formă dreptunghiulară (franje liniare) și, respectiv, franje inelare concentrice (inele de interferență concentrice) ca în figurile 7.2.a și 7.2.b.

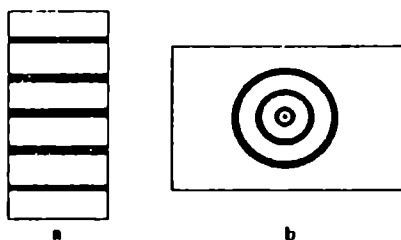


Fig 7.2

Definiția 2: Fenomenul de ocolire aparentă a obstacolelor opace de către lumină, când dimensiunile acestora sunt comparabile cu lungimea de undă a radiației utilizate, este cunoscut sub numele de difracție.

c) A treia definiție.

Definiția 3: Fenomenul de apariție a maximele și minimele de intensitate luminoasă la limita de separare dintre zona luminoasă și umbra geometrică se numește difracție, iar maximele și minimele respective sunt denumite franje de difracție.

Prezența franjelor luminoase sugerează posibilitatea interpretării lor ca un caz particular de interferență (admițând astfel natura ondulatorie a luminii) prin utilizarea principiului Huygens-Fresnel.

d) A patra definiție.

Indicele de refracție al unui mediu dielectric izotrop și omogen străbătut de o undă electromagnetică (radiație electromagnetică) se definește ca fiind raportul dintre viteza undei electromagnetice în vid ($c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$) și viteza ei în acel mediu (v):

$$n = \frac{c}{v}.$$

De asemenea, viteza undei în acel mediu dielectric depinde de lungimea de undă λ (sau de frecvența ν). Prin urmare, indicele de refracție al mediului, n , variază cu lungimea de undă λ (sau cu frecvența ν) corespunzătoare radiației electromagnetice: $n = n(\lambda)$. Acest fenomen se numește *dispersia* undei electromagnetice de către un mediu.

De exemplu, un mediu transparent ca aerul, pentru o undă electromagnetică omogenă din spectrul vizibil, are $n \approx 1$, iar un altul opac are $n \rightarrow \infty$. Un același obstacol poate fi opac pentru o radiație cu o anumită lungime de undă și transparent pentru o altă radiație care are o altă lungime de undă.

Putem defini gradientul indicelui de refracție al unui mediu dielectric neomogen dar izotrop după direcția Ox normală la vectorul de undă \vec{k} (deci, perpendiculară pe direcția de propagare rectilinie în mediu a undei electromagnetice) ca fiind rezultatul limitei următoare:

$$\vec{\nabla}n \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta n}{\Delta x} \cdot \vec{i} = \frac{dn}{dx} \cdot \vec{i} \quad \text{sau} \quad \vec{\nabla}n = \frac{dn}{dx} \cdot \vec{i},$$

adică valoarea limită a raportului dintre diferența a două valori distincte ale indicelui de refracție pentru același mediu străbătut de o undă monocromatică și distanța Δx dintre cele două zone ale mediului cu indicele n diferit înmulțit cu versorul \vec{i} al axei Ox . Din punct de vedere matematic, la limită Δx tinde către zero ($\Delta x \rightarrow 0$), dar din punct de vedere fizic această distanță Δx foarte mică este comparabilă cu lungimea de undă a radiației utilizate (mai mică sau mai mare decât λ). Dacă pe astfel de distanțe mici indicele de refracție al mediului variază

semnificativ (adică valoarea gradientului este considerabilă) atunci direcția de propagare a unei electromagnetice este deviată și are loc fenomenul de difracție. Practic, dacă se ține cont de principiul Huygens-Fresnel atât unda difractată (deviată de la direcția ei rectilinie de propagare) în acea zonă ce prezintă un gradient puternic al indicelui de refracție cât și o undă nedeviată, ambele provenite din radiația inițială, sunt două surse secundare coerente. Ele îndeplinesc condițiile de interferență, se intersectează și dau un fenomen de *interferență staționară* care conduce la apariția de maxime și de minime ale intensității undei (descrisă în definițiile anterioare).

Definiția 4: *Difracția reprezintă fenomenul fizic de deviere a direcției de propagare rectilinie a undelor electromagnetice în prezența unor gradienti puternici (pe distanțe comparabile cu lungimea de undă a radiației) ai indicelui de refracție, n , al mediului prin care se propagă undele respective.*

În concluzie, pentru o radiație electromagnetică cu o anumită lungime de undă (să spunem, din spectrul vizibil) paravanul MN (un semiplan din carton) descris în figura 7.1 este opac ($n_{MN} \rightarrow \infty$), iar în cealaltă parte este aer, deci un mediu transparent pentru radiație ($n \approx 1$). La frontiera dintre cele două medii (paravan și aer), pe distanțe mici, comparabile cu lungimea de undă a radiației, (pe o direcție paralelă cu ecranul E), avem o neomogenitate, deci un gradient puternic al indicelui de refracție (n variază de la ∞ la 1), care conduce la apariția fenomenului de difracție a radiației utilizate. Adică, avem o deviere a undei luminoase în acea zonă. Aceasta se intersectează cu alta care nu este deviată, provenită de la același fascicul de lumină, de deasupra paravanului. Cele două unde pot interfera și se obține pe ecran figura de interferență cunoscută. Desigur că pentru o altă radiație cu o lungime de undă din spectrul de raze X, paravanul nu mai este opac, iar fenomenul de difracție nu mai este vizibil.

Chiar dacă fenomenul de difracție nu este foarte pronunțat, el tot poate exista și în cazul unor medii dielectrice neomogene în care diferența Δn (de exemplu un $\Delta n \approx 0.6$) este mică, dar pe distanțe comparabile cu lungimea de undă a radiației gradientul este totuși mare.

f) Obiectivul teoriei difracției:

Obiectivul teoriei difracției este calcularea distribuției intensității luminoase dincolo de fronturile de undă distorsionate de obstacole pe care le întâlnește radiația optică.

Teoria Fresnel a difracției se bazează pe principiul Huygens-Fresnel și implică următoarele presupuneri:

- ◆ Fiecare punct al frontului de undă distorsionat emite unde sferice secundare;
- ◆ Suprapunerea undelor sferice secundare, cu luarea în considerație a fazei, constituie unda luminoasă care se propagă mai departe;
- ◆ Intensitatea luminoasă observată în orice punct din spațiu este proporțională cu pătratul amplitudinii undei.

Caracteristica esențială a obiectelor de difracție (orificii circulare, fante dreptunghiulare sau ecrane opace) este aceea că nu deformează frontul de undă, ci doar îl "mutilează".

7.2. Principiul Huygens-Fresnel

Fenomenul difracției nu aputut fi explicat decât admițând natura ondulatorie a luminii, pe baza principiului Huygens-Fresnel.

7.2.1. Enunțurile principiului Huygens-Fresnel

Enunțul 1: Orice front de undă poate fi considerat la un moment dat, t , ca o sursă de unde sferice secundare, având aceeași frecvență ν (sau lungime de undă λ) ca și unda incidentă, emise de fiecare punct a frontului de undă. Frontul de undă la un moment ulterior de timp $t' > t$ este dat de înfășurătoarea (suprafața tangentă a acestor unde) tuturor undelor secundare (Principiul lui Huygens).

Undele secundare sunt toate în fază (au aceeași fază), deci sunt coerente și prin urmare pot interfera, deci, undele secundare sunt mutual interferente (Postulatul lui Fresnel).

Principiul lui Huygens explică pătrunderea luminii în regiunea geometrică cu umbră, dar nu și producerea franjelor de difracție a cărei explicație este dată de completarea (postulatul) lui Fresnel. Următorul enunț este echivalent cu primul.

Enunțul 2: Orice punct de pe o suprafață de undă Σ la momentul t este centrul unei noi unde elementare astfel că înfășurătoarea tuturor undelor elementare Σ' va fi o suprafață de undă la un moment ulterior t' . Undele elementare inverse (cele care se propagă spre sursă) nu se iau în continuare (**Principiul lui Huygens**; v. fig.7.3.a).

Excitația luminoasă într-un punct arbitrar P poate fi considerată ca rezultat al interferenței tuturor undelor elementare emise de o suprafață de undă (**completarea lui Fresnel**; v. fig.7.3.b).

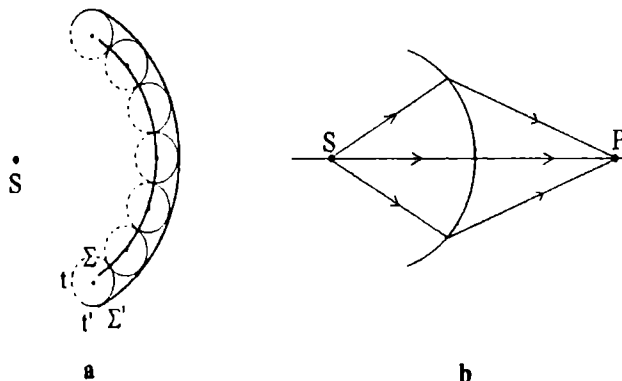


Fig.7.3

Observație: Sintagma “excitație luminoasă” din enunțul de mai sus poate fi înlocuită, în optică, prin una din sintagmele următoare: acțiune luminoasă, vibrație luminoasă, intensitatea câmpului electric, oscilație luminoasă, perturbație luminoasă, elongația undei.

7.2.2. Explicația difracției undelor în spatele unui semiplan infinit și în spatele unui disc finit cu ajutorul principiului lui Huygens

Putem deforma frontul de undă plan-parallel și, deci, abate lumina de la o linie dreaptă deformând frontul undelor secundare, de exemplu cu ajutorul unui semiplan (v. fig.7.4). Introducerea semiplanului împiedică formarea undelor sferice secundare și astfel se deformează frontul de undă. Un ecran E pus în spatele paravanului P va fi luminat în porțiunea OA , dar va fi luminat și în regiunea de umbră geometrică OB .

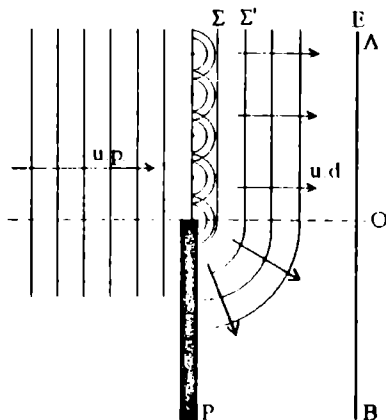


Fig. 7.4

Din figura 7.4 și mai ales din figura 7.5 rezultă: *conceptul de rază de lumină este utilizabil în mod aproximativ. Așa cum în realitate nu există punctul material, nu există nici raza de lumină.*

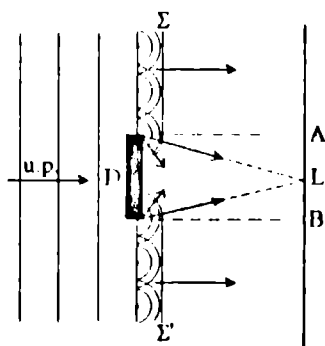


Fig. 7.5

Astfel, din fig.7.5 rezultă că dacă un disc este iluminat cu lumină provenită de la o sursă punctiformă foarte îndepărtată (pentru a avea unde plane) în mijlocul umbrei geometrice AB apare "paradoxal" o zonă luminoasă. Ocolirea obstacolelor de către lumină este, în acest mod, evidentă.

7.3. Forma matematică a principiului Huygens-Fresnel

Fie S o sursă punctiformă monocromatică (care emite lumină cu lungimea de undă λ) situată într-un mediu omogen (sau vid) și fie B un

punct în care ajunge lumina emisă în direcția SB (v. fig.7.6). Fie Σ poziția instantanee a unui front de undă sferică de rază R, care provine de la sursa punctiformă (ideală) S.

Conform principiului Huygens-Fresnel putem înlocui acțiunea sursei S în punctul B cu acțiunile punctelor $d\sigma$ pe suprafața S considerate ca izvoare luminoase fictive coerente între ele și distribuite continuu pe suprafața Σ , care au toate aceeași fază pe frontul de undă sferic Σ (echifază).

Dacă elongația vectorului intensitate a câmpului electric (vectorului luminos) pentru sursa S este reprezentată de relația $E_S(t) = E_0 \cdot \exp\{i\omega t\}$, unde E_0 reprezintă amplitudinea elongației în punctul S, atunci elongația unui punct M de pe suprafața Σ este:

$$E_M(R, t) = \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \quad (1)$$

(vezi expresia elongației unei sfere progresive în capitolul 5).

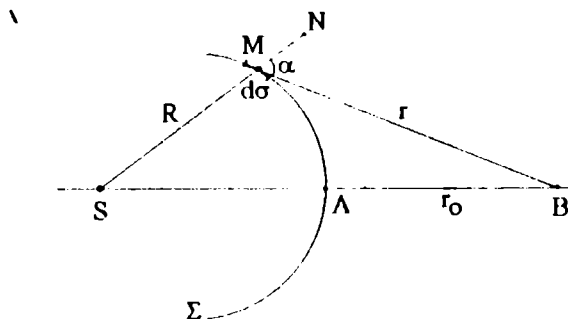


Fig. 7.6

Să considerăm un element de suprafață $d\sigma$ suficient de mic pentru a fi asimilat cu punctul M, element care trimite vibrații (luminoase) către punctul de observație B. Distanța r fiind aceeași pentru toate punctele elementului $d\sigma$, ele pot fi considerate că oscilează în fază.

Utilizând postulatul lui Fresnel, oscilația în punctul B provenită de la elementul de suprafață $d\sigma$ are elongația:

$$dE_B = f(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot \frac{\exp\{-ikr\}}{r} \cdot d\sigma \quad (2).$$

Factorul de Inclinare (oblicitate) $f(\alpha)$ a fost introdus de Fresnel pentru a exprima faptul că elongația vibrației în punctul B, dE_B , este dependentă

și de înclinarea dreptei MB față de normala N la suprafața Σ în M și că nu există unde secundare de întoarcere.

Într-adevăr, acest factor scade continuu cu creșterea unghiului α , ia valoarea zero pentru $\theta = \pi$ și este egal cu 1 pentru $\theta = 0$.

În teoria lui Kirchhoff $f(\alpha)$ are expresia următoare:

$$f(\alpha) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \begin{cases} 1, & \text{daca } \theta = 0 \\ 0, & \text{daca } \theta = \pi \end{cases} \quad (3).$$

Elongația în punctul B, dE_B , este direct proporțională, de asemenea, cu mărimea elementului de suprafață $d\sigma$. Această elongație, sumă a acțiunilor tuturor punctelor suprafeței de undă Σ (sumă echivalentă cu acțiunea directă a izvorului S) se va scrie astfel:

$$E_B = \iint_{\Sigma} dE_B = \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot \iint_{\Sigma} \frac{\exp\{-ikr\}}{r} \cdot f(\alpha) \cdot d\sigma \quad (4).$$

Expresia (4) se numește *integrala de difracție a lui Fresnel*.

7.4. Metoda zonelor lui Fresnel

Calculul direct al integralei de difracție (4) fiind foarte complicat este mult mai simplu și mai intuitiv să se utilizeze, pentru rezolvarea acesteia, *metoda zonelor lui Fresnel*.

Această metodă presupune trasarea unor suprafețe sferice cu centrul în punctul B, de raze $r_m = r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}$, $m \in \mathbb{N}$.

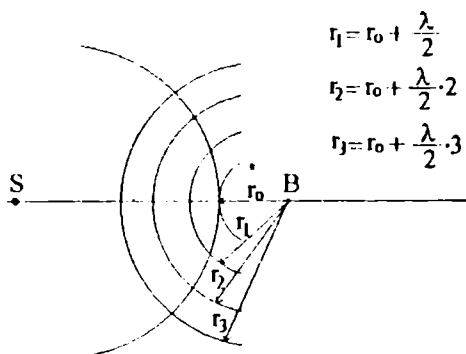


Fig. 7.7

Din intersecțiile acestor suprafețe sferice cu suprafața de undă sferică Σ , rezultă zonele Fresnel sau suprafețele semiundă Fresnel (fig.7.7). Se observă că undele care ajung în B de la aceste zone sunt defazate cu:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi,$$

deoarece pentru oricare zonă $\Delta r = r_m - r_{m-1} = \lambda/2$. Factorul de înclinare $f(\alpha)$ depinde de zona respectivă (adică de numărul m) și se consideră *constant* în cadrul aceleași zone Fresnel.

Să arătăm, în continuare, cum se calculează integrala dublă (integrala de suprafață) care apare în relația (4) din subcapitolul 7.3.

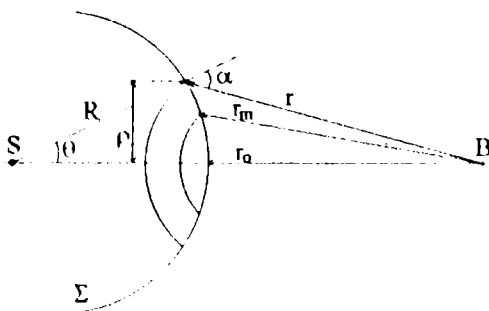


Fig.7.8

Din figura 7.8 rezultă, aplicând teorema cosinusului, relația următoare:

$$r^2 = (R + r_0)^2 + R^2 - 2R \cdot (R + r_0) \cdot \cos\theta.$$

Prin diferențierea acestei relații, în care mărimile r și θ sunt variabilele, rezultă:

$$2r \cdot dr = 2R \cdot (R + r_0) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \text{ sau } r \cdot dr = R \cdot (R + r_0) \cdot \sin\theta \cdot d\theta \quad (1).$$

În continuare, vom folosi expresia (din analiză matematică) elementului de arie de pe suprafața sferică de rază R în coordonate sferice

$$(R, \theta, \varphi): d\sigma = R^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi, \quad \theta \in (0, \pi], \quad \varphi \in (0, 2\pi] \quad (2).$$

Utilizând (1) în (2) rezultă:

$$d\sigma = \frac{R}{R + r_0} \cdot r \cdot dr \cdot d\varphi \quad (3).$$

Introducând elementul de arie $d\sigma$ în relația (4) din subcapitolul 7.3 putem calcula contribuția zonei cu numărul de ordine m la elongația undei (vibrației) în punctul B:

$$E_{m,B} = \frac{E_0}{R} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot f_m(\alpha) \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_{r_{m-1}}^{r_m} \frac{e^{-ikr}}{r} \cdot \frac{R}{R+r_0} \cdot r \cdot dr =$$

$$= \frac{E_0}{R+r_0} \cdot \exp\{i(\omega t - kR)\} \cdot 2\pi \cdot f_m(\alpha) \cdot \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{-ikr} \cdot dr \quad (4).$$

Deoarece $r_m = r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}$ și $r_{m-1} = r_0 + (m-1) \cdot \frac{\lambda}{2}$, integrala I care apare în (4) poate fi evaluată astfel:

$$I = \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{ikr} \cdot dr = -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ikr} \Big|_{r_{m-1}}^{r_m} = -\frac{1}{ik} \cdot (e^{ikr_m} - e^{-ikr_{m-1}}) = -\frac{1}{ik} \left[e^{ik\left(r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}\right)} - e^{-ik\left(r_0 + (m-1) \cdot \frac{\lambda}{2}\right)} \right] =$$

$$= -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ik\left(r_0 + m \cdot \frac{\lambda}{2}\right)} \left(1 - e^{ik \cdot \frac{\lambda}{2}} \right) = -\frac{1}{ik} \cdot e^{-ikr_0} \cdot e^{-ikm \cdot \frac{\lambda}{2}} \cdot \left(1 - e^{ik \cdot \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (5).$$

Introducând în (5) valoarea numărului de undă $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, putem scrie:

$$e^{-ikm \cdot \frac{\lambda}{2}} \left(1 - e^{ik \cdot \frac{\lambda}{2}} \right) = e^{-im\pi} \cdot (1 - e^{i\pi}) \quad (6).$$

În (6) vom utiliza relația lui Euler:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \cdot \sin \alpha \quad (7).$$

Rezultă:

$$e^{-im\pi} (1 - e^{i\pi}) = (\cos m\pi - i \cdot \sin m\pi) \cdot (1 - \cos \pi - i \cdot \sin \pi) =$$

$$= [(-1)^m + 0] \cdot [1 - (-1) - 0] = 2 \cdot (-1)^m \quad (8).$$

Prin urmare, valoarea integralei I este:

$$I = -\frac{2}{ik} \cdot (-1)^m \cdot e^{-ikr_0} \quad (9).$$

Așadar, elongația unei în punctul B, datorită contribuției zonei cu numărul m , este:

$$E_{m,B} = -\frac{2\pi}{ik} \cdot f_m(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R+r_0} \cdot 2(-1)^m \cdot \exp\{i[\omega t - k(R+r_0)]\},$$

$$E_{m,B} = \frac{2(-1)^{m+1}}{i} \cdot \lambda \cdot f_m(\alpha) \cdot \frac{E_0}{R+r_0} \cdot \exp\{-ik(R+r_0)\} \cdot \exp\{i\omega t\} \quad (10).$$

adică efectul luminos (elongația $E_{m,B}$) în punctul B dat de zona Fresnel cu numărul m , este caracterizat tot de ecuația unei oscilații armonice de amplitudine:

$$A_m = (-1)^{m+1} \cdot \frac{2\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R+r_0} \cdot f_m(\alpha) \quad (11).$$

Deci, toate undele ajunse în B de la diferitele zone Fresnel au toate aceeași fază, dar amplitudinile sunt alternativ pozitive și negative și scad treptat cu creșterea lui m , datorită creșterii unghiului α , deci scăderii lui f_m .

Elongația undei rezultante în punctul B va fi egală cu suma contribuțiilor numărului total N de zone Fresnel ($m=1, 2, 3, \dots, N$):

$$E_B = \sum_{m=1}^N E_{m,B} = \frac{2\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R+r_0} \cdot e^{-ik(R+r_0)} \cdot e^{i\omega t} \cdot \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \cdot f_m(\alpha) \quad (12).$$

Suma din relația (12) se poate explicita astfel:

$$\sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \cdot f_m = f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + \dots + (-1)^{N+1} \cdot f_N = \frac{f_1}{2} + \left(\frac{f_1}{2} - f_2 + \frac{f_3}{2} \right) + \left(\frac{f_3}{2} - f_4 + \frac{f_5}{2} \right) + \dots \quad (13)$$

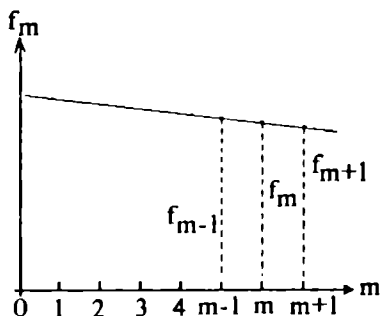


Fig. 7.9

Mai departe, Fresnel a postulat că factorul de înclinare f_m descrește încet și liniar în funcție de numărul de ordine m al zonelor Fresnel (v. fig. 7.9): $f_m = a \cdot m + b$ (a, b constante).

De aici rezultă imediat egalitatea următoare:

$$f_m = \frac{f_{m-1} + f_{m+1}}{2} \quad (13').$$

Din acest motiv, parantezele din relația (13) se anulează. Se mai observă că dacă N este par ultiimii doi termeni din suma (13) sunt $(1/2) \cdot (f_{N-1} - f_N)$.

De exemplu, dacă $N = 4$, ultimii doi termeni se scriu $(1/2) (f_3 - f_4)$. Dacă N este impar, ultimul termen al sumei este $f_N/2$. De exemplu, dacă $N = 3$, ultimul termen este $f_1/2$.

Din aceste considerente, elongația unei luminoase în punctul B se scrie astfel:

$$E_B = \left(\frac{2\lambda}{i} \right) E_o \cdot \frac{e^{i[\omega t - k(R+r_o)]}}{R+r_o} \begin{cases} \frac{f_1}{2} + \frac{f_{N-1}}{2} - f_N, & \text{dacă } N \text{ este par} \\ \frac{f_1}{2} + \frac{f_N}{2}, & \text{dacă } N \text{ este impar} \end{cases} \quad (14).$$

Egalitatea (14) se poate pune sub o formă finală mai simplă dacă se ține seama de faptul că f_m scade liniar în funcție de m . Această ipoteză conduce pentru zonele Fresnel imediat vecine la egalitatea aproximativă: $f_{m-1} \approx f_{m+1}$. Dar din relația (13) rezultă că:

$$f_m \approx f_{m+1} \approx f_{m-1} \quad (15).$$

Prin urmare, pentru $m = N$ suma $(f_1/2) + (f_{N-1}/2) - (f_N)$ care apare în (14) devine $(f_1/2) - (f_N/2)$ și în final, după simplificare cu 2, elongația câmpului electric din B se scrie astfel:

$$E_B = \left(\frac{\lambda}{i} \right) \cdot E_o \cdot \frac{e^{i[\omega t - k(r+r_o)]}}{R+r_o} \cdot (f_1 \mp f_N) \quad (16),$$

(relația lui Fresnel).

Se observă că mărimea E_B depinde de numărul total de zone Fresnel, N . Matematic acest lucru se scrie: $E_{N,R}$. Semnul "minus" corespunde cazului în care N este par, iar semnul "plus" corespunde cazului în care N este impar.

7.5. Difracția printr-o apertură circulară (difracția Fresnel)

7.5.1. Expresia numărului total de zone Fresnel N în funcție de parametrii R , ρ , r_o și λ

Să considerăm o deschidere circulară de rază ρ (v. fig.7.10). Să urătăm, în continuare, că numărul total de zone Fresnel, N , depinde de mărimile R , ρ , r_o și λ și are expresia următoare:

$$N = \rho^2 \cdot \frac{R+r}{R\lambda r_o} \quad (1).$$

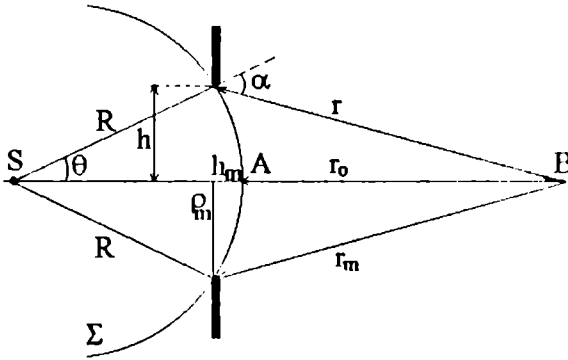


Fig.7.10

Demonstrație: Din figura 7.10 rezultă:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - (r_0 + h_m)^2 = r_m^2 - r_0^2 - 2r_0 h_m - h_m^2 \quad (2),$$

de unde, pentru $h_m \ll r_0$, deci $h_m^2 \ll r_0^2$ (h_m^2 se neglijează față de r_0^2), se obține:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - r_0^2 - 2r_0 h_m \quad (3).$$

Deoarece metoda zonelor Fresnel presupune $r_m = r_0 + m \frac{\lambda}{2}$

rezultă

$$r_m^2 = r_0^2 + m r_0 \lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4} \quad (4)$$

și deoarece λ este mic ($\lambda \ll 1$, ceea ce presupune $\lambda^2 \ll 1$, deci λ^2 se poate neglija), relația (4) devine:

$$r_m^2 - r_0^2 = m r_0 \lambda \quad (5).$$

De asemenea, este evidentă din figura 7.10, relația următoare:

$\rho_m^2 \equiv R^2 - (R - h_m)^2 = r_m^2 - (r_0 + h_m)^2$, de unde rezultă că:

$$h_m = \frac{r_m^2 - r_0^2}{2(R + r_0)} \quad (6).$$

Astfel, din relațiile (3), (6) și (5) se obține:

$$\rho_m^2 = r_m^2 - r_0^2 - r_0 \frac{r_m^2 - r_0^2}{R + r_0} \stackrel{(5)}{=} m \lambda \frac{R r_0}{R + r_0} \quad (7).$$

Pentru $m = N$, putem scrie $\rho_m = \rho_N \equiv \rho$ și deci din (7) se obține:

$$\rho^2 = N \frac{Rr_0}{R + r_0} \lambda$$

de unde

$$\rho = \sqrt{N\lambda} \cdot \sqrt{\frac{Rr_0}{R + r_0}} \quad (8)$$

sau

$$N = \frac{\rho^2 (R + r_0)}{Rr_0 \lambda} \quad (9),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

Caz particular: Dacă unda incidentă, care cade pe deschiderea circulară, este plană, adică $R \rightarrow \infty$, relația (9) conduce la valoarea:

$$N_{(R \rightarrow \infty)} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\rho^2 (R + r_0)}{Rr_0 \lambda} = \frac{\rho^2}{r_0 \lambda} \quad (10).$$

În figura 7.11 este prezentată fotografia unei figuri de difracție a radiației provenită de la un laser He-Ne printr-o apertură circulară practă într-un ecran opac.

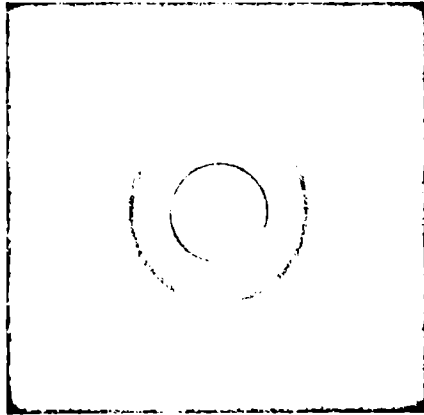


Fig. 7.11

7.5.2. Concluzii ale relației lui Fresnel

În cele ce urmează se va da explicația intensității luminoase a franjelor de difracție Fresnel cu ajutorul relației lui Fresnel.

a) Elongația unei rezultante în punctul B, E_B , când numărul de zone N este foarte mare ($N \gg \infty$, paravanul lipsește)

Așa cum am văzut (relația lui Fresnel) elongația unei rezultante în punctul de observare B, E_B , are forma următoare (v. relația 16 din subcapitolul 7.4.):

$$E_{N,B} = \left(\frac{\lambda}{i} \right) \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i(\omega t - k(R+r_0))} \cdot (f_1 \mp f_N) \quad (1),$$

depinzând de numărul N al zonelor Fresnel ($E_{1,B}$). Pentru N foarte mare ($N \rightarrow \infty$) unghiul de difracție Fresnel θ fiind, de asemenea mare, rezultă că factorul de oblicitate f_N trebuie să fie egal cu zero, deoarece acesta descrește către zero, prin definiție, dacă θ crește la π .

Prin urmare, pentru $N \rightarrow \infty$ $f_N \rightarrow 0$ iar elongația unei rezultante (1) în punctul B devine:

$$E_{\infty,B} = \frac{\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot f_1 \cdot e^{i(\omega t - k(R+r_0))} \quad (2).$$

b) Elongația unei rezultante în punctul B, E_B , când se consideră doar contribuția primei zone Fresnel, $N = 1$

În acest caz, orificiul circular practicat în paravan are raza egală cu cea corespunzătoare primei zone Fresnel.

Pentru cazul impar ($N = 1$) suma $f_1 + f_N$ din relația (1) devine $f_1 + f_N = 2f_1$, iar relația (1) capătă forma următoare:

$$E_{1,B} = 2 \cdot \frac{\lambda}{i} \cdot \frac{E_0}{R + r_0} \cdot f_1 \cdot e^{i(\omega t - k(R+r_0))} \quad (3).$$

c) Efectul direct al unei sferice emisă de sursa S în punctul B. Demonstrația egalității: $\lambda f_1 / l = 1$

Să scriem elongația unei sferice care ar ajunge direct în B de la sursa S. Aceasta are, la distanța $R + r_0$ față de sursă, forma următoare (v. ecuația unei sfere progresive):

$$E_B = \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i(\omega t - k(R+r_0))} \quad (4)$$

și trebuie să fie identică cu cea obținută la punctul (a) în relația (2), în cazul $N \rightarrow \infty$. Cu alte cuvinte este necesar ca:

$$\frac{\lambda \cdot f_1}{i} = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{i}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (5).$$

Așadar, undele secundare descrise de relația (2) vibrează cu un decalaj de fază $\Delta\varphi = \pi/2$ în raport cu unda principală (4). Adică:

$$E_{\infty,B} = \frac{1}{i} \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i\left[\omega t - k(R+r_0) + \frac{\pi}{2}\right]}$$

Dacă se ține seama de relația (5) expresiile pentru $E_{\infty,B}$ și $E_{1,\infty}$ se scriu:

$$E_{\infty,B} = \frac{E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R+r_0)]}, \quad E_{1,B} = \frac{2E_0}{R + r_0} \cdot e^{i[\omega t - k(R+r_0)]} \quad (6).$$

d) Să arătăm că prezența unui paravan prevăzut cu un orificiu circular a cărui rază este egală cu raza primei zone Fresnel ($N = 1$) conduce la mărirea intensității luminoase în punctul B de observație situat în spatele paravanului ($N \rightarrow \infty$). Într-adevăr, dacă se ține seama de (5), expresiile $E_{\infty,B}$ și $E_{1,\infty}$ se scriu ca în (6). Rezultă succesiv:

$$E_{1,B} = 2 \cdot E_{\infty,B} \Rightarrow E_{\infty,B}^2 = 4 \cdot E_{\infty,B}^2 \Rightarrow \langle E_{1,B}^2 \rangle = 4 \cdot \langle E_{\infty,B}^2 \rangle \Rightarrow I_{1,B} = 4 \cdot I_{\infty,B} \quad (7).$$

e) Când în fața sursei S se așează un ecran cu o deschidere circulară care lasă libere un număr *impar* N de zone Fresnel (să presupunem $N = 2n + 1$, $n \in \mathbf{Z}$), perturbația (elongația) undei în B este mai mare decât în cazul când ecranul ar lipsi, deoarece în relația (1) apare factorul sumă ($f_1 + f_{2n+1}$).

f) Când în fața sursei S se așează un ecran cu o deschidere circulară care lasă libere un număr *par* N de zone Fresnel ($N = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$), perturbația (elongația) undei în B este mai mică decât în cazurile precedente, deoarece în relația (1) apare factorul diferență ($f_1 - f_{2n}$).

g) Pe măsură ce raza ρ a orificiului (aperturii) ecranului plasat în punctul B crește se vor observa succesiv maxime și minime ale intensității luminoase.

h) Se poate obține pe ecran o intensitate luminoasă foarte mare dacă se acoperă toate zonele Fresnel *pare sau impare*. În acest caz, diferența de drum dintre undele provenite de la zonele vecine, *pare sau impare*, este egală cu λ și se obțin *maxime de interferență*.

7.6. Difracția Fraunhofer

Difracția undelor sferice (raze de lumină divergente) este cunoscută sub numele de *difracție Fresnel*, iar difracția undelor plane

(raze de lumină paralele) este cunoscută sub numele de *difracție Fraunhofer*. În figura 7.12 se indică schematic experimentul de tip Fraunhofer. O sursă punctiformă de lumină de intensitate I se află în focarul lentilei L_1 (lentilă colimatoare). Între lentilele L_1 și L_2 se află un ecran prevăzut cu o deschidere (sau mai multe) dreptunghiulară, circulară, sau de orice altă formă. Lumina deviată prin difracție, sub diferite unghiuri (în figura 7.12, este prezentată lumina deviată sub unghiul β), este focalizată de lentila L_2 în diverse puncte ale ecranului E_2 , aflat în planul focal al lentilei L_2 .

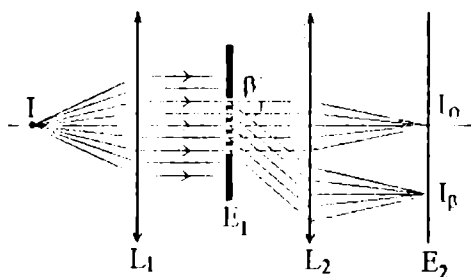


Fig. 7.12

7.6.1. Elemente matematice utilizate

a) Elongația intensității câmpului electric al unei unde electromagnetice emisă de o sursă punctiformă

Elongația intensității câmpului electric al unei unde electromagnetice emisă de către o sursă punctiformă (ideală) de radiație monocromatică prezintă o dependență temporală în punctul în care se află sursa de radiație ($r = 0$) de forma următoare (unde r reprezintă distanța de la sursă la un punct dat din spațiu):

$$E(r, t) = E(0, t) = E(t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (1),$$

unde $E(0, t) = E(t)$ este elongația (mărimea) intensității câmpului electric, la momentul de timp arbitrar t , E_0 este amplitudinea (valoarea maximă a elongației) intensității câmpului electric, $\omega = 2\pi\nu$ este frecvența unghiulară (care se măsoară în radiani pe secundă), ν este frecvența radiației optice (se măsoară în hertz), $\varphi = \omega t + \varphi_0$ este faza unei unde electromagnetice (se măsoară în radiani), iar φ_0 este faza inițială (care, de obicei, se ia egală cu zero) a unei unde electromagnetice.

b) Elongația intensității câmpului electric al undei electromagnetice într-un punct oarecare

Într-un punct arbitrar P situat la distanța r față de sursa monocromatică de radiație electromagnetică ($r = \text{const.}$) dependența temporală a intensității câmpului electric al undei electromagnetice este dată de expresia:

$$E(P, t) = E(r, t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi_0 - kr) \quad (2),$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă, $\varphi = \omega t + \varphi_0 - kr$ este faza undei electromagnetice când aceasta a ajuns în punctul P, la distanța r de la sursa de radiație electromagnetică.

c) Definiția coerenței a două surse monocromatice de radiație electromagnetică

Fie două surse monocromatice ($k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$) de lumină aflate la distanțele r_1 și, respectiv, r_2 față de punctul de observație P. Intensitățile câmpului electric al undelor electromagnetice provenite de la cele două surse de radiație optică vor fi date în punctul P de expresiile următoare:

$$E_1(r_1, t) = E_{10} \sin(\omega t + \varphi_{10} - kr_1) \quad (3),$$

$$E_2(r_2, t) = E_{20} \sin(\omega t + \varphi_{20} - kr_2) \quad (4),$$

unde $\varphi_1(t) = \omega t + \varphi_{10} - kr_1$ este faza undelor în punctul P provenite de la prima sursă, iar $\varphi_2(t) = \omega t + \varphi_{20} - kr_2$ este faza undelor din punctul P, care provin de la cealaltă sursă. Deoarece sursele sunt monocromatice rezultă că au aceeași lungime de undă și, deci, și același număr de undă: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow k_1 = k_2 = k = 2\pi/\lambda$.

Definiție: Două surse de radiație electromagnetică monocromatică (S_1 și S_2) având aceeași frecvență $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ (deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) sunt coerente atunci când diferența de fază $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi$ este o mărime constantă în timp, deci:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_{20} - \varphi_{10} + k(r_1 - r_2) = \text{const.} \quad (5).$$

Cum $r_1 - r_2 = \text{const.}$, condiția (5) de coerență se scrie:

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const.} \quad (5')$$

Definiție: Două surse de radiație electromagnetică de aceeași frecvență ν ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) sunt coerente dacă diferența fazelor inițiale ale undelor emise de surse nu se modifică în timp:

$$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \text{const.} \quad (6).$$

d) Teorema lui Malus (fără demonstrație).**◆ Drumul optic. Diferența de fază exprimată prin drumuri optice.**

Dacă în vid viteza undei electromagnetice este egală cu c , iar lungimea de undă este λ_0 , în cazul unui mediu cu un indice de refracție n se poate scrie $v = c/n$. Deoarece, în vid, $\lambda_0 = cT$ (T reprezintă perioada de oscilație a intensității câmpului electric care este independentă de proprietățile optice ale mediului), iar în mediul cu indicele de refracție n , $\lambda = vT$ (unde v reprezintă viteza de propagare a undei electromagnetice în mediul respectiv), atunci rezultă că $\lambda = \lambda_0/n$. În conformitate cu acestea, dacă o undă parcurge drumul geometric r_1 într-un mediu de indice de refracție n_1 și drumul geometric r_2 în cel de-al doilea mediu de indice de refracție n_2 , diferența de fază rezultată, $\Delta\varphi$, se va scrie astfel:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1 = 2\pi \left(\frac{r_2}{\lambda_2} - \frac{r_1}{\lambda_1} \right) \quad (7).$$

Deoarece $\lambda_2 = \lambda_0/n_2$ și $\lambda_1 = \lambda_0/n_1$ rezultă că

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{n_2 r_2 - n_1 r_1}{\lambda_0} \quad (8).$$

Definiție: *Produsul dintre indicele de refracție și lungimea geometrică a drumului, se numește drum optic și se notează cu litera asociată drumului geometric plasată între paranteze rotunde, (r) (definiția drumului optic).*

Introducând notația $n_1 r_1 = (r_1)$ și $n_2 r_2 = (r_2)$ putem scrie expresia diferenței de fază a două unde sub forma următoare:

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{(r_2) - (r_1)}{\lambda_0} \quad (9).$$

◆ Drumuri tautocrone (echivalente).

Dacă $(r_1) = (r_2)$ atunci din (9) rezultă $\Delta\varphi = 0$. În acest fel, două drumuri geometrice distincte r_1 și r_2 parcurse de două raze de lumină vor fi echivalente între ele din punct de vedere optic, cu alte cuvinte între ele nu va apărea nici o diferență de fază ($\Delta\varphi = 0$), dacă drumurile optice respective sunt egale: $(r_1) = (r_2)$.

Definiție: *Dacă două drumuri geometrice neegale sunt parcurse de lumină în intervale de timp egale, atunci aceste drumuri se numesc tautocrone.*

◆ Teorema lui Malus.

Condiția de tautocronism este satisfăcută în particular de toate drumurile razelor de lumină care străbat un sistem optic oarecare, de exemplu o lentilă care formează o imagine S' a unui izvor S de lumină (v. fig.7.13).

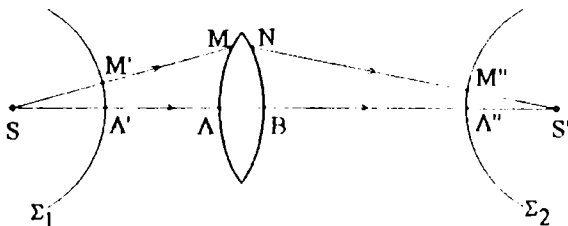


Fig.7.13

Într-adevăr, dacă diversele raze nu ar fi tautocrone, cele două părți ale unei luminoase, care se propagă pe cele două drumuri diferite, ar prezenta o diferență de fază și ar interfera în momentul intersectării în punctul S' . Însă, pentru a se obține un maxim luminos în S' , care nu este altceva decât imaginea izvorului S , este necesar să se întâmple întărirea reciprocă a diverselor porțiuni ale unde, sosite în S' fără vreo diferență de fază (urmând drumuri tautocrone). În felul acesta, obținerea imaginii cu ajutorul unei lentile este un *efect de interferență*.

Teoremă: O lentilă (în general, un sistem optic) nu introduce nici o diferență de drum între diversele raze care conduc la formarea imaginii unui obiect (teorema lui Malus).

Această teoremă se referă și la un sistem optic oarecare capabil să dea o imagine a izvorului S . Condiția de tautocronism se scrie astfel în figura 7.13: $SA + n AB + BS' = SM + n MN + NS'$.

Observație: Dacă Σ_1 este o suprafață normală la razele din fasciculul incident atunci condiția de tautocronism se păstrează pentru toate punctele acestei suprafețe (de exemplu, M' , A'):

$$M'M + n MN + NS' = A'A + n AB + BS',$$

punctul S (unde se află sursa) fiind un caz particular de suprafață ortogonală, Σ_1 , având raza egală cu zero.

Dacă sursa S se află la infinit, suprafața ortogonală Σ_1 devine un plan perpendicular pe direcția razelor incidente.

Dacă Σ_2 este o suprafață normală la razele din fasciculul care iese din lentilă, condiția de tautocronism se păstrează, de asemenea, pentru toate punctele care aparțin celor două suprafețe Σ_1 și Σ_2 . De aceea, teorema lui Malus se poate enunța mai general astfel:

Teorema lui Malus: Oricare ar fi suprafețele Σ_1 și Σ_2 normale la toate razele luminoase din fascicul, acestea au proprietatea că drumul optic care separă cele două suprafețe este același pentru toate razele. Aceste suprafețe astfel definite se numesc suprafețe de undă.

Teorema lui Malus se va aplica în cele ce urmează în studiul fenomenului de difracție Fraunhofer.

7.6.2. Difracția Fraunhofer printr-o fantă dreptunghiulară

a) Studiu calitativ.

Să studiem difracția unei plane monocromatice pe o fantă dreptunghiulară de lățime b și de lungime foarte mare în comparație cu b . Considerăm că unda cade normal pe planul fantei (v. fig.7.14), adică unghiul de incidență este zero.

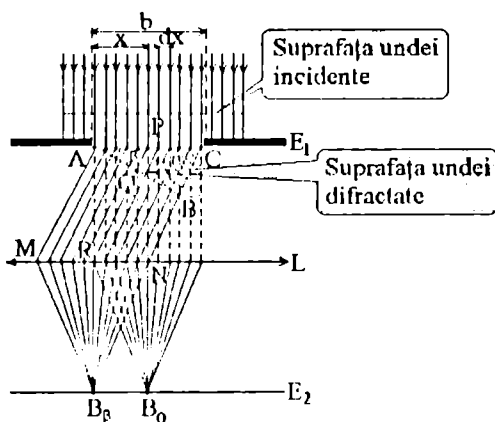


Fig.7.14

Lentila L focalizează lumina sub diferite unghiuri în diferite puncte ale ecranului E_2 , aflat în planul focal al lentilei respective. Suprafețele de undă ale undei plane incidente sunt plane paralele cu planul ecranului

E_1 , în care s-a practicat fanta dreptunghiulară. Printre acestea una coincide cu ecranul E_1 . Conform principiului Huygens-Fresnel, putem înlocui sursa de la infinit care generează unda plană incidentă pe fantă cu o infinitate de surse punctiforme sferice secundare distribuite continuu pe frontul undei plane aflate în dreptul fantei dreptunghiulare din ecranul E_1 . Din aceste surse punctiforme elementare pornesc fascicule divergente de raze (v. fig.7.15), deci suprafețele de corespunzătoare sunt sferice. Razele perpendiculare pe planul fantei difractante sunt focalizate de lentila L într-un punct B_0 de pe ecranul E_2 .

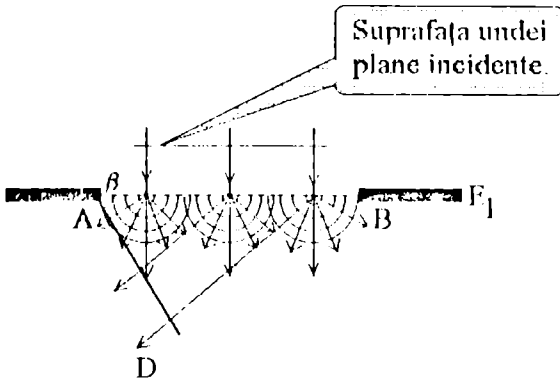


Fig.7.15

Oscilațiile surselor sferice elementare de pe frontul de undă aflat în dreptul fantei sunt în fază (au aceeași fază, $\varphi(t) = \omega t$), au aceeași amplitudine și rămân în fază, $\varphi(t,d) = \omega t - kd$, și cu aceeași amplitudine la distanțe d egale față de E_1 .

Prin urmare, aceste surse îndeplinesc condiția de coerență, rezultând un maxim de interferență în punctul B_0 . Pentru un alt punct de pe ecran B_n , oscilațiile produse de diferite puncte din dreptul fantei, nu mai sunt în fază. Pentru a ajunge în punctul B_n , razele trebuie să fie înclinate cu un unghi β față de normala la fantă. Undele secundare pornite de pe diferite puncte ale fantei ajung cu defazaje (diferite) cu atât mai mari cu cât punctul din fantă este mai apropiat de punctul C. Astfel, faza undelor pornite dintr-un punct P aflat la distanța x față de A ale căror raze fac unghiul β cu normala este: $\varphi(x,t) = \omega \cdot t - k \cdot x \sin\beta$.

De exemplu, oscilația pornită din punctul C ajunge în punctul B al planului AB cu o întârziere determinată de drumul optic suplimentar CB (față de oscilația din A) pe care trebuie să-l parcurgă: $CB = b \sin\beta$ și cu

faza: $\varphi(t,b) = \omega \cdot t - k \cdot b \sin\beta$. Amplitudinea oscilației rezultante din punctul B_β , va depinde de diferența de drum dintre diferitele raze, care, pentru razele extreme ce traversează fanta este egală cu CB .

b) Studiul analitic al problemei difracției Fraunhofer pe o fantă dreptunghiulară

Să calculăm valorile intensităților luminoase (distribuția luminoasă) a diferitelor franje obținute în planul E_2 . Pentru aceasta, să presupunem că am împărțit fanta difractantă în fâșii dreptunghiulare infimezimale de lățime dx și paralele muchiile fantei. Dacă E_0 este amplitudinea undei emisă de întreaga fantă de lățime b atunci, elementului de lățime dx îi corespunde amplitudinea $dE_x = (E_0/b)dx$ (prin "regula de trei simplă"). În felul acesta intensitatea elementară a câmpului electric dE dată de un element arbitrar dx , aparținând fantei, este descrisă de ecuația:

$$dE = dE_x \cdot \cos\omega t = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos\omega t \quad (1).$$

Deci, toate oscilațiile din planul fantei a elementelor de lățime dx , considerate surse secundare de lumină, au aceeași fază (ωt) și aceeași amplitudine, $(E_0/b)dx$. Pentru a găsi acțiunea întregii fante este necesar să se țină seama de diferența de fază care caracterizează undele sosite în punctul de observație B_β , de la diversele elemente de lungime dx ale fantei. Pentru a afla această diferență de fază, se duce planul AB perpendicular pe direcția razelor difractate sub un unghi β .

În virtutea teoremei lui Malus lentila L nu introduce diferențe de fază suplimentare, razele AMB_β , și BNB_β , fiind tautocrome.

În felul acesta este suficient să se determine diferența de drum care apare de-a lungul parcursului dintre planul AC și planul AB . Din figura 7.13 rezultă că diferența de drum dintre undele provenite de la zona elementară dx de lângă punctul A (din marginea stângă a fantei) și cele provenite de la un punct oarecare P (situat la distanța x de punctul A) este: $PQ = x \sin\beta$.

Intensitatea câmpului electric al undei electromagnetice (perturbației luminoase) ajunsă din punctul arbitrar P de abscisă x din planul AC în punctul Q din planul AB , se va exprima prin ecuația (v. observațiile matematice făcute anterior) următoare:

$$dE_p(Q) = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos(\omega t - kx \cdot \sin\beta) \quad (2).$$

Perturbația luminoasă din punctul P se propagă, mai departe, ajungând în punctul de observație B_ρ , după ce a parcurs distanța geometrică $D = QR + RB$ sau distanța optică $d = (QR) + (RB)$.

În conformitate cu teorema lui Malus, distanțele optice dintre punctele planului AB, care este perpendicular pe direcția razelor deviate prin difracție cu un unghi β și punctul B_ρ , trebuie să fie egale (tautocrone). Cu alte cuvinte:

$$(AM) + (MB_\rho) = (QR) + (RB_\rho) = (BN) + (NB_\rho) \equiv d \quad (3).$$

Prin urmare, perturbația luminoasă $dE_\rho(B_\rho)$, ajunsă în punctul de observație B_ρ va avea ecuația următoare (v. observațiile matematice):

$$dE_\rho(B_\rho) = \frac{E_0}{b} \cdot dx \cdot \cos(\omega t - kx \cdot \sin\beta - kd) \quad (4),$$

în care termenul kd care apare în fază este constant fiind același pentru orice punct din planul AB.

În afară de aceasta, undele provenite de la diversele fâșii din fantă, prin ipoteză considerate egale în lățime cu dx și care ajung în B_ρ , sunt *interferente*, deoarece diferența de fază $(\Delta\varphi)_{B\rho}$ dintre acestea este *constantă în timp*, așa cum vom arăta în cele ce urmează.

Fie două fâșii infinitezimale arbitrare i și j de lățimi egale $dx_i = dx_j = dx$ aparținând fantei de lățime b . Fie x_i și x_j abscisele acestor fâșii în raport cu punctul A din stânga fantei, considerat ca origine. Fazele undelor generate de cele două fâșii (emise de acestea) cu care ajung în punctul de observație B_ρ , sunt (v. relația 4):

$$\begin{cases} \varphi_i(B_\rho) = \omega t - kx_i \sin\beta - kd_i \\ \varphi_j(B_\rho) = \omega t - kx_j \sin\beta - kd_j \end{cases} \quad (5).$$

Deoarece, în virtutea teoremei lui Malus $d_1 = d_2 = d$ și deoarece $n_j = n_i$ este constant (n_i și n_j sunt cunoscute), atunci:

$$(\Delta\varphi)_{B\rho} = \varphi_j - \varphi_i = k(x_i - x_j) \sin\beta - k(d_j - d_i) = k(x_i - x_j) \sin\beta = \text{const.}$$

este îndeplinită condiția de coerență a două unde. În plus, diferența de fază $(\Delta\varphi)_{B\rho}$ este egală cu diferența de fază a undelor i și j ajunse în planul AB, $(\Delta\varphi)_{AB}$, adică este constantă de-a lungul drumurilor optice d . În continuare, putem scrie utilizând relația (2):

$$(\Delta\varphi)_{AB} = (\omega t - kx_j \sin\beta) - (\omega t - kx_i \sin\beta) = k(x_i - x_j) \sin\beta.$$

Aceste unde, fiind coerente, interferă în punctul de observație B_ρ , generând, în acest fel, maxime și minime de interferență.

În concluzie, lentila L nu introduce diferențe de fază suplimentare în sensul razelor difractate (Teorema lui Malus).

Ca urmare a coerenței perturbațiilor provenite de la toate benzile elementare de aceeași lățime dx , perturbația rezultantă, $E_p(B_p)$, se va determina făcând suma expresiilor (4), adică se va exprima cu ajutorul unei integrale extinsă pe întreaga lățime a fantei (pentru toate valorile x cuprinse între 0 și b). Așadar:

$$\begin{aligned} E_p(B_p) &= \int_0^b dE_p = \int_0^b \frac{E_0}{b} \cdot \cos(\omega t - kx \cdot \sin\beta - kd) \cdot dx = \\ &= \frac{E_0}{b} \cdot \frac{(-1)}{k \cdot \sin\beta} \cdot \sin(\omega t - kx \cdot \sin\beta - kd) \Big|_0^b = \\ &= \frac{E_0}{b} \cdot \frac{\sin(\omega t - kd) - \sin(\omega t - kb \cdot \sin\beta - kd)}{k \cdot \sin\beta} = \\ &= 2 \frac{E_0}{b} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{kb}{2} \sin\beta - kd\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \cdot \sin\beta}{2}\right)}{k \cdot \sin\beta}, \end{aligned}$$

sau

$$E_p(B_p) = E_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb \cdot \sin\beta}{2}\right)}{\frac{kb}{2} \cdot \sin\beta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{kb}{2} \sin\beta - kd\right) \quad (4),$$

unde $k = 2\pi/\lambda$ este numărul de undă.

Amplitudinea câmpului electric pentru unda care ajunge în B_p este:

$$E_{ep}(B_p) = E_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \cdot \sin\beta\right)}{\frac{kb}{2} \cdot \sin\beta} = E_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin\beta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin\beta} = E_0 \cdot \frac{\sin\delta(\beta)}{\delta(\beta)} = E_0 \cdot \text{sinc}\delta(\beta),$$

unde $\delta(\beta) = \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin\beta$. Funcția $\text{sinc}\delta(\beta) = \frac{\sin\delta(\beta)}{\delta(\beta)}$ poartă numele de *sinus cardinal*.

Deoarece intensitatea luminoasă $I(B_p)$ se poate exprima cu ajutorul amplitudinii $E_{op}(B_p)$ a câmpului electric $E_p(B_p)$ și anume (vezi intensitatea unei armonice plane):

$$I_p(B_p) = \frac{1}{2} \cdot E_{op}^2(B_p) \quad (6),$$

putem scrie intensitatea unei difractate după unghiul β :

$$I_{\rho}(B_{\rho}) = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \text{sinc}^2 \delta(\beta) = \frac{1}{2} \cdot E_0^2 \cdot \frac{\sin^2 \delta(\beta)}{\delta^2(\beta)} = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \delta(\beta)}{\delta^2(\beta)} \quad (7),$$

unde $I_0 = \frac{1}{2} E_0^2$ reprezintă intensitatea luminii care se propagă, de pe întreaga fantă, în direcția ce formează unghiul $\beta = 0$. Pentru $\varphi = 0$, $\delta(0) = \frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin 0 = 0$ și $I_{(\beta=0)} = I_0 \cdot \frac{\sin(0)}{0} = I_0$ deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Din relația (7) rezultă că intensitatea luminii pe ecranul E_2 variază în funcție de unghiul β . Dacă intensitatea luminii este minimă, $I_{\rho}(B_{\rho}) = 0$, atunci este necesar ca $\sin^2 \delta(\beta) = 0$. Această ecuație are rădăcinile:

$$\delta(\beta) = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \beta = m\pi \Rightarrow \sin \beta = m \frac{\lambda}{b}, m \in \mathbf{Z}.$$

Deoarece unghiul de difracție β depinde, așa cum se observă, de numărul întreg m denumit *ordin de interferență*, putem scrie relația precedentă care reprezintă condițiile de minim pentru intensitatea luminii în B_{ρ} astfel:

$$\sin \beta_m = m \frac{\lambda}{b} \Rightarrow \beta_m = \text{Arcsin} \left(m \frac{\lambda}{b} \right), m \in \mathbf{Z}.$$

Dacă $\delta(\beta) = 0$, respectiv $\sin \beta = 0$ sau $\beta = 0$, funcția $\text{sinc}^2 \delta = \frac{\sin^2 0}{0} = 1$ are un maxim (principal) și în acest caz, practic, întreaga intensitate a unei incidente se concentrează în maximul principal: $I_{(\beta=0)} = I_0$ (v. fig. 7.16).

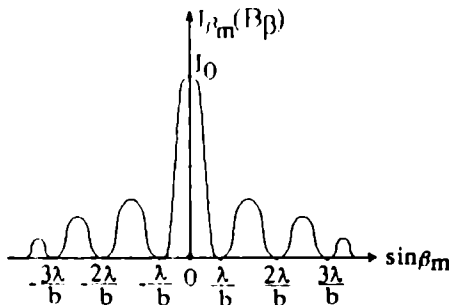


Fig. 7.16

În analiza matematică se arată că maximele secundare ale funcției sinus cardinal la pătrat corespund direcțiilor (unghiurilor β) date de relația:

$$\frac{\pi b \cdot \sin \beta}{\lambda} = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \beta_m = (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \text{ cu } m \in \mathbb{Z}.$$

Se observă că poziția maximelor, ca și a minimelor, depinde de dimensiunea b a fantei și de lungimea de undă a radiației incidente λ .

Maximul principal, foarte luminos, corespunde unghiului $\beta = 0$.

Maximele secundare corespund la intensități luminoase mult mai mici decât cea a maximului principal.

În fotografia 7.17 este prezentată figura de difracție a luminii provenită de la un laser He-Ne provocată de o fantă dreptunghiulară, iar în fotografia 7.18 se poate evidenția superpoziția fenomenelor de interferență cu cele de difracție pe două fante dreptunghiulare a luminii provenită de la un laser He-Ne, într-un dispozitiv Young.

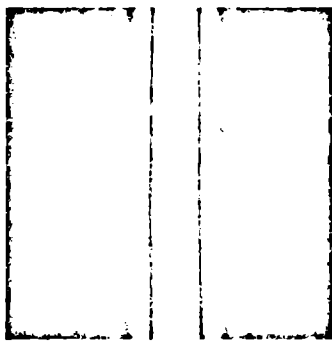


Fig. 7.17



Fig. 7.18

7.6.3. Difracția Fraunhofer pe o rețea de difracție

a) Definiție. Caracteristici.

Rețeaua de difracție este constituită dintr-un număr mare de fante fine, paralele și echidistante, situate în același plan.

O caracteristică a acestora este *constanta rețelei* d , care reprezintă distanța dintre două fante vecine. Inversul constantei rețelei reprezintă *numărul de franje pe unitatea de lungime*, n .

În mod obișnuit, o rețea de difracție se poate realiza trasând cu ajutorul unui diamant zgârieturi fine, paralele, pe o placă de sticlă sau de cuarț. Practic, zona dintre două zgârieturi consecutive de pe placă

constituie fanta, sau zona transparentă pentru lumină, care are o lățime ξ . Zgârietura constituie zona opacă dintre fante, care are o lățime η .

Suma dintre η și ξ reprezintă tocmai constanta rețelei, $d = \xi + \eta$.

Cele mai utilizate rețele nu au mai mult de 500 trăsături/mm.

Există două categorii de rețele de difracție: *rețele de difracție prin transmisie*, realizate pe suporturi transparente și *rețele de difracție prin reflexie*, realizate pe suprafețe metalice reflectătoare (bine șlefuite).

b) Tratarea analitică a fenomenului de difracție Fraunhofer pe o rețea de difracție.

Distribuția intensității luminii în figura de difracție Fraunhofer obținută cu o rețea de difracție se obține calculând interferența undelor difractate de rețeaua de difracție.

Pentru aceasta să considerăm o rețea de transmisie formată din N fante (v. fig.7.19). Considerăm că lumina incide normal pe suprafața rețelei, ca în figura 7.19.

Dacă unda difractată de prima fantă are intensitatea câmpului electric descrisă de ecuația:

$$E = E_0 \cos \omega t \quad (1),$$

atunci undele difractate de următoarele fante au între ele o *diferență de drum*:

$$\delta = d \sin \beta, \quad (2)$$

care corespunde diferenței de fază: $\Delta\varphi = k\delta = (2\pi/\lambda)\delta$.

Aici β reprezintă unghiul de difracție, adică unghiul făcut de razele difractate cu normala la rețea.

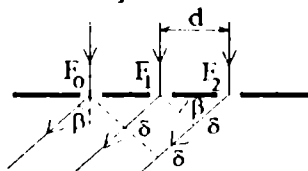


Fig.7.19

Câmpul electric rezultat (unda rezultantă), ce va determina figura de interferență (difracție) pe un ecran situat la distanță mare (teoretic ∞), se obține prin însumarea tuturor undelor emise de întreaga rețea de difracție:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \cdot \cos(\omega t - n \cdot \Delta\varphi) \quad (3).$$

Calculul matematic care urmează, va fi mult ușurat dacă se transcrie relația (3) cu ajutorul numerelor complexe utilizând relația lui Euler, $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Deci, $\cos\alpha = \operatorname{Re}(e^{i\alpha})$. În cele ce urmează ne debarasăm de simbolul Re (partea reală) și vom scrie $\cos\alpha = e^{i\alpha}$. Prin urmare relația (3) se scrie în complex astfel:

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} E_0 \cdot e^{i(\omega t - n \Delta\varphi)} = E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i \cdot n \Delta\varphi} \quad (4),$$

unde suma este o progresie geometrică cu rația $q = e^{-i\delta}$.

Suma unei progresii geometrice este: $S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, unde n

reprezintă numărul termenilor progresiei, iar a_1 — primul termen al progresiei.

Prin urmare, relația (4) se va scrie astfel dacă se ține cont că $n = N$:

$$E = E_0 \cdot e^{i\omega t} \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (5).$$

Amplitudinea intensității câmpului electric a unei rezultante este:

$$A = E_0 \cdot \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \quad (6)$$

și, prin urmare, intensitatea luminoasă este furnizată de relația cunoscută:

$$I = \frac{|A|^2}{2} = \frac{E_0^2}{2} \cdot \left| \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \right|^2 = I_0 \cdot \left| \frac{e^{-iN\Delta\varphi} - 1}{e^{-i\Delta\varphi} - 1} \right|^2 \quad (7),$$

unde $I_0 = \frac{E_0^2}{2}$.

Dacă utilizăm în cele ce urmează relațiile matematice următoare:

◆ Dacă Ψ este o funcție complexă, modulul ei la pătrat este, prin definiție, $|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$, unde Ψ^* reprezintă complex-conjugata lui Ψ ;

◆ Relația lui Euler: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$;

◆ Relația unghiului pe jumătate: $\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{2}}$;

atunci în relația (6) sunt valabile transformările succesive ce urmează:

$$|e^{-i\Delta\varphi} - 1|^2 = (e^{-i\Delta\varphi} - 1) \cdot (e^{+i\Delta\varphi} - 1) = 1 - e^{+i\Delta\varphi} - e^{-i\Delta\varphi} + 1 = 2 \left(1 - \frac{e^{i\Delta\varphi} + e^{-i\Delta\varphi}}{2} \right) =$$

$$= 2(1 - \cos\Delta\varphi) = 4 \cdot \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (8).$$

Aplicând relația (8) în relația (7) se obține:

$$I = I_0 \cdot \frac{\sin^2 \frac{N \cdot \Delta\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} \quad (9).$$

În analiza matematică se precizează că pentru intensitatea I condițiile necesare obținerii de maxime principale în relația (9) se realizează dacă:

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = m \cdot \pi, \quad m \in \mathbf{Z} \quad (10),$$

de unde, ținând seama de relațiile $\delta = d \cdot \sin\beta$ și $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$, obținem:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin\beta = m\pi.$$

De aici se determină condiția de poziționare a maximelor:

$$\delta = d \sin\beta = m\lambda, \quad m \in \mathbf{N} \quad (11).$$

Condițiile de minim ale intensității I se obțin dacă în (9) numărătorul este zero, iar numitorul nu, adică

$$\frac{N \cdot \Delta\varphi}{2} = p \cdot \pi, \quad p \in \mathbf{N}', \quad \text{sau} \quad \frac{N}{2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \sin\beta = p \cdot \pi$$

de unde:

$$d \cdot \sin\beta = p \cdot \frac{\lambda}{N}, \quad p=1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (12),$$

în care p poate lua orice valoare naturală, dar nu multiplu de N , deoarece dacă $p=mN$ se obține condiția (10) de maxim principal.

Deci, între două maxime principale există $N-1$ minime și $N-2$ maxime secundare (impuse de existența celor $N-1$ minime) de intensitate mult mai mică decât cea a maximelor principale.

De exemplu, o rețea care $N = 5$ fante produce o figură de difracție care prezintă între două maxime principale $N - 1 = 4$ minime ce separă $N - 2 = 3$ maxime secundare (v.fig.7.20).

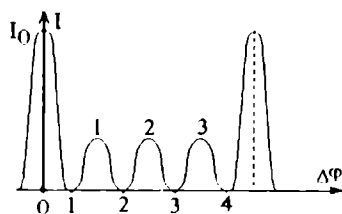


Fig. 7.20

Cu cât numărul N de fante este mai mare cu atât maximele secundare devin mai slabe. Când acestea sunt practic invizibile fiecare maxim principal se prezintă ca o linie foarte fină pe un fond întunecat.

Datorită faptului că poziția maximelor principale depinde de lungimea de undă conform relației $d \sin \beta = m \lambda$, rețeaua de difracție iluminată cu un fascicul de lumină paralel și monocromatic poate fi utilizată în construcția instrumentelor spectrale.

Dacă lumina incidentă pe rețeaua de difracție (pe planul fantelor rețelei) nu este normală pe ea (razele de lumină incidente fac un unghi $\alpha \neq 0$), atunci diferența de drum δ dată de relația (2) se modifică astfel (v. fig. 7.21):

$$\delta = d |\sin \alpha \pm \sin \beta| \quad (2')$$

unde d reprezintă constanta rețelei, α este unghiul de incidență, adică unghiul făcut de raza de lumină incidentă cu o normală la suprafața rețelei, iar β este unghiul de difracție. Semnul plus (+) corespunde cazului rețelelor de difracție care funcționează prin reflexie, iar semnul minus (-) corespunde cazului rețelelor de difracție care funcționează prin transmisie (este cazul tratat aici). Altfel spus, semnul plus corespunde situației în care razele de lumină incidentă și razele de lumină difractate sunt situate de aceeași parte a rețelei de difracție, iar semnul minus corespunde situației în care razele de lumină incidentă și razele de lumină difractate sunt situate de părți opuse ale rețelei de difracție.

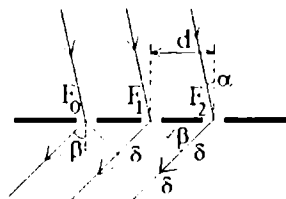


Fig. 7.21

Pentru cazul interferenței constructive, când se obțin maxime principale, din relațiile (2') și (11) rezultă **ecuația rețelei de difracție**:

$$d \cdot |\sin \alpha \pm \sin \beta| = m \cdot \lambda, \quad m \in \mathbf{N} \quad (13).$$

Numărul întreg pozitiv, m , se numește **ordin de interferență**. Folosind această ecuație, putem calcula unghiul de difracție β al unui anumit ordin de interferență corespunzător radiației incidente sub unghiul α și cu lungimea de undă λ . Când ordinul de interferență este nul ($m = 0$), unghiul de incidență α este egal cu unghiul de difracție β ($\alpha = \beta$), iar rețeaua de difracție se comportă ca o oglindă, toate lungimile de undă ale luminii incidente suprapunându-se în ordinul zero de difracție. Pentru toate celelalte ordine de interferență ($m \neq 0$) valoarea unghiului de difracție β , corespunzător unui anumit ordin de interferență, depinde de lungimea de undă λ .

Rețeaua de difracție formează, deci, spectrul de difracție al luminii (radiației electromagnetice) incidente, diferitele lungimi de undă prezente în lumina incidentă fiind difractate sub unghiuri diferite.

Observație: Din punct de vedere practic, aria trasată a rețelei de difracție trebuie să fie suficient de mare pentru a intercepta toată lumina incidentă, chiar și în cazul unei incidențe unghiulare limită. De exemplu, dacă notăm cu h dimensiunea liniară a secțiunii transversale a unui fascicul de lumină, aria trasată trebuie să aibă înălțimea h , iar lățimea $s = Nd$ trebuie să fie (fără demonstrație):

$$s = \frac{h}{\cos \alpha_{\max}} \quad (14),$$

unde α_{\max} este valoarea maximă a unghiului de incidență. Dacă dimensiunile ariei trasate, specificate în fișa tehnică, sunt mai mici decât h și, respectiv, s , intensitatea luminoasă din spectru va fi mult micșorată pe seama creșterii intensității luminii care apare în ordinul zero de interferență.

c) Dispersia

Una dintre concluziile prezentate în subparagraful precedent a fost că, pentru o aceeași valoare a unghiului de incidență α constant (rezultând $\sin \alpha = \text{constant}$), valoarea unghiului de difracție β , corespunzător unui anumit ordin de interferență, m , depinde de

lungimea de undă λ a radiației incidente. Această concluzie ne permite să derivăm ecuația rețelei (13) în raport cu λ și să obținem *dispersia unghiulară*:

$$\left(\frac{d\beta}{d\lambda}\right) = \frac{m}{d \cdot \cos\beta} \quad (15).$$

Pare posibil deci să obținem valori mari ale dispersiei, chiar și în ordinul unu, folosind rețele de difracție cu d foarte mic, ceea ce înseamnă un număr foarte mare de trăsături pe milimetru. Practica arată însă că dispersia rețelelor de difracție este limitată de cel puțin doi factori. Primul dintre aceștia este definit de situația reală că nici unghiul de incidență și nici unghiul de difracție nu pot avea valori mai mari de 90° . Cel de-al doilea este definit de condiția ca distanța dintre două trăsături consecutive să nu fie mult prea mică în raport cu lungimea de undă a luminii. Când constanta rețelei este mică în raport cu lungimea de undă a radiației incidente, rețeaua de difracție se comportă ca o oglindă, mai mult reflectând lumina decât să o disperseze.

d) Puterea de separare

Definiție: Puterea de separare sau puterea de rezolvare (rezoluție), reprezentând o altă caracteristică importantă a rețelei de difracție, a fost definită de Rayleigh drept capacitatea rețelei de difracție de a separa două linii adiacente din spectru și exprimată matematic prin $(\lambda/\Delta\lambda)$, unde $\lambda + \Delta\lambda$ este lungimea de undă a liniei spectrale care încă mai poate fi deosebită de linia spectrală cu lungimea de undă λ .

În funcție de numărul total N de trăsături, de constanta rețelei de difracție d , de lungimea de undă a radiației incidente λ , de unghiul de incidență α și de unghiul de difracție β , puterea de separare a rețelei de difracție este dată de expresia următoare (fără demonstrație):

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) = \frac{N \cdot d \cdot (\sin\alpha \pm \sin\beta)}{\lambda} = m \cdot N \quad (16),$$

unde m reprezintă ordinul de interferență al rețelei. Se observă că puterea de separare a unei rețele de difracție este cu atât mai mare, cu cât numărul total N de trăsături este mai mare, pentru o aceeași constantă a rețelei și cu cât unghiul de incidență α este mai mare. Din punct de vedere practic obținerea unei rezoluții înalte, cu ajutorul rețelelor de difracție, depinde de calitatea optică a suprafeței rețelei, de uniformitatea spațială a trăsăturilor și de optica asociată rețelei de

difracție în cadrul sistemului optic în care aceasta a fost folosită. Orice abatere de la planitatea rețelei de difracție plană conduce invariabil la micșorarea puterii de rezoluție. Expresia (16), care definește puterea de separare a rețelei de difracție, arată că, teoretic, aceasta poate fi făcută oricât de mare dacă numărul N de trăsături crește (pentru o aceeași constantă a rețelei). Din punct de vedere practic, lățimea s a rețelei de difracție nu poate fi făcută mult prea mare. Din (16) și (13) obținem:

$$m\lambda = \frac{s}{N} \cdot (\sin \alpha \pm \sin \beta) \quad (17).$$

Deoarece $(\sin \alpha \pm \sin \beta)$ poate lua valoarea maximă egală cu 2, valoarea maximă a puterii de separare a unei rețele de difracție este:

$$\left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right)_{\max} = \frac{2s}{\lambda} \quad (18).$$

De exemplu, în cazul unei rețele de difracție cu lățimea egală cu 150mm (care este o valoare foarte mare, apropiată de valoarea limită), puterea de separare maximă este egală cu 600000, în cazul unei lungimi de undă $\lambda = 500\text{nm}$.

Anexă

1. Relații matematice utile

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \sin x$$

$$\sin a + \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2 \cdot \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cdot \cos b}$$

$$\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tga} \pm \operatorname{tgb}}{1 \mp \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

2. Identități vectoriale

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = \text{scalar}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B}) \cdot \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{\text{vector}}, \text{ de versor } \vec{e}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Psi = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \Psi + \Psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\Psi \vec{A}) = \vec{\nabla} \Psi \times \vec{A} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\vec{\nabla}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \vec{\nabla}\mathbf{u} + \vec{\nabla}\mathbf{v}$$

$$\vec{\nabla}(uv) = u\vec{\nabla}v + v\vec{\nabla}u$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\nabla}(\mathbf{u}\vec{A}) = \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\mathbf{u} + \mathbf{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\mathbf{u}\vec{A}) = \vec{\nabla}\mathbf{u} \times \vec{A} + \mathbf{u}(\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

3. Prefixele unităților de măsură

<i>Factorul de multiplicare</i>	<i>Prefixul</i>	<i>Simbolul</i>
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	kilo	k
10^2	hecto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

$$1\text{\AA} = 0.1\text{nm} = 10^{-10}\text{m}$$

4. Constante utile

<i>Denumirea constantei</i>	<i>Valoarea constantei</i>
Viteza luminii în vid:	$c=2.9979 \times 10^8$ m/s
Sarcina electrică fundamentală:	$e=1.60219 \times 10^{-19}$ C
Numărul lui Faraday:	$N_A e=96487$ C/mol
Constanta lui Planck:	$h=6.625 \times 10^{-34}$ J s
Constanta lui Planck redusă:	$\hbar=h/2\pi=1.054 \times 10^{-34}$ J s
Unitatea atomică de masă:	$1u=1.66 \times 10^{-27}$ Kg
Masa de repaus a electronului:	$m_e=9.1083 \times 10^{-31}$ Kg
Masa de repaus a neutronului:	$m_n=1.67474 \times 10^{-27}$ Kg
Masa de repaus a protonului:	$m_p=1.67243 \times 10^{-27}$ Kg
Magnetronul Bohr:	$\mu_B=0.9273 \times 10^{-23}$ Am ²
Magnetronul nuclear:	$\mu_N=0.5050 \times 10^{-26}$ Am ²
Momentul magnetic al electronului:	$\mu_e=1.001145\mu_B$
Momentul magnetic al protonului:	$\mu_p=2.7928\mu_N$
Momentul magnetic al neutronului:	$\mu_n=-1.9130\mu_N$
Constanta gravitațională:	$\gamma=6.7 \times 10^{-11}$ N m ² /Kg ²
Accelerația gravitațională la nivelul mării:	$g=9.8$ m/s ²
Prima rază Bohr:	$a_0=0.5292 \times 10^{-10}$ m
Numărul lui Avogadro:	$N_A=6.023 \times 10^{23}$ mol ⁻¹
Constanta gazelor perfecte:	$R=8.3144$ J mol ⁻¹ K ⁻¹
Constantă lui Boltzmann:	$k=1.380 \times 10^{-23}$ J/K
Permitivitatea electrică a vidului:	$\epsilon_0=8.8542 \times 10^{-12}$ F/m
Permeabilitatea magnetică a vidului:	$\mu_0=4\pi \times 10^{-7}$ H/m
Lungimea de undă a unui foton cu energia de un electron-volt:	1.24×10^{-6} m.
Impedanța vidului pentru undele electromagnetice:	377Ω

5. Factorii de transformare a unităților de energie

	<i>ev</i>	<i>erg</i>	<i>kcal/mol</i>	<i>cm⁻¹</i>	<i>K</i>	<i>u</i>
<i>ev</i>	1	1.602×10^{12}	23.0609	8.0657×10^1	1.1605×10^4	3.675×10^2
<i>erg</i>	6.242×10^{11}	1	4.39×10^{13}	5.034×10^{15}	7.244×10^{15}	2.294×10^{19}
<i>kcal/mol</i>	4.3363×10^2	6.947×10^{14}	1	3.4976×10^2	5.0323×10^2	1.5936×10^3
<i>cm⁻¹</i>	1.2398×10^4	1.986×10^{16}	2.8591×10^1	1	1.43879	4.5563×10^6
<i>K</i>	8.617×10^{-5}	1.380×10^{18}	1.9871×10^1	6.9503×10^1	1	3.1668×10^6
<i>u</i>	27.2107	4.359×10^{11}	6.2750×10^2	2.1947×10^5	3.1578×10^5	1

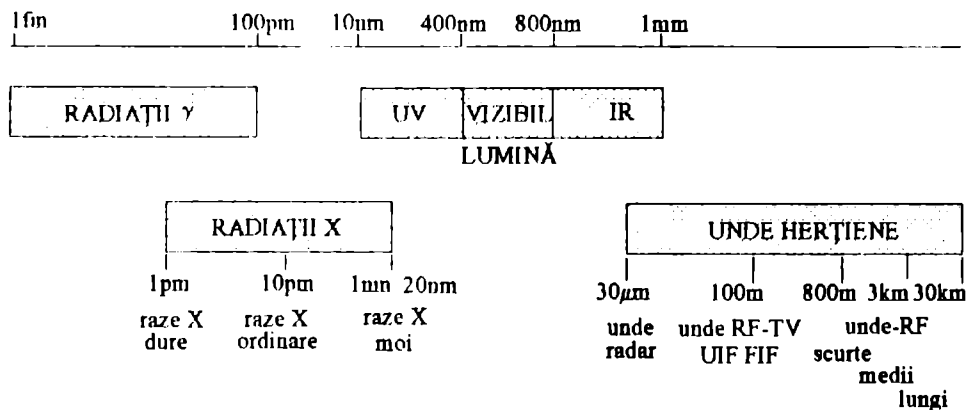
$$1\text{KJ/mol}=0.239\text{Kcal/mol}=10.36\text{MeV}=2.50\text{GHz}=83.5\text{cm}^{-1}=120\text{K}$$

6. Spectrul electromagnetic

<i>Denumirea radiației electromagnetice (exemple)</i>	<i>Ordin de mărime a frecvenței</i>	<i>Ordin de mărime a lungimii de undă</i>
Radiația X de frânare	$10^{23} \div 10^{24}$ Hz	$10^{-18} \div 10^{-15}$ m
Radiația gamma, γ	$10^{22} \div 10^{21}$ Hz	$10^{-14} \div 10^{-13}$ m
Radiația X caracteristică	$10^{18} \div 10^{19}$ Hz	$10^{-11} \div 10^{-8}$ m
Lumină ultravioletă	10^{15} Hz	10^{-7} m
Albastrul lămpii cu vapori Hg		4358 Å
Verdele lămpii cu vapori Hg		5461 Å
Galbenul lămpii cu vapori Hg		5770 Å
Lumina roșie – laser He-Ne		6328 Å
Infraroșu - radiația solară (T=6000K)	10^{14} Hz	10^{-6} m
Infraroșu - radiația la temp. camerei (T=300K)	10^{13} Hz	10^{-5} m
Infraroșu - radiație univers (T=3K)	10^{11} Hz	10^{-3} m
Microunde	$10^9 \div 10^{10}$ Hz	$10^{-2} \div 10^{-1}$ m
Radiunde în televiziune și radio MF	$10^7 \div 10^8$ Hz	$10^0 \div 10^1$ m
Radiunde MA	$10^5 \div 10^6$ Hz	$10^2 \div 10^3$ m
Unde acustice (domeniul audio)	$10^1 \div 10^4$ Hz	$10^4 \div 10^7$ m

Pe scară logaritmică:

<i>Domeniul</i>	<i>logE (K.Jmol⁻¹)</i>	<i>logν (Hz)</i>	<i>logλ</i>	<i>logλ^{-1} (cm⁻¹)</i>
Radiații X	+9	10^{21}	12pm	9
UV	+6	10^{18}	9nm	6
Vizibil	+3	10^{15}	6 μ m	3
IR	0	$12 \cdot 10^{12}$	3mm	0
IR îndepărtat				
Microunde	-3	$9 \cdot 10^9$	0	
Radiofrecvență	-6	$6 \cdot 10^6$		
Audio	-9	$3 \cdot 10^3$	-3Km	
	-12	0	-6Mm	
	-15			



7. Mărimi electromagnetice principale și unitățile de măsură în S.I.

<i>Mărimea fizică</i>	<i>Unitatea în S.I.</i>
Sarcina electrică, q :	1 C (coulomb)
Intensitatea câmpului electric, \vec{E} :	1 V/m=1 N/C
Potențialul electric scalar, V :	1 V (volt)
Capacitatea electrică, C :	1 F (farad)
Intensitatea curentului electric, I :	1 A (ampere)
Densitatea de curent, \vec{j} :	1 A/m ²
Rezistența electrică, R :	1 Ω (ohm)
Rezistivitatea electrică, ρ :	1 Ω m
Inducția câmpului magnetic, \vec{B} :	1 T (tesla)
Inductanța, L :	1 H (henry)
Momentul electric, \vec{p} :	1 Cm
Polarizarea electrică, \vec{P} :	1 C/m ²
Inducția câmpului electric, \vec{D} :	1 C/m ²
Momentul magnetic, \vec{m} :	1 A/m ²
Magnetizarea, \vec{M} :	1 A/m
Intensitatea câmpului magnetic, \vec{H} :	1 A/m
Fluxul magnetic, Φ_m :	1 Wb (weber)
Potențialul magnetic vectorial, \vec{A} :	1 Tm

8. Alfabetul grecesc

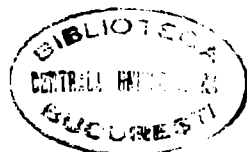
A, α	alfa,
B, β	beta,
Γ, γ	gamma,
Δ, δ	delta,
E, ε	epsilon,
Z, ζ	zeta,
H, η	eta,
Θ, θ, ϑ	teta,
I, ι	iota,
K, κ	kappa,
Λ, λ	lambda,
M, μ	miu,
N, ν	niu,
Ξ, ξ	xi,
O, ο	omicron,
Π, π	pi,
P, ρ	rho,
Σ, σ	sigma,
T, τ	tau,
Υ, υ	iupsilon,
Φ, φ	fi,
X, χ	hi,
Ψ, ψ	psi,
Ω, ω	omega.

Bibliografie

- ◇ Benedek G. B., Villars F. M. H., "Physics with illustrative examples from medicine and biology. Electricity and Magnetism", vol. 3, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, 1979;
- ◇ Crawford F., "Waves—Berkeley Physics Course", vol. III, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983;
- ◇ Cristea Gh., Ardelean I., "Elemente fundamentale de fizică", Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1985.
- ◇ Feynman R. P., "Fizica Modernă – Electromagnetismul. Structura materiei.", Ed. Tehnică, București, 1970;
- ◇ Fred Gardial, "Traité d'Électricité – Électromagnétisme", vol. III, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Éditions Georgi, 1979;
- ◇ Jackson J. D., "Electrodinamică clasică", Ed. Tehnică, București, 1999;
- ◇ Müller L., Preda A., Moisil D., Angheliescu D., "Fizica", Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1982;
- ◇ Nicula Al., Cristea Gh., Simon S., "Electricitate și magnetism", Ed. Didactică și pedagogică, București, 1982;
- ◇ Popescu Ioan-Ioviț, Toader E., "Optica", Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1989;
- ◇ Tudor T., "Bazele Opticii Coerente", Ed. Universității din București, 1992;
- ◇ Tudovan V., "Electricitate și magnetism", Ed. Tehnică, București, 1984;
- ◇ Țintea Hariton, "Optică și Spectroscopie", Ed. Didactică și Pedagogică, București.

VERIFICAT
2017

VERIFICAT
2007



**Tiparul s-a executat sub c-da 624/1999 la
Tipografia Editurii Universității din București**

DATA RESTITUIRII

26 NOV 2001	8 NOV 2004	
13 NOV 2002	9 NOV 2004	
16 NOV 2002	17 IAN 2005	
2 - DEC 2002	28 IAN 2005	25 IAN 2017
06 FEB 2003	28 IUN 2005	
10 IUN 2003	28 IUN 2005	27.02.2018
27 NOV 2003	19 IAN 2006	
5 APR 2004		27 MAR 2019
5 NOV 2004	3 IUL 2011	22.04.2021
5 NOV 2004	—	24.04.2021
5 NOV 2004	06.02.2018	15.05.2021

BIBLIOTECA CENTRALA
UNIVERSITARA "CAROL I"



DE SPIRITU ET ANIMA

ISBN 973-575-428-2

Lei 34600