# Universidad de Huelva


## Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía


## Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del infinito : un estudio de caso

**Memoria para optar al grado de doctor**
**presentada por:**


**Miguel Ángel Montes Navarro**


Fecha de lectura: 28 de enero de 2015

Bajo la dirección del doctor:

José Carrillo Yáñez

**Huelva, 2015**

Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

# Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas acerca del Infinito. Un estudio de caso

Tesis Doctoral

Miguel Ángel Montes Navarro

Dirigida por

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2014

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos "Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España y "Caracterización del conocimiento especializado del profesorado de Matemáticas" (EDU2013-44047-P), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Asimismo, esta investigación ha sido desarrollada en el marco del grupo DESYM (HUM 0168), del Plan Andaluz de Investigación.

Finalmente, esta investigación se encuadra en la agenda de investigación del grupo SIDM de la Universidad de Huelva.

*Hace muchos años, un niño le preguntó a su padre:*

*Papá, ¿Cuál es el número más grande que existe?*

*Su padre le respondió: ¿Tu cuál crees que es?*

*Pensando un poco, aquel niño contesto… -¡Un millón!-*

*Su padre le preguntó ¿Y si le sumas uno?*

*El niño reflexionó sobre la respuesta, pensando en cambiar el número, pero supo que la respuesta podría ser la misma.*

*Ese niño fue consciente en ese preciso momento de la infinitud de los números, que generó una curiosidad de tal magnitud en él que le llevó, tras años, a escribir esta tesis.*

*Esta tesis va dedicada a todos aquellos niños con infinita curiosidad, y a todos aquellos padres, madres y profesores que la alimentan.*

# Agradecimientos

Quiero, y tengo mucho que agradecer a cada una de las personas que de una manera u otra han formado parte de esta etapa de mi vida, en la que ellos han sido el motor que me impulsaba a seguir adelante, el colchón que amortiguaba mis caídas, y el hombro en el que apoyarme cuando no me quedaban fuerzas. A todas esas personas, gracias.

A Pepe Carrillo, mi director, gracias por tu guía y ejemplo, por tus sugerencias e implicación en este trabajo, por el tiempo que has invertido en mí, y por el trato que me has brindado cada día. Eres para mí un espejo en el que mirarme, como investigador, profesor, y persona. Gracias, Pepe, por cada consejo, por cada aportación, por cada corrección, por saber ver lo mejor de mí, y por hacer que creyera que realmente podía. Gracias.

A mis compañeros del área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Huelva, Luis Carlos, Nuria, Cinta, José Manuel, Antonio, Carolina, Juan María, que me habéis animado, impulsado y ayudado, y que habéis contribuido a que esta tesis se desarrollara en un ambiente de amistad y compañerismo en el que se ha hecho fácil trabajar. Sin vosotros este trabajo no podría existir. Gracias por todo.

A mis compañeros del Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía, y al grupo DESYM, que me han enseñado mucho, sobre lo que significa investigar, sobre lo que significa la Universidad, y con los que he disfrutado enormemente trabajando. Gracias por vuestro apoyo.

Al grupo SIDM, al que considero mi ‘aula de clase’ en la investigación. Me habéis enseñado, todos y cada uno de los integrantes del grupo, el valor de compartir lo que uno hace, el valor de escuchar lo que otros hacen, y por supuesto, el valor de una buena crítica que parece dejar temblando los soportes de tu trabajo, para que después se yerga mucho más sólida, coherente, y consistente. En el edificio que es esta tesis, yo he puesto los ladrillos y vosotros la argamasa, lo que me hace sentirla tanto mía, como vuestra. Gracias por vuestra capacidad de construcción, y por hacer divertida la investigación.

Especialmente, quiero agradecer a los compañeros que han realizado sus estudios de doctorado junto a mí: Dina, Eric, Kike, Álvaro, Diana, José Luis, Nielka y Emma. Son muchas las cosas que hemos vivido juntos, desde reuniones hasta horas imprudentes, hasta congresos por medio mundo. Ver vuestras caras cuando aprendíamos algo nuevo, las tardes que disfrutamos en el Mosquito, y vivir en general tantísimas cosas junto a vosotros hace que os considere mucho más que compañeros en la investigación. Gracias por vuestra amistad.

Gracias también al Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Sevilla, y especialmente a Victoria Sánchez, que me hizo comprender la necesidad de un doctorado para impartir clase en la Universidad, y que me habló del programa de doctorado de la Universidad de Huelva. Gracias por vuestros consejos.

Quiero agradecer los apoyos de Mark Hoover Thames, de Carmen Penalva y de José Luis Belmonte, que han contribuido a esta tesis con su consejo y asesoramiento, dándome la oportunidad de compartir con ellos mis inquietudes.

Hay muchas otras personas que han contribuido a esta tesis más allá de lo académico. Personas que, estén o no en mi vida ahora, han tenido un abrazo, una palabra de ánimo, o una sonrisa que consiguió inspirarme, animarme, o simplemente relajarme y hacerme sentir en casa. Gracias por ser quienes sois.

Para acabar, no puedo dejar de agradecer a mi familia, mi hermana, que siempre tuvo una palabra de apoyo, mi padre, que siempre me dijo que yo era capaz de lo que quisiera. Él me enseñó cómo numerar los números racionales con baldosas, y me transmitió la importancia del esfuerzo y la pasión por las matemáticas; mi madre, toda corazón y cerebro, a ella le debo haber comenzado y terminado estos estudios, cada abrazo, cada palabra de aliento y ánimo, gracias por creer siempre en mi, Mamá. Quien hoy soy, y lo que hoy soy capaz de hacer, os lo debo a vosotros. Gracias.

# Índice de Contenidos

# Introducción y motivación

¿Por qué estudiar el infinito? Podría dar, y daré[1], múltiples argumentos para que el infinito sea el centro de este estudio, argumentos curriculares, basados en la presencia del infinito como elemento subyacente a múltiples conceptos; argumentos cognitivos, basados en el estudio del desarrollo del pensamiento humano al pensar en el infinito; o argumentos didácticos, basados en la necesidad de un profesor de fomentar en sus alumnos una comprensión completa de las matemáticas, y en el conocimiento que requiere para ello. Sin embargo, en esta introducción, añadiré también algunos de los argumentos personales que me llevan a necesitar estudiarlo.

El infinito, como elemento matemático, es un concepto que habitualmente desafía la cognición de aquellos que reflexionan sobre él. Es un concepto susceptible de mil interpretaciones, y quién piense en él profundamente puede llegar a encontrar nuevas formas de entenderlo que anteriormente ni sospechaba. En contextos de educación primaria, en los que es habitual que un alumno piense en el infinito como un “número grande”, la pregunta ¿y si sumo 1 al infinito, cuánto me da? puede hacer consciente al alumno de que ese “número grande” tiene una naturaleza diferente a la de los "otros números". En contextos de secundaria, la correspondencia biyectiva entre los naturales y los pares desafía el principio holístico de Aristóteles “el todo es mayor que sus partes”, pudiendo hacer reflexionar a los estudiantes sobre el significado de la palabra “igual”. En la enseñanza universitaria de la titulación de matemáticas, el estudio de la numerabilidad o no numerabilidad de conjuntos infinitos puede inducir la reflexión sobre los “tamaños del infinito”.

Además, dada la naturaleza compleja del concepto, múltiples pensadores, matemáticos, filósofos, y educadores, han hecho esfuerzos por comprenderlo y poner de relieve los conflictos que genera, así como dar solución y explicación a algunas de las contradicciones que se producen. Un ejemplo de esto es el ‘Hotel infinito de Hilbert’, un ejemplo expresado en términos cuasi-realistas en el que a cada paso subyacen diferentes concepciones del infinito y diferentes aproximaciones a la superación de dichas concepciones en pos de otras más completas.

[1] Escribo este apartado en primera persona debido a lo personal del contenido del mismo.

Así pues, el infinito es un ente matemático cambiante, generador de conflictos y desafiante. Es precisamente su naturaleza desafiante lo que me ha llevado a estudiarlo y reflexionar sobre él desde mi etapa como alumno de educación secundaria, especialmente, desde que cierto profesor me planteara el problema del Hotel de Hilbert. Actualmente, tras haber leído, pensado y estudiado el infinito, hasta el punto de creer haber desarrollado una perspectiva actualista sobre el infinito, a veces me sorprendo a mi mismo afrontando intuitivamente de forma potencialista ejemplos como el de la consideración de la no numerabilidad de las partes de N. Es un desafío comprender el infinito por su propia naturaleza cambiante, y es un desafío que aporta, más que en su superación, en su proceso de abordaje, una comprensión amplia tanto de las matemáticas, como de su naturaleza, y de la naturaleza del aprendizaje y la enseñanza del infinito. Esa consciencia de que el desafío que supone la comprensión del infinito ha supuesto una fuente de aprendizaje y satisfacciones es el *leitmotiv* de esta tesis.

El infinito, y su comprensión, es el interés que me llevó a comenzar este estudio, pero es la investigación colaborativa, en el seno del grupo de investigación de la Universidad de Huelva, la que me lleva a profundizar en el conocimiento profesional como contexto para el estudio de la comprensión del infinito. Es en el seno de ese grupo, en las discusiones con otros investigadores, y en reuniones de investigación nacionales e internacionales, donde he desarrollado la comprensión del conocimiento profesional del infinito que me ha permitido finalizar esta investigación. En cierto momento del transcurso de esta investigación, comprendí que el conocimiento del infinito se ha tratado de forma tradicional generando investigaciones del tipo: "¿cuánto sabe un profesor?". En esta investigación pretendo cambiar el foco, desarrollando una investigación acerca de "cómo conoce el infinito un profesor". Esto implica posicionarse en la naturaleza del conocimiento del profesor, y en el significado que "conocer un concepto de forma profesional" tiene. Para esto, nos planteamos como inquietud de esta investigación la siguiente: ¿Qué conocimiento sobre el infinito puede movilizar un profesor de Secundaria y Bachillerato? Desde nuestra perspectiva, conocer el infinito de forma profesional, ergo para la enseñanza en el caso del profesor, significa conocer el infinito de aquellas formas que le puedan ser útiles para la enseñanza de las matemáticas escolares. Alcanzar esa percepción ha sido uno de los logros de esta investigación, ya que supone abrir un campo de estudio, en el que esta investigación es el primer paso de un camino que espero continuar en los próximos años. Asimismo, ha supuesto para mí un aliciente saber que no existe investigación previa específicamente sobre el infinito desde la perspectiva que en esta investigación hemos tomado[2], lo cual la hace más desafiante, pero asegura la originalidad que creo ha de tener una tesis doctoral.

Esta memoria constará de cuatro grandes capítulos, cada uno de los cuales mostrará una parte de esta investigación. El primero de los capítulos es el dedicado al marco teórico, donde haré un recorrido por la noción de conocimiento profesional, y en el que profundizaré en los diferentes modelos de conocimiento del profesor, mostrando algunos elementos especialmente potentes, así como mostrando algunas de las debilidades de los modelos que han llevado al grupo de investigación al que pertenezco a desarrollar un nuevo modelo, que abordaremos este primer capítulo. En el marco teórico también abundaré sobre la noción de infinito, mostrando algunos de los los elementos más significativos de la teoría desarrollada hasta la fecha, y mostrando la presencia del infinito en el currículo de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Posteriormente, en el marco metodológico, mostraré los fundamentos teóricos que sustentan la metodología de investigación seguida, así como el enfoque metodológico, para posteriormente fundamentar los elementos de obtención de información usados en esta investigación. En el tercer capítulo, relativo al análisis de datos, mostraré las 10 categorías emergentes de dicho análisis, con sus correspondientes sub-categorías, que constituyen la mirada que esta investigación nos ha permitido aportar al objeto de estudio. Finalmente, en el capítulo de discusión y conclusiones, mostraré la relación entre las categorías emergentes y el modelo de conocimiento profesional usado, aportando tanto contenido como prospectiva a la investigación sobre el conocimiento profesional del infinito, complementado por reflexiones sobre las limitaciones del estudio y sobre mi mismo como agente conductor de esta investigación.

[2] Aunque sí acerca de límites, tanto en funciones como sucesiones.

# Capítulo 1: Marco Teórico

# Introducción al Marco Teórico

Este capítulo está dedicado a presentar las bases teóricas usadas y desarrolladas durante esta investigación, que han provisto al investigador de la familiaridad con el contenido a investigar. En un primer bloque, abordaremos la noción de conocimiento profesional, con base en los trabajos desarrollados por Climent (2005), fundamentados en Ponte (1994), para pasar posteriormente a un recorrido por diferentes modelos de conocimiento profesional que se han tenido en cuenta para organizar la reflexión acerca de la naturaleza del conocimiento profesional. Los modelos se han seleccionado teniendo en cuenta las diferentes aportaciones que hace cada uno a la construcción del modelo de conocimiento profesional que mostraremos en el siguiente bloque. Durante este recorrido, no solo mostraremos el contenido de los propios modelos, sino que también se analizarán críticamente los constructos teóricos expuestos, dando sentido al hecho de proponer un nuevo modelo de conocimiento profesional.

En el segundo bloque, conceptualmente inmerso en el primero, desarrollaremos el modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas usado durante esta investigación[3], mostrando las diferentes naturalezas del conocimiento que este contempla, para posteriormente hacer una breve reflexión sobre las acciones sustentadas por el conocimiento abordado. Este modelo ha sido desarrollado en el seno del grupo de investigación en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Huelva de forma coetánea y correlacionada con esta tesis, por lo que lo mostrado aquí es la interpretación del autor de esta investigación del propio modelo, que, estando cercana a la conceptualización desarrollada por el grupo completo, posiblemente pueda no coincidir en algunos matices de la conceptualización 'estándar' del modelo, ya que las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y el infinito, que sustentan la práctica investigadora del autor condicionan esta interpretación.

En un último bloque, abordaremos el concepto matemático en el que está enfocada esta investigación, el infinito. En este bloque mostraremos algunas de las conceptualizaciones que han surgido a lo largo de la historia, relacionándolas con diferentes investigaciones sobre la cognición del infinito, para así mostrar a la vez los elementos que conforman el sustento teórico de esta investigación. Asimismo, se evidencian diferentes formas de pensamientos desarrolladas por el ser humano en torno

[3] Aunque no es el objetivo de este documento mostrar la génesis del mismo.

al concepto. Una vez hecho esto, se hará una revisión sobre antecedentes en la investigación en los que el infinito y el conocimiento del profesor se hayan visto relacionados, analizando diversas publicaciones para mostrar la necesidad de profundizar en el concepto desde la óptica del conocimiento del profesor. Finalmente haremos un recorrido por la matemática escolar, evidenciando los diferentes cursos, y conceptos en los que el infinito tiene un papel preeminente.

# Conocimiento profesional

Bajo el término “conocimiento profesional”, desde el ámbito de la investigación en didáctica, han surgido diferentes constructos teóricos que intentan explicar su naturaleza, su estructura, su organización, y los factores influyen en el desarrollo del saber, capacidades, y actitudes que un docente pone en juego a la hora de pretender conseguir que sus alumnos alcancen ciertas metas, reguladas desde diferentes organizadores (currículo, estándares nacionales, objetivos de una unidad didáctica). Más allá, no tanto el conocimiento profesional en sí, sino el cómo debe ser la enseñanza, qué fines tiene, y qué debe aportar, ha sido objeto de discusión largo tiempo, y el objetivo final de la investigación en educación matemática, desde nuestra perspectiva.

En este trabajo, comenzaremos revisando qué es el conocimiento profesional, para así poseer una base sólida sobre la que podamos fundamentar el trabajo aquí realizado sobre el tema. Para ello, nos aproximaremos desde la perspectiva que aporta Schön (1983), en la que se defiende que el conocimiento profesional parte de la reflexión. Este “conocimiento profesional”, caracterizado de forma general, es particularizado por Climent (2005) para el profesor de matemáticas, para el que caracteriza su conocimiento como:

*Situado y contextualizado*: Estas dos características emanan de la consideración del profesor como una entidad dentro de una comunidad de práctica, en la que el profesor desarrolla su conocimiento, adaptándose (consciente o inconscientemente) a su contexto. Así, el aprendizaje y el conocimiento del profesor serían contemplados no como procesos individuales, sino participados y compartidos socialmente por los miembros de la comunidad (Climent 2005, p. 76).

*Social e individual:* Aunque, como hemos dicho antes, el conocimiento del profesor se desarrolla en un contexto, también es necesario considerar al profesor como entidad (parcialmente) autónoma en cuanto a sus decisiones, y por tanto, en cuanto al conocimiento que del profesor pone en juego al tomar dichas decisiones. Este conocimiento, así como el proceso de toma de decisiones se basa en múltiples factores, desde las propias concepciones y creencias con sus raíces sociales (Ponte 1994), como en el contexto en el que el propio docente desarrolla su actividad.

*Personal:* Climent (2005) propone, siguiendo a varios autores, que el conocimiento profesional del profesor es diferente del de otro profesor, ya que depende de sus concepciones, valores y actitudes y recoge su experiencia, no solo como profesor, sino también todo el conjunto de experiencias que convierte al profesor en un individuo dentro de la sociedad en que vive. En resumen, contemplar este aspecto, pone el énfasis en el elevado margen de individualización que posee, con las características propias que le imprime el profesor (p. 77).

*Dinámico:* Esta característica es la base de lo que se ha dado en llamar "desarrollo profesional". No tiene sentido pensar en un profesor cuyo conocimiento sea invariante al tiempo, a la experiencia, profesional y vital, a las interacciones con sus alumnos y con otros profesores, o al cambio de contexto de enseñanza derivado del cambio de legislación educativa. En resumen, el profesor existe como entidad en un mundo en constante cambio, por lo que ha de adaptarse, y se adapta, a las circunstancias que le rodean para desarrollar su profesión lo más adecuadamente posible, en base a su sistema de conocimiento, creencias, concepciones y metas.

*Integrado y complejo:* Es difícil pensar en un profesor que posea una jerarquización consciente de sus conocimientos en base a su origen o naturaleza, por lo que es natural afirmar que dicho conocimiento es integrado. Asimismo, dada la gran cantidad de fuentes, contextos, y tipologías que puede tener dicho conocimiento, afirmamos que es complejo. Sin embargo, es necesario aclarar que esto no entra en contradicción con el esfuerzo analítico que se intenta hacer desde el ámbito de la investigación por conceptualizar modelos que permitan comprender al profesor en mayor profundidad, a través de los diferentes modelos propuestos, ya que estos modelos pretenden determinar los diferentes tipos de conocimiento, o los contextos en los que se activan, teniendo siempre presente que el esfuerzo analítico es propio de la labor del investigador, y no se pretende llevar al profesor a una parcelación de su propio conocimiento.

*Parcialmente tácito:* Siguiendo a Schön (1983), los profesionales competentes normalmente saben más de lo que alcanzan a decir y, por tanto, exhiben un conocimiento desde la práctica, la mayor parte del cual es tácito (p.10). Esta reflexión lleva a reflexionar sobre la consciencia del profesor de su propio conocimiento. Estamos de acuerdo con Schön en que un profesor no necesariamente ha de ser consciente del conocimiento que usa en un determinado momento. Sin embargo, dicho conocimiento existe, ya que le lleva a tomar decisiones que, de no poseerlo, hubieran sido diferentes o simplemente no hubiera podido tomar.

*Práctico:* Tras la discusión que hace Climent (2005) acerca del significado del conocimiento profesional, entendemos (o elegimos entender) que el conocimiento del profesor es práctico en tanto en cuanto que es un conocimiento que usa (en el sentido de Schoenfeld, 2010) en su práctica profesional. De especial relevancia es la reflexión de Ponte (1994), que entiende que el conocimiento profesional es conocimiento *en acción*, basado sobre conocimiento teórico y reflexión sobre la experiencia (Ponte 1994, en Climent 2005).

*Crítico:* Finalmente, aceptando la afirmación de Ponte, según la que el conocimiento del profesor está basado en la reflexión sobre la experiencia, entendemos que dicho proceso reflexivo conllevará un proceso de autocrítica, en la que el propio profesor valorará la efectividad de su forma de desarrollar su propia profesión, en pos de una mejora.

Esta caracterización aporta diferentes aspectos que podemos considerar en el conocimiento profesional, con los que coincidimos plenamente, y en los que nos fundamentaremos para siguientes reflexiones. Sin embargo, tenemos la necesidad de buscar una definición operativa para dicho conocimiento, para lo que nos remitimos a la definición ofrecida por Schoenfeld (2010):

*"Yo defino el conocimiento de un individuo como la información que tiene disponible para usar para resolver problemas, alcanzar metas, o desarrollar cualquier tarea. ¡Nótese que, de acuerdo a esta definición, el conocimiento no ha de ser necesariamente correcto!"* (Schoenfeld, 2010, p. 25)

Así, una vez caracterizado y definido, basándonos en la revisión de la literatura concerniente al tema, el significado del conocimiento profesional en el que nos basamos para desarrollar esta investigación, pasaremos a hacer un recorrido sobre algunos de los diferentes modelos de caracterización del conocimiento del profesor[4] (en particular del de matemáticas), para desembocar en el modelo que constituirá el marco teórico de esta investigación.

[4] No se tratarán todos los modelos existentes, sólo aquellos que tienen especial interés para MTSK.

## Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas: Shulman

Para hablar de los modelos de conocimiento profesional del profesor, particularizando en el de matemáticas, no podemos sino comenzar por la aportación de Shulman. En su publicación de 1986 propuso que el conocimiento del profesor, entendido desde un especial énfasis en el contenido a explicar, se puede descomponer en tres grandes componentes: Conocimiento del Contenido (*Subject Matter Knowledge,* SMK), Conocimiento Didáctico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge,* PCK), y Conocimiento Curricular (*Curricular Knowledge,* CK).

La primera componente, el SMK, se define como *"la cantidad y la organización del conocimiento per se en la mente del profesor"* (Shulman 1986, p. 9), para lo que se proponían diferentes formas para representarlo, como las taxonomías de Bloom, o la idea de Schwab (1978) de conocimiento substantivo y sintáctico, en la que separaba por una parte el conocimiento de las diferentes formas en las que el conocimiento de la materia se organiza para dar sentido a los diferentes fenómenos (lo que nos acerca a la idea de fenomenología propuesta por Freudenthal en 1983) y, por otra, el conocimiento, tanto de las reglas de sintaxis del contenido como de las formas de establecer la veracidad en el propio contenido (siendo esta una componente de gran importancia en el ámbito de las matemáticas, como veremos más adelante).

La segunda componente, el PCK, es una de las grandes contribuciones reconocidas a Shulman por los investigadores en didáctica. Esta componente se basa en el conocimiento de las formas de comunicación del contenido, en cuanto a "*las formas de representación más útiles, las analogías más poderosas, así como los ejemplos, expresiones, etc."* (Shulman 1986, p.9) que hacen el contenido enseñable. Muchos trabajos han abundado en la naturaleza de este conocimiento, y algunos como Cochran, King y DeRuiter (1991) lo han hecho desde la perspectiva del conocimiento del profesor de disciplinas científicas, definiéndolo como *"la forma en la que los profesores relacionan su conocimiento pedagógico con su conocimiento de la materia que explican. Esta definición incluye cuatro componentes: conocimiento de la materia, conocimiento de los estudiantes, conocimiento de los contextos ambientales, y conocimiento pedagógico"*. De esta definición se puede extraer la idea de que el PCK es el conocimiento pedagógico 'aplicado' a la materia. Esto entra en conflicto con la idea shulmaniana del PCK como "*amalgama de pedagogía y contenido*", entendida como la intersección entre contenido y pedagogía (Shulman 1987, p.15), ya que establece un cierto orden de prelación, en el que se posee cierto conocimiento pedagógico, sobre el que, a través de la reflexión, se establecen particularizaciones para las diferentes disciplinas objeto de docencia. Siguiendo esta línea de reflexión, Veal y MaKinster (1999) hacen un recorrido a lo largo de diferentes trabajos sobre el PCK, con especial interés por las taxonomías desarrolladas para explicarlo. En particular, nos parece especialmente relevante la interpretación que hacen del trabajo de Cochran, et al. (1991) caracterizando gráficamente los diferentes niveles del conocimiento del profesor (Figura 1), que, observados desde una perspectiva general, esquematizan como:

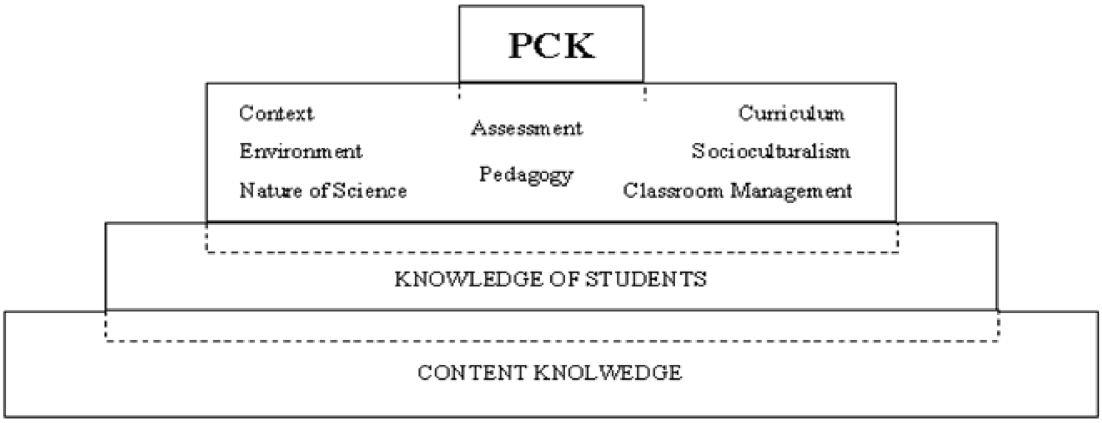


Figura 1. Niveles de conocimiento del profesor (Veal y MaKinster, 1999)

Desde esta perspectiva, las diferentes características sobre las que influyen el PCK y el conocimiento de los estudiantes son parcialmente transversales a estos, teniendo entidad propia per se, independiente de estas dos componentes. Esta conceptualización implica que *"un profesor de ciencias en secundaria desarrolla su conocimiento del contenido y aprende sobre las diferencias entre los estudiantes mientras integra las demás componentes"* (Veal & MaKinster, p.12). Esta visión adquiere sentido cuando pensamos en el proceso habitual de formación de los docentes en España, donde este recibe una formación inicial basada casi exclusivamente en el contenido que será objeto de docencia posteriormente, totalmente desprovisto de tintes pedagógicos. Posteriormente, los profesores realizan un curso de preparación para la docencia que, dependiendo del programa en el que se hayan formado, durará de 3 a 9 meses, donde se les instruye en aspectos pedagógicos generales y tienen un primer contacto con el aula. Posteriormente, tras superar una prueba de contenidos, y la exposición de una programación docente con sus correspondientes unidades didácticas, el profesor se enfrenta al aula, de donde aprende, a través de la propia experiencia con sus alumnos, cómo puede integrar el contenido, las consideraciones pedagógicas, y el propio aprendizaje de sus alumnos.

Respecto del conocimiento curricular, Shulman lo define como el conocimiento del *“rango completo de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y tópicos concretos en cierto nivel”* (Shulman 1986, p.8). Así, incluye el conocimiento del propio currículo, y de los diferentes materiales que en este se proponen para la enseñanza, así como los diferentes tratamientos que se pueden dar a una materia para organizarla y secuenciarla, o las diferentes formas de evaluación propuestas en el mismo.

## El esfuerzo topológico de Bromme

Pasando a los modelos propios del conocimiento del profesor de matemáticas, una de las primeras propuestas, basada en los trabajos de Shulman, es la de Bromme (1994), en la que pretende establecer una *"topología del conocimiento profesional del profesor"* (p. 73). En ella, considera cinco dominios, relacionados con los propuestos por Shulman. El primero de los dominios es el conocimiento del contenido sobre las matemáticas como disciplina, que abarca *"lo que el profesor aprende durante sus estudios, conteniendo […] proposiciones, reglas, formas matemáticas de pensar, y métodos"* (p.74). En resumen, es el conocimiento de la matemática disciplinar, aquella que podemos encontrar en manuales de formación de matemáticos. El segundo dominio es el conocimiento de la matemática escolar. Nos parece realmente interesante esta diferenciación que establece Bromme, ya que establece que *"los contenidos de la enseñanza no son simplemente las bases propedéuticas de la materia"* (p.74). Esta apreciación pone de relieve la necesidad de diferenciar la matemática escolar de la disciplinar como objetos diferentes en la realidad escolar. En particular, nos parece muy evocador el ejemplo del autor para mostrar dicha necesidad, diferenciando entre las matemáticas y las "mates". En tercer lugar, aparece el subdominio de la filosofía de la matemática escolar, en el que son núcleo fundamental las ideas acerca de los fundamentos epistemológicos de la matemática, así como del aprendizaje de las matemáticas, o las relaciones entre la matemática y otras disciplinas. El cuarto dominio es el del conocimiento pedagógico entendido a un nivel general, independiente de la materia que se aborde, incluyendo por ejemplo, orientaciones generales sobre cómo mantener un ambiente de trabajo por grupo y cómo esto beneficia al desarrollo de la clase. Este dominio tiene cierto reflejo en el quinto de los propuestos por Bromme, al que llama conocimiento pedagógico específico de la materia, en el que aborda aquellas especificidades de la enseñanza de la materia. El propio autor especifica que *"este campo de conocimiento […] consta de conocimiento integrado generado mezclando conocimiento pedagógico y la propia experiencia del profesor con la materia"* (p.75). Por tanto es un subdominio donde la propia naturaleza de la materia tiene un gran impacto, como por ejemplo al secuenciar varios conceptos en matemáticas, donde es necesario integrar el conocimiento pedagógico con, por ejemplo, el propio proceso histórico de construcción del concepto.

Este modelo nos parece de especial interés por ser uno de los primeros referidos a la propia matemática, con ejemplos de la misma, además de por establecer de forma clara un modelo en el que el conocimiento pedagógico tiene sentido integrado dentro de la materia, y no como intersecciones de conocimientos de diferente naturaleza.

## La escuela de Michigan: MKT

Sobre la base de los trabajos de Shulman, el grupo de investigación en educación matemática de la Universidad de Michigan propuso en 2008 el modelo denominado "*Conocimiento Matemático para la Enseñanza"*, MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008). Este modelo supuso un avance sustancial en la conceptualización del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, ya que como trasfondo a su conceptualización existe cierto afán reivindicador de la necesidad de una formación para aquellos que serán docentes 'diferente' de la mera formación disciplinar. Este modelo parte de la separación propuesta por Shulman entre conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido. En lo relativo al conocimiento del contenido, propone tres subdominios:

El conocimiento común del contenido (CCK): Este subdominio se define como "*los conocimientos y habilidades matemáticas usados fuera de la enseñanza*" (Ball, et al. 2008, p. 399). Este es, retomando la idea de reivindicación anterior, el contenido que cualquier persona formada en matemáticas puede poseer, la matemática disciplinar. Desde la óptica de qué necesita saber un profesor del contenido, es innegable que *"tiene que ser capaz de hacer lo que encarga a sus alumnos"* (p.399), aunque como mostraron Stein, Baxter y Leinhardt (1990), no solo ha de poseer estos conocimientos, ya que, en el caso de su estudio, una concepción de función como 'regla de cálculo', lleva a dificultades, tanto derivadas de la enseñanza como de la propia conceptualización que induce a los alumnos. Es por esto que Ball y colaboradores proponen el siguiente subdominio.

El conocimiento especializado del contenido (SCK): Esta idea es reconocida ampliamente como la gran aportación del modelo MKT. Pensar en una forma de entender la matemática exclusiva a la labor del profesor implica una llamada de atención a autoridades educativas para hacer explícito la necesidad de la implicación de especialistas en educación matemática en el proceso de formación. Así pues en la publicación de 2008 este subdominio se define como el complementario al anterior, es decir, los conocimientos y habilidades exclusivos de la enseñanza. En los trabajos consultados, más que una caracterización del subdominio, se propone un conjunto de situaciones en las que está involucrado:

| |
|---|
| Presentar ideas matemáticas |
| Responder a las cuestiones de los alumnos de "por qué?" |
| Encontrar ejemplos para abordar un elemento matemático específico |
| Reconocer qué está involucrado en el uso de ciertas representaciones |
| Conectar un tópico con otros de años futuros o anteriores |
| Explicar las metas y propósitos matemáticos a los padres |
| Evaluar y adaptar el contenido de libros de texto |
| Modificar tareas para hacerlas más sencillas o más dificultosas |
| Evaluar la validez de las afirmaciones de los alumnos |
| Dar o evaluar explicaciones matemáticas |
| Elegir y desarrollar definiciones usables |
| Usar el lenguaje y la notación matemáticos y criticar su uso |
| Hacer preguntas matemáticas productivas |
| Seleccionar representaciones con propósitos concretos |
| Inspeccionar equivalencias |

Figura 2: Tareas Matemáticas de la Enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400)

Estas tareas son claramente propias de la actividad profesional del profesor de matemáticas, y, aunque requieren también conocimientos de otras naturalezas, tiene sentido pensar que existe como trasfondo un cierto conocimiento exclusivo del profesor de matemáticas (por ser profesor y por impartir matemáticas). Una noción que organiza este subdominio es la de "desempaquetado[5]" del contenido (Ma, 1999). Se entiende que uno de los objetivos del profesor es que el alumno desarrolle capacidad para trabajar con cierta destreza el contenido disciplinar, para lo que el profesor tendrá que comprender los diferentes aspectos que conforman dicho contenido, para usarlo como más convenga a las necesidades de cada alumno, desempaquetando el contenido escolar en unidades sobre las que el profesor pueda establecer una profunda reflexión.

Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK): Esta tipología de conocimiento, definido en primera instancia como *"la conciencia de cómo están distribuidos los contenidos a lo largo del currículo"* (p.403), ha dado lugar a multitud de investigaciones sobre su naturaleza. Son interesantes los trabajos de Fernández (2011) y Fernández, Figueiras, Deulofeu y Martínez (2010), por las aportaciones respecto a la clasificación de los tipos de conexiones que puede establecer entre elementos de un mismo concepto (intraconceptuales), entre diferentes conceptos (interconceptuales), y derivadas de un proceso de evolución del contenido a lo largo de los cursos (temporales). Ball y Bass (2009) describieron el HCK como cierto tipo de visión matemática necesaria para la enseñanza, algo cercano a una imagen mental del territorio matemático en el que transcurrirá la docencia del profesor. En el CERME 8, Jakobsen, Thames y Ribeiro (2013) presentaron una reconceptualización del subdominio, tras una profunda crítica a los trabajos realizados en torno al mismo, ya que, *"el problema de definir el HCK deriva de una sobreabundancia de metáforas de inadecuada claridad y consenso, especialmente en cuanto a la relación del HCK con la enseñanza"* (p.3055). Por tanto, para dar respuesta a esta sobreabundancia de metáforas, diseñaron una definición del HCK que evita el uso de dicho recurso habitualmente literario, que además incorpora la eliminación del currículo de la definición:

*"El Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) es una orientación hacia y familiaridad con la disciplina que contribuye a la enseñanza de la materia escolar, proveyendo a los profesores de un sentido acerca de cómo el contenido abordado está situado en y conectado con el territorio disciplinar cercano"* (Jakobsen et al., 2013, p.3058)

[5] Traducción libre del término inglés 'unpacking'

Nos parece interesante recalcar, de cara al refinamiento que posteriormente propondremos, que esta visión de la amplitud del territorio matemático que el profesor necesita tiene carácter prospectivo sobre el contenido, ya que los propios autores afirman que *“nuestra visión es que los profesores necesitan un tratamiento de las matemáticas avanzadas adaptado a las demandas de orientación y guía de la enseñanza que desarrollan”* (Jakobsen et al., 2013, p.3062). Por tanto, este subdominio, como antes afirmamos, queda definido en función del conocimiento avanzado[6] que posee el profesor respecto del contenido.

Pasando ahora al conocimiento didáctico del contenido, se proponen otros tres subdominios, con el foco en la enseñanza, los estudiantes, y el currículo, respectivamente, que desarrollaremos en lo que sigue:

Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS): Considerar el conocimiento que el profesor posee acerca de sus estudiantes parece natural dentro de un modelo de conocimiento profesional y, de hecho, una conceptualización muy cercana a lo propuesto para el modelo MKT se puede encontrar en los trabajos de Shulman (1986, 1987). Sin embargo, este subdominio no ha sido descrito a través de una definición intrínseca, sino de una descripción de la naturaleza del mismo: *“es conocimiento que combina conocer acerca de los estudiantes y conocer las matemáticas”* (Ball et al., 2008, p. 401). Posteriormente, en multitud de trabajos se han ejemplificado situaciones en las que dicho conocimiento se pone en juego (e.g. Hill, Ball & Schilling, 2008; Bas, Didis, Erbas, Cetinkaya, Cakiroglu &Alacaci, 2013; Steele, 2013), sin ahondar en una propia definición intrínseca.

Conocimiento de la Enseñanza del Contenido (KCT): Este subdominio, definido en términos parecidos al anterior, *"combina conocimiento de la enseñanza y conocimiento de matemáticas"* (Ball et al., 2008, p. 401). Este subdominio está conceptualizado sobre la base de la necesidad de conocer matemáticas para diseñar, gestionar, y evaluar tareas, secuencias y dinámicas de aprendizaje en el contexto de la clase de matemáticas. Se hace especial hincapié en el conocimiento de recursos como los bloques en base diez para ayudar a los alumnos a comprender los procesos y algoritmos de sustracción.

[6] Íntimamente ligado a un grado mayor de complejidad.

Finalmente, el Conocimiento Curricular, que no experimenta cambio ninguno desde la propuesta de Shulman, se conserva como parte a tener en cuenta dentro de las tipologías de conocimiento del profesor de matemáticas.

## El Knowledge Quartet, el conocimiento contextualizado en acciones

El conocimiento del profesor no tiene sentido sino como conocimiento de “uso”, es decir, una persona que atesorara infinidad de conocimiento, de múltiples naturalezas, abarcando el espectro completo de aquello que pudiera necesitar como profesor, pero que en la práctica no usara dicho conocimiento, haría difícil pensar que ese conocimiento no usado pudiera denominarse conocimiento útil en la enseñanza. La perspectiva que aportan Rowland, Turner, Thwaites y Huckstep (2009) es la de un modelo que categoriza el conocimiento en cuatro grandes componentes (conexiones, fundamentos, transformación y contingencia), sobre los cuales hace un análisis acerca de qué situaciones suelen hacer que el profesor ponga en juego conocimiento de estas cuatro componentes, en las que profundizaremos en lo que sigue.

Fundamentos: Es la primera componente propuesta, que además tiene sentido considerar como tal ya que los propios autores afirman que las otras tres se apoyan en esta. Está constituida por los diferentes saberes aprendidos en etapas académicas, tanto de formación disciplinar (en matemáticas), como de formación docente (en cursos de pedagogía durante la formación como profesor, por ejemplo). Estos saberes alimentan, según Rowland et al. (2009), al resto de subdominios. Sin embargo, los propios autores afirman que este conocimiento no tiene por qué ponerse en juego en la enseñanza, sino que tiene sentido como la colección de saberes que el profesor atesora. Las tres componentes clave de este subdominio son:

- El conocimiento y comprensión de las matemáticas *per se*.
- El conocimiento de la pedagogía ligada a la matemática
- Creencias sobre las matemáticas, incluidas las creencias sobre qué y cómo debe aprenderse en matemáticas

Así, este es el conocimiento que podríamos denominar “activable” a la hora de llevar a cabo una acción de enseñanza. Los propios autores reconocen que este subdominio posee una naturaleza ciertamente diferente ya que, a diferencia del resto, este no hace referencia al “conocimiento en acción”.

Transformación: El propio Shulman definió el PCK como el conocimiento que permite transformar el conocimiento académico en usable. Desde esta idea, Rowland y colaboradores desarrollan este subdominio de transformación, cuyos elementos centrales son los mismos que Shulman (1986) proponía como caracterizadores de su PCK: Analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Esta idea de transformación del contenido para hacerlo explicable se encuentra muy cercana a la idea francesa de *Transposición Didáctica* (Chevallard, 1991), el conjunto de transformaciones adaptativas que van a convertir un objeto, que este autor denomina objeto de saber, en un objeto de enseñanza. Los propios autores del modelo reconocen que este subdominio hace referencia *"al núcleo de lo que significa enseñar una materia"* (Rowland et al., 2009, p.30)

Conexión: La labor del profesor no consiste en desarrollar episodios aislados de docencia en sesiones, ni en desarrollar diferentes actividades en una misma clase sin relación entre ellas, sino que la elección de actividades, o la secuenciación de clases, responde a un conocimiento del contenido integrado en una estructura matemática conectada, coherente, sobre la que el profesor decide qué conocimientos activar y cuáles no. Este subdominio alude directamente a esa conectividad y coherencia matemática, y en su expresión en las acciones de enseñanza. Rowland y colaboradores afirman que este subdominio "*no se limita a la conectividad del contenido matemático en la mente del profesor y su enseñanza en el aula, sino que incluye la secuenciación de tópicos en la instrucción dentro de las lecciones y entre las mismas, incluyendo la ordenación de tareas y ejercicios*" (Rowland et al. 2009, p.31). Así pues, este subdominio alude a una visión de la tarea del profesor como concatenación de acciones conectadas, ya sea matemáticamente (en el sentido de las conexiones de Fernández et al., 2010), o por coherencia dentro del aula.

Contingencia: Este subdominio hace referencia a las situaciones fortuitas, no previstas, en las que el profesor se encuentra con una pregunta de un alumno, o en las que el propio discurrir de la sesión de clase le hace desviarse de su planificación. Estas situaciones contingentes ponen a prueba el conocimiento del profesor, activando aquel que es necesario para afrontar la situación. Así, en este subdominio no se habla de un conocimiento de naturaleza "especial", sino de la capacidad del profesor para activarlo en situaciones no esperadas.

## Davis y Simmt, una visión basada en la ciencia de la complejidad

En 2006, Brent Davis y Elaine Simmt, propusieron una visión alternativa del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, basada en la *Complexity Science*, teoría que da significado a múltiples sistemas complejos (Davis & Simmt, 2006 proponen ejemplos propios de la biología). Esta teoría se basa, a grandes rasgos, en la interacción entre agentes autónomos que conforman pequeños grupos, que a su vez interaccionan entre sí, para, de esta forma, llegar a siguientes unidades de orden superior, hasta llegar a los organizadores centrales o las estructuras establecidas por los agentes gubernamentales.

En su propuesta teórica del *Mathematics for Teaching* (MfT), categorizan en dos grandes grupos los cuatro focos que proponen. El primer grupo es el de las *Categorías de conocimiento* (estables), constituida por los objetos matemáticos y las estructuras curriculares. El segundo grupo es el de las *Categorías de conocimiento en transformación*[7] (dinámicas), constituidas por la colectividad del aula y la comprensión subjetiva (personal). El criterio usado *"no es la diferencia entre el producto y el proceso, sino entre los aspectos relativamente estables del conocimiento matemático y las cualidades ciertamente más volátiles que sostienen dicha estabilidad.*". Así, *"el conocimiento de las matemáticas establecidas no se puede diferenciar del conocimiento de cómo se establecen las matemáticas"* (Davis & Simmt, 2006, p. 298). Esta teoría aboga por una categorización en el potencial del entendimiento del profesor, desde el conocimiento matemático escolar que reciben en su formación, que desemboca en un conocimiento profundo y reflexivo del currículo, hasta el conocimiento de lo que sucede en su aula, comprendiendo a su alumnado como grupo hasta finalmente comprender los procesos de reflexión de cada alumno. Una indicación que resulta realmente interesante, en términos de desarrollo profesional, y de la escala temporal a la que este sucede, es la que hacen sobre la escala temporal a la que suceden las transformaciones significativas de este conocimiento. Mientras que las categorías estables varían a través de los años, las dinámicas pueden verse modificados en el transcurso de una clase, o en la propia conversación con un alumno.

[7] Traducción libre

## Análisis crítico de los modelos anteriores. Fortalezas y debilidades

Antes de comenzar con este apartado, creemos necesario reconocer que todos los modelos anteriormente citados, que serán objeto de crítica durante las siguientes páginas, han aportado, de una manera u otra, contenido a la reflexión realizada para desarrollar el modelo que posteriormente se propondrá. El mero hecho de reflexionar sobre un modelo, comprenderlo, analizar episodios bajo la óptica que propone para comprenderlo mejor, desarrolla la sensibilidad teórica de quien reflexiona, además de hacer consciente al propio investigador de diferentes aspectos que otros investigadores han considerado de importancia en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Así, aunque *"caminamos a hombros de gigantes"*, en este apartado desnudaremos los modelos, buscando aquellos elementos que los estructuran y sostienen, revisando su coherencia, y su adecuación a nuestras concepciones como investigadores, para dar sentido a nuestro propio proceso de construcción de un modelo, que comenzará de forma explícita en posteriores apartados, pese a que todo lo escrito hasta el momento forma parte, implícitamente, del mismo.

### *Modelo topológico de Bromme*

Comenzando por el modelo de Bromme (1994), nos parece muy interesante la profundidad con la que aborda el contenido matemático en sí, ya que este está presente a lo largo de todo el modelo. Desde la matemática disciplinar, hasta el conocimiento pedagógico ligado a la materia, sólo el subdominio referido al conocimiento pedagógico general carece de consideraciones matemáticas. Asimismo, es el único modelo que considera, de forma explícita, la filosofía de la matemática, ligada a los aspectos epistemológicos de la misma, siendo este un elemento importante a considerar, ya que da un matiz contextual al profesor como tal, no como mero conocedor de la matemática. Sin embargo, este modelo carece de una visión del profesor ligada a la acción del mismo, es decir, caracteriza de forma profunda el contenido que el profesor puede conocer, pero no aborda el uso de dicho conocimiento.

### *Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT)*

Pasando ahora al modelo propuesto en la Universidad de Michigan, hay dos subdominios que nos parecen realmente innovadores en su conceptualización respecto a modelos anteriores, como son el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento del horizonte matemático. El primero de ellos, el SCK, pone de relieve la diferencia existente entre las matemáticas que conoce un profesor y las que conoce cualquier otro profesional. Esta diferenciación, que es la base de la separación entre CCK y SCK, supone un reconocimiento de la labor de los especialistas en didáctica de las matemáticas en la formación de los profesores y maestros de matemáticas, ya que se entiende que sólo aquellos que posean las claves para entender[8] el contenido escolar podrán permitir que sus alumnos construyan un entendimiento del mismo aplicado a la enseñanza. Esta consideración tiene, por consiguiente, un impacto en el diseño de propuestas de formación inicial. Asimismo, de cara al ámbito de la investigación, la consideración de categorías teóricas del SCK provee al investigador de una sensibilidad teórica (Glaser y Strauss, 1967) que le permita comprender en mayor profundidad los conocimientos que un profesor activa o puede activar de cara a la enseñanza de un determinado contenido. Sin embargo, esta visión especializada del contenido genera problemas de delimitación con otros subdominios. En primer lugar ¿Qué es especializado y qué no? Diferenciar entre ambos subdominios insta[9] a buscar, dada una demostración del profesor de poseer cierto conocimiento sobre el contenido, alguna profesión en cuya formación se incluyeran cursos de matemáticas en los que se contemplara dicho conocimiento. En ciertos casos es fácil intuir que no existe dicha profesión, por ejemplo al justificar un profesor el uso de un algoritmo alternativo, así como su validez. Sin embargo, en otros casos, por ejemplo al introducir un profesor en el aula la derivada mediante su construcción matemática proveniente del límite las sucesivas secantes a un punto, promoviendo un aprendizaje conceptual, el profesor recurre a una construcción “clásica” de la derivada, que se hace en diferentes cursos de matemáticas (independientemente de la profesión a la que den acceso), sabiendo justificar la elección de la misma dentro de su adecuación matemática en este contexto de enseñanza. ¿El conocimiento que subyace en este caso es común o especializado? El profesor puede dar argumentos desde su conocimiento del contenido basado en sus diferentes experiencias de enseñanza, y, justificando varias posibles construcciones de la noción de derivada, elige esta por ser la que promueve un aprendizaje más acorde con su concepción de cómo debe ser el aprendizaje. Estos son argumentos suficientes como para hablar de un conocimiento especializado del profesor. Sin embargo, como hemos

[8] Entender considerado en un sentido amplio. No se refiere exclusivamente al entendimiento del contenido en si (saber por qué funciona matemáticamente un determinado algoritmo), sino a saber reformularlo de diferentes formas que le permitan comprender las producciones de hipotéticos alumnos, así como, por ejemplo, a entender los razonamientos matemáticos que llevan a errores habituales, y la fuente de dichos errores.

[9] Al menos al investigador que escribe este documento.

dicho antes, es un conocimiento que, por ejemplo, un arquitecto podría poseer[10], de cara al diseño de la fachada de un edificio de paredes no planas. Siguiendo con el tema de los problemas de definición, Flores, Escudero y Carrillo (2013), desarrollan una discusión muy interesante sobre un ejemplo propuesto en Suzuka, Sleep, Ball, Lewis y Thames (2009) de un ejemplo de una actividad en la que se moviliza el SCK del profesor, llegando a la conclusión de que el SCK puede llegar a abarcar conocimientos de diferentes tipologías, tanto relativos al conocimiento de los estudiantes (KCS), como incluso al conocimiento común (CCK), con lo que se convierte en una noción poco operativa de cara al análisis de episodios de clase.

En lo que concierne al conocimiento del horizonte matemático, entendemos que la propuesta de profundizar en el conocimiento del profesor no se limita a lo que conoce en relación con la clase concreta que está impartiendo, sino que abarca la prospectiva del contenido en cursos posteriores, o en sucesivos niveles de complejidad posteriores[11]. Esta visión se hace muy clara en Zazkis y Mamolo (2011), en el que estas dos autoras proponen las posibles respuestas de una profesora a la pregunta sobre cuántos triángulos pueden considerarse en un pentágono con las diagonales dibujadas, llegando a plantear una de ellas en el contexto de la teoría de grupos. Sin embargo, en esta propuesta, según la respuesta que desarrollaron Figueras, Ribeiro, Carrillo, Fernández y Deulofeu (2011) al artículo de Zazkis y Mamolo, es necesario considerar un límite en lo avanzado del conocimiento abordado en el HCK. La matemática necesaria para resolver el problema de los triángulos en el pentágono responde a una complejidad y un nivel conceptual en el que la profesora no necesariamente debería estar formada. Así pues, encontramos una de las primeras dificultades que genera este subdominio, el límite del mismo. De igual manera, esta visión prospectiva limita la visión que se tiene sobre el contenido, si entendemos que el profesor puede conocer un entorno del mismo (más o menos amplio), al aludir la definición del HCK al futuro del contenido (en el currículo o matemáticamente), solo estaríamos considerando la mitad del entorno[12]. Esto elimina la visión de la matemática avanzada desde un punto de vista elemental propuesta por Klein (1908), del que podemos encontrar un ejemplo en Montes, Contreras y Carrillo (2013), en el que un profesor recurre al trabajo con fracciones numéricas para abordar contenido

[10] O al menos haber poseído en su formación.
[11] Dependiente o independientemente de si el currículo está presente o no en esta prospectiva, el profesor puede comprender “complejizaciones” del contenido matemático.
[12] Entendiendo el entorno como un círculo, dicha mitad solo respondería al semicírculo referido al futuro del contenido.

relativo a derivadas, en expresiones algebraicas complejas fraccionarias. Esa visión elemental del contenido avanzado no tiene cabida en la visión prospectiva del HCK, limitando la utilidad analítica del subdominio y por tanto del modelo.

La gran potencialidad del MKT, en contraste con el modelo del Bromme de 1994, es que es un modelo ligado a la observación del profesor en el aula, es decir, es un modelo del profesor en la acción. Así, la perspectiva aportada por el MKT no responde a las necesidades de un modelo dedicado puramente a la investigación teórica, sino que deriva de la voluntad del grupo de Michigan de evaluar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores del sistema educativo estadounidense (practice-based approach, Thames y Van Zoest, 2013). En esta línea, han desarrollado múltiples ítems para evaluar dicho conocimiento (Hill, Schilling & Ball, 2004). Por tanto, consideramos que, desde el ámbito de la investigación, existe la necesidad de un modelo, ya sea nuevo o una redefinición del MKT, para detectar el conocimiento, que solvente los problemas de delimitación de este modelo teórico.

Finalmente, creemos necesario comentar un aspecto que no puede ser considerado sino como una limitación. MKT permite comprender el conocimiento del profesor de cualquier contenido, independientemente de si dicho profesor es de matemáticas, historia, química, o filosofía. Las categorías que proponen, en lo relativo al PCK consisten en considerar estudiantes, docencia y currículo, cosa que podría hacerse para cualquier otra disciplina. En la categoría del SMK, se considera el conocimiento común, especializado y del horizonte[13], y esta misma diferenciación podría hacerse en cualquier otra materia, ya que considerar el conocimiento que otros profesionales pudieran poseer, frente al exclusivo del profesor, y la proyección del contenido en cursos posteriores, no es algo intrínseco a la enseñanza. Por tanto, el modelo de "*Conocimiento Matemático para la Enseñanza*" bien podría entenderse como *"Conocimiento Disciplinar para la Enseñanza"*. Esto, desde el punto de vista de este investigador, supone alejarse de la naturaleza propia de la matemática en el mismo momento de considerar la génesis del modelo, y aunque posteriormente los autores ejemplifican y desarrollan el modelo para el caso del profesor de matemáticas, bien podrían haberlo hecho para otros casos. Sin embargo, incidiendo en ideas anteriores, cabe destacar que de cara a poner de relevancia

[13] Entendido como la proyección del contenido en cursos futuros.

del formador de profesores como especialista en didácticas específicas, el modelo es una gran aportación.

### *Cuarteto de Conocimiento (KQ)*

El modelo propuesto por Rowland et al. (2009) nos parece adecuado para el análisis de las situaciones en las que se movilizan conocimientos de diferentes naturalezas. Así, consideramos dos grandes núcleos de aportaciones del modelo: El primero de ellos, la categorización que aporta, en las categorías descritas en el modelo, para las situaciones en las que se activa el conocimiento del profesor. En segundo lugar, el subdominio de contingencia, en el que se contemplan los momentos en los que el profesor activa su conocimiento de forma no prevista. Considerar esta situación nos parece un contexto de investigación privilegiado para indagar en el conocimiento que pone en juego el profesor, los factores que influyen en dichas situaciones, y todo lo que envuelve a dicho momento.

La limitación que observamos en el KQ deriva de su propia potencialidad. Al ser un buen modelo para detectar las situaciones en las que se moviliza el conocimiento del profesor, el propio modelo está más cerca de ser un modelo para la “clasificación” y detección de dichas situaciones, que para considerar la propia naturaleza de las mismas. Así, esas situaciones, evidenciadas en los 20 códigos propuestos[14] por los autores, refieren a los diferentes momentos del aula o a las diferentes acciones del profesor en las que subyacen ciertos conocimientos que el profesor *usa*, no al propio conocimiento en sí, por lo que no creemos que sea un modelo puramente de conocimiento, al menos bajo la perspectiva de conocimiento en la que nos encontramos. Asimismo, encontramos que la caracterización de los subdominios que proponen Rowland y sus colaboradores no es disjunta, ya que, por ejemplo, los conocimientos usados para realizar una *transformación* del contenido, pueden ser cercanos a los que le permitan *conectar* los conocimientos que ya poseen sus alumnos con los que pretende el profesor que desarrollen, para lo que el profesor posiblemente usará conocimiento relativo a la *fundamentación* tanto didáctica (en la forma de presentar dicha transformación) como matemática (en el contenido a presentar).

[14] Los 18 propuestos originalmente, más los 2 adicionales propuestos por Rowland, Turner y Thwaites (2013).

### *Mathematics for Teaching (MfT)*

El modelo presentado por Davis y Simmt (2006), y sujeto a discusión, junto a MKT y KQ en la reunión del PME de Thessalonika, nos parece potente para estudiar no tanto el conocimiento del profesor de matemáticas como el desarrollo profesional del propio profesor. El contenido del modelo propuesto es cercano a la práctica del profesor, teniendo en cuenta a su vez el conocimiento que el profesor posee. Asimismo, la diferenciación entre conocimiento estable y dinámico supone una de las grandes aportaciones de un modelo que, en su propia conceptualización, reconoce la posibilidad de alteración del conocimiento, existiendo conocimientos más susceptibles de cambio y menos. El gran problema de este modelo es la dificultad que supone comprenderlo plenamente, ya que esto requeriría una comprensión profunda de la *"Complexity Science"*, teoría habitualmente usada en contextos científicos de naturaleza distinta al contexto en el que se realiza esta investigación (Didáctica de las matemáticas), siendo esta teoría difícil de abarcar, dada su profundidad, complejidad y amplitud, por lo que se evitó su uso en esta investigación.

## La visión integradora de Schoenfeld

Alan Schoenfeld (2010), en su libro "How we think", propone una visión diferente del profesor, no exclusivamente centrada en su conocimiento, en el que desarrolla una teorización (y posterior comprobación en la práctica) de aquellas componentes que están implicadas en su proceso de toma de decisiones. En la propuesta teórica de Schoenfeld, el modelo ROG[15], aparecen tres grandes componentes:

- Las *metas*, aquellos objetivos que el profesor se plantea, consciente o inconscientemente. Estas metas poseen múltiples características, según plantea el autor, en términos de cuan alcanzables son, de si necesita sub-metas, o del momento en el que pueden alcanzarse, considerando metas a corto, medio o largo plazo (siguiendo a Lampert, 2001).
- Los *recursos*, en los que se hace un especial hincapié en el conocimiento[16]. Schoenfeld hace una discusión sobre los tipos de conocimiento del profesor, que separa cuatro categorías:

[15] Resources, Orientations and Goals, en idioma castellano, Recursos, Orientaciones y Metas.
[16] En la reflexión de Schoenfeld sobre los recursos, se aporta la definición de conocimiento anteriormente citada.

- *Hechos*, entendidos como elementos de conocimiento aislado, que no necesariamente han de estar fundamentados, como por ejemplo, saber que la longitud de la circunferencia es 2 veces el radio por pi.
- *Conocimiento procedimental*, o saber hacer, relativo al cómo aplicar algoritmos, reglas, en general, formas estandarizadas de proceder, más o menos complejas.
- *Conocimiento Conceptual*, relativo al saber por qué y cómo las relaciones matemáticas establecidas son válidas o no. Por ejemplo, conocer las propiedades de los números y ser capaz de demostrar relaciones entre ellos recurriendo a otras propiedades formaría parte de esta categoría.
- *Estrategias de resolución de problemas*, esta componente no podía sino estar presente en un trabajo de Schoenfeld, cuya obra ha estado muy relacionada con este tema a lo largo de su trayectoria profesional[17]. Conocer las distintas estrategias para resolver problemas debe formar parte del conocimiento del profesor, según este autor, tanto para tratar con el contenido, como para tratar con los alumnos

- Las *orientaciones*, donde están incluidos los gustos, las creencias, las concepciones, las preferencias y las actitudes, es decir, las características más personales del profesor, que *"dan forma a la priorización de las metas que se establecen para tratar con situaciones y a la priorización del conocimiento usado en cada situación, al servicio de dichas metas"* (p. 29). Pensando en la caracterización anterior del conocimiento profesional, es la componente relacionada con la característica *personal* del mismo.

Al ser el conocimiento del profesor el foco de esta tesis, estaríamos encuadrados en el ámbito de los recursos, pero entendemos que tanto la toma de decisiones como el propio conocimiento del profesor no se pueden considerar departamentos estancos e impermeables, por lo que, coincidiendo con el propio Schoenfeld, aceptamos que existe una fuerte interrelación tanto entre *metas, recursos* y *orientaciones*, como entre las propias componentes del conocimiento del profesor en las que nos centraremos en los siguientes apartados.

[17] Reconociendo el mismo que comenzó a interesarse en la Educación Matemática por este tema.

## Elementos comunes a las diferentes propuestas teóricas

Desde la aportación de Shulman, un elemento común a todos, o casi todos los modelos considerados, es la consideración, implícita o explícita, de la separación entre SMK y PCK. Tanto el modelo MKT de Ball y colaboradores, como en el Knowledge Quartet de Rowland y colaboradores, son ejemplos de separación explícita (MKT), o implícita (KQ), siendo el modelo de Bromme un ejemplo también de forma explícita de considerar el conocimiento matemático por un lado y el pedagógico relativo al contenido por otro.

Asimismo, entre los dos modelos más recientes, MKT y KQ, encontramos otros aspectos comunes en los que nos parece muy interesante poner la mirada. El primero de ellos procede de los elementos a los que prestan especial atención ambos modelos. Estos focos de atención, atendiendo a las descripciones que ambos grupos de investigadores hacen de sus respectivos modelos, son los que figuran en la siguiente tabla (Alumnos, transformación del contenido, conocimiento escolarizado, etc.), mostrándose en qué elementos del modelo están presentes:

| | **MKT** | **KQ** |
|---|---|---|
| Alumnos | *KCS* | *Fundamentos, Transformación* |
| Transformación del contenido | *KCT* | *Transformación* |
| Conocimiento 'escolarizado' | *SCK* | *Transformación* |
| Contenido Matemático Disciplinar | *CCK* | *Fundamentos* |
| Visión global de la matemática | *HCK* | *Conexiones* |
| Profesor en acción | *Génesis del modelo* | *Génesis del modelo, Contingencia* |

Figura 3: Elementos del conocimiento profesional ligados a subdominios de MKT y KQ.

Quedan evidenciados los puntos comunes a los diferentes modelos. Algunos aspectos, como la consideración del papel de los alumnos en el conocimiento del profesor, creemos que son aceptados en la comunidad investigadora de forma generalizada[18].

[18] De hecho, abundan las investigaciones sobre los procesos cognitivos de los alumnos en relación con diferentes conceptos, y si sucediera, como creemos que debiera hacerlo, el proceso de transferencia desde

Otros aspectos, como los del proceso de transformación del contenido matemático disciplinar hacia el contenido matemático escolarizado, así como los propios contenidos en sus diferentes estadios pre y pos transformación, son especialmente relevantes, por la consideración a la que inducen ambos modelos, de que la forma de conocer el contenido de un profesor puede y debe ser diferente de la forma en la que lo conoce un matemático, o cualquier especialista formado en matemáticas.

Respecto a la imagen global de la matemática, nos parece una de las ideas más potentes en MKT, aunque poco desarrollada en KQ. De igual forma que en matemáticas se consideran propiedades globales de los entes matemáticos (e.g. la continuidad uniforme de funciones), y propiedades locales (e.g. la continuidad puntual), a la hora de considerar el contenido matemático a tratar en una sesión, tema, problema o ejercicio, un profesor puede tener en mente futuros episodios en los que los alumnos puedan necesitarlo, ya sea en una versión idéntica a la que tratan en ese momento, o en una versión transformada o complejizada. Esta visión de las necesidades futuras de los alumnos responde a la idea de conexión del contenido tratado en un momento con otros contenidos.

Finalmente, ambos son modelos que consideran al profesor en acción. El KQ, en tanto en cuanto que su gran potencialidad es a la hora de caracterizar y detectar las acciones que movilizan conocimiento, siendo de especial relevancia el subdominio de contingencia, al ser estas situaciones una oportunidad para ver el conocimiento que el profesor activa en momentos inesperados, es decir, si seguimos la definición de conocimiento dada por Schoenfeld (2010), para ver qué conocimiento posee activable para responder a las necesidades de su aula. El MKT nace de la observación de aula, y una de las intenciones que existen en su conceptualización es la de evaluar o medir el conocimiento que poseen los profesores para la enseñanza de las matemáticas (Hill, Schilling & Ball, 2004; Hill, Rowan & Ball, 2005). Por tanto, es un modelo que considera al profesor en acción y, más aún, al conocimiento que el profesor pone en juego en la acción, obviando la dimensión tácita (Schön 1983) del mismo.

el ámbito de la investigación al ámbito escolar, creemos que los profesores deberían ser uno de los principales receptores. Así, las investigaciones sobre el conocimiento de los alumnos, tendrían impacto en el proceso educativo.

## Las concepciones

Existen multitud de trabajos que abordan el estudio de las concepciones del profesorado (e.g. Thompson 1992; Schoenfeld 1992; Pehkonen, 1994; Ponte 1994; Carrillo 1998; Contreras 1999; Krainer, Gofree & Berger, 1999), en los que se ofrecen diversas definiciones del término concepción/creencia[19]. De especial interés nos parece el trabajo de Furinghetti y Pehkonen (2002), en el que se hizo una discusión acerca de los diferentes significados del término concepción, sometiendo las diferentes definiciones aportadas desde la literatura investigativa a la crítica de expertos en el campo, llegando a sugerir las siguientes conclusiones para posteriores investigaciones, algunas de las cuales aceptamos y tendremos en cuenta para el presente trabajo:

*[…]al tratar con concepciones y términos relacionados, es recomendable:*

-*Considerar dos tipos de conocimiento, (objetivo*[20] *y subjetivo)*

- *Considerar concepciones como pertenecientes al conocimiento subjetivo*

- *Incluir factores afectivos en los sistemas de creencias, diferenciando concepciones afectivas y cognitivas en caso de ser necesario*

- *Considerar diferentes grados de estabilidad en las concepciones, y aceptar que están sujetas a cambio.*

- *Considerar el contexto y las metas de la investigación en la que se abordan las concepciones*

(Furinghetti & Pehkonen, 2002, p.54)

Atendiendo a estas recomendaciones, y de acuerdo al sentido de esta investigación, nos parece especialmente relevante la definición de Thompson (1992) del término concepción:

*"La concepción de un profesor de la naturaleza de las matemáticas puede ser vista como las creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes, concernientes a la disciplina matemática"* (Thompson, 1992, p.132).

[19] En español concepción y creencia se usan indistintamente bajo el mismo significado, salvo sutiles diferencias teóricas sobre las que reflexionaremos en lo que sigue

[20] Entendido como conocimiento intersubjetivo, aceptado por una comunidad.

Esto nos lleva a la diferenciación entre concepción y conocimiento, que ha sido también objeto de discusión en términos incluso psicológicos y filosóficos. Podríamos entender el conocimiento como creencia justificada, definición clásica derivada del pensamiento platónico que entendemos no aportaría la riqueza que deseamos en este estudio, ya que no es uno de los objetivos determinar el grado de justificación que posee el profesor acerca de su conocimiento. Por tanto, usaremos las definiciones de Ponte (1994) de creencia, concepción y conocimiento, tal y como se usan en Contreras (1999):

*Creencias: verdades personales e incontrovertibles sostenidas por cada uno, derivadas desde la experiencia o desde la fantasía, teniendo una componente evaluativa fuerte.*

*Concepciones: Marcos organizativos que soportan los conceptos, que tienen esencialmente una naturaleza cognitiva.*

*Conocimiento: Amplia red de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por los seres humanos. Concepciones y creencias son parte del conocimiento*

(Contreras 1999, p. 21)

Estas definiciones son funcionales y, en gran medida, responden a la esencia de lo sugerido por Furinghetti y Pekhonen. Sin embargo, coincidiendo con estos dos autores, no creemos que las creencias no estén sujetas a cambio[21], por lo que creemos que el término "*incontrovertibles*" debe ser eliminado. De igual manera, entendemos que las creencias pueden ser tanto sustentadas individualmente, como socialmente, quedando la definición de creencia descrita de la siguiente forma:

Creencia: verdades personales, sostenidas individual o socialmente, creadas desde la experiencia o la fantasía, teniendo una componente evaluativa fuerte.

Así, es necesario destacar el esfuerzo que durante el desarrollo de esta investigación hemos realizado para, junto al grupo SIDM, desarrollar definiciones acerca de conocimiento, creencias y concepciones, trabajo que se puede encontrar en Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado y Flores (2014), donde se desarrolla gran parte del enfoque epistemológico que subyace a esta investigación. En este trabajo optamos finalmente por considerar que, aunque entendemos que se puede pretender diferenciar entre conocimiento, creencia y concepción, es más potente considerar definiciones que,

[21] Aunque puedan ser resistentes al mismo.

aunque teóricamente estén sujetas a una crítica inmediata, en un ámbito práctico resulten útiles.

Haciendo ahora la proyección de estos conceptos sobre esta investigación, consideraremos tres categorías en las concepciones que se abordarán, en las que existen resultados aportados por otros investigadores que son compatibles con la definición:

- *Concepciones sobre la matemática*
- *Creencias*[22] *sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática*
- *Concepciones sobre el infinito*

Es necesario explicitar que somos conscientes de que las dos primeras categorías han sido estudiadas conjuntamente en múltiples estudios, algunos desde una perspectiva teórica (Thompson, 1992; Goldin, 2002), con hincapié en el fundamento epistemológico de dichas concepciones y la definición de las mismas (Furinghetti & Pehkonen, 2002) y especialmente, en lo que a la bibliografía consultada se refiere, ligados al conocimiento del profesor (Carrillo 1998; Contreras 1999, Carrillo & Contreras, 1995; Ponte 1994; Llinares & Sánchez 1990; Contreras, Carrillo & Climent, 1999), siendo la resolución de problemas el eje vertebrador de muchos de estos trabajos. Así, se han desarrollado constructos teóricos para articular las distintas tipologías de concepciones ,tanto sobre la matemática como sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma. Sin embargo, las concepciones sobre el infinito difieren, al menos a priori, de las dos categorías anteriores, ya que se refieren a una noción matemática. En esta línea podemos encontrar los trabajos seminales de Fischbein, Tirosh y Hess (1979), así como de Sierpinska (1987) y Belmonte (2009), donde se ahondan en diferentes caracterizaciones de la forma de conocer el infinito. Especialmente en el trabajo de Belmonte y Sierra (2011), se recogen los diferentes modelos intuitivos que se han identificado, desde los trabajos iniciales de Fischbein y colaboradores, hasta los más recientes del propio Belmonte (2009), en relación con los tipos de razonamientos que se hacen sobre el infinito (en los que ahondaremos posteriormente)[23].

---

[22] Que responden también a la noción de concepción propuesta por Thompson (1992), pero usando una terminología diferente, respondiendo a la propuesta reflejada en el trabajo de Carrillo (1998).

[23] Siendo coherentes con la naturaleza de la cognición sobre el infinito, el apartado sobre concepciones del infinito debería seguir a los de concepciones y creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, buscando la comodidad en la lectura y la coherencia teórica en cuanto a la fundamentación del objeto de estudio, se localizará en la sección dedicada a la reflexión teórica sobre el infinito.

### *Las concepciones sobre la Matemática, y su enseñanza y aprendizaje*

Para este contenido, usaremos en todo momento las propuestas de Carrillo (1998) y Contreras (1999) sobre las tendencias didácticas y las concepciones sobre la Matemática, estando la de Contreras enfocada a la resolución de problemas. Por tanto, consideraremos las tres formas de concebir la matemática que ellos proponen, basadas en los trabajos de Ernest (1989, 1991), aunque desarrolladas en mayor profundidad, y dotadas de un modelo de categorías y descriptores (Carrillo & Contreras, 1994, 1995):

*Platónica:* Se entiende la matemática como un cuerpo de conocimiento preexistente dotado de una estructura lógica, lo que le otorga un carácter objetivo, absoluto, universal, libre de valores y abstracto. El propósito de la creación de conocimiento matemático es el acceso a los aspectos desconocidos de la misma, independientemente de sus posteriores aplicaciones (Carrillo 1998, p.72).

*Instrumentalista:* Se entiende la matemática como un conjunto de resultados, de marcado carácter utilitario, cuya veracidad y existencia no están sujetas a discusión. El propósito de la creación de conocimiento matemático es su uso en otras disciplinas, especialmente a través de la creación de algoritmos que permitan el avance de las diferentes disciplinas (Carrillo 1998, p.72).

*Resolución de Problemas:* Esta concepción se basa en la idea de que el fin de la matemática es comprender el proceso de construcción de la misma, desarrollando las capacidades mentales del resolutor. Como entidad, se concibe la matemática como conocimiento sometido a revisión constante dependiente del contexto. Se entiende que la matemática se construye por interacción social, para dar respuesta a problemas sociales, culturales, económicos (Carrillo 1998, p.73).

De igual forma, de cara a considerar las tendencias didácticas del profesor, consideraremos las cuatro tendencias que ambos autores reflejan en sus trabajos doctorales: *Tradicional*, *Tecnológica*, *Espontaneísta*, e *Investigativa.*

Entendemos que las concepciones sobre la matemática, y las creencias sobre su enseñanza y aprendizaje, son en este trabajo un elemento contextualizador del conocimiento. Al indagar en el conocimiento del profesor, el hecho de haber reflexionado sobre sus creencias y concepciones anteriormente nos permitirá que la comprensión a la que lleguemos del conocimiento del profesor sea mucho más amplia, ya que, como podrá verse en la sección dedicada al análisis, estas concepciones dotarán de coherencia a la imagen del profesor objeto del estudio de caso.

# MTSK: Un traje hecho a medida

En el seno del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM), constituido en la Universidad de Huelva, tras una trayectoria de trabajo sobre concepciones[24], posteriormente desarrollo[25], y finalmente conocimiento profesional[26], y con vistas a sentirnos más identificados con el modelo de conocimiento profesional usado en el desarrollo de nuestras investigaciones, decidimos hacer una revisión profunda de los distintos modelos de conocimiento profesional que nos permitiera redefinir las categorías en términos de conocimiento de matemáticas, de forma coherente y consistente. Para ello intentamos desarrollar definiciones de cada subdominio que pudieran incluir distintos ejemplos de dudosa clasificación en el modelo original de Ball et al. (2008). Sin embargo, llegó un momento en el que las categorías definidas para el MKT no resultaban satisfactorias, ya que existían ejemplos inclasificables, o ejemplos cuya clasificación en un subdominio u otro dependían en gran medida de la subjetividad del investigador. A estos efectos, y teniendo en mente las macro-componentes de Shulman[27], se redefinieron los subdominios relativos al Conocimiento Didáctico del Contenido (KCS en KMLF y KCC en KMLS[28]), incluyendo aspectos no considerados desde nuestro punto de vista en los trabajos relativos al MKT, así como eliminando otros alejados del interés de la especificidad del profesor de matemáticas, y se reestructuró lo relativo al Conocimiento de la Materia, haciéndolo más acorde al hecho de que el objeto de investigación sea el profesor de matemáticas. Por tanto, se consideraron  las diferentes formas que tiene un profesor de conocer la matemática *per se*, incluyendo en esta matemática la científica, la escolar y la didáctica (Tossavainen & Pehkonen, 2013). El nombre que se dio al modelo fue “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK según sus siglas anglófonas).

La idea fundamental que subyace a los cambios, reestructuraciones, y redefiniciones realizadas es la de que un profesor de matemáticas, para llevar a cabo una buena

[24] E.g. Carrillo, 1998, Contreras 1999.
[25] E.g. Climent 2005, Muñoz-Catalán 2007.
[26] E.g. Sosa 2010, Ribeiro 2011.
[27] Con las que nos sentimos cuasi-plenamente identificados por ahora.
[28] Ver páginas siguientes para el desarrollo del contenido de los subdominios.

práctica, necesita conocer las matemáticas de diferentes formas, así como las diferentes interacciones que puedan tener tanto los alumnos como él mismo con la propia matemática durante el desarrollo de una clase. Como propósito inicial se hicieron varios planteamientos que dirigieron todo el desarrollo del modelo:

1º El conocimiento especializado del profesor de matemáticas es aquel que el profesor necesita y usa para explicar matemáticas por la naturaleza de la propia enseñanza de las matemáticas (excluyendo por tanto consideraciones pedagógicas generales no vinculadas a la materia). La especialización radica en su uso profesional. Así, un físico especialista en campos electromagnéticos necesitará la integración como parte de su conocimiento profesional especializado, pero no por ello el conocimiento de la integración en matemáticas deja de ser conocimiento especializado en el profesor de matemáticas.

2º El modelo a desarrollar es un modelo de conocimiento y, por tanto, no se considerarán acciones en los subdominios, sino el conocimiento que sustentan dichas acciones. De igual manera, en el desarrollo de cierta acción de enseñanza, puede existir conocimiento de diferentes subdominios, por ser distintos los tipos de reflexiones establecidos o los objetos sobre los que se establece la reflexión.

3º La observación no es suficiente para acceder al conocimiento del profesor. Coincidiendo con el argumento de Baxter y Lederman (2001) respecto al PCK, creemos que el conocimiento que el profesor pone en juego en una clase no tiene por qué ser todo el conocimiento del que dispone[29]; por ejemplo al ejemplificar, los ejemplos que use no nos muestran todo su banco personal de ejemplos, sino que puede también elegir conscientemente no usar algunos de los ejemplos en su práctica docente. Según su tesis, el PCK es parcialmente interno (coincidiendo con Schön, 1983), con lo que para acceder a dicho conocimiento, el esfuerzo habrá de desarrollarse en diferentes aproximaciones metodológicas, como entrevistas, cuestionarios, simulaciones de episodios de aula, foros de discusión, etc.

4º Las creencias de los investigadores sobre la matemática, la enseñanza y la investigación en educación matemática influyen en el constructo teórico desarrollado (Schoenfeld, 1992).

[29] Respondiendo a la noción de Schön compartida por Climent de que el conocimiento profesional es parcialmente tácito.

5º Las creencias y concepciones del profesor sobre la enseñanza, aprendizaje, la matemática, o sobre los conceptos e ideas matemáticas, no forman parte de su conocimiento, pero sí son una parte del profesor que puede afectar tanto a su práctica como al tipo de reflexiones que haga sobre la matemática, su enseñanza, su aprendizaje, o sobre el propio proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello, las consideramos dentro del MTSK.

El hecho de ser un modelo creado siguiendo los principios que como grupo compartimos, y que este investigador secunda, son el motivo del aparentemente informal título de este apartado del marco teórico. MTSK está diseñado por un grupo que entiende el conocimiento del profesor de matemáticas desde una perspectiva que ha plasmado en la conceptualización del modelo. Así, MTSK no puede ser sino 'un traje hecho a medida' para los integrantes del SIDM.

La estructura de este apartado y, más aún, de la explicación de la conceptualización del contenido de los subdominios del modelo presentado a continuación comenzará por una parte teórica, a la que seguirá un breve apartado en el que se justificará el uso que un profesor puede hacer del conocimiento contemplado en estos subdominios. Mostraremos en la descripción de los subdominios no solo las definiciones teóricas de los mismos, sino también ejemplos de su contenido, basados en el trabajo desarrollado en el SIDM orientado al desarrollo de categorías, tanto por su utilidad en este trabajo, cuyo papel es alimentar la *sensibilidad teórica* (Glasser & Strauss, 1967) del investigador, como para que el lector sea consciente del contenido de los propios subdominios y comprenda la posterior discusión de resultados.

## Conocimiento matemático (MK)

Pasamos por tanto a describir las distintas componentes en las que entendemos y percibimos que se divide el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Empezando por las componentes relativas al conocimiento del contenido, creemos en primer lugar necesario explicitar y justificar un cambio, a primera vista terminológico, pero que refleja en gran parte lo expuesto en el primer planteamiento expuesto anteriormente. Lo que Shulman llamaba conocimiento del contenido, *"Subject Matter Knowledge"*, pasaremos a llamarlo Conocimiento Matemático (MK, de su acrónimo inglés), ya que entendemos que el enunciado de Shulman respondía al conocimiento para la enseñanza de una materia genérica cualquiera, y en nuestro caso identificaremos conocimiento relativo a categorías que, en algunos casos, posiblemente solo tengan sentido en el caso del conocimiento de las matemáticas.

### *Conocimiento de los Tópicos (KoT)*

El primer subdominio que consideraremos es el "Conocimiento de los Temas". Entendemos que un profesor necesita conocer aquello que explica, de forma que es inevitable incluir el conocimiento de las matemáticas formales en este subdominio. Estas matemáticas son aquellas que transmite a sus alumnos, en forma de procedimientos o fundamentos teóricos, o aquellas que explora en pos de adquirir un conocimiento de mayor profundidad que le sea útil en su docencia. Sin embargo, conocer matemáticas como profesional de la enseñanza, desde nuestra perspectiva, requiere una imagen mucho más amplia de esta disciplina. No solo es necesario conocer el cuerpo matemático aséptico y normalmente descontextualizado que encontramos en los libros que los matemáticos escriben para matemáticos, sino también la fenomenología (Freudenthal, 1983; Rico, 1996) y los significados de los conceptos abordados. Por ejemplo, una idea como la de variable, relacionada con el infinito, alejado en principio de los contextos habituales de los alumnos, puede encontrarse reflejado fenomenológicamente en el tiempo, el calendario o las propias estaciones (Gardiner, 1985, 2002), ya que en el momento en el que el alumno adquiere una conciencia de la linealidad del tiempo, puede plantearse la pregunta de ¿Cuándo acaba?, dotando de un sentido real a una idea de infinito que subyace al proceso de generación infinita de números que se aborda desde los primeros años en la escuela, analogía a la que el profesor podría recurrir a modo de explicación en contexto realista. Respecto a los significados, la idea de límite de sucesiones tiene innegablemente asociado el infinito, relativo a la idea de iteración. Sin embargo, esa iteración infinita puede tener como límite un punto, con lo que el proceso considerado sería de aproximación, frente a una tendencia a "infinito", cuyo significado tiende a asociarse con el alejamiento. Explorando cómo un profesor puede conocer las matemáticas, y uniendo el conocimiento de la fenomenología y de los fundamentos, consideramos una nueva categoría de contenido, como es la de los ejemplos. El ejemplo es una de las herramientas que posee el profesor para explicar, recurriendo a su conocimiento de los fundamentos teóricos, de los procedimientos, y teniendo en cuenta fenomenologías cercanas a los alumnos, y significados comprensibles por los mismos, no es extraño ver que un profesor, para explicar un concepto concreto, haga uso de un ejemplo que le parezca que muestra, de forma especialmente clara, el aspecto que desea comunicar.

¿Qué permite este conocimiento?

Pasando ahora al terreno de las acciones, este conocimiento permite al profesor desenvolverse con el contenido que aborda en su práctica de una forma desahogada, siendo consciente de los aspectos matemáticos que surgen y pueden surgir durante la explicación de una sesión, pero también teniéndolos en cuenta en la fase de preparación de la clase, a la hora de seleccionar actividades, o en el momento en el que, después de la clase, decida evaluar el desarrollo de la misma, así como su propia práctica. De igual manera, por ejemplo permite responder a las demandas de conocimiento de sus alumnos cuando estos resuelven un problema por un algoritmo distinto del explicado en clase, o por alguna concatenación de razonamientos no "estándar", ya que el conocimiento profundo de la materia le permitirá hallar los razonamientos matemáticos que subyacen a dicho algoritmo, o reconocer la coherencia de los argumentos dados por los alumnos.

### *Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas (KSM)*

De igual manera que en matemáticas existen propiedades locales, válidas en entornos de puntos, y propiedades globales, para las que se necesita tener en cuenta el comportamiento del objeto considerado desde una perspectiva más general, el conocimiento de matemáticas de un profesor puede ser el relativo a las distintas dimensiones 'locales' que entendemos que se puede conocer de un tópico matemático, o puede tener una visión superior, de conjunto, de cómo están distribuidas las matemáticas. Esta categoría está relacionada, desde luego, con el HCK considerado por Ball y Bass (2009), pero excluye el elemento curricular estructurador, para considerar la estructura de las matemáticas que el profesor posee a nivel interno y personal, estando condicionado por su formación, su proceso de aprendizaje, las conexiones que ha establecido entre conceptos, incluso posiblemente, a lo largo de los años, por sus experiencias matemáticas como docente. En resumen, el KSM es el constructo personal que el profesor desarrolla sobre la forma en que están secuenciados y conectados los tópicos matemáticos en las matemáticas, tanto científicas como escolares. En esta línea, la idea de Felix Klein de matemáticas avanzadas desde un punto de vista elemental y matemática elemental desde un punto de vista avanzado, expuesta por Jeremy Kilpatrick en una conferencia en Huelva (2012), constituye uno de los ejemplos más potentes que podemos encontrar, basándose en poseer una perspectiva a una altura diferente respecto al elemento considerado, y pudiendo tener una visión de global de la organización del mismo.

De igual forma, los procesos de complejización y simplificación del contenido matemático que pueda hacer un profesor, esto es, explicar un contenido siendo consciente, e incluso explicitando su proyección futura en el curso, o en otros cursos, así como explicitar la conexión del tópico abordado en el momento con elementos anteriores del mismo curso o cursos anteriores que conozcan los alumnos, mostrarían este tipo de conocimiento de una forma directa. Igualmente, esta conexión puede no estar relacionada con el posible contenido de otros cursos, sino con la potencialidad de explotación de la noción matemática que el profesor pensara que tiene dicha noción. Por ejemplo, cuando se aborda a finales de secundaria la estructura de los números, sin necesariamente tocar los conceptos de cuerpo o anillo, el profesor puede estar considerando que sería posible usarlos, con lo que dicha conexión respondería a la esencia de lo contenido en este subdominio.

En una comunicación en el CERME 7, Kuntze, Lerman, Murphy, Kurz-Milcke, Siller, y Windbourne (2011) introdujeron la noción de *"Grandes Ideas en matemáticas y en la instrucción matemáticas"*, caracterizadas como:

- *Ideas que pudieran tener un gran potencial matemático a la hora de alentar un aprendizaje que permitiera una comprensión conceptual.*
- *Ideas que tuvieran una gran relevancia a la hora de construir metaconocimiento sobre matemáticas como ciencia.*
- *Ideas que apoyen las habilidades de comunicar con sentido las matemáticas y proveer argumentos matemáticos*
- *Ideas que deberían fomentar los procesos de reflexión de los profesores, conectadas con diseños instruccionales ricos y oportunidades de aprendizaje que activen la cognición de los alumnos, así como las ideas relacionadas con el acompañamiento y el sustento de los procesos de aprendizaje.*

(p. 2718)

De estas ideas, muy generales, nos interesan aquellas que responden a los tres primeros puntos, relacionados con aspectos del MK, y no tanto del PCK, al menos de forma directa. Estas grandes ideas que existen en matemáticas y que dan sustento a la propia matemática para permitir que se pueda articular y construir constituyen la esencia estructurante de la misma[30]. Así, ideas como la de "estructura algebraica", cuya definición no va más allá de ser un conjunto con una serie de operaciones, son el sustento de multitud de tópicos matemáticos como grupo, anillo, ideal, dominio de integridad, etc. Por tanto, se puede considerar la noción de estructura algebraica como un elemento estructurador de la propia matemática. De igual forma, Kuntze et al., (2011) citan como gran idea el *"lidiar con el infinito"*[31], relacionada con la importancia de la exploración de fenómenos ligados al infinito, estrategias para mantener la generalidad, o patrones o estructuras que abarcan la infinitud, habitualmente en si mismos. Estas grandes ideas en matemáticas, aunque en muchos casos no tienen la entidad de "concepto", si que se les puede tratar en ciertos aspectos como si lo fueran, por lo que las categorías que usamos para el KoT, tienen cierto uso en el caso de las grandes ideas. Así, el conocimiento de la fenomenología de una de estas *Grandes Ideas*, tiene cabida en el modelo, aunque no solo en la dirección concepto→fenomenología del concepto, sino también al revés, dado un concepto cuyo soporte fenomenológico, es decir, su *noúmenos* (Freudenthal, 1983; Puig, 1996), está en una gran idea, el profesor puede encontrar dicho soporte, como pudiera suceder con un profesor que al considerar el límite, la derivada, las sucesiones, o la continuidad, pudiera argumentar cómo el infinito subyace a todos ellos. De esta forma, las categorías relativas a fundamentos del concepto, o sus posibles significado tienen sentido para dotar a las *Grandes Ideas* de cierta solidez matemática y epistemológica.

¿Para qué sirve este conocimiento?

Una vez más en el terreno de las acciones, e incluso en el de las intenciones, un profesor puede hacer uso de sus conocimientos estructurales para ser consciente él mismo de en qué punto está del desarrollo de la construcción matemática, para poder, por ejemplo, definir una serie de etapas, o puntos conceptuales, por los que quiera pasar para que sus alumnos construyan el concepto que se plantee como objetivo. De igual forma, puede explicitar esa idea estructurada por etapas para transmitir a sus estudiantes la proyección que tienen sus explicaciones para su propia construcción de los contenidos del curso. Asimismo, creemos que este conocimiento le permite afrontar con mayor solvencia

[30] Al menos, desde la forma de entender la matemática del autor.
[31] Traducción libre del inglés "*Dealing with infinity*".

situaciones de contingencia (Rowland et al., 2009), al poder reconocer posibles conexiones establecidas por un alumno, o usar sus propias conexiones para responder a situaciones matemáticas inesperadas.

### *Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM)*

Saber matemáticas para enseñar no implica solamente saber matemáticas en el sentido de saber reproducir las matemáticas que se conocen, sino que, desde nuestra perspectiva, hay que saber hacer matemáticas. Es la diferencia entre construir el cuerpo de conocimiento por reproducción de razonamientos conocidos que ir un paso más allá, y saber cómo y por qué esos razonamientos son válidos, y usarlos en los contextos que se usan es adecuado. Esta idea, que nace de la consideración del HCK ligado a la práctica (Ball & Bass, 2009) y de los trabajos de Ball y McDiarmird (1990), Schwab (1978) o Rowland y Turner (2009), acerca del conocimiento sintáctico, supone considerar que un profesor ha de saber razonar y, más aún, conocer distintos tipos de razonamientos y saber en qué contextos unos son más adecuados que otros. Este conocimiento sintáctico de las matemáticas puede observarse cuando un profesor, al trabajar con conjuntos numerables infinitos, recurre a la inducción para probar cierta propiedad. Es posible que las use porque sepa que esa propiedad en concreto requiere una demostración que ha memorizado, caso en el que no podríamos hablar de este tipo de conocimiento[32], pero también es posible que ese profesor use la inducción en dicha propiedad, sepa que, como el conjunto es infinito y numerable, una aproximación al razonamiento sobre dichos conjuntos que suele dar resultados bastante buenos es la inducción. De igual manera, el conocimiento de un profesor de distintos heurísticos usados en resolución de problemas, que pueden haber formado parte de su instrucción (Billstein, Libeskind & Lott, 2009), será un conocimiento que también encontremos dentro de esta componente.

Además, se consideran dos grandes tipologías en el Conocimiento de la Práctica Matemática, el conocimiento general, y el ligado al tópico. Un ejemplo de conocimiento ligado al tópico es el anteriormente comentado sobre la inducción y los conjuntos infinitos numerables, donde tiene sentido considerar un tipo de razonamiento asociado específicamente a un tópico concreto. De igual manera, existe un tipo de conocimiento sobre matemáticas usado independientemente del concepto abordado, como pudiera ser,

[32] Al menos, no con la profundidad que nos gustaría.

por ejemplo, saber el significado de una condición necesaria y una condición suficiente. Este conocimiento, usado para trabajar genéricamente en matemáticas, es necesario en el profesor, e incluso nos atreveríamos a decir que sería adecuado comunicárselo a los estudiantes, ya que provee de estructuras lógicas de pensamiento que pueden mejorar su entendimiento de fenómenos cotidianos. En esta última línea, Brodie (2010) argumenta que el razonamiento matemático responde a tres cuestiones centrales a la actividad matemática:

*¿Qué es lo que es verdad?* (Brodie 2010, p. 58) Antes de demostrar la veracidad de una afirmación, es posible conjeturar dicha veracidad, de ahí el razonamiento habitual en los estudiantes *"un ejemplo demuestra"* (Chazan, 1993), por lo que el profesor deberá no sólo conocer los razonamientos, sino tener cierta sensibilidad a la hora de intuir a priori la veracidad o no de un razonamiento dado por un estudiante, o de un razonamiento que surja en el discurrir de la actividad docente.

*¿Cómo puedo estar seguro* [de la veracidad]*?* (Brodie 2010, p.59) Aquí entran en juego los tipos de demostración y estrategias de abordaje de demostraciones que un profesor pudiera conocer para asegurar la veracidad de una afirmación. Así, la demostración va más allá de la ejemplificación en un caso concreto, y abarca todos los casos posibles que un enunciado pueda contener. La propia autora indica un ejemplo en el que sus alumnos entienden la demostración como una forma de aproximarse a la resolución de un conjunto de problemas, y no cómo la confirmación de la veracidad del enunciado.

*¿Por qué es verdad?* (Brodie 2010, p. 59) No solo es necesario saber que existe un tipo de demostración que ratifica la veracidad de un enunciado, sino también cómo funciona ese tipo de demostración. Así, el hecho de entender el sustento lógico de cada uno de los tipos de demostración se encontraría englobado en lo relativo a esta pregunta.

Finalmente, entendemos que la idea de *práctica* va más allá del conocimiento meramente sintáctico o relacionado con este, ya que también existen también prácticas propias de la matemática escolar, como la resolución de problemas (entendida como forma de construir problemas), o la modelización (Blum & Leiss, 2007). Sin embargo, no se han desarrollado investigaciones que ahonden en la naturaleza de estas *prácticas* en relación al MTSK, con lo que no abundaremos en ellas.

¿Para qué sirve este conocimiento?

Basándonos en algunos de los ejemplos de Ball et al. (2008) de conocimiento especializado, observamos que este conocimiento aparecía en aquellos casos en los que el profesor necesitaba detectar el tipo de razonamiento que los estudiantes usaban para resolver algún problema. De esta forma, el conocimiento sobre matemáticas puede permitir abordar muchos de los problemas de comprensión de los estudiantes, por ejemplo no saber detectar el sentido de una implicación, y considerar que en general siempre se da la doble implicación, y si un profesor es capaz de comprender, a nivel matemático, la lógica que subyace a una declaración de un estudiante donde aparezca este tipo de afirmación, será capaz de tomar medidas para conseguir que dicho estudiante comprenda de forma completa la idea de que una condición necesaria no implica que también sea suficiente.

Igualmente, aunque menos habitual, el profesor puede decidir enseñar razonamiento matemático, para, por ejemplo, *"dar sentido a y en la actividad matemática"* (Brodie, 2010, p. 59), no sólo para proveer a los estudiantes de esa conciencia y sensibilidad sobre cómo establecer la verdad en matemáticas, sino para que le encuentren sentido a la necesidad de hacerlo.

## Conocimiento didáctico del Contenido (PCK)

Una vez consideradas las distintas componentes relativas al Conocimiento del Contenido, pasaremos a desarrollar las componentes que son necesarias considerar si pensamos en que el profesor es un transmisor de las matemáticas, entendido este proceso de transmisión desde la propia tendencia didáctica de cada profesor (Carrillo, 1998). La teoría clásica sobre la comunicación entiende que existen varios elementos en todo proceso comunicativo: El mensaje, las matemáticas en este caso, cuyo conocimiento ya abordamos en lo relativo al MK; el receptor, el alumno en este caso, cuyas posibles interacciones con el contenido matemático entendemos que forman parte del conocimiento que ha de tener un profesor, el emisor, para impartir clase, que conforman el primer subdominio que abordaremos en esta macro-componente; y el canal, la forma de transmisión de los conocimientos matemáticos[33], la forma de inducir a los alumnos a desarrollar ellos mismos el conocimiento matemático guiados por el

[33] No afirmamos con esto que el proceso de enseñanza deba estar basado en una pura transmisión de conocimiento, ligado a la tendencia tradicional, sino que desde la perspectiva del conocimiento del profesor, existe un proceso comunicativo en el que el fin es la adquisición o desarrollo del alumno de una serie de conocimientos poseídos por el profesor.

profesor, si nos situamos en una tendencia más investigativa, así como los posibles materiales y recursos que permiten que dicha comunicación sea más efectiva, que estarán incluidos en el segundo subdominio que desarrollaremos. Asimismo, podemos considerar el código como aquellos aspectos ligados a la verbalización que usa el profesor, consideraciones cuya relevancia veremos en el análisis de los datos. De igual forma, existe un campo de necesaria consideración como son las influencias externas[34] que recibe el profesor para guiar, mejorar o condicionar su práctica docente, contemplados en un tercer subdominio referido a dichas guías o "estándares" considerados por el profesor.

### *Conocimiento de las Características del Aprendizaje en Matemáticas (KFLM)*

Un profesor, como parte de un proceso comunicativo, debe tener en cuenta a sus alumnos, ya que son los necesarios interlocutores que tendrá en su aula. Por tanto, es necesario que comprenda las múltiples dimensiones de compresión y relación con el concepto que sus alumnos pudieran establecer, así como sus capacidades y falta de las mismas respecto al uso y comprensión del concepto. Así, saber cómo aprende matemáticas un estudiante, cómo se desarrolla su cognición del concepto abordado, es una de las dimensiones que más directamente podemos argüir que se incluyen en este subdominio, ya que entendemos que un profesor debe prever cómo adquirirán sus alumnos aquellos conocimientos que les enseñe, si quiere organizar las sesiones en que desarrollará dichos conocimientos de forma que el aprendizaje de sus estudiantes sea óptimo. De igual manera, conocer las dificultades que ese estudiante pudiera experimentar, así como los obstáculos que pudiera encontrarse, y los errores que pudiera cometer, son algunas de las formas más directas de conocer cómo el estudiante interactúa con las matemáticas. Sin embargo, el profesor también puede tener conocimiento de qué ideas previas tienen los estudiantes acerca de las ideas matemáticas que se van a desarrollar en clase, y aunque no es un conocimiento sobre la interacción del alumno con el concepto en el momento de su adquisición en el aula, si que puede influir en esta adquisición. Pensando de nuevo en cómo los estudiantes puedan interactuar con conceptos concretos o con las matemáticas en general, la consideración de la dimensión afectiva de esta interacción es, aunque un campo poco estudiado, una categoría que tiene sentido estudiar en este subdominio. Finalmente, el

[34] Siguiendo la analogía anterior sobre la comunicación, esto forma parte del contexto, aunque no lo abarca completamente.

profesor debe entender a sus alumnos, para poder actuar en consecuencia a lo que observe y obtenga de ellos durante el proceso comunicativo, para lo que necesitará entender el lenguaje y el vocabulario usado por sus estudiantes, que en algunos casos, posiblemente refleje parte de su proceso de adquisición del conocimiento.

Este subdominio podrá ser detectado habitualmente de forma simultánea con los relativos al MK, ya que para detectar, por ejemplo, qué errores comete un alumno durante la realización de un problema, previamente el profesor habrá solucionado el problema, o simplemente analizado paso a paso la resolución del estudiante, para lo que necesitará el conocimiento matemático que le permita hacer esta resolución. En otro caso, también frecuente en el proceso de docencia, la elección de ejemplos, entendemos que aparte de saber qué matemáticas están involucradas en aquello que se quiere ejemplificar, implica detectar qué se necesita comunicar, usualmente para remarcar un aspecto del contenido matemático, para que el interlocutor, el alumno, adquiera una mayor destreza o comprensión de aquello que el profesor pretende que aprenda.

¿Para qué sirve este conocimiento?

Este conocimiento, además de lo anteriormente descrito, en relación con la mejora de la comunicación en el aula, entendemos que permite al profesor adquirir una mayor consciencia del contexto en el que se desarrolla su docencia, y por tanto, pueda abordar la temática de una forma más personalizada, y por tanto, ajustada a las necesidades de su interlocutor, en función del contexto en que sus alumnos se sitúen como aprendices de los elementos matemáticos seleccionados. Es decir, un profesor que conozca o prevea cómo sus alumnos van a desarrollar su actividad en relación al concepto abordado (en todas las dimensiones anteriormente descritas), podrá preparar las clases consciente de esto, intentando adaptar aquello que quiera transmitir a la manera más adecuada para conseguir una buena transmisión. Asimismo, conocer las características del pensamiento de sus estudiantes dará al profesor una familiaridad con los procesos de aprendizaje que le permitirán comprender situaciones contingentes con mayor soltura.

### *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT)*

Este subdominio parece solaparse, en un principio, con el modelo general, ya que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas radica en que su labor es enseñar matemáticas, y por tanto, este subdominio parece que podría englobar todo el modelo. Sin embargo, si pensamos desde el punto de vista de la comunicación, la idea que fundamenta este subdominio es remarcar las habilidades que posee el profesor para la selección y el uso de distintos canales comunicativos, así como la conciencia de cómo y cuándo usarlos. Dichos canales pueden variar su naturaleza enormemente, pudiendo ser, por ejemplo, las distintas estrategias, a nivel conceptual o metodológico, que un profesor conozca o tenga a su disposición para el abordaje de cada concepto. El motivo de la elección de una estrategia u otra puede subyacer en otros subdominios, por ejemplo en el KFLM, si elige en función de su adecuación para el grupo de estudiantes al que imparte clase, o en el KSM, si cree que dicha estrategia induce una estructuración de las matemáticas que cree la más adecuada (Por ejemplo, explicar antes derivada que integral o viceversa). Así, aparte de las estrategias que pudiera conocer el profesor, también existen elementos externos a la propia acción del profesor per se, como son los distintos recursos y materiales que se pueden usar para fomentar la construcción o facilitar la comprensión de algún concepto. En este campo, la geometría posee muchos recursos distintos, con potencialidades distintas según el concepto que se desee tratar. Así, no solo se trata de conocer el recurso y saber que se relaciona con algún contenido concreto, sino también cómo usarlo, en qué tópicos funciona mejor y por qué, cómo pueden los estudiantes usarlo o conocer las limitaciones del recurso, son algunas de las posibles dimensiones que un profesor podría y debería conocer para poder afirmar que posee un buen conocimiento del recurso. Asimismo, el elenco de diferentes tipos de verbalización de posible elección en su docencia también forma parte de este subdominio. Finalmente, el conocimiento de las ayudas en la enseñanza es un tema de reciente abordaje (Sosa, 2010), pero creemos que la planificación del profesor de cómo interactuar con sus alumnos, así como saber cómo ayudar a sus estudiantes en su trabajo con un contenido concreto o saber cuándo hacerlo y cuando no, responde a un tipo de conocimiento íntimamente ligado con la labor del docente de matemáticas que debe ser considerado en este subdominio.

¿Para qué sirve este conocimiento?

En la línea de lo anteriormente descrito, entendemos que poseer más variedad de recursos, estrategias, o tipos de ayudas disponibles permitirá al profesor responder de una forma adecuada y óptima en función de los requerimientos de la situación. De esta manera, un profesor novel, por ejemplo, dispondrá de unas estrategias basadas probablemente en su formación académica, mientras que un profesor con una dilatada experiencia habrá desarrollado estrategias más acordes a su tendencia didáctica, así como según su forma de entender cómo se fomenta de una forma más adecuada el aprendizaje de las matemáticas.

### *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje Matemáticos (KMLS)*

Este subdominio contempla aquellos conocimientos que posee el profesor sobre los condicionantes que influyen en su enseñanza de las matemáticas cuya fuente no es su propia construcción de conocimiento. Entendemos como estándar de aprendizaje un indicador, externo al profesor, que indica el nivel de conocimiento matemático (en cantidad y profundidad), que debe poseer un alumno en un determinado momento de su escolarización. Entendemos tres grandes categorías en este subdominio: el conocimiento de los contenidos enseñables en un curso determinado, el conocimiento del grado de desarrollo conceptual esperable en un alumno en un curso determinado, y el conocimiento de la organización y secuenciación de los contenidos de un curso. Hacemos referencia en todo momento al curso, aunque bien podría tenerse una visión más amplia y hablar de etapa educativa, ciclo educativo, o incluso a lo largo de toda la escolarización obligatoria. Así, el más claro ejemplo de estos condicionantes es el propio currículo nacional del país, que el profesor conoce[35]. Este subdominio supone una extensión en contenido del conocimiento curricular de Shulman (1986), y de Ball, et al. (2008), ya que el foco de estos[36] es exclusivamente el currículo afirmando que dicho conocimiento curricular está:

> "*representado por la totalidad de programas diseñados para la enseñanza de asignaturas y tópicos concretos en un nivel determinado, la variedad de materiales instruccionales disponibles en relación a dichas asignaturas y tópicos, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de un currículum especial o un material determinado en unas circunstancias concretas*" (Shulman 1987, p. 10).

Así, este subdominio aporta la ampliación del foco del propio subdominio, ampliando las consideraciones que permite, de tipo exclusivamente curricular, a consideraciones sobre lo esperable en el conocimiento de un alumno en un cierto momento.

---

[35] O al menos debe conocer.

[36] Se hace referencia exclusivamente a Shulman, ya que el modelo MKT no añade contenido a este subdominio más allá de incluirlo en el PCK.

¿Qué permite este conocimiento?

Este es el conocimiento usado para decidir la adecuación, por ejemplo, de un recurso o grado de complejidad de un concepto, a un determinado curso escolar, en función del grado de desarrollo esperable en los conocimientos y habilidades esperados en los alumnos, de lo que los documentos curriculares contemplan, o de la conveniencia o no de su abordaje en la secuencia organizativa de un curso.

## Las concepciones

En el modelo propuesto se abordan las concepciones y las creencias del profesor como constructos cognitivos del profesor que tienen cierto impacto en su actividad docente, en cuanto a que permean el conocimiento. Así, podemos hablar tanto de concepciones sobre la matemática (Carrillo, 1997; Contreras 1998), creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma (Carrillo, 1997; Contreras 1998), o incluso de concepciones sobre los propios conceptos matemáticos, como ocurre en el trabajo de Sierpinska (1987) sobre las cómo diferentes concepciones acerca del infinito influyen en las concepciones acerca del límite. Así, usaremos el modelo de categorías propuesto en Carrillo y Contreras (1995) para dar una descripción superficial de las concepciones y creencias del profesor objeto del estudio de caso a modo de contextualización del mismo como docente, y reflexiones emergentes del trabajo de Sierpinska para las concepciones sobre el infinito. En este trabajo, las concepciones sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje serán un elemento que nos permita obtener una imagen más completa del profesor, en términos de aumentar la sensibilidad del investigador sobre el investigado. No es, por tanto, parte de este estudio, profundizar en las concepciones como parte del MTSK. Aunque consideramos dicha línea de investigación sumamente interesante y un campo fértil, no haremos una profundización en esta componente del MTSK.

# El infinito, revisión teórica

Esta sección del marco teórico estará dedicada a mostrar algunos de los elementos que consideramos más relevantes de cara a la comprensión del infinito como concepto, que nos han permitido desarrollar la sensibilidad teórica usada en el análisis y discusión de los resultados. Comenzaremos por profundizar en la distinción clásica entre los dos tipos fundamentales de comprensión del infinito, la comprensión de tipo potencial, ligada al proceso infinito, y la comprensión de tipo actual, ligada a la consideración del infinito como propiedad. Esa distinción, y el proceso histórico que ha conducido a la misma se ve reflejada en el siguiente punto que se desarrollará, en el que haremos una aproximación didáctico histórica a las consideraciones establecidas por el hombre acerca del concepto, integrando el desarrollo histórico del concepto con las investigaciones de los últimos cuarenta años centradas en aspectos cognitivos sobre el infinito. A continuación, profundizaremos en los antecedentes en investigación en didáctica acerca del infinito, con un foco profundo en el conocimiento del profesor del infinito, que nos permiten mostrar, en gran medida, lo novedoso de esta investigación. Finalizaremos con un recorrido a lo largo del currículo español, concretado en las etapas de Secundaria y Bachillerato por curso, en pos de identificar aquellos conceptos en los que pueden emerger consideraciones ligadas al infinito.

## Infinito actual y potencial

Antes de hacer la aproximación histórica que creemos necesaria para esta sección, comentaremos las dos formas más extendidas de cognición del infinito que se han detectado y estudiado. El infinito, y especialmente los procesos que desembocan en la consideración de la infinitud de un conjunto, puede observarse desde dos perspectivas:

La perspectiva procesual (infinito potencial): Las primeras aproximaciones al infinito se hacen en la escuela primaria, en la generación de números consecutivos, donde dado cualquier número existe otro mayor. Sin embargo, esta propiedad global no es visualizada directamente, sino que el aprendiz va añadiendo números hasta ser consciente de que dicho proceso no acaba. De igual manera ocurre con las sucesiones en secundaria, que suponen una generalización del caso anterior. Al pensar en una sucesión, el alumno puede considerar que va “añadiendo números”. Esta perspectiva está ligada a una visión del infinito ligada al propio proceso que implica la existencia del infinito. Lakoff y Nuñez (2000) establecen una secuencia de conceptualización de procesos infinitos, denominada Metáfora Básica del Infinito, MBI (Lakoff & Nuñez, 2000, p.158), en la que estudian el desarrollo completo de la cognición sobre el infinito. En el caso procesual, o en su terminología, en el caso de los procesos continuados como procesos iterativos, el alumno no solo no llega a imaginar el proceso como unión de todos sus pasos, sino simplemente cada paso y la forma de generar el siguiente. Así, la concepción resultante del infinito es la que en la literatura de investigación se denomina "potencial", nomenclatura proveniente de los trabajos de Aristóteles en torno a las paradojas de Zenón de Elea. Belmonte (2009) hace un resumen de los principales aspectos que caracterizaron el pensamiento griego, fundamentalmente en base a las reflexiones de Aristóteles y Platón, en términos del aumento mediante suma y la disminución mediante división:

| **Aumento (mediante sumas)** | **Disminución (mediante división)** |
|---|---|
| - Siempre queda algo fuera<br>- No existe el más grande<br>- La línea puede construirse indefinidamente pero no existe la línea infinita<br>- No existe el número más grande | - Siempre queda algo dentro<br>- No existe el más pequeño (para magnitudes).<br>- No existe la parte más pequeña de la línea, puede dividirse indefinidamente. |

Figura 4: Aspectos del pensamiento griego sobre el infinito (Belmonte (2009), p.8)

Esta concepción potencialista del infinito no puede atribuirse exclusivamente a la época griega, sino que estuvo muy vigente hasta los trabajos de Bolzano (1951) sobre las *Paradojas del infinito*. Este tipo de concepciones potencialistas sigue vigente en el pensamiento de múltiples estudiantes y maestros (e.g. Roa-Fuentes 2013, Arnon, Weller & Dubinsky, 2013, Sierpinska 1987). En cuanto a los registros verbales, existen estudios que afirman que el uso de verbos de tipo *imperfectivo*[37] (Belmonte, 2009), o formas en gerundio, muestran una cognición de este tipo, al centrarse dichos verbos en las características procesuales de las acciones.

La perspectiva global o en acto (infinito actual): Una forma más refinada de pensar en el infinito deriva de la consideración del proceso completo sin considerar la iteratividad

[37] Que designan acciones o procesos que no requieren una culminación para que la acción o proceso tenga lugar, siendo estos procesos habitualmente continuos y/o iterativos, e.g. andar, leer, seguir, continuar (Montes, 2011).

del mismo, sino en su totalidad. Desde una perspectiva ligada al ámbito escolar, la MBI de Lakoff y Nuñez determina que dicha conceptualización actual equivale a considerar el "último" elemento de un proceso como parte y producto del mismo. Esta perspectiva requiere pensar en el infinito como una propiedad de un conjunto, requiriendo esta forma de entender el infinito *"abandonar los procesos constructivos de los conjuntos, […] concibiendo los conjuntos como un todo, sin necesidad de pensar en cada elemento por separado"* (Moreno & Waldegg, 1991, p. 214-215), siendo Bolzano el primero en formalizar una propuesta (que la comunidad matemática casi al completo aceptó), en la que la perspectiva actual del infinito fuera el foco. Formalmente, la teoría matemática que sustenta una consideración actual del infinito viene dada por los trabajos de Cantor, en los que estudió el cardinal de los conjuntos, y su comparación, para determinar el "tamaño" de los infinitos, estableciendo la teoría de los números transfinitos (Cantor, 1895, 1915; estudiada desde una perspectiva didáctica en Penalva, 1996). Así, entender el infinito de esta forma actual requiere una visión mucho más global del proceso infinito, entendiendo dicho proceso como una forma de describir todos los elementos de un conjunto, pasando entonces a considerar su cardinalidad y, por ejemplo, en el caso de las sucesiones, en vez de pensar en el límite, pensar en los puntos de acumulación del conjunto, de manera que al considerar la clausura del mismo, incluiríamos el límite en el conjunto, en vez de la postura potencialista de "ir acercándose a". En cuanto a los registros verbales, en este caso es habitual el uso de verbos de tipo *perfectivo*[38] (Lakoff & Nuñez, 2000), que suelen conllevar la finalización del proceso, sea esto posible o no.

## Breve aproximación didáctico-histórica a la reflexión sobre el infinito

El infinito ha sido estudiado y pensado por la humanidad desde la antigua Grecia hasta nuestros días. El apartado anterior muestra una breve explicación de los términos "actual" y "potencial", ampliamente reconocidos por la comunidad didáctica. Sin embargo, para comprender el desafío que ha supuesto para diferentes pensadores el concepto, creemos necesario hacer una breve aproximación histórica a la noción de infinito, ampliando la anteriormente realizada en Montes (2011), ya que entendemos que esta revisión histórica aportará *"el reflejo del pensamiento incipiente de cualquier individuo en más de dos mil años de creación de las ideas actuales sobre este*

[38] Que designan acciones o procesos que requieren alcanzar su culminación para tener sentido como tales, e.g. saltar, disparar, concluir, terminar, llegar, abrir, cerrar (Montes, 2011).

*concepto"* (Belmonte 2009, p.1[39]). Así, en este apartado haremos un recorrido a lo largo de la historia identificando los diferentes puntos clave del desarrollo de la noción de infinito, comparándolas con las investigaciones de índole cognitiva que nos permitan identificar dicha evolución en el pensamiento humano, dotando de ejemplos los diferentes patrones cognitivos.

La evolución de la forma de entender el concepto de infinito ha sido estudiada por diferentes autores, y en particular Moreno y Waldegg (1991) desarrollan un estudio histórico-crítico, asumiendo que esta perspectiva puede aportar elementos a la construcción de conocimiento. Estos autores se centran en los puntos clave de la construcción del significado del constructo matemático "infinito", así como Belmonte (2009), que asume que una perspectiva genética basada en la historia puede darnos información sobre el pensamiento de los estudiantes, siguiendo los principios de Pólya. Los puntos inicial y final que ellos establecen son el pensamiento griego y Cantor. En este apartado abarcaremos de forma resumida esas etapas, recogiendo cómo el pensamiento humano se desarrolló desde la asociación del infinito a lo desconocido hasta una consideración actual, pasando por argumentos potencialistas, y las consideraciones con implicaciones sociales que se hicieron sobre el infinito a lo largo de ciertos periodos históricos.

En la Grecia clásica, desde una perspectiva lingüística, la palabra infinito se definía como *apeiron*. El significado de esta palabra era el contrario a "limitado", contrario hasta el punto de ser un vocablo usado de forma peyorativa, referida a la falta de definición y orden en un ente:

*"Apeiron era una palabra negativa y a menudo peyorativa. El caos original del cual se formó el mundo fue apeiron. Una línea arbitraria torcida era apeiron. Un pañuelo sucio arrugado era apeiron. Así que apeiron no significaba únicamente infinitamente largo, sino también totalmente desordenado, infinitamente complejo, sujeto a ninguna determinación finita.* […] *En palabras de Aristóteles*, […] *siendo infinito una privación, no una perfección".* (Rucker, 1995, citado en Roa-Fuentes, 2013, p.3)

Esta concepción del infinito, ligada a la indefinición del mismo, ha sido estudiada por múltiples investigadores, determinando lo que Belmonte y Sierra (2010) definen como modelo intuitivo indefinido secundario, caracterizado por asociar la naturaleza del

[39] Para un análisis profundo de la evolución histórica del infinito, consultar esta publicación, pp. 1-37.

infinito a la indefinición, habitualmente presente en respuestas de estudiantes del tipo *"los números no acaban, porque son infinitos o porque no sabemos cuántos hay"* (Belmonte & Sierra, 2010). Esto es acorde al análisis que se hace de la interpretación de Anaximandro, que entiende el infinito como incognoscible o insondable.

Más tarde llegó Aristóteles, cuyas reflexiones sobre el infinito dominaron y condicionaron el pensamiento humano sobre el infinito durante siglos. Aristóteles está de acuerdo con la perspectiva anterior, asociando lo ilimitado a lo incognoscible, pero atribuye al infinito la naturaleza *inagotable* de conjuntos de objetos, suponiendo esto una primera aproximación a una definición del concepto de infinito. Aristóteles afirma: *El infinito no es aquello fuera de lo cual no hay nada, sino aquello fuera de lo cual siempre hay algo*. Así, el conjunto de los números naturales es infinito porque no se puede completar la enumeración[40] de sus elementos; se trata de un *infinito potencial*, un infinito en potencia y no en acto, un infinito que no existe en la realidad, pero que podría existir si el tiempo no transcurriera (Belmonte 2009, p.3). Esta mirada al infinito está directamente ligada a la visión potencial del mismo, siendo para este pensador el infinito un proceso sin final o una mirada sobre lo que se va añadiendo al conjunto. Otra implicación de esta forma de pensamiento es el "modelo acotado-finito/no acotado-infinito" (Belmonte & Sierra, 2010), derivado de considerar la infinitud asociada a "no saber cuándo acaba", dotando de consideración finita a intervalos acotados $[0,1)$ e infinita a los no acotados, $[0, \infty)$, siendo imposible establecer su comparación[41].

Aristóteles considera, de igual modo, que el pensamiento humano sobre el infinito se asienta sobre cinco aspectos:

- *En el tiempo, pues es infinito.*
- *En la división de magnitudes, pues los matemáticos también hacen uso del infinito.*
- *Si hay generación y destrucción incesante es sólo porque aquello desde lo cual las cosas llegan a ser es infinito.*

[40] De hecho, se define 'conjunto numerable' como aquel que posee un subconjunto que puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto de los números naturales. De esta definición se deriva el **Teorema de Cantor**: Un conjunto que contiene a un subconjunto numerable (infinito) es necesariamente infinito.
Cabe destacar que Cantor asocia numerable a infinito, así el conjunto $\{1,2\}$, no sería numerable bajo la terminología de Cantor, sino finito. Este teorema, junto a los axiomas de la teoría de conjuntos, llevan a afirmar que el infinito de tipo numerable es el más 'pequeño' de los infinitos posibles, cuyo cardinal se denomina Aleph-0, siendo el primero de los números transfinitos, en los que abundaremos en una nota posterior.

[41] Debido a la diferente naturaleza atribuida a los mismos.

- *Porque lo infinito encuentra siempre su límite en algo, de manera que si una cosa está siempre necesariamente limitada por otra, entonces no podrá haber límites últimos.*
- *Porque al no encontrar nunca término en nuestro pensamiento, se piensa que no sólo el número es infinito, sino que también lo son las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo.*

(Belmonte 2009, p.6)

Así, siendo coherente con los principios Aristotélicos, Euclides formula su quinto postulado en sus *Elementos*, siendo la siguiente una de sus reformulaciones:

*Son rectas paralelas las que, estando en el mismo plano y siendo prolongadas indefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos* (definición 23, libro I).

Euclides evita la palabra “infinito”, conscientemente, parece, para evitar el actualismo que derivaría de usarla. Seguimos en un proceso de negación del infinito actual que duraría hasta el siglo XVIII. En general, en la Grecia clásica, el vocablo infinito tenía, siguiendo a Moreno y Waldegg (1991), tres usos: Como nombre, ligado a aspectos mitológicos, teológicos o metafísicos; como adjetivo, describiendo lo absoluto, el Universo, el Ser, el espacio o el tiempo, habitualmente usado para negar su existencia; y como adverbio, usado para dar sentido a acciones, con énfasis en la acción, el proceso, dando lugar a la concepción potencial del infinito (p.212).

Esta perspectiva aristotélica de la época clásica se corresponde con una forma evolucionada del modelo de indefinición anteriormente citado, en este caso el indefinido primario (Belmonte & Sierra, 2010), en el que la carencia de finitud implica la imposibilidad de realizar cálculos y consideraciones sobre el objeto en cuestión. En general, se niega la posibilidad de hacer consideraciones finitistas sobre objetos infinitos por ser de diferente naturaleza, pero no se hace esfuerzo en plantear consideraciones infinitistas.

Ya en la edad media, con el auge de la religión en los ámbitos cultos, el infinito volvió a asociarse a aspectos negativos, *llegando Boecio a hablar de lo ilimitado como un ente maligno, no sostenido por principio alguno, huidizo siempre a cualquier definición* (Belmonte 2009, p.8), pese a considerarse en aspectos filosófico-religiosos y metafísicos a Dios como el único poseedor de la característica actual del infinito. Sin embargo algunos autores esbozaron argumentos que requerían una comprensión actual, como ibn-Qurra, que afirma que “hay un número infinito”, sin llegar a definir dicho número, pero llegando a establecer la equipotencia entre pares e impares. Dicho trabajo no tuvo un fin fructífero, ya que consideró que había el doble de naturales que de pares, negando la posibilidad de poner en tela de juicio el principio euclidiano base del razonamiento holístico “el todo es mayor que sus partes”.

Posteriormente llegó Galileo, el pensador renacentista, que ya hace consideraciones de índole actual de forma explícita, en contraposición a las ideas euclidianas, al hacer corresponder a un segmento otro de mayor tamaño, y mostrando la correspondencia biunívoca entre ellos. Esta construcción entraba en conflicto con el principio euclidiano anteriormente citado. De igual manera, enuncia la correspondencia entre naturales y sus cuadrados, llegando a la conclusión de que el infinito no es susceptible de comparación, y por tanto no se le puede dotar de una aritmética (en el sentido finitista). La postura contraria a esta era bastante aceptada en aquel tiempo, reflejando un modelo intuitivo denominado infinito-infinito por Fischbein, et al. (1979), o de aplanamiento (Falk, 1994), caracterizado por la equivalencia de todas las cantidades infinitas, pero ya aceptando la infinitud de las mismas. Este modelo se ve reflejado en respuestas del tipo “*son iguales, porque como ambos son infinitos”*, al comparar dos elementos con dicha característica. Posteriormente, Descartes regresa a una perspectiva más clásica, diferenciando entre infinito e indefinido, siendo Dios el único ente infinito (y siéndolo de una forma actual), y correspondiendo la indefinición a las *“cosas a las que carecen por todas partes de fin y de límites”*.

Posteriormente, con la llegada de la matemática moderna, surgen multitud de autores, como Cauchy, Newton y Leibniz, Dedekind, Wallis, Bolzano y Cantor entre otros, que ya abordan el infinito de forma explícita, considerando el infinito per se, convirtiéndolo en un elemento de reflexión, y desposeyéndolo por tanto finalmente del carácter negativo de *apeiron*, siendo algo sobre lo que aún necesitando construir, se podía nombrar y apreciar.

Fueron principalmente Leibniz y Newton los que hicieron una de las mayores aportaciones a la matemática clásica, el cálculo diferencial, cuya esencia radicaba en la no consideración del infinito, que desembocaba en un cálculo práctico, aunque no exento de paradojas, ya que garantizaban la existencia de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño (infinitesimales) en acto, y por tanto convertían a los infinitesimales en elementos no sujetos al así denominado principio de Arquímedes o propiedad arquimediana[42], ya que el producto de un número "finito" por un infinitesimal sigue produciendo un infinitesimal[43]. La no consciencia de que estos infinitésimos no siguen el principio de Arquímedes deriva en una concepción sobre el infinito reflejada en el "modelo de divergencia" (Belmonte y Sierra, 2010), en el que es habitual que los alumnos consideren que la suma de cantidades finitas da un resultado infinito. Sin embargo, obviar la naturaleza del infinito que subyacía a estos principios permitió un considerable avance en el desarrollo de la matemática formal. Como anécdota es interesante considerar la competición promovida por la Academia de Berlín con el fin de aclarar la naturaleza del infinito como concepto, resultando vencedor una defensa en pos del regreso al infinito aristotélico, frente a una que promovía el infinito actual, apoyada por Leibniz.

Dando ahora un salto temporal amplio, pasamos al siglo XIX, donde Cauchy y Weierstrass obviaron los infinitesimales y propusieron pensar en términos de relaciones entre cantidades pequeñas aunque finitas, que potencialmente podrían hacerse tan pequeñas como se deseara. Esto lleva a argumentos interesantes, como que un polígono nunca será un círculo (en acto), pero un polígono puede estar tan cerca como deseemos del círculo. Esta afirmación refleja en realidad una ejemplificación de la definición de límite propuesta por Cauchy, habitualmente utilizada para formalizar la noción de límite.

---

[42] El principio de Arquímedes, o propiedad arquimediana de las estructuras algebraicas, afirma que dos elementos no nulos son siempre comparables, no siendo infinitesimal ninguno respecto del otro. Un ejemplo habitual es en el contexto de los números reales: Si $y$ es un número real arbitrario, y $x>0$ entonces existe un entero positivo $n$ tal que $nx>y$.

Desde una perspectiva Euclidiana, se propone el siguiente resultado en el libro 10 de sus *Elementos*: *Dadas dos magnitudes no iguales, si de una de ellas es sustraída una cantidad mayor que su mitad, y de lo que resta se sustrae una cantidad mayor que su mitad, y se repite este proceso de forma continuada, quedará una magnitud que será menor que las dadas* (Katz, 2004, p.59). Este resultado (dependiente de definiciones previas) da lugar al método de exhausción.

[43] Bajo los principios del análisis estándar, se dice que una función es un infinitésimo en un punto si el límite de dicha función cuando tiende al punto, es cero. Así, los infinitésimos poseen tres propiedades:

- El conjunto de los infinitésimos es cerrado en la suma.
- El conjunto de los infinitésimos es cerrado en el producto.
- El conjunto de los infinitésimos es cerrado en el producto por funciones acotadas (que incluyen constantes).

Nótese que los infinitésimos no están sujetos a la propiedad arquimediana de las estructuras algebraicas, ya que al multiplicar un infinitésimo por cualquier número natural, el resultado es equivalente al primero.

En el análisis no estándar (Robinson, 1966), se pueden definir los infinitésimos como números, definidos como números tales que, para todo número entero habitual, el inverso de dicho número es mayor que el infinitésimo. Dado que la aproximación que se usa en Secundaria y Bachillerato es la estándar, no consideramos necesario ampliar en dicho constructo. En Mamolo (2009), puede encontrarse una revisión más a fondo acerca de los infinitésimos, desde ambas perspectivas.

Finalmente, Bolzano, en su publicación "*Las paradojas del infinito*" (1851), propuso considerar el infinito como un atributo o propiedad de una colección o conjunto, eliminando su uso adverbial. Por tanto se pasa de hablar de "el infinito" a "conjuntos infinitos". Sin embargo, sigue aceptando el axioma de Euclides, de forma que pese a considerar cierta la biyección entre [0,5] y [0,12], argumentaba que ambos conjuntos no eran equinumerables, afirmando que la relación parte-todo condicionaba dicha equinumerabilidad (Moreno & Waldegg, 1991, p. 215). Su gran aportación fue considerar las relaciones biyectivas entre conjuntos de diferentes tamaños, pese a sus conclusiones que no llegaron a excluir las relaciones parte-todo como criterio de comparación (o equipotencia[44]). El trabajo de Bolzano fue completamente refinado por Cantor, y su teoría de los números transfinitos[45], cuya intención era considerar los conjuntos infinitos como instrumento para analizar el dominio de funciones que pudieran ser representadas, llegando a definir el conjunto derivado de otro como el conjunto de puntos de acumulación (Moreno & Waldegg, 1991; Penalva, 1996; Jahnke, 2001). La aportación de Cantor resultó en la posibilidad de comparar un conjunto con algún subconjunto propio (Cantor 1877, citado en Moreno & Waldegg 1991, p. 217), definiendo dos tipos de conjuntos infinitos, los numerables (aquellos equipotentes a los naturales), y los no numerables. De su consideración surgen vínculos entre la continuidad y la no numerabilidad. Finalmente, Cantor podía llegar a afirmar que se podía introducir un infinito *propio*, perfectamente determinado, y actual por ende, resultante de la consideración del cardinal de los conjuntos. Respecto a lo infinitamente

[44] Se dice que dos conjuntos son coordinables o equipotentes si existe una biyección entre ellos. Bolzano definía una 'multitud infinita' como aquella de la que cualquier 'multitud finita' podía ser subconjunto en un sentido cardinal (Moreno y Waldegg, 1991). El propio Bolzano consideraba que había dos posibles criterios de comparación entre conjuntos para determinar su infinitud:

- La correspondencia uno a uno (biyección)
- Ser uno parte de otro.

El énfasis en la correspondencia uno a uno de Bolzano requiere hallar la biyección entre ambos conjuntos, hecho habitualmente no trivial.

[45] Los números transfinitos, o números 'Aleph', representan el cardinal de los conjuntos infinitos. Anteriormente mostramos la definición de Aleph-0 como el cardinal de los naturales. Cantor (1932) propuso el siguiente resultado, que permite relacionar el cardinal del conjunto de los números naturales con el de los reales:

**Hipótesis del Continuo**: El cardinal del conjunto de los números reales es $2^{Aleph-0}$. Si unimos esto a los axiomas de Zermelo-Fraenkel junto al axioma de elección (ZFC), se puede determinar que Aleph-1 es el cardinal de los números reales (Gödel en 1940 lo demostró, y Cohen en 1963 demostró la independencia del resultado de ZFC).

Este resultado, y los que de él se derivan, superan con mucho este estudio, pero entendemos necesario explicitar que estamos familiarizados con el mismo, hecho que nos permitió afrontar las entrevistas con el profesor con garantías de conocer los elementos matemáticos envueltos en la discusión. Puede encontrarse una revisión histórica y matemática completa en Penalva (1996). Asimismo, Penalva (1998) establece consideraciones propias de la conceptualización de diferentes sujetos acerca de los números transfinitos usando mapas conceptuales como herramienta metodológica.

pequeño, Cantor llega a afirmar que "desde el punto de vista del análisis puramente aritmético, no hay magnitudes infinitamente pequeñas, sino magnitudes variables que devienen en pequeñas" (citado en Belmonte, 2009, p. 32). El objetivo final de Cantor era demostrar la así llamada hipótesis del continuo, basada en que un conjunto podía ser numerable o bien equipotente a R. Estas propuestas, consideradas actualmente la formalización precisa de la noción de infinito, no fueron plenamente aceptadas; algunos matemáticos como Kronecker atribuían a Cantor rasgos atribuibles a lo maligno o satánico.

Así, desde las primeras consideraciones relativas al *apeiron*, hasta los esfuerzos analíticos de Cantor, y posteriores refinamientos, la humanidad ha pensado en el infinito, aceptándolo o rechazándolo, tanto al propio infinito como a las consideraciones innovadoras sobre él. Estas actitudes, tanto las intrínsecas al desarrollo conceptual, como las derivadas de aspectos relativos al ámbito actitudinal, hacia el infinito y al desarrollo en su conceptualización, entendemos que pueden ser de interesante consideración a la hora de comprender al profesor.

## Antecedentes en la investigación en didáctica

En el ámbito de los estudios en el campo de didáctica de la matemática relativo al infinito, pueden encontrarse múltiples referencias. De especial relevancia nos parece la clasificación hecha por Penalva (1996), que divide en tres grupos las contribuciones:

> *1. Investigaciones de corte psicodidáctico, en las que se pretende estudiar la comprensión del concepto de infinito.*
>
> *2. Investigaciones relativas a aspectos comunicativos, focalizando en los obstáculos didácticos generados a través de los procesos de enseñanza debido al lenguaje, la forma de presentación, o la secuenciación de contenidos.*
>
> *3. Investigaciones relativas al aprendizaje de conjuntos infinitos, detectando errores y dificultades, especialmente relacionados con el infinito actual.*
>
> (Penalva, 1996, p.36)

En este estudio entendemos la necesidad de ampliar la clasificación de Penalva, incluyendo una cuarta categoría:

4. Investigaciones relativas a la enseñanza del concepto de infinito y el conocimiento profesional que sustenta dicha enseñanza. El foco en estas investigaciones no son los estudiantes que reciben la enseñanza sino los propios profesores que la imparten, especialmente el conocimiento que ponen en juego. Esta categoría difiere de la segunda en la naturaleza del foco, siendo aquí el conocimiento, más que aspectos derivados de la comunicación.

Tanto en el trabajo desarrollado por Penalva (1996), como en el de Belmonte (2009), así como en D'Amore (1997), se recogen amplias revisiones bibliográficas acerca de las diferentes investigaciones acerca del infinito, focalizadas en los tres primeros aspectos, centrándose eminentemente la primera autora en lo relativo al tema de su disertación, los números transfinitos, haciendo el segundo un recorrido muy amplio sobre diferentes estudios de diversa índole acerca del aprendizaje y el desarrollo de la noción de infinito, y consistiendo el tercero en una revisión bibliográfica propiamente dicha más relacionada con el análisis matemático en general. Así pues, entendemos que no es necesario en este documento escribir una nueva revisión bibliográfica, aunque si hacer que el lector sea consciente de haberla realizado. Por tanto, el punto en el que si abordaremos una revisión de la literatura de investigación previa será el cuarto, relacionado con las investigaciones relativas a la enseñanza del concepto de infinito y el conocimiento profesional que las sustenta

### *Conocimiento profesional del infinito. Estado del arte*

Para abordar este punto, seguimos un proceso de revisión de actas de congresos internacionales (PME, PME-NA, CERME, ICME, RELME, CIBEM,…), búsqueda en revistas indexadas en JCR, y repositorios de tesis doctorales, buscando toda referencia que contuviera la palabra clave "infinito", y cuya temática tuviera relación con el profesorado. Además, la revisión de literatura relativa a aspectos cognitivos del infinito brindó también algunas referencias interesantes. Sin embargo, podemos concluir que las investigaciones sobre el conocimiento de los profesores acerca del infinito no son especialmente abundantes, y mucho menos las que consideran a los profesores como enseñantes y no como meros aprendices en los que se presupone un conocimiento mayor.

Así, encontramos publicaciones en las que se considera a los profesores como potenciales conocedores del infinito, y en base a dicho conocimiento, se hace una reflexión sobre sus percepciones acerca del conocimiento del infinito y su naturaleza (Kattou, Michael, Kontoyianni, Christou & Philippou, 2009). La dualidad discutida en este estudio es la anteriormente analizada en la revisión histórica acerca de la potencialidad o actualidad del infinito, en la que, a través de algunas preguntas se abordan los errores conceptuales derivados de considerar el infinito un proceso o un objeto, contextualizada la discusión en la comparación de cardinales de conjuntos, y en la discusión de la igualdad 0.999…=1. Así, coinciden con Singer y Voica (2003) en que

*Los profesores dan respuestas contradictorias al comparar los mismos conjuntos representados de diferentes maneras, no reconociendo que diferentes respuestas [a una misma pregunta sobre un mismo objeto] no son aceptables en matemáticas (*Kattou et al., 2009, p. 1778)

Esta afirmación nos da información de cómo el infinito nos permite abordar contextos para que aflore conocimiento de subdominios cuyo contenido en sí no es el propio infinito, sino la *Práctica Matemática* que suele conllevar el trabajo con el infinito. También concluye, en relación con los errores conceptuales, que *"Si estos errores son reproducidos durante la enseñanza, entonces los errores de los alumnos sobre el concepto de infinito se empoderarán, tornándose en dificultades muy difíciles de superar* (Kattou, et al., 2010, p.1779), dando una relación directa entre el conocimiento del profesor y su efecto en los alumnos.

Encontramos también estudios en los que se proponen dinámicas instruccionales reflexionando sobre la naturaleza de la acción del profesor en dichas dinámicas (Tall & Schwarzenberger, 1978). En el estudio citado, en concreto, la propuesta de los investigadores nace de situarse a sí mismos en el rol de profesores, con lo que, aunque no podríamos considerarla una publicación sobre conocimiento del profesor, sí alimenta a dicho campo, ya que observamos cómo dos expertos en la enseñanza del infinito diseñan aproximaciones para trabajar los números decimales y el límite, con énfasis en la igualdad 0.999…=1, las fracciones y los números irracionales, los límites, las sucesiones y las series. Encontramos en la perspectiva de estos dos profesores-investigadores un amplio conocimiento de la forma en que sus estudiantes aprenden de los conflictos cognitivos que surgen a la hora de abordar el infinito y elementos relacionados. Además, estos dos investigadores introducen una variable muy interesante y a su vez poco explorada sobre el traspaso de las inseguridades del profesor a sus alumnos:

*"Los profesores no ayudan en la situación* [de abordaje del concepto] *si muestran claramente que se sienten inseguros sobre el proceso del límite, y así traspasan sus miedos a sus alumnos. Problemas subconscientes como este conducen a mayores dificultades posteriormente, obstaculizando o incluso bloqueando totalmente su comprensión posterior"* (Tall & Schwarzenberger, 1978, p. 2)

Este tipo de estudios, en los que se proponen dinámicas instruccionales y se reflexiona sobre el papel del profesor como gestor de las mismas, son muy interesantes de cara a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento que un profesor puede necesitar al abordar conceptos relacionados con el infinito en el aula.

Otra línea de investigación seguida está ligada a considerar a los profesores aprendices "avanzados", centrando el interés en el desarrollo de la cognición de los profesores en relación a diferentes situaciones en las que interviene el infinito, con argumentos basados en la cognición del infinito. Así, Yopp, Burroughs y Lindaman (2011), abordan la relación 0.999…=1 con profesores de primaria en servicio, buscando las definiciones personales de cada profesor de la validez de dicha igualdad, e introduciendo la noción de "disonancia cognitiva", introducida por primera vez por Festinger (1957), en la que se sugiere que *"la incomodidad causada por inconsistencias lógicas o contradicciones motiva a un individuo a modificar sus creencias y acercarlas más a lo que sucede en la realidad"* (Festinger 1957, citado en Yopp et al., 2011). Mostraremos la utilidad de esta noción en el análisis, donde observaremos como el profesor sujeto del estudio de caso se ve inmerso en un proceso de 'disonancia cognitiva'. Otros estudios se centran en la construcción del conjunto de las partes de los números naturales (Stenger, Weller, Arnon, Dubinsky & Vidakovic, 2005), y entre algunos estudiantes, toman un profesor, al que se establece como ejemplo de aprendiz con un conocimiento profundo y más razonado del proceso de construcción de las partes de los naturales. El marco teórico que usan estos autores es la teoría APOS (Asiala, et al., 1996; Arnon, et al., 2014)), en la que, desde las primeras publicaciones, se han hecho intentos por abordar nociones relativas al análisis matemático íntimamente ligadas con el infinito, dando un papel importante al profesor, diseñando esquemas teóricos del aprendizaje de las derivadas (Gavilán, 2005), o abordando dificultades asociadas a la igualdad 0.999…=1 (Weller, Arnon & Dubinsky, 2009). Estas investigaciones nos permiten acceder a dos aspectos diferentes del conocimiento del profesor. El primero de estos aspectos está enfocado a cómo el profesor diseña secuencias de enseñanza para fomentar el aprendizaje de sus alumnos, con lo que nos permite reflexionar acerca de la habilidad del profesor en el diseño de dichas experiencias, así como acerca de su conocimiento más o menos profundo de las características del aprendizaje de sus alumnos. El segundo nos permite aproximarnos al efecto que ciertos grados de comprensión del infinito pueden tener en posibles respuestas del profesor a preguntas estrictamente matemáticas. Sin embargo, como hemos afirmado anteriormente, en estas investigaciones se considera a los profesores como sujetos en los que se presupone un conocimiento más avanzado de la noción de infinito, no como profesores en el sentido de sujetos que necesiten conocer el infinito de cara a la enseñanza de conceptos relacionados con el mismo. No afirmamos con esto que un profesor no necesite poseer un conocimiento profundo del infinito, sino que, aparte de dicho conocimiento, debe conocer el infinito de otra forma, esto es, como un elemento que forma parte de la matemática escolar, sujeto a consideraciones de tipo didáctico.

Adicionalmente, existen investigaciones centradas en los alumnos y sus errores habituales, en las que se reflexiona sobre el profesor y su papel al discutir el infinito en el aula, llegando a afirmar que *"la mayoría de los niños de primaria están muy interesados por el infinito, y disfrutan discutiendo el concepto, si el profesor está preparado para ello"* (Pehkonen, Hannula, Maijala &Soro, 2006). Esto nos lleva tanto a considerar la necesidad y adecuación de considerar el infinito en el conocimiento profesional, que veremos en el siguiente apartado, como a los aspectos emocionales derivados del abordaje del infinito en el aula, que no abordaremos en este trabajo, pero que consideramos interesantes para futuras investigaciones. Hasta este punto, no se ha mostrado ninguna referencia en la que el foco de estudio sea el profesor en sí, considerando su conocimiento diferente, en su naturaleza y no solo en su profundidad, al de sus estudiantes. Sin embargo, encontramos en Kolar y Hodnik-Cadeç (2011) la siguiente reflexión:

*"Al ser los profesores y los estudiantes universitarios (futuros profesores), elementos clave en la formación de conceptos matemáticos en los niños, queríamos explorar los fundamentos de su comprensión del concepto de infinito. Creemos que es importante que los profesores tengan una comprensión exhaustiva de los conceptos que imparten a sus alumnos"* (Kolar & Hodnik-Cadeç, 2011, p.1).

Esta reflexión supone ampliar la perspectiva acerca de qué estudiar del conocimiento del profesor acerca del infinito. Al hablar de exhaustividad, los autores no entran en mayor descripción, pero desde nuestra perspectiva, interpretaremos dicha comprensión exhaustiva como no solo la relativa a lo matemático, sino a todo lo que envuelve el concepto de infinito para su enseñanza en el aula[46].

Siguiendo la línea del conocimiento profesional del infinito, durante el desarrollo de esta tesis, se publicó un documento (Montes, Carrillo & Ribeiro, 2014) cuyo objetivo implícito es dar al conocimiento que los profesores poseen del infinito la misma entidad y profundidad que se ha dado históricamente al conocimiento que estos poseen acerca de tópicos matemáticos explícitos en el currículo. Así, se explicita la necesidad de abordar el infinito desde una perspectiva mucho más amplia y profunda que en multitud de estudios realizados hasta la fecha. En otro documento, finalmente no aceptado, se aborda la posibilidad de analizar discusiones con diferentes maestros desde el modelo de conocimiento profesional en el que se desarrolla esta investigación, dando una caracterización del mismo infinito como parte del conocimiento profesional:

*“Proponemos caracterizar el infinito, desde la perspectiva del conocimiento profesional, como una entidad objeto de reflexiones matemáticas y didácticas, personales y colectivas, construida socialmente en el ámbito escolar y que surge de la consideración de diferentes situaciones y conceptos matemáticos tales como el límite, la densidad, el cardinal de un conjunto, la generación de números, la generalización, la periodicidad, o secuenciación de las estaciones en el año, entre muchos otros, como elemento común a estos, entendidos como objetos de enseñanza y aprendizaje”*

Esta definición supone un reconocimiento de la necesidad de mantener una perspectiva relativista, propia del paradigma en el que se sitúa esta investigación, así como la necesidad de estudiar cómo los significados del concepto no son preexistentes, sino desarrollados en contextos sociales por cada profesor, desde su etapa de formación inicial hasta la de formación permanente, pudiéndose verse modificados en cualquier momento de su vida profesional, surgiendo de los contextos matemáticos que dan pie a la construcción de estos significados.

[46] El estudio de Kolar y Hodnik-Cadeç tiene lugar en Eslovenia, donde estos autores afirman que el infinito se hace explícito a los alumnos, y por tanto tiene sentido hablar de su “explicación”. Sin embargo, en otros contextos, podemos aceptar que el infinito forma parte de lo que envuelve a otros conceptos, y por lo tanto tendrá también sentido conocerlo, pese a que no se transmita de forma explícita a los alumnos.

## El infinito en la matemática escolar

En este trabajo estamos considerando el infinito como el foco conceptual sobre el que recae nuestro interés. Como elemento propio de la matemática escolar, entendemos el infinito como un interconcepto, definido por Gamboa y Figueiras (2014) como *una red coordinada y coherente, que recoge el conjunto de las definiciones concretas que forman la estructura asociada al concepto* (p. 339). Así, esta definición del infinito como red estructurada, entronca con la consideración dentro del modelo MTSK del contenido que es conocido por el profesor como parte de la estructura matemática. Así, en las siguientes páginas mostraremos algunos de los fenómenos matemáticos que dotan de contenido a dicha red estructurada, con el referente del currículo español.

Ahora bien, creemos que merece la pena preguntarse, ¿es ese interés legítimo? Somos conscientes de que el infinito no es explícito en el currículo español, y en general, tampoco lo es en otros países (e.g. estándares de la NCTM o currículo portugués). Para ello vamos a hacer un recorrido a través del currículo español, de Educación Secundaria, analizando la presencia transversal del infinito en diferentes tópicos matemáticos, algunos de forma más evidente y otros de forma más abstrusa. En cualquier caso, este es un apartado cuyo foco no es solo el conocimiento del profesor, sino también el de un posible alumno, ya que si un alumno pudiera desarrollar argumentos en los que estuviera o pudiera estar implicado el infinito en torno a algún tópico, entendemos que un profesor podría o debería prever dichos argumentos, así como saber abordarlos, con lo que tendría sentido considerar ese conocimiento como parte de su conocimiento profesional sobre el infinito.

Pasemos pues, a hacer un análisis del currículo centrado en la localización de los elementos susceptibles de abordar la noción de infinito. En este análisis curricular, nos centraremos en el Real Decreto 161/2006[47] por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria, así como al Real Decreto 1467/2007 por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, ambos en las secciones correspondientes a la materia de matemáticas[48]. Ambos análisis se harán especialmente en cuanto a los contenidos de

[47] Se eligió este documento curricular por ser el que estaba vigente durante la visualización de las clases del profesor y las entrevistas, pese a la posterior entrada en vigor de la LOMCE.
[48] Páginas 750 a 760 en el R.D.161/2006; 45449 a 45451 para la modalidad de ciencia y tecnología en el R. D. 1467/2007; y 45474 a 45477 para la modalidad de ciencias sociales en el R. D. 1467/2007.

ambas etapas, buscando posibles relaciones que se pudieran hallar con el infinito, con mayor o menor grado de profundidad en dichas relaciones. El análisis se desarrollará por cada uno de los bloques de contenido, primero de Secundaria y posteriormente de Bachillerato, mostrando en primer lugar una tabla con los contenidos extraídos directamente del Real Decreto correspondiente, seguido de un análisis acerca de cómo dichos contenidos pueden generar situaciones en las que se involucre el infinito. Este análisis deriva, en gran medida, de la sensibilidad del autor al contemplar un contexto matemático y ver su potencial para el abordaje del infinito. Por tanto, no implica que la revisión, pese a ser exhaustiva, abarque todos los posibles contextos en que aparece, sino una colección de contenidos representativos dentro de cada bloque. Cabe destacar que para Secundaria analizamos todos los bloques de contenido excepto el primero, relativo a los contenidos comunes, por abordar este bloque contenidos de carácter actitudinal, mostrándose el análisis desarrollado por bloques de contenido, mientras que en Bachillerato se hará por curso y modalidad. Comenzamos, pues, por el segundo de los bloques de contenido de Secundaria, el relativo a los números:

| **Bloque 2: Números** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1º E.S.O.** | **2º E.S.O.** | **3º E.S.O.** | **4º E.S.O. Opción A** | **4º E.S.O. Opción B** |
| Necesidad de los números negativos para expresar estados y cambios.<br><br>Fracciones y decimales. Diferentes significados y usos de las fracciones.<br><br>Números decimales. Relaciones entre fracciones y decimales.<br><br>Razón y proporción. Identificación y uso en situaciones de la vida cotidiana de magnitudes directamente proporcionales. | Uso de la notación científica para representar números grandes.<br><br>Raíces cuadradas.<br><br>Relaciones entre fracciones, decimales y tantos por ciento.<br><br>Proporcionalidad directa e inversa. Análisis de tablas. | Números decimales y fracciones. Transformaciones de decimal a fracción.<br><br>Cálculo aproximado y redondeo.<br><br>Representaciones en la recta numérica | Proporcionalidad directa e inversa.<br><br>Intervalos. Significados y diferentes formas de expresión.<br><br>Representación de números reales en la recta numérica | Reconocimiento de números que no pueden expresarse en forma de fracción. Números irracionales.<br><br>Representación de números en la recta real. Intervalos.<br><br>Significado y diferentes formas de expresar un intervalo.<br><br>Interpretación y uso de los números reales en diferentes contextos eligiendo la notación y aproximación adecuadas en cada caso. |

Figura 5: Contenidos relacionados con el infinito en el bloque de 'Números' en Secundaria

Vemos en la figura 5 la amplia presencia de los diferentes conjuntos numéricos en el bloque numérico. Las fracciones, números decimales y su relación son un contexto donde habitualmente surgen preguntas relacionadas con la naturaleza de dicha relación, como el caso de la igualdad 0.999… y 1, o la propia naturaleza infinita de los decimales de un número periódico, así como la idea de las infinitas fracciones equivalentes a una dada. Asimismo, otro contenido fundamental en Secundaria, presente en este bloque, es el de razón y proporción, cuya relación con el infinito puede darse al comparar dos cantidades directa o inversamente proporcionales, y situarse, desde una visión procesual, en el efecto que causaría un incremente o decremento reiterado de una de las magnitudes en la otra. Posteriormente, ya a partir del tercer curso, vemos que comienzan a contemplarse las representaciones en la recta, primero de números enteros y racionales y posteriormente reales, de diferentes números, que llevan implícitas las nociones de continuidad y divisibilidad indefinida de intervalos. Estos intervalos constituyen otro núcleo a abordar durante todo el segundo ciclo de Secundaria (3º y 4º), cuya naturaleza continua, acotada o no, discreta o no, entre otras, pueden dar pie a múltiples preguntas cuyo sustento esté en la conceptualización del infinito usada. Finalmente, los procesos aproximativos explicitados para 4º de E.S.O., en la opción B, pueden generar curiosidad acerca de cuánto se puede aproximar el redondeo al número, reflejando una visión potencial del proceso aproximativo.

| **Bloque 3: Álgebra** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1º E.S.O.** | **2º E.S.O.** | **3º E.S.O.** | **4º E.S.O. Opción A** | **4º E.S.O. Opción B** |
| Empleo de letras para simbolizar números desconocidos y números sin concretar. | Lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones.<br><br>Significado de las ecuaciones y de sus soluciones. | Análisis de sucesiones numéricas. Progresiones geométricas y aritméticas.<br><br>Sucesiones recurrentes. Las progresiones como sucesiones recurrentes | Manejo de expresiones literales para la obtención de valores concretos en fórmulas y ecuaciones en diferentes contextos. Uso de igualdades notables<br><br>Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. | Manejo de expresiones literales. Uso de igualdades notables.<br><br>Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.<br><br>Resolución de inecuaciones. Interpretación gráfica. |

Figura 6: Contenidos relacionados con el infinito en el bloque de 'Álgebra' en Secundaria

En este bloque, la presencia de la idea de infinito subyace a varios núcleos conceptuales, predominando uno sobre el resto, como son las consideraciones relativas a ecuaciones.

Así, vemos en el contenido señalado para primer curso la idea de variable, usada para representar un conjunto, habitualmente infinito, de valores que puede tomar dicha variable. En los siguientes cursos vemos como las ecuaciones siguen apareciendo, ya sea en cuanto a su resolución, significado, o representación gráfica o algebraica, en los que la idea de variable tiene un papel omnipresente, y cuya interpretación puede estar asociada a la idea de cuál de las infinitas posibles soluciones es la que cumple las condiciones. Estas condiciones, en la resolución gráfica, vienen dadas en forma de variedades geométricas, sobre cuya naturaleza también se puede discutir con el sustento que brinda el infinito. Una variante de las ecuaciones son las inecuaciones, cuyas soluciones son habitualmente conjuntos[49], finitos o infinitos. En cuanto al uso de expresiones y de igualdades notables, podemos encontrar reflexiones acerca de la generalidad de la validez de las mismas, existiendo subyacente el significado de la expresión ‘para todo’.

<table>
<tr><th colspan="5">Bloque 4: Geometría</th></tr>
<tr><th>1º E.S.O.</th><th>2º E.S.O.</th><th>3º E.S.O.</th><th>4º E.S.O. Opción A</th><th>4º E.S.O. Opción B</th></tr>
<tr><td>Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad</td><td>Ampliación y reducción de figuras.<br><br>Poliedros y cuerpos de revolución</td><td>Coordenadas gráficas (cartesianas)</td><td>Medida y cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.</td><td>Razones trigonométricas.<br><br>Medida de longitudes, áreas y volúmenes.</td></tr>
<tr><td colspan="5">Naturaleza medible de los objetos abordados</td></tr>
</table>

Figura 7: Contenidos relacionados con el infinito en el bloque de ‘Geometría’ en Secundaria

En este bloque encontramos la posible presencia del infinito en dos órdenes distintos, uno derivado de los propios contenidos, y otro de la naturaleza epistemológica de los objetos abordados en los contenidos.

En el primer caso, hay situaciones donde el infinito puede estar presente, como el paralelismo de dos rectas, la necesaria consideración implícita de la densidad de los números reales para generar cuerpos de revolución, las coordenadas cartesianas y la indefinición de los ejes, o la medición y cálculo de medidas uni, bi o tridimensionales,

[49] En el caso más habitual en contextos de Educación Secundaria, son intervalos, pero en general, en contextos de programación lineal, son regiones en el espacio delimitadas por las condiciones impuestas por las inecuaciones, de ahí el uso general de ‘conjunto’ para denotarlas.

que generan situaciones interesantes de cara a la medición (por ejemplo al considerar que la suma infinita de objetos es finita). Asimismo, en las funciones trigonométricas, su periodicidad va asociada a la infinita repetición de cierto intervalo, así como al resultado idéntico de las relaciones numéricas consideradas en ellos de forma repetida.

En el segundo caso, el carácter medible de los objetos puede generar también situaciones en las que podría aflorar el infinito, en preguntas como ¿cuánto mide un punto? ¿qué grosor tiene una recta?, o en errores como los derivados del uso de lo que informalmente se conoce como 'teorema del punto gordo'[50], resultado evidentemente incorrecto, que se sustenta en la pregunta anteriormente formulada sobre el tamaño de un punto.

| **Bloque 5: Funciones y Gráficas** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1º E.S.O.** | **2º E.S.O.** | **3º E.S.O.** | **4º E.S.O. Opción A** | **4º E.S.O. Opción B** |
| Coordenadas cartesianas.<br><br>Identificación de relaciones de proporcionalidad directa a partir del análisis de su tabla de valores. Utilización del contraejemplo cuando las situaciones no sean directamente proporcionales.<br><br>Identificación y verbalización de relaciones de dependencia. | Descripción local y global de fenómenos presentados de forma global.<br><br>Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos.<br><br>Obtención de relaciones de proporcionalidad directa e inversa a partir del análisis de la tabla de valores y su gráfico.<br><br>Representación | Aportaciones del estudio gráfico al análisis de una situación: Dominio, continuidad, monotonía, extremos, puntos de corte.<br><br>Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión gráfica.<br><br>Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados. | La tasa de variación media como medida de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.<br><br>Estudio y utilización de otros modelos funcionales no lineales: exponencial y cuadrática. | La tasa de variación media como medida de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.<br><br>Funciones definidas a trozos.<br><br>Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica |

[50] Dadas 3 rectas cualesquiera, existe un punto en el que se cortan las tres, siempre que el punto sea 'lo suficientemente grande'.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | gráfica de de una situación que viene dada a partir de una tabla de valores, de un enunciado o de una expresión algebraica sencilla. | Utilización de las distintas formas de representar la ecuación de la recta. | | |

Figura 8: Contenidos relacionados con el infinito en el bloque de 'Funciones y Gráficas' en Secundaria

El caso del bloque de 'Funciones y Gráficas', es donde a priori considerábamos que existiría una presencia más abundante del infinito, viéndose esto confirmado al estar ampliamente centrado en la representación gráfica de funciones y el necesario estudio de las características de las propias funciones de cara a su representación, donde destacan, por su íntima y habitual relación explícita con el infinito, tanto el estudio de la continuidad, como de la tasa de variación media (que desemboca en el estudio de la derivada). Este bloque no solo hace énfasis en esta representación, sino también (en cuarto curso, modalidades A y B) en diversos tipos de funciones en los que los comportamientos asintóticos son bastante característicos. Asimismo, existen en este bloque contenidos relativos a la relación funcional entre dos variables, incidiendo sobre la comprensión del significado de dicha relación de dependencia funcional, que una vez comprendida plenamente, puede dar pie a diferentes grados de desarrollo del concepto función (Dubinsky, 1991), donde el infinito está presente desde la consideración de los valores que pueden estar sujetos a la dependencia funcional, y la relación que causa uno en otro, hasta considerar los infinitos elementos de cada conjunto y entender la transformación de un conjunto en otro. Posteriormente, los contenidos relativos al establecimiento de conjeturas sobre el comportamiento de una función dada una gráfica o determinar el tipo de relación de proporcionalidad de una función conlleva una capacidad de generalizar y abstraer el comportamiento de un objeto matemático que puede llevar, en ciertos alumnos a cuestionarse sobre el comportamiento 'en el infinito'. Finalmente, la identificación, y especialmente la verbalización de relaciones de dependencia es un contexto constante a lo largo de toda la etapa, aunque figure solo como contenido del primer curso. Esta verbalización puede dar indicios del tipo de comprensión que los alumnos tienen del infinito a través de sus expresiones sobre diferentes conceptos como el límite.

| Bloque 6: Estadística y probabilidad | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1º E.S.O.** | **2º E.S.O.** | **3º E.S.O.** | **4º E.S.O. Opción A** | **4º E.S.O. Opción B** |
| Formulación de conjeturas sobre experimentos aleatorios sencillos. | --- | Atributos y variables discretas y continuas | Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones al azar | Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones al azar |

Figura 9: Contenidos relacionados con el infinito en el bloque de ‘Estadística y probabilidad’ en Secundaria

Este último bloque de contenidos de Secundaria es uno de los habitualmente más obviados a la hora de la docencia[51], pero introduce algunos elementos que pueden generar discusiones interesantes a la hora de observar la aparición, explícita o implícita, del infinito. En primer lugar, la formulación de conjeturas sobre los posibles resultados de experimentos sencillos, y el uso del vocabulario para expresar situaciones relacionadas con el azar, puede llegar a reflejar concepciones ligadas al infinito, habitualmente asociado en los primeros momentos de interacción con dicho concepto con lo desconocido, en el sentido de ‘apeiron’ que le otorgaban los griegos. Asimismo, la consideración de variables discretas y continuas da pie a su consideración como funciones, que generan respuestas y reflexiones anteriormente comentados. Pasamos ahora a considerar los contenidos de Bachillerato por cada curso y modalidad:

| Matemáticas I. Modalidad Ciencia y Tecnología | | | |
|---|---|---|---|
| **Aritmética y Álgebra** | **Geometría** | **Análisis** | **Estadística y Probabilidad** |
| Números reales<br>Intervalos y entornos.<br><br>Distancias en la recta real. | Vectores libres en el plano.<br>Ecuaciones de la recta.<br>Posiciones relativas | Funciones reales de variable real.<br><br>Dominio, recorrido y extremos.<br><br>Operaciones y composición de funciones. | |

[51] Dada la habitual organización de los cursos, este bloque suele ser el último, y por cuestiones temporales, se tiende a no abordar en las aulas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Resolución e interpretación gráfica de ecuaciones e inecuaciones. | | Aproximación al concepto de límite de una función. Tendencia y continuidad. Aproximación al concepto de derivada de una función | --- |

Figura 10: Contenidos relacionados con el infinito en Matemáticas I de la modalidad de Ciencia y Tecnología

En este curso, aparece ya el elemento escolar en el que más explícito está el concepto de infinito, como es el límite de una función. No solo eso, sino que dicho concepto se usa para construir el de derivada, presente también en este curso. Esto, junto al estudio de funciones reales de variable real, y sus características, conforman uno de los contextos en los que el infinito puede aparecer, tanto explícita como implícitamente, a la hora de tratar los alumnos con ellos. Pasando a contextos menos obvios, la noción de vector 'libre' conlleva la de variable, al estar la 'libertad' del vector dada por el hecho de ser un representante de la clase de equivalencia de todos los vectores con idéntico modulo, dirección y sentido. En cuanto a las ecuaciones de la recta y sus posiciones relativas, implican la idea de la recta como función real de variable real, así como la noción de paralelismo, que en virtud de reformulaciones del quinto postulado de Euclides, suele tratarse informalmente como 'rectas que se cortan en el infinito'. En cuanto al bloque de aritmética y álgebra, los números reales y sus propiedades, así como funciones definidas sobre ellos pueden generar conflictos, preguntas y situaciones relacionadas con su densidad y completitud, conceptos sustentados por la idea de infinito, en el sentido Cantoriano. Finalmente, en la resolución de inecuaciones se pueden encontrar habitualmente como soluciones conjuntos de dos dimensiones delimitados por un conjunto de rectas, siendo por tanto posible el hecho de la infinidad del conjunto de soluciones.

| Matemáticas II. Modalidad Ciencias y Tecnología | | |
|---|---|---|
| **Álgebra lineal** | **Geometría** | **Análisis** |
| Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales | Vectores en el espacio tridimensional | Concepto de límite de una función. Calculo de límites.<br><br>Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.<br><br>Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto. Función derivada. Calculo de derivadas. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.<br><br>Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas. |

Figura 11: Contenidos relacionados con el infinito en Matemáticas II de la modalidad de Ciencia y Tecnología

En este curso, se prosigue con el tratamiento de límites, y se abunda en el de derivada, introduciendo también el de integral definida, habitualmente usando la construcción de las sumas de Darboux (o las de Riemann, dependiendo del grado de complejidad pretendido), que al igual que en primer curso, son contextos en los que el infinito es explícito, y por tanto, de posible y probable aparición de preguntas, y situaciones en los que los alumnos demanden al profesor explicaciones sobre el mismo. En cuanto a los vectores en el espacio, la justificación ligada a la libertad de los vectores es válida aquí también. Finalmente, la discusión y resolución de sistemas lineales, permite la aparición de contextos relacionados con la naturaleza determinada, indeterminada o incompatible de dichos sistemas, siendo el segundo caso propicio para la discusión del significado de la expresión coloquialmente usada ‘tiene infinitas soluciones’, así como de su interpretación gráfica en forma de intersección de planos o rectas.

| | **Matemáticas I y II. Modalidad Ciencias Sociales** | | |
|---|---|---|---|
| **Bloques / Curso** | **Aritmética y álgebra** | **Análisis** | **Probabilidad y Estadística** |
| **Primero** | Aproximación decimal de un número real. Estimación, redondeo y errores | Expresión de una función en forma algebraica, por medio de tablas o de gráficas. Aspectos globales de una función.<br><br>Identificación de la expresión analítica y gráfica de las funciones polinómicas, exponencial y logarítmica, valor absoluto, parte entera y racionales sencillas a partir de sus características.<br><br>Tasa de variación. Tendencias. | Tipos de variables.<br><br>Distribuciones de probabilidad binomial y normal. |
| **Bloques / Curso** | **Álgebra** | **Análisis** | **Probabilidad y Estadística** |
| | Inecuaciones lineales con una o dos incógnitas. Sistemas de inecuaciones. Programación lineal. | Aproximación al concepto de límite a partir de la interpretación de la tendencia de una función. Concepto de continuidad. Interpretación de diferentes tipos de discontinuidad de las tendencias asintóticas en el tratamiento de la información.<br><br>Derivada de una función en un punto. Aproximación al concepto e interpretación geométrica.<br><br>Aplicación de las derivadas al estudio de las propiedades locales de funciones.<br><br>Estudio y representación gráfica de una función polinómica o racional sencilla a partir de propiedades globales. | Implicaciones prácticas de los teoremas: Central del límite, aproximación de la Binomial a la Normal, y Ley de los grandes Números. |

Figura 12: Contenidos relacionados con el infinito en Matemáticas I y II de la modalidad de Ciencias Sociales

Mirando ahora la modalidad de Ciencias Sociales, además de los contenidos que coinciden con los de la modalidad de Ciencia y Tecnología, encontramos la programación lineal, íntimamente ligada a las inecuaciones, y las implicaciones prácticas de tres teoremas cuyo sustento es el límite, siendo en dos casos dicho límite la distribución Normal, y en el tercero la probabilidad. Dada la naturaleza de dichos contenidos, tan íntimamente ligada al límite, entendemos que podrían suponer contextos en los que el infinito aparezca como parte de la discusión o como elemento que cause conflicto en los estudiantes.

Podemos concluir que el infinito es un elemento presente, de forma explícita o implícita, en contenidos de la asignatura de matemáticas tanto de la Secundaria como del Bachillerato. Asimismo, y aunque no se hace aquí dicho análisis, somos conscientes de la necesidad de estudiar su presencia tanto en Primaria, en la línea del trabajo desarrollado por Gardiner (1985), como en asignaturas de otras áreas de conocimiento, tanto de corte científico como física, química o biología, donde gran parte de la relación será en virtud de la matemática usada, como en asignaturas de corte social o humanístico, como educación física, o filosofía, en las que se pueden encontrar situaciones cuyo trasfondo esté ligado al infinito, como reflexiones de autores clásicos estudiados en filosofía, como el propio Aristóteles o Platón, o en situaciones que impliquen una variable temporal, propias de la educación física.

# Capítulo 2: Marco Metodológico

## Caracterización del estudio

Este capítulo se centrará en, por una parte, presentar la pregunta de investigación, los objetivos de la misma, y aclarar el papel que el investigador ha tenido en la investigación y, por otra, dar los fundamentos teóricos del enfoque de investigación usado, la Grounded Theory, y finalmente, dar la fundamentación teórica de las herramientas de recogida de datos.

Creemos especialmente necesario aclarar que esta investigación no es la que un individuo desarrolla aislado del contacto con otros investigadores, sino que está enmarcada en una tradición de formación de investigadores, con 17 trabajos doctorales desarrollados, dirigidos (o co-dirigidos) por José Carrillo, Nuria Climent, Luis Carlos Contreras o Cinta Muñoz-Catalán en la Universidad de Huelva. El hecho de que esta investigación haya sido desarrollada en el seno del grupo SIDM[52] de la Universidad de Huelva, conlleva múltiples implicaciones que subyacen a esta tesis. En lo referente a la metodología, el paradigma interpretativo ha sido una elección común a casi la totalidad de investigaciones desarrolladas, especialmente las tesis doctorales, ya que el objetivo de estas ha sido, por ejemplo, desarrollar la "*comprensión de procesos sociales y educativos*" (Muñoz-Catalán 2009, p.149), "*la comprensión del proceso de desarrollo profesional de una maestra de Primaria*" (Climent, 2005, p. 141), "*comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje en dos aulas*" (Zakaryan, 2011, p.7) o "*comprender e interpretar el proceso que efectúan cada una de las niñas alrededor de la construcción de un concepto en particular*" (García-Amadeo, 2013). Así, este afán por comprender distintos aspectos de la realidad educativa en relación con las matemáticas, común a múltiples trabajos desarrollados en el grupo de Huelva, impregnó esta investigación desde su origen, de forma que el investigador siempre fue consciente de que su objetivo era comprender ciertos aspectos de la realidad. Coincidimos con Muñoz-Catalán en la filosofía de los objetivos de este trabajo, ya que al igual que nosotros, ella no pretendía "*explicar, controlar y predecir como pretende el paradigma positivista*", ni "*conseguir la emancipación y transformación de la realidad, como pretende el paradigma crítico*" (Muñoz-Catalán, 2009, p. 149). En relación con el paradigma crítico, entendemos que, pese a no ser el objetivo de la investigación aquí plasmada, era inevitable cierta transformación de la realidad, ya que, siendo coherentes

[52] Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas.

con una visión socioconstructivista (Ernest, 1991) del conocimiento, el mero hecho de interactuar con el profesor implica cierta transformación en él.

Asimismo, para la comprensión de esta investigación, es indispensable entender que, al estar contextualizada en el Programa de Doctorado que se desarrolla en el Departamento de Didácticas de las Ciencias y Filosofía, basado en la filosofía de colaboración imperante en el grupo DESYM[53], multitud de factores influyen sobre el investigador y, por tanto, sobre la investigación, especialmente el hecho de ser desarrollada junto a otras tesis doctorales. Así, el papel de la discusión entre iguales, en el marco del avance tanto de esta investigación como de otras[54], es uno de los elementos fundamentales en los que este investigador se ha apoyado para su aprendizaje.

### *Pregunta de investigación y objetivos*

El mero hecho de plantearse una investigación como la que aquí se presenta supone que existe una problemática y unas necesidades de investigación dentro del área que deben ser satisfechas. Dicha problemática será formulada en forma de pregunta de investigación a la que intentaremos ceñirnos para el planteamiento de los objetivos que creemos necesarios para responderla. Una vez planteados y explicitados estos objetivos, será nuestra intención abordarlos e intentar su consecución para dar respuesta a la pregunta de investigación. De esta forma, la pregunta que da lugar a esta investigación es la siguiente:

¿Qué conocimiento sobre el infinito puede movilizar un profesor de Secundaria y Bachillerato?

Esta pregunta da lugar a varias cuestiones secundarias, de diferente naturaleza, que marcarán el desarrollo de la investigación. Cabe destacar que no son sub-preguntas, sino cuestiones de diferente naturaleza derivadas de la pregunta de investigación, que surgen al pretender responderla. La primera de ellas responde a características metodológicas, ya que entendemos que responder a la pregunta general requiere de una planificación sobre cómo abordarla:

¿Cómo puedo acceder a ese conocimiento?

---

[53] Formación Inicial y Desarrollo Profesional de los profesores de Ciencias-Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas.

[54] Trabajos doctorales desarrollados o en desarrollo de: Álvaro Aguilar, Enrique Carmona, Emma Carreño, Ana Escudero, Dinazar Escudero, Joaquín Fernández , Eric Flores, José Luis Huitrado, Mar Liñán, Jeferson Moriel, Nielka Rojas, Diana Vasco.

Esta pregunta desemboca en una revisión de las investigaciones previas sobre conocimiento profesional y sobre conocimiento del infinito, y da pie al desarrollo metodológico de esta investigación. Durante esta revisión bibliográfica, realizada en un momento inicial de la investigación, surgen dos dudas de carácter transversal al estudio sobre la relevancia de la misma, a las que se responderían durante el trabajo analítico y en la presente memoria, en los apartados correspondientes a las aportaciones al área:

¿Qué aportaciones hace este estudio al modelo de conocimiento del profesor?

¿Qué aportaciones hace el modelo al estudio del conocimiento del infinito por parte del profesor?

Estas preguntas, en particular la primera, no se restringen solo al conocimiento de aspectos matemáticos, sino también cognitivos, curriculares o de organización y preparación de clases.

Con miras a responder a la pregunta de investigación inicial, nos marcamos el siguiente:

Objetivo: A través de un modelo sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), determinar distintas componentes en el conocimiento del infinito que pone en juego el profesor objeto del estudio de caso al impartir clase en Secundaria y Bachillerato, así como en la discusión de diferentes situaciones relacionadas con la docencia.

Atendiendo, ahora, a las cuestiones relativas al desarrollo de la investigación, explicitaremos los sub-objetivos que surgieron en relación con los diferentes aspectos de esta investigación, siendo en todos los casos consecuencia de la voluntad de alcanzar el objetivo de esta investigación.

Objetivo Auxiliar 1: Diseñar un cuestionario que permita contextualizar al profesor como conocedor del infinito, y como docente, para su profunda contextualización como caso.

Objetivo Auxiliar 2: Desarrollar un guión de entrevista que permita acceder al conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK, sobre el infinito

Objetivo Auxiliar 3: Fundamentar las categorías emergentes de los datos empíricos, poniéndolos en relación con MTSK.

Estos objetivos marcan la trayectoria de desarrollo de esta investigación, habiendo sido definidos, desarrollados, modificados, y revisados durante la propia investigación, de forma compatible con el enfoque metodológico adoptado, que abordaremos en siguientes apartados.

Creemos necesario hacer entender al lector que esta investigación se enmarca en la agenda de investigación del grupo SIDM de la Universidad de Huelva y que, por tanto, supone una contribución a la consecución de los objetivos del propio grupo, entre los cuales está el desarrollo y refinamiento de un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas como herramienta de investigación, explicitado en el marco teórico de esta investigación, y desarrollado, como hemos indicado, de forma coetánea a la misma.

## Grounded Theory como enfoque metodológico

En esta investigación nos basamos en el marco metodológico propuesto inicialmente por Glasser y Strauss (1967), y posteriormente refinado y reinterpretado por Strauss (1987) o Strauss y Corbin (1990, 1998), siendo esta una perspectiva que ha permitido sustentar una amplia variedad de investigaciones de corte cualitativo. Desde un principio fuimos conscientes de que este estudio sería cualitativo, ya que entendemos la cuasi-imposibilidad de abarcar lo que ’cualquier profesor, en cualquier momento de su vida, en cualquier contexto sociocultural’[55] pudiera saber, y por tanto no se pensó en un estudio que pudiera permitir generalizar. Este estudio está enfocado a la comprensión de un solo caso, que nos permita comprender mejor qué puede saber un profesor, para en base a eso desarrollar categorías o teorías locales. Así, en la revisión de la literatura, encontramos diversos autores que proponían la Grounded Theory como método habitual en investigaciones de corte cualitativo (Charmaz, 2000, 2008; Bryman 2001; Pidgeon & Henwood, 2004), con énfasis en la entrevista (Charmaz, 2001), además de ser un modelo metodológico con el que el grupo de investigación en el que se desarrolló esta tesis estaba ampliamente familiarizado por la realización de algunos investigaciones (Muñoz-Catalán 2009), motivo por el que también nos sentimos inclinados a adoptarlo como enfoque.

[55] Entendemos que el ansia por generalizar, habitual en los estudios cualitativos, resulta imposible en el presente estudio, dada las diferencias que existen tanto entre personas, como de una persona en cierto momento a sí mismo un tiempo después. Asimismo, dadas las características del diseño, no es nuestra intención ni pretensión hacerlo.

### *¿En qué consiste la Grounded Theory?*

Para Bryman (2001), este enfoque consiste en comprender que *las teorías emergentes son aquellas que son derivadas de los datos, recogidos de forma sistemática y analizados en el proceso de investigación* (Bryman, 2001, citando a Strauss & Corbin 1998). Además, esta teoría tiene dos características principales, que la teoría se desarrolla con base en los datos, y que es una aproximación iterativa o recursiva a los datos, en el sentido de que la recogida de datos y su análisis suceden a la vez, o de forma secuenciada, aportando los datos elementos de análisis, y el análisis de estos, información para recoger más datos. Este enfoque metodológico tiene como posibles productos *conceptos, propiedades, hipótesis, teorías y categorías*, siendo esta último uno de los objetivos de esta investigación, y contribuyendo esta investigación a la construcción de la teoría que supone el marco de conocimiento profesional 'MTSK', dentro del ciclo de investigación que sigue el grupo de investigación de la universidad de Huelva. Como filosofía de investigación entendemos que es compatible con nuestro posicionamiento constructivista, siendo este un motivo más para adoptarla.

Nos parece interesante en este punto reflexionar sobre las herramientas que diferentes autores han desarrollado en torno a este enfoque metodológico:

*Muestreo teórico:* Es el *"proceso de recogida de datos para generar teoría, en el que el analista recoge, codifica, y analiza sus datos conjuntamente"* (Bryman 2001, citando a Glasser & Straus, 1967). Es decir, es todo el proceso en el que el investigador recoge datos y los procesa, siendo además esta recogida iterativa, y permitiendo la refinación, modificación e inclusión de nuevos métodos de recogida de información

*Codificación:* Es el proceso clave de esta teoría, en el que los datos son separados en grupos compartimentados, a los que se dota de un nombre descriptivo del contenido de los mismos así como modificable. Este enfoque rompe con el enfoque cuantitativo de la investigación en el que los datos han de encajarse en categorías preconcebidas, mientras que en este enfoque, *las interpretaciones de los datos que hace el investigador conforman sus códigos emergentes* (Charmaz, 2000).

*Saturación Teórica:* Es el momento en el cual la recogida de nuevos datos no aporta nueva luz a la emergencia de teorías o al desarrollo de las categorías.

*Método de comparación constante:* Esta práctica, fundamental en el trabajo con este enfoque metodológico (Strauss & Corbin, 1967), se basa en la continua conexión existente entre la recogida de datos y el proceso conceptualizador del investigador, *"que impone al investigador constantemente la necesidad de comparar entre los fenómenos que están siendo codificados bajo cierta categoría de manera que una elaboración teórica de dicha categoría pudiera emerger"* (Bryman, 2001).

### El papel de la teoría previa en el enfoque de la Grounded Theory

En el uso de este enfoque metodológico, nos vimos en cierto momento en un dilema, ya que el objetivo era desarrollar teoría, y en los fundamentos de la Grounded Theory, así como en los trabajos posteriores de Glasser (1992), se establece que el rol de la teoría previa ha de ser escaso, y que incluso la pregunta de investigación debe emerger de la colección de datos. En nuestro caso no ha sucedido esto, y de acuerdo a la reinterpretación del enfoque metodológico de Strauss y Corbin (1998), es habitual que no solo la pregunta de investigación, sino también las preguntas que se deseen hacer, surjan de las lecturas previas sobre el tema. Coincidiendo con esta perspectiva, Pidgeon y Henwood (2004) amplían la reflexión, siguiendo a Charmaz, argumentado que el investigador *debe tener cierta perspectiva desde la que activamente intentar construir sus análisis, pero no con la intención de simplemente aplicar dicha perspectiva* (Pidgeon & Henwood, 2004, p. 634). Esta perspectiva se define como los intereses, y la actitud del investigador que provee a este de unas conceptualizaciones personales que lo sensibilizan, junto a las experiencias, prioridades y valores personales.

### El desarrollo de la investigación. La Grounded Theory como trasfondo

Como anteriormente afirmamos, se eligió esta perspectiva metodológica por diferentes motivos: la compatibilidad con un enfoque cualitativo, el objetivo del estudio, y la tradición en la escuela en la que se enmarca. Sin embargo, existe un motivo más profundo, que deriva no solo de las intenciones sobre el diseño, sino del propio objeto de estudio. Este estudio toma como objeto el conocimiento que un profesor de secundaria moviliza sobre el infinito de cara a su uso en la enseñanza. Este "objeto[56]" de estudio no ha sido ampliamente estudiado en la literatura previa con el enfoque que se pretende aquí (considerar al profesor como partícipe del proceso de enseñanza-

[56] No pretendemos adoptar una posición platónica respecto del conocimiento del profesor, sino que creemos que la expresión "objeto" de estudio, dentro del apartado de metodología, es la más adecuada.

aprendizaje, y no como aprendiz avanzado), con lo que las categorías que se pretenden desarrollar aquí emergerán estrictamente de los datos, teniendo en cuenta la sensibilidad teórica provista por la revisión bibliográfica sobre conocimiento profesional, conocimiento del profesor de matemáticas, o conocimiento del infinito que poseen diferentes sujetos. Siguiendo el principio holístico, '*el total es mayor que sus partes*', nuestro objetivo es el total, el conocimiento que un profesor pudiera movilizar al explicar temas relacionados con el infinito, al cual accedemos a través de las diversas técnicas de recogida de información, estando el proceso influenciado y conducido por las herramientas propuestas desde el enfoque metodológico. Mostramos en la siguiente página (Figura 13), un esquema del desarrollo metodológico de la investigación, con el que pretendemos hacer consciente al lector del proceso seguido.

Vemos en dicha figura reflejado el proceso seguido en la investigación. En primer lugar, creemos necesario comentar que el proceso de revisión bibliográfica ha existido durante todo el desarrollo de la investigación, tanto para alimentar el conocimiento del investigador de posibles líneas de investigación a seguir que emergían de los datos, como para profundizar en las líneas ya determinadas. De igual manera, el investigador llevó a cabo un proceso de reflexión sobre su propio papel en la investigación, y sobre su proceso de evolución y aprendizaje a lo largo de la misma, haciéndose más consciente de sus limitaciones, fortalezas, dificultades y elementos en los que tenía más facilidad.

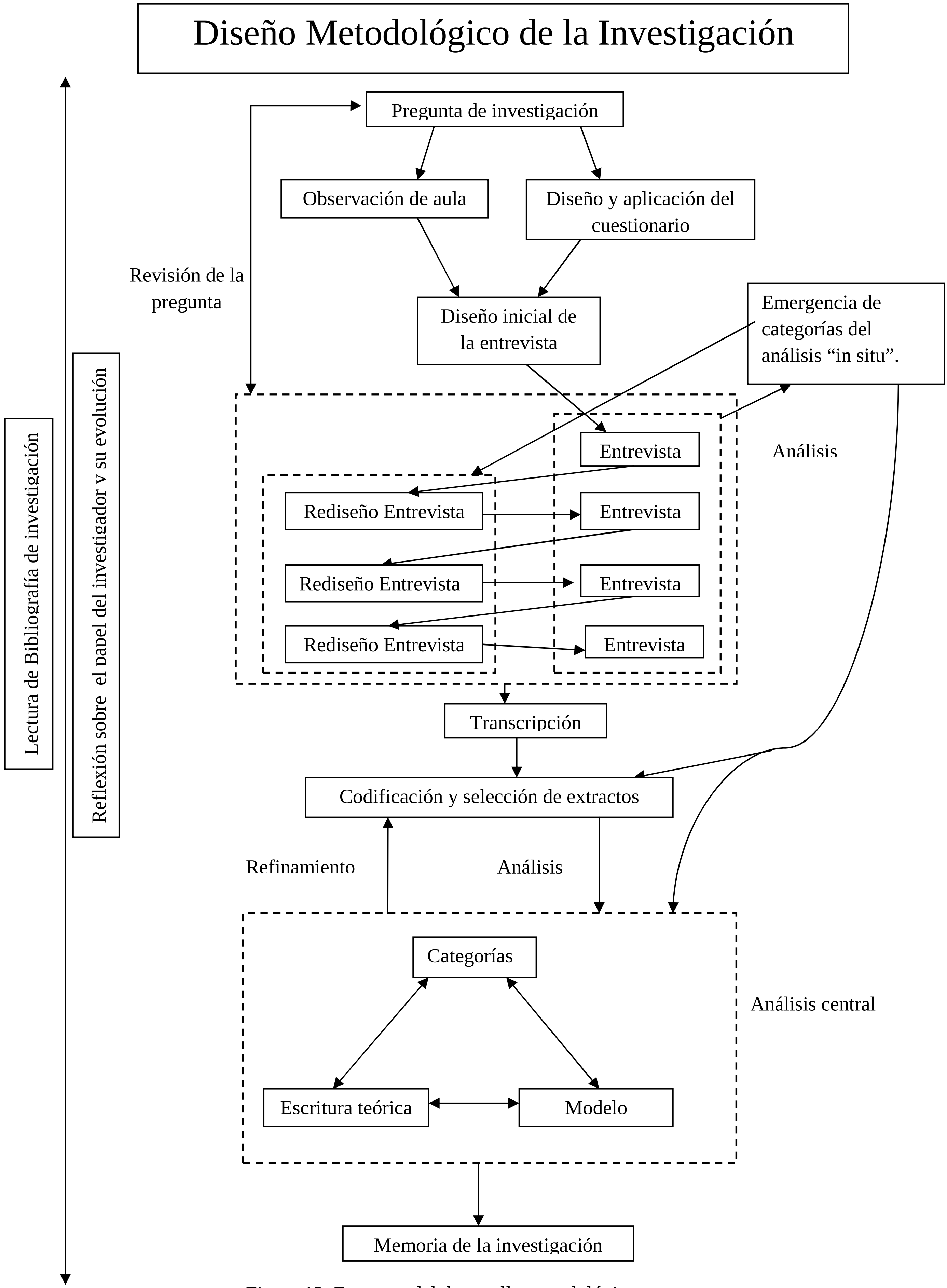


Figura 13. Esquema del desarrollo metodológico

Volviendo al desarrollo de la investigación, comenzamos con una pregunta que está fundamentada en la literatura de investigación y que, como anteriormente comentamos, surge tanto de las inquietudes y experiencias personales del investigador, como de la necesidad del área de un estudio que profundice en ella. Una vez hecha una primera aproximación a la pregunta, y habiendo seleccionado ya el profesor objeto del estudio de caso (consultar apartado 2.1), se pasó al diseño y aplicación de un cuestionario sobre concepciones sobre diferentes aspectos y sobre conocimiento relativo al infinito, así como a la observación no participante del aula. Durante y tras esta fase de obtención de datos, se diseñó una versión inicial de entrevista, implementándose la primera sesión prevista. Tras esta sesión, tuvo lugar un rediseño de la segunda sesión de entrevista, así como un análisis inicial “in situ”, a fin de comprender mejor al profesor de manera que las siguientes entrevistas fueran más provechosas en cuanto a la cantidad y calidad de los datos obtenidos. Así, el proceso 'entrevista →revisión de entrevista siguiente→ implementación de entrevista siguiente', se dio hasta que se abordaron todos los contenidos que se desearon, con una excelente predisposición por parte del profesor. De igual manera, durante todas estas entrevistas, el análisis que se hacía de forma coetánea introdujo elementos de discusión que a la postre resultaron muy interesantes, dando lugar a ideas emergentes sobre categorías. Tras la fase de entrevistas, se transcribieron las mismas, proceso que tomó cierto tiempo, y para el que se recurrió a ayuda externa, y una vez obtenidas las transcripciones se pasó a la codificación y selección de extractos interesantes de cara al análisis, a través del software MaxQda. Esta codificación y selección dio lugar a un proceso analítico en el que se observaba la emergencia de categorías, a la vez que se desarrollaba una escritura teórica que determinaba un modelo teórico, cuya conceptualización a la vez modificaba las categorías y por tanto la escritura. En todo este proceso, la codificación y los extractos seleccionados fueron refinándose. Finalmente, se pasó a la escritura y edición final de la memoria de investigación, gran parte de la cual se desarrolló en la escritura teórica comentada anteriormente.

## Diseño del estudio: Estudio de Caso

Para alcanzar los objetivos anteriormente planteados, de forma coherente con el enfoque metodológico elegido, y para alcanzar la cota de profundización deseada en esta investigación, se decidió optar por un diseño de estudio en forma de estudio de caso, esto es, "*el estudio de una singularidad en sus escenarios naturales*" (Bassey

1999, p. 47). Así, este estudio pretende comprender la singularidad del conocimiento movilizado por Aarón acerca del infinito. Sin embargo, calificar esta investigación como estudio de caso plantea la necesidad de caracterizar el tipo de estudio de caso que desarrollamos, atendiendo a diferentes categorizaciones, por lo que este apartado, en gran medida, lo dedicaremos a mostrar los rasgos distintivos del estudio de caso desarrollado. Creemos necesario recalcar que gran parte de la comprensión del investigador de los aspectos metodológicos asociables al estudio de caso, vienen dados por dos fuentes que son seminales a este estudio. En primer lugar el libro de Michael Bassey, *Case Study in Educational Research* (1999), que supone una profundización y concreción en los aspectos teóricos y prácticos asociados al tipo de estudio aquí desarrollado. En segundo lugar, la tesis doctoral de María Cinta Muñoz-Catalán (2009), que supone una concreción de la publicación de Bassey, para el caso de la investigación en conocimiento y desarrollo del profesor de matemáticas, de los aspectos más notables del diseño del estudio de caso.

Siguiendo la clasificación propuesta por Yin (1993, citada en Bassey 1999), este estudio tiene rasgos descriptivos, ya que en es nuestra intención *"presentar una descripción completa de un fenómeno"* (p. 29), si bien también tiene rasgos asociables a los estudios de caso exploratorios (Yin, 1993), ya que para la consecución de los objetivos, pretendemos 'descubrir teoría' a través de la observación de los fenómenos naturales en bruto (Bassey, 1999). Creemos necesario indicar que la naturaleza de la 'observación' del fenómeno no se refiere en este caso a un aspecto meramente visual, ya que al ser el fenómeno de interés el conocimiento del profesor, lo que 'observamos' son las producciones que genera dicho conocimiento, sea su naturaleza escrita, verbalizada, en acto, o la propia interacción con el investigador. Así, estos rasgos exploratorios, unidos al enfoque metodológico, desembocan en un estudio de *"búsqueda teórica"* (Bassey, 1999, p. 62), en el que se estudia un ejemplo seleccionado como parte de un conjunto mayor, y que puede dar información acerca de este[57]. Esto plantea la problemática de la posibilidad o no de generalizar los resultados del estudio, para lo cual usaremos las así llamadas 'generalizaciones difusas' (Muñoz-Catalán, 2009, p.175)[58], generalizaciones de estudios cualitativos, que *"son el tipo de predicción, emergente de cuestionamientos*

[57] En términos matemáticos, se elige un representante de una clase de equivalencia, pese a tener en cuenta de que el criterio de pertenencia a la clase no es la única propiedad de dicho representante, y por tanto la generalización que se pueda hacer no sea directa.
[58] Traducidas del término usado por Bassey (1999), fuzzy generalizations.

*empíricos, que afirman que algo puede pasar, pero sin mediciones ni probabilidades. Se califican como generalizaciones, aportando la idea de posibilidad, pero no de certeza.*" Bassey (1999, p. 46). Muñoz-Catalán (2009) sintetiza las siguientes características de este tipo de generalización:

*-Conllevan un elemento de incertidumbre: Informan de que algo ha ocurrido bajo determinadas situaciones y que puede que también ocurra en otras circunstancias. Expresan posibilidad pero no seguridad.*

*-Son respetuosas con las verdades a las que podemos acceder en las ciencias sociales, caracterizadas por la existencia de una gran diversidad de variables que influyen en el caso.*

*-Invitan al lector a que entre en el discurso y a que las experimente en su contexto. No tiene que aceptarlas y creerlas tal cual, sino que promueve la comprobación y la experimentación, así como la consideración del contexto, las condiciones y los significados implicados que la sustentan.*

*-Dan la opción a la investigación para que se convierta en acumulativa.*

*-La generalización difusa hay que considerarla junto al informe escrito que la apoya y le da crédito. El poseer el informe final permite descubrir cuáles eran las características propias del primer caso que no existen en la segunda investigación y que podrían haber influido en los resultados obtenidos.*

(Muñoz-Catalán, 2009, p.177)

Así, pretendemos con esta investigación, en términos de la posible generalización de los resultados, mostrar las características que el profesor estudiado posee como conocedor del infinito, indicando la posibilidad de que puedan ser compartidas por otros profesionales de la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria, pero en ningún momentos afirmaremos con total certidumbre dicha compartición. Esto es así debido a nuestra comprensión de que este caso, esta singularidad, está condicionada por la multitud de aspectos que influyen en el fenómeno objeto de estudio. Asimismo, somos conscientes de que la lectura de este documento, y la comprensión del mismo, es necesaria para comprender plenamente el origen de estas generalizaciones.

### *Sobre el caso*

El caso sobre el que se desarrolla esta investigación posee las características de lo que Stake (1995, 2000), denomina *caso instrumental*, ya que su selección fue con objeto de desarrollar *una comprensión más amplia del fenómeno estudiado, con posibilidad de generar una generalización* (Stake, 2000, p.436). Teniendo en cuenta, por tanto, que el caso no es de interés 'per se', la descripción que a continuación haremos de él pretende mostrar sus rasgos más relevantes de cara a la comprensión del lector de ciertos aspectos que consideramos relevantes.

El profesor escogido como caso responde al nombre ficticio de Aarón[59]. Parte del cuestionario que le entregamos[60], pretendía contextualizar su actividad previa, para así poder comprender mejor su trayectoria como profesor en elementos relevantes que pudieran concernir al conocimiento del infinito. En cuanto a su formación, es licenciado en matemáticas, y ha asistido a multitud de cursos que tienen principalmente dos temáticas, la coeducación, y las nuevas tecnologías, siendo este tema uno en el que manifestó estar especialmente interesado, hasta el punto de ser tutor en cursos de formación con pizarras digitales. Aarón tiene ocho años de experiencia docente, tres de los últimos en un centro de Huelva, con características singulares, en cuanto a que gran parte de los alumnos provienen de contextos muy desfavorecidos socioeconómicamente, de manera que el propio Aarón manifestó que en gran medida la prioridad era enseñar disciplina, no esperando por tanto unos resultados escolares buenos. Como indicador de esta situación, Aarón manifestó que, de su clase de unos 20 alumnos de segundo de Bachillerato, esperaba que 2 o 3 afrontaran la Prueba de Acceso a la Universidad 'con posibilidades de pasarla'. Además de esta clase de segundo de Bachillerato (de la modalidad científico-tecnológica), imparte en segundo de Secundaria. Fue a las clases de segundo de Bachillerato a las que se asistió, al principio del segundo trimestre, momento en el que impartía el segundo tema de funciones, correspondiente al cálculo de límites.

La selección de Aarón como caso fue principalmente por a criterios de disponibilidad, ya que, tras contactar con varios profesores, se nos recomendó como candidato, y tras una entrevista personal a la que asistieron investigador y asesor, en la que se le

[59] Por motivos éticos usamos este nombre, pese a que él afirmó en varias ocasiones que no tenía problema alguno en que se usara su nombre real.
[60] Se puede encontrar el cuestionario con sus respuestas en Anexos.

explicaron las características y dinámicas que se pretendían seguir, y ambas partes expusieron las opiniones y condiciones, siendo todas aceptadas por ambas partes.. Como elemento remarcable de esta entrevista, es necesario hacer notar que Aarón, que en el momento de la investigación desempeñaba la función de jefe de estudios del centro, indicó que tenía unas restricciones de disponibilidad para las entrevistas, lo que las condicionó en cuanto a su espaciado temporal. Asimismo, la utilidad fundamental de la entrevista personal, en lo que a los aspectos metodológicos, es que permitieron detectar a Aarón como un *caso de respuestas ricas* (Pidgeon & Henwood, 2005, p. 635), que comprendimos que podría proveernos de respuestas abundantes y que realmente aportaran información al estudio.

## Técnicas de obtención de datos

Inmersos en el diseño del estudio de caso anteriormente expuesto, y con la intención de acceder a las distintas dimensiones del objeto de estudio, el conocimiento del profesor objeto del estudio de caso, a través de diferentes instrumentos, se escogieron tres técnicas de obtención de datos, en función del potencial informativo que pudieran tener de cara a esta investigación.  Estas técnicas de obtención de datos fueron: un cuestionario de ideas previas, que nos permitiría tanto obtener información acerca de aspectos de contextualización como activar la reflexión; la observación no participante en varias sesiones de clase del profesor, que nos permitiría familiarizarnos con su estilo docente y con el tipo de aproximaciones que hacía a contextos donde estuviera implicado el infinito; y una entrevista en cuatro sesiones, la principal fuente de obtención de datos en esta investigación, donde se propusieron diferentes preguntas al profesor que permitieron acceder a su conocimiento del infinito. Esta aproximación multi-metodológica es considerada por algunos autores una clave para acceder al conocimiento profesional (Baxter & Lederman, 2000) en diferentes formas, además de asegurarnos la triangulación en su dimensión metodológica (Flick, 2007). Pasamos ahora a mostrar los criterios por los que cada una de las técnicas fueron seleccionadas, así como elementos relevantes de cara al desarrollo de los mismos en esta investigación. Todos ellos derivan de la casuística propia de esta investigación:

<u>Cuestionario</u>

Para la primera toma de contacto del profesor con la temática del estudio, nos decantamos por un cuestionario de tipo auto-administrado (De Leeuw, 2001), asumiendo el riesgo de la parcial o total falta de respuesta (De Heer, 1999) por la falta de respuesta. Así, mientras se concertaban las citas para las diversas entrevistas, y previamente al desarrollo de estas, se entregó al profesor el cuestionario, de manera que dispusiéramos de la información con anterioridad al desarrollo de las entrevistas. Frente a otros cuestionarios de corte cualitativo preparados para una compleción rápida, este fue diseñado para que el profesor, disponiendo de tiempo, dedicara cierto tiempo a la reflexión sobre los aspectos que se abordaron, ya que no solo está diseñado como herramienta de obtención de información, sino como herramienta para aumentar la calidad de la información obtenida posteriormente, en términos de 'lo reciente' de la reflexión del profesor sobre el tema de cara a posteriores entrevistas.

Observación no participante

Coincidimos con Adler y Adler (1994) en que la observación es *"la base fundamental del método de investigación*" (p.389) en las ciencias sociales. Por tanto, en este estudio, se consideró la observación del aula como técnica fundamental de recogida de información para esta investigación, de manera que adoptamos el papel de observadores de la actividad del profesor en el contexto en el que dicha actividad tiene lugar (Angrosino, Mays de Pérez, 2000). Esta posición de observador de las clases fue desde una perspectiva *no participante* (Flick 2007) en las mismas, teniendo en cuenta el investigador que:

> "*Un simple observador sigue el curso de los acontecimientos. El comportamiento y la interacción continúan como lo harían sin la presencia del investigador, ininterrumpidos por la intrusión"* (Adler & Adler, 1998, p. 81)

Este proceso de observación, planificado desde el principio de la investigación, se vio enormemente condicionado por el contexto del centro. Para realizar la observación, de acuerdo a la normativa del centro y por motivos éticos, se solicitó a los padres de los estudiantes permisos para grabar audiovisualmente las clases. Este permiso se denegó por parte de uno de los padres por considerar este que la investigación en curso podría desviar la atención del profesor. Ante este hecho, y para evitar problemas al profesor, el investigador asistió a las clases, grabándolas en audio[61]. Para complementar la toma de

[61] Toda esta serie de condicionantes llevaron al investigador a la determinación de, pese a usar los datos para diseñar una sesión completa de entrevistas, no usarlos explícitamente como datos. Asimismo, por temor a incurrir en una infracción de la Ley de Protección de Datos, vigente desde el 14 de Enero de

datos, durante el propio proceso de observación de clases se fueron tomando notas de campo que, combinadas con las grabaciones en audio, permitieron detectar los escenarios propicios (Flores, Escudero & Aguilar, 2013) y los indicios (Moriel Junior, Carrillo, 2014) sobre los que sería conveniente indagar para profundizar en el conocimiento del profesor. Posteriormente se abordarían tanto como preguntas contigentes en la entrevistas, como en la sesión dedicada explícitamente a los aspectos de la propia docencia del profesor. Adicionalmente, la presencia del entrevistador durante las clases del profesor contribuyó al desarrollo de la *sensibilidad teórica* (Glaser & Strauss, 1967), de este.

Entrevista

Se decidió, al dimensionar la profundidad del objeto de estudio, usar una secuencia de múltiples entrevistas en pos de conformar una base potente para crear una comprensión matizada del fenómeno social abordado (Charmaz 2001), siendo esta técnica no solo compatible con el enfoque metodológico, sino también potente dentro del mismo, ya que permite múltiples acercamientos de la misma naturaleza al mismo objeto que permitan establecer una triangulación local sobre los datos (e.g. haciendo preguntas diferentes cuyo resultado sea potencialmente el mismo). Así, el diseño usado aquí responde a la idea de entrevista semi-estructurada (Kvale 1996), con rasgos estructurados (Fontana y Frey, 2000), dado que aún poseyendo un listado de preguntas, propia de la entrevista estructurada, este responde a la estructura de listado de temas a abordar, añadiéndose posibles modificaciones en virtud del contenido de las respuestas del profesor objeto del estudio de caso, de forma flexible (Bryman, 2001). La filosofía subyacente a esta forma de abordar la entrevista se hace evidente a la luz de la siguiente afirmación:

*"Quiero entender el mundo desde tu punto de vista. Quiero conocer lo que tú conoces en la forma en que lo conoces. Quiero entender el sentido de tu experiencia, caminar con tus zapatos, sentir las cosas como tú lo haces, explicarlas como tú las explicas. ¿Serás mi profesor y me ayudarás a entender?"* (Spradley 1979, citado en Kvale, 1996. p. 125)

2000, no se transcribieron las observaciones de aula, siendo conscientes de la posibilidad de que este documento fuera público en un futuro.

Así, siguiendo la línea de esta evocadora cita, nuestro objetivo con la entrevista es aprender a *‘caminar con los zapatos´* de Aarón, para así entender mejor su proceso de comprensión del infinito como objeto de enseñanza y aprendizaje.

### *El investigador como actor de la investigación en su dimensión metodológica*

Esta investigación ha sido desarrollada siguiendo la metodología que en este capítulo se describirá, y usando los instrumentos que desarrollaremos en siguientes apartados, en gran medida, debido a las características y necesidades personales del investigador que la lleva a cabo, así como a la forma de comprender la realidad que posee. No creemos posible, ni necesario describir al autor en tal profundidad, en cuanto a sus características y necesidades, como para dar sentido a todo un capítulo, pero sí hacer consciente al lector de que muchas elecciones realizadas en esta investigación, así como la forma de discurrir la misma responden a dichos aspectos personales.

En particular, el papel del investigador, en las etapas de recogida de información de esta investigación, ligadas a las diferentes herramientas usadas, cuestionario, observación y entrevista, ha sido muy diferente. En cuanto al cuestionario, el entrevistador eligió un papel totalmente pasivo en el que su intervención se limitó a aclarar algunas cuestiones relativas al lenguaje usado en el propio cuestionario. En la observación, se tuvo un papel de observador no participante, aunque al final de cada clase, se intercambiaban impresiones de manera informal sobre el desarrollo de la misma, con el objetivo de acceder a las sensaciones que había tenido el profesor sobre el transcurso de la misma. Estas impresiones sirvieron al entrevistador para comprender mejor la forma de entender su docencia del profesor, dando al entrevistador una mayor sensibilidad personal y profesional sobre el profesor objeto del estudio de caso.

Finalmente, dado el papel activo del investigador durante la etapa correspondiente a la realización de la entrevista al profesor, sí que encontramos necesario analizar al investigador como entrevistador. En particular, focalizando en el papel que para el investigador tenía el profesor entrevistado, podemos afirmar que era un “constructor de significados” (Warren 2001) respecto del objeto de estudio, el conocimiento del infinito que él poseía. Siguiendo los criterios que Bryman (2001) expone, ampliando a Kvale (1996), para la cualificación de un entrevistador, pretendemos que el lector tome conciencia del proceso de entrevista, así como de la naturaleza de la actividad del entrevistador y de la consideración que este tenía del entrevistado. Para estos autores, un entrevistador ha de ser:

Conocedor del tema: El investigador posee conocimiento sobre el foco de la entrevista, al haberla diseñado, así como sobre el contenido de la misma, al haberse fundamentado ampliamente, aunque posee una experiencia limitada como entrevistador.

Estructurado: El investigador hizo consciente al profesor en todo momento del propósito de la entrevista, y al comienzo de cada parte de la misma, describía escuetamente el guión a seguir, además de responder a las cuestiones que el profesor planteaba sobre el desarrollo que se seguía. Aunque el investigador era consciente del guión de la entrevista, en ciertos momentos anunciaba que iba a hacer algo que no estaba previsto, pero que el propio propósito de la entrevista exigía, dando resultados interesantes, como se verá en el capítulo de análisis.

Claro: En este punto, aunque se pretendía usar preguntas cortas y sencillas, las necesidades de la entrevista hacían que algunas preguntas fueran ciertamente complejas. De igual manera, aunque Kvale (1996) recomienda evitar la jerga, en ciertos momentos se usaba para hacer entendible para el profesor ciertos ejemplos o situaciones ligadas al infinito que resultaban dificultosas.

Amable y relajado[62]: Al estar el interés en las declaraciones del profesor, se dejó terminar al entrevistado todas sus declaraciones, dándole tiempo para pensar, pausando la entrevista cuando era necesario un descanso, e intentando hacer que el profesor se sintiera cómodo en todo momento con el ambiente y el tono en el que discurría la entrevista, con un especial énfasis en que algunos ejemplos que llevaban al profesor a la consciencia de no saber algo, no se tomaran como un ataque que hicieran que el profesor tomara una actitud defensiva.

Sensible: Desde el principio de la entrevista, el entrevistador fue consciente de que mucha de la información que el profesor pudiera dar estaría condicionada por el estado físico y mental del profesor. Cada día antes de entrevistar, se le preguntaba si se sentía bien como para “charlar sobre el infinito”, siendo canceladas varias sesiones por no encontrarse en condiciones óptimas el entrevistado. De igual manera, el

[62] Referido tanto a aspectos diplomáticos como de organización temporal.

propio profesor, en la segunda sesión de entrevista, manifestó que “salía con dolor de cabeza de cada sesión”, pero que le gustaba el ejercicio que suponía ponerse a pensar sobre el infinito, de cara a las siguientes, de manera que, pese a ser muy interesantes, se intentó rebajar los momentos de conflicto a los que se llevaba al profesor, sin que ello conllevara una pérdida de información.

Abierto y flexible: Las sugerencias del profesor fueron tomadas en cuenta en todo momento, siendo flexible, en coherencia con la sensibilidad anteriormente descrita, a posibles cambios, tanto en horarios, como en dinámicas, así como en la ampliación o disminución del contenido de las sesiones.

Consciente del propósito: En todo momento el investigador era consciente de lo que pretendía conseguir tanto con cada pregunta como con la sesión, y con la entrevista completa. Así, ciertas preguntas en las que el profesor no daba mucha información sobre lo esperado, pero si sobre otros elementos, se reorientaron de cara a explotar lo que surgía, así como en otras se insistió en el tema sobre el que se pretendía obtener información. De igual manera, al ver algunas respuestas, se improvisaron preguntas que permitieron al profesor mostrar su conocimiento en mayor medida.

Crítico: El entrevistador en todo momento buscó que el profesor mostrara un conocimiento razonado, de manera que cuando una afirmación no se razonaba, se “desafiaba” al profesor a justificarla. De igual manera, en gran medida debido a la forma de entender la matemática del entrevistador, cuando el profesor establecía un ejemplo para argumentar un razonamiento, el entrevistador a su vez intentaba haber pensado un contraejemplo, en caso de ser necesario, para llevar al profesor a conflictos que le hicieran argumentar sus declaraciones.

Con memoria de lo anterior: Al final de cada sesión, el entrevistador repasaba lo sucedido durante la misma, en busca de episodios que parecieran relevantes para su posterior discusión, de manera que pudiera disponer de un “banco de ejemplos mental” en caso de necesitar dichos extractos para siguientes discusiones. De igual forma, en sesiones posteriores a la primera, se tendía a relacionar las respuestas del profesor con afirmaciones realizadas por el mismo en anteriores sesiones. Un ejemplo claro de esto es la permanente discusión “infinito potencial vs actual” a la que en las sesiones finales el profesor aludía como “la pelea de siempre”, refiriéndose a que el investigador le llevaba a puntos conflictivos que él matemáticamente podía aceptar pero que su intuición no le permitía tomar como naturales y aceptables.

Intérprete: El investigador, a lo largo de todas las sesiones de entrevista, fue consciente de que su papel, respecto a las preguntas planteadas en la entrevista era de aclarador de las mismas, así como de incitador a la dación por parte del profesor, de respuestas más profundas, siempre evitando dar respuestas a las mismas. Así, el papel del entrevistador es de "intérprete de las preguntas de la entrevista", al estar algunas de estas expresadas en un lenguaje, tras una reflexión realizada en el momento de la entrevista, demasiado técnico.

Equilibrado: Durante el transcurso de la entrevista, el protagonismo del entrevistador fue de conductor de la misma, de una manera relajada y flexible. Así, intentaba no ser demasiado activo, lo que llevaría al entrevistado a una posición más pasiva, ni demasiado pasivo, lo cual podría resultar en una desorientación del profesor entrevistado en cuanto a la línea en la que se pretendía la respuesta.

Éticamente sensible: Desde el primer contacto con el profesor entrevistado, se le hizo consciente de la importancia de su papel en la entrevista, asegurando así que se sintiera parte importante de la misma. De igual manera, se le aseguró la confidencialidad con la que se iba a tratar tanto los datos que aportara, como su identidad, a través del anonimato. Siendo consciente de la posibilidad de llegar a publicar futuros trabajos con sus datos, se le preguntó también sobre dicha posibilidad, ante lo cual afirmó que *no tenía problema alguno* con ello. De igual manera, esta característica se refleja también en la forma de tratar los datos de su observación de aula, como se desarrollará en el apartado relativo al tratamiento de datos.

### *Fundamentación del cuestionario y la entrevista*

La amplia revisión de literatura relativa a aquello que es cognoscible sobre el infinito, ligada a nuestro propio proceso de reflexión sobre qué podría o debería saber un profesor acerca del infinito, junto a la revisión bibliográfica y el proceso de reflexión sobre las diferentes naturalezas del conocimiento profesional y la propia curiosidad del conductor de la investigación dieron lugar a la elaboración de dos herramientas de obtención de información. En el primer caso, el cuestionario, tiene dos partes, la primera es una adaptación de la tesis de Carrillo (1998), que permitirá al investigador poseer una imagen del profesor como tal y como conocedor de la matemática y la segunda una primera toma de contacto con el profesor con cuestiones relativas al infinito. En el caso de la entrevista, esta fue la principal herramienta de obtención de datos, que, una vez diseñada, se fue rediseñando en el transcurso de las entrevistas de acuerdo al esquema teórico anteriormente diseñado.

### *Fundamentación del Cuestionario*

Para acceder a las concepciones del profesor acerca de la enseñanza de la matemática, y acerca de la propia matemática, usamos una adaptación de la entrevista propuesta por Carrillo (1998), pasándolo a formato de cuestionario, de forma que pudiéramos obtener una descripción general de las variables recogidas (concepciones sobre matemática y su enseñanza y aprendizaje), que permitieran al investigador comprender en profundidad al profesor objeto del estudio de caso de cara al posterior análisis de las entrevistas. Sobre la justificación de cada una de las preguntas, que figura en Carrillo (1998), se amplió con los posibles subdominios de su conocimiento profesional (según el modelo MTSK) que pudieran verse movilizadas y reflejadas al responder a las diferentes cuestiones. No se explicitará aquí la primera parte del cuestionario, pero puede encontrarse en el anexo correspondiente, dado que, pese a ser una herramienta de obtención de datos de la investigación, no surge como tal de la misma. Así, en la siguiente tabla se recoge una descripción muy sucinta del contenido de cada pregunta, así como la previsión de aparición de subdominios de MTSK, dada por la sensibilidad teórica generada por el investigador tras la revisión bibliográfica:

| **Pregunta** | **Descripción** | **Subdominio** |
|---|---|---|
| *Sobre la concepción de la enseñanza de la matemática* | | |
| 1 | Concepciones sobre la función del docente en el aula. | Concepciones sobre enseñanza y aprendizaje. |
| 2 | Estrategias esperadas en el profesor en cuanto a la responsabilización de los estudiantes. | Concepciones sobre enseñanza y aprendizaje. |
| 3 | Estrategias de presentación de contenido. | KMT. |
| 4 | Influencia de los estudiantes en la planificación y preparación de un tema. | KMT. |
| 5 | Concepciones sobre el papel del alumno en el aula. | Concepciones sobre enseñanza y aprendizaje |

| | | |
|---|---|---|
| 6 | Elementos a los que el profesor da más valor en cuanto a su aprendizaje. | Concepciones sobre las matemáticas. |
| 7 | El profesor como parte de un colectivo. | No hay relación. |
| 8 | Fundamentos teóricos del conocimiento didáctico del profesor | KoT, KMT, KFLM, KMLS. |
| 9 | Elementos en los que el profesor basa su planificación | KMT, KMLS. |
| *Sobre la concepción de la matemática* | | |
| 1 | Objetivo del estudio de las matemáticas | Concepciones sobre las matemáticas |
| 2 | Elementos en el desarrollo del aprendizaje matemático | KFLM. |
| 3 | Elementos que usa para definir las matemáticas | Concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas. |
| 4 | Aproximación óptima a las matemáticas | KFLM, KMLS |
| 5 | Conexión de la matemática con otras ciencias. Origen del interés por las matemáticas. | Concepciones sobre las matemáticas. |
| 6 | Aplicabilidad de las matemáticas. | Concepciones sobre las matemáticas. |
| 7 | Naturaleza de la forma de establecimiento de veracidad en matemáticas. | KPM. |
| 8 | Finalidad de las matemáticas. | Concepciones sobre las matemáticas. |
| 9 | Su propio proceso de aprendizaje de las matemáticas disciplinares. | Forma de construcción de su conocimiento matemático (MK) |
| 10 | Papel de la inventiva, originalidad y azar en los descubrimientos matemáticos | KFLM. Todos los subdominios del MK. |
| 11 | Conocimiento de las lecturas de investigación matemática. | Fuente de su conocimiento matemático (MK) |
| 12 | Forma de abordar nuevos conceptos matemáticos | Fuente de su conocimiento matemático (MK) |

Figura 14. Cuestionario y subdominios abordados

Pasamos ahora a la justificación de la segunda parte del cuestionario, relativa al conocimiento del profesor acerca del infinito. Esta sección del cuestionario sí será explicitada ya que surge de esta investigación. El objetivo general de esta parte del cuestionario fue establecer contacto directo con la percepción del profesor acerca de diferentes aspectos relacionados con el infinito como parte de su conocimiento, obligando al profesor no solo a hacer un esfuerzo a la hora de reflexionar y escribir sobre el concepto matemático, sino también a reflexionar en torno a aspectos didácticos relacionados con el infinito, como ahora veremos.

En primer lugar, para establecer una toma de contacto general con el tópico, se le planteó la siguiente pregunta:

- *¿Has leído algo de didáctica de las matemáticas o enseñanza/aprendizaje de las matemáticas relacionado con el infinito?*

Esta pregunta pretendía detectar sus ideas y conocimientos previos acerca de las investigaciones propias de esta disciplina para conocer no solo su grado de aproximación al tópico, sino también si estaba familiarizado con el vocabulario disciplinar (e.g. infinito actual, infinito potencial). Aunque se preveía una respuesta negativa, dada la especificidad del tópico, en caso afirmativo hubiéramos podido esperar conocimiento de investigaciones relativas al aprendizaje del infinito, o estándares de aprendizaje por edades o etapas, así como la posibilidad de conocer la terminología ‘infinito actual/potencial’ y algunas de las características ligadas a estos términos.

- *Enuncia cinco frases usando la palabra infinito que tengan sentido (no tienes por qué restringirte exclusivamente al ámbito matemático).*
- *Escribe varias palabras que tengan relación con el término infinito, y explica dicha relación.*

Con estas preguntas pretendimos que el profesor reflexionara sobre el uso del infinito en contextos próximos a situaciones reales o matemáticas. Este uso podría darnos información de la fenomenología del infinito de habitual uso por parte del profesor, así como indicios sobre las consideraciones epistemológicas y ontológicas que el profesor hacía sobre el infinito.

Posteriormente, para centrarnos en su conocimiento matemático acerca del infinito, así como en su grado de comprensión del mismo, se le planteó la siguiente cuestión, con sus correspondientes sub-apartados:

- *Comenta la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados y justifica tu afirmación:*
  - *Todas las sucesiones son finitas y su número de términos está bien determinado.*
  - *Todas las sucesiones acotadas son finitas, y su número de términos está bien determinado.*
  - *Todas las sucesiones son finitas pero a veces es imposible determinar el número de términos. El verdadero límite es su último término.*
  - *Todas las sucesiones acotadas son finitas pero a veces es imposible determinar el número de términos. El verdadero límite es su último término.*
  - *El límite de una sucesión es a lo que la sucesión se aproxima indefinidamente sin alcanzarlo nunca. la imposibilidad de alcanzarlo se debe a la imposibilidad de llegar al infinito en un tiempo finito.*
  - *El límite de una sucesión es a lo que la sucesión se aproxima indefinidamente alcanzándolo en el último término, que se alcanza en el infinito.*
  - *Una sucesión es un conjunto que puede ser acotado o no acotado. Los bordes pueden ser los límites de la sucesión o no serlo, y a veces no pueden ser determinados.*
  - *g es el límite de una sucesión A si la diferencia entre A y g es infinitamente pequeña.*

Esta pregunta del cuestionario, cuya respuesta y posterior discusión resultó de vital importancia para el desarrollo de la investigación, está basada en una reformulación de las categorías propuestas por Sierpinska (1987) para las concepciones sobre el límite y actitudes hacia el infinito. La función fundamental de esta pregunta era, a priori, aproximarnos al grado de comprensión de este profesor del infinito, observando el grado de justificación que podía dar a sus argumentos. El hecho de elegir las sucesiones y en particular los límites, más allá del hecho de ser el contexto matemático que figuraba en Sierpinska (1987), se debió a que este concepto nos permitía aproximarnos al infinito desde una perspectiva de cardinalidad, en cuanto al número de términos de la sucesión, y desde una perspectiva iterativa, en cuanto a la existencia o no de último término y límite. Estas preguntas, además, permitían una primera toma de contacto con consideraciones potencialistas o actualistas en base a la argumentación desarrollada por el profesor, que permitirían posteriormente reforzar las preguntas desarrolladas a lo largo de la entrevista. Cabe hacer hincapié, en que una vez revisadas las respuestas desarrolladas por el profesor a esta pregunta, se incluyó la discusión de las mismas en una sesión de entrevista.

La siguiente pregunta se introdujo para dar pie a consideraciones sobre el desarrollo del pensamiento de los estudiantes en torno al infinito, así como para hacer consciente al profesor objeto del estudio de caso del interés por elementos no exclusivamente matemáticos, en un sentido puramente disciplinar de la matemática. Así, la pregunta realizada fue:

- *¿Cómo crees que se desarrolla el pensamiento del estudiante en relación con el infinito? ¿Y con los procesos iterativos? Imagina un alumno que acaba de entrar en la E.S.O., indica que tipo de ideas y reflexiones podría ir teniendo sobre estos dos temas (infinito y procesos iterativos) a lo largo de su formación hasta segundo de bachillerato (inclusive).*

Esta pregunta nos permite introducir la posibilidad de explorar las consideraciones relativas al aprendizaje de nociones relacionadas con el infinito que el profesor pueda hacer. El hecho de centrarnos en los procesos iterativos está fundamentado en las consideraciones establecidas por Lakoff y Nuñez (2000), respecto de la *Metáfora Básica del Infinito,* ya que entendemos que situar al profesor en el proceso matemático en el que se basa el aprendizaje del infinito podría facilitar su reflexión. Asimismo, esta cuestión consideramos que permite una amplia variedad de posibles respuestas, desde consideraciones más ligadas a la propia construcción del conocimiento matemático, basadas por ejemplo en lo que el propio profesor experimentó como estudiante, hasta ejemplos de alumnos suyos y errores básicos. Aunque no era esperable en este profesor, dada su corta experiencia y su escaso conocimiento de literatura de investigación, en algunos casos podría haberse desarrollado una descomposición exhaustiva, que diera pie al desarrollo de una descomposición genética de los procesos iterativos, basada en la teoría APOS (Asiala et al., 1996; Arnon et al., 2014). Además de las posibles respuestas que el profesor pudiera brindar, esta pregunta tenía también la finalidad de activar ese tipo de reflexiones en el profesor, de manera que, pese a la posibilidad de que la respuesta al cuestionario no fuera rica en contenido, permitía que el profesor iniciara la reflexión en este sentido, de manera que en la posterior entrevista pudiera dar respuestas más completas y razonadas.

De igual manera ocurre con la siguiente cuestión:

- *En la siguiente hoja escribe y tiende conexiones a todo aquello que creas que tenga relación con el infinito. Además, especifica la relación que tiene de una forma detallada*.

La intención inicial era configurar un mapa conceptual de aquellos elementos que el profesor relacionara con el infinito de algún modo, que el propio profesor fuera capaz de razonar. Asimismo, esperábamos que ciertos conceptos aparecieran de forma fácilmente justificable, especialmente todos aquellos relacionados con el cálculo infinitesimal de alguna manera, como el propio límite, la derivada, la integral o la continuidad, siendo en esos casos de especial interés la conexión que el profesor pudiera establecer. De igual manera, la forma de argumentar el profesor la conexión, en virtud del lenguaje usado, y de la visión que reflejara, permitiría abordar el estudio de la forma de comprensión de este profesor de los procesos infinitos, así como contribuir a la conceptualización del infinito como parte del conocimiento profesional (que indujo las reflexiones presentes en Montes, Carrillo & Ribeiro, 2014). Al igual que en la cuestión anterior, un objetivo adicional fue activar la reflexión acerca de este tipo de cuestionamientos, de manera que al abordarlos en la posterior entrevista, el razonamiento que se mostrase no fuera plenamente improvisado.

Sobre el producto de esta pregunta, se planteó la siguiente cuestión:

- *Sobre este esquema que has elaborado, selecciona aquellos elementos que estén presentes en el currículum, indicando en qué manera se presentan en el mismo, y como se indica que deben aprenderse. ¿Conoces alguna fuente donde se indique la forma en que deben aprenderse los conceptos distinta de la que figura en el currículo?*

Esta pregunta permite que el profesor, en función de los elementos que introdujo en la cuestión anterior, justifique aquellos que existen en el currículo español, organizándolos en base al mismo. De igual manera, se abre la posibilidad de que incluya elementos externos al currículo que él use o conozca para fundamentar la presentación de forma ‘no estándar’. Esta pregunta habilita, una vez más, la activación de la reflexión del profesor en este campo, para posteriormente abordar elementos de interés que surgiesen de la respuesta, o en la entrevista.

### *Fundamentación del guión de entrevista*

En este apartado mostraremos el ejercicio de fundamentación que se desarrolló para diseñar el guión de entrevista que permitiera profundizar en el objeto de estudio, el conocimiento que el profesor objeto del estudio de caso tenía sobre el infinito, como elemento matemático presente en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así, se diseñaron preguntas siguiendo 6 líneas argumentales, soportadas por el marco de conocimiento profesional y sus subdominios. Estas preguntas se secuenciaron a lo largo de cuatro entrevistas, tras cada una de las cuales se revisó el guión de las siguientes entrevistas. Vamos a mostrar ahora la planificación final de cada sesión, con su correspondiente fundamentación. La planificación inicial podrá encontrarse en el anexo 1. Es necesario que el lector sea consciente de que, dada la propia naturaleza de la entrevista, como entrevista abierta semi-estructurada, surgieron preguntas en el propio momento basadas en la propia sensibilidad teórica del entrevistador, fundamentada en las reflexiones acerca del conocimiento profesional, conocimiento sobre distintos aspectos del infinito, y conocimiento matemático de los temas discutidos, fruto del aumento de comprensión del investigador (Charmaz, 2001) tanto del caso como del objeto de estudio. De igual manera, aunque mostramos un guión en un lenguaje formal, durante toda la entrevista tanto el lenguaje como la interacción entrevistado-entrevistador fue informal, de forma que el profesor entrevistado se sintiera cómodo y no se le arrastrara a una discusión formal en la que desde la primera toma de contacto se observó que se sentía plenamente cómodo.

#### Primera sesión de entrevista

Esta primera sesión fue planificada con anterioridad, teniendo en cuenta exclusivamente aspectos teóricos. Mostramos el guión finalmente seguido, queriendo hacer consciente al lector de que en el guión que aquí se muestra no figuran las preguntas que en el acto se descartaron por considerar el entrevistador que no procedían o cuyo abordaje no aportaría información.

- *¿Con qué relacionas el infinito en Secundaria y Bachillerato?*

Esta pregunta estaba destinada a explorar el conocimiento de la fenomenología (Freudenthal, 1983) de la que el profesor era consciente dentro de la matemática escolar. Sin embargo, ya se disponía del cuestionario anteriormente justificado respondido por el profesor, de manera que más allá de designar una colección de elementos que constituyesen la fenomenología, se pretendía comprender cómo el profesor comprendía el infinito en el contexto de la matemática escolar. Para esto, tanto los ejemplos que mostrara para establecer la relación con el infinito, como la propia forma de exponer el profesor los ejemplos con los que argumentara la relación con el infinito, podrían dar pie a discusiones interesantes.

- *¿Qué significa el símbolo ∀ (para todo)?*
  - *¿es lo mismo decir: " Para todo $\delta$>0 existe $\varepsilon$>0 tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ para todo x si $0 < |x - a| < \delta$ " que decir "Para todo $\varepsilon$ >0 existe $\delta$>0 tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ para todo x si $0 < |x - a| < \delta$"? ¿Cuál es la diferencia, si existe?*[63]

Esta pregunta, con dos partes diferenciadas, tenía como objetivo profundizar en un elemento matemático íntimamente relacionado con el infinito, como puede ser la idea que subyace al símbolo ∀ para todo, en cuanto a la posibilidad de elección de cualquier elemento de cierto conjunto. En lo que respecta al sub-apartado, extraído de Juter (2008), se pretendía ahondar en la relación entre $\varepsilon$ y $\delta$ en la definición de límite. Esta relación tiene como fundamento matemático la idea de variable, y queríamos no solo ahondar en esta idea de variable, sino también profundizar en la posibilidad de que el profesor diera significado a ambas expresiones, de manera que evidenciara su manejo de expresiones matemáticas formales en las que el infinito estuviera presente.

- *¿Conoces la caracterización del límite puntual de funciones a través de las sucesiones?*
  - *Explica, sin usar jerga matemática, cómo está presente el infinito en esta afirmación: $\lim_{x\to a} f(x) = y$ si para toda sucesión $a_n \to a$, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = y$).*

[63] La segunda expresión corresponde a la definición de Cauchy del límite (Spivak, 1981), mientras que la primera se refiere a funciones acotadas.

Esta expresión sigue en la línea de lo anterior, pretendiendo profundizar en la comprensión del profesor acerca de la presencia del infinito en un nuevo contexto, en el que el infinito aparece esta vez en varios sentidos, la convergencia puntual de funciones, la convergencia de sucesiones, y la posibilidad de elegir cualquier sucesión convergente a cierto punto. Encontramos aquí tres significados diferentes del infinito. En primer lugar, en la reflexión acerca del límite puntual, justificable en base a la definición anterior, siendo el significado que se evidencia en mayor medida el de variable. En segundo lugar, la noción de sucesión convergente lleva a la noción de punto de acumulación, elemento fundamental a la hora de dotar de significado gran cantidad de elementos matemáticos del análisis. Finalmente, la idea de "para todo" en la línea de lo descrito en el punto anterior.

- *¿Qué es el infinito para ti?*

Esta pregunta, inicialmente destinada a ocupar una posición inicial en la entrevista, se pospuso para permitir que el profesor pudiera usar ejemplos que surgieran de la propia discusión anteriormente desarrollada, así como para no hacer un abordaje demasiado abrupto al concepto central a esta investigación. La intención de la pregunta era explorar la imagen del concepto (Tall y Vinner, 1981) del profesor, así como abordar el infinito desde una perspectiva epistemológica, y ontológica, esta última a través de algunos elementos de declaraciones suyas en conversaciones informales, así como a las respuestas brindadas en el cuestionario.

- *¿Qué situaciones reales o medianamente reales pueden tener relación con el infinito?*

Hasta el momento, la línea de reflexión había estado basada en la matemática escolar o científica (Tossavainen & Pehkonen, 2013). Sin embargo, en esta pregunta se traslada a consideraciones situadas en contextos reales, que permitirían un acercamiento epistemológico al infinito basado en los diferentes significados puestos en juegos en dichas situaciones. Esta pregunta, en parte, se fundamenta en las respuestas del profesor al cuestionario, en las que las consideraciones no matemáticas que hacía sobre el infinito parecieron tener el potencial de brindar información relevante.

- *¿Qué relación ves entre el infinito y…*
    - *…la densidad?¿Podrías explicar la densidad con tus propias palabras?*

- *…el paralelismo? Cuando se dice que dos rectas paralelas se tocan en el infinito, ¿a qué crees que hace referencia?*
- *…el límite? Explica, en la expresión* $lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-2)}=0$, *la forma o formas en las que está presente el infinito.*
- *…la derivada?¿Qué significado tiene la derivada para ti? ¿Cómo está el infinito presente en este concepto?*
- *…la integral?¿Serías capaz de identificar la presencia del límite en la construcción de la integral por sumas?*

Esta pregunta se realiza en pos de la exploración del conocimiento del profesor objeto del estudio de caso sobre la relación entre el infinito y los diferentes elementos constituyentes de su fenomenología. En este apartado separamos entre dos grupos de elementos, unos ligados al límite, hallados a lo largo de la literatura de investigación, como son el propio límite, derivada e integral, y otros dos en los que el papel del infinito no deriva del uso del límite. Previmos que estos ejemplos sobre el límite pudieran aportar información sobre el grado de comprensión que tuviera Aarón sobre el infinito y su relación con el límite y sus aplicaciones (Cornu, 1991). Cabe destacar que la elección del ejemplo de límite con discontinuidad de tipo evitable es intencional, por la posibilidad de inducir la discusión ligada al posible comportamiento asintótico del límite en cierto punto.

Respecto al segundo grupo de ejemplos de discusión que se da al abordar densidad y paralelismo, se hizo en principio con intenciones exploratorias, ya que entendimos que son conceptos en los que una comprensión actual o potencial daría pie a diferentes formas de comprensión. En particular, en lo relativo al paralelismo y al sentido de la expresión popular “dos rectas se cortan en el infinito”, basada en la consideración proyectiva de dichas rectas, la discusión se trasladó en cierto punto a la interpretación derivada de la consideración de las proyecciones estereográficas del plano sobre la esfera, y el sentido del polo norte de la esfera.

Segunda sesión de entrevista

En esta segunda sesión de entrevistas, se recurrió a las respuestas de Aarón al cuestionario, en dos grandes bloques, el primero relativo al ‘mapa conceptual’ que se le pidió, y el segundo respecto de la discusión de las caracterizaciones del límite de sucesiones basadas en el trabajo de Sierpinska (1987).

Así, en la primera parte, se revisó el mapa conceptual, especialmente una selección de los elementos que en él figuraban y que suscitaban dudas acerca de qué conocimiento poseía el profesor que permitiera relacionar el infinito con dichos elementos. Los elementos seleccionados fueron:

*Números primos; la igualdad 0x=0; frecuencia y media; notación científica; simetrías; plano cartesiano; figuras de revolución; rectas en tabla; trigonometría; factorización de polinomios; continuidad e integral.*

La elección de estos elementos dentro de lo reflejado por el profesor en su ‘mapa conceptual’ se hizo atendiendo a los siguientes criterios:

- Incapacidad del investigador de detectar la conexión entre el concepto y el infinito, que podría informar de una comprensión parcialmente incorrecta de la noción discutida.
- Detección de cierta conexión entre el infinito y el concepto, pero dado el bajo grado de evidencia de la misma, pareció potencialmente fructífera la exploración de la justificación del profesor.
- Conexión evidente entre concepto e infinito, con posibilidad de reflejar varios significados diferentes. Estas situaciones permitirían al profesor también sentirse más cómodo en un conocimiento que presuponíamos que poseía.

En la segunda parte de esta sesión de entrevistas, se discutieron las respuestas de Aarón en el cuestionario a las preguntas relacionadas con el límite de sucesiones inspirada en el trabajo de Sierpinska (1987). Muchas de sus respuestas en el cuestionario tuvieron forma de contraejemplo, de manera que se pidió al profesor que justificara el sentido de dichos contraejemplos, así como introducir elementos de discusión ligados a la determinación del número de términos de una sucesión.

Tercera sesión de entrevista

La tercera sesión de entrevistas se contextualizó en una hipotética conversación suya con un compañero que había vivido varios episodios en los que sus alumnos le daban respuestas inesperadas y quería pedir su opinión al respecto. Sobre la base de diferentes ejemplos, que comentaremos a continuación, se hacían cuatro preguntas:

- *¿Alguna vez te ha ocurrido algo parecido? ¿Crees que podría ocurrir en tu clase?*
- *¿Es correcta la respuesta del alumno? ¿Por qué?*
- *¿Por qué crees que el estudiante responde eso? ¿Cómo crees que ha construido el alumno su razonamiento? ¿En qué crees que está pensando el alumno?*
- *¿Cómo podrías sacarlo de su conflicto?*

Estas cuatro preguntas están destinadas a profundizar en el conocimiento del profesor sobre el abordaje de los estudiantes a respuestas concretas, explorando aspectos cognitivos o de construcción del conocimiento. Asimismo, el énfasis que se hace sobre la corrección o no de la respuesta podría permitir tanto explorar el conocimiento matemático en sí, como la noción de validez dentro de un contexto escolar. De igual manera, la exploración del conocimiento acerca de las matemáticas nos permite no sólo saber 'cuánto' conoce, en términos de cantidad, el infinito, sino también 'cómo' lo conoce, a través de la exploración de modelos que habitualmente llevan a puntos conflictivos a aprendices matemáticos. En cuanto a las preguntas relativas a recordar algo parecido, la posibilidad de ocurrir en su aula, o la posible construcción de una estrategia de abordaje, pretendían que el profesor imaginara esa situación en su propia aula y que reflexionara acerca de su papel como gestor de esa situación. Pasamos ahora a describir y mostrar el fundamento de las preguntas, con énfasis en las investigaciones relativas al infinito, que nos permiten asegurar la coherencia y plausibilidad de estas respuestas.

*Situación 1*

Un profesor está explicando en una clase elementos relacionados con los números, y establece la correspondencia biunívoca entre los naturales y los pares.

Un alumno dice: ¿Cómo va a haber los mismos números pares que los naturales? ¡Pero si los pares están dentro de los naturales!

Esta situación está basada en el modelo intuitivo de inclusión (Fischbein, et al.,, 1979; Fischbein 1987; Tirosh Fischbein & Dor, 1985; Falk 1994), ligado al principio holístico 'el total es mayor que sus partes'. En la propia situación se indica que el profesor ha mostrado la igualdad cardinal entre ambos conjuntos, lo que causa una contradicción para el alumno, debido a la lógica conjuntista que subyace al razonamiento[64], válida en conjuntos finitos.

| |
|---|
| *Situación 2* |
| Más tarde, en la misma clase, el profesor demuestra que R no es numerable, a lo que un alumno pregunta: |
| Maestro, aunque no sea numerable, ¿N y R siguen teniendo el mismo número de elementos, no? |
| Profesor: ¿Por qué lo preguntas? |
| Alumno: Como ambos tienen infinitos elementos…. |

En esta situación se desarrolló atendiendo al modelo infinito=infinito (Fischbein, 1987; Fischbein et al. 1979) o de aplanamiento (Falk, 1994; D'Amore & Arrigo 2006), en el que el que el sujeto obvia las características cardinales de los conjuntos, y concibe todas los entes infinitos como iguales, atribuyéndoles el carácter indefinido que genera la equivalencia entre todos ellos. Así, este ejemplo muestra a un alumno obviando la no numerabilidad de los números reales, afirmando que como ambos son conjuntos infinitos, han de tener el mismo número de elementos.

| |
|---|
| *Situación 3* |
| Profesor: Tres líneas rectas no siempre se cortan en un mismo punto, ¿verdad? |
| Alumno: Depende del tamaño del punto, ¿no? |

Este extracto refleja el resultado coloquialmente conocido en círculos matemáticos como 'El teorema del punto gordo', que no es sino la atribución de dimensiones o una naturaleza material a un punto geométrico (Belmonte & Sierra, 2010), contemplado por Fischbein (1987) o D'Amore et al. (2006), denominándolo modelo de collar de puntos. Este tipo de razonamiento genera problemas, dado que conceptualiza el punto como un círculo, lo que lleva a problemas de comparación entre elementos geométricos[65].

[64] Habitualmente se tiende a considerar que el cardinal de la unión disjunta es la suma de los cardinales, hecho que en conjuntos infinitos, aún siendo correcta, no aporta información.
[65] Por ejemplo, un estudiante que desarrollara su pensamiento según este modelo, consideraría un punto y un círculo como topológicamente iguales.

| |
|---|
| *Situación 4*<br>Un profesor propone el siguiente ejercicio en clase:<br>*Ordenad por tamaño los siguientes conjuntos:*<br>*a) Número de estrellas*<br>*b) Número de granos de arena en la Tierra*<br>*c) Números naturales {1, 2, 3, 4, 5…}*<br>*d) Número de puntos que caben en un cuadrado de 10 cm de lado*<br>*e) Número de células que forman el cuerpo humano*<br>*Belmonte, Sierra (2011)*<br>Uno de los alumnos responde: Este ejercicio es imposible, en ningún caso soy capaz de contar cuantos hay, así que todos son infinitos, y no puedo compararlos. |
| *Situación 5*<br>Un profesor propone el siguiente ejercicio en clase:<br>*Imaginad un número. Divididlo entre dos. El resultado, divididlo de nuevo entre dos, y así sucesivamente. ¿Qué resultado dará al final?*<br>*Un alumno responde:*<br>*No se sabe, porque no sabemos cuándo parar.*<br>*Belmonte, Sierra (2011)* |

Estos dos ejemplos, extraído de Belmonte y Sierra (2010), se basan en lo que estos autores denominaron modelo de indefinición. Este modelo se asocia a la incapacidad de abordar la situación, ya sea de conteo o comparación de conjuntos, con argumentos del tipo '*no se pueden contar porque son infinitos'*, y en casos muy extremos, al hecho de hacer consideraciones de tipo apeironiano[66] sobre el infinito. En estos dos casos mostramos dos contextos diferentes, el primero, formados por elementos sujetos a un conteo, que por su propia naturaleza no pueden ser infinitos (granos de arena en la Tierra, células en el cuerpo humano), o que han de serlo (Números naturales, puntos en un cuadrado), o que están sujetos a discusión (Cantidad de estrellas).

| |
|---|
| *Situación 6*<br>Un profesor, en la clase de introducción a las series, plantea la siguiente cuestión:<br>Si estoy en un punto, imaginaos que el origen, y doy un paso de medio metro, luego |

[66] El infinito ligado a lo que es desconocido o imposible de conocer.

uno de un cuarto de metro, otro de un octavo, y así sucesivamente, ¿Dónde acabaré?
Un alumno responde: Pues a ver, profesor, si vas dando muchos pasos, muchos pasos, por muy pequeños que sean, te pasarás del 1 metro, te pasarás de los 2 metros, y así con cualquier medida, así que te irás al infinito.

Esta situación responde a un tópico sobre el que hemos encontrado poca literatura de investigación en materia didáctica, como es la suma de series. Este modelo, detectado por Belmonte (2009), y sobre el que se profundizó en Belmonte y Sierra (2010), está ligado a la sistemática designación de 'infinito' como el resultado de la suma de cualquier cantidad infinita de objetos matemáticos. Este patrón de pensamiento está ligado a la propiedad arquimediana que afirma que la suma de infinitas cantidades finitas da un resultado infinito, y que requiere la consideración de elementos 'no arquimedianos' para su contraejemplificación, que estarán fuera del contexto de los números enteros, de cuyas propiedades se extiende esta falsa generalización.

*Situación 7*
Un alumno, después de una clase sobre teoría de conjuntos, pregunta:
Profesor, yo tengo una duda, a ver, como [0,1) está acotado y [0,$\infty$) no lo está, ¿entonces en el segundo conjunto hay más elementos que en el primero, no?

Este ejemplo se generó como un posible ejemplo del modelo derivado de asociar acotado a finito y no acotado a infinito (Belmonte y Sierra, 2010). Así, la comparación entre el intervalo unitario y el de los números positivos, podría generar también la posibilidad de explorar las representaciones de la demostración de la igualdad de elementos. Igualmente, existía la posibilidad de centrar la discusión en qué hacer si se pretende comparar el intervalo [0,1] con los reales positivos, en pos de explorar si el profesor considera el infinito como un elemento sujeto a corporeización[67] (Lakoff y Nuñez, 2000; Tall, 2004).

Para finalizar la entrevista, se introdujo la discusión del problema de las bolas de tenis (Dubinsky et al. 2005a, 2005b; Falk 1994; Ely, 2010), también conocido como la paradoja Littlewood-Ross[68]:

[67] Traducción libre del inglés 'embodiment'.
[68] Debido a la primera publicación en la que surge: Littlewood, J.E. (1953). *A mathematician's miscellany*. Londres: Methuen.

*Se tiene una cantidad infinitas de pelotas de tenis, tantas como números naturales, numeradas según los propios números naturales, y tres sacos, A, B y C, estando todas las pelotas en el saco A, y los otros dos vacíos. A las 12 menos 1 minuto, se sacan las 2 bolas con más baja numeración de A y se pasan a B. A las 12 menos medio minuto se pasa la bola con el número más bajo de B a C. En la siguiente fracción (12 menos un cuarto), se pasan las 2 bolas con números más bajos de A a B, y en la siguiente fracción, la bola con número más bajo en B a C, repitiendo el proceso a las 12 menos la fracción correspondiente. ¿Cuántas bolas hay en cada saco a las 12? ¿Cuáles son sus etiquetas?* (Allis & Koetsier, 1991, p. 187[69]).

El objetivo con este problema era observar la solución del profesor *in situ*, que confirmara elementos del análisis que el investigador había detectado respecto de la forma de abordar el profesor el infinito en situaciones de tipo problemático.

Cuarta sesión de entrevista

Esta última sesión está basada en la discusión de afirmaciones del profesor durante sus clases que se usaron para aclarar ciertas ideas de este en la acción. Todos los extractos fueron señalados durante la visualización y se eligieron para su discusión para terminar de asegurar la saturación teórica tanto acerca del conocimiento matemático, como de elementos del conocimiento didáctico del contenido. Además de esto, el investigador se fue haciendo consciente durante las tres primeras sesiones de entrevista de la necesidad del entrevistado por discutir situaciones familiares, ya que muchas de las que se abordaron provenían de la investigación, y el profesor objeto del estudio de caso parecía sentirse externo a dichas situaciones, tanto matemáticas como didácticas, por lo que se decidió modificar la cuarta sesión para abarcar situaciones interesantes de su propia docencia.

Cabe destacar que el lenguaje en el que se redactó el propio guión carece de los formalismos de los guiones anteriores, ya que en este punto de la investigación, investigador e investigado discutían en un tono muy distendido, y ambos se sentían cómodos con dicho tono, de manera que se decidió no hacer un guión artificialmente formal. Pasamos a continuación a mostrar el instrumento dividido por episodios, con sus respectivas preguntas. Para su lectura más cómoda, queremos indicar que el

[69] Este problema tiene diferentes variaciones, en función del elemento de complejidad sobre el que se desee hacer hincapié. Esta versión fue elegida por ser una de las más sencillas.

subrayado dentro de algunos episodios servía de recordatorio al entrevistador de en qué punto del extracto se deseaba hacer énfasis, y que las preguntas estaban en negrita a efectos de separación por unidades de discusión

| |
|---|
| P: *Si os fijáis en esta gráfica, en un entorno del punto, en la <u>cercanía</u> del punto, yo puedo elegir un intervalo, tal que cada punto del intervalo, su imagen siempre es más pequeña que la imagen de* $x_0$.<br><br>**¿Los alumnos aceptan naturalmente eso de la cercanía? ¿Por qué usas esa expresión? ¿Qué inconvenientes crees que tiene? ¿Qué errores crees que pueden inducirse en los alumnos?** |
| P: *Pues lo que tendré que hacer primero es derivar, derivar para ver cuando vale la pendiente de la recta igual a cero. Si derivamos….6x-6. <u>Esa expresión me calcula todas las pendientes de todas las rectas tangentes</u>.*<br><br>**¿Esa forma de referirse a todas las rectas tangentes, la entienden los alumnos? ¿Por qué lo dejas ahí y no hablas de todos los puntos? ¿Qué ventajas o diferencias tiene presentar así la derivada y no por puntos?** |
| *P: Con estos resultados, en x=0 existe un punto de inflexión*<br>*A: ¿Ahora el seis no?*<br>*P: Ahora el seis. ¿Qué número cogemos?*<br>*A: El 5.*<br>*P: El 5.9 y el 6.1. Habría que coger el 5 coma 99 99 99, que estará muchísimo más cerca, que imaginaos que pasa algo raro en el 5 y el signo nos lo destroza, nos lo destroza.*<br>**¿Por qué induces el proceso de aproximación de esa manera? ¿5.99999…=6?** |
| *P: Problema de optimización: búsqueda de una función para minimizar o maximizar. Esa función va a depender siempre de uno de los datos que me dan, una R, una h, una altura, y […], sustituyo, derivo, pruebo a ver si es verdad que tiene sentido, cotejo los valores si los hay, y fuera.*<br>*P: Quiere decir, entre todos los triángulos isósceles que podamos formar de perímetro treinta, cuál es el de área máxima.*<br><br>**¿Por qué usas esa definición de optimización con los alumnos? ¿Dónde ves el infinito en la optimización?** |

| |
|---|
| *P: Os he dicho que L´Hôpital se estudia en la cercanía de un punto, en la cercanía de a, pero qué pasa si en vez de en la cercanía de a, lo estudio en la lejanía de f, muy lejos, en el infinito. ¿qué he dicho antes de comparar? Estamos comparando f y g, y en la cercanía de a me daba el límite, y me daba L, eso significaba que se estabilizaban los valores de f(a) y g(a)*<br>**¿Porqué cercanía de a y lejanía de f? ¿Qué significa esa idea de comparación? ¿Y la de estabilización? ¿Qué definición de derivada das a los alumnos?** |
| *P: Segundo tipo, decimales periódicos, estos eran los del arquito, no? ¿Eso si nos suena, no? Pues esos son unos tipos de decimales que tienen infinitos decimales, lo que pasa es que esos infinitos decimales se pueden controlar, <u>no se sabe cuántos hay, pero si cuáles hay</u>.*<br><br>**¿Siempre los defines así? ¿Qué significa que no se sabe cuántos hay?** |
| *P: ¿Qué era una asíntota?*<br>*A: Una recta, que se acerca a un punto pero no llega a tocarlo*<br>*P: (Niega)*<br>*A: Una recta imaginaria*<br>*[…Sigue la conversación]*<br>*P: En dos palabras, Ramas infinitas.*<br><br>**¿De dónde crees que viene la respuesta del alumno? ¿En qué crees que se basa para responder eso? ¿Qué validez tiene esa respuesta? ¿Qué significado le das a lo de las "Ramas infinitas"?** |
| *P: Aquí, la altura de la recta asintótica es mayor que la altura de la f. Eso significa que en el infinito están muy cerca.*<br>*(Segundo fragmento: otro día)*<br>*P: En el infinito, la recta puede llegar a confundirse con la función.*<br><br>**¿A qué te refieres con eso de "en el infinito"?** |
| *P: El de esta recta es un infinito de grado 1.*<br>**¿Cómo interpretan eso de los grados del infinito los alumnos?** |
| **Cuando trabajas la generalización de la búsqueda de asíntotas en fracciones algebraicas, hablas del residuo (al hacer la división de los polinomios). ¿Qué es ese residuo? ¿Qué interpretan tus estudiantes que es?** |

Vemos en estos extractos una presencia fundamental de elementos que constituyen la fenomenología del infinito. Asimismo, se observa la búsqueda de la saturación en la amplia diversidad de elementos de discusión, desde elementos puramente matemáticos, a elementos derivados de consideraciones sobre el posible pensamiento de sus estudiantes. Los contextos matemáticos están condicionados por las sesiones de aula observadas, de ahí la continua alusión a contextos relacionados con la representación de funciones, que llevan a consideraciones respecto de la derivada.

## Técnicas de tratamiento, organización, y análisis de la información

Una vez mostrado el tipo de estudio y profundizado en la naturaleza del proceso de obtención de información, vamos a profundizar en las técnicas de tratamiento de la información, centrándonos en la información que ha requerido de dicho proceso (la entrevista), para posteriormente abordar el proceso organizativo y analítico seguido. Uniremos estos dos últimos dado lo coetáneo de ambos procesos, ya que, dentro del enfoque metodológico adoptado, la organización y análisis de datos siguen un proceso iterativo, como anteriormente se comentó.

### *Tratamiento*

El total de datos obtenidos procede de: la observación de las 12 clases, el cuestionario respondido[70], y las 4 entrevistas personales, que fueron grabadas en audio. Sin embargo, no se usó la información en bruto, sino que se refinó en forma, de manera que fuera manejable de cara al análisis posterior.

Como anteriormente comentamos respecto de las grabaciones de las clases, aunque se dispone de ellas y se transcribieron algunos episodios, no se hizo una transcripción completa para su posterior uso, dada la problemática existente. Así, existen autores que afirman que ha de transcribirse exclusivamente la información necesaria (Strauss, 1987, citado en Flick 2007) para dar respuesta a la pregunta de investigación, lo cual no supone una merma en el rigor ni la exhaustividad de la investigación desarrollada. Sin embargo, de cara a su posterior uso, se tomaron notas de campo (Flick, 2007) que permitieron la localización y desarrollo de episodios concretos que posteriormente se discutieron. En cuanto al tratamiento de las sesiones de entrevistas, se transcribieron sistemáticamente, de forma que no se perdiera información, para así trasladar la realidad

[70] Parcialmente respondido, los elementos no respondidos que se consideraron interesantes, se abordaron en la entrevista.

al texto, haciendo del texto una nueva realidad (Flick 2007). Posteriormente, en la transcripción, se mostró el texto con el número de línea asociado a su inicio para que, a la hora de seleccionar las unidades de información, el tránsito de estas a las transcripciones fuera inmediato y permitieran volver al texto en caso de necesitar volver a consultar el contexto en el que estas unidades tenían lugar.

### *Organización y análisis de datos*

Organización y análisis deben ser considerados como un mismo apartado y un mismo momento de la investigación, ya que, de forma compatible con la Grounded Theory, se organizaron los datos en categorías, producto del análisis de los mismos, que a su vez se revisaron constantemente hasta alcanzar un punto de saturación en el que no se podía aportar nada a las mismas, ya completamente definidas y descritas. Todo este proceso responde a las características del denominado *análisis de contenido* (Bardin, 1985).

Pasamos ahora a desarrollar el proceso seguido para la organización de los datos, especialmente los obtenidos en las entrevistas. Así, antes de ahondar en las entrevistas, tanto la observación de aula, como las notas de campo tomadas, así como el cuestionario, fueron herramientas no solo de sensibilización teórica del investigador, sino que contribuyeron al desarrollo del instrumento de recogida de datos ‘principal’ de la investigación, las sesiones de entrevista. Por tanto, la organización de datos que se hizo sobre ambos fue la extracción de episodios interesantes, detectados ‘in situ’ por el investigador-observador en la observación de aula, o en posteriores revisiones del material grabado en audio, así como de respuestas del cuestionario que resultaban sugerentes de cara a su posterior discusión.

En cuanto a las entrevistas, se hizo una primera aproximación a través del software de análisis cualitativo MaxQda, en la que, de las transcripciones completas se extrajeron unidades de significado, a los que se asignó una codificación *simple y corta* (Muñoz-Catalán, 2009) derivada de la *condensación de significados* (Kvale, 1996) asociados a diferentes episodios. Así, estas categorías se codificaron y recodificaron en varias revisiones que se hicieron a los datos, siguiendo así el proceso de *codificación abierta* (Holton, 2007), a través del *método de comparación constante*.[71]

[71] Para mayor información sobre el proceso de codificación, consultad el apartado ‘Síntesis del proceso’, de este mismo capítulo

Todo el conjunto de categorías permitió conseguir una categorización emergente del conocimiento del profesor objeto del estudio de caso, que posteriormente se compararía con el modelo analítico MTSK, por ser este la principal fuente teórica de la sensibilidad del autor respecto del conocimiento profesional, y con las investigaciones sobre el conocimiento del infinito, al ser este el otro foco teórico, para determinar las aportaciones de este estudio. Así pues, el enfoque metodológico adoptado no crea explícitamente una 'teoría nueva', sino que aporta un refinamiento a una teoría en construcción, poseyendo las características tanto teóricas como de novedad que forman parte del enfoque de la Grounded Theory.

Síntesis del proceso:

Para aportar luz al lector sobre la integración de las ideas de la Grounded Theory contempladas en el desarrollo y secuenciación metodológica de este estudio, haremos un breve análisis de cómo se usaron a lo largo de la investigación las herramientas propuestas desde este enfoque teórico:

Muestreo teórico: Encontramos aquí el proceso de selección del caso, así como las sucesivas aproximaciones a la realidad realizadas, en la entrevista previa con el profesor objeto del estudio de caso para determinar si reunía las condiciones que se creyeron necesarias, el diseño e implementación del cuestionario, y el ciclo de diseño, implementación y rediseño de la entrevista. Cabe destacar el reflejo de la naturaleza procesual y auto-refinada del propio muestreo en este estudio, en el que se han modificado los instrumentos según se obtenían datos.

Codificación: El proceso de codificación tiene su reflejo en este estudio en dos etapas diferentes, la primera en un primer análisis a través del software de análisis cualitativo MaxQda[72], codificación que, a través del agrupamiento por unidades de significado, reflejó diferentes categorías. Durante y tras el posterior análisis, la codificación se fue refinando, obteniendo las versiones finales de las categorías. Asimismo, en la línea de lo propuesto por Strauss y Corbin (1990), y posteriormente por Bryman (2001), se pretendió desarrollar tres tipos de codificación:

- Codificación abierta: Primer proceso de exploración de los datos, comparación, conceptualización y categorización de los datos (Strauss & Corbin, 1990) que

[72] Sobre el que se desarrollará en próximos apartados.

posteriormente permitiría la agrupación de los datos en categorías. Este proceso tuvo lugar tanto durante el proceso de obtención de datos, con el ‘análisis in situ’, como durante el análisis central. En esta investigación, una vez obtenidos los datos de cada entrevista, se hizo una primera codificación, atendiendo a elementos de la discusión que reflejaran reflexiones sobre elementos similares. Así, generamos una primera colección de categorías, que posteriormente se refinarían

- <u>Codificación Axial o Transversal</u>: Análisis de los datos, obviando las categorías ya propuestas, para encontrar relaciones entre categorías. Esta codificación se realizó para abrir la posibilidad de que varias de las codificaciones generadas durante la codificación abierta pudieran integrarse en una sola. Durante las conclusiones estableceremos algunas generalizaciones posibles acerca de relaciones entre las categorías propuestas, por el mero hecho de mostrar su inmersión en varios de los subdominios del modelo de conocimiento profesional usado
- <u>Codificación Selectiva</u>: Esta es la parte central del proceso codificación-análisis del enfoque metodológico de la Grounded Theory, referida a la selección de las categorías nucleares, relacionándolas con otras categorías para comprobar la pertinencia de la existencia de varias categorías (Strauus & Corbin, 1990). En esta investigación, este proceso ha tenido lugar tras la organización de los datos en una primera selección de categorías, momento en el cual se refinó dicha selección y modificó en función de los sucesivos análisis, que dieron lugar a nuevas codificaciones.

Saturación teórica: Este proceso engloba dos fases de la investigación, la codificación (llegando un punto en el que no se contempla la posibilidad de posteriores refinamientos) y la obtención de datos (implicando la suficiencia de los datos recolectados para dar consistencia a las categorías), siguiendo a Bryman (2001). Ciertos autores asignan a una cantidad de horas (entre 20 y 30) de recolección de datos la cuasi-certeza de llegar a un punto de saturación de datos (Noerager-Stern, 2007). En este estudio se observaron 12 periodos lectivos de 60 minutos y desarrollaron 4 entrevistas de hora y media, sumando un total de 18 horas, en las que tanto la *sensibilidad teórica* (Holton, 2007) del investigador[73], como la opinión de terceros investigadores[74] confirmó el momento de saturación teórica.

Método de comparación constante: Este proceso, en el que desde nuestra perspectiva radica gran parte de la esencia del enfoque de la Grounded Theory, supone una permanente conexión entre las conceptualizaciones emergentes y los datos, de manera que la relación entre los conceptos emergentes y las categorías que engloban a los datos no se pierda. Esta consciencia de la necesidad de constante comparación existió a lo largo de todo el análisis y la recolección de los datos, dando su fruto a la vez en forma de categorías refinadas, mostradas a través de extractos seleccionados de forma que resultaran lo más potentes posible. El uso de este método está en la línea de la triangulación teórica (Flick, 2007), no tanto por la aproximación a los datos con diferentes perspectivas previas en mente, sino por considerar todas las perspectivas posibles que emergen de los propios datos

[73] Entendida como la habilidad de generar conceptos a partir de los datos y relacionarlos con los modelos existentes en la teoría (Glaser 1978, 1992).
[74] Que asegura la triangulación por investigadores, en la línea de lo propuesto por Flick (2007).

# Capítulo 3: Análisis de Datos

# Introducción

Este capítulo está destinado a mostrar el esfuerzo analítico realizado, para profundizar en la comprensión del objeto de estudio, el conocimiento del infinito que posee un profesor como docente. Así, mostraremos un análisis en el que se ha realizado un esfuerzo significativo para que el marco teórico usado no fuera un elemento que constriñera y guiara la investigación en un sentido concreto, sino que permitiera una visión más amplia del objeto de estudio, dotando al investigador de *sensibilidad teórica*, permitiendo la emergencia de diferentes categorías, de acuerdo al enfoque metodológico usado.

Del análisis de los datos recogidos a través de los tres instrumentos, cuestionario, observación de aula, y especialmente, las entrevistas, en las que se discutieron tanto algunas respuestas del cuestionario, como extractos de la actividad en el aula del profesor, surgen multitud de categorías, o núcleos temáticos en los que podemos agrupar los datos. Así, pasaremos ahora a describir cada una de las categorías que surgen del análisis, exponiendo ejemplos sobre el contenido de estas, para así dotarlas de significado, contenido, y utilidad de cara al posterior análisis comparativo con el modelo MTSK. Es necesario recalcar que lo que aquí se mostrará es la descripción de las categorías que emergen, no el proceso analítico seguido, sino el propio contenido de las categorías. Estas categorías se mostrarán en dos bloques, aquellas relacionadas con el conocimiento pedagógico del contenido (Shulman 1986, 1987) concretado para el caso del infinito, y las relacionadas con el infinito como constructo matemático. Esta separación se hace a efectos organizativos, e inducida por el análisis que posteriormente se hará de las categorías, que podrá contemplarse en el capítulo siguiente. Creemos necesario también un primer punto de contextualización del profesor a través del análisis de sus respuestas al cuestionario de concepciones sobre enseñanza y aprendizaje, que ayudarán al lector a comprender al profesor como docente, para posteriormente profundizar a través de las categorías emergentes en el profesor como conocedor del infinito. Algunos aspectos actitudinales y ligados a las creencias del profesor acerca del infinito se desarrollarán de forma integrada en las categorías de conocimiento.

Para una comprensión completa de la codificación usada, el sistema seguido es el siguiente: Cuando la referencia provenga del cuestionario, usaremos la notación

C.n.m.a, donde la C indica que el extracto proviene del cuestionario, la n será 1 si se refiere a la primera parte del mismo, relativa a las creencias, o 2 si se refiere a la segunda, relativa al conocimiento y concepciones acerca del infinito, y m.a indicará la respuesta a la pregunta número m, con el apartado a de la misma, así, el extracto C.1.1.a indicará un extracto del cuestionario, en la primera parte del mismo, siendo la respuesta a la pregunta 1a. En cuanto a las referencias de la entrevista, no usaremos una codificación tan sintética como la del cuestionario, por motivos prácticos, sino que simplemente indicaremos en cuál de las entrevistas puede encontrarse el extracto y la página, de la transcripción de dicha entrevista, donde se puede encontrar el extracto. Asimismo, creemos necesario explicitar que algunos de los extractos han sido refinados en su presentación en este capítulo, ya que, al ser el lenguaje usado informal, en muchas ocasiones la transcripción sería difícil de entender sin dicho refinamiento. Un ejemplo del refinamiento realizado sería eliminar reiteraciones que el profesor hacía para enfatizar su respuesta (e.g. el profesor responde "*no, no, no, no*" a una pregunta, y en el extracto explícito usamos "*no*"), o indicar los elementos que el profesor señalaba sobre el papel (e.g. el profesor indica "*como esto de aquí*", en el extracto aparece "*como en el gráfico de la función*". En los extractos en los que el lenguaje es explícitamente analizado, se ha reducido dicho refinamiento al mínimo. También numeraremos los extractos de cada categoría, añadiendo al final las siglas de dicha categoría, y en caso de ser necesario, entre paréntesis, la sigla de la sub-categoría. Un ejemplo puede ser: Extracto 4-L.C., que indicará que es el cuarto extracto mostrado de la categoría "Localización de Curso".

# Contextualización del profesor

Analizar el conocimiento del profesor objeto del estudio de caso conllevó en este estudio conocer al profesor como docente, al igual que como persona que se relaciona con el infinito. Para entender los aspectos relativos a creencias y concepciones sobre la matemática, su construcción, y la forma en que se debe aprender y enseñar la misma, recurrimos a una versión en forma de cuestionario abierto del instrumento de concepciones de Carrillo (1998)[75]. Así, creemos que para que el lector de este documento adquiera una consciencia completa de quién es, como docente, Aarón, es positivo aportar un sucinto análisis de los aspectos ligados a las creencias y las concepciones. En este apartado no aportaremos una visión explícita sobre las creencias acerca del infinito como concepto matemático implicado en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ya que estarán incluidas en las categorías emergentes que desarrollaremos posteriormente.

Las respuestas del cuestionario sobre concepciones nos permiten indagar en la visión del profesor acerca de qué es la matemática para él, sus objetivos y cómo se construye, así como sobre la finalidad de la educación, cómo esta ha de desarrollarse, y cómo deben ser los procesos de enseñanza aprendizaje. Es necesario, antes de esto, entender que analizamos sólo sus declaraciones en el cuestionario, ya que él mismo afirma que al ser su centro uno de Educación Compensatoria (con problemas disciplinarios graves entre el alumnado), el desarrollo de su docencia se ve condicionado. Sobre su papel como profesor, Aarón afirma: "*Creo que la función principal es la de un guía, invitando al alumnado a investigar y construir su propio aprendizaje*" [C.1.1a], mostrando rasgos investigativos. Esto induce la idea de profesor como acompañante en el proceso de aprendizaje, con lo cual los procesos de interacción con el alumnado cobran mayor importancia, con lo que el profesor coincide, afirmando que "*lo ideal será construir una relación de profesor-tutor-consultor, para que el alumno no se sienta un mero espectador*" [C.1.1.b], aunque en cuanto a la forma de construir esa relación, hace uso del principio pedagógico clásico "nunca sonreír antes de Navidad", declarando que "*siempre intento ser una especie de 'ogro distante' al inicio de curso, e ir transformándome poco a poco en una persona más comprensible y cercana*" [C.1.1.b]. Asimismo, afirma "*creo que debo ser un expositor de contenidos e ideas y ayudar al alumnado a que su aprendizaje vaya poco a poco generándose, a través de minutos de*

[75] Ver capítulo de Metodología para más información.

*trabajo individual en clase*” [C.1.3.b]. Esa labor de expositor de contenidos muestra cierto rasgo ligado a la tendencia tradicional, en contraste con la anterior afirmación ligada a la tendencia investigativa. Creemos que existe un gran impacto del contexto del centro en el profesor, que prioriza en gran medida aspectos relativos a la adquisición de valores, dejándose guiar por el plan de centro del instituto, que antepone dichos valores a la educación disciplinar. Asimismo, en las clases a las que el investigador accedió como espectador, se observaron rasgos atribuibles en gran medida al modelo de enseñanza tradicional, como la *práctica repetitiva*, *un programa rígido prescriptivo* (Carrillo y Contreras 1998, p. 154), mientras que en cuanto al papel del alumnado se mostró cercano al modelo tecnológico, dejando al alumno el papel de ser *el principal responsable de la transferencia de conocimiento, un reproductor e imitador,* que debe *creer en lo que el profesor explica* (Ibid, p. 155). En lo que concierne a su propio papel, observamos que era un profesor que fundamentalmente se concentraba en explicar los procesos, para que sus alumnos lo imitaran. Así, consideramos que existe una gran diferencia entre las concepciones que Aarón declara y las que pudimos observar durante las clases, ya que él mismo declara en el cuestionario que en su centro *las matemáticas pasan a un segundo o tercer plano, […]*(el objetivo es que) *salgan siendo "siendo personas hechas y derechas"* [C.1.6]. Así, entendemos que el centro en el que Aarón imparte su docencia condiciona y probablemente limita lo que él quisiera hacer en cuanto a metodologías de enseñanza y responsabilización del alumnado en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se refiere.

## Categorías relacionadas ‘a priori’ con el PCK

Dentro de lo que Lee Shulman denominó *Pedagogical Content Knowledge*, emergen varias categorías, relacionadas con las ”*formas de hacer el contenido comprensible a otros*” (Shulman, 1986, p.9), focalizándolas en *hacer comprensible* tanto el concepto de infinito como los objetos matemáticos que constituyen su fenomenología. Las categorías que emergen de esta investigación son: Localización de curso, Pensamiento y acciones de los alumnos, Lenguaje, Explicitación, y Ejemplos de Enseñanza. Todas están encuadradas dentro de lo que Shulman denominó PCK, salvo la relacionada con la localización de curso, centrada en lo que este autor denominó Conocimiento Curricular, pero que en posteriores reformulaciones se ha considerado parte del conocimiento didáctico del contenido (e.g. Ball, et al., 2008; Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). La categoría sobre el pensamiento y acciones de los alumnos nos da información sobre cómo el profesor prevé o recuerda que un alumno actúe o pueda actuar. La consideración del alumno como agente activo en el proceso educativo, y la necesidad del profesor de comprender cómo piensa y actúa el alumno forma parte de lo que necesita para hacer del contenido algo “*comprensible*” a dicho estudiante. En cuanto a la categoría de Lenguaje, desde nuestra perspectiva, constituye una parte relevante de las “*formas*”, ya que existen múltiples estudios (e.g. Belmonte, 2009; Lakoff & Nuñez, 2000), que muestran que la comprensión del concepto de infinito por parte de los alumnos va ligada a cierto uso de vocabulario en relación a aspectos de los procesos infinitos. Las categorías Explicitación y Ejemplos de enseñanza, muy cercanas entre ellas, hacen referencia a situaciones en las que el profesor recuerda haber explicado el significado o el uso del concepto de infinito a sus alumnos, o a hipotéticas actuaciones que el profesor manifiesta poder seguir para abordar conceptos relacionados con el infinito, a través del planteamiento de simulaciones o reformulaciones de experiencias vividas en el aula.

## Localización de Curso (LC)

El infinito no está explícito en el currículo español como tema y, por tanto, no tiene sentido pensar en un conocimiento relativo al infinito relacionado con dicho currículo. Sin embargo, el profesor objeto del estudio de caso hizo múltiples consideraciones sobre la conveniencia de un abordaje con mayor o menor peso de la noción de infinito en diferentes cursos, basado en las intenciones que el profesor interpreta que el currículo tiene en cada uno de estos cursos. Por ejemplo, y siguiendo un recorrido cronológico, Aarón, cuestionado sobre con qué concepto está relacionado el infinito, responde:

| |
|---|
| **Extracto 1-LC**<br>"*Cuando se empieza a ver simplemente los números naturales, en 1º, ya se da…el infinito queda ahí latente. Los números naturales, 1,2,3,…hasta infinito, no se suele decir infinito, pero sí se deja ahí y el infinito, pues se puede tratar*"<br>[Entrevista 1, p.1] |

Esta reflexión muestra la esencia de la naturaleza de la categoría, así como el carácter transversal del infinito a la matemática escolar en secundaria. El profesor es consciente de dicho carácter transversal y, ya desde el primer curso, en el que las nociones de numeración existen como base para el contenido de dicho curso, detecta la presencia del infinito en los contenidos. Además, en esa consideración relativa a cómo aparece, muestra su propia construcción mental (o una que aceptaría en dicho curso), de la noción de infinito en relación con la generación de números.

Además, la imagen que tiene el profesor del desarrollo curricular, no solo le permite asignar a un contenido un curso, sino evaluar la coherencia de discutir ciertos contenidos que posiblemente requiriesen la necesidad de explicitar el infinito, con argumentos basados en el curso en el que se sitúa la discusión. El profesor, a una pregunta sobre la comparación de la cantidad de puntos de N y R en cuarto de ESO, afirma:

| |
|---|
| **Extracto 2-LC**<br>"*En este caso sería interesante a lo mejor debatirlo en clase. En este caso sí. Y… estaba pensando cómo desarrollarlo, ¿vale? Por eso me he quedado pensando. Sí sería interesante porque ya lo estás diciendo en 4º de la ESO. Vamos a suponer que es la opción de ciencias, ¿vale? […] Donde se empiezan a ver las sucesiones. Entonces si sería lógico, no conveniente, pero sí lógico aclarar la duda.*" [Entrevista 3, p.9] |

Independientemente de la noción de conveniencia, que discutiremos en siguientes apartados, relacionada con la actitud del profesor hacia explicitar la noción de infinito, Aarón afirma que es un curso en el que si sería "lógico" aclararlo, siendo un curso que permite dar respuesta a este punto. Las herramientas de las que tendría que usar son las que le permitan hacer conscientes a sus estudiantes de la diferencia de los cardinales de los naturales y los reales, llevándole a un discurso en el que el infinito debería ser inevitablemente explícito. Esta explicitación, que no aparece de forma evidente en el anterior extracto, si se hace patente en el siguiente, en el que, al discutir qué tópicos están presentes en el currículo que tengan que ver con el currículo de cuarto de ESO, afirma:

**Extracto 3-LC**

*"[…] sucesiones también a partir de 4º, cuando se tratan los términos, los infinitos términos de una sucesión que no acaba nunca, y en bachillerato pues…yo que sé, en relación al infinito, pues, (resopla), ya es muy explícito.*

*¿Y qué se les dice?*

*Ya se habla del infinito. Cuando hay límites se explica qué es el infinito y qué significa el límite en el infinito."*

[Entrevista 1. p.4]

En este extracto, como hemos dicho, el profesor muestra que a partir de cuarto curso de secundaria ya no sólo el infinito existe de forma evidente en los contenidos curriculares, sino que él mismo explica a sus alumnos qué es el infinito y qué significa en el contexto de los límites. Esta consideración no es ya puramente curricular, sino cercana a lo que él considera necesario para entender los tópicos que figuran en los documentos curriculares. Así pues, el hecho de que el infinito no sea explícito en el currículo no evita reflexiones sobre dicha secuenciación curricular que obligan al profesor a explicitarlo.

Como parte del cuestionario sobre la cognición del infinito, se pidió al profesor que elaborara un mapa conceptual con el infinito en el centro, relacionando conceptos que estuvieran presentes en secundaria, con el fin de estudiar las conexiones que establecía entre diferentes elementos curriculares desde su relación con el infinito. El resultado, diferente en forma y contenido de lo esperado, nos permite sin embargo abordar el conocimiento que posee el profesor sobre el curso en el que se aborda cada concepto, puesto que lo que el profesor produjo fue una lista de conceptos asociados a cada curso que bajo su óptica tenían relación con el infinito. Su diseño fue:

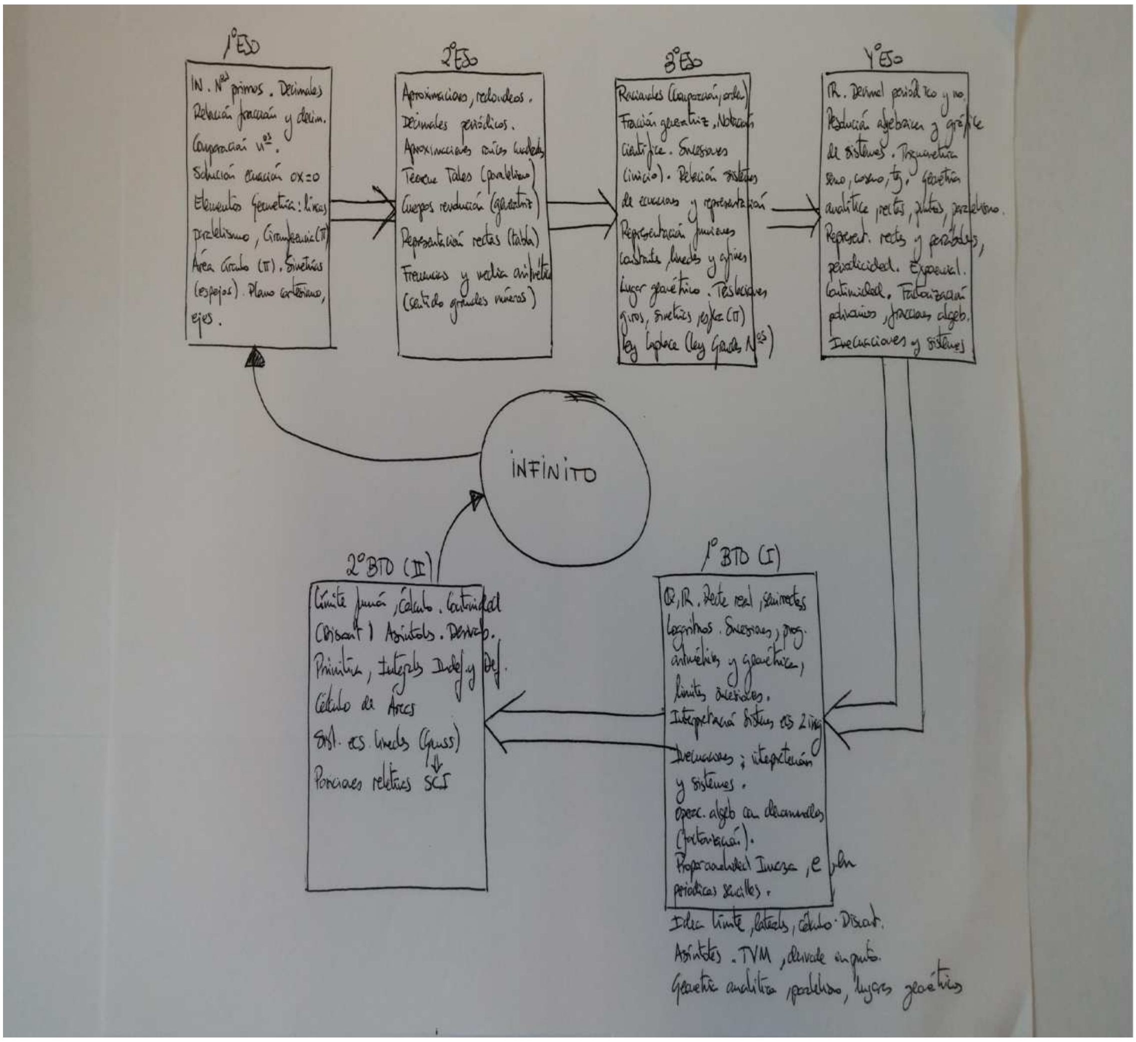


Figura 15: Mapa Conceptual desarrollado por Aarón

En este diseño no solo podemos ver que el profesor conoce ampliamente multitud de tópicos relacionados con el infinito, sino que además es capaz de secuenciarlos por cursos. De igual manera, de los tópicos que muestra emergen diferentes significados del infinito, lo que nos lleva al carácter polisémico del infinito, y a los grados de profundidad en la reflexión del profesor sobre dichos grados de profundidad. Esto es muy evidente al seleccionar varios ejemplos de la entrevista que se hizo al profesor sobre esta lista:

Respecto de los números primos (1º de ESO):

**Extracto 4-LC**
*"Cuando en 1º de la ESO, bueno, en 1º y 2º se dan los números primos, sé que hay infinitos números primos, pero que los números no se pueden contar, no terminan, ¿vale? Y en la palabra no terminar ya va implícito ahí el infinito."*
[Entrevista 2.1, p.2]

*Respecto de 0X=0* (1º de ESO):

**Extracto 5-LC**
*"Qué número por cero me da cero, todos dicen 'el 0', en 1º de la ESO, ¿vale? […] Y les digo: ¿y el 1? ¿y el 2?¿y el 3?, por tanto ¿Cuántos valores hacen que eso sea 0? Y todos dicen 'infinitos'."*
[Entrevista 2.1, p.3]

Respecto de la simetría (3º ESO):

**Extracto 6-LC**
*"Hay ejercicios de juegos de espejos, que los tengo que traer para el tercer trimestre.* [Explica el ejemplo, consistente en oponer varios espejos sobre una superficie con figuras dibujadas, generando figuras geométricas por simetrías] *¿Cuántas líneas hay? Muchísimas, casi infinitas"*
[Entrevista 2.1, p.7]

Estos tres ejemplos diferentes muestran como el profesor explicita reflexiones sobre cómo el infinito surge de diferentes conceptos escolares, estableciendo reflexiones de diversa índole, pero todas íntimamente relacionadas con un momento curricular determinado. En el primer extracto, en relación al concepto en sí y al significado del infinito en ese curso para ese concepto. En el segundo, en el mismo curso, recurre a un error habitual y a su forma trabajar dicho error, con el objetivo de entender la indeterminación, que tiene como resultado un infinito explicitado a los alumnos. Y en el tercero, cómo induce, con juegos de simetrías a través de espejos, la idea de que se ven 'infinitas rectas'.

**Extracto 7-LC**

*E: ¿Tú explicas la densidad a los alumnos de 4º?*

*P: Normalmente se puede, se explica en 3º*

*E: ¿En 3º?*

*P: Si, en 3º cuando se dan todos los conjuntos numéricos, se suele explicar.*

*E: Y ¿Cómo se les explica, con los agujeros?*

*P: Con los agujeros. No se les dice densidad ni denso ni infinito pero… Sí con los agujeros. Siempre podemos encontrar uno en medio, un agujero, donde podemos colocar.*

[Entrevista 1, p.15]

En la línea de los tres episodios anteriores, este episodio muestra como el profesor, en vista del conocimiento que entiende que un alumno de 3º de E.S.O. puede abarcar, usa un significado concreto de la densidad, desde un punto de vista informal para dar sentido a dicho concepto.

Hemos mostrado que el profesor posee un conocimiento profundo del currículo en lo que al infinito se refiere, en este caso a través de los elementos que constituyen su fenomenología, localizando el curso en el que se desarrollan, y las capacidades esperadas en los alumnos que se sitúan en dicho curso.

## Pensamiento y acciones de alumnos (PAA)

Es esperable que un profesor conozca a sus alumnos, especialmente la forma de pensar y actuar que tienen. Esta categoría hace referencia al conocimiento del profesor acerca de cómo sus alumnos abordarán tópicos relacionados con el infinito, ya sea desde un plano cognitivo o en un abordaje práctico en problemas o ejercicios. En el caso de esta investigación, la mayoría de las evidencias que poseemos muestran cómo el profesor prevé la forma en que discurrirá el razonamiento de los estudiantes. En el siguiente extracto mostramos una combinación de conocimiento tanto de aspectos ligados a lo cognitivo en los estudiantes, como a aspectos que conciernen a su práctica:

**Extracto 1-PAA**

*"Muchas de las manías que tienen es la calculadora, ¿vale? Entonces, le queda un numero partido por 0, entonces […] yo siempre digo que los, que eso no existe. Eso no existe, ¿vale? "no, es que es infinito", "es que sale una E", ¿vale? Y se les explica que realmente que eso no existe, ese valor no existe. Pero, después cuando se relaciona con el infinito de… con los limites y demás, pues sí les choca un poco que para una cosa no existiera y para otra fuera*

*infinito, o se estudia"*
[Entrevista 1. p.4]

En este caso el profesor prevé el uso práctico de la calculadora y cómo sus estudiantes la usarán para abordar situaciones relacionadas con el infinito. Además, aparte de conocer la calculadora como recurso y una de las formas en las que permite abordar el infinito (en lo que profundizaremos en siguientes categorías] el profesor prevé la forma en que entenderán los alumnos la situación que refleja la calculadora, sabiendo que algunos asociarán esa E al hecho (incorrecto) de que dividir por cero es infinito. Además de esto, es consciente de que en cursos superiores, el haberles dicho previamente que es imposible dividir por cero llevará a un conflicto a los estudiantes con los límites en los que el denominador tienda a cero, donde vuelve a aparecer el infinito.

En general, las declaraciones de este profesor no muestran un conocimiento tan ampliamente razonado, sino que, en muchos casos, recurre a la generalización de sus experiencias con los estudiantes. Tras preguntarle por la relación de la notación científica con el infinito, afirma:

**Extracto 2-PAA**
"P: *Con los números muy negativos y muy positivos. Por eso lo he puesto. Lo típico. La notación científica, los ejemplos que se ponen: la distancia de la Tierra al Sol, 10 elevado a 11, es que es un número muy grande, muy grande, muy grande, así que casi infinito, así muy grande.*
*E: Ellos te dicen lo de muy grande, casi infinito…*
*P: Muy grande, muy grande, muy grande, "Maestro pues eso es… muy grande"*
*E: Vale.*
*P: Y siempre, de vez en cuando saltan con infinito."*
[Entrevista 2.1, p.6]

En este extracto el profesor muestra la generalización que hace, basándose en su experiencia, de las declaraciones de los alumnos. Es un extracto que nos parece interesante porque el profesor, independientemente de la existencia o no de la relación de la notación científica con el infinito, defiende la forma de pensar que poseen los alumnos, asociando al concepto de infinito el significado de 'número grande', hecho ampliamente descrito en la literatura de investigación. Este ejercicio de revisión del significado que el profesor sabe que los estudiantes pueden construir acerca del infinito, no se limita al significado de 'número grande', sino que se amplía a otros:

**Extracto 3-PAA**
*"Por ejemplo: imagínate, en lo de los órdenes del infinito, ¿vale? Un polinomio partido por una exponencial limite cuando tiende infinito, entones ¿Por qué el de abajo es mucho más grande que el de arriba? Pues… ¿Por qué sale cero eso? Pues… si son infinitos ¿Cómo se puede medir?"*
[Entrevista 1, p.12]

En este extracto, el profesor simula preguntas que los estudiantes podrían hacer acerca del funcionamiento de los órdenes del infinito, reflejando conocimiento informal sobre cómo la diferencia en los "tamaños" de los diferentes infinitos supone un obstáculo a nivel epistemológico para los estudiantes, basado en el modelo intuitivo de aplanamiento (o infinito igual a infinito).

Un punto interesante a considerar es el conocimiento de Aarón acerca de los errores típicos de los estudiantes, y su justificación acerca de los motivos por los que los estudiantes desarrollan los razonamientos erróneos. Un ejemplo lo encontramos en el extracto a continuación:

**Extracto 4-PAA**
*P:* [Lee una cuestión de la entrevista] T*res líneas rectas no siempre se cortan en un mismo punto, ¿verdad? dice el profesor. […]El alumno: depende del tamaño de…" Hostia, el teorema del punto gordo! […] El teorema del punto gordo, ¿eso quién lo decía en la carrera? El teorema del punto gordo, ¡ay! Lo voy a leer otra vez, me ha hecho gracia. "depende del tamaño del punto..." claro depende de lo lejos que lo mires, ¿no?*
*E: Claro.*
*P: Depende lo lejos que esté. Si está muy lejos, muy lejos, muy lejos esos tres puntos pues se pueden convertir en uno. A ver, pongámonos en situación, venga. Venga, lógicamente no, ¿es correcta la respuesta del alumno? Sí, yo le diría que sí. Si estás muy lejos, muy lejos, muy lejos, muy lejos esos tres puntos pueden convertirse en uno*
*E: Tienes que hacer constar siempre…*
*P: Visualmente, visualmente. Visualmente. ¿cómo crees que ha construido ese razonamiento? Pues, pensando así, lógicamente. Si tú pintas un punto gordo y los tres caen en ese mismo… creo, el razonamiento lo ha construido así, creo, ¿vale? ¿cómo crees que están pasando la situación los estudiantes? Pues, así.*
[Entrevista 3, p.10]

En esta ocasión, el profesor identifica el resultado a discutir como un resultado que conoce como anécdota que se encontró en su formación (probablemente como ejemplo de razonamiento incorrecto). Más allá de dicho conocimiento del resultado, recrea y justifica la construcción del alumno de dicho razonamiento afirmando que la respuesta del alumno es correcta, y justificándola, *"si estás muy lejos, muy lejos, muy lejos, muy lejos, esos tres puntos pueden convertirse en uno […] visualmente"*. Así, identifica el motivo del error del alumno basándose en una posible interpretación de la situación. Además, llega un punto en el que, pese a haber afirmado que el resultado es incorrecto, afirma que le diría al alumno que es correcto, ya que puede suceder que el alumno haya construido su razonamiento en base a argumentos visuales que él daría por válidos (entraremos en la corrección matemática de esta situación en apartados posteriores). Este extracto, además, da información de cómo el conocimiento del profesor acerca de cómo sus estudiantes aprenden conceptos está íntimamente relacionado con el infinito. En este caso Aarón identifica el error pero acepta como válido que el cambio de escala que puede suponer el hecho de estar " *muy lejos, muy lejos, muy lejos, muy lejos*" puede resultar en que los puntos estén muy cerca, hasta el punto de convertirse en uno solo.

En la misma línea, relacionada con los errores y dificultades habituales de los alumnos, tenemos el siguiente extracto:

**Extracto 5-PAA**

*“De hecho, haciendo memoria… a ver, algo tan concreto así no, pero sí, sí les plantea dudas…, por ejemplo, no eso, pero te puedo decir un caso parecido que sí me ha pasado, de decirles que… en el intervalo 0-1, pues hay infinitos números, ¿no? ¿Vale? Y… no lo, no… eso pues no lo entienden. Cómo en un conjunto acotado entre 0 y 1 que es así cuando tu lo dibujas, eso: “si es un trozo así, ¿cómo hay infinitos números ahí dentro metidos?” algo sí me ha parecido, me ha pasado como eso, por ejemplo”*

[Entrevista 3, p.3]

Aquí el profesor muestra conocimiento informal del principio holístico de Aristóteles “*el todo es mayor que sus partes”*, y de cómo su aplicación en las matemáticas escolares lleva a puntos contradictorios al estudiante, ya que él mismo afirma que los estudiantes no entienden como en un intervalo, acotado por naturaleza, puede haber infinitos números (y de hecho la misma cantidad que hay en R). Además, afirma que este episodio forma parte de sus experiencias, hecho compatible con la definición de conocimiento profesional de Schoenfeld (2010) que usamos en esta investigación, y que le permitirá adelantar esta misma dificultad en otras situaciones.

Un último episodio que muestra el conocimiento del profesor acerca de cómo construyen sus estudiantes el significado de conceptos relativos al infinito, en especial el de límite en el infinito de funciones y el significado de la convergencia de dicho límite, es el siguiente, contextualizado en la discusión de la sucesión definida por partes An= {0 si n par, 1/n si n impar}:

**Extracto 6-PAA**

*P: Pero tu les, cuál, a ver, yo cuando lo planteo* [El límite] *así en la cercanía, nadie me dice:"oye, que esto puede ser aquí o puede ser allí", ¿vale? Todos se acercan a que cerca es muy próximo a, casi pegado, ¿vale?*

[Entrevista 4, p.2]

En este extracto el profesor establece que pese a requerir esta sucesión una consideración "especial", por parte de los alumnos, dicha consideración no se da, insistiendo en la construcción que él mismo hace del significado de convergencia, que veremos en posteriores apartados que define como "cerca de", siendo aceptada intuitivamente por sus alumnos.

Sin embargo, no vamos a enfocar esta categoría exclusivamente en el conocimiento de errores, sino que deducimos que Aarón conoce también puntos fuertes en el razonamiento de sus estudiantes, en los que no suelen tener dificultades para razonar. El siguiente ejemplo surgió a raíz de la discusión sobre las figuras de revolución:

**Extracto 7-PAA**

*"E: ¿Ellos son capaces de imaginar, yo que sé, la esfera?*

*P: Sí.*

*E: Las circunferencias, como si fueran los meridianos.*

*P: Los meridianos.*

*E: No solamente como una cantidad discreta, digamos, sino esa continuidad, la densidad que tienen… eso, tú crees que son capaces de verlo y de…*

*P: No sé si son capaces de verlo pero, por ejemplo, esa situación que te he dicho que dicen que son infinitas porque se van pegando, que no hay hueco, ya lo está demostrando, ¿no? En realidad.*

*E: No te van a decir por la densidad de R…*

*P: No, no, no.*

*E: Pero sí eso de decir, tengo dos rectas y entre medio puede haber otra y así…*

*P: Pero ellos tienen claro que cuando tú rellenas no quedan huecos.*

*E: No, no quedan huecos, o sea, que digamos que hay subyacente la idea de…densidad, ¿no?*

*P: Sí, además si tienes ocasión de hacerlo, de preguntarlo en alguna clase, pregúntalo, y te lo dicen. Te dicen: "oye, ¿si esto empiezo a rotarlo y se supone que sale una esfera se rellena automáticamente?" "sí, sí, se rellena" "¿Puede quedar hueco?" "no".*

[Entrevista 2.1, p.9]

Este extracto de entrevista da información en varios aspectos, respecto del conocimiento del profesor acerca de sus alumnos. En primer lugar, da información acerca del desconocimiento declarado del profesor acerca de cómo sucede el proceso de visualización de los cuerpos generados por revolución. Él mismo afirma que no sabe si lo ven o no, y recurre a su propio conocimiento del tópico matemático para afirmar que la situación "*lo está demostrando*". Además de esto, probablemente por el origen preeminentemente experiencial de su conocimiento, afirma que no supone dificultad ninguna para los alumnos entender que la esfera "se rellena", no habiendo espacio entre dos líneas cualesquiera, es decir, que entiende que los alumnos aceptan de forma visual la densidad de la misma esfera. Surge, por tanto, la duda de la estabilidad de este conocimiento, y de cómo se vería modificado si encontrara un alumno que tuviera una dificultad en relación a este tema.

Además de diferentes errores y fortalezas, el profesor es capaz de recrear el proceso de enseñanza-aprendizaje y sobre cómo la comprensión de los estudiantes se va ampliando:

**Extracto 8-PAA**

*“Qué número por cero me da cero, todos dicen ‘el 0’, en 1º de la ESO, ¿vale? […] Y les digo: ¿y el 1?¿y el 2?¿y el 3?, por tanto ¿Cuántos valores hacen que eso sea 0? Y todos dicen ‘infinitos’.”*

[Entrevista 2.1, p.3]

Este fragmento, anteriormente mostrado para consideraciones de tipo curricular, muestra cómo el profesor es consciente de las respuestas que posiblemente darán sus estudiantes a una secuencia de preguntas, destinadas a hacerles comprender el significado de variable, subyacente a la consideración de la indeterminación planteada. Además, pretende generar en sus estudiantes rasgos de pensamiento generalizador, a través de darles una secuencia de números que cumplan cierta propiedad (la de ser solución a la ecuación). Esta característica, más allá de consideraciones derivadas de la enseñanza, que abordaremos en siguientes categorías, informa de que el profesor no solo ha construido una imagen de lo que los estudiantes pueden responder, sino también una estructura mental de cómo discurre el aprendizaje de ciertas nociones ligadas a la de infinito.

Asimismo, una categoría de la que no disponemos saturación de información, pero sí indicios de que podría existir, es el conocimiento que el profesor pudiera tener acerca de cómo cada alumno concreto interacciona con los contenidos relacionados con el infinito, en particular este extracto surge al presentarle al profesor un episodio de su propia docencia en el que un estudiante argumenta que la recta asintótica "se mueve":

**Extracto 9-PAA**

*P: Pero es que, bueno, para empezar, sé que este, este es el que responde primero siempre, que es Fernando. Y yo no sé que le puede pasar por la cabeza, pero normalmente suelen contestar lo que les viene por la cabeza. Ni se paran a pensar.*

*E: Pero, en realidad como definición, o sea, ahí detrás hay como decir que la recta esta por ahí…*

*P: Sí, que no llega a tocarla, en fin, que está muy cerca, y, en fin, sí.*

*E: Pero está más visto como algo que le suena por encima o…*

*P: Sí, pero es que…*

*E: Que él lo entiende así, ¿no?*

*P: Pero es que dice una recta que se acerca a un punto. O sea que la que se mueve es la recta.*

*E: Exactamente.*

*P: ¿Vale? Que, en fin. Que sí atina en lo de la cercanía, que está muy cerca pero que no se tocan, pero está moviendo la recta, ¿no?*

[Entrevista 4, p.15]

Vemos aquí como el profesor identifica al alumno que argumenta, desde su conocimiento de la forma de actuar de Fernando en el aula, y luego reconstruye su proceso de acercamiento a la conclusión que finalmente este alumno elabora, valorando además el acierto del alumno en cuanto al identificar la noción de cercanía.

Finalmente, hay un extracto que nos parece especialmente relevante:

**Extracto 9-PAA**

*E: Los granos de arena, ¿cómo les dirías, cómo los pueden contar? Me has dicho que sí los podrían contar, pero no [concretamente en] el ejemplo ese.*

*P: Ah, el cómo.*

*E: El ejemplo ese que tienes, o sea, ¿cómo? ¿cómo los contarías?*

*P: Joder.*

*E: Hombre, tú has dicho que los puedes contar, pero el niño es consciente de que no puede contarlos, no tiene… herramientas para contarlo.*

*P: Sí, no tiene herramientas.*

*E: Y él dice que cómo puede contarlo, que al contarlo es infinito.*

*P: Me parece bien, de hecho, ese razonamiento.*

*E: Te parece bien. P: Me parece bien su razonamiento, lógicamente. Me parece lógica, lógica y de hecho no le diría que no. No puedes contarlos, son infinitos.*

*E. Vale.*

*P: Por lo tanto, desde la A hasta la E, todos infinitos.*

*E: Todos infinitos.*

*P: Y no lo sacaría de su error, de hecho.*

*E: Y las estrellas sin embargo tú me has dicho que son finito.*

*P: No, no, es que… o sea, corrijo, ¿vale? Corrijo. Porque me estás diciendo eso, que como no lo puedo contar no… son infinitos, vale, que lo acepto y le diría lo mismo, el número de estrellas no las puedes contar, pues son infinitas*

[Entrevista 3, p.14]

En este ejemplo, el entrevistador fuerza al profesor a explicitar la forma en la que él resolvería una situación concreta, contar los granos de arena en la Tierra, para posteriormente reflexionar cómo abordar con el alumno la situación. El profesor, al ser consciente de que su razonamiento (o conocimiento no razonado) que le permitía declarar que el número de granos de arena eran finitos no le permitiría a un alumno afirmarlo con convicción, cambia su respuesta, basándose en que un alumno, con argumentos lógicos, solo podría afirmar que son infinitos, al no ser una cantidad que pudiera ser contada, eliminando cualquier posibilidad de generalización de la noción de infinito en el alumno, y aceptando implícitamente la idea de que infinito pudiera considerarse un ‘número grande’.

Así, tenemos para la categoría alumnos, las siguientes sub-categorías emergentes en relación al conocimiento del profesor de los pensamientos y acciones de sus estudiantes:

- Conocimiento de posibles significados elaborados por los estudiantes.

- Conocimiento de errores, dificultades y fortalezas esperados en los estudiantes.

- Conocimiento del proceso de construcción de razonamientos y conceptos.

- Conocimiento de cómo estudiantes concretos interactuarán con el contenido.

Además, el último ejemplo propuesto nos permite afirmar que el conocimiento de Aarón acerca de cómo sus estudiantes piensan y actúan con conceptos o situaciones relacionadas con el infinito no es estático, sino que está sujeto a cambio. Este cambio puede producirse a través, como en este caso, de la discusión de situaciones que hagan que ponga en duda la adecuación de sus razonamientos previos a otras situaciones.

## Lenguaje (LEN)

Una categoría que emerge de los datos obtenidos, posiblemente debida a la propia naturaleza de la investigación cualitativa, es la referida a los usos lingüísticos que hace el profesor de palabras no matemáticas para dar sentido a sus reflexiones matemáticas. La palabra, en este estudio, es la principal vía de acceso al conocimiento del profesor, ya sea en entrevistas donde el profesor se esfuerza por mantener un diálogo con el investigador, en sus clases, donde pretende que los estudiantes comprendan mejor sus explicaciones, o en el cuestionario abierto, donde el propio profesor llegó a comentar informalmente que *"le suponía un gran esfuerzo verbalizar lo que pensaba"* respecto del infinito. Por tanto, y vista la riqueza que vemos en el uso de los vocablos, pasaremos a comentar diferentes episodios que dan contenido y significado a este apartado.

En primer lugar, mostramos un episodio, donde el profesor muestra su consciencia del uso habitual de expresiones:

**Extracto 1-LEN**

*E: Cuando se dice que dos rectas son paralelas se tocan en el infinito, ¿Qué quiere decir eso?*

*P: ¡Madre mía!*

*E: Porque eso se dice, ¿no?*

*P: Se dice, se dice.*

*E: Tú lo has dicho, seguro.*

*P: Se dice. Pues mira, pues ahora que lo dices, yo no… no suelo decirlo, te digo que no se tocan.*

*E: Que no se tocan. ¿Por qué?*

*P: En el proyectivo sí, ¿no?*

*[Se reconduce la entrevista a un contexto matemático propio de Ed. Secundaria]*

*P: Se tocan en el infinito por una deficiencia visual, porque en dos rectas paralelas tú empiezas a mirar y siempre, siempre parece que… que coinciden en un punto, ¿no? Quizás es una adaptación del lenguaje a eso.*

[Entrevista 1, p.17]

En este episodio podemos ver como el profesor es consciente del uso habitual de cierto tipo de expresiones como "dos rectas paralelas se tocan en el infinito", formulación coloquial del quinto postulado de Euclides. Más aún, esa consciencia le lleva a asegurar que él no hace uso de dicha expresión, ya que, de forma coherente con su cognición sobre el infinito, afirma que no se tocan. Además, atribuye al lenguaje la propiedad de adaptarse a lo que él considera un error, produciendo una expresión que da significado a la intuición de que "*parece que coinciden en un punto*". Así pues, comenzamos mostrando que el profesor posee cierta consciencia de la importancia del lenguaje en la comunicación de las matemáticas.

**Extracto 2-LEN**

*E: Tú explicas las densidades a los alumnos de 4º?*

*P: Normalmente se puede, se explica en 3º*

*E: ¿En 3º?*

*P: Si, en 3º cuando se dan todos los conjuntos numéricos, se suele explicar.*

*E: Y ¿Cómo se les explica, con los agujeros?*

*P: Con los agujeros. No se les dice densidad ni denso ni infinito pero… Sí, con los agujeros. Siempre podemos encontrar uno en medio, un agujero donde podemos colocar.*

[Entrevista 1, p.15]

En este episodio, que da información también, como hemos visto antes, de aspectos de índole curricular, el profesor hace uso de un lenguaje coloquial: "en medio", "agujeros"[76]; que le permiten hacer comunicable el contenido de densidad. Además, Aarón explicita que evita hacer uso de vocablos propios de la disciplina, aunque esto no es siempre así:

**Extracto 3-LEN**

*P: Yo siempre les hablo de lo que se ha dado, y de lo que está por llegar. Y cuando llega este caso, siempre me gusta recalcarles la palabra límite para que se vayan acostumbrando.*

[Entrevista 2.1, p.14]

En este extracto, contextualizado en una discusión sobre cómo entre factorización de polinomios y límite pudiera haber cierta conexión, el profesor explica que, incluso antes de haber abordado la temática del límite, hace mención explícita a la palabra límite "*para que se vayan acostumbrando*". Este extracto, y su comparación con el anterior, nos llevan hacia la idea de que la actitud del profesor hacia el infinito condiciona su disposición a usar ciertas palabras más cercanas a lo que él considera que un alumno debería aprender en relación al infinito.

[76] Términos previamente introducidos por el profesor en una discusión informal tras una clase, que rescatamos en la discusión del significado de la densidad mostrada aquí.

Así pues, vemos que el lenguaje es una variable cuyo uso requiere cierta atención desde la consideración del conocimiento y uso del mismo que hace el profesor. Más aún en este caso, en el que el profesor es consciente de la implicación del mismo.

### *Sinónimos (LEN(S))*

Pasamos ahora a un sub-apartado de esta categoría que da cuenta del uso habitual que el profesor hace de ciertos sinónimos para referirse a términos matemáticos. Ya se ha presentado un ejemplo de esto, en el episodio referido a densidad, en el que el profesor habla sobre "*agujeros*". Sin embargo, durante el desarrollo de las clases, y las propias entrevistas, llamó mucho la atención cómo el profesor modelizaba, a través de su lenguaje, la noción de continuidad, límite en un punto, y todos los elementos matemáticos que tuvieran que ver con la noción de entorno 'arbitrariamente pequeño', usando el término "cerca" o algún derivado del mismo (cercanía, cercano,…), así como "lejos" o "lejanía". Se muestra ahora un extracto de su docencia, seguido de una discusión sobre el mismo:

| |
|---|
| **Extracto 4-LEN(S)**<br>*P: Os he dicho que L´Hôpital se estudia en la cercanía de un punto, en la cercanía de a, pero qué pasa si en vez de en la cercanía de a, lo estudio en la lejanía de f, muy lejos, en el infinito. ¿qué he dicho antes de comparar? Estamos comparando f y g, y en la cercanía de a me daba el límite, y me daba L, eso significaba que se estabilizaban los valores de f(a) y g(a). (Extracto de clase)* |
| [Se le muestra el extracto, y se le pregunta: ¿Por qué cercanía de a y lejanía de f? ¿Qué significa esa idea de comparación? ¿Y la de estabilización?]<br>*P: Buah.*<br>*E: Eso es una argumentación tuya, yo ahí no he metido nada.*<br>*P: Sí, sí.*<br>*E: Me llama mucho la atención que tú hablas de la cercanía de un punto y la lejanía de F.*<br>*P: Sí.*<br>*E: O sea, para mí puede tener sentido la lejanía de un punto, el origen.*<br>*P: Sí, a ver, no, siendo coherente tendría que ser la lejanía del punto.*<br>*E: Pero dices sistemáticamente la lejanía de F.*<br>*P: Siempre.*<br>*E: Y me llama mucho la atención.*<br>*P: Y en la lejanía de la función.*<br>*E: Cuando… ¿Qué significa eso de la lejanía de la función?* |

*P: Que, puf, no sé, además siempre lo digo.*
[Entrevista 4, p.9]

El primer extracto muestra el uso que Aarón hace, en un contexto de aula, de la terminología anteriormente mencionada. Afirma que el cálculo de límites por L'Hôpital se realiza "en la cercanía", es decir, el límite puntual, aunque se puede hacer también "en la lejanía", en el infinito. Este uso, vemos en la parte relativa a la discusión, tiene una fundamentación basada en el uso "habitual" que hace el profesor de dicha expresión, carente, al menos a priori, de un significado que lo sustente, como vemos en la última afirmación del profesor: "*no sé, siempre lo digo*", donde el profesor no solo afirma que no puede asignar un significado a la expresión de forma coherente con la noción de cercanía de un punto, sino que lo usa habitualmente. Vemos más ejemplos donde usa esta terminología relativa a la cercanía:

**Extracto 5-LEN(S)**

*E: Primero un pasito, luego otro, luego otro y… ¿Qué pasa entre medio? […]*
*P: Normalmente… porque se empieza con la continuidad de un punto. Al comenzar siempre con la continuidad de un punto, siempre te ciñes, siempre te ciñes a la cercanía de un punto, entonces, por eso.*
*E: Hablas de eso, de la cercanía* [entendida] *cómo aproximarse al punto, ¿no?*
*P: Exactamente.*
*E: Vale.*
*P: Las cercanías de… porque a partir de aquí ya se desarrolla la función punto a punto, de los infinitos puntos que tiene.*
[Entrevista 2.1, p.15]

Este extracto es una muestra más del uso de la terminología relativa a la cercanía, en la que el profesor explicita el significado de dicha noción, aceptando que esa cercanía es equivalente a una aproximación. Esta visión de la "cercanía" refleja un marcado carácter potencialista en la cognición del infinito, ya que, siguiendo a Belmonte (2009) y Lakkof y Nuñez (2000), el uso de cierto tipo de expresiones, como verbos en gerundio y expresiones cuyo significado se fije en el proceso más que en el resultado final, refleja este tipo de concepción del infinito. Sin embargo, esta relación entre el tipo de lenguaje y la concepción del infinito que refleja de forma implícita lo desarrollaremos en el apartado correspondiente al potencialismo en el MK.

Aún así, creemos que en el caso de este profesor, los términos que usa para comunicar sus ideas matemáticas, ya sea a un alumno, o a un "igual" (En términos de formación[77]), son idénticos, ya que a lo largo de todas las entrevistas, el lenguaje que usaba no variaba en forma ni grado de formalismo respecto al que usaba en clase. Por tanto, entendemos que aunque hemos considerado este apartado como perteneciente al PCK, también es coherente pensar que se podrían hacer consideraciones alejadas de la "comunicatividad del contenido", para pasar al lenguaje que el profesor usa para referirse a determinados contenidos en un contexto matemático, lo que nos llevaría a la parte correspondiente al MK.

## Explicitación en el aula y ejemplos de enseñanza (EAEE)

Como vimos en el apartado de "actitudes hacia el infinito", el profesor es reacio a explicitar, en algunos cursos, la noción de infinito. Sin embargo, en ciertos momentos de la entrevista, el profesor objeto del estudio de caso afirmó que abordaba de forma explícita el infinito en el aula, explicando su naturaleza, significado, o comportamiento. Entendemos que este tipo de declaraciones, y el hecho de conocer situaciones en las que se hace explícito en el aula la noción de infinito, se adecúan a la definición de conocimiento profesional de Schoenfeld que estamos usando, entendiéndolo como *“la información que tiene disponible”*. En este caso, el conocimiento no se refiere a un elemento de naturaleza matemática o didáctica que el profesor conoce, sino a una experiencia de aula que conoce y que puede usar como sustento para posteriores situaciones de aula.

Un ejemplo de esto podemos verlo en la siguiente situación:

| **Extracto 1-EAEE** |
|---|
| Discutiendo los elementos que figuran en su esquema, se señala la trigonometría, y se le pregunta por la relación con el infinito:<br>*P: A ver que me acuerde… trigonometría puse, ¿no? Seno, coseno y tangente, ¿no? Voy a relacionarlo con la gráfica. La del seno, que es periódica e infinita, la del coseno, que es igual, y la tangente*<br>*E: ¿Y llegas a externalizar eso de la relación con el infinito, el periodo? ¿O te quedas con el seno entre… 0 y 2pi y listo?* |

[77] La formación del profesor entrevistado y del entrevistador es equivalente en cuanto a aspectos académicos, ambos licenciados en matemáticas.

> *P: Normalmente, ya en 1º de bachillerato cuando ya, digamos aquí cuando se trabaja el 2kpi, aquí si se trabaja el 2kpi, eso se intuye, se deja caer, que hay…*
> *E: Que hay muchas ondulaciones…*
> *P: Exactamente, que esto no para, pero que nos vamos a ceñir solamente en este intervalo, pero que a partir de ahí sí se sigue repitiendo. Que es lo mismo. Se deja sobre todo en 4º de ciencias, en el otro no se ve, ¿vale? Y van por ahí los tiros, se les deja caer, ¿vale? Que es infinito a partir de ahí, pero nos ceñimos solamente a [0, 2pi]. En este curso y se enlaza aquí, de hecho aquí se toca la trigonometría, no, no porque es ampliación, no lo sé, no sé si…*[se trata].
> [Entrevista 2.1, p.12]

En este episodio, el profesor afirma explicitar la noción de infinito en el abordaje de la trigonometría, al explicar el significado de la periodicidad de las funciones trigonométricas. Esta explicitación no le lleva a abordar el significado del infinito *per se*, aunque si a inducir cierto significado del mismo a sus estudiantes. Entendemos que pese a no ser esto un episodio explícito y recordado con detalle de lo sucedido en un aula, si que posee características que nos llevan a considerar que tiene rasgos de serlo. De hecho, entendemos que es la generalización de diferentes episodios vividos por el profesor, ya que su forma de narrar lo que sucede es en términos generales "*en primero de bachillerato*". Así, en ese curso, podemos esperar del profesor que realmente haga explícito el infinito y que puedan surgir discusiones sobre el significado de la generalización del comportamiento de la función en [0, 2pi] al resto del dominio de la función.

Más allá de ejemplos concretos en los que el profesor explicite el infinito como tal, surgieron a lo largo de la entrevista diferentes ejemplos en los que el profesor recrea de forma más detallada cómo aborda conceptos concretos, o cómo los abordaría. Pese a requerir un análisis más pormenorizado desde el punto de vista matemático (que haremos en el siguiente bloque), entendemos que en la forma de abordarlos existe información acerca del modo en que este profesor trabaja contenidos relacionados con el infinito en el aula.

**Extracto 2-EAEE**
Al abordar situaciones de indeterminación del tipo 0 partido por 0 fruto de una discontinuidad evitable:
*P: Si tú, en este caso, yo se lo planteo como una división, si tú divides entre esto en trocitos milimétricos, muy pequeños, son infinitos trozos lo que sale, de longitud muy pequeña.*
*E: Vale.*
*P: Entonces, como estamos en el límite con lo de la cercanía, estamos haciendo infinitos trozos de la parte de arriba.*
*E: Digamos que le da significado, entre comillas, al hecho de dividir entre 0, haciéndolo equivaler a dividir por números más pequeños, ¿no? Como la división, como dividir en trozos más pequeños te sale algo más…*
*P: Algo muy grande.*
*E: Muy, muy grande, vale.*
*P: Muchísimos trozos de.*
*E: Sin embargo, si es evitable no hay problema.*
*P: No, porque lo suelo explicar así también. En ese caso, hay un problema tanto abajo como arriba, ¿Por qué? Porque comparten, ¿no? Comparten problemas, dificultades, que se pueden eliminar las dificultades, las dos.*
[Entrevista 1, p.29]

Vemos en este extracto cómo el profesor aborda matemáticamente en el aula las situaciones que implican las indeterminaciones cero partido por cero que surgen de una discontinuidad evitable. Podemos ver como Aarón cambia el registro contextual de la situación para que, pese a seguir el límite en la misma, los estudiantes comprendan la situación en términos de conceptos matemáticos que en ese punto deben dominarse, como es la división. Este cambio de registro matemático le permite llevar a los alumnos a que dividir entre cero en el límite es equivalente a ir dividiendo por trozos cada vez más pequeños. Sin embargo, cuando se reconduce la conversación al objetivo original del apartado, las discontinuidades evitables, el profesor vuelve a hacer otro cambio de registro, hablando de *"problemas tanto arriba como abajo"*, que como ambas expresiones (numerador y denominador) *"comparten problemas"*, existe la posibilidad de *"eliminar las dificultades, las dos"*, usando una generalización de las reglas de simplificación en fracciones. Así, el profesor induce a sus alumnos, a través de contextos más sencillos, una forma de abordar un contenido íntimamente relacionado con el infinito, como las discontinuidades, que evita el problema de abordaje que estos pudieran tener con nuevos contenidos. Además, el lenguaje que usa es, como vimos en el apartado correspondiente, coherente con su tendencia potencialista, y sobre todo, cercano al alumno. Entendemos que en este extracto podemos ver conocimiento de diversas naturalezas, pero esta integración de conocimientos de diversas naturalezas en un episodio de clase que Aarón es capaz de rememorar y reconstruir dando una forma en la que *"lo suele explicar"*, es también conocimiento, ya que entendemos que lo que él conoce es "cómo enseñar límites".

**Extracto 3-EAEE**

[Sigue del extracto de discusión sobre "el teorema del punto gordo"]

*P: Visualmente, visualmente. Visualmente. ¿cómo crees que ha construido ese razonamiento? Pues, pensando (---) sí, lógicamente. Si tú pintas un punto gordo y los tres caen en ese mismo… creo, el razonamiento lo ha construido así, creo, ¿vale? ¿cómo crees que están pasando la situación los estudiantes? Pues, así.*

*E: Es decir, como… un punto puede ser todo lo gordo que yo quiera.*

*[…]*

*P: Partimos de ahí, ¿cómo podrías sacarlo del error? Pues, fíjate cómo lo haría. Con una aplicación informática.*

*E: Con una aplicación informática… ¿Como cuál?*

*P: Hay. Precisamente eso de acercarse, como un Fractal. Hay una aplicación de internet que es un Fractal y se va acercando mucho, mucho, mucho y nunca tiene fin, nunca tiene fin. Y desde arriba siempre se ve, bueno, hay muchos ¿vale? Muchos fragmentos. Y desde arriba se ve, por ejemplo, lo que estamos hablando, tú imagínate que se ve, no sé, algo que se repite así, que se repite siempre, ¿vale? Y desde arriba esto no se ve tan definido, siempre se ve menos borroso y más definido y se va adentrando y se van separando, y se va adentrando y si te sigues adentrando por aquí, siguen, siguen, y te vas adentrando y se van separando. Lo explicaría así, además está muy bien.*

[Entrevista 3, p.10]

Este ejemplo resulta realmente interesante por la última parte del mismo. El profesor, enfrentado a una situación en la que un alumno comete un error, cuya procedencia anteriormente vimos que podía justificar basándose en la forma en la que él pensaba que dicho alumno hubiera podido desarrollar ese razonamiento, piensa una estrategia de abordaje de dicha situación. El interés radica en que la forma de abordaje que propone el profesor está íntimamente relacionada con el error del alumno al tratar con el “alejamiento”, ya que propone el uso de una aplicación informática que, a través de los fractales, muestra como el efecto de alejarse o acercarse no cambia la naturaleza de lo que se observa. Este uso que propone el profesor es un claro ejemplo del contenido de la categoría, una forma de abordar un contexto relacionado con el infinito, que el profesor conoce y propone usar en una clase (en una situación hipotética en este caso).

En el siguiente extracto vemos como el profesor aborda una situación concreta, recreando el ejemplo que usa para explicar la convergencia de las sumas de infinitos términos, que surge en la discusión del ejemplo relativo a ir sumando potencias sucesivas de 1/2 metro:

**Extracto 4-EAEE**

*P: ¿Cómo se lo explicarías?*

*E: Yo no lo sé, o sea, no tengo yo una respuesta ni…*

*P: Con trocitos de papel.*

*E: Trocitos de papel.*

*P: O una lupa. Con un aumento que nunca puede pasar uno.*

*E: ¿Cómo? Explícame más el ejemplo, porque…*

*P: Por ejemplo, ¿dices que es medio metro, no?*

*E: El principio, el primer paso es de medio metro.*

*P: Vale. De medio metro, coger un metro, coger un metro y coger medio metro de papel y ponerlo, y después otro medio, y otro cuarto, y otro medio [de ese cuarto], otro medio [del anterior], otro medio[ídem]… Y hacerles ver que ampliando eso, ¿vale? Que ampliando ese trozo que queda, te lo puedes llevar también a un metro. ¿Vale? Haces la comparativa de que el trozo que queda vuelve a ser un metro. La mitad, la mitad, bla bla bla, vuelve a ser un metro, un metro y que nunca pasa de ahí. ¿Vale?*

[Entrevista 3, p.11]

En este caso, Aarón esboza una forma de abordar la situación parecida a la que ya se comentó en Montes (2011) y Montes y Carrillo (en prensa). En aquella ocasión, el profesor estudiado proponía cortar un folio en mitades y una de las mitades resultantes en otras mitades, mostrando la posibilidad de la convergencia de la suma. En este caso, el profesor propone coger un trozo de papel, que simbolizaría el medio metro, luego coger otro y dividirlo por la mitad, representando un cuarto. Aquí entra la capacidad generalizadora que el profesor presupone en sus estudiantes, ya que recurre a una "ampliación" imaginaria de los trozos de papel, justificando que puede compararlos con los originales. Así, Aarón en realidad no parece demostrar, a priori, la convergencia, sino la posibilidad de realizar dichas subdivisiones. Sin embargo, al final dice *"haces la* *comparativa de que el trozo que queda vuelve a ser un metro*". Es decir, el resto de las sumas parciales será lo que complete hasta tener el trozo completo, con lo que dicha suma creciente estará acotada superiormente, luego será convergente. Así, este profesor muestra una forma de abordaje de la situación matemática profundamente sustentada en su propio conocimiento matemático, en la que se observa el significado de cada uno de los aspectos que involucra. Además, esta forma de abordaje se expresa en términos comprensibles para un hipotético estudiante, usando "*trocitos de papel*", y una *"lupa*" imaginaria, que permitirán al alumno manejar la situación desde una perspectiva más próxima.

Otro ejemplo de esto lo vemos en la siguiente reflexión que el profesor hace, al discutir sobre la ley de los grandes números y cómo mostrarla a sus alumnos:

**Extracto 5-EAEE**

*P: Es que tú, es que es muy práctica, porque […] yo siempre llevo un dado encima y monedas, además te lo puedo enseñar (los enseña)… siempre llevo dados y monedas. Por lo que pueda pasar, y... en clase, pues, el dado, ¿no? "vamos a ver, venga, vamos a tirar el dado 8 veces, vamos a tirar la moneda 10 veces, a ver qué pasa, cuantos números de caras salen, cuantos números de cruces salen". Que nunca… al principio nunca les hablo de… de probabilidad, de… ¿qué posibilidades hay que salga cara, o que salga cruz?" y todos dicen "la mitad", la mitad, "y qué es la mitad?" pues… una fracción, un medio, y ahora "un medio ¿qué significa?" pues "que es un resultado de dos posibles", así siempre se va relacionando y lanzando la moneda, cuantas veces, cuantas más veces... pero nunca se le habla de la ley de grandes números. Y no tienen problema, ¿eh? Lo entienden bastante bien a la primera.*

[Entrevista 2.1, p.4]

En primer lugar, es interesante que el profesor afirme que a los alumnos nunca se les hable del principio matemático que sustenta su elección metodológica. Esto es consistente con la idea del profesor de que muchos elementos matemáticos no requieren explicitación en el aula, entre ellos especialmente los que tienen relación con el infinito. Volviendo a la forma de abordar Aarón el concepto matemático objeto de discusión, vemos que afirma que realiza el experimento una cantidad finita de veces, 8 ó 10, para después inducir el principio matemático a través de la generalización que propone implícitamente. Esta forma de "hacer implícito" el infinito en el aula, derivada de inducir a los alumnos a un proceso de generalización, es otras de las formas que este profesor conoce para introducir el abordaje de situaciones que requieren la consideración de una cantidad infinita de elementos.

Así, hemos mostrado que Aarón conoce tanto diferentes formas de mostrar conceptos relacionados con el infinito, a través de recursos TIC, como en el caso de los fractales, y más manipulativos, como en el caso de los trozos de papel. De igual manera, hemos visto su habilidad para reinterpretar situaciones matemáticas en las que el límite, y por tanto el infinito, tiene un papel fundamental, desde una perspectiva de la matemática elemental, considerando que así se facilita la comprensión. Finalmente, le hemos visto recrear cómo induce en sus estudiantes el uso del infinito para generalizar el comportamiento de las funciones trigonométricas en el intervalo [0, 2pi]. Todos estos ejemplos dan sentido al hecho de considerar esta categoría, la relativa a los ejemplos de enseñanza que el profesor conoce, así como los momentos en los que explícitamente usa el infinito en la misma. El foco de la categoría está en la labor transmisora del profesor, en las formas en las que el profesor, como sujeto activo y que centra nuestra atención, toma un papel protagonista y explica a sus alumnos.

## Categorías relacionadas ‘a priori’ con el MK: Conocimiento del infinito matemático-escolar

El bloque relativo al conocimiento matemático del profesor está centrado en cómo el profesor objeto del estudio de caso conoce el infinito como parte de la matemática. Sin embargo este conocimiento del infinito no se limita a un conocimiento del concepto desde la perspectiva de la matemática como disciplina científica, sino que también abarca conocimiento acerca de la matemática escolar y la matemática didáctica (en la línea de las naturalezas de la matemática planteadas por Tossavainen y Pehkonen, 2013). La consciencia de esta diferenciación entre las naturalezas de las matemáticas ha permitido la emergencia de diferentes categorías que abordan aspectos significativamente distintos.

Así, haremos gran hincapié en la fenomenología (Freudenthal, 1983, Puig, 1996) del infinito que conoce Aarón, a través de la discusión de diferentes ejemplos, así como de su propia consciencia de la relación fenomenológica entre el infinito y diferentes conceptos. Posteriormente, pasaremos a discutir el grado de desarrollo cognitivo del profesor en relación con el infinito, así como los errores conceptuales que dicho desarrollo produce. Después de esto, abordaremos el conocimiento de este profesor en relación con los diferentes significados del infinito que él mismo conoce. Esta diferencia de significados es coherente con lo propuesto en Montes y Carrillo (2014) como definición del infinito como elemento parte del conocimiento profesional, y refuerza dicha propuesta, que no deja de ser sino un resultado parcial de esta investigación.

Finalmente, abordaremos situaciones en las que el profesor explicita su necesidad de realismo en el trato del infinito, y diferentes situaciones de disonancia cognitiva (Festinger, 1957). Estas situaciones están asociadas a la confrontación de los diferentes significados que Aarón acepta que el infinito posee pero, dada la necesidad de realismo de Aarón, y son provocadas por la conjunción de una variedad de situaciones, desde errores conceptuales a momentos de conflicto en los que el profesor observa dos posibles soluciones incompatibles para una misma situación, para lo que intenta desarrollar posibles justificaciones que las compatibilicen.

## Fenomenología (F)

Esta categoría adopta su nombre de las investigaciones de Hans Freudenthal (1983) y, aunque la Grounded Theory en su formulación clásica (Glasser & Strauss, 1967) nos invita a eliminar las referencias a la teoría previa, dada la magnitud y difusión de la terminología de Freudenthal, decidimos usarla para dar una definición lo más descriptiva posible del contenido que a continuación observaremos que Aarón conoce, en connivencia con la reformulación moderna del enfoque metodológico (Strauss y Corbin, 1998). Es interesante en este punto pararse a pensar cuáles son los elementos de esta fenomenología, es decir, los fenómenos, y medios de organización de dichos fenómenos. Los primeros se definen como "*las apariencias o lo que se nos aparece de las cosas*" (Puig, 1996) y los segundos como *"aquello con lo que pretendemos dar cuenta de nuestra experiencia matemática"* (Puig, 1996). Así, habremos de considerarlos siempre como una dualidad, en relación a los conceptos matemáticos sobre los que se considera la fenomenología. En el caso de la investigación que nos ocupa, el objeto matemático no puede ser otro que el infinito, mientras que los fenómenos son los diferentes significados que adopta el objeto, y los medios de organización de dichos significados son los diferentes conceptos matemáticos que hacen uso de los significados del infinito. Una vez explicitada nuestra perspectiva, basada de forma eminente en la experiencia que atesoramos como matemáticos, profesores e investigadores, pasamos a mostrar las diferentes sub-categorías que emergen del análisis, y que mostrarán tanto los fenómenos que organiza el infinito, como los medios de organización de dichos fenómenos que conoce el profesor. Sin embargo, previo a dicho análisis del conocimiento del profesor de la fenomenología, se mostrará una categoría que da cuenta de la consciencia de Aarón del carácter subyacente del infinito a gran parte de la matemática escolar.

### *Consciencia del infinito como elemento latente (F (EL))*

Esta categoría surge a lo largo de las entrevistas con el profesor, y de forma no esperada. Al planificar las entrevistas, se hizo un esfuerzo por hacer del infinito un elemento bastante explícito para que la propia guía de la entrevista indujera el abordaje del infinito. Sin embargo, al discutir el cuadro que realizó el profesor (ver categoría "localización de curso") en el que indicaba qué conceptos estaban relacionados con el infinito, el profesor hacía constante alusión al carácter *latente* del infinito. De esa denominación surge el nombre de esta categoría. Un ejemplo de esto podemos verlo en el siguiente extracto:

**Extracto 1-F(EL)**

*E: Vale. ¿Y el infinito cómo está ahí?*

*P: Latente, ¿no?*

*E: Latente está siempre, ¿no?*

*P: ¿El infinito cómo está ahí latente?*

*E: Latente o explicito. Si tuviera que estarlo.*

*P: Pues…*

*E: O no está, que puede ser que no esté. Si tú crees que no está.*

*P: Sí está por el simple hecho de la definición de derivada. Cuando se hace un límite está ahí, ¿vale? Está en la propia definición, desde luego. El límite de f(x+h) menos f(x) partido por la h…, pues ahí está latente.*

[Entrevista 1, p.23]

En este caso vemos el uso que Aarón hace del vocablo "*latente*", que no parece totalmente adecuado, ya que lo contrapone en significado a explícito, con lo que entendemos que el significado que pretende darle a dicha latencia es el derivado de la subyacencia del infinito a la consideración de la derivada. El conocimiento de este profesor va más allá de simplemente conocer dicha "latencia" del infinito. También es capaz de justificar cómo se da esa relación. En este caso, recurre a afirmar que al estar definida la derivada a través de un límite, se puede ver claramente la relación, lo cual requiere aceptar que el límite está relacionado con el infinito, hecho que se había discutido anteriormente.

Además, este profesor es capaz de determinar esa latencia no sólo en contextos derivados del límite, siendo este un registro bastante habitual del límite en secundaria, sino en ejemplos en los que dicha latencia es menos explícita:

**Extracto 2-F(EL)**
*P: En la representación de rectas y después se les suele dejar caer siempre que no es una simple línea o segmento que se pinta ahí, sino que se prolonga indefinidamente, para la recta sobre todo, para arriba y para abajo, para abajo y para arriba, y también está latente el concepto de infinito.*
[Entrevista 1, p.3]

Aquí el profesor asocia la latencia al hecho de prolongar de forma indefinida una recta en los dos sentidos. Una vez más vuelve a usar el vocablo *"latente"* para dar significado a esta relación.

Estos dos ejemplos muestran el carácter que Aarón considera que tiene el infinito en gran parte de la matemática escolar, lo cual no sólo nos da información acerca de su conocimiento, sino que una vez más nos permite reforzar la pertinencia de esta investigación, ya que es un profesor en activo el que afirma la existencia del infinito como elemento que forma parte de la matemática escolar, no de forma explícita, pero si subyaciendo a multitud de conceptos matemáticos. De hecho, esto se puede ver en el mapa conceptual que se le pidió que diseñara libremente, con la única consigna de escribir los "conceptos relacionados con el infinito". En dicho mapa podemos observar el esfuerzo analítico realizado para responder a la demanda de un mapa conceptual, en forma de una amplia lista de conceptos cuya relación fue defendiendo en algunos casos, como anteriormente vimos.

Aparte de las relaciones del infinito con diferentes conceptos matemáticos, el profesor acepta el carácter subyacente del infinito en otros aspectos, como vemos en el siguiente extracto:

**Extracto 3-F(EL)**
*P: Yo te dije que… lo que te dije que yo había incluido* [en el mapa conceptual] *cosas que puede aparecer el infinito de fondo, pero que igual no se estudia.*
*E: Sí, sí.*
*P: ¿Vale?*
*E: Digamos que tú lo tienes en la cabeza cuando [*explicas*]…*
*P: Eso, exactamente.*
*E: Exactamente.*
*P: Cuando les escribo, el infinito pues puede estar detrás o…*
*E: Sí o tu…*

| |
|---|
| *P: Aunque no se estudie, aunque no se diga o que yo no lo diga, que no se diga no, aunque no lo diga yo en clase.*<br>[Entrevista 2.1, p.1] |

Aquí, vemos como el propio profesor empieza afirmando, en la línea de los extractos anteriores, que él había diseñado el mapa conceptual considerando elementos en los que el infinito apareciera "de fondo", haciendo referencia una vez más al carácter subyacente del infinito en los conceptos matemáticos como los anteriormente descritos. Sin embargo, añade una consideración final "*pero que igual no se estudia*", es decir, que dichos conceptos no necesariamente han de ser explicitados a sus alumnos de una forma que el infinito sea también explícito. Cuando se le dice que él tiene esa relación con el infinito en la cabeza cuando imparte su docencia, coincide plenamente con dicha afirmación, haciendo hincapié en que no necesariamente debe explicitarse. Este extracto es interesante porque nos permite afirmar que este profesor parece consciente de que el conocimiento que requiere para enseñar va más allá de simplemente conocer los conceptos que se abordan en el aula de una forma poco profunda, sino que dicho conocimiento debe ser, o al menos en su caso lo es, más profundo, conociendo el concepto que en gran medida da significado a los abordados en clase, el infinito.

### *Fenómenos (Fen)*

Pasamos ahora a un análisis del conocimiento del profesor desde la perspectiva de los fenómenos que son organizados por el infinito que se han discutido a lo largo de las entrevistas. Los cuatro fenómenos que discutiremos serán: Integrales, derivadas, límites y "órdenes del infinito". Creemos necesario también poner de relieve que no se discutieron exclusivamente estos tópicos, sino que fueron aquellos de los que mayor saturación de datos se obtuvo. Poseemos evidencias, además, de otros conceptos y situaciones matemáticas que el profesor identifica como fenómenos del infinito, como son la Ley de los Grandes Números, la densidad, sucesiones, o tipos de números, entre otros, que se pueden encontrar en los documentos anexos.

### *Integral (Fen(I))*

La integral, elemento que aparece en segundo de bachillerato, fue situada por Aarón en su mapa conceptual en dicho curso, y cuando se le preguntó por la relación con el infinito de este concepto, su respuesta fue la siguiente:

| |
|---|
| **Extracto 1-Fen(I)**<br>*P: En 2º, la integral, pues… las sumas, ¿no? Primero las definidas, las sumas, la suma superior, la suma inferior y… y la integral indefinida pues la C, el tema de la C, el tema de la C que está por las infinitas primitivas.*<br>[Entrevista 2.1, p.16] |
| **Extracto 2-Fen(I)**<br>*P: Es que yo cuando hemos dado las integrales indefinidas sí se lo he dado. He definido las integrales indefinidas como la suma por defecto, la suma por exceso y acotando, acotando para que vean que coincidía con el área.*<br>[Entrevista 1, p.7] |

La relación con el infinito expuesta en el primer extracto no está referida explícitamente a la construcción de integral, como de hecho se pudiera haber previsto. Sin embargo, esta reflexión no solo sirve para dar información sobre el conocimiento del profesor de cómo el infinito organiza ciertos conceptos, sino también para hacer consciente al investigador de la limitación de su propia reflexión. En el segundo extracto, en la discusión de la forma de introducir la integral, sí surge la construcción habitual de integral como límite inferior y superior de las sumas, con lo que, aunque la relación que el profesor hace explícita que conoce entre infinito e integrales es la primera, podemos afirmar que ambas son relaciones que conoce y usa en su aula. Así, la relación fenomenológica entre el infinito y la integral es conocida por este profesor de una forma polisémica, y coherente. Sin embargo, en la línea de la coherencia, el siguiente extracto nos da cierta información sobre esta.

| |
|---|
| **Extracto 3-Fen(I)**<br>[Este extracto está contextualizado en la discusión con el profesor acerca de la introducción conceptual de la integral, a través de las sumas de Riemann]<br>*P: El área es este área, este área y este área que sería el área real que hay debajo, bajo la curva se dice coincide con la suma de este área que tengo.*<br>*E: Se dice que coincide, se dice.*<br>*P: Se dice, no se alcanza.*<br>*E: ¿Coinciden o se alcanzan? ¿Ese ‘se dice’ por qué? ¿Por qué eres reacio a decir que sí?*<br>*P: No lo sé, no lo sé.*<br>*E: No se alcanza, tú estás convencido de que no se alcanza.*<br>*P: Convencido no, porque siempre lo he visto así.*<br>*E: Pero digamos es algo del lenguaje, es algo que tú piensas.* |

| |
|---|
| *P: No sé, puede ser que sea del lenguaje, ¿no? […] pero que se llama así porque está establecido*<br>*E: No te convence si…*<br>*P: Es igual*<br>[Entrevista 1, p.31] |

Vemos en el profesor un uso del lenguaje en el que la expresión "se dice" muestra lo que en el momento de la entrevista inferimos que era cierta inseguridad sobre el hecho de que el límite se alcanzase o no. Este extracto nos muestra que el profesor acepta que él interpreta como convencionalismo matemático el hecho de que el límite de las sumas coincida con el área. Posteriormente daremos argumentos que explicarán esta actitud hacia el infinito, que hace a Aarón tender a considerar las situaciones en las que este está involucrado como situaciones de desconocimiento.

Así pues, podemos afirmar que Aarón conoce la integral, y establece relaciones de esta con el infinito y, además, que su forma de comprender la integral es coherente con su forma de entender el infinito (esto último se pondrá de relieve más adelante).

### *Derivada (Fen(D))*

En el caso de la derivada, se hizo hincapié a lo largo de la discusión en el tópico y especialmente en su significado, de manera que encontramos declaraciones de Aarón como la siguiente, a la pregunta ¿Qué es la derivada para ti?

| |
|---|
| **Extracto 1-Fen(D)**<br>*P: Pues mira, no te lo voy a decir como lo que significa para mí. Voy a decir lo que quiero que signifique para los alumnos, ¿vale? Es… es que. Claro, es que peca de lenguaje, porque yo cuando introduzco la derivada siempre les digo que es el estudio de una variación en la función, ¿vale?*<br>[Entrevista 1, p. 23] |
| **Extracto 2-Fen(D)**<br>*P: Por ahí empieza, entonces para mí ¿Qué va a ser? Pues, el estudio de la variación de la función con respecto a una distancia, distancia que se acerca.*<br>[Entrevista 1, p.23] |

Nótese la interesante diferenciación que el profesor establece entre una definición personal suya y la que brinda a sus alumnos. En la definición que da a sus alumnos podemos ver cómo él mismo reflexiona acerca de lo inadecuado o parcialmente correcto del lenguaje que usa. En particular, el estudio de una variación en la función, podemos entender que a priori no es una definición *per se* de la derivada, sino una forma de describir, sucinta, coloquial y difusamente, la naturaleza de la derivada. Sin embargo, cuando Aarón da su definición personal, se acerca mucho más a una definición formalmente correcta, aunque expresada de nuevo “coloquialmente”. Sin embargo, vemos el uso de la expresión “*distancia que se acerca*”, en el sentido de la tendencia hacia cero. Este uso denota la conexión que Aarón establece, consciente o inconscientemente, de forma implícita, con el infinito, en la tendencia hacia cero del límite. Sobre este tema se profundizó:

**Extracto 3-Fen(D)**

*E: Vale. ¿Y el infinito cómo está ahí?*

*P: Latente, ¿no?*

*E: Latente está siempre.*

*P: ¿El infinito cómo está ahí latente?*

*E: Latente o explicito. Si tuviera que estarlo.*

*P: Pues…*

*E: O no está, que puede ser que no esté. Si tú crees que no está…*

*P: Sí está por el simple hecho de la definición de derivada. Cuando se hace un límite está ahí, ¿vale? Está en la propia definición, desde luego. El límite de f(x) menos f(x+h), partido por h, cuando la h…tiende a cero, pues ahí está latente.*

[Entrevista 1, p.23]

Vemos que Aarón conoce la definición, y que achaca lo que él denomina latencia del infinito a la presencia del límite. Este concepto de latencia, descrito anteriormente, pone de relieve la consciencia de la relación fenomenológica de la derivada con el infinito, asentada en el conocimiento del profesor de la derivada y ulteriormente del límite. Por tanto, podemos afirmar que Aarón conoce la definición de derivada, y que es capaz de argumentar sobre ella la relación explícita con el infinito, lo cual le lleva a conflictos con su propia definición del infinito, lo cual veremos en un apartado posterior. Volviendo al uso que Aarón hace del infinito para su docencia, encontramos el siguiente extracto:

**Extracto 4-Fen(D)**

*P: Yo cuando explico las derivadas, lo que les hago ver es que, a ver, por creación, ¿no? Por descubrimiento, siglos atrás. Yo les decía: "estoy en un problema, ¿vale? Y estoy al límite, haz esta función", y… para que ellos más o menos se den cuenta de por qué la derivada. A X cuadrado, por definición, te lo estudias, la derivada por limites bla bla bla, y da 2x; a X cubo, tú te lo estudias en limite y te da 3x cuadrado; ¿Qué pasa? Que hay un proceso de mecanización que se descubre después a posteriori que es la derivada de una potencia elevada a N pues es tal. ¿Qué pasa? Que a todas esas derivadas, lo que estamos haciendo en realidad es en el punto calcularle la pendiente de la recta tangente, y más o menos, siempre funciona.*

[Entrevista 4, p.3]

Este extracto nos muestra un posible motivo de la generalidad de la definición anteriormente brindada a los alumnos. La explicitación de que el cálculo de derivadas lleva a un proceso de mecanización en la consideración de la derivada, que suele funcionar, nos lleva a pensar que Aarón no hace especial hincapié en el significado de la derivada porque no lo necesita, ya que *"más o menos, siempre funciona"*. Además, en el contexto de la discusión del tipo de abordaje de la derivada, hace la siguiente reflexión:

**Extracto 5-Fen(D)**

*P: Exactamente. Que… De todas maneras sí, últimamente, desde… cuando vi que me pillaba el toro lo que estoy haciendo es procedimiento, procedimiento, procedimiento, porque es que no me da tiempo de acabarlo al día. Trabajar los enunciados, y ejemplos de aplicación, es que…*

[Entrevista 4, p.4]

Esta reflexión, realizada en el contexto de la discusión sobre el significado de derivada que usaba en el aula, realza la poca necesidad que Aarón suele sentir de usar su conocimiento a nivel conceptual, ya que se centra en aspectos procedimentales dada la escasez de tiempo que posee, en un curso como segundo de bachillerato, al final del cual se encuentran la PAU[78].

[78] Prueba de Acceso a la Universidad, coloquialmente conocida como 'Selectividad'.

### *Límite-Cercanía (Fen (L))*

Enunciamos esta categoría para describir el conocimiento que posee el profesor acerca del límite como fenomenología del infinito. Sin embargo, en el propio nombre de la categoría, vemos la presencia del término “Cercanía”. Esto es debido a que el uso del profesor del límite puntual siempre derivaba en el uso de la terminología descrita en la categoría referida al lenguaje, describiendo el límite en términos coloquiales, principalmente ‘cercanía y lejanía’ como vemos a continuación:

| |
|---|
| **Extracto 1-Fen(L)**<br>*P: […] el límite para mí es estudiar el comportamiento de algo en la cercanía de algo.*<br>[Entrevista 1, p. 20] |
| **Extracto 2-Fen(L)**<br>*P: Cuando se habla por ejemplo del límite en el infinito yo siempre, además, no sé si me has escuchado en clase, digo en la lejanía, comportamiento en la lejanía y comportamiento en la cercanía.*<br>[Entrevista 1, p. 20] |

Por tanto, en el primer extracto vemos el carácter de estudio local del límite en un punto descrito en términos propios del lenguaje del profesor, accesible además a los alumnos. Esta terminología, de forma parecida a la anterior, permite a Aarón describir de forma breve, coloquial y poco rigurosa el concepto matemático de límite, pero a la vez es una descripción que, pese a ser poco rigurosa, no es incorrecta. En el segundo vemos un registro parecido al primero, solo que trasladado al hipotético discurso de aula, donde incorpora el término lejanía.

Es muy interesante esta noción de cercanía, equivalente a la noción de "para cualquier entorno próximo a un punto", no solo por la relación que posee con el infinito, sino por la coherencia de la que el profesor dota a su discurso en base a esta noción:

| |
|---|
| **Extracto 3-Fen(L)**<br>*P: Lógicamente no, la propia definición de continuidad en un punto, un límite lateral puede existir pero encima del punto a lo mejor no existe.*<br>*E: Vale.*<br>*P: En la cercanía sí existe, pero en el propio punto el valor no.*<br>*E: No es tan cerca como queramos, vale. O sea que, digamos, esa cercanía no es algo fijado, no es...* |

| |
|---|
| *P: No, no, no, no.*<br>*E: No es todo lo cerca que podamos…*<br>*P: Todo lo cerca que podamos llegar entre comillas.*<br>[Entrevista 1, p.20] |

Vemos esta consistencia en el razonamiento de Aarón a la hora de argumentar sobre la noción de cercanía aplicado al límite lateral en un punto en el contexto de la discusión de la función continua en un punto. Al hablar de cercanía, explica que el límite “en la cercanía” existe, pero en el punto no, con lo cual parece que existe un posible problema de definición, al afirmar que el límite existe en un ámbito local, ligado matemáticamente al entorno del punto, pero en el punto no, careciendo esto de coherencia matemática. Esta noción de cercanía hace a Aarón desproveer de sentido a la noción de límite puntual, ya que parece definir el límite puntual como el límite calculado sobre cualquier punto de un entorno del punto eliminando al propio punto. Sin embargo, cuando se le induce la problemática existente, él mismo induce la posibilidad del “acercamiento” (de la ‘cercanía’), siendo esto coherente con la definición de Cauchy del límite. Además, veremos que el uso de la cercanía le resulta también útil para interpretar las definiciones matemáticas, e incluso para reinterpretarlas en esta terminología:

| |
|---|
| **Extracto 4-Fen(L)**<br>*E: Vamos a volver a la definición del límite.*<br>*P: Vale.*<br>*E: Es esta de aquí.* [Para todo E>0 existe δ>0 tal que $\|f(x) - A\|$ <E para todo x en el dominio con $0 < \|x - a\| < \delta$]<br>*P: A ver.*<br>*E: Épsilon-delta, ¿no? Explícame el ‘cerca’ ahí.*<br>*P: El cerca está aquí [señala delta]*<br>[Entrevista 1, p.21] |
| **Extracto 5-Fen(L)**<br>*E: Vale. O sea que, digamos que está cerca, la definición de continuidad… si la quisiéramos decir como lejos/cerca ¿cómo me la dirías? En vez de decir que todo épsilon, etc., etc. Dame la definición de continuidad en términos de cerca. En vez de para todo y…*<br>*P: Ah, vale, ok. Pues, definiendo el limite te refieres.*<br>[Intenta definirlo tres veces, y a la cuarta:]<br>*P: Si fijamos, ¿vale? Si fijamos un valor en las cercanías de ese valor, que es la función. En* |

*esa función podemos encontrar otro valor [en el] que la función sea muy parecida en distancia a la... ese valor a en la propia cercanía de la función, ¿vale? Ahí dentro.*
[Entrevista 1, p.21]

En estos dos extractos, se le pidió que justificara, en primer lugar, el significado del término ‘cerca’ en la definición de Cauchy, y en el segundo que reinterpretara dicha definición en la terminología. En el primer caso, Aarón efectúa un ejercicio de evaluación del significado del término ‘cerca’ en la definición, asignándoselo al valor delta, de manera que asocia la cercanía a la amplitud del entorno en el que se define el límite. Esta asignación da información acerca de la consciencia (o inconsciencia) de Aarón de la dependencia entre épsilon y delta en la propia definición. Al ver esta asignación, el investigador fue consciente de esta situación y planteó la pregunta que figura en el segundo extracto. Ante esta pregunta, el profesor hizo dos primeros intentos de organizar la información, un tercero donde pasó al registro escrito para poder aclararse, y un cuarto, que es el que figura en el extracto. Esta sucesión de intentos le llevaron a una definición que describió según plasmaba en un papel de forma gráfica su idea. Analizando su reconstrucción de la noción de límites, vemos como Aarón propone “fijar” el valor en las cercanías de x (en el sentido de poder elegir el épsilon), y como esa elección le lleva a poder evaluar la función en dicho punto, que estará en un entorno (en el sentido de elegir el delta), del valor de f en x. Así pues, podemos afirmar que no solo la terminología que usa, sino el concepto que esta refleja, que está íntimamente relacionado con el infinito al llevar implícito la posibilidad de elegir cualquier épsilon, permite a Aarón abordar coherente y correctamente los contenidos abordados en clase, con lo que forman una parte fundamental de la fenomenología que este conoce del infinito.

Pasamos ahora a mostrar un extracto en el que el investigador fuerza a Aarón a reflexionar sobre el significado de la expresión matemático-coloquial “en el infinito, el límite se alcanza”.

**Extracto 6-Fen(L)**
*E: Si excluimos el tiempo de la ecuación, ahora decimos, bueno: “El límite de esa sucesión no se alcanza”, independientemente del tiempo, ¿se alcanza?*
*P: Sí.*
*E: ¿Sí?*

*P: Se supone que sí, ¿no? Claro.*

*E: ¿Cómo se alcanza?*

*P: ¿Cómo que cómo se alcanza?*

*E: ¿Cómo se alcanza? o sea, ¿consideras 1 partido por N?*

*P: Sí.*

*E: Y, dice: "límite es 0"*

*P: El límite infinito, 0.*

*E: 0. Ahora te pregunto, ¿el límite ese se alcanza?*

*P: ¿En un término?*

*E: Al final, el límite de la sucesión, no, no, si no sería un A sub N, y ya habríamos acabado, sino en considerando el proceso completo si quieres, ¿se alcanzaría ese límite? ¿Podríamos decir que esa, esa sucesión en el infinito es igual a…*

*P: ¿A 0?*

*E: … a 0?*

*P: Podemos decirlo, ¿no? Se dice, ¿no?*

*E: Se dice. Pero se dice con sentido, o… es como un abuso del lenguaje…*

*P: No, no. Con sentido, ¿no? Se alcanza.*

[Entrevista 2.2, p.9]

Al preguntar al profesor por la 'alcanzabilidad' del límite, fue necesario excluir la variable temporal, ya que, como veremos, este profesor siente la necesidad de llevar las discusiones a un contexto realista o pseudo-realista.  Así, en esta discusión, el profesor considera el infinito como un punto en el que puede considerarse el valor del límite. De hecho, dado el marcado carácter potencialista de este profesor, se insistió, pensando en que podía estar respondiendo en base a convencionalismos matemáticos no razonados. Aarón no establece, aún así, un razonamiento completo sobre su afirmación, pero muestra unas reflexiones interesantes. En primer lugar, a la pregunta ¿el límite se alcanza?, responde preguntando si en un término concreto, induciendo la posibilidad de que dicho alcance en un punto tenga sentido para calcular el límite. Cuando se le induce una línea de pensamiento "actual" respecto a la "cantidad de términos" considerada al calcular el límite, equivalente en lo matemático a considerar la sucesión como conjunto, y su límite como el punto de acumulación, Aarón acepta dicha argumentación, como algo con sentido, y no propio de una construcción artificiosa, sino con sentido, y exenta de abusos de lenguaje. Sin embargo, hace esta consideración de corte actual tras inducírsele el razonamiento, no de *motu proprio*, por lo que no podemos afirmar con seguridad que sea plenamente consciente de las implicaciones de su afirmación. En la categoría que veremos tras la fenomenología, abundaremos en este tipo de consideraciones.

### *Orden del infinito (Fen (OI))*

Para finalizar, Aarón hace mucho hincapié en una propiedad que él atribuye al infinito, pero que, en lo que a la matemática concierne, hace referencia a los grados de crecimiento de diferentes funciones al considerar un comportamiento asintótico en un punto. Así, tras una clase en la que comentó el término “orden del infinito” a sus alumnos, se le preguntó por ello, a lo que respondió:

| |
|---|
| **Extracto 1-Fen(OI)**<br>*P: Los órdenes del infinito. Pues, cuando se comparan funciones, por ejemplo la exponencial con un polinomio, hago una escala de valor, de orden de infinito. El orden de infinito de los exponentes es mucho mayor que el orden de infinito de un polinomio. Entonces, cuando ellos comparan, yo no les he enseñado, por ejemplo a ellos a… después sí lo relacionan con L’Hôpital, pues para ellos les resulta mucho más* […] *que llegar a pensar que una exponencial pues tiene un infinito de orden superior que el de un polinomio.*<br>[Entrevista 1, p.6] |
| **Extracto 2-Fen(OI)**<br>Tras una pregunta sobre una situación en la que abordó los órdenes del infinito en clase:<br>P: *Eso iba por ahí, por lo que estoy diciendo. A ver, lo voy a mirar otra vez. Hemos dicho que en L’Hôpital se estudia la cercanía de un punto, las cercanías de A, pero, ¿Qué pasa si en vez de las de las cercanías de a estudiamos las de infinito? Vale. Ya sé dónde estoy, ahora a ver. Vale, ya hemos estudiado el caso 0 partido por 0, cuando el límite que quieres dar, qué pasaba cuando me daba infinito partido por infinito, vale. Ah, vale y lo de comparar, lo de comparar los órdenes de los infinitos.*<br>[Entrevista 4, p.10] |

Vemos en la respuesta de Aarón un profundo conocimiento matemático sobre la idea de “orden del infinito”, referida a la comparación del grado de crecimiento que posee cada función. No solo es capaz de dar significado al concepto, en términos de la escala de valores como comparación, sino usar la regla “práctica” que tiene sentido considerar en Secundaria para abordar las situaciones en las que interviene. Posteriormente, establece una posible transformación de comparación de dos funciones; en vez de considerar el comportamiento a nivel local, propone estudiarlo en el infinito, a través de la regla de L´Hôpital. Esta noción, de los órdenes del infinito, no solo la vemos como elemento matemático que el profesor conoce, sino también como objeto de enseñanza y posterior aprendizaje que el propio Aarón hace un esfuerzo por presentar de forma comprensible:

**Extracto 3-Fen(OI)**
*P: Yo siempre se lo hice con la gráfica. La gráfica de la exponencial la pinté, la polinómica, que es mucho menos fluctuosa, y después la… la logarítmica. Que sí, lo entienden más, mucho más lenta.*
*E: Vale, vale, vale.*
*P: Pero sí lo vimos con la gráfica, entonces sí entenderán que la exponencial crecía muchísimo más rápido que las otras dos y a la hora de comparar y la acción, pues dominan los órdenes*
[Entrevista 1, p.6]

Aquí Aarón no solo nos muestra su conocimiento de la forma de comportarse las funciones polinómica, exponencial y logarítmica, sino también cómo presentárselas a sus alumnos para que estos doten de sentido al concepto. Sin embargo, esta representación no es más que una ejemplificación para tres casos sobre cómo este orden de crecimiento en la tendencia al infinito se ve reflejado. Además, es interesante la dotación de propiedades que realiza este profesor sobre las funciones, hablando de "lentitud" o "rapidez" como propiedades de las mismas. Estas propiedades, que no tienen definición matemática, sí tienen sentido como propiedades intermedias auxiliares en la docencia para dotar de significado a la noción de "orden de infinito"

Así, hemos mostrado el conocimiento que Aarón parece poseer acerca de cuatro aspectos fenomenológicos propios de la matemática escolar en Secundaria, que surgen de las entrevistas realizadas. Como afirmamos antes, estos son los ejemplos que podemos ejemplificar con más evidencias, aunque se posee más información que da cuenta del conocimiento de Aarón de otros términos, pero al ser en muchos casos escasa la cantidad de información sobre un tópico concreto (aunque abundante en cuanto a la cantidad de tópicos que reconoce como fenomenología del infinito), hemos decidido no incluirla. Asimismo, el objetivo de mostrar estos extractos es dotar de significado, contenido y evidencias a la sub-categoría "Fenómenos", dentro de la categoría "Fenomenología", para que esta quede bien definida y explicada.

## Desarrollo Cognitivo del infinito (DCI)

Ya vimos en los antecedentes teóricos que existe una amplia tradición de estudios en los que se estudia el grado de desarrollo de la cognición del profesor, tratándolo como "aprendiz avanzado". En este estudio no era este el foco completo, sino una parte del interés del mismo, que emergió de las consideraciones de Aarón sobre los conceptos que constituyen la fenomenología del infinito, especialmente cuando se discutía sobre la naturaleza de dichos conceptos. A lo largo de toda esta categoría, haremos un gran énfasis en el vocabulario usado por Aarón, ya que este da cuenta, basándonos en investigaciones de corte cognitivo, de una cierta aproximación a la noción de infinito. Una primera aproximación la encontramos en el siguiente extracto:

**Extracto 1-DCI**

*E: hablas del 5,9; luego del 5,999999 y, bueno, yo me pregunto, para ti, incluso para ellos ¿el 5,9 periódico Es igual a 6?*

*P: Casi igual a 6.*

*E: ¿Pero, es igual?*

*P: Si.*

*E: Es igual. Bueno, y ¿ellos [los alumnos] serian capaces de entender…?*

*P: : Yo… no estoy tan seguro que lo crean*

*E: […] una respuesta típica que dicen los alumnos es que bueno, que esto son casi iguales, uno es cero coma periódico uno más grande que el otro, ¿no?*

*P: Sí. Pero yo no, yo no he… los alumnos este año por ejemplo no creo que lo* [dijeran] *no creo.*

*E: Que lo… que lo crean, ¿no?*

*P: No.*

*E: Porque las fracciones son…*

*P: Son iguales.*

*E: ¿Y hay la misma distancia entre los dos, olvidando lo de las fracciones?*

*P: ¿La distancia? La distancia es tan pequeña, tan pequeña, ¿no?*

*E: Tan pequeña que…*

*P: Que sí.*

*E: Que sí. Pero es pequeña, o sea, no es 0.*

*P: Ínfima.*

[Entrevista 4, p.3]

Este extracto nos aporta información de la percepción y el entendimiento del profesor del infinito a través de la discusión de la igualdad 0.999…=1. La argumentación que hace sobre la 'casi' igualdad de ambas expresiones, basada en lo ínfimo de la distancia entre un número, el 1, y 'otro' número, el 0.999…, da cuenta de una visión iterativa del infinito, en la que asocia el proceso de ir añadiendo nueves a la expresión a la consideración de la periodicidad de la expresión. Sin embargo, cuando se alude a las fracciones, como constructo matemático que dota de sentido a dicha igualdad, Aarón llega a afirmar que *"son iguales"*. En este caso, observamos como la necesidad del infinito en un tipo de razonamiento induce a Aarón a considerar 0.999… como una expresión dinámica, incompleta, cuya diferencia con 1 es "ínfima", vocablo que entendemos pretende expresar un significado cercano a 'infinitesimal', en el sentido de cantidad cercana a cero pero indeterminada. Vemos, además, que su razonamiento ligado a la carencia de fin del proceso iterativo se extiende a otros conceptos, poco relacionados a la expresión fraccionaria de números racionales:

**Extracto 2-DCI**

*P: Para mí hay fractales regulares y fractales irregulares. Fractales irregulares, por ejemplo la naturaleza. […] él [El creador de cierto programa] llama fractal por ejemplo, hay una desembocadura en un río que sigue un cierto patrón, ¿vale? Pero acaba, lógicamente, acaba. Y… ¿cómo funciona un fractal? La repetición, es una repetición de figuras indefinidamente.*

*E: Aunque nunca llegue al final [frase de una discusión previa]*

*P: Aunque nunca llegue al final.*

*E: Yo ya tomo tu coletilla.*

*P: Se sigue, se sigue adentrando. Es que en esa, en ese dibujo se ve muy bien, en la aplicación, y tú tienes que… tú tienes que jugar con tiempo y se para, lógicamente.*

[Entrevista 3, p.10]

En este caso, vemos los fractales, elementos matemáticos que no pertenecen siquiera al contenido de la Secundaria y Bachillerato, pero sobre el que Aarón razona de una manera similar a la anterior. Él define un fractal como una repetición de figuras indefinidamente, que carece de un final, sino que *"se sigue adentrando"*. Nótese el uso del gerundio en esta expresión, que coincide con la idea intuitiva de "infinito como repetición indefinida". Vemos además, que Aarón puede diferenciar entre una situación de iteración finita, como es el ejemplo de la desembocadura de un río, y de iteración infinita, como en los fractales. Cabe destacar, de igual manera, el uso que el profesor hace de la idea de "acabar", afirmando que no tiene sentido ese final en los fractales, pero que para mostrarlo a otros, es necesario mostrar una cantidad finita. Sin embargo, esta carencia de final, ligado al "*se sigue adentrando*", y a la noción de repetición *indefinida*, con énfasis en esta última palabra, alimentan la percepción de que Aarón concibe estas situaciones infinitas como dinámicas, teniendo en cuenta el proceso que permite pasar de un elemento al siguiente y, por tanto, asociándolos al infinito a través de la iteración infinita. Estas aproximaciones que el profesor para verbalizar situaciones en las que el infinito tiene un papel importante, las observamos en múltiples ocasiones:

| |
|---|
| **Extracto 3-DCI**<br>[Discutiendo la construcción de la integral]<br>*P: Es que yo cuando hemos dado las integrales indefinidas sí se lo he dado. He definido las integrales indefinidas como la suma por defecto a la suma por exceso y acotando, acotando para que vean que coincidía con el área.*<br>*E: Total encogiendo los intervalos*<br>*P: Sí.*<br>*E: Vale, vale, vale.*<br>*P: Aumentando las particiones de la división que se hace tanto por exceso como por defecto y se veía perfectamente que se iban incorporando los rectángulos por defecto y por arriba*<br>[Entrevista 1, p.7] |
| **Extracto 4-DCI**<br>[Discutiendo la definición de derivada]<br>*P: Vamos mirando las distancias siempre, vamos calculando las pendientes de la recta, la mitad de la distancia (---) hasta que llegamos muy cerca de aquí que aparece una recta casi tangente. Casi tangente a este punto en la función, ¿vale? Entonces, ¿Dónde aparece el infinito en este caso? En los infinitas veces que me voy acercando desde aquí hasta aquí. La mitad, un tercio, y por arriba también, ¿vale?*<br>[Entrevista 1, p.23] |
| **Extracto 5-DCI**<br>[Discutiendo un límite con discontinuidad evitable]<br>*E: Vale. Pensando como límite ¿Qué tiene que ver con el infinito?*<br>*P: Sí, sí, claro, hombre. La aproximación si ¿no? Me estoy acercando muchísimo al 2 y hay un cierto problema.*<br>[Entrevista 1, p.28] |
| **Extracto 6-DCI**<br>*P: Se les pone un ejemplo, por ejemplo, el ejemplo que te dije el otro día, el de las ranas que* |

*saltan la mitad ¿Llegará o no Llegara? Y todo el mundo dice: "Claro que llega" y salta ¿no?*

*E: Y ¿Llega o no llega?*

*P: No llega, no llega.*

*E: ¿No llega?*

*P: No llega.*

*E: Vale*

*P: Al límite si llega, pero no llega. Físicamente no debería llegar*

[Entrevista 1, p.16]

Vemos cuatro ejemplos, en los que discutiendo objetos constituyentes de la fenomenología del infinito, Aarón verbaliza diferentes aproximaciones a la idea, explícita o implícita, de infinito. Sin embargo, podemos encontrar algunos elementos comunes a sus reflexiones. En primer lugar, la visión procesual que Aarón transmite sobre estos objetos, que trata desde la perspectiva de "continuar el proceso", siendo este proceso la división en particiones que se hace al desarrollar la noción de integral, la construcción de la idea de derivada a través de las tangentes, la aproximación que tiene implícita la idea de límite de una función real de variable real en un punto, o un ejemplo que él propone y usa abordar en clase, íntimamente relacionado con el límite de sucesiones. Analizando cada una de las declaraciones, el potencialismo en el razonamiento del profesor se hace evidente, una vez más, a través de la verbalización que este profesor establece, usando tiempos verbales imperfectivos, como las formas en gerundio: "*Acotando, aumentando*", en la integral; "*mirando, calculando*", en la derivada, o "*acercando*" para el caso del límite. De igual manera, aunque no a través de tiempos verbales, el profesor hace uso de expresiones que dan cuenta de su no consideración del proceso como una única entidad completa, sino como una colección de objetos a la que constantemente se le añaden más, concepción que parece limitarle al uso de expresiones como "*casi tangente*". Finalmente, vemos en el último extracto las reflexiones que Aarón hace sobre una situación propuesta por él, en la que llega a afirmar que cierto límite se alcanza, aunque no debiera físicamente alcanzarse. Esto nos llevó a pensar en la consideración que el propio profesor dará a argumentaciones que pretenden observar desde una óptica finita lo infinito, como veremos en la siguiente discusión, que surge de la discusión acerca de la expresión "*Dos rectas paralelas se tocan en el infinito*". Para ello, pese a no estar en el guión de la discusión, el investigador recurre a las proyecciones estereográficas como forma de visualización.

**Extracto 7-DCI**

*P: Si. Un punto ¿no? Tú dices una proyección, ¿vale? De este punto* [el polo] *a la superficie de la esfera, ¿no?*

*E: O sea, desde este punto.*

*P: Desde este punto.*

*E: Que corta la esfera y que luego corta el plano.*

*P: Vale*

*E: ¿Te suena de algo esto?*

*P: Si, si, claro, claro. […] y ahora tú dices por ejemplo que mire esta paralela, pero por el otro lado por ejemplo por aquí arriba, ¿no?*

*E: Si*

*P: Mas o menos. De hecho la recta, de hecho los, las rectas sobre la esfera confluyen, ¿no?*

*E: ¿Dónde?*

*P: Aquí* [señala el polo]

*E: Podríamos decir que se cortan en el infinito por algo relacionado con eso o… ¿no te convence?.*

*P: Con lo que te he dicho antes, el proyectivo. Si tú te das la vuelta parten de ahí, ¿no?*

*E: Pero digamos que el proyectivo es una creación para contemplar eso.*

*P: ¡Ah! Creación.*

*E: Si, si, si, si.*

*P: Creación ficticia para explicar lo inexplicable.*

*E: Pero esto no es ficticia, esto lo estás viendo.*

*P: Sí, sí. Eso lo estoy haciendo lógicamente. Pero, claro en el último caso extremo, cuando tu proyectas la recta al último punto, al último punto, se pierde. Tú no lo controlas.*

*E: No lo controlas. Vale, vale, vale. Me parece correcto. Entonces, la idea, para que ya a mi me quede claro, tú me has dicho que confluirían en este punto las dos rectas paralelas.*

*P: Para darle su explicación, sí.*

*E: Sí, ¿o te estoy… [malinterpretando]?*

*P: Sí, con un agujero.*

*E: Con un agujero, vale. Aquí un agujero.*

*P: Con un agujero.*

*E: Vale.*

*P: Se va a ver que va a confluir, pero no se sabe.*

[Entrevista 1, p.18]

Este ejemplo induce en el profesor una forma finita de considerar el paralelismo, al llevar la forma de representación a la geometría esférica, y específicamente al usar el tránsito entre la geometría euclidiana y la esférica como herramienta para poner de relieve las concepciones del profesor. En este caso, vemos como el profesor está familiarizado con el ejemplo de las proyecciones, habitual en los cursos de variable compleja recibidos durante la formación como matemático. Asimismo, el propio profesor, sin ayuda, concluye que los puntos "*confluyen*" en el polo norte de la esfera. Esta confluencia da una vez más una visión dinámica del proceso de creación de las proyecciones de las rectas sobre la esfera, e incluso, cuando el investigador introduce el término "se cortan", que pese a la imprecisión del mismo, refleja una visión actual del infinito, como hecho ya consumado, Aarón recurre a una noción que anteriormente había planteado como es la de la geometría proyectiva (que no se abordó explícitamente, pero que el propio profesor declaró que para él era una herramienta operativa alejada de consideraciones conceptuales). Asimismo, recurre a su definición del infinito como "*creación ficticia para explicar lo inexplicable*", mostrando su idea del infinito como elemento propio de un esfuerzo por abstraer matemáticamente nociones que en "la realidad", carecen de explicación. Más interesante aún es el hecho de que, al considerar el comportamiento en el punto polar, se basa en la falta de control, o en la pérdida del mismo, para argumentar su entendimiento de la situación. Esta visión, de nuevo, supone una comprensión completamente potencialista del infinito con rasgos pre-potencialistas, cercanos a las consideraciones griegas del Apeirón. Aarón pasa de considerar el proceso de proyección del plano sobre la esfera, de una forma constructiva, a detenerse y considerar que en ese "último" punto, no se puede controlar el comportamiento de la proyección, usando la expresión "*no se sabe*" y "*no lo controlas*". Asimismo, considera que una buena representación sería considerar el polo con un "agujero", notación habitualmente usada para representar la no pertenencia de un punto a cierto conjunto, ligada a la noción de abierto. Inferimos, de igual forma, que Aarón no está habituado a tratar con conjuntos que contienen a todos sus puntos de acumulación, esto es, conjuntos cerrados, como forma útil de evitar la problemática que generan las sucesiones que convergen a puntos fuera del conjunto. Como esta práctica es interesante de cara a la consideración del infinito, se abundó en ella en una posterior discusión:

**Extracto 8-DCI**

[El profesor recuerda una argumentación anterior sobre la correspondencia biyectiva entre $[0,1)$ y $[0, +\infty)$]

*P: […] Tú fijabas aquí un punto, ¿no? Ibas proyectando, ¿no? Entonces, este punto siempre iba en proyección entonces, aquí nunca lo alcanzaba. Realmente aquí nunca puedes unir, porque eso está abierto…*
*E: ¿Y si lo cierras* [El intervalo [0,1)]*?*
*P: Si lo cierras. Si lo cierras, que es lo mismo que en tiempo finito, ¿no?*
*E: Bueno, en tiempo finito…*
*P: A eso me refiero.*
*E: No, no entiendo…*
*P: Vamos a ver. Si esto está abierto y nunca lo alcanzas, tú no puedes unir el último punto para que sea paralela.*
*E: Esta abierto, no tiene sentido considerarlo, ¿no?*
*P: No se alcanza, ¿vale? Cuando lo cierras, en ese caso sí.*
*E: Que se tocarían…*
*P: Que es el último elemento.*
*E: ¿Y este último elemento de aquí no tendría un equivalente en la recta, digamos?*
*P: No lo tiene.*
[Entrevista 2.2, p.10]

Vemos la discusión que se establece sobre la posibilidad y el sentido de considerar la proyección del último punto, el 1 del primer intervalo, sobre la recta [0, +∞)[79]. En un primer momento el profesor asocia esta discusión a una previa, desarrollada sobre las preguntas del cuestionario, aunque posteriormente se profundiza en la idea de cerrar o no cerrar el conjunto. Aarón, al considerar la proyección, no considera dicha proyección como un producto de un proceso, sino el proceso en sí, reflejando esto de nuevo la visión potencialista que posee sobre el infinito. Además, cuando considera la noción de "último elemento" sobre el intervalo compacto, Aarón se niega a considerar la posibilidad de seguir con el proceso proyectivo, y afirma que el 1 no tiene equivalente sobre la recta.

Así, consideramos evidenciada la tendencia potencialista que Aarón posee respecto del infinito, mostrada a través de sus reflexiones sobre diferentes fenómenos cuyo núcleo en común (noúmenos), es el propio concepto que nos ocupa. En resumen, este profesor, en sus reflexiones, se centra en el papel del proceso, más que en el producto final,

[79] Pese a escribirlo como abierto, se pretendía que el profesor considerara la clausura de los reales positivos, esto es, la noción del conjunto de los reales ampliados: $R \cup \{\infty\}$.

llevándole esto a consideraciones que le hacen alejarse de una concepción actual del mismo.

## Conflictos-Disonancia Cognitiva (C-DC)

La concepción potencialista de Aarón, en ciertos momentos, le lleva a estados conflictivos o de *Disonancia Cognitiva* (Festinger, 1957), originados por la confrontación entre su forma de entender el infinito y situaciones con las que está familiarizado pero sobre las que, al reflexionar, se hace consciente de sus propias inconsistencias y contradicciones en los razonamientos. Vemos un ejemplo de esto en el siguiente extracto extraído de la discusión sobre la naturaleza alcanzable o no del límite:

**Extracto 1-C-DC**

*E: Si se considera una sucesión […] por partes, mira: 0 si N es par y 1 partido por N si es impar, ¿se alcanza el límite?*

*P: ¿Cuándo N está indefinido?*

*E: Sí.*

*P: Se supone que sí.*

*E: Se supone que sí, ¿Qué significa?*

*P: Hombre, […] pero es que los valores de sucesión van saltando, van oscilando, entonces, los valores son distintos, no debería alcanzarse el límite. En el límite vale 0, con lo cual, en el límite, el límite de esa sucesión es 0. Pero hay alternancia de salto.*

*E: ¿Podemos decir que al final los dos términos no son diferentes?*

*P: Yo sé por dónde vas, yo sé por dónde vas. Encerrar esto.*

*E: Sí. Al final es lo mismo.*

*P: Es cerrar o no cerrar, para darle sentido al infinito…*

*E: ¿Cerramos o no cerramos?*

*P: Yo sé por dónde vas. Es que me choca, ¿ves?*

*E: Es que choca, sí, sí, sí.*

*P: Es igual que este.*

*E: Sí, esas son las cosas que…*

*P: Me choca igual que esto. Entonces, si lo alcanzaras y pararas, el infinito, y se alcanzara ese valor, es 0 es 0 el límite. Es 0, vale. Pero como no lo puedes parar, lógicamente no lo puedes cerrar, no existiría el límite, lo va saltando.*

*E: ¿No existiría el límite, porque va saltando? Es que ya si considero 1 partido por N ya voy saltando.*

*P: Si es un valor discreto.*

*E: Es un valor discreto, por lo tanto, va a ocurrir siempre.*
*P: Sí, sí, sí. No existe.*
*E: No existe. El límite de a-sub n cuando hay infinitos no existe.*
*P: Aunque converja la segunda parte a la de arriba. Me estoy rayando tela, ¿eh? No, no si por más que me lo aceptes… pero en el más infinito sí vale el 0.*
*E: Los dos además. Los dos valen.*
*P: Los dos, los dos, los dos. Coinciden los dos, por tanto el límite es 0.*
*E: Pero es que ahí hay un problema.*
*P: Para serte consecuente con esto, ¿eh? Consecuentemente con esto no debería, ¿eh?*
*E: Pero esto es lo que tú piensas. No sé no tiene sentido hablar de un punto y hacer la equivalencia con el infinito.*
*P: Es que de… mi problema es llevármelo a lo terrenal. ¿Vale? Aquí no me cuadra y ahí sí me cuadra.*
[Entrevista 2.2, p.11]

Con el trasfondo de la posibilidad de alcanzar el límite, Aarón se enfrenta con una situación que le obliga a considerar el comportamiento en el infinito de una sucesión con un comportamiento asintótico, elegida por el entrevistador de forma que el límite fuera igual a cierta sub-sucesión constante (la correspondiente a los términos pares), de manera que el entrevistado no pudiera considerar argumentos del tipo “*no lo controlas*”. Ante esta situación, el profesor afirma, basado en su conocimiento matemático que el límite es 0, habiendo dos formas de aproximarse a este cero. Sin embargo, al considerar las dos sub-sucesiones por separado, surge el problema, en cuanto al hecho de alcanzar el límite o no, y Aarón identifica la situación como equivalente a la posibilidad de considerar la clausura del conjunto. En dicha situación, Aarón llega a dos razonamientos diferentes “*El límite se alcanza y es cero”*, y “*el límite no existe, va saltando”*. El primero responde a un razonamiento actual que Aarón, aunque no se ve muy inclinado a contemplar, es capaz de aceptar e incluso esbozar motu propio, y el segundo está ligado a una visión potencial, en la que el profesor se siente cómodo, basado en la consideración procesual de “ir añadiendo términos”. En este caso, el proceso de adición de términos, y las reflexiones que este profesor establece sobre él, desde una perspectiva potencial, le hacen incluso perder de vista el significado de convergencia, llegando a afirmar que la sucesión de término general 1/n no tiene límite, y que la sucesión definida por partes carece de límite, dado el salto finito que existe entre cada término y el siguiente, sin ser consciente de que este salto tiende a cero. En cuanto al razonamiento de corte actual, lleva a Aarón a afirmar la existencia del límite y el hecho de alcanzarse "*en el infinito*", coincidiendo los límites de ambas sub-sucesiones. Aún así, cuando se le pone de relieve la incompatibilidad de ambos razonamientos, se resguarda en el obstáculo que supone para él mismo la consideración de dicha situación en un contexto real. Sucede lo mismo en este episodio, anteriormente abordado:

**Extracto 2-C-DC**

*P: Se les pone un ejemplo, por ejemplo, el ejemplo que te dije el otro día, el de las ranas que saltan la mitad ¿Llegará o no Llegara? Y todo el mundo dice: "Claro que llega" y salta ¿no?*

*E: Y ¿Llega o no llega?*

*P: No llega, no llega.*

*E: ¿No llega?*

*P: No llega.*

*E: Vale*

*P: Al límite si llega, pero no llega. Físicamente no debería llegar*

[Entrevista 1, p.15]

Aarón razona sobre un ejemplo que él mismo ha construido, argumentando que la rana '*llega, pero no llega*', evidenciando el conflicto que experimenta al intentar dar contextos 'realísticos que den sentido a los constructos matemáticos abordados. Esta necesidad de realismo, que forma parte de las actitudes de Aarón hacia las matemáticas y hacia el infinito más concretamente, choca con lo abstracto de las consideraciones ligadas al infinito que requiere la matemática escolar, ligadas por ejemplo, a estudios de corte local para la convergencia de funciones, siendo dicha aproximación infinita como proceso, y por tanto, difícilmente recreable.

Veremos en el siguiente extracto que las dificultades de Aarón no se limitan a la confrontación entre infinito potencial y actual, sino que también pueden basarse en la confrontación entre aproximarse a un punto y tender hacia el infinito, o interpretar una misma situación en dos contextos matemáticos diferentes.

**Extracto 3-C-DC**

[Definiendo la derivada en un punto como pendiente]

*P: Vamos mirando las distancias siempre, vamos calculando las pendientes de la recta, la mitad de la distancia, la mitad, la mitad… hasta que llegamos muy cerca de aquí que aparece una recta casi tangente. Casi tangente a este punto en la función, ¿vale? Entonces, ¿Dónde aparece el infinito en este caso? En los infinitas veces que me voy acercando desde aquí*

| |
|---|
| *hasta aquí. La mitad, un tercio, y por arriba también, ¿vale?*<br>*E: Por arriba también. Y aquí. Al final, digamos, sí es la tangente. Al final hay un agujero.*<br>*P: Al final coincide con la pendiente de la tangente.*<br>*E: ¿Y eso es un problema? Digo para ti a nivel de contradicción.* [En relación al episodio sobre la correspondencia entre [0,1] y los reales positivos, implícito en la conversación]<br>*P: A ver, no porque… vamos a ver, en los que, lo que digo del agujero, vamos a ver, a ver sí, a ver si te, te explico una cosa y la otra. Para mí el infinito, ¿vale? Para mí es el medio para explicar lo que no tiene explicación, ¿vale? Entre comillas. Bueno, ¿Qué pasa con el ejemplo del agujero y qué pasa con este ejemplo de aquí? ¿vale? En este ejemplo de aquí, llevas razón en que no es igual*<br>*E: Te he pillado. Tiene sentido o una cosa o la otra, o plantearnos qué pasa en los dos casos, de donde, qué significa.*<br>*P: No, es que, de hecho, de hecho siguen concordando las dos cosas. En el otro caso, te estoy diciendo en el agujero que no se tocan.*<br>*E: ¿Y aquí? ¿Se toca o no se toca?*<br>*P: Se toca el qué.*<br>*E: Digamos, el punto donde… Digamos que ahí al final decíamos que no se alcanza el límite, porque, bueno no tenía sentido alcanzar el punto, ¿no? Pero aquí, objetivo es ver qué pasa en el punto para calcular la tangente que existe en ese punto concreto. No podemos considerar que haya agujero, porque si… digamos.*<br>*P: No, no lo hay, no lo hay, no lo hay. De hecho, por definición no lo hay. Se dice que la pendiente es esa.*<br>*E: Se dice y es, ¿no? A ver si nos están engañado.*<br>*P: Y es, es. No, no, no.*<br>*E: Hay una contradicción, o sea un poquito… si quieres.*<br>*P: No, yo creo que no la hay. Yo creo que significa las dos cosas lo mismo, ¿no? El que haya agujero allí, no implica que no lo haya aquí.*<br>[Entrevista 1, p.25] |
| **Extracto 4-C-DC**<br>[Sigue del fragmento anterior]<br>*E: A ti te causa problemas con la proyección estereográfica.*<br>*P: Sí.*<br>*E: ¿Por qué? No acabo de ver la relación*<br>*P: Porque… ¿Cómo que por qué?*<br>*E: Ah, vale. Por la cosa de la tangente, en un sitio es como un plano tangente.*<br>*P: Tú no la puedes controlar, al final tú no puedes controlarlo. Aquí esto sí. Vamos a ver,* |

| |
|---|
| *cuando tu hacer lo de la proyección estereográfica… yo creía que me estabas hablando de eso. El plantear el agujero, tú la proyección tú no la puedes pintar, aquí y aquí tu sí puedes pintar la tangente. De hecho, aquí sí tienes fin por decirlo así de una manera, aquí no tiene fin, yo no puedo llegar a pintar el último punto, último punto con el que llegamos, pero aquí sí puedo pintar, esto sí tiene fin. Y el fin es este, la tangente. Por eso, decía yo que no hay contradicción ninguna. ¿Vale?*<br>[Entrevista 1, p.25] |
| **Extracto 5-C-DC**<br>*E: Vale. ¿Y aquí no puedes intuir también la tangente va a ir por algún sitio? Digamos, tú tienes la circunferencia* [Se dibuja una circunferencia tangente a una recta horizontal].<br>*P: Sí.*<br>*E: Lo vamos a hacer sobre el plano y tú vas trazando las líneas, ¿no? Para acá, para acá, para acá…* [Se trazan proyecciones del polo norte a diferentes puntos de la recta, todos en la semirrecta real]. *¿No puedes intuir que al final va a pasar algo con, con esa recta que no podríamos dibujar, porque no tendríamos el punto, pero que en realidad sí podríamos intuir donde va a estar esta recta?*<br>*P: Pero no se puede pintar.*<br>*E: No se puede pintar. A lo mejor no tendría sentido pintarla, pero sí tendría sentido, por coherencia digamos, decir que va a estar por ejemplo aquí.*<br>*P: Exactamente eso, eso es.*<br>*E: Sí podría, ¿no?*<br>*P: Sí.*<br>*E: Vale.*<br>*P: Eso sí.*<br>*E: Eso sí es, vale.*<br>*P: Pero que lo que te quería explicar, los casos son distintos, porque aquí* [en la derivada] *yo sí puedo pintar el fin, aquí no.*<br>[Entrevista 1, p.26] |

Vemos en este episodio, separado en tres extractos para facilitar su lectura, una situación en el que el profesor reflexiona sobre la naturaleza de la convergencia puntual de funciones. En primer lugar, nos parece muy interesante la segunda parte, en la que Aarón establece su reflexión acerca de las semejanzas y especialmente diferencias entre el caso de definir la derivada como el límite de las pendientes de las secantes, y explícitamente dibujarla como la tangente, y el caso de considerar el polo norte de la esfera en las proyecciones estereográficas como punto vacío. Aarón no considera iguales las situaciones debido a la posibilidad de dibujar la derivada en el caso de la derivada y la imposibilidad que él encuentra para el caso de la asignación del polo de la esfera al infinito, que parece estar basada en el aspecto material ligado a la posibilidad física de dibujar el punto o no. Esto muestra el grado de reflexión de este profesor sobre la noción de convergencia, y cómo tiene cierta carencia de visión 'estructural' de la matemática, al considerar convergencia a punto y convergencia a infinito como elementos diferentes y que, por tanto, no responden a la idea común de límite.

En un segundo acercamiento a este episodio, con el foco en el primer extracto ahora, observamos al profesor enfrentado a una situación en la que debe razonar sobre la idea de alcanzar el límite o no, y sobre la coherencia de dicho alcance. Vemos que en el caso de la derivada, al estar considerando un punto perteneciente al conjunto, y la aproximación a dicho punto, acepta que dicha aproximación se alcance, generando la derivada como recta tangente, mientras que en el caso relativo a la correspondencia biyectiva entre los dos intervalos no la acepta dado el carácter 'no explicable' de lo que sucede al tratar con el infinito. En resumen, Aarón, consciente de que en ambos casos el proceso es infinito, se resguarda en su definición pre-aristotélica del infinito para evitar el conflicto, aunque, al ahondar en el comportamiento en el extremo del intervalo, reconoce la diferencia que entiende que existe entre ambos contextos, en el primero el proceso aproximativo es 'controlable', por estar en un punto *'que puedes pintar'*, y en el segundo no lo es, dado que el punto donde se produce no se puede identificar con un lugar físico concreto. Este último hecho está reflejado en el tercer extracto, en el que Aarón razona sobre la posibilidad de pintar el punto en el caso de la derivada y no en el caso de la proyección, derivado de la posibilidad física de dibujar el punto en cuestión.

Esta categoría está íntimamente relacionada con la anterior, ya que puede ser entendida como consecuencia de la misma, pero dada la cantidad de evidencias que tenemos, así como de las implicaciones de otras categorías, como la de *Fenomenología*, decidimos darle la entidad de categoría.

## Errores conceptuales (EC)

Esta categoría da cuenta de cómo la cognición de Aarón sobre el infinito, así como los conflictos que experimenta, generan errores en su abordaje a determinadas situaciones, conceptos y propiedades matemáticas, que al ser contenido de posible transmisión al alumno, pudiera generar en sus estudiantes imágenes erróneas del contenido, o incluso generar aprendizaje de propiedades *falsas*.

Mostraremos varios de los errores detectados en el profesor, para mostrar cómo su forma de comprender el infinito le lleva a errores de diversos tipos y formas:

**Extracto 1-EC**

*P: Cuando en 1º de la ESO, bueno, en 1º y 2º se dan los números primos, sé que hay infinitos números primos, pero que los números no se pueden contar, no terminan, ¿vale? Y en la palabra no terminar ya va implícito ahí el infinito."*

[Entrevista 2.1, p.2]

Vemos en esta breve declaración del profesor un evidente reflejo de los conflictos que sufre. En este caso, observamos como considera como números no sujetos a un posible conteo a los primos, subconjunto de los naturales. Ese error se debe a la asociación que parece establecer entre la no finitud de los mismos y la imposibilidad de contar dichos números, siendo esta una consecuencia directa de su forma de conocer el infinito a nivel intuitivo, basada en una concepción pre-aristotélica, resultante de concebir el infinito como entidad equivalente a lo desconocido. Esta imposibilidad de contar el profesor no llega a explicitar que la usa en clase, pero dado el carácter utilitario que tiene esa caracterización del infinito, podría esperarse que lo hiciera.

**Extracto 2-EC**

*P: Bueno, ya eso es un poco más grande, un poco más de nivel, pero en Secundaria, por ejemplo, cuando se resuelven ecuaciones que tienen que sustituir la solución para que la solución sea factible, resulta a lo mejor que queda dividido en la solución y, […] cuando tu sustituyes la solución para que sea factible pues te sale un 0 en el denominador, eso qué significa, también queda ahí latente ¿eh?*

[Entrevista 1, p.4]

Aarón muestra aquí cierta familiaridad con el contenido matemático, como es la idea de relacionar la división por cero con ciertos contextos en los que surge el infinito. Sin embargo, en este caso, el contexto al que asocia esa 'latencia' del infinito resulta del todo inadecuado desde la perspectiva de la matemática escolar, ya que en la resolución de ecuaciones algebraicas, el contexto al que Aarón se refiere, carecen de sentido los ceros en el denominador, salvo para excluir posibles soluciones. Así, en el contexto de a los límites de funciones algebraicas, se puede encontrar dicha subyacencia del infinito en cuestiones derivadas de la propia epistemología del límite como aproximación, pero no en este contexto, en el que no se exploran las soluciones por aproximaciones, sino por técnicas algebraicas, habitualmente alejadas de los procesos iterativos. Así, la familiaridad de Aarón con el objeto a considerar, expresiones algebraicas, le lleva a considerar la posibilidad de usar técnicas no propias de este caso, por lo que vemos que establece conexiones 'incorrectas' usando el infinito.

**Extracto 3-EC**

*P: Se les pone un ejemplo, por ejemplo, el ejemplo que te dije el otro día, el de las ranas que saltan la mitad ¿Llegará o no llegará? Y todo el mundo dice: "Claro que llega" y salta ¿no?*

*E: Y ¿Llega o no llega?*

*P: No llega, no llega.*

*E: ¿No llega?*

*P: No llega.*

*E: Vale*

*P: Al límite si llega, pero no llega. Físicamente no debería llegar*

[Entrevista 1, p.15]

En este caso, el error que observamos en Aarón no es tanto derivado de la certeza de que la rana llegue o no llegue, o en términos matemáticos, sobre si el límite se alcanza o no[80], como sobre la unicidad de la respuesta a dicha pregunta. A una pregunta, cuya solución admite diferentes respuestas según la forma de comprender que tenga el interlocutor, Aarón da las dos respuestas como posibles, '*si llega, pero no debería llegar*'. Esta respuesta, que refleja el conflicto descrito en la categoría anterior, da muestra de la no consciencia, y por tanto desconocimiento[81] de Aarón acerca de que ciertas preguntas en matemáticas tienen una única respuesta, o que, según las condiciones bajo las que se trabaje, se podrá dar una única respuesta, que podrá variar en función de las condiciones. Asimismo, informa de la no consciencia del sustento topológico a las nociones ligadas a la aproximación. Toda esta no consciencia de diferentes aspectos, ligados a una forma de comprender el infinito basada en la

[80] A nivel epistemológico, el hecho de que el límite se alcance o no, se basa en la consideración del punto de acumulación como perteneciente al conjunto o no, es decir, si consideramos la convergencia en abiertos, carece de sentido considerar, en muchos casos, la posibilidad de alcanzarlo, mientras que en cerrados, siempre se alcanza.

[81] En la línea de la definición de Schoenfeld, la no consciencia equivale a que la información no está disponible para ser usada, aunque se posea la información.

necesidad de realismo, anteriormente descrita, lleva a este profesor a cometer un error de falta de sustento lógico.

**Extracto 4-EC**

*P: Pues, la densidad, no se por ejemplo encontrar algún numero entre medio de los dos, ¿no? el agujero y… que agujero con mis palabras. Hay agujeros entre números y si hay agujeros entre números pues sí, podemos encontrarnos un agujero dentro de otro agujero. ¿Con que quieres que te lo relacione?*

*E: Con el infinito. ¿Cómo está el infinito ahí presente?*

*P: Pues, hay infinitos en el agujero*

*E: ¿Cómo hay infinitos agujeros?*

*P: Dentro de dos números hay un agujero donde podemos colocar otro número ahí en medio. Entre ese y el posterior pues también hay un agujero dentro donde puedo meter otro número.*

*E: Anterior posterior.*

*P: Bueno, anterior posterior, vale*

[Entrevista 1, p.15]

En este extracto, el error que muestra Aarón no creemos que se pueda considerar sólo como tal, sino como una falta de conocimiento y reflexión sobre el contexto. Vemos que usa la verbalización ‘posterior’, para hablar del punto ‘siguiente’ a otro, términos no propios de conjuntos densos. Así, hablar de ‘agujeros’, pese a ser una terminología coloquial e informal, se puede aceptar que no induce a error en el interlocutor, mientras que usar la noción de posterior, aún siendo más próximo a lo formal, si genera la posibilidad de considerarlo un error. Asimismo, resulta llamativa la explicación relativa a los ‘agujeros’, afirmando que *‘podemos encontrar un agujero dentro de otro agujero*’. Entendemos que se refiere a que dados dos puntos, se pueden considerar extremos de un intervalo, y que, el interior de dicho intervalo, se podría considerar un ‘*agujero’*[82]. Esto no supone un error en términos matemáticos, pero si genera confusión sobre el significado del término, que también usa, al representar funciones, para hablar de los puntos donde hay un comportamiento asintótico y que, por tanto, se consideran ‘*agujeros*’ en el dominio de la función[83].

[82] De forma coherente con las construcciones realizadas por este profesor, no necesariamente correctas.
[83] Observado en su práctica docente en el aula.

## Significados del infinito

Al indagar en el conocimiento de Aarón sobre diferentes conceptos propios de la fenomenología del infinito, surgieron diferentes contextos que mostraban el uso que Aarón hacía del concepto, sustentado en diferentes significados epistemológicos del infinito, asociado a lo ‘grande’, lo ‘pequeño’, y a lo ‘desconocido’. Estas conceptualizaciones, las dos primeras intuitivamente sencillas y más comunes en la literatura de investigación, y la tercera, que constituye una visión diferente, que no hemos encontrado apenas en literatura previa, surgieron, en diferentes contextos, desde algunos propuestos por él, a otros provenientes de la entrevista, hasta algunos que se abordaron en su aula, pasando por preguntas contingentes en la entrevista en base a indicios y oportunidades que el investigador detectó, tanto ‘in situ’, como en la revisión de las entrevistas para el refinamiento de las siguientes sesiones.

Hemos de remarcar que esta categoría no trata de comparar los significados que el investigador comprende del infinito con la cognición de Aarón, sino buscar los significados que él asigna al infinito o usa, de manera que significados como el de infinito construido en base a la iteración, que algunos autores (e.g. Lakoff y Nuñez, 2000) creen básico y fundamental para la construcción del infinito, no emergen más allá de cómo un contexto o parte del método en el que Aarón se basa para dotar de significado a los conceptos escolares que aborda en su aula.

### *Infinito grande (S(G))*

Los significados asociados a esta concreción de la categoría vienen dados por los contextos en los que Aarón detecta el infinito o reflexiona sobre él asociándolo a un número ‘muy grande’, a un punto ‘muy lejano’, o en general, a elementos cuya cantidad de magnitud, en general longitud, es un número tan grande que se hace inconcebible. Los tres ejemplos que mostraremos en primer lugar para comenzar a evidenciar las reflexiones de Aarón en torno al ‘infinito grande’ pertenecen a extractos de la entrevista dedicada a que fundamentara la relación del infinito con los conceptos que él mismo propuso en su mapa conceptual.

**Extracto 1-S(G)**

[Explicando la relación de la media estadística con el infinito]

*P: Vale, por la ley de los grandes números. Cuanto más amplia es la muestra, cuantos más*

*datos estudies, más precisa se puede hacer la media.*
*E: Y ¿cuál es la relación ahí con, con el infinito?*
*P: El tamaño de la muestra, cuanto más grande, cuando más tiende a… muy grande, por ejemplo lo de la moneda, ¿no?*
[Entrevista 2.1, p.4]

Este primer extracto muestra al profesor justificando la presencia del infinito en un contenido explícito en el currículo, como es la Ley de los Grandes Números[84], para dar sentido a la relación entre el infinito y la media. En esta breve explicación que hace Aarón, vemos como establece el paralelismo entre lo grande del tamaño de la muestra y la idea de infinitud, asociando la tendencia a seleccionar una muestra '*cuanto más grande'* al concepto de infinitud, dando cuenta así del fundamento epistemológico del mismo que se pone en juego en este caso, y pudiendo inferirse cierto carácter iterativo en la verbalización imperfectiva que hace en el proceso de 'aumento' del tamaño de la muestra.

**Extracto 2-S(G)**
*P: La notación científica* [tiene relación], *no con el infinito, pero sí con los números muy grandes y con los muy pequeños negativos.*
*E: Vale*
P*: Con los números muy negativos y muy positivos. Por eso lo he puesto. Lo típico. La notación científica, los ejemplos que se ponen: la distancia de la… al sol 10 elevado a 11,* […] *un número muy grande, muy grande, muy grande, así que casi infinito, así muy grande.*
[Entrevista 2.1, p.6]

En este caso, Aarón muestra una concepción sobre el infinito en la que asocia el propio infinito a un número '*muy grande*'. En este caso, pese a existir una verbalización imperfectiva, ya que la reiteración de los '*muy grande'* dan sentido de crecimiento, Aarón llega a afirmar que 10 elevado a 11 es '*casi infinito*'. Esta concepción, surgida en la discusión de un contexto siempre finito, como es la notación científica, es un indicio más de que Aarón asocia la infinitud a una magnitud inconmensurable, derivando esta no posible medición del 'tamaño' de lo medido, pudiendo ser infinito, o al menos tan grande que su cognición y herramientas no le permitan medirlo. Ambas posibilidades

[84] Ver análisis curricular desarrollado en el marco teórico.

engloban la dotación de significado del infinito como elemento de medida mayor que cierto número[85] o mayor que cualquier número[86].

**Extracto 3-S(G)**

[Discutiendo sobre el significado que le da a la expresión "en la lejanía de una función", expresión usada por el profesor para abordar las asíntotas]

*P: En la lejanía de f, de la lejanía de f como que se olviden [de llegar], que es muy lejos. A ver, por no darle concreción.*

*E: Concreción.*

*P: Por no concretizar que la lejanía, bueno, al final es un punto que está perdido allí en el infinito, fijarlo también, ¿no? La lejanía de F, ¿vale?*

[Entrevista 4, p.9]

Este ejemplo refuerza lo anteriormente descrito acerca de cómo el profesor asocia el infinito a lo inconmensurable, en este caso en cuanto a la distancia y a la posibilidad de alcanzar el punto que él define como "*perdido allí en el infinito*". La conceptualización de este 'punto del infinito' deriva en este caso de la lejanía del punto respecto de cualquier punto abordable, con lo que aparece de nuevo el infinito asociado a algo 'grande', dado el habitual uso de lejanía como equivalente de gran distancia. Asimismo, esta idea de lejanía, ligada íntimamente al infinito, supone para el profesor el sustento epistemológico del límite en el infinito, noción que transmite a sus alumnos, con lo que no sólo observamos la cognición del infinito de este profesor, sino la posible transmisión de sus concepciones a sus alumnos.

### *Infinito pequeño (S(P))*

En esta sub-categoría, introduciremos los contextos en los que Aarón reflexiona sobre la presencia del infinito asociándolo a un elemento 'pequeño', o cercano a cero, siendo la noción anteriormente comentada relativa a la 'cercanía', fundamental para la comprensión de la dotación de sustento epistemológico que hace el profesor en todos los casos. Así, la idea de infinitesimal está muy ligada a esta categoría, pese a haber pocas relaciones explícitas con dicha idea.

[85] Para el caso de la infinitud asociada a lo realmente finito pero no abordable en cuanto a medición.
[86] En el caso de la infinitud asociada a lo infinito.

**Extracto 1-S(P)**

[Discutiendo sobre el significado del residuo al generalizar el estudio de las asíntotas en funciones algebraicas]

*E: Me dices "salvo una cantidad finita de términos"*

*P: Finita.*

*E: Sí, digamos la… te quedas con la cola nada más.*

*P: Exactamente. La que dejas, ¿no?*

*E: Y, ¿Qué significa que la diferencia es infinitamente pequeña?*

*P: Infinitamente pequeña… un número muy, muy, muy pequeño.*

*E: Muy pequeño.*

*P: Según lo que explicas ahí. Y es infinitamente pequeña, muy cercana.*

[Entrevista 2.2, p.16]

En este extracto observamos como Aarón, al considerar lo que él denomina residuo, considera que la diferencia entre el residuo y la función es muy pequeña, en sus palabras '*infinitamente pequeña*', usando una forma de expresión imperfectiva de nuevo que refleja cierto proceso iterativo de empequeñecimiento. Sin embargo, no llega a usar, en ningún momento, la idea de 'tan pequeña como queramos', que daría cuenta de la definición de infinitesimal, sino que dicha distancia infinitamente pequeña es un "*número muy pequeño*", pero sólo uno. Asimismo, identifica la pequeña diferencia con cercanía, en el sentido de la igualdad de ambos términos salvo una cantidad infinitesimal[87].

**Extracto 2-S(P)**

[Al preguntarle por la relación entre el cero y el infinito]

*El cero, puf , eh tiene que ver con el simple hecho de aplicarlo a L'Hôpital simplemente, una indeterminación cero partido por cero o infinito partido por infinito están en las mismas condiciones de aplicación de L'Hôpital que… entre una y otra, con lo cual íntimamente relacionados.*

[Entrevista 1, p.13]

Este ejemplo es una muestra de que la construcción que Aarón ha desarrollado sobre la idea de lo infinitamente pequeño parece carecer de la coherencia y consistencia que podrían esperarse en un matemático. Al preguntarle por la relación entre el cero y el infinito, recurre a una construcción en la que el tratar una indeterminación de tipo cero

[87] O la visión que Aarón tiene de lo que es un infinitesimal.

partido por cero es equivalente a tratarla como infinito partido por infinito. Así, establece una relación directa entre ambos en base a que ambos cumplen las condiciones de aplicabilidad del teorema de L'Hôpital[88], basada probablemente en la tendencia a infinito de los límites de tipo 'algo finito partido por cero'. Sin embargo, como tal, es una conexión, que emerge de sus consideraciones, y que se basa en la relación entre el infinito y el cero, pese a que dicha relación parezca estar fundamentada en una relación de tipo procedimental, que da cuenta de una comprensión de la relación inducida por el propio procedimiento.

**Extracto 3-S(P)**
[Al tratar la igualdad entre 5.999… y 6, Aarón previamente ha afirmado la igualdad de ambas]
*E: Y tú crees que sí* [son iguales], *porque las fracciones son…*
*P: Son iguales.*
*E: ¿Y hay la misma distancia entre los dos, olvidando lo de las fracciones?*
*P: ¿La distancia? La distancia es tan pequeña…*
*E: Tan pequeña que…*
*P: Que sí.*
*E: Que sí. Pero es pequeña, o sea, no es 0.*
*P: Ínfima.*
[Entrevista 4, p.6]

Este episodio muestra la discusión de uno de los ejemplos que clásicamente se ha usado para discutir la naturaleza del infinito. Aquí vemos como Aarón, discutiendo un ejemplo asocia la igualdad de 5.999… y 6 a la representaciones, inducido por el investigador. Sin embargo, al hacer el tránsito al contexto métrico, poniendo el foco en la distancia entre ambos números, su argumentación es ambigua, hasta que explicita que la distancia es *ínfima*. Esta forma de abordar la distancia entre dos números, que aunque él sabe que son iguales, la representación escrita de los mismos le hace razonar que son 'casi iguales', da cuenta de la asociación que establece entre lo infinitamente pequeño y el cero, como elementos relacionados, pero diferentes, hasta el punto de que esa relación le lleva a cometer errores, en términos de no poder distinguir, como en este caso, que la igualdad conlleva la nulidad de la diferencia, pese a 'parecer' infinitamente cercanos.

[88] No se indagó en profundidad en este aspecto, ya que en conversaciones informales previas, Aarón reconoció que no recordaba la demostración del teorema, y por tanto, el entrevistador consideró una vía estéril la pregunta por estas conexiones.

### *Infinito desconocido (S(D))*

Una de las características más relevantes y representativas de la forma de dotar significado de Aarón es su tendencia a asociar el infinito a lo ignoto, dando a entender una concepción apeironiana del infinito. Veremos, en los ejemplos que mostrarán el contenido de esta categoría, dicha tendencia a considerar el infinito como una entidad útil para abordar lo desconocido o indefinido[89]. Mostraremos multitud de ejemplos en los que Aarón se refiere a lo infinito como desconocido, basado en tres tipos de argumentación '*no se sabe*', '*no se controla*', '*no se puede explicar*'. También mostraremos la consecuencia más evidente de la forma de entender Aarón el infinito en su actividad docente, que es la definición que usa del infinito, tanto para dotarlo de sentido para sí mismo, como para transmitir a sus estudiantes.

| |
|---|
| **Extracto 1-S(D)**<br>[Discutiendo una explicación suya en el aula al introducir los números periódicos]<br>*P: Vamos a ver, lo que les quiero decir con lo del arquito, 1, 2, 3 bajo el arco, sí sabemos cuántos hay, ¿vale? Que son 1, 2,3, lugares decimales, ¿vale? 1, 2, y 3 lugares, pero que hay infinitos, que no se sabe cuántos y que hay infinitos. No se sabe cuántas veces de repite esa…*<br>*E: No se sabe, porque se puede repetir todas las veces que quieras.*<br>*P: Todas las veces que tú quieras. Exactamente. No se sabe.*<br>[Entrevista 4, p.13] |
| **Extracto 2-S(D)**<br>*E: Pero las* [sucesiones] *que tienen infinitos términos, ¿está bien determinado el numero de términos? ¿Eres capaz de decir cuántos tiene?*<br>*P: ¿Si hay infinitos? No.*<br>[Entrevista 2.2, p.2] |

La primera respuestas, del tipo '*no se sabe*', muestra como Aarón, al considerar el periodo de un número decimal periódico, establece que no sabe cuántas veces están presentes las cifras del periodo en la expresión desarrollada del número, a la vez que dice 'hay infinitos'. Se podría inferir cierto estado conflictivo[90], pero dada la cantidad de unidades de información de las que disponemos en la que se observa esta forma de expresión, comprendemos que Aarón asocia el desconocimiento a la infinitud. Este ejemplo resulta muy interesante porque el contexto de infinitud abordado es numerable

[89] En el sentido de carencia de definición, no de carencia de finitud.
[90] Ver categoría 'Conflictos'

y, por tanto, uno de los menos complejos que se pueden abordar[91], y ante este, su respuesta se basa en la imposibilidad de determinar la cardinalidad del conjunto (‘*cuántas veces*’), asignando a esa imposibilidad el nombre ‘infinito’. En el caso de la segunda, Aarón hace explícita esa asociación entre la falta de determinación de la cantidad de términos y la infinitud de las cantidades, obviando por tanto la posibilidad de que infinito represente el cardinal del conjunto, o dándole un carácter indefinido a su naturaleza.

**Extracto 3-S(D)**

[Discutiendo las proyecciones estereográficas]

*P: Pero, claro en el último caso extremo, cuando tú proyectas la recta al último punto, se pierde. Tú no lo controlas.*

*E: No lo controlas. Vale, vale, vale. Me parece correcto. Entonces, la idea, para que ya a mi me quede claro, tú me has dicho que confluirían en este punto las dos rectas paralelas.*

*P: Para darle su explicación, sí.* […]

*E: Sí o… te estoy* [forzando a esa respuesta]*?*

*P: Sí, con  un agujero.*

*E: Con un agujero, vale. Aquí un agujero.*

*P: Con un agujero.*

*E: Vale.*

*P: Se va a ver que va a confluir, pero no se sabe*

[Entrevista 1, p.19]

En este extracto, Aarón vuelve a mostrar su asociación del infinito a lo desconocido, usando de nuevo la expresión ‘*no se sabe*’ para referirse a la proyección estereográfica de dos rectas paralelas sobre la esfera. Sin embargo, en este episodio observamos un matiz que nos permite profundizar en la forma que Aarón tiene de entender el infinito y el impacto que esta forma de entenderlo tiene en sus razonamientos matemáticos. Ante la pregunta del investigador sobre la confluencia de las rectas en el polo de la esfera, Aarón confirma que efectivamente, para dotar de explicación a la situación, deberían tocarse en ese punto, pero que la naturaleza del comportamiento en ese punto le resulta ‘*incontrolable*’, por lo que no puede afirmar con seguridad el comportamiento local de las proyecciones de las rectas. Así, es interesante en este caso como Aarón, en su

[91] Frente a contextos no numerables, como los números reales.

concepción del infinito como ente desconocido, se basa en dicha concepción para dar una explicación al comportamiento de un fenómeno abstracto.

| |
|---|
| **Extracto 4-S(D)**<br>*P:* [El infinito es] *La invención del hombre para explicar lo inexplicable.*<br>[Entrevista 1, p.12; C.2.2] |
| **Extracto 5-S(D)**<br>*P:* [El infinito es/significa] *Desconocido, intocable. No inventado pero está ahí y para dar explicación a algo que no tiene explicación realmente*<br>[Entrevista 1, p.12] |

Estas dos son las definiciones que Aarón explicitó acerca del infinito, siendo la primera bastante recurrente a lo largo de las discusiones, y surgiendo la segunda en base a la discusión de la primera. Asimismo, el propio Aarón comentó que la definición del infinito como '*invención del hombre para explicar lo inexplicable*', era una definición que explicitaba a sus propios estudiantes. Esto muestra no solo la forma de conocer de este profesor el concepto matemático, sustentada, como hemos visto a lo largo de los diferentes ejemplos, en lo artificioso e ignoto de su naturaleza, sino que también muestra cómo pretende que sus alumnos construyan la idea de infinito. Resulta llamativo también que caracterice el infinito como elemento que da explicación a lo que '*realmente*' no lo tiene. Esto es coherente con la necesidad de realismo que Aarón demuestra en lo relacionado con el infinito, comentada en la descripción del caso.

En resumen, Aarón usa tres significados posibles para el infinito, dos provenientes del uso matemático del mismo, y otro fuertemente influenciado por sus concepciones acerca de la utilidad de la matemática y su naturaleza como construcción humana. Poseemos también indicios de otros usos y significados que Aarón considera acerca del infinito, principalmente ligados a contextos iterativos, pero al no disponer de saturación de datos, no se explicitarán salvo como posibles líneas futuras de investigación.

# Capítulo 4: Discusión de Resultados y Conclusiones

# Introducción

Dedicaremos este capítulo a cerrar el ciclo de la investigación, mostrando las conclusiones y aportaciones del estudio, a la luz de los resultados previos en la literatura de investigación, así como reflexiones sobre la prospectiva y las limitaciones de este estudio, para acabar con una valoración personal del desarrollo del investigador como agente del proceso investigador. Así, estructuraremos este capítulo en torno a cuatro grandes bloques:

El primero contendrá las aportaciones sobre el objeto de estudio, es decir, el conocimiento del infinito que el profesor puede movilizar, en el que mostraremos cómo las categorías emergentes del análisis se integran en el modelo de conocimiento profesional MTSK, para así mostrar las aportaciones que este estudio y en particular dichas categorías suponen para la comprensión del objeto de estudio. Esta primera parte del capítulo tendrá como objetivo mostrar los avances realizados en la caracterización del objeto de estudio y en la respuesta a la pregunta de investigación. Asimismo, sustentaremos los resultados obtenidos en la literatura previa, para mostrar la coherencia de lo obtenido, y la amplitud de la línea de investigación comenzada con este estudio. Este apartado concluirá con reflexiones acerca de las diferentes dimensiones del objeto de estudio: el conocimiento profesional y el infinito.

En el segundo bloque de este capítulo, enfrentaremos la tarea de reflexionar sobre el campo que se abre tras este estudio. Dadas las características exploratorias del mismo, mostraremos las diferentes líneas que este investigador considera abiertas tras el mismo, mostrando la posible continuidad de algunas de ellas. Asimismo, las líneas que mostraremos tendrán varios grados de cercanía y aplicación, desde líneas teóricas que pudieran seguirse de forma inmediata, hasta líneas ligadas a la implicación en el diseño de programas curriculares que requieren tanto una profundización como una maduración del objeto de estudio y del investigador, que se sitúan en un plano temporal más lejano.

A partir del tercer punto, las reflexiones vertidas emergen de la reflexión del investigador a lo largo de todo el proceso acerca de los diferentes aspectos que se indicarán. En el caso de este tercer punto, mostraremos algunas de las limitaciones que somos conscientes que han existido durante la investigación, ligadas a multitud de aspectos, desde propios de la metodología o de la elección del marco teórico, hasta intrínsecos a la idiosincrasia del investigador. Estas consideraciones se harán teniendo en cuenta que las limitaciones no han de tomarse desde una perspectiva negativa, sino que forman parte de los elementos que condicionan el desarrollo de la investigación.

El cuarto y último será un bloque en el que el investigador reflexionará sobre su propio papel como agente del proceso investigador, y de la relación simbiótica que han tenido esta investigación, y la formación como investigador y docente. Será escrito en primera persona por lo personal de las reflexiones vertidas.

## Discusión de los resultados y aportaciones sobre el conocimiento especializado del profesor acerca del infinito

La principal pretensión de esta investigación era profundizar en la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas sobre el infinito, aportando a la comunidad investigadora una mirada al conocimiento del infinito desde una perspectiva *para la enseñanza*. Así pues, esta sección, que pertenece a la discusión de resultados, constituye una parte fundamental de las conclusiones, en tanto en cuanto que muestra las aportaciones de este estudio a la comprensión del conocimiento del profesor acerca del infinito.

Esta sección se dedicará a una discusión profunda de las categorías emergentes, tomando como referente los subdominios propuestos desde el modelo MTSK, con cuyos subdominios compararemos las categorías resultantes del análisis teórico, mostrando como estas dotan de contenido a los mismos. Esto supone un proceso no solo de dotación de contenido del modelo teórico, sino también de refinamiento del mismo para el caso del infinito influenciado, en parte, por la forma de conocer Aarón el infinito como parte de su conocimiento para la enseñanza. Así, al ser Aarón un caso instrumental, abstraeremos en gran medida el contenido de las categorías emergentes, no limitándonos a la forma de conocer este profesor concreto el concepto, sino reflexionando también sobre un abanico posiblemente mayor, realizando conjeturas plausibles que podrían observarse en otros casos. Separaremos una vez más esta discusión en base a la dicotomía establecida por Shulman (1986) entre conocimiento didáctico del contenido y conocimiento de la materia, para conservar la estructura seguida en el capítulo de análisis de datos.

## Conocimiento didáctico del infinito (PCK-∞)

Durante el análisis de los datos encontramos las categorías descritas en el capítulo anterior, muchas de ellas relacionadas directamente con el conocimiento didáctico acerca del infinito. Al disponer del modelo teórico de conocimiento profesional desarrollado en paralelo a esta investigación, esta sección la dedicaremos a mostrar las relaciones entre los subdominios que este modelo propone, a saber, KMT, KFLM, KMLS, con las categorías que emergen del análisis, para así particularizar cada uno de los subdominios para el caso del conocimiento del infinito. De esta particularización al caso del infinito deriva la concreción de los nombres que usaremos para los siguientes apartados.

### *Conocimiento de la Enseñanza del infinito (KMT-∞)*

Este subdominio estaba ligado a las habilidades comunicativas del profesor, especialmente a las referidas a los canales y códigos usados por el profesor para establecer los procesos comunicativos en el aula.

En esta línea encontramos, durante el análisis de los datos, dos categorías que aportan contenido a este subdominio en relación con las habilidades comunicativas del profesor a la hora de abordar el infinito en el aula, una referida al lenguaje, y otra en cuanto a situaciones pasadas rememoradas, cuya fundamentación es escasa, recordando simplemente aquello que se hizo previamente, o metodologías concretas para ciertos ejemplos que, en el caso de Aarón, iban ligadas a la visualización directa o a la manipulación física de objetos.

Comenzando por el lenguaje, hemos comprendido que, en sintonía con la definición de conocimiento dada por Schoenfeld (2010), el lenguaje que se posee para comunicarse en el aula es un *recurso disponible para usar*, y por tanto nos parece plausible afirmar que uno de los recursos, probablemente el más usado durante la docencia, es el propio vocabulario, en el que se seleccionan las palabras que cada profesor considera más adecuadas para expresar a sus alumnos aquello que desea. En el caso de Aarón, él tendía a usar un lenguaje informal para comunicarse, y resultaba especialmente interesante la selección de sinónimos que hacía para referirse a conceptos matemáticos como el de pertenencia a un entorno arbitrariamente pequeño, que él denominaba sistemáticamente *'cerca'*, o el de tendencia a infinito, a lo que él denominaba *'lejos'*. Consideramos que cualquier profesor usará un determinado lenguaje, ya sea formal o informal, a la hora de expresarse cuando trate conceptos relacionados con el infinito. Asimismo, el uso de recursos verbales para expresar los distintos significados de conceptos cuyo sustento epistemológico esté íntimamente relacionado con el infinito, como sinónimos o metáforas, consideramos que es uno de los aspectos de especial interés que emergen de esta investigación. En esta línea son interesantes los trabajos de Lakoff y Nuñez (2000), en los que relacionan el uso de verbalizaciones concretas con el desarrollo de diferentes niveles de comprensión del infinito en estudiantes, o la comparación establecida por Kim, Sfard, Ferrini-Mundy (2005), en el uso de diferentes vocablos para expresar situaciones infinitesimales dependiendo del contexto sociocultural (en su caso, China y EEUU). No hemos encontrado investigaciones previas sobre las diferentes verbalizaciones establecidas por profesores de forma intencional, siendo una de las líneas que consideramos abiertas tras esta investigación, y una de las que, a nuestro entender, requiere mayor atención, ya que, coincidiendo con Van Hiele (1986), *"una gran parte de nuestras creencias han sido construidas en base a las interpretaciones de las afirmaciones de otras personas"* (p. 144), creencias extensibles al caso del infinito. Sobre estas consideraciones alrededor del lenguaje abundaremos en el subdominio dedicado a consideraciones ligadas al conocimiento del profesor acerca del aprendizaje de sus alumnos.

Centraremos ahora nuestras reflexiones en la segunda línea, basada en la actuación en el aula, relativa principalmente a la planificación e implementación de estrategias de enseñanza de conceptos relacionados con el infinito, habitualmente ligadas a recursos metodológicos. El origen de esta categoría fue, principalmente, la evocación del recuerdo de Aarón acerca de situaciones que previamente había experimentado, en las que había implementado estrategias de enseñanza en relación con conceptos como la indeterminación 0/0 en límites, a través de un abordaje epistemológico del mismo, con resultados satisfactorios para él. De igual manera, este profesor propuso algunas estrategias para abordar diferentes situaciones que se le plantearon, como la aproximación infinita a un punto a través de fractales, o dinámicas de cortado de papel que consideraba interesantes para la convergencia de series geométricas. Este tipo de abordajes manipulativos, visuales, o epistemológicos de situaciones relacionadas con el infinito suponen una aportación que consideramos interesante, ya que, pese a haber estudios previos donde se abordaban conceptos como el límite de una forma visual a través de herramientas tecnológicas (Navarro & Pérez, 2006), o incluso conceptuales (Tall & Schwarzenberger, 1989), la perspectiva que se observaba en dichas investigaciones era la del aprendizaje del alumno, y la que observamos aquí es la del conocimiento del formador.

### *Conocimiento de las Características de Aprendizaje del infinito (KFLM-∞)*

Los procesos de aprendizaje han sido uno de los focos habitualmente más explorados en la literatura del área, en concreto, se ha explorado la forma en que se aprenden conceptos ligados al infinito (e.g. Fischbein, et al., 1979; Falk 1994; Jahnke, 2001; Kolar & Hodnik-Cadeç, 2012;) o cómo se aprende el infinito en si (e.g., Dubinsky, et al., 2001, Mamolo, 2009; Roa-Fuentes, 2013). Sin embargo, pese a ser este un foco explorado, en cuanto al aprendizaje, el conocimiento del profesor acerca de cómo aprenden sus estudiantes no ha recibido una atención tan significativa en la literatura. Cabe destacar los esfuerzos realizados en el desarrollo junto a profesores de descomposiciones genéticas de conceptos (e.g. Gavilán 2005), ya que, pese a ser el foco de estos estudios el desarrollo de esquemas descriptivos sobre el modo de aprender, el papel que juega el conocimiento del profesor en estos estudios es significativo.

En este estudio emerge una categoría, a la que denominamos *"Pensamiento y acciones de los alumnos"*, en la que el profesor objeto del estudio de caso muestra su conocimiento acerca de cómo sus propios estudiantes razonan al tratar con el infinito. Esta categoría, además, engloba cuatro diferentes sub-categorías, en función de los aspectos del razonamiento de los alumnos que el profesor conoce, que hemos denominado: *Conocimiento de posibles significados elaborados por los estudiantes, Conocimiento de errores, dificultades y fortalezas esperados en los estudiantes, Conocimiento del proceso de construcción de razonamientos y conceptos, Conocimiento de la interacción con el contenido de estudiantes concretos.* Esta emergencia de sub-categorías no sucede con otras categorías, pero en esta, dada la amplia bibliografía existente sobre el pensamiento del alumno, y la naturaleza de los datos obtenidos, consideramos que desgranarla en diferentes tipologías resulta interesante de cara tanto al desarrollo de la discusión, como al planteamiento de futuras líneas de investigación. Pasaremos ahora a describir cada una de las sub-categorías, sobre cuyos nombres creemos necesario indicar que no están relacionados con el infinito debido a que hemos querido realizar un esfuerzo de abstracción, ya que consideramos plausibles extenderlas a otras nociones.

La primera de las sub-categorías es la relativa al conocimiento, por parte del profesor, de los diferentes significados que los alumnos construyen al tratar con la idea de infinito. En los ejemplos mostrados, vemos como Aarón es capaz de situarse en la posibilidad de que sus alumnos piensen en el infinito como algo de gran tamaño[92], como una 'gran' cantidad de elementos[93], como un continuo[94], o como una distancia muy pequeña[95], entre otros. Resulta interesante la relación entre el conocimiento puramente matemático de este profesor, en el que como vimos, el significado que acepta para el infinito es principalmente el asociado a lo desconocido, y las consideraciones que hace respecto de los significados que sus alumnos pueden construir, ya que entendemos que extrapola los significados que él mismo ha construido acerca del infinito a los que sus alumnos podrían construir. Esta es una relación interesante entre los subdominios del conocimiento didáctico del infinito y los del conocimiento matemático del mismo, ya que usa su conocimiento matemático para después establecer juicios de valor sobre la posibilidad de que un alumno construya o haya construido un determinado significado. Finalmente, en el último episodio del análisis mostramos un caso que nos parece de gran interés, en el que Aarón, usando su conocimiento matemático, acepta que un razonamiento no correcto construido por un alumno de una manera natural y 'lógica'[96] pueda modificar su propia manera de abordar matemáticamente una cuestión. Por tanto, consideramos que, en la línea de las generalizaciones plausibles que forman parte de la metodología de esta investigación, al abordar un concepto como el infinito, cuya naturaleza polisémica genera la posibilidad de considerar diferentes significados del mismo, un profesor puede estar familiarizado, posiblemente en base a su propio conocimiento matemático, con el elenco de desarrollos epistemológicos que sus propios alumnos puedan generar acerca del concepto tratado, influenciados muchos de estos por los contextos matemáticos en los que haya emergido.

[92] Asociable al infinito en contextos numéricos, un número variable no acotado.
[93] Asociable al cardinal de un conjunto.
[94] Asociable a contextos de cardinalidad no numerable.
[95] Asociable a la idea de infinitesimal.
[96] En términos de que el razonamiento responde a la modelización de una situación pseudo-real, con un nivel de intuición estándar de un alumno.

Pasando ahora a la segunda sub-categoría, el *Conocimiento de los posibles errores, dificultades y fortalezas esperados en los estudiantes*, es de nuevo una categoría muy relacionada con investigaciones realizadas previamente sobre el conocimiento del alumno, en las que se observaban estos errores, dificultades y fortalezas al pensar y trabajar con el infinito[97]. Durante esta investigación observamos cómo estos tres elementos, que entendemos que son eventos notables que suceden durante el aprendizaje, y en particular muy habituales al tratar con el infinito, eran conocidos por el profesor objeto del estudio de caso. Entendemos que otros profesores podrían conocer diferentes errores habituales asociados al trato con el infinito, así como errores menos habituales con los que se hayan encontrado durante su experiencia. En cuanto a las dificultades y fortalezas en el aprendizaje, entendemos que forman parte de estos eventos notables en el aprendizaje de conceptos relacionados con el infinito, y por tanto, pueden ser conocidos, como sucede con Aarón, quien reflexiona sobre 'lo fácil' o 'lo difícil' que resultan para sus estudiantes ciertas situaciones íntimamente relacionadas con el infinito, como es el caso de la densidad y los 'agujeros', en cuanto a las fortalezas, y la posible infinitud de elementos en un intervalo acotado, en cuanto a las dificultades, entre otros. Al igual que con los errores, el conocimiento de estos puede derivar tanto de su formación, como de su propia experiencia, así como de su propia experiencia de construcción del conocimiento matemático, de la cual posiblemente recuerde algunos de estos eventos. Esta última fuente resulta especialmente plausible en el caso de Aarón, ya que vemos que su cognición sobre el infinito no se ha desarrollado en todo su potencial, sino que, incluso durante el desarrollo de las entrevistas fue haciéndose consciente de algunos aspectos del contenido matemático ligado al infinito que le resultaban conflictivos, y llegaba a reconocer que en algunos momentos de dificultad 'aprendía'. Dicho aprendizaje no es el foco de esta investigación, pero consideramos que la relación entre el proceso de aprendizaje en torno al infinito de los profesores y la extrapolación de sus propias dificultades, errores y fortalezas a su conocimiento sobre lo plausible de que sus alumnos las reproduzcan posee un interés intrínseco por su impacto en su docencia. Otro de los aspectos ligados a esta sub-categoría, y que creemos merece atención, es el conocimiento de los aspectos emocionales y actitudinales hacia el

[97] Queremos indicar que no estamos considerando en este apartado ningún tipo de consideración, negativa o positiva, sobre el error, la dificultad o la fortaleza. Creemos necesario hacer esta indicación, no solo como investigadores, sino como docentes, en los que el uso de estos eventos 'notables' en el desarrollo del aprendizaje, depende en gran medida de las concepciones sobre los mismos, tema en el que no profundizaremos.

infinito. En el caso de Aarón, su cognición sobre el infinito muestra cierto horror al infinito[98] (Cantor, 1932), que en algunas de sus declaraciones es trasladado a lo que piensa que sus alumnos podrán hacer en cuanto a su trato, por ejemplo, de una sucesión convergente definida por partes[99], en cuyo límite el profesor afirma que sus alumnos considerarán que están 'cerca'.

En cuanto a la tercera sub-categoría, el *Conocimiento del proceso de construcción de razonamientos y conceptos,* está íntimamente relacionado con los anteriores, con la diferencia de que esta categoría presenta el conocimiento por parte del profesor de todo el proceso de construcción. Mientras que la primera categoría contemplaba aspectos ligados a los significados, y la segunda eventos puntuales en el proceso de aprendizaje, esta engloba la comprensión del profesor acerca de cómo transcurren los procesos de construcción asociados al infinito, tanto ligados a situaciones concretas de aula, como el caso muy breve mostrado en el que Aarón explicita una forma de *hacer comprender* las posibles soluciones de la ecuación 0X=0. Asimismo, comprendemos que pese a no haber emergido en esta investigación, se puede considerar como elemento de esta categoría el conocimiento de un profesor acerca del proceso de aprendizaje completo de un concepto ligado al infinito (e.g. la derivada, Gavilán 2005), o del propio infinito en sí (Arnon et al., 2014), siendo una herramienta muy útil para su investigación el desarrollo de descomposiciones genéticas para indagar en el conocimiento de los profesores acerca de cómo entienden la secuencia de aprendizaje.

La última sub-categoría supone un registro diferente a las anteriores, que pretendían un conocimiento acerca de cómo tiende a aprenderse el infinito en general, desde una perspectiva epistemológica, los eventos notables en su aprendizaje, o la estructura del aprendizaje de dichos conceptos. Esta categoría está ligada al conocimiento del profesor de la forma de razonamiento de alumnos concretos sobre el infinito, siendo el foco principal el conocimiento que posee el profesor de la idiosincrasia del alumno en sus razonamientos usando el infinito. Como afirmamos durante el capítulo de análisis de los datos, sobre esta categoría no poseemos una *saturación teórica* que nos permita afirmar su entidad como tal, pero el extracto mostrado, la *sensibilidad teórica* desarrollada antes y durante el proceso investigativo, así como la experiencia docente del investigador, nos hace tenerla en cuenta como una categoría que debe ser considerada en este subdominio.

[98] Que Cantor define como una actitud hacia el infinito que impide considerarlo en su versión actual.
[99] 0 si n par, 1/n si n impar.

Entendemos que existen otros elementos de posible inclusión en este subdominio, como son consideraciones acerca de un conocimiento sobre aspectos de la comprensión de características procedimentales en el uso del infinito en el aula, frente a lo principalmente conceptual que ha emergido en esta investigación. Asimismo, una de las categorías que no hemos relacionado directamente con este subdominio, que entendemos que puede ser objeto de interés es el conocimiento que un profesor pueda tener acerca de los aspectos lingüísticos ligados al aprendizaje. Hemos visto como nuestro profesor posee una forma muy concreta de verbalizar los aspectos ligados al infinito, en términos que cree comprensibles y expresivos de la idea que él maneja acerca del infinito, por lo que nos parece plausible considerar que un profesor con un conocimiento didáctico del infinito y sus conceptos asociados profundo y razonado pudiera haber establecido reflexiones acerca de qué verbalizaciones pueden ser más fácilmente entendidas, o que pueda deducir, del tipo de verbalización que sus alumnos hagan, en qué estadio de desarrollo del concepto se encuentran estos.

En resumen, disponemos de un subdominio que engloba el conocimiento del profesor acerca de los procesos de aprendizaje de los estudiantes al tratar con el infinito. Este subdominio se ha visto alimentado principalmente de una de las categorías emergentes, con sus correspondientes sub-categorías que permiten mostrar una imagen más precisa. De igual manera, hemos mostrado otros posibles contenidos de este subdominio que entendemos de necesaria consideración para una comprensión más completa del mismo, pese a no emerger de la parte empírica de esta investigación

### *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje del infinito (KMLS-∞)*

Este subdominio informa del conocimiento del profesor de aquellos aspectos, propios del contexto sociocultural ligado a lo escolar, que norman aquello que 'deben' aprender los estudiantes al tratar, en la particularización que aquí nos ocupa, con el infinito. Así, este subdominio está íntimamente ligado al conocimiento de la presencia del infinito mostrada en el apartado 'El infinito en la matemática escolar', cuya relación con la categoría emergente '*Localización de curso*' es evidente. Asimismo, entendemos que existen relaciones de este subdominio con otras dos categorías emergentes, la relativa al *'Pensamiento y acciones de los alumnos'*, y la subcategoría de la fenomenología '*Consciencia de la latencia*'. En las siguientes líneas mostraremos estas tres relaciones, basándonos en el caso de Aarón para establecer diferentes generalizaciones 'difusas', en el sentido de Bassey (1999), sobre el conocimiento del infinito englobado en este subdominio.

Comenzaremos por la categoría que podemos poner en relación directa con este subdominio, la relativa a la '*Localización de curso*', que Aarón establece al razonar tanto sobre el infinito en si como sobre diferentes contextos donde el infinito subyace como concepto. La capacidad de hacer esta localización por cursos de lo que un alumno 'debe', 'puede', o 'es capaz' de abordar al tratar con el infinito, así como la adecuación de abordar ciertos contenidos, o responder ciertas preguntas en determinados cursos, en función de esta adecuación, son los elementos que dan sentido a este subdominio, ya que responden a un conocimiento profundo, razonado e interiorizado de lo que se establece en los documentos curriculares de etapa, fruto, probablemente, de la reflexión acerca de estos, unido a la experiencia docente. Entendemos, por tanto, que existen diferentes elementos en este subdominio de necesaria consideración, que responden a niveles de profundidad en el conocimiento del profesor. En primer lugar encontramos el conocimiento de los contenidos que se deben abordar en cada curso, que, como vemos en el caso de Aarón, explicitó durante la construcción y discusión del "mapa conceptual", mostrando aquellos temas y conceptos que tenían relación con el infinito, identificando el curso, e incluso en algún caso el trimestre, en el que se abordan. En segundo lugar, encontramos el conocimiento del grado de complejidad en el que se pueden desarrollar los contenidos en cada curso. Durante la entrevista centrada en la simulación de ejemplos de clase vimos como Aarón valoraba, según el contexto de uso del infinito, la pregunta que se le planteara, la profundidad y utilidad de lo abordado, si el trato con el infinito tenía sentido, la duración temporal que dedicaría a la respuesta[100], o incluso la metodología que usaría, todo ello en función del curso. Así, entendemos que el conocimiento de lo que se puede (y de lo que no se puede) abordar en un curso, en función de las necesidades de los alumnos, forma también parte de este subdominio, para así saber qué requerimientos de los alumnos puede atender en dicho curso, en función, por ejemplo, de su conocimiento de lo que se espera que un alumno de esa etapa pueda conocer y llegar a aprender al interactuar con el infinito.

Esta previsión sobre lo que se espera (en un sentido normativo), o se puede esperar (en cuanto a la posibilidad de que así sea) que un alumno comprenda en determinado nivel

[100] Entendiendo esta dedicación como una inversión en la comprensión de los estudiantes.

tiene influencia de las dos categorías emergentes que anteriormente comentamos. En primer lugar, el conocimiento englobado en la sub-categoría '*consciencia de la latencia*', informa al profesor de aquellos conceptos que tienen una relación explícita o implícita con el infinito, permitiéndole poder juzgar si el grado de desarrollo del conocimiento requerido para comprenderlo pertenece al curso en el que se encuentra. Asimismo, el conocimiento de lo que un alumno debe o puede saber en determinado curso está íntimamente relacionado con el conocimiento de cómo discurre el aprendizaje de un alumno al tratar con el infinito, tanto a un nivel más general, ligado al conocimiento del proceso de construcción de conceptos y razonamientos, como en relación con los obstáculos, errores y fortalezas que los alumnos puedan encontrarse o desarrollar en determinado nivel de estudios.

Por tanto, este subdominio, ligado al conocimiento curricular de Shulman (1986) y Ball et al. (2008), engloba, desde la perspectiva del MTSK, y alimentada por las categorías emergentes en esta investigación, consideraciones más allá de lo meramente curricular, como son aquellas valoraciones que el profesor realiza tanto sobre la abordabilidad de un concepto ligado al infinito o no, como sobre el grado de complejidad (respecto del infinito) en el que dicho concepto es abordable. Esta última consideración adquiere gran relevancia en el caso del infinito, en el que existen múltiples investigaciones que establecen lo que un alumno puede comprender del infinito (e.g. Belmonte, 2009; Belmonte & Sierra, 2010), y más aún, el tipo de comprensión que se espera que tenga del mismo, en determinado curso, estableciendo estándares, provenientes estos de la investigación en educación matemática, no del currículo, que conforman los referentes sobre cuyo conocimiento abunda este subdominio.

### *Reflexión sobre el conocimiento didáctico del infinito*

Shulman (1987) definió el conocimiento didáctico del contenido como esa "*amalgama de contenido y pedagogía que es única a los profesores, su forma especial de comprensión profesional*" (p.8). En la mirada que nosotros hemos propuesto hacia el conocimiento didáctico del infinito, percibimos que la idea de amalgama no satisface plenamente nuestra perspectiva pero sirve de base para ella, ya que ese vocablo, cuyo significado es "*Unión o mezcla de cosas de naturaleza contraria o distinta*" [101], da cuenta, ligado al conocimiento didáctico del infinito, de un conocimiento de naturaleza

[101] Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española.

didáctica mezclado con uno de naturaleza matemática, en el cual se distinguen claramente las componentes 'distintas'. En esta investigación entendemos el conocimiento didáctico del infinito como la *fusión*[102] del conocimiento puramente matemático (no escolar) del infinito con el conocimiento y la sensibilidad didácticos del profesor, que deriva en un único cuerpo integrado de conocimiento, el conocimiento didáctico del infinito, que si bien forma parte del dominio completo de conocimiento didáctico del contenido, posee características intrínsecas ligadas al concepto foco de esta investigación, el infinito. Una de estas características deriva de la no explicitación[103] del infinito en las aulas, pese a su presencia como elemento subyacente a multitud de otros conceptos que si son explicitados. Esta característica es la no independencia conceptual del conocimiento didáctico del infinito del conocimiento didáctico de muchos otros tópicos matemáticos. Esta propiedad deriva, en gran medida, de la naturaleza matemática del infinito, que como concepto escolar en si posee la utilidad de dar sustento epistemológico a multitud de conceptos. Debido a dicha naturaleza, diferentes aspectos como el conocimiento de los procesos de aprendizaje de los conceptos en los que está involucrado el infinito tienen como elemento común los aspectos ligados al infinito, que en gran medida se basan en características epistemológicas, con particularizaciones para cada concepto, pero con cierto núcleo común. En cuanto al conocimiento ligado a los estándares de aprendizaje, vemos esta característica evidenciada en dos niveles de reflexión, uno sobre el propio infinito, y otro sobre cómo el grado de cognición del infinito influye sobre otros conceptos.

Así, queremos hacer notar también que, desde nuestra perspectiva, en la expresión '*conocimiento didáctico del infinito*' el objeto conocido es el infinito, desde una perspectiva didáctica, con lo que el vocablo didáctico no es sino un adjetivo. Lo entendemos así ya que, desde nuestra perspectiva, cuando nos referimos al conocimiento que un profesor posee del concepto, todo lo que este profesor conoce del concepto, desde cualquier perspectiva, es conocimiento del concepto. Creemos necesario hacer esta puntualización ya que creemos que da sentido a considerar a la Educación Matemática como una rama de la ciencia, incluida en la matemática, que se ocupa de comprender cómo se comprende la matemática, siendo la particularidad de esta investigación el caso de profesores.

[102] Según la RAE: Acción de reducir varias cosas a una sola.
[103] Al menos, no por indicación curricular.

## Conocimiento Matemático del infinito (MK-∞)

Siguiendo la línea del apartado relativo al conocimiento didáctico del infinito, este apartado se dedicará a mostrar las relaciones entre las categorías emergentes de la fase empírica de esta investigación y los subdominios de MTSK relativos al conocimiento matemático, es decir, KoT, KSM, KPM. Como en el caso anterior, concretamos los nombres de los subdominios para el caso que nos ocupa. Este dominio refiere no solo a los qué, sino también a los porqués, y a la estructura sintáctica, en la línea de lo establecido por Shulman (1986) sobre el conocimiento del contenido. Así, generalizaremos los resultados obtenidos del estudio de caso ampliando la perspectiva que estos ofrecen, mostrando algunas generalizaciones que entendemos son plausibles, en relación con el análisis de los datos.

### *Conocimiento de los Temas ligados al infinito (KoT-∞)*

Para comprender el contenido de este subdominio, creemos necesario extendernos en la idea de tema y la comprensión que hemos desarrollado de la relación entre los temas y el infinito. Siguiendo lo establecido en Escudero, Flores-Medrano, Climent, Contreras y Montes (en prensa), en MTSK se considera como referente "*las áreas propuestas por el NCTM (2000) en los estándares matemáticos: números y operaciones, álgebra, geometría, medida, análisis de datos y probabilidad. Los temas son los componentes de estas grandes ramas y pueden variar de acuerdo al currículo de cada país*" (p.4). Esta definición excluye al infinito como tema incluible en este subdominio, ya que aunque tiene cierta presencia en las componentes de las ramas comentadas, esta presencia es en gran medida como elemento subyacente, de manera que entendemos que no forma parte explícita de estos. Daremos más argumentos sobre su naturaleza en el siguiente subdominio, en el que incluiremos el conocimiento del infinito como elemento organizador de la matemática, entendiéndolo como *gran idea* (Kuntze et al., 2009).

En cuanto a la relación con las categorías emergentes durante esta investigación, este subdominio es uno de los que más alimentados se ven por estas, posiblemente debido a la abundancia de contextos matemáticos que se presentaron al profesor objeto del estudio de caso, que permitieron profundizar en mayor medida sobre la naturaleza del infinito en el conocimiento matemático del profesor. En este subdominio, encontramos relación con las siguientes categorías: *Lenguaje, Fenómenos, Desarrollo cognitivo, Conflictos, Errores conceptuales* y *Significados*. La naturaleza de la presencia de cada categoría en este subdominio difiere significativamente de una a otra, ya que algunas de las categorías incluyen conocimiento en el sentido de "contenido conocido", o en el de "profundidad de la comprensión del contenido", otras las "formas de uso" del contenido, y otras sobre algunos "elementos notables" producto de la comprensión del infinito.

En primer lugar abordaremos la categoría de *Fenómenos*, sub-categoría emergente de *Fenomenología*. Entendemos que esta categoría es fundamental y de necesaria consideración si se pretende comprender el conocimiento que un profesor posea del infinito. Conocer el infinito *per se* es una tarea no trivial que requiere reflexionar sobre el objeto en si, y es algo que, si bien es posible encontrar, consideramos que en la mayoría de los casos las reflexiones que se hayan establecido al respecto no serán de gran profundidad. Esta categoría informa del conocimiento de los diferentes elementos matemáticos organizados fenomenológicamente por el infinito, esto es, aquellos conceptos matemáticos que poseen en su base conceptual al infinito en alguna de sus formas, que forman parte de los diferentes temas incluidos en los currículos de cada contexto. En esta investigación han emergido consideraciones respecto de la integral, la derivada, el límite (verbalizado como cercanía) o el orden del infinito, pero, en vista del análisis curricular realizado en el marco teórico, es esperable hallar multitud de temas donde se refleje conocimiento del infinito a través del conocimiento de los diferentes conceptos presentes en dicho tema. En estos conceptos puede ser incluso explícito el uso de los vocablos referidos al infinito, e.g.: 'límite cuando n tiende a infinito', 'el área bajo la curva es infinita', 'el infinito exponencial es mayor que el polinómico'. Este uso explícito del infinito nos permite, como investigadores, analizar el tipo de relación que existe entre el infinito y estos conceptos, conexión en la que profundizaremos en siguientes apartados, o, simplemente, profundizar en el significado de estos conceptos, a través de ejemplos que requieran un cierto grado de reflexión. Así, de cara a la investigación, entendemos que un análisis fenomenológico del infinito en el contexto investigado es necesario para comprender el conocimiento que el profesor posee sobre dichos contextos en relación con el infinito, ya que estos serán la vía de acceso que entendemos es más potente para comprender su conocimiento del concepto.

En base a estas consideraciones relacionadas con los fenómenos organizados por el infinito, tiene sentido tener en cuenta los *Significados* del infinito que conoce y es capaz de usar el profesor, ya que, como hemos observado durante esta investigación, las características del infinito como concepto matemático, que tiene una naturaleza polisémica, hacen que esta categoría adquiera especial relevancia. Durante esta investigación, detectamos que Aarón conocía y usaba el infinito ligado a diversidad de contextos, que pese a tener denominadores comunes, daban cuenta tanto de la polisemia con la que este profesor trataba el concepto como de su conocimiento de los diferentes contextos donde se ponían en juego. Los significados usados por Aarón que pudimos detectar fueron: El infinito ligado al cardinal de un conjunto numerable no acotado, al cardinal de un conjunto no numerable acotado o no acotado[104], ambos emergentes en la sub-categoría *"infinito grande"*, al carácter infinitesimal de una cantidad variable o fija, contenida en la sub-categoría "*infinito pequeño"*, y, finalmente, al infinito como objeto *desconocido*, imposible de contar, o tratar de una forma que este profesor considere natural, dotándolo por tanto de cierto sentido artificioso. Estos tres grupos de significados son específicos del caso de Aarón, ya que es él el que dota al infinito de dichos significados, así como podemos imaginar que otros profesores desarrollen otros grupos de significación del concepto. Entendemos que estudiar los diferentes significados y criterios de dotación de significados que los profesores establecen en torno al infinito puede ser interesante de cara a comprender cuál es la base conceptual que pretenden que sus alumnos desarrollen. Estos significados, cuyo contenido entra de forma más coherente en el subdominio que describiremos a continuación, el *Conocimiento de la Estructura Matemática*, tiene sentido considerarlos, una vez dotados de un cuerpo conceptual, como parte del *Conocimiento de los Temas*.

Siguiendo por la categoría de *Lenguaje*, sobre esta hemos desarrollado reflexiones de corte didáctico, en cuanto al conocimiento del profesor de la "comprensibilidad" de su lenguaje, o en cuanto al lenguaje habitual de los alumnos, pero entendemos que se requiere, para poseer este conocimiento de tipo didáctico con cierta amplitud, un elenco de registros orales, escritos y semióticos para establecer un proceso comunicativo que permita comunicar los diferentes tópicos en los que se ve reflejado el infinito. Así, las diferentes formas en las que un profesor se refiera, por ejemplo, a un límite, a un entorno, o a la idea de "para todo", darán cuenta, no solo de ciertos aspectos del tipo de comprensión, sino también de las formas que el profesor podrá usar para referirse al concepto, siendo este lenguaje un elemento de uso, conocimiento, por tanto, que tenga disponible para interactuar con el contenido, y codificarlo de cara a la comunicación en

[104] Establecemos la diferenciación entre el numerable y el no numerable por ser contextos que en la literatura de investigación se tienden a diferenciar, por requerir el segundo una comprensión actual para dotarlos de mayor sentido.

el aula. Cabe desatacar aquí el trabajo de Belmonte (2009), en el que la culminación o no del proceso da sentido a la verbalización[105] perfectiva o imperfectiva. Así, entendemos que un profesor, como Aarón, que para ciertas acciones matemáticas, como el cálculo de límite, no considera un "fin", tenderá siempre a usar, en situaciones que engloban el infinito, verbos de naturaleza imperfectiva, incluso en su comunicación con su alumnado. Esto es así debido a que el *concepto literal de infinito* (Belmonte, 2009, p. 87), está asociado a una carencia de perfección, de final, asociado a una continuación indefinida. Lakoff y Nuñez (2000) definen el uso de los diferentes registros verbales como Metáfora Básica del Infinito, que está ligada a determinados estadios del proceso de aprendizaje que tienen su reflejo en las verbalizaciones establecidas. Asimismo, el uso de *sinónimos* para ciertos elementos organizados por el infinito puede dar sentido a una 'metaforización' de la presencia del infinito en los diferentes conceptos, como sucede con la *"cercanía"* en el caso de Aarón, usándola para dar sentido a la no perfección del proceso aproximativo o a la consideración del "para todo épsilon" en la definición correspondiente.

La siguiente categoría está relacionada con las investigaciones clásicas sobre el infinito, dedicadas a establecer el grado de *Desarrollo cognitivo* que un sujeto, en este caso un profesor, alcanza o puede alcanzar. En estas investigaciones se suele establecer la diferenciación entre una cognición de tipo potencial o actual, poseyendo estos dos tipos un sentido más progresivo que dicotómico[106]. En el caso de Aarón observamos un desarrollo del pensamiento en torno al infinito que, desde una perspectiva apeironiana del infinito como objeto, le llevaba a consideraciones de tipo potencial, siempre ligados a los procesos inacabados. Cabe destacar que lo que como investigadores inferimos acerca de su cognición del infinito deriva del reflejo de dicha cognición al abordar diferentes conceptos matemáticos propios del currículo de secundaria. Cabe preguntarse, pues, si la forma de conocer el infinito emerge del grado de comprensión de los diferentes conceptos o es la forma de comprender el infinito la que condiciona el tratamiento que da a los fenómenos organizados por este. No creemos ser capaces de aportar una respuesta clara a esta pregunta, si bien hemos visto indicios de ambas implicaciones en Aarón, tanto al dotar al infinito de un carácter abstruso debido a las contradicciones que sus múltiples significados (que provienen de tópicos concretos)

[105] Verbos como, saltar o disparar, requieren culminación para tener sentido, mientras que andar o leer no requieren de dicha culminación.
[106] De ahí el término 'desarrollo' en el nombre de la categoría, frente a otro posible como 'estadio'.

generan, como al usar la indefinición que él asocia a lo infinito para dar sentido a situaciones. Entendemos que en esta categoría referida al conocimiento de los temas podemos encontrar las implicaciones que tiene la forma de conocer el infinito en la comprensión que los profesores tienen de diversos temas, mientras que la cognición del infinito *per se* la asociaremos al subdominio ligado a la estructura, como veremos más adelante. Entendemos, en general, que el hecho de encontrarse en un determinado momento del desarrollo cognitivo de un concepto puede afectar al tipo de abordajes que se hagan del mismo, e incluso a la comprensión que se tenga del proceso de aprendizaje de los mismos, estando por tanto relacionados con dos de las tres componentes del conocimiento didáctico del contenido.

También hemos podido ver como el tipo de cognición que Aaron posee le lleva a situaciones que se adaptan a lo que Festinger (1957) denominó *disonancia cognitiva*. Estas situaciones se dan cuando la forma de comprender el infinito el profesor entra en contradicción con verdades matemáticas que tiene interiorizadas. En el caso de Aarón, estas situaciones están ligadas a la 'actualización' del proceso infinito, ya que en la mayoría de conceptos matemáticos que involucran el límite se usan dos elementos en el aula, el proceso, y el resultado final, de manera que al confrontar la conexión entre estos dos se generaban situaciones en las que este profesor aportaba respuestas incongruentes, dando cuenta del estado de conflicto en el que se encontraba entre su cognición y su intuición. Entendemos que, si bien los conflictos que hemos encontrado en el conocimiento de este profesor pueden ser particulares de su caso, ligados a su forma de entender el infinito, resulta interesante la posibilidad de estudiar los momentos de *disonancia cognitiva* que las diferentes formas de cognición del infinito pueda generar en profesores. En esta línea, la habitual tendencia al potencialismo al pensar en el infinito (Dubinsky et al., 2005a, 2005b) puede confrontar con la necesidad de comprensión actual del infinito en la que se basa la matemática escolar[107], con lo que entendemos que estos conflictos, pese a no ser conocimiento en si mismos, constituyen indicadores de las formas de comprender los fenómenos ligados al infinito y el infinito en sí. Además, hemos de recalcar el potencial que consideramos que tienen estos conflictos de cara a, en investigaciones ligadas a una perspectiva más desarrollista del

[107] En cuanto a que en los contextos escolares se considera la dualidad entre el proceso que genera el límite y el propio valor del límite.

conocimiento, fomentar la comprensión profunda del infinito en profesores de secundaria.

Además de los conflictos, vimos en Aarón una serie de *Errores Conceptuales* ligados a su forma de entender el infinito. Esta investigación no pretende evaluar el conocimiento del profesor, en cuanto a determinar su bondad, de manera que no abundaremos profundamente en esta característica de su *Conocimiento de los Temas*, pero consideramos de vital importancia, en cuanto al compromiso social de la investigación en educación matemática, poner de relieve que una comprensión del infinito superficial puede provocar que los profesores cometan errores a la hora de abordar conceptos como la densidad de los números reales en el caso de Aarón, que podrían traspasar a sus alumnos.

### *Conocimiento de la Estructura Matemática organizada por el infinito, y del infinito como organizador (KSM-∞).*

Esta categoría, el *Conocimiento de la Estructura Matemática* particularizada para el caso del infinito, con las adiciones visibles en el nombre del subdominio, tiene en su nombre una palabra que consideramos fundamental para entenderlo: Estructura. Pierre M. Van Hiele dedicó, en su publicación seminal 'Structure and Insight', seis capítulos a determinar la naturaleza de dicho término, para llegar a la conclusión de la inmensa, potencialmente inabordable, dificultad de dar una definición de dicho término, argumentando que el significado de dicho concepto puede ser tan amplio, que resulta mucho más práctico tratarlo a través de sus propiedades, en las que considera las propuestas desde la psicología de la Gestalt como *propiedades que gobiernan una estructura*[108] (Van Hiele, 1986, p. 28).

---

[108] Van Hiele las resume de la siguiente forma:

1) Es posible extender una estructura. Cualquiera que conozca una parte de la estructura, conoce una extensión de la misma. La extensión de una estructura está sujeta a las mismas reglas que sus partes dadas
2) Una estructura puede ser vista como parte de una estructura más fina(sutil). La estructura original no está afectada por esto: No cambian las reglas del juego, solo son ampliadas. De este modo es posible incorporar más detalles a la construcción de la estructura.
3) Una estructura puede ser vista como parte de una estructura más inclusiva. Esta estructura más inclusiva también tiene reglas, algunas de las cuales definen la estructura original.
4) Una estructura dada puede ser isomórfica con otra estructura. en este caso, las dos estructuras están definidas por reglas que corresponden con otras. Así, si se estudia la estructura dada, también se podrá conocer cómo está construida la otra estructura.

Van Hiele, 1986, p.28.

En el caso del infinito, cuando pretendemos comprender qué significa el *Conocimiento de la Estructura Matemática* asociada al concepto, entendemos que dicha estructura es desarrollada por cada profesor, existiendo paralelismos entre diferentes estructuras, y que el infinito es el elemento vertebrador de la misma, siendo la forma de comprender el infinito en si la que aporta las 'reglas de construcción'. Así, profesores que comprendan el infinito de forma potencial, desarrollarán o habrán desarrollado una comprensión de los fenómenos del infinito, que constituyen estructuras más finas, cuyas reglas de construcción, además de por las reglas de construcción en matemáticas, vendrán dadas por la forma de comprensión del infinito. Así, es evidente que la sub-categoría referente al *Desarrollo Cognitivo* del profesor tiene una importancia fundamental en la consideración de este subdominio en el caso particular del infinito, ya que fundamenta las reglas de construcción de la estructura matemática a la que este afecta.

Ahora bien, en la experiencia que hemos desarrollado en esta investigación, encontramos que estas reglas de conformación de la estructura matemática están sujetas a *Conflictos*, ya que, al introducir situaciones en las que interviene el infinito, bajo unas reglas de comprensión del mismo diferentes (actuales, en vez de las potenciales que sigue Aarón), que el profesor acepta como plausibles, pueden generarse contradicciones, reflejadas tanto en estas situaciones conflictivas, como en muchos de los *errores conceptuales* cometidos por Aarón. Así, entendemos que la forma de comprender el infinito es fundamental para dar solidez, coherencia y profundidad a la estructura matemática conocida por el profesor.

Otra categoría de fundamental importancia para comprender este subdominio es la Fenomenología, tanto en cuanto a la consciencia de la relación fenomenológica entre el infinito y los fenómenos que este organiza (categoría *Consciencia de Latencia*), como en cuanto al hecho de conocer los *Fenómenos* que conforman la estructura. La segunda sub-categoría da sentido al hecho de considerar una estructura como tal, puesto que estos fenómenos son los que permiten considerar una multiplicidad de elementos matemáticos, relacionados con el infinito, organizada bajo cierto criterio por el profesor, a la que podríamos denominar estructura, en la que se integran los diferentes fenómenos de forma coherente. La primera categoría, relativa a la consciencia que el profesor posee de la presencia del infinito de forma subyacente a los diferentes conceptos, nos informa de la capacidad de este para integrarlos estos en *una estructura más inclusiva* (Van Hiele, 1986, p. 28). Así, entendemos que el conocimiento profundo de la fenomenología dota de contenido a esta sub-categoría, para permitir al profesor tener una visión más amplia del contenido a abordar en el aula, una "visión de conjunto".

En relación con la fenomenología, y asociados en gran medida a la forma de comprender el profesor el infinito, encontramos los *Significados* que el profesor conoce del infinito, que, integrados en la estructura matemática en la que el infinito participa, son los elementos más cercanos al infinito en los que entendemos que podemos profundizar, y que generan, en gran medida, el sustento epistemológico de conceptos que podríamos encontrar en dicha estructura, como el límite, la periodicidad de los números decimales, o la cardinalidad.

Así pues, este es un subdominio que informa de un conocimiento integrado de las matemáticas que dota de solidez al conocimiento de los diferentes temas y tópicos que serán objeto de enseñanza y aprendizaje, y en el caso del infinito, da cuenta de cómo este sustenta gran parte de los temas relativos, especialmente, al cálculo infinitesimal, así como, en menor cantidad, el álgebra, la geometría, o la estadística. Así, la gran idea desarrollada por Kuntze et al. (2011), relacionada con el lidiar con el infinito, se ve reflejada de forma explícita en este subdominio, en cuanto al conocimiento matemático de los profesores al explorar los fenómenos ligados al infinito.

### *Conocimiento de las Prácticas Matemáticas asociadas al infinito (KPM-∞)*

Este subdominio es, de los que el modelo de conocimiento MTSK contempla, del que menos evidencias hemos conseguido durante esta investigación, hecho que comentaremos en las limitaciones de la misma. Sin embargo, con base en las lecturas realizadas y en la sensibilidad teórica desarrollada durante el transcurso del proceso investigativo, hemos desarrollado cierto nivel de consciencia del contenido de este subdominio y, pese a que formará parte de las futuras líneas de investigación, daremos aquí algunas indicaciones sobre cómo entendemos que el conocimiento que un profesor posee del infinito puede comprenderse desde la perspectiva que este subdominio aporta.

Reflexionando sobre cuáles son las prácticas matemáticas que están ligadas al infinito, desde nuestra perspectiva, sobresalen dos, íntimamente ligadas entre sí, la generalización y la demostración. En el primer caso, la generalización es una práctica matemática en la que el infinito tiene una presencia fundamental, ya que como práctica implica "*pasar de unos pocos casos a hacer conjeturas sobre un conjunto de casos* *completo"* (Mason, Burton & Stacey 1982, p.8), siendo ese conjunto de casos habitualmente de cardinal no finito. Esta práctica es habitualmente usada en contextos de enseñanza para dar pie a demostraciones intuitivas, pero requiere en el profesor ser consciente de la amplitud del conjunto que implica, esto es, no solo de su cardinal, sino de las propiedades de los elementos englobados en *el conjunto de casos*, siendo consciente de qué conjunto las cumple, y de las relaciones de contención con otros conjuntos. Esto nos lleva a la práctica de la demostración, en la que el profesor es tanto agente (Stylianides & Stylianides, 2009) como gestor (Kondratieva, 2013, Douek, 2009), y cuya relación con el infinito se basa en probar la validez para cualquier caso dentro del dominio de la demostración, lo cual requiere probarlo *para todo* elemento, pudiendo ser "todo" infinito (habitualmente es así). Asimismo, existen multitud de demostraciones que usan diferentes estrategias que están íntimamente relacionadas con el infinito, como es la inducción, habitualmente usada en contextos numerables, o aquellas demostraciones que eligen un elemento representante del conjunto, en forma de variable, y demuestra que cumple las propiedades que se pretende. Así, en estas dos prácticas el profesor requiere comprender el infinito tanto para explorar la validez de una propiedad en un conjunto completo (generalizar), como para asegurar dicha validez.

Sin embargo, como anteriormente afirmamos, esta investigación no ha conseguido pruebas empíricas de este subdominio, y más allá de los comentarios fruto de la sensibilidad desarrollada, no podemos abundar en él.

## Creencias sobre el infinito

Como afirmamos inicialmente, esta investigación no tenía como objetivo profundizar en el subdominio relativo a las creencias, pero durante en el transcurso de la investigación, y en gran medida al desarrollar una familiaridad profunda con el objeto de estudio, hemos comprendido que la naturaleza de estas no puede, ni creemos debe, ser obviada a la hora de ofrecer una imagen completa del conocimiento del profesor. Así, articularemos este apartado en torno a los dos núcleos que se consideran en el dominio de las creencias en MTSK, las creencias acerca de la matemática, particularizadas al caso del infinito, y las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, concretadas también para el concepto en cuestión.

En primer lugar, cuando abordamos el dominio de las creencias sobre la matemática, encontramos dos grandes ámbitos en los que centrar nuestra reflexión. El primero son las creencias sobre la matemática (e.g. Platónica, Instrumental, Resolución de Problemas,), que no abordaremos en este apartado porque entendemos que, aunque permean la cognición de los profesores acerca del infinito, no tenemos evidencias ni indicios de relaciones directas que podamos defender. En segundo lugar, encontramos las creencias acerca del infinito como elemento matemático, donde si poseemos evidencias, especialmente por la singularidad de la forma que tiene Aarón de comprender el infinito, de la importancia de estas creencias, así como de su relación con los otros subdominios de conocimiento. Así, en estas creencias incluimos las actitudes hacia el conocimiento matemático, ligadas a las actitudes hacia el infinito en el trabajo de Sierpinska (1987). En concreto, Aarón podemos asociarlo a una tendencia *intuitiva empírica, […] que implica comprender que la matemática, y en particular sus axiomas y teoremas deben ser hechos indiscutible, intuitivamente aceptados* (p.382). Este es el caso de Aarón, cuyos estados conflictivos acerca de aquellas situaciones que implican al infinito están basados en gran medida por la confrontación entre las situaciones potencialistas que intuitivamente concibe, con algunas de las actuales presentadas durante la investigación, que había evitado en su experiencia previa. Así, debido a esta necesidad de indiscutibilidad del conocimiento matemático (tendencia platónica), Aarón atribuye al infinito el significado de elemento desconocido o artificioso, reflejado en su definición del mismo *"una invención del hombre para explicar lo inexplicable"*, que entendemos como una declaración de no aceptación del infinito como elemento no sujeto a las reglas matemáticas que él conoce. Así, se resguarda en una actitud *potencialista*[109] (Sierpinska, 1987) hacia el infinito, en la que, por ejemplo, la imposibilidad de alcanzar el límite está condicionada por la variable temporal, 'nunca[110] se alcanzaría porque nunca[111] llegaríamos. Entendemos que el caso de Aarón no es generalizable, pero entendemos igualmente que tiene sentido considerar las actitudes que tienen los profesores hacia las matemáticas, y como estas se reflejan en sus primeras intuiciones hacia el infinito, que tienen, o pueden tener, un impacto sobre su propio conocimiento matemático, así como sobre el que movilicen en sus alumnos.

La segunda línea de reflexión acerca de las creencias va ligada a las creencias acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular acerca del papel del infinito en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las mismas. Hemos mostrado varios

[109] Relacionada con la cognición potencialista, pero no idéntica.
[110] Significando imposibilidad.
[111] Significando temporalidad.

ejemplos en los que Aarón afirma que evita el concepto en el aula. Estas afirmaciones pueden tener multitud de fundamentos, pero entendemos que uno de ellos puede ser la consideración que el profesor haga sobre la utilidad del infinito como parte del proceso de formación de los alumnos, o sobre la adecuación de que los alumnos profundicen en un aspecto tan conceptual del contenido matemático. Entendemos que lo que poseemos son únicamente indicios y reflexiones acerca de la relevancia de considerar este tipo de creencias, pero algunos autores (Rucker, 1982) advierten sobre la 'enseñabilidad[112]' de las creencias y actitudes acerca del infinito, con lo que entendemos que es una característica relevante y que debe ser tomada en consideración.

## Reflexiones acerca del objeto de estudio

Esta investigación partía de la base de la necesidad del conocimiento del infinito para la enseñanza de las matemáticas como piedra angular desde la que explorar dicho conocimiento. Así, desde esa consideración, hemos tomado plena consciencia de las características del conocimiento que autores como Climent (2005) asocian al profesor, particularizados al caso del conocimiento del infinito. En este sentido, Aarón ha tenido una utilidad intrínseca, ya que ha sido él, su idiosincrasia particular, y el contexto que le condicionaba los que nos han permitido tomar esta conciencia. El hecho de que la labor del profesor se desarrolle en un contexto, en el que las implicaciones del mismo son fundamentales para comprenderlo, así como comprender que la trayectoria que ha seguido cada profesor hacen que su conocimiento tenga características únicas. Asimismo, durante el transcurso de esta investigación vimos la posibilidad de acompañar al profesor en un cambio en su cognición del infinito, dando una perspectiva desarrollista no pretendida en un principio. El motivo de que esta posibilidad existiera es la naturaleza dinámica del conocimiento del profesor, que permite que sea transformado, siendo esta transformación un elemento que entendemos puede ser realmente complejo, especialmente en el caso de Aarón, en el que sus convicciones y actitudes hacia el infinito son tan firmes y complejas.

La característica del conocimiento que en esta investigación se pone de relieve en mayor medida es la integración y complejidad del mismo. El mero hecho de tener que recurrir a usar y diseñar un marco como MTSK da cuenta de ello. Este marco, cuya construcción ha sido simultánea y retroalimentada por esta investigación, surge del

[112] Del profesor al alumno.

esfuerzo de una veintena de investigadores reflexionando acerca de las características del conocimiento del profesor, siendo particularizado en esta investigación al caso del infinito. La complejidad del conocimiento del profesor acerca del infinito se observa en cuanto a la cantidad de componentes del modelo que se han podido observar, con la disparidad de contenidos incluso dentro de un mismo subdominio. Asimismo, reconocemos que pese a considerar que estamos, al término de la investigación, familiarizados con el conocimiento del infinito, entendemos que nuestra comprensión del mismo no es completa, dada la cantidad de elementos, matices y diversidades que podemos encontrar, con lo que dicha complejidad se nos hace más presente. Abundando en dicha complejidad, hemos visto como los tres dominios de MTSK[113] permiten contemplar diferentes aspectos de la cognición del infinito que posee un profesor, como el reflejo de dicha cognición en su trabajo con diferentes conceptos relacionados con el infinito, la consciencia de esas relaciones, la forma en que afecta el estadio de desarrollo cognitivo a su comprensión de los conceptos, o aspectos más didácticos ligados a la enseñanza de conceptos relacionados con el infinito, como episodios a los que recurre par reproducirlos, lenguaje que suele usar, consideraciones de corte curricular, o su familiaridad con la relación de los alumnos con el infinito. Finalmente, las creencias y actitudes hacia el infinito creemos que impregnan todo el conocimiento del profesor acerca del concepto, añadiendo matices que emergen de las verdades personales que el propio profesor sostiene.

Además, este proceso ha permitido al investigador comprender mejor el concepto matemático que desde un principio centraba su interés, el infinito. Esta comprensión entendemos que no solamente se ha hecho más profunda, en cuanto a conocerlo 'mejor', sino también más amplia, ya que nos hemos hecho conscientes de que el infinito puede ser conocido de diferentes formas, cada una de las cuales lo tienen como elemento común[114]. El infinito se puede comprender como elemento puramente matemático, sin implicaciones de tipo didáctico, siendo el único interés de quien así lo conoce comprender el infinito en mayor medida. Un ejemplo de esto son los trabajos de Cantor, en los que definió el infinito desde una perspectiva formalista, dando una definición completamente aceptada en los círculos matemáticos. También se puede comprender el infinito como objeto matemático implicado en los procesos de enseñanza y aprendizaje,

[113] Conocimiento Didáctico, Matemático y Creencias.
[114] Que puede ser detectado como elemento común por el investigador, pero no necesariamente por el sujeto que lo conoce.

ya sea desde la perspectiva de los alumnos, en lo que existe una cierta tradición en el área, o en la de los profesores, donde esperamos que esta investigación permita profundizar las aportaciones ya existentes. En el caso de la forma de comprender del profesor el infinito, lo puede conocer en múltiples facetas, algunas de las cuales hemos explorado en esta investigación, siendo el objetivo de quien comprende el infinito de esta manera no ya enseñar el infinito en sí, sino conocerlo cómo parte del proceso educativo.

Finalmente, existe otra perspectiva de la que hemos sido conscientes durante el desarrollo de la investigación, no ya como objetivo de la misma, sino emergente de la forma de pensar del propio investigador, y es la perspectiva de quien quiere conocer cómo se conoce o puede conocer el infinito. Esta perspectiva es la del investigador que desea comprenderlo como concepto matemático, comprender cómo lo conoce un profesor, como lo puede conocer un alumno, como está reflejado en el currículo, o como diferentes contextos socioculturales tanto actuales o a lo largo de la historia han comprendido el infinito, entre otras muchas. Así, durante esta investigación, hemos reflexionado en torno a múltiples de las consideraciones anteriormente indicadas para hacernos plenamente conscientes de la profunda complejidad del concepto “infinito”, que tiene significado más allá de las matemáticas, sino también a nivel social o cultural. Ser conscientes de esta complejidad nos hace conscientes también de que, dada la multitud de contextos en que el infinito está presente, existen multitud de eventualidades significativas que pueden darse a la hora de comprenderlo, lo que nos invita a seguir queriendo comprenderlo. Aún así, como comentaremos posteriormente, entendemos que hemos de seguir profundizando en todas las formas en las que se puede conocer el infinito que tienen algún tipo de impacto en el proceso educativo, desde las puramente matemáticas, hasta las ligadas al conocimiento del profesor, o las propias de aspectos socioculturales o históricos. Conocer el infinito como investigador en didáctica de las matemáticas requiere una gran familiarización con el concepto a todos estos niveles, para así indagar en su relación con el infinito en el aula.

# Prospectiva de la investigación

Una investigación no solo ha de aportar resultados, sino que entendemos que ha de aportar continuidad, y futuras líneas de trabajo en las que seguir desarrollando y ampliando nuestra comprensión de lo estudiado. Así, articularemos esta prospectiva en torno a tres grandes líneas: El conocimiento profesional del profesor de matemáticas y su desarrollo, el conocimiento del profesor de matemáticas acerca del infinito y su desarrollo, y el infinito como objeto de conocimiento humano sujeto a la interacción alumno-profesor. Entendemos que estas son las tres líneas en las que podemos seguir, ya que con esta investigación hemos profundizado en las dos primeras, pero podemos hacerlo aún más, o al menos, tratarlas con más finura, y la tercera concierne al impacto que la segunda tiene en la práctica docente, inexplorada en esta investigación como tal, pero de necesaria exploración, pues es el foco en el que entendemos que la investigación en educación matemática adquiere relevancia dese una perspectiva social.

*Conocimiento profesional del profesor de matemáticas*

En primer lugar, el conocimiento profesional del profesor de matemáticas ha sido uno de los focos principales de reflexión que subyacen a esta tesis. Durante el desarrollo de la misma, hemos sido partícipes de la reflexión acerca de cómo crear un modelo que permita observar el conocimiento del profesor de matemáticas con fines analíticos, desgranándolo en diferentes componentes, que consideramos integradas, pero que podemos diferenciar para dar mayor profundidad a nuestra comprensión. Sin embargo, el fruto de esta reflexión, el modelo MTSK, es una creación reciente y que, aunque consideramos que nos permite comprender el conocimiento del profesor de matemáticas, requiere trabajar sobre ella en mayor medida. Cada uno de los subdominios contempla a su vez diferentes componentes, que entendemos pueden ser exploradas en mayor profundidad, como por ejemplo el subdominio del *conocimiento de la estructura matemática*, para dotarlo de una mayor claridad y definición, o que puede ser explorado desde diferentes ópticas, para comprender mejor las propias componentes de los subdominios, como es el caso del *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas*, en el que ya hemos desarrollado algunos esfuerzos (e.g. Flores-Medrano, Escudero, Montes, Carrillo, en prensa) mostrando la posibilidad de desarrollar sistemas de categorías, tanto emergentes como provenientes de modelizaciones acerca de cómo aprenden los alumnos, que más allá de las posibilidades que ofrecen, desde una perspectiva teórica, nos permiten comprender mejor qué puede saber un profesor acerca del aprendizaje de sus alumnos. Entendemos que este esfuerzo en comprender cada uno de los subdominios puede ser realizado, tanto desde la perspectiva de la profundización en cada uno como en la comprensión de todos ellos de forma integrada e interconectada, aportando cada uno de los esfuerzos elementos diferentes. En particular, a este investigador le atraen especialmente los subdominios del dominio del conocimiento matemático, y como estos influyen y afectan a los subdominios del conocimiento didáctico del contenido. En particular, el conocimiento de la estructura matemática, consideramos que es un campo especialmente fértil, pues, ya sea desde la conceptualización de *Horizonte Matemático* (Ball & Bass, 2009; Zazkis & Mamolo, 2011; Jakobsen, Thames, Ribeiro & Delaney 2012), o de las *conexiones* (Rowland et al., 2009; Fernández, et al. 2010), permite comprender la visión de conjunto que los profesores tienen sobre las matemáticas que conocen. No solo esto, sino que además, comprender los factores que influyen en la construcción de estas estructuras[115], el papel de este tipo de conocimiento en la práctica docente, o el impacto que diferentes conocimientos de la estructura puedan tener en el aprendizaje de los alumnos, son temas que entendemos pueden aportar elementos notables de cara no solo a la investigación, sino también al impacto de esta en la formación de los maestros. Este impacto es otro de los elementos que consideramos que, al menos en el grupo de investigación en el que nos encontramos, es una de las líneas de investigación más abiertas e inexploradas, de manera que consideramos que en algún momento futuro habremos de dar el salto a implicarnos en el diseño de programas de formación de profesores, tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria. En cuanto a los subdominios relativos al conocimiento didáctico del contenido considerados en MTSK, observamos la necesidad de dotarlos de ejemplos potentes que muestren, sin necesidad de haber formado parte del equipo de desarrollo del modelo[116], el papel fundamental de la matemática en los mismos, así como el valor de la diferenciación clara con los subdominios del conocimiento matemático. Así, entendemos que ha de hacerse un especial esfuerzo en el subdominio relativo a la enseñanza (*KMT)*, especialmente en contextos de secundaria, donde el contenido del

[115] Énfasis en el plural, por la diversidad de estructuras que pueden encontrarse, tanto en diferentes profesores, como las diferentes estructuraciones que puede hacer un mismo profesor.

[116] Como autocrítica, aceptamos que el modelo MTSK es complejo en cuanto a su conceptualización y matices respecto a otros modelos, lo que deriva en que un público experto en investigación en educación matemática, pero no en los modelos de conocimiento profesional, no perciba plenamente la aportación que entendemos hace el modelo.

subdominio, ligado a estrategias de enseñanza y a materiales de enseñanza cercanos a lo manipulativo, invita a las referencias al conocimiento didáctico general, que no pretende abordar este modelo de conocimiento. Asimismo, el subdominio ligado a las características del aprendizaje del alumnado (KFLM), entendemos que tiene el potencial de permitirnos caracterizar el conocimiento del profesor de la actividad matemática del alumno, para lo cual pretendemos tanto desarrollar diferentes categorías que den cuenta de este conocimiento (e.g. Flores, Escudero, Montes & Carrillo, en prensa), como profundizar en categorizaciones existentes (e.g. Carreño, Rojas, Montes & Flores, 2014). Por tanto, pese a que consideramos que el modelo es una propuesta sólida, con unas bases teóricas sólidas también, se requiere una constante profundización y revisión del mismo para así poder ir refinando, tanto su contenido, como su divulgación.

*Conocimiento especializado del profesor de matemáticas sobre el infinito*

En cuanto al conocimiento del profesor de secundaria acerca del infinito, este es el campo en el que este investigador pretende profundizar, tanto por dar continuidad a esta investigación como por disfrute personal al trabajarlo. Es un campo cuya implicación en la enseñanza, tanto en primaria como en secundaria, no es inmediato, ya que el conocimiento del profesor acerca del infinito es un conocimiento a usar cuando explique otros conceptos, con lo que no resulta sencillo acceder a él[117], ni hacer a los profesores conscientes del mismo y de sus implicaciones en su enseñanza. En esta investigación hemos mostrado la enorme complejidad que tiene, y entendemos que puede ser prometedor trabajarlo desde la perspectiva del establecimiento de redes teóricas, *Networking* (Bikner-Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue & Sabena, 2010), para mostrar como las diferentes teorías que modelizan el conocimiento del infinito en el sentido de cada uno de los subdominios de MTSK pueden ser interconectadas y estructuradas para dar una imagen completa de la complejidad y contenido del mismo. Así algunas de las teorías que entendemos pueden ser potentes para conectar entre si y generar esa red teórica son: APOS (Asiala et al., 1996; Arnon et al. 2014) para el desarrollo de la cognición sobre el infinito; Fenomenología (Freudenthal, 1983), para la profundización en la relación entre el infinito y los conceptos y procedimientos abordados en el aula, para el reflejo del conocimiento del infinito en el conocimiento de estos, así como la noción de desempaquetado (Ma, 1999),

[117] En términos de acceso metodológico como investigador.

para la profundización en la capacidad de detección del infinito en conceptos; Tipos de intuición sobre el infinito (e.g. Fischbein, et al., 1979; Dubinsky, Weller, Brown, McDonald & Stenger, 2004; Falk, 1994; Belmonte y Sierra, 2010), para el tipo de significados de los que se dota al infinito, así como para profundizar en las formas de interactuar con el concepto; Metáfora Básica del Infinito (Lakoff y Nuñez, 2000; Ueno, 2004), para profundizar en los aspectos verbales del infinito, que reflejan elementos de la cognición sobre el mismo; las conexiones (Fernández et al., 2011), en particular las relaciones de complejización o simplificación (Carrillo, Climent, et al., en prensa) en las que el infinito se vea involucrado; teorías relativas al aprendizaje de los alumnos, que se puedan trasladar al conocimiento del profesor de dicho aprendizaje, como el *Mathematical Proficiency* (Kilpatrick, Swaford & Findell, 2001); o creencias sobre las matemáticas (Carrillo & Contreras, 1994) y su reflejo en las creencias y actitudes hacia el infinito (Sierpinska, 1987). Estas son algunas de las teorías que pensamos tienen potencial de ser explotadas en pos del establecimiento de una red teórica, pero también existen diferentes elementos sobre los cuales no hemos encontrado referencias, o las hemos encontrado, pero no son muy actuales, que, tras una revisión mucho más profunda de la que es posible en esta investigación, posiblemente surgieran. Ese es el caso de elementos como los heurísticos en resolución de problemas que pudieran estar asociados al infinito; las formas y usos de la generalización en el aula (Mason et al., 1982); todo lo relacionado con los procesos de demostración y establecimiento de la verdad en matemáticas, donde pensamos que las demostraciones por inducción tienen un papel importante; aspectos relacionados con el uso intencional de diferentes verbalizaciones matemáticas, como vehículo de comunicación; consideraciones de tipo curricular sobre contenidos concretos ligados al infinito; o creencias del profesor sobre el infinito ligadas a la utilidad del concepto en el aula o a la utilidad que pudiera tener para los estudiantes. Por tanto, existen líneas futuras de investigación con las que ya estamos familiarizados y otras con las que no lo estamos, pero creemos posible comenzar a trabajarlas en cuanto surja la oportunidad, pero también existe una prospectiva de investigación que requiere avanzar más aún en la comprensión de distintas facetas del objeto de estudio, para posteriormente dibujar con más claridad el camino a seguir.

*El infinito en las interacciones sociales en el aula*

Finalmente, en cuanto al tercer foco de prospectiva, el infinito como objeto de conocimiento humano sujeto a la interacción alumno-profesor, existen multitud de estudios que abordan la comunicación entre estudiantes (e.g. Radu & Webber, 2011), o del estudiante con el profesor (e.g. Tsamir & Tirosh, 1999), con foco en la forma de expresarse del alumno. Sin embargo, no hemos encontrado estudios en los que se abunde en la figura del profesor como agente en el aprendizaje de sus estudiantes con el foco en el conocimiento del infinito. Con este propósito, hemos mostrado durante esta investigación la relevancia de considerar el conocimiento del profesor acerca del infinito, así como la utilidad de dicho conocimiento al tratar con otros conceptos, con lo que entendemos fundamental profundizar en el papel de los aspectos comunicativos, y en cómo se produce la interacción entre alumno y profesor cuando se trata el infinito, trasladando el foco al profesor. Asimismo, nos parece interesante explorar diferentes propuestas metodológicas para trabajar contextos que requieran comprensión del infinito, para así iniciar un proceso de transferencia de la investigación a la práctica de los profesores que tenga un impacto real en las aulas. En esta línea, tanto las propuestas metodológicas para tratar conceptos relacionados con el límite, como los materiales didácticos, o el diseño de estándares de aprendizaje acerca del infinito que puedan servir a los profesores de guía, entendemos que es una línea de trabajo que no solamente consideramos con potencial productivo, sino con potencial de hacer que esta línea de investigación tenga impacto en los procesos educativos.

## Limitaciones del estudio

Este estudio se ha desarrollado en unas condiciones derivadas de multitud de aspectos que hacen que de ellos emerjan tanto limitaciones, como restricciones que se han tornado limitaciones en esta investigación. En primer lugar, creemos necesario comentar que entendemos ‘limitación’ no como algo negativo, sino como un elemento que define y delimita esta investigación, en términos de acotarla[118], y de darle los matices que tiene, reflejando la idiosincrasia en la que ha sido desarrollada. Por tanto, comentaremos las limitaciones en términos de las características que han condicionado el estudio y lo han dotado de muchas de las particularidades que tiene. Así este apartado se estructurará

[118] Así, las limitaciones se entienden como algo desprovisto de negatividad, sino como una acotación de la investigación, derivada de ciertos factores.

en torno a tres núcleos, las limitaciones derivadas del tipo de estudio, en las que profundizaremos en los condicionantes ligados a las elecciones metodológicas, las limitaciones derivadas del contexto teórico, donde reflexionaremos sobre los condicionantes impuestos por los constructos teóricos, y finalmente las limitaciones derivadas del investigador, donde expondremos algunas de las características del investigador que somos conscientes que han influido en el desarrollo de esta tesis. Además de estos tres conjuntos de limitaciones, creemos necesario comentar que la existencia de estas no sólo es completamente inevitable, sino también necesaria, ya que durante el desarrollo de esta investigación hemos comprendido que esta acotación es completamente necesaria para finalizarla. Esto es así debido a factores logísticos[119], pragmáticos[120], y de calidad de la línea de investigación que abre este estudio exploratorio[121].

Comentaremos por tanto, en primer lugar, las limitaciones derivadas del tipo de estudio, y de las características metodológicas de este. En este sentido, existe primero la limitación propia del estudio de caso, y es el hecho de que las *generalizaciones difusas* propuestas en base al caso de Aarón para el conocimiento del profesor acerca del infinito, así como las propuestas basadas en la sensibilidad teórica que hemos desarrollado durante el estudio, no pretenden ser exhaustivas, sino aquellas que, en la medida que los datos y la sensibilidad que estos y la lectura de literatura especializada nos permiten, podemos hacer. Asimismo, la elección del enfoque metodológico de la Grounded Theory condiciona el uso que podemos hacer de la teoría previa, provista por la lectura de otros autores, elemento que solventamos parcialmente al no negar la inferencia de la teoría previa de forma completa, usando la versión de este enfoque propuesta por Strauss y Corbin (1998), en la que la teoría previa tiene cabida. Así, esta acotación la convertimos en uno de los elementos que consideramos más potentes de esta tesis, ya que, tras la emergencia de categorías, las comparamos con teorías y resultados previos que nos permiten triangularlas y darles cabida fundamentada en las aportaciones de otros autores, siendo conscientes de la aportación del estudio en términos de la especificidad lograda al describir el conocimiento del profesor sobre el

[119] La financiación de esta investigación es limitada, así como la duración máxima del tiempo de desarrollo de los estudios doctorales, estipulada en la memoria del programa de doctorado en que se desarrolla.

[120] Es una investigación con la que se pretende optar al grado de Doctor, y por tanto entendemos que ha de tener un fin.

[121] Entendemos que la publicación de la memoria de la investigación, así como los artículos que deriven de la misma recibirán una crítica que nos permitirán refinar y mejorar los siguientes esfuerzos.

infinito. Así, las lecturas realizadas giraban en torno al conocimiento del infinito, con pocas o ninguna referencia al conocimiento del profesor como un profesional, así como en torno al conocimiento profesional y los modelos para aproximarse a este. Estas dos temáticas nos han permitido dos miradas 'macro' a diferentes aspectos del objeto de estudio, que dotaban de sensibilidad al investigador al estudiar el fenómeno 'micro', el conocimiento profesional del profesor de matemáticas acerca del infinito, no teniendo teoría previa acerca de este, pero si elementos que nos permitían aproximarnos con mayor sensibilidad al mismo. Otra limitación que asignamos a esta categoría es la derivada de la forma de recogida de los datos. El evento significativo de no poder tomar registro de la práctica de aula de Aarón por la negativa de uno de los padres de un alumno, así como la propia forma de recogida de datos, entrevista y cuestionario previo, suponen limitaciones, en cuanto a la naturaleza de los datos, que nos aportan un conocimiento declarativo, cuya veracidad hemos triangulado con múltiples preguntas en las que el objetivo era el mismo pero cuya naturaleza era significativamente diferente, de manera que requirieran de un conocimiento coherente.

En segundo lugar, comentaremos las limitaciones derivadas del contexto teórico de la investigación. Este contexto es, principalmente, el modelo de conocimiento profesional MTSK, cuyo desarrollo ha definido en gran medida la sensibilidad desarrollada acerca del conocimiento profesional. Somos conscientes de que participar en el desarrollo de un modelo teórico como este posiblemente ha sesgado nuestra visión acerca del conocimiento del profesor, tanto en su conceptualización (MTSK), como en las consideraciones implícitas que se hacen respecto de este. Para minimizar los efectos de este sesgo, en la continua revisión de literatura acerca de los modelos de conocimiento profesional hemos pretendido no solo comprender estos modelos, sino hacer un esfuerzo por 'leer entre líneas', para poder inferir qué objetivos ulteriores tienen, y así comprender los motivos que llevan a los diversos autores a desarrollar sus conceptualizaciones en la forma en que lo hacen. Así, como autocrítica y reconocimiento de características singulares que puedan haber constreñido este estudio por la filosofía inherente al esfuerzo teórico desarrollado, reconocemos que la aproximación realizada es marcadamente teórica, siendo el modelo en un principio 'para la investigación', quedando relegado a un segundo plano, de forma implícita, el impacto en la realidad del aula. Asimismo, el modelo MTSK es, como indicamos en el marco teórico, ‘un traje hecho a medida’ que refleja la forma de entender el conocimiento profesional de los investigadores que lo desarrollan (en consonancia con las reflexiones de Schoenfeld, 1992), entre los que nos encontramos, con lo que las limitaciones que posee como constructo teórico son en gran medida las derivadas de nuestro entendimiento del contenido del propio modelo. Por tanto, pese a que somos conscientes de algunas de las limitaciones que conlleva, como el carácter excesivamente teórico del mismo, al ser muchas de estas limitaciones propias, asumimos cierta imposibilidad de determinarlas con mayor precisión, ya que vienen dadas por nuestros propios esquemas de pensamiento, de los cuales no somos plenamente conscientes.

Finalmente, existe una colección de limitaciones derivadas de la persona que conduce la investigación. Al igual que en el apartado anterior, no somos plenamente conscientes de todas las limitaciones que esto conlleva, pero sí de la existencia de las mismas. Uno de los elementos que consideramos relevantes de las características personales del investigador que han condicionado esta investigación, es la necesidad de coherencia teórica, que hemos procurado que exista durante toda la investigación. Así, la relación entre el paradigma de investigación (Interpretativo), el enfoque metodológico (Grounded Theory) y la perspectiva teórica (preeminentemente MTSK) se ha tenido en cuenta para que el uso que se hiciera de los mismos fuera riguroso y no se extralimitara de lo que cada uno contempla. Para concluir, creemos, en consonancia con el trabajo de Schoenfeld (2001), que la percepción del investigador acerca del infinito como elemento matemático y como parte del conocimiento del profesor está influenciada por los constructos teóricos estudiados, pero también por las propias concepciones que este tiene acerca de la matemática y del aprendizaje y enseñanza de la misma, han condicionado en gran medida este estudio, a la vez que lo han impulsado hacia la perspectiva (de consideración del objeto de estudio) seguida.

## Sobre el investigador y el proceso investigador

En este apartado desarrollaré las consideraciones de índole más personal[122] acerca del desarrollo de la investigación. Así, mostraré la reflexión realizada en torno a tres núcleos temáticos: el desarrollo de la investigación, teniendo en cuenta el carácter formativo de la misma; la idoneidad de las elecciones realizadas, así como de los enfoques teórico y metodológico, para finalmente acabar con reflexiones sobre el desarrollo que como investigador he experimentado a lo largo de esta investigación

[122] Y por ello usaré la primera persona del singular.

Mirando al desarrollo de la investigación, creo fundamental para comprenderla considerar el hecho de que es un proceso que refleja la formación de un investigador, y por tanto, existen fases en la misma, no solo en cuanto a su desarrollo, sino también en cuanto a la madurez de muchas de las elecciones realizadas. Así, el proceso seguido entiendo que ha servido para optimizar la madurez de cada paso de la investigación, desde la primera fase de revisión bibliográfica intensa, en la que nos familiarizamos profundamente, no solo con el infinito y el conocimiento profesional, sino con el significado de 'investigar', y los métodos propios de la investigación en educación matemática. Posteriormente, el desarrollo de las herramientas metodológicas, basado en el conocimiento acumulado, me permitió plantearme lo óptimo de la aproximación que hacíamos, refinando los instrumentos de recogida de datos. Durante este proceso, el contacto con Aarón, el profesor estudiado, me hizo más consciente de la realidad a la que me aproximaba, con sus características idiosincráticas que imponían limitaciones a la investigación, así como a la vez nos abrían posibilidades para investigar aspectos que no habíamos considerado. Posteriormente, el proceso de recogida de datos, tanto en el aula como en las posteriores sesiones de entrevista, supuso un punto de inflexión en el desarrollo de la investigación, ya que entendí la necesidad de analizar los datos según los tomaba, hecho que recomendaba la literatura en metodología consultada, pero que no entendía plenamente. Así, en este proceso simultáneo de obtención de datos y análisis, fue tomando cuerpo la percepción del conocimiento profesional del infinito que se refleja en este documento. Tras esto, los ciclos de refinamiento del análisis de la información, de los cuales se muestra en esta memoria el producto final, me aportaron seguridad acerca del análisis realizado, así como de la saturación de datos obtenida. Finalmente, aunque en diversa bibliografía sobre metodología y procesos de desarrollo de tesis doctorales se recomienda escribir la memoria de investigación al final del proceso investigador, en este caso opté por escribir cada capítulo según desarrollaba el conocimiento incluido en el mismo. Así, pese a haber revisado cada capítulo varias veces tras su escritura, en diferentes momentos de la investigación, con el consiguiente refinamiento de su contenido, tenía una base escrita explícita que podía consultar en cualquier momento para resultar coherente no solo con las ideas que tenía en cada momento, sino con los fundamentos que tenía previamente establecidos.

Mirando ahora la idoneidad del enfoque teórico y metodológico, entiendo que esta idoneidad se puede mirar desde dos perspectivas, una primera ligada a la coherencia, adecuación y potencia de acuerdo al objeto de estudio, y una segunda de acuerdo al grado de compatibilidad con la forma de entender del investigador tanto el objeto de estudio como la metodología. En cuanto a la primera perspectiva, los constructos teóricos usados suponen una herramienta que me ha resultado útil para aproximarme al conocimiento del profesor acerca del infinito, permitiéndome comprenderlo en diferentes facetas del mismo. Sin embargo, existe la posibilidad de que, al haber sido desarrollado el modelo de conocimiento profesional MTSK desde un grupo del que formo parte, existan limitaciones o inadecuaciones de las que no soy consciente por ser estas intrínsecas a mi persona y mi propia forma de entender el conocimiento del profesor. Los referentes teóricos sobre el infinito me han permitido obtener una sensibilidad mucho más amplia de la que poseía al principio de la investigación, que ha sido clave para generar la comprensión del infinito que en este momento entiendo que poseo. En cuanto a la segunda perspectiva anteriormente comentada, en el caso del infinito, la diversidad de referencias y enfoques de estudio del infinito estudiados reflejaban en general una forma de comprender la matemática escolar íntimamente ligada al constructivismo, tradición con la que me siento plenamente identificado, de manera que entendemos existe la adecuación pretendida. En cuanto al conocimiento del profesor de matemáticas, el modelo MTSK es, como reza el título del apartado en el que se desarrolla, ‘un traje hecho a medida’, en la medida que he formado parte del grupo que lo ha generado, y mi forma de entender la docencia, la matemática, y la naturaleza del conocimiento del profesor está reflejado en el mismo, y ha tenido un gran impacto en su desarrollo. Respecto a esto, también creo necesario comentar que una vez desarrollada una estructura básica del modelo, cada investigador del grupo ha tomado una serie de decisiones en cuanto al uso del mismo que reflejan su sensibilidad. En este caso, yo elegí un enfoque profundamente relativista, en el que la evaluación de la validez del conocimiento no tiene tanta importancia como la comprensión del proceso seguido para desarrollar dicho conocimiento. En gran medida entiendo que esta elección viene dada por el hecho de ser el infinito el concepto que me interesa en mayor medida, ya que existe una gran amplitud de maneras de aproximarse a este concepto y muchos grados de desarrollo de la cognición, en los que no es tan interesante la validez como el motivo que lleva a ese punto de comprensión. En cuanto a la metodología desarrollada, entiendo que el carácter sociocultural de la investigación ha tenido un gran impacto en la adecuación del enfoque a mi forma de entender la investigación. Mi experiencia previa con la actividad investigadora era bastante limitada, de manera que al experimentar la inmersión en el grupo SIDM, con su experiencia y tradición en la investigación cualitativa desde un paradigma interpretativo, con cierta presencia de la Grounded Theory, los entendí como opciones que se adaptaban a mi forma de entender la investigación, probablemente por la solidez que reflejaban. Considero un reto, de cara al futuro, plantearme diferentes enfoques metodológicos, ya sea en cuanto al tipo de estudio, donde creo que los estudios cuantitativos pueden generar conclusiones 'a gran escala', desde diferentes paradigmas, donde uno positivista entiendo que puede permitirme implicarme en la evaluación del conocimiento profesional (en una línea parecida a la desarrollada en Míchigan), o finalmente desde diferentes metodologías para aproximarme a la información y analizarla.

Para concluir este apartado, considero necesario reflexionar sobre mi maduración con y durante esta investigación. Como persona e investigador he comprendido aspectos que van más allá de esta investigación en sí, que han tenido y espero tendrán un impacto en mi labor como investigador. En primer lugar, he comprendido el carácter procesual que tiene una investigación, desde la primera familiarización con la literatura de investigación hasta la reflexión final acerca de las aportaciones que se realizan con la misma. Creo necesario hacer esta indicación, porque desde mi forma de entender, ha tenido gran relevancia comprender que los artículos, libros, y producciones en general que muestran resultados de investigaciones son el reflejo de un gran esfuerzo y tiempo dedicado a la producción de los mismos, lo cual ha contribuido a que los valore en mayor medida. Otro elemento que, en el momento de ser consciente de ello, supuso un punto de inflexión, fue la consciencia de 'lo social de la investigación en educación matemática'. Este hecho me permitió entender que no solo leer a otros autores, sino también discutir con ellos en persona, generaba en mi una comprensión más amplia de sus investigaciones, y en dimensiones que en los documentos a los que habitualmente se puede acceder están, en el mejor de los casos, implícitas, como puedan ser las motivaciones que los distintos autores tienen para desarrollar sus investigaciones en la forma en que lo hacen. Asimismo, el hecho de haber trabajado en el seno del grupo SIDM ha reforzado esta consciencia social de la investigación, ya que gran parte de los avances de esta investigación se deben al hecho de pertenecer a dicho grupo, del que me he sentido un integrante relevante que podía aportar, y de donde he aprendido, entre otras cosas, el valor de las buenas críticas, que han impulsado esta investigación enormemente. Finalmente, he ido desarrollando, conforme esta investigación requería más tiempo, esfuerzo y reflexión, una mayor consciencia de mí mismo como investigador y persona, he sido más consciente de los aspectos de la investigación en los que me siento más cómodo, y donde creo que me desenvuelvo mejor, como son los ligados a cuestiones teóricas, y aquellos aspectos que me resultan más dificultosos, como la interacción con otras personas.

# Referencias

Adler, P. A., & Adler, P. (1994). Observational techniques. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 377-392). Londres: SAGE.

Adler, P. A., & Adler, P. (1998). Observation techniques. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.), *Collecting and Interpreting Qualitative Materials* (pp. 79-110). Londres: SAGE.

Allis, V., & Koetsier, T. (1991). On some paradoxes of the infinite. *British Journal for the Philosophy of Science, 42*(2), 187-194.

Angrosino, M.V., & Mays de Pérez, K.A. (2000). Rethinking Observation: From Method to Context. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 673-702). Londres: SAGE.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education, 6*, 1-32.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D. L. & Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Documento presentado en la conferencia de 2009 en el Curtis Center de Matemáticas y Enseñanza.

Ball, D.L. & McDiarmird, G. (1990). The subject matter preparation of teachers. In W.R. Houston (Ed.), *Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 437-449). New York: Macmillan.

Bas, S., Didis, M.G., Erbas, A.K., Cetinkaya, B., Cakiroglu, E., & Alacaci, C. (2013). Teachers as investigators of students' written work: Does this approach provide an opportunity for profesional development? B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti, *Actas del CERME 8* (pp. 2936-2945). Antalya, Turquía: ERME.

Bassey, M. (1999). *Case Study Research in Educational Settings*. Celtic Court: Open University Press.

Bardin, L. (1985). *Análisis de Contenido.* Traducción por Cesar Suarez. Akal: Madrid.

Baxter, J.A., & Lederman, N.G. (2001). Assesment and measurement of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome, N.G. Lederman (Eds.), *Examining Pedagogical Content Knowledge. The Construct and its Implications for Science Education* (pp. 147-161). Dordrecht: Kluwer.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad de Salamanca.

Belmonte, J.L., & Sierra, M. (2010). Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 139-171.

Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of theories in mathematics education. En Pinto, M. M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds.). *Actas del 34º PME* (Vol. 1, pp. 145-175). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Billstein, R., Libeskind, S., & Lott., (2009). *A problem solving approach to mathematics*. Harlow: Pearson.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. H. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester: Horwood.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxian Des Unendlichen, Leipzing* (Publicación póstuma). Las paradojas del infinito (Trad. L. F. Segura). 1991, México: Mathema.

Brodie (2010). *Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms.* New York: Springer.

Bromme, R. (1994). Beyond subject matter: A psychological topology of teachers' profesional knowledge. In R. Biehler, R. Sholz, R. Strässer, & B. Winkelman (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 73-88). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bryman, A., (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Oress: New York.

Cantor, G. (1895). *Contributions to the founding of the theory of trasnfinite numbers*. New York: COSIMO CLASSICS.

Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Berlin: Springer. Ed. E. Zermelo Douek, N. (2009) Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. *En Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 142-147). Taipei, Taiwan: ICME.

Cantor, G. (1915). *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*. Traducción del original Philip E. B. (2007). New York: COSIMO CLASSICS.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M., & Flores, P. (2014). Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. Reflections based on specific descriptors of knowledge. En En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.) *Actas del Cerme 8* (pp. 2976-2984). Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser, & M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía.

Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Contreras, L.C., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, C.M., & Muñoz-Catalán, M.C. (enviado). The Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK) Model.

Carrillo, J., & Contreras, L.C. (1994). The relationship between the conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. *Actas del 18º Congreso del PME*, (Vol 2. 152-159). Lisboa: PME.

Carrillo, J., & Contreras, L.C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, *7*(3), 79-92.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Charmaz, K. (2000). Grounded Theory: Objectivist and Constructivist Methods. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 509-536). Londres: SAGE.

Charmaz, K. (2001). Qualitative interviewing and Grounded Theory analysis. En J. Gubrium, J. Holstein (Eds.). *Handbook of Interview Research* (pp. 675-694). Londres: SAGE.

Charmaz, K. (2008). Reconstructing Grounded Theory. En P. Alasuutari, L. Bickman, J. Brannen (Eds.). *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 447-460). Londres: SAGE.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 359-387.

Chevallard, Y. (1991) *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Alque.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. Michigan: Proquest Michigan University.

Cochran, K. F., King, R. A., & DeRuiter, J. A. (1991). Pedagogical Content Knowledge: A Tentative Model for Teacher Preparation. *Journal of Teacher Education*, *44*, 263-272.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Contreras, L.C., Climent, N., & Carrillo, J. (1999). Teachers beliefs on problema solving and mathematics education. En Krainer, K., Gofree, P., Berger, P. (Eds.). *European Research in Mathematics Education I.III*. (pp. 51-62). Osnabrück: Herstellung Books.

D'Amore, B. (1997). L'infinito in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 3*, 289-305.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics 61*(3), 293-319.

De Heer, W. (1999). International response trends: results of an international survey. *Journal of Official Statistics*, *15*(2), 129-142.

De Leeuw, E. (2008). Self-Administered Questionnaires and Standardized Interwiews. En P. Alasuutari, L. Bickman, J. Brannen (Eds.). *The Sage Handbook of Social Research Methods* (pp. 313-327). Londres: SAGE.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., Weller, K., & Arnon, I. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of

0.999...and 1.*Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education, 9*, 5-28.

Dubinsky, E., Weller, K., Brown, A., McDonald, M., & Stenger, C. (2004). Intimations of Infinity. *Notices of the AMS, 51*(7) 741-750.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M.A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 253-260.

Ernest, P. (1989), The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics'. En P. Ernest, (Ed.) *Mathematics Teaching*: *The State of the Art*, 249-254. Londres: Falmer Press.

Ernest, P. (1991). *The Phylosophy of Mathematics Education*, Londres: Falmer Press.

Escudero, D., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L.C., & Montes, M. (enviado para revisión). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA.*

Falk, R. (1994). Infinity: A cognitive challenge. *Theory and Psychology*, *4*(1), 35-60.

Fernández, S. (2011). *Continuity in mathematics education. Mathematics teachers in the transition to secondary school*. Tesis doctoral no publicada. España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Fernández, S., Figueiras, L., Deulofeu, J., & Martinez, M. (2010). Re-defining HCK to approach transition. In M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.) *Actas del CERME 7* (pp. 2640-2649). Rzeszów, Polonia: ERME.

Festinger, L. (1957). *A theory of cognitive dissonance.* Stanford: Stanford University Press.

Figueras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deulofeu, J. (2011). Teachers' advanced Knowledge for solving mathematics teaching challenges: a response to Zazkis y Mamolo. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 26-28.

Fischbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 491-512.

Flores, E., Escudero, D. I., & Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao, España: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J., (2013). A theoretical review of specialised content Knowledge. En B. Ubuz, M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., & Carrillo, J. (en prensa). ¿Cómo puede orientar el conocimiento que tiene el profesor acerca del aprendizaje de las matemáticas a su entendimiento sobre los espacios de trabajo matemáticos? *ETM 4*. Madrid: España.

Fontana, A., & Frey, J.H. (2000). The interview: From Structured Questions to Negotiated Text. En N. K. Denzin, Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research* (pp. 645-672). Londres: SAGE.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking Characterizations on Beliefs. En Leder, G.C., Pehkonen, E., Törner, G. (Eds), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, 40-57, Holanda: Kluwer Academic Publishers

Gamboa, G. de, & Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). Salamanca: SEIEM.

García-Amadeo, G. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: las interacciones y el análisis cognitivo.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Huelva: Huelva.

Gardiner, A. (1985). Infinite processes in elementary mathematics. How much should we tell the children? *The Mathematical Gazette, 69*, 77-87.

Gardiner, A. (2002). *Understanding Infinity: The mathematics of infinite processes.* New York: Dover Publications.

Gavilán, J. M. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspective cognitiva*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Sevilla: España.

Glasser, B. (1978). *Theoretical Sensitivity: Advances in the Methodology of Grounded Theory*. Mill Valley: Sociology Press.

Glasser, B. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Sociology Press: Mill Valley.

Glaser, B., & Strauss, A.L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* Chicago: Aldine De Gruyter.

Goldin, G. (2002). Affect, meta-affect, and mathematical beliefs. En G.C. Leder, E. Pehkonen, G. Törner (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 59-72). New York: Springer.

Hannula, M., Pehkonen, E., Maijala, H. & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317-337.

Hill, H., Ball, D.L., & Schilling, S.G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Hill, H., Rowan, B., & Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*. *42*(2), 371-406.

Hill, H., Schilling, S.G., & Ball, D.L. (2004). Developing measures for teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105,* 11-30.

Holton, J.A. (2007). The coding process and its challenges. En M. Hardy, A. Bryman (Eds.). *The Handbook of Data Analysis* (pp. 265-289). Londres: SAGE.

Jahnke, H.N. (2001). Cantor's Cardinal and Ordinal Infinities: An Epistemological and Didactic View. *Educational Studies in Mathematics. 48*(2), 175-197.

Jakobsen, A., Thames, M.H., & Ribeiro, M. (2013). Delineating issues related to Horizon Content Knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8* (pp. 3055-3064). Antalya, Turquía: ERME.

Juter, K. (2008). Students' concept development of limits. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Actas del CERME 5* (pp. 2320-2329). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Kattou, M., Michael, T., Kontoyianni, K., Christou, C., & Philippou, G. (2009). Teachers perceptions about infinity: A process or an object. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Actas del CERME 6* (pp. 1771-1780). Lyon, France: ERME.

Katz, V. (2004). *A history of mathematics.* Harlow: Pearson Education

Kim, D.J., Sfard, A., & Ferrini-Mundy, J. (2005). Students' coloquial and mathematical discourses on infinity and limit. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Actas de la 29º Conferencia del IGPME*, (Vol. 3, pp. 201-208). Melbourne: PME.

Klein, (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Ed. Leipzig B.G. Teubner

Kolar, V. M., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389-412.

Krainer, K., Gofree, F., & Berger, P. (1999). *European Research in Mathematics Education I.III. On research in Mathematics Teacher Education*. Osnabrück: Herstellung Books.

Kuntze, S., Lerman, S., Murphy, B., Kurz-Milcke, E., Siller, H.S., & Winbourne, P. (2011). Professional knowledge related to big ideas in mathematics - an empirical study with preservice teachers. En M. Pythak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.), *Actas del CERME 7*. 2717-2726. Rzeszow: Polonia: ERME.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An introduction to qualitative research interviewing*. Londres: SAGE.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *The embodiment of infinity. Where mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven: Yale University Books.

Llinares, S., & Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza. Anuario interuniversitario de Didáctica*, *8*, 165-180.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah: Lawence Erlbaum.

Mamolo, A. (2009). *Glimpses of Infinity: Intuitions, Paradoxes and Cognitive Leaps.* Tesis Doctoral. Universidad Simon Frasier: Vancouver, Canadá.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Harlow: Pearson.

Ministerio de Educación y Ciencia (1999). *Boletín Oficial del Estado número 298 de 14 de Diciembre de 1999*. Revisado a 6 de Marzo de 2011. Gobierno de España: Madrid.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2006). *Real Decreto 161/2006, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: España.

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2007). *Real Decreto 1467/2007, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.*. Madrid: España.

Montes, M. (2011). *El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva: Huelva.

Montes, M., Carrillo, J., & Ribeiro, C. M. (2014). Teachers knowledge of infinity, and its role in classroom practice. In P. Liljedahl, S. Oesterle, C. Nicol, & D. Allan (Eds), *Actas de la reunion de los congresos PME 38 y PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 234-241). Vancouver, Canada: PME.

Montes, M. A., Contreras, L. C. & Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

Montes, Flores-Medrano, Carmona, Huitrado, & Flores (2014). Reflexiones sobre la naturaleza del conocimiento y las concepciones. En Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Montes, M. (Eds.), *MTSK como marco teórico*. Universidad de Huelva: Huelva.

Moreno, L., & Waldegg, G. (1991). The Conceptual Evolution of Actual Mathematical Infinity, *Educational Studies in Mathematics, 22*(5) 211-231.

Moriel-Junior, J. G., & Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel.* Tesis doctoral. Huelva, España: Universidad de Huelva. (http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2949).

Navarro, M., & Pérez-Carreras, P. (2006). Constructing a Concept Image of Convergence of Sequences in the Van Hiele Framework. *Issues in mathematics education*. *6*(13) pp. 61-98.

Noerager Stern, P. (2007). On Solid Ground: Essential Properties for Growing Grounded Theory. En A. Bryant, K. Charmaz (Eds.). *The sage Handbook of Grounded Theory* (pp. 114-126). Londres: SAGE.

Penalva, C. (1996). *Estudio sobre la comprensión del concepto de número cardinal de un conjunto infinito.* Tesis doctoral. Universidad de Valencia: Valencia.

Penalva, C. (1998). El mapa cognitivo como recurso de investigación en el estudio de casos. *Educación Matemática*, *10*(2), 5-22.

Pehkonen, E. (1994). On teacher's beliefs and changing mathematics teaching. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *15*(3, 4), 177-199.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J.P. Ponte, J.F. Matos (Eds.), *Actas del PME 18*, (Vol. 1, pp. 195-210). Lisboa.

Pidgeon, N., & Henwood, K. (2004). Grounded Theory. En M. Hardy, A. Bryman (Eds.). *The Handbook of Data Analysis* (pp. 625-648). Londres: SAGE.

Puig, L. (1996). Análisis Fenomenológico. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat., A. Marín, L. Puig, M. Sierra, & M. Socas (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* (pp. 61-94) Ed. Horsori: Barcelona.

Radu, I., & Webber, K. (2011). Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes. *Educational Studies in Mathematics, 78*, 165-180.

Roa-Fuentes, S. (2013). *El infinito: un análisis cognitivo de niños y jóvenes talentosos en matemáticas*. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV: México.

Robinson, A. (1966). *Non-standard analysis*. Princeton: Princeton University Press

Rowland, T., & Turner, F. (2009) How shall we talk about 'subject knowledge' for mathematics teaching?. En Joubert, M. (Ed.), *Actas de la Sociedad Británica de Investigación en el Aprendizaje de las Matemáticas, 28*(2), 1-20. Universidad de Southampton, Reino Unido.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. Londres: SAGE.

Rowland, T., Turner, F., & Thwaites, A. (2013). Developing mathematics teacher education practice as a consequence of research. En B. Ubuz, M.A. Mariotti (Eds.), *Actas del CERME 8*, (pp. 3227-3236). Antalya, Turquía: ERME.

Rucker, R. (1995). *Infinity and the mind: The science and philosophy of infinite.* Princeton: Princeton University Press.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic New York: Books.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for* *research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A. (2010). *How we think*. New York: Routledge.

Schwab, J. J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, N.J. Wilkof (Ed.). *Science, curriculum and liberal education,* (pp. 229-272). University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2)*,* 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 371-397.

Singer, M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity. Does it really help in problem solving? In A. Rogerson (Ed.), *Proccedings of the 6th International Conference of the decidable and the undecidable in Mathematics Education* (pp. 252-256). Brno: República Checa.

Silverman, K., & Thompson, P. W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*, 499-511.

Sosa, L. (2010). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis doctoral: Universidad de Huelva.

Spivak, M. (1981). *Calculus. Calculo infinitesimal*. Traducción por Bartolomé Frontera Marqués. Madrid: Reverté.

Steele, D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use. of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16,* 245-268.

Stenger, C., Weller, K., Arnon, I., Dubinsky, E., & Vidakovic, D. (2008). A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set P(*N). Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(1), 93-125.

Stein, M., Baxter, J., & Leinhardt, G. (1990). Subject-matter knowledge and elementary instruction: A case from functions and graphing. *American Educational Research Journal*, *27*, 639-663.

Strauss, A.L. (1987). *Qualitative analysis for social scientist*. New York: Cambridge University Press.

Strauss, A.L., Corbin, J. (1990). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques.* Londres: SAGE.

Strauss, A.L., Corbin, J. (1998). *Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques* (segunda edición). Londres: SAGE.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*, 314-352.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Lewis, J. M., & Thames, M. H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. En D. S. Mewborn & H. S. lee (Eds), *AMTE Monograph Series*, 6. *Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teachers Educators.

Tall, D. (2004). Building Theories: the three worlds of mathematics. *For the learning of Mathematics 24*(1), 29-32.

Tall, D., & Schwarzenberger, R.L.E. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, *82*, 44-49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Thames, M. H. & Van Zoest, L. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher identity, knowledge and beliefs by developing practice-based approaches. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education, 43*(3), 583-594.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: McMillan.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and Representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*. *30*, 213-219.

Tossavainen, T. & Pehkonen, E. 2013. Three kinds of Mathematics: Scientific Mathematics, School Mathematics and Didactical Mathematics. *Far East Journal of Mathematics Education*. *11*(1), 27 – 42.

Ueno, Y. (2004), The basic metaphor of infinity and calculus education. *Academic reports.* Universidad Politécnica de Tokio. *27*(2), 53-58.

Veal, W., & MaKinster, J.G. (1999). Pedagogical Content Knowledge Taxonomies. *Electronic Journal of Social Sciences 3*(4). 1-18.

Warren, C. (2001). Qualitative Interviewing. En J. Gubrium, J. Holstein (Eds.). *Handbook of Interview Research* (pp. 83-102). Londres: SAGE.

Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, *9*(1), 5–28.

Yopp, D.A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B.J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999…=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 304-318.

Zakaryan, D. (2011). *Oportunidades de aprendizaje y competencias matemáticas de estudiantes de 15 años: un estudio de casos*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Huelva: Huelva.

Zazkis, R. & Mamolo, A. (2011). Reconceptualising knowledge at the mathematical horizon. *For the Learning of Mathematics*, *31*(2), 8-13.