ad voluptates honeste perfruendas utantur, quantum quidem satis est, corpori tribuis; maximam autem earum partem animo seponis: & aut libros tibi comparas, quibus bibliothecam instruas, aut, quæ eidem ornamento sint, pictas antiqui operis tabulas, in quibus hominis ingenium atque industria maxime apparet. Porro si quis est, quem boni primum mores, deinde aliqua sive ars, sive disciplina commendet, hunc tu statim, cujuscumque tandem conditionis sit, in tuam familiaritatem recipis, eumque aut jacentem sublevas, aut florentem etiam beneficiis ac muneribus ornas tuis. Hæc scilicet magnificentia te una delectare potest; non si te longus servorum ordo, præsertim peregre quum sis, in publicum prodeuntem comitetur, aut plures in stabulis equos pascas, aut aureis argenteisque vasis, & pretiosa supellectile domum instructam habeas, & alia hujus generis, quæ qui habent, vulgi opinione magnifici judicantur. Habeant ista illi, qui in media urbis celebritate ac frequentia perpetuo versantur, qui per omnes fere domos quotidianam salutationem circumferunt, qui diem in tenebris, noctem in luce transigunt, uno verbo qui in ne-

gotiis inertissimis occupati nec aliis, nec sibi vivunt. Quid autem ad te, qui nunquam ferme domo egrederis, nisi quando id aut officium, aut necessitas postulat, paucosque habes, neque ejusdem admissionis, amicos; sed magnam diei partem te intra tuum cubiculum contines, semper aliquid aut legens, aut scribens, aut animo subinde volvens, laterique assidens castissimae conjugis, quae tibi simillima contigit, & qua cum, raro saeculi hujus exemplo, conjunctissime vivis. Qui tibi hanc mentem Di dederunt, eandem perpetuo servent, JACOBE carissime; neque patiantur, ut quod vitae institutum tibi semel placuit, id, quoniam rectum est & laudabile, unquam displiceat. Hoc te mihi maxime commendavit, hoc te illis omnibus, qui suo & sapientum judicio utuntur. Res suas sibi habeant, qui turbae reguntur arbitrio. Plures sunt; sed iccirco, ut ait Seneca, deteriores. Vale.

PRÆFATIO.

PRopoſitum mihi eſt hoc opuſculo verum germanumque principium demonſtrare, cui uni calculus *differentialis*, &, qui huic contrarius eſt, *integralis* innititur. Nam quod olim Leibnitius poſuit, dum prima novi calculi fundamenta jaceret, id hujuſmodi eſt: *duas quaslibet ejuſdem generis magnitudines æquales invicem eſſe, quæ quantitate infinite exigua inter ſe differant*. Quod quidem quum manifeſte pugnet cum notione illa æqualitatis, quam natura ipſa hominum animis indidit, nihil mirum ſi tam multos ac tam pertinaces oppugnatores invenit. In his eſt Bernardus Nieuwentiitus, Geometra in primis clarus, qui diſputationem hac de re cum Leibnitio ſuſcepit, eamque per plures annos magna animi contentione agitavit.Et paucis ille quidem rem totam initio concludere ſolebat. Quærebat enim ex eo; utrum, quam ipſe infinite exiguam quantitatem diceret, aliqua esset, an nulla. Si enim aliqua, qui fieri potest, ut duo quædam æqualia sint, quorum differentia aliqua est? sin autem nulla, qui tandem est iste calculus, qui nihilum a nihilo distinguit, atque unum cum altero componit? Cognovit homo acutus argumenti vim; quumque non intelligeret quo pacto novus calculus consistere posset, si quantitas, quam diximus, nulla esset, aperte pronuntiavit, eam nihilo quidem esse quamproximam, sed tamen a nihilo longe distare. Ita quandam sibi finxit quantitatis speciem, quæ nihilum non sit, eademque pro nihilo haberi, ideoque sine ullo impendio negligi possit. Nec vero difficile fuit homini in metaphysicis studiis valde exercitato argumenta inde petere, quibus sententiam suam aliquo modo comprobaret. Sed quamvis multa perquam ingeniosa in medium attulerit, nunquam tamen neque aliis, neque fortasse sibi ipsi satisfecit. Itaque quum acrius ab adversario urgeretur, eo demum confugit ut diceret, falsum id principium esse non posse, cui superstructus calculus tam mul-

ta

ta vera inveniret. Nam quæ veteres Geometræ ab ipsis inventa exquisitissimis demonstrationibus confirmarunt, eadem ille non minus accurate definit. Quod quum verissimum sit, neque tamen id possit non esse falsum, cui ratio ipsa repugnat, videndum est, num qua ratione demonstrari queat, quomodo res habeat. Itaque ego sic statuo; quum Geometria, quanta quanta est, circa magnitudines versetur, quarum aliæ *positivæ*, aliæ *negativæ* vocantur, id quoque eandem complecti debere, quod sit inter has medium, hoc est ipsum nihilum. Nihilum enim, opinor, medium est inter positivam, & negativam magnitudinem. Igitur quum tres omnino calculi instituendi essent, quorum primus magnitudines positivas tractaret, alter nihilum, tertius magnitudines negativas, primus ac tertius satis diligenter expositi sunt. Reliquus erat secundus, qui *differentialis* a Leibnitio vocatus est; rectius de nihilo appellasset; cujus proinde principium hoc esse debuit: *duæ quælibet ejusdem generis magnitudines æquales invicem sunt, quæ nihilo inter se differunt*. Hoc autem nihi-

lum

lum cujusmodi sit, & quomodo tractari debeat, hoc opusculum ostendit, quod ejus naturam ac proprietates diligenter persequitur. Voço illud *geometricum*, ut a *metaphysico* distinguam, quod universali hac nota, o, exprimi solet. Nimirum quæ duo re disjuncta sunt, ea nomine quoque disjungi debent. Alterum generale est, per infinitum inane longe lateque diffusum (speciem Plato vocaret, si modo aliqua est nihili species); alterum peculiare, quod intra suos fines Geometria coercet. Utriusque autem definitio his verbis concluditur: *Nihilum est, per quod unumquodque eorum, quæ non sunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum aliquid non esse, quod antea quum esset, non esse amplius concipitur*. Prior hujus definitionis pars ad nihilum metaphysicum, secunda ad geometricum pertinet. Cui quidem consentaneum est, ut jam non concipiatur quasi vagum quiddam atque incertum, sed magnitudini alicui semper respondeat, quæ aliquando fuerit, nec amplius sit. Itaque si nihilum nihilo addas, aut a nihilo subtrahas; itemque unum in alterum ducas, aut per alterum

rum

rum dividas, non idem ſemper, quod Arithmetici docent, nihilum fiet. Quin varia, ut ita dicam, nihila exiſtent, quorum alia ejuſdem generis erunt, alia diverſi. Idem de infinita quoque magnitudine dicendum eſt, quæ tunc oritur quum finita magnitudo per nihilum dividitur. Quocirca quæcumque Euclides de finitis magnitudinibus in quinto Elementorum libro demonſtravit, ea omnia cum in nihilo, tum in infinita magnitudine locum habent. Hæc ſiquidem tria communi quodam vinculo continentur, ſibique invicem proportione reſpondent, nihilum, & magnitudines finita, atque infinita. Ex quo illud perſpicitur, ſi quantitati infinite exiguæ nihilum ſubſtituatur, ea omnia præſtari poſſe, quæ calculus præſtat differentialis. Quod ne temere affirmaſſe videar, quum calculus, quem diximus, circa rectas contingentes, & maximas, minimaſque magnitudines potiſſimum verſetur, quomodo iſtæ per nihilum definiantur, propoſitis mihi facillimis quibuſdam problematibus (quid enim difficilia tentarem?) demonſtrare placuit. Duos igitur quum libros fecerim, quorum

rum alter novam de nihilo doctrinam continet, alter ejus usum atque utilitatem explicat, propositionibus quinque & quadraginta utrumque absolvi. Nam quæ novem postremæ habentur, corollarii loco additæ sunt. Jam si omnia probe demonstrata fuerint, nihilumque geometricum pluribus experimentis semetipsum probaverit, nihil erit cur non novum principium veteri illi substituatur, ut ea æqualia esse dicantur, quorum differentia nulla est. Tunc vero nobilissimus calculus firmo stabilique fundamento subnixus præclare se adversus accusatores tuebitur, neminem unquam in errorem inducet, & quæ ipse invenit, ea haud secus esse certa ratione demonstrabit. Hoc scilicet hactenus præstare non potuit. Nam quod problema solverit, idem si velit se ipsum revolvens, & sua quasi vestigia relegens componere, eo demum exeat necesse est, ut duas magnitudines æquales esse ponat, quas inter infinite exigua quantitas intercedit. Hoc autem nemo sanus concesserit, quando quantitas infinite exigua, & nihilum, docente Leibnitio, unum idemque non sunt. At

contra

contra quis neget duas magnitudines esse æquales, quas inter intercedit nihilum? Nec vero si nova demonstrandi ratio in Geometriam inducatur, parum hoc nomine ipsa proficiet. Præterea qui nihili nomen, quantitatis infinite exiguæ loco, in posterum usurpabit, ejus non modo doctrina, sed etiam sermo sanus inculpatusque erit. Decet autem Geometram non solum recte cogitare, sed etiam loqui. Nimirum is neque circulum polygonum esse dicet, quod infinita numero latera habeat, neque rectam, quæ circulum contingit, illum in duobus punctis contingere; ita ut circulum a polygono, & duo, quæ diximus, puncta ab uno eodemque puncto cogitatione distinguat; neque alia hujus generis multa, quæ, ut absurda videantur, vera tamen omnia esse debent, si quantitas infinite exigua a nihilo est diversa. Hoc autem quamvis rationi adeo contrarium est, ut mens illud statim aspernetur ac respuat, tamen demonstrare sibi visus est Christianus Wolfius in Ontologia sua, & quidem metaphysicis rationibus; ut mecum ipse interdum reputem, cujus-

modi

modi ſit ea diſciplina, quæ veri falſique diſcrimen per ſuas demonſtrationes tollit. Cujus ſententia utinam aliis, mihi certe exiguo hoc opuſculo egregie refelli videtur. Neque enim contentus rem ſimpliciter aperuiſſe, atque uno aut altero argumento, ut fere fit, confirmaſſe, eam totam, propoſitis quibuſdam definitionibus atque axiomatibus, ordine explicui. Nam plurimum refert, mea quidem ſententia, quo quidque modo potiſſimum dicatur. Jacobus Bernoullius (quid enim diſſimulem?) jam pridem monuit, *quod data quavis quantitate minus eſt, illud eſſe non quantum, ſeu nihilum*; neque tamen cuiquam perſuaſit. Idem ſi addidiſſet, *hujuſmodi nihilum unum idemque ſemper non eſſe*, aliquid amplius dixiſſet, neque tamen adhuc, quod eſſet ſatis. Utcunque ſit, veteres Geometras imitari placuit, quorum præſertim in demonſtrando laudatur induſtria. Itaque idem ille, quem nunquam ſatis mirari poſſum, Archimedes, non tam quod nova ipſe invenerit, quam quod a Conone inventa rite atque ordine demonſtraverit, ſummus Geometra habitus eſt, & ſemper habebitur.

DE

DE NIHILO GEOMETRICO

LIBER I.

DEFINITIONES.

I.

UNitas eſt, per quam unumquodque eorum, quæ ſunt, dicitur unum.

II.

Nihilum eſt, per quod unumquodque eorum, quæ non ſunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum aliquid non eſſe, quod antea quum eſſet, non eſſe amplius concipitur.

III.

Finitum eſt, quod fines habet.

IV.

Infinitum autem, quod nullos habet fines.

V.

Comparatio eſt duorum quorumdam mutua collatio.

VI.

VI.

Comparatio ejusdem generis est, si duo quædam ita inter se invicem conferantur, ut unum aliquod eorum, quæ sunt, cum uno aliquo eorum, quæ item sunt, ejusdem dimensionis. Hæc autem rationem invicem habere dicuntur.

VII.

Comparatio diversi generis est, si duo quædam ita inter se invicem conferantur, ut unum aliquod eorum, quæ sunt, cum uno aliquo eorum, quæ non sunt ejusdem dimensionis. Hæc autem dicuntur rationem invicem non habere.

VIII.

Si duo quædam, aut pluria sese invicem multiplicent, quod inde oritur, vocetur factum; quæ vero sese invicem multiplicant, latera.

IX.

Factum cum facto conferri dicitur, quando latera cum lateribus conferuntur.

AXIOMATA.

I.

Si unitas semetipsam multiplicet, aut dividat, unitatem facit.

II.

II.

Si unitas unumquodvis multiplicet, aut dividat, id ipſum facit.

III.

Si nihilum nihilo ſubducatur, nihilum fit.

IV.

Si nihilum nihilum multiplicet, nihilum facit.

V.

Si nihilum ſemetipſum dividat, unitatem facit.

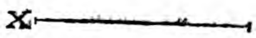
VI.

Nihilum cum ſemetipſo eodem modo confertur, quo unitas cum unitate.

PROPOSITIO I.

Si magnitudo quælibet a ſemetipſa auferatur, nihilum oritur.

Sit magnitudo quælibet x.
Auferatur autem x a ſemetipſa.
Dico nihilum oriri.



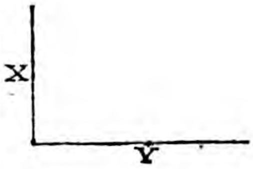
Quoniam enim x unum aliquid eſt, ablata x a ſemetipſa, quod antea erat, id non eſſe amplius concipitur. Hoc autem dicitur eſſe nihilum. Igitur ſi magnitudo x a ſemetipſa auferatur, nihilum oritur. Vocetur autem nihilum, quod ſubductione fit.

COROLLARIUM.

Hinc vero patet, ſi magnitudo x pro unitate ſumatur, exceſſum, quo unitas ſemetipſam excedit, nihilum fore. Hoc autem vocetur nihilum ordine primum, idemque exprimatur hac nota 1—1, ut 1 ſit ipſa unitas.

PROPOSITIO II.

Si magnitudo aliqua fuerit duarum dimenſionum; auferatur autem utraque dimenſio a ſemetipſa, atque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum oritur.



Sit magnitudo aliqua XY, cujus dimenſiones ſint x, & y. Auferatur autem cum x, tum y a ſemetipſa, ducanturque exceſſus in ſe invicem. Dico nihilum oriri.

Quoniam enim nihilum ex qualibet magnitudine oritur, ſi ea magnitudo a ſemetipſa auferatur, ablata utique x a ſemetipſa, nihilum orietur. Eadem ratione ablata y a ſemetipſa, orietur nihilum. Si igitur uterque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum in nihilum ducetur. At vero nihilum in nihilum ductum nihilum facit. Si igitur magnitudo aliqua fuerit xy, cujus dimenſiones ſint x, & y; auferatur autem cum

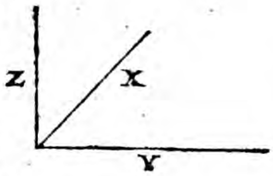
x, tum

x, tum y a ſemetipſa, atque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum oritur. Vocetur autem nihilum, quod ſubductione fit, atque unica multiplicatione.

PROPOSITIO III.

Si magnitudo aliqua fuerit trium dimenſionum; auferantur autem cum duæ dimenſiones invicem ductæ, tum tertia dimenſio a ſemetipſis, atque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum oritur.

Sit magnitudo aliqua xyz, cujus ſint dimenſiones x, y, z. Auferantur autem a ſemetipſis cum x, y in ſe invicem ductæ, tum etiam z, atque exceſſus ducantur in ſe invicem. Dico nihilum oriri.

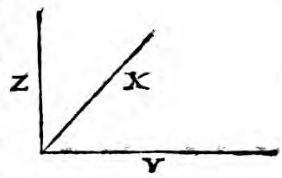


Quoniam enim nihilum ex qualibet magnitudine oritur, ſi ea magnitudo a ſemetipſa auferatur, ablatis utique x, y in ſe invicem ductis a ſemetipſis, nihilum orietur. Eadem ratione ablata z a ſemetipſa, orietur nihilum. Si igitur uterque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum in nihilum ducetur. At vero nihilum in nihilum ductum nihilum facit. Si igitur magnitudo aliqua fuerit xyz, cujus dimenſiones ſint x, y, z; auferantur autem cum x, y in ſe invicem ductæ, tum etiam z a ſemetipſis, atque exceſſus in ſe invicem ducantur, nihilum oritur. Vocetur autem hoc quoque nihilum, quod ſubductione fit, atque unica multiplicatione.

PROPOSITIO IV.

Si magnitudo aliqua fuerit trium dimensionum; auferatur autem unaquæque dimensio a semetipsa, atque excessus in se invicem ducantur, nihilum oritur.

Sit magnitudo aliqua XYZ, cujus sint dimensiones, X, Y, Z. Auferatur autem tum X, tum Y, tum Z a semetipsa, ducanturque excessus in se invicem. Dico nihilum oriri.



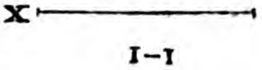
Quoniam enim nihilum ex qualibet magnitudine oritur, si ea magnitudo a semetipsa auferatur, ablata utique Z a semetipsa, nihilum orietur. Nihilum autem etiam oritur, si X a semetipsa ablata ducatur in Y ablatam item a semetipsa. Si igitur excessus, quo Z semetipsam excedit, in id nihilum ducatur, nihilum in nihilum ducetur. At vero nihilum in nihilum ductum nihilum facit. Si igitur magnitudo aliqua fuerit XYZ, cujus sint dimensiones X, Y, Z; auferatur autem unaquæque dimensio a semetipsa, atque excessus in se invicem ducantur, nihilum oritur. Vocetur autem nihilum, quod subductione fit, & duplici multiplicatione.

PROPOSITIO V.

Nihilum ex qualibet magnitudine ortum, quod subductione fieri dicitur, æquale

quale est facto, cujus alterum latus est eadem illa magnitudo, alterum nihilum ordine primum.

Sit magnitudo quælibet x : nihilum ordine primum 1—1. Dico nihilum ex x ortum, quod subductione fieri dicitur, æquale esse facto, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1.

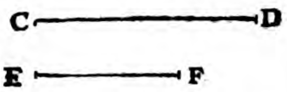


Quoniam enim nihilum ex x subductione fit, si x a semetipsa auferatur, erit id nihilum æquale excessui, quo x semetipsam excedit. Est autem etiam factum, cujus alterum latus est x, alterum 1—1, æquale excessui, quo x excedit semetipsam; quando unitas, si unumquodvis multiplicet, id ipsum facit. Igitur nihilum ex x ortum, quod subductione fieri dicitur, æquale est facto, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1.

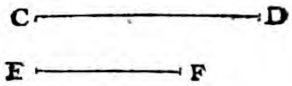
PROPOSITIO VI.

Si nihilum ex finita magnitudine ortum cum nihilo conferatur orto ex finita alia magnitudine ejusdem dimensionis; utrumque autem subductione fieri dicatur, comparatio est ejusdem generis.

Sint finitæ duæ magnitudines ejusdem dimensionis CD, EF, ex quarum utraque nihilum oriatur, quod subductione fieri dicitur. Conferatur autem nihilum ex



CD ortum cum nihilo orto ex EF. Dico comparationem ejusdem generis esse.



Quoniam enim nihilum ex CD ortum æquale est facto, cujus alterum latus ipsa est CD, alterum I—I: & nihilum ortum ex EF æquale facto, cujus alterum latus ipsa est EF, alterum I—I; conferetur utique nihilum cum nihilo, ut factum cum facto. Confertur autem factum cum facto, quando latera cum lateribus conferuntur. Igitur nihilum ex CD ortum cum nihilo confertur orto ex EF, ut CD cum EF, & I—I cum I—I. At vero nihilum cum semetipso eodem modo confertur, quo unitas cum unitate. Confertur igitur nihilum ex CD ortum cum nihilo orto ex EF, ut CD cum EF, & unitas cum unitate; hoc est ut CD cum EF: unum scilicet eorum, quæ sunt, cum uno aliquo eorum, quæ item sunt, ejusdem dimensionis. Hoc autem si quando contingat, comparatio ejusdem generis est. Igitur si nihilum ex CD ortum cum nihilo conferatur orto ex EF, comparatio ejusdem est generis.

COROLLARIUM.

Et quoniam quæ ita inter se invicem conferuntur, ut unum aliquod eorum, quæ sunt, cum uno aliquo eorum, quæ item sunt, ejusdem dimensionis, ea dicuntur rationem invicem habere; ideo nihilum ex CD ortum ad nihilum ortum ex EF rationem habebit.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Si finita magnitudo cum nihilo conferatur orto ex finita alia magnitudine ejuſdem dimenſionis, quod quidem dicatur ſubductione fieri, comparatio eſt diverſi generis.

Vide figur. ſuperioris Propoſitionis.

Sint finitæ duæ magnitudines ejuſdem dimenſionis CD, EF, ex quarum altera EF nihilum oriatur, quod ſubductione fieri dicitur. Conferatur autem CD cum nihilo ex EF orto. Dico comparationem diverſi generis eſſe.

Quoniam enim CD unum aliquod eſt eorum, quæ ſunt; & nihilum ex EF ortum unum aliquod eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis; ſi CD cum nihilo ex EF orto conferatur, duo quædam ita inter ſe invicem conferentur, ut unum aliquod eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis. Hoc autem ſi quando contingat, comparatio diverſi generis eſt. Igitur ſi CD cum nihilo conferatur orto ex EF, comparatio diverſi eſt generis.

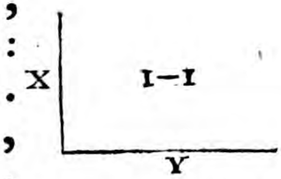
COROLLARIUM.

Et quoniam quæ ita inter ſe invicem conferuntur, ut unum aliquod eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis, ea dicuntur rationem invicem non habere ; ideo CD ad nihilum ortum ex EF rationem non habebit.

PROPOSITIO VIII.

Nihilum ex qualibet magnitudine ortum duarum dimenſionum, quod ſubductione fieri dicitur, atque unica multiplicatione, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt eadem illa magnitudo, alterum nihilum ordine primum in ſemetipſum ductum.

Sit magnitudo quælibet XY, cujus ſint dimenſiones X, & Y: nihilum ordine primum 1—1. Dico nihilum ex XY ortum, quod ſubductione fieri dicitur,



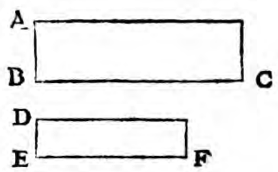
atque unica multiplicatione, æquale eſſe facto, cujus alterum latus ipſa eſt XY, alterum 1—1 in ſemetipſum ductum.

Quoniam enim nihilum ex XY ſubductione fit, atque unica multiplicatione, ſi X & Y a ſemetipſis auferantur, &, quæ duo oriuntur, nihila in ſe invicem ducantur : nihilum autem ex X ortum, quod ſubductione fieri dicitur, æquale eſt facto, cujus alterum latus ipſa eſt X, alterum 1—1; & nihilum ortum ex Y, quod ſubductione item fieri dicitur, æquale facto, cujus alterum latus eſt Y, alterum 1—1; ideo nihilum, quod ex XY ſubductione fit, atque unica multiplicatione, æquale erit facto, cujus ſunt latera tum X, tum 1—1, tum Y, tum 1—1. Eſt autem etiam factum, cujus alterum latus ipſa eſt XY, alte-

alterum I—I in ſemetipſum ductum, facto, quod diximus, æquale. Igitur nihilum, quod ex XY ſubductione fit, atque unica multiplicatione, æquale eſt facto, cujus alterum latus ipſa eſt XY, alterum I—I in ſemetipſum ductum.

PROPOSITIO IX.

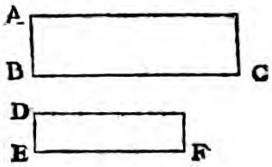
Si nihilum ortum ex finita magnitudine duarum dimenſionum, quod ſubductione fieri dicitur, cum nihilo conferatur orto ex finita alia magnitudine duarum item dimenſionum, quod fieri dicitur ſubductione, atque unica multiplicatione, comparatio eſt diverſi generis.



Sint finitæ duæ magnitudines AC, DF duarum dimenſionum. Et magnitudinis quidem AC dimenſiones ſint AB, BC, magnitudinis vero DF, DE & EF. Oriatur autem ex AC nihilum, quod ſubductione fieri dicitur: & ex DF nihilum, quod dicitur fieri ſubductione, atque unica multiplicatione; atque alterum cum altero conferatur. Dico comparationem diverſi generis eſſe.

Quoniam enim nihilum ex AC ortum æquale eſt facto, cujus alterum latus ipſa eſt AC, alterum I—I: & nihilum ortum ex DF æquale facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum I—I in ſemetipſum ductum; conferetur utique nihilum cum nihilo, ut factum cum facto. Confertur autem factum cum facto, ut AC cum DF, &

I—I



1—1 cum 1—1 in ſemetipſum ducto : atque 1—1 cum 1—1 in ſemetipſum ducto ita confertur, ut 1 cum 1—1, & 1—1 cum 1—1, nempe unitas cum unitate. Confertur igitur nihilum cum nihilo, ut AC cum DF, & 1 cum 1—1, & unitas cum unitate; nempe ut factum, cujus alterum latus eſt AC, alterum 1, cum facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum 1—1. Horum autem factorum alterum æquale eſt ipſi AC, alterum nihilo orto ex DF, quod ſubductione fieri dicitur. Igitur nihilum ex AC ortum cum nihilo orto ex DF, quorum alterum ſubductione fieri dicitur, alterum ſubductione, atque unica multiplicatione, ita confertur, ut AC cum nihilo orto ex DF, quod dicitur ſubductione fieri; unum ſcilicet eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis. Hoc autem ſi quando contingat, comparatio diverſi generis eſt. Si igitur nihilum ex AC ortum &c.

PROPOSITIO X.

Nihilum ex qualibet magnitudine ortum trium dimenſionum, quod ſubductione fieri dicitur, & duplici multiplicatione, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt eadem illa magnitudo, alterum nihilum ordine primum in ſemetipſum ſemel atque iterum ductum.

Demonſtratio eadem fere eſt quæ Propoſitionis VIII.

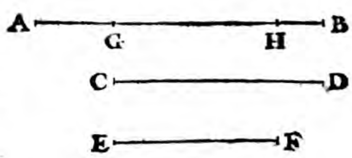
PROPOSITIO XI.

Si nihilum ortum ex finita magnitudine trium dimensionum, quod subductione, atque unica multiplicatione fieri dicitur, cum nihilo conferatur orto ex finita alia magnitudine trium item dimensionum, quod fieri dicitur subductione, & duplici multiplicatione, comparatio est diversi generis.

Demonstratio eadem fere erit quæ Propositionis IX, adhibita superiore Propositione.

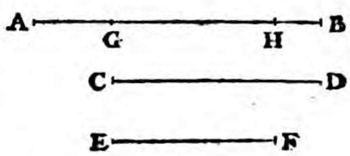
PROPOSITIO XII.

Si tres fuerint magnitudines deinceps non majores: & a prima auferatur secunda, deinde eidem addatur tertia; quæ oritur, magnitudo æqualis est differentiæ, quæ intercedit inter primam, & excessum, quo secunda excedit tertiam.



Sint tres magnitudines deinceps non majores AB, CD, EF; hoc est ejusmodi, ut CD non major sit quam AB, & EF non major quam CD. Auferatur autem ab AB, CD, deinde eidem addatur EF. Dico excessum, quo AB excedit CD, additum ipsi EF æqualem esse differentiæ, quæ intercedit inter AB, & excessum, quo CD excedit EF.

Au-



Auferatur enim ab AB GB ipsi CD æqualis; & a GB, GH æqualis ipsi EF. Hoc enim fieri potest. Igitur AG, una cum GH, æqualis est differentiæ, quæ intercedit inter AB & BH. Est autem AG æqualis excessui, quo AB excedit BG; & BH æqualis excessui, quo BG excedit GH. Igitur excessus, quo AB excedit BG, ipsi GH additus, æqualis est differentiæ, quæ intercedit inter AB, & excessum, quo BG excedit GH. At vero BG æqualis est ipsi CD, & GH æqualis ipsi EF. Igitur excessus, quo AB excedit CD, additus ipsi EF, æqualis est differentiæ, quæ intercedit inter AB, & excessum, quo CD excedit EF. Si igitur tres fuerint magnitudines &c.

COROLLARIUM.

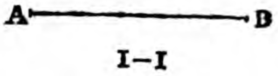
Hinc manifestum est, si tres magnitudines AB, CD, EF æquales invicem fuerint, magnitudinem, quæ eo, quo diximus, modo oritur, ipsi AB æqualem fore.

PROPOSITIO XIII.

Si finita quælibet magnitudo dividatur per nihilum ordine primum, magnitudo oritur infinita.

Sit finita quælibet magnitudo AB: nihilum ordine primum I—I. Dividatur autem AB per I—I. Dico infinitam magnitudinem oriri.

Divi-



Dividatur AB per I. Et quoniam unitas, si unumquodvis dividat, id ipsum facit, erit utique AB, per I divisa, eadem AB. Ducatur AB in I—I: atque erit id factum æquale AB—AB, hoc est excessui, quo AB semetipsam excedit. Tres igitur sunt magnitudines deinceps non majores AB, AB, & AB: & propterea AB—AB, una cum AB, æqualis est differentiæ, quæ intercedit inter AB, & AB—AB. Sunt autem tres hæ magnitudines deinceps æquales. Igitur AB—AB, una cum AB, æqualis est ipsi AB. Orta est igitur AB, & alia adhuc reliqua est magnitudo ipsi AB æqualis. Dividatur rursus AB per I. Eodem modo demonstrabitur oriri AB, & reliquam adhuc esse aliam magnitudinem æqualem ipsi AB. Quoniam igitur quoties AB dividitur per I—I, toties oritur AB, & reliqua adhuc est alia magnitudo ipsi AB æqualis, patet magnitudinem hujusmodi ex AB componi, quæ nullos fines habet. Quod autem nullos habet fines, id infinitum esse dicitur. Igitur si magnitudo AB dividatur per I—I, infinita magnitudo oritur. Si igitur finita quælibet magnitudo &c.

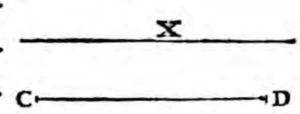
COROLLARIUM.

Hinc patet, si unitas dividatur per nihilum ordine primum, infinitum numerum oriri.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Nihilum ex infinita magnitudine ortum, quod ſubductione fieri dicitur, finitæ magnitudini æquale eſt, ex qua ipſa oritur infinita magnitudo.

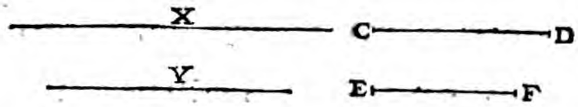


Sit infinita quælibet magnitudo x, ex qua nihilum oriatur, quod ſubductione fieri dicitur. Intelligatur autem magnitudo x orta eſſe ex finita magnitudine CD. Dico nihilum ex x ortum ipſi CD æquale eſſe.

Quoniam enim infinita magnitudo oritur, ſi finita magnitudo dividatur per nihilum ordine primum, erit utique CD per 1—1 diviſa ipſi x æqualis. Et quoniam nihilum ex x oritur, quod quidem ſubductione fieri dicitur, ſi x a ſemetipſa auferatur, erit id nihilum æquale exceſſui, quo CD ſemetipſam excedit, diviſo per 1—1. Æquale eſt autem factum, cujus alterum latus eſt CD, alterum 1—1, exceſſui, quo CD ſemetipſam excedit; quando 1 in CD ducta ipſam CD facit. Igitur nihilum, quod diximus, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt CD, alterum 1—1, diviſo per 1—1. Hoc autem æquale eſt ipſi CD; quoniam nihilum, ſi ſemetipſum dividat, unitatem facit. Igitur nihilum ex x ortum ipſi CD eſt æquale.

PROPOSITIO XV.

Si infinita magnitudo ex finita magnignitudine orta cum infinita magnitudine conferatur orta ex finita alia magnitudine ejusdem dimensionis, comparatio est ejusdem generis.



Sint infinitæ duæ magnitudines X, & Y ortæ ex finitis duabus magnitudinibus ejusdem dimensionis. Conferatur autem X cum Y. Dico comparationem ejusdem generis esse.

Sint enim finitæ duæ magnitudines CD, EF, ex quibus ortæ esse intelligantur infinitæ duæ X, Y. Et quoniam nihilum ex infinita magnitudine ortum, quod subductione fieri dicitur, æquale est finitæ magnitudini, unde ipsa oritur magnitudo infinita, erit excessus, quo X semetipsam excedit, hoc est factum, cujus alterum latus ipsa est X, alterum 1—1, æquale ipsi CD. Eadem ratione factum, cujus alterum latus ipsa est Y, alterum 1—1, æquale erit ipsi EF. Itaque confertur factum cum facto, ut CD cum EF. Confertur autem factum cum facto, ut X cum Y, & 1—1 cum 1—1; hoc est unitas cum unitate. Confertur igitur X cum Y, & unitas cum unitate, nempe X cum Y, ut CD cum EF; unum scilicet eorum, quæ sunt, cum uno aliquo eorum, quæ item sunt, ejusdem dimensionis. Hoc autem si quando contingat, comparatio ejusdem generis est. Si igitur X cum Y conferatur, comparatio ejusdem est generis.

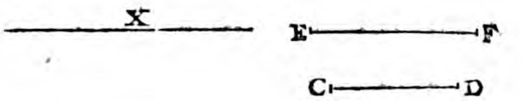
COROLLARIUM.

Et quoniam quæ ita inter ſe invicem conferuntur, ut unum aliquod eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ item ſunt, ejuſdem dimenſionis, ea dicuntur rationem invicem habere; ideo infinita magnitudo ex CD orta ad infinitam magnitudinem ortam ex EF rationem habebit.

PROPOSITIO XVI.

Si infinita magnitudo ex finita magnitudine orta cum finita magnitudine conferatur ejuſdem dimenſionis, comparatio eſt diverſi generis.

Sint duæ magnitudines X, EF; altera quidem infinita, altera vero finita. Conferatur autem X cum EF. Dico comparationem diverſi generis eſſe.



Sit enim finita magnitudo CD ejuſdem dimenſionis atque EF, ex qua intelligatur infinita X orta eſſe. Erit igitur factum, cujus alterum latus ipſa eſt X, alterum I—I, æquale ipſi CD. Ponatur aliud factum, cujus alterum latus ſit EF, alterum I—I. Hoc autem æquale erit nihilo orto ex EF. Conferetur igitur factum cum facto, ut CD cum nihilo ex EF orto. Confertur autem factum cum facto, ut X cum EF, & I—I cum

I—I,

1—1, nempe unitas cum unitate. Confertur igitur x cum EF, & unitas cum unitate, nempe x cum EF, ut CD cum nihilo ex EF orto; unum ſcilicet eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis. Hoc autem ſi quando contingat, comparatio diverſi generis eſt. Si igitur x cum EF conferatur, comparatio diverſi eſt generis.

COROLLARIUM.

Et quoniam quæ ita inter ſe invicem conferuntur, ut unum aliquod eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis, ea dicuntur rationem invicem non habere; ideo infinita magnitudo ex CD orta ad finitam magnitudinem EF rationem non habebit.

PROPOSITIO XVII.

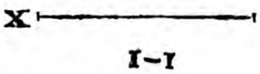
Si nihilum ex qualibet magnitudine ortum, quod ſubductione fieri dicitur, a ſemetipſo auferatur, factum oritur, cujus alterum latus eſt eadem illa magnitudo, alterum nihilum ordine primum in ſemetipſum ductum.

Sit magnitudo aliqua x, ex qua nihilum oriatur, quod ſubductione fieri dicitur: nihilum ordine primum 1—1. Auferatur autem illud nihilum a ſemetipſo. Di-

x

1–1

co factum oriri, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1 in semetipsum ductum.

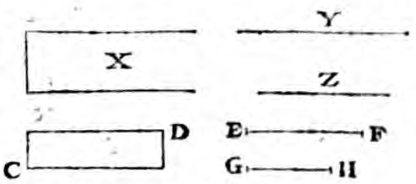


Quoniam enim nihilum ex qualibet magnitudine oritur, quod quidem subductione fieri dicitur, si ea magnitudo a semetipsa auferatur; erit utique nihilum ex x ortum æquale excessui, quo x semetipsam excedit. Auferatur hic excessus a semetipso: factumque orietur, cujus alterum latus est excessus, quo x semetipsam excedit, alterum 1—1. Est autem excessus, quo x semetipsam excedit, facto æqualis, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1. Igitur ablato, quod diximus, facto a semetipso, factum oritur, cujus alterum latus est x in 1—1 ducta, alterum 1—1. Hoc autem æquale est facto, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1 in semetipsum ductum. Si igitur nihilum ex x ortum, quod quidem subductione fieri dicitur, a semetipso auferatur, factum oritur, cujus alterum latus ipsa est x, alterum 1—1 in semetipsum ductum.

PROPOSITIO XVIII.

Si infinita magnitudo orta ex finita magnitudine duarum dimensionum cum infinitis duabus magnitudinibus conferatur invicem ductis, quarum utraque orta sit ex finita magnitudine unius dimensionis, comparatio est diversi generis.

Sint



Sint infinitæ tres magnitudines X, Y, Z, & finitæ item tres CD, EF, GH. Et magnitudo quidem X orta sit ex CD duarum dimensionum, duæ vero reliquæ Y, & Z ex EF, & GH, utraque unius dimensionis: eæque in se invicem ducantur. Conferatur autem X cum Y in Z ducta. Dico comparationem diversi generis esse.

Quoniam enim magnitudo X orta esse intelligitur ex magnitudine CD, erit factum, cujus alterum latus est X, alterum I—I, ipsi CD æquale. Eadem ratione factum, cujus alterum latus est Y, alterum I—I, æquale erit ipsi EF; & factum, cujus alterum latus est Z, alterum I—I, æquale ipsi GH. Horum factorum primum a semetipso auferatur, duo reliqua in se invicem ducantur: & quæ duo inde oriuntur, invicem conferantur. Conferentur igitur ut nihilum ex CD ortum cum EF in GH ducta. At vero horum primum æquale est facto, cujus alterum latus est X, alterum I—I in semetipsum ductum: & secundum facto æquale, cujus alterum latus est Y in Z ducta, alterum I—I ductum item in semetipsum. Itaque factum cum facto confertur, ut nihilum ex CD ortum cum EF in GH ducta. Confertur autem factum cum facto, ut X cum Y in Z ducta, & I—I in semetipsum ductum cum eodem I—I ducto item in semetipsum, nempe ut unitas cum unitate. Confertur igitur X cum Y in Z ducta, & unitas cum unitate, hoc est X cum Y in Z ducta, ut nihilum ex CD ortum cum EF in GH ducta; unum scilicet eorum, quæ non sunt, cum uno aliquo eorum, quæ sunt, ejusdem dimensionis. Hoc autem si quando contingat, comparatio diversi generis est. Si igitur x conferatur cum y in z ducta, comparatio diversi est generis.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est infinitas, quas diximus, magnitudines, x, & y in z ductam, rationem invicem non habere.

PROPOSITIO XIX.

Si nihilum ex qualibet magnitudine ortum, quod subductione fieri dicitur, ducatur in nihilum ortum ex qualibet alia magnitudine ejusdem dimensionis, quod subductione item dicitur fieri, a semetipso ablatum; factum oritur, cujus alterum latus duæ sunt illæ magnitudines in se invicem ductæ, alterum nihilum ordine primum ductum in semetipsum semel atque iterum.

Demonstratio eadem fere est quæ Propositionis XVII.

PROPOSITIO XX.

Si infinitæ duæ magnitudines in se invicem ducantur ex finitis duabus magnitudinibus ortæ, altera quidem duarum dimensionum, altera vero unius, conferanferanturque cum infinitis tribus magnitudinibus in ſe invicem ductis, ortiſque ex finitis tribus magnitudinibus unius dimenſionis, comparatio eſt diverſi generis.

Demonſtratio eadem fere erit quæ Propoſitionis XVIII, adhibita ſuperiore Propoſitione.

FINIS
LIBRI PRIMI.

DE NIHILO GEOMETRICO

LIBER II.

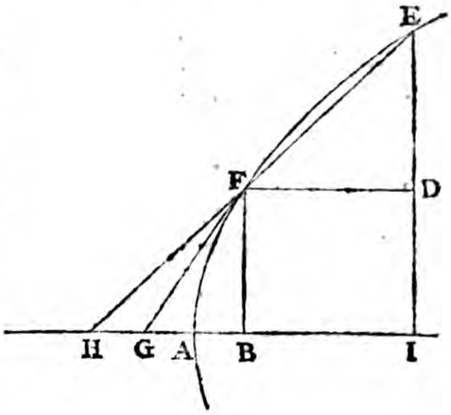
DEFINITIO.

Recta linea curvam contingere dicitur, quæ illam quum antea duobus in punctis secaret, non secare amplius concipitur.

PROPOSITIO I.

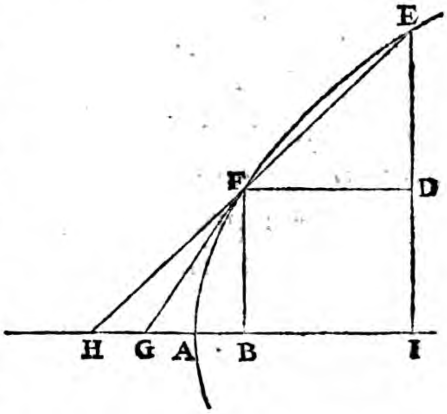
Si a puncto aliquo, quod in curva sit, recta ducatur curvam contingens, quæ cum axe, si oportuerit, producto concurrat; ducaturque item ab eodem puncto recta ad axem normalis; hæc normalis ad rectam, quæ inter normalem ipsam, & contingentem interjicitur, eam rationem habere deprehenditur, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quam diximus. Utrumque autem nihilum est, quod subductione fieri dicitur.

Sit



Sit curva AFE, cujus axis AB, punctumqne in ipsa F, a quo ducatur FG curvam contingens, eaque cum AB producto concurrat in puncto G. Ducatur autem a puncto F recta FB ad AB normalis. Dico FB ad BG eam rationem habere deprehendi, quam nihilum ex FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.

Sumatur enim in curva AFE punctum quodvis E, junctisque punctis E & F, recta EF, ea producatur ad partes G, quousque cum AB concurrat in puncto H. Ducantur autem a punctis E, & F rectæ EI, FD, altera quidem parallela ipsi FB, altera vero axi AB. Quoniam igitur triangula EFD, FHB similia sunt triangulo EHI, ea quoque sunt sibi invicem similia: & propterea ut FB ad BH, ita se habet ED ad DF; hoc est excessus, quo EI ipsam FB excedit, ad excessum, quo IH excedit ipsam BH. Hoc autem semper continget, ubicumque tandem in curva sumatur punctum E. Quod si intelligatur id punctum magis magisque accedere ad punctum F, quousque super ipsum cadat, cadent utique tum EI super FB, tum IH super BG, tum FH super FG. Recta enim linea curvam contingere dicitur, quæ illam quum antea duobus in punctis secaret, non secare amplius concipitur. At vero excessus, quo EI ipsam FB excedit, æqualis tunc fit excessui, quo FB excedit ſemetipſam; itemque exceſſus, quo IH ipſam BH excedit, exceſſui æqualis, quo BG excedit ſemetipſam. Igitur ut FB ad BG, ita ſe habet exceſſus, quo FB ſemetipſam excedit, ad exceſſum,

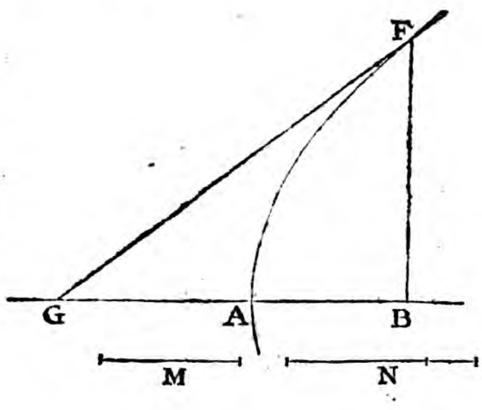


quo BG excedit ſemetipſam; hoc eſt nihilum ex FB ortum ad nihilum ortum ex BG. Eſt enim comparatio ejuſdem generis, quum utrumque nihilum ſubductione dicatur fieri. Si igitur a puncto aliquo &c.

PROPOSITIO II.

Rectam lineam ducere, quæ curvam in dato puncto contingat.

Sit curva AF, cujus axis AB, datumque in ea punctum F. Oporteat autem a puncto F rectam lineam ducere, quæ curvam AF in dato puncto F contingat.



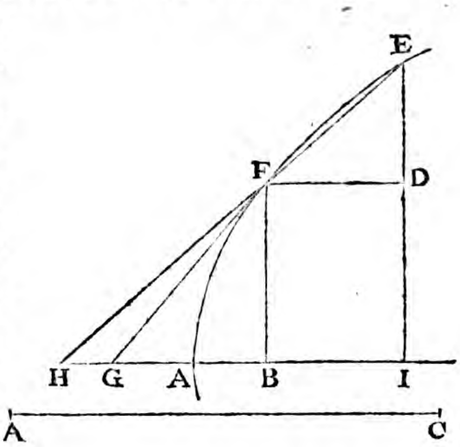
Intelligatur ducta eſſe, eaque ſit FG, quæ axi AB occurrat in puncto G; ducaturque a puncto F FB ad AB normalis. Inveniatur autem ratio, quam nihilum ex

FB or-

FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque ſubductione fieri dicatur: eaque ratio eadem ſit quæ rectæ M ad N. Et quoniam M ad N ſe habet ut nihilum ex FB ortum ad nihilum ortum ex BG: ut autem primum nihilum ad alterum nihilum, ita ſe habet FB ad BG, ſe habebit utique ut M ad N, ita FB ad BG. Quocirca datis tribus M, N, FB, data erit & quarta BG. Quod ſi ab extremo ejus puncto G recta ducatur ad punctum F, ea curvam continget.

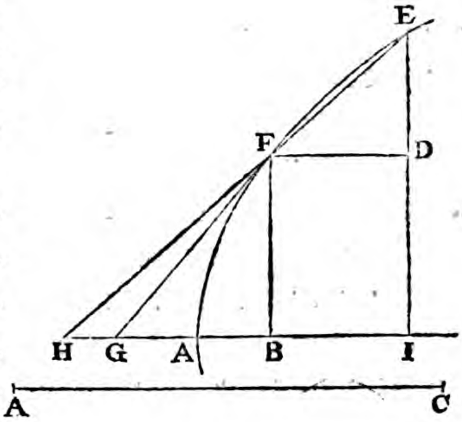
PROPOSITIO III.

Dato puncto in parabola, & normali, quæ ab ipſo ad axem ducitur, rationem invenire, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quæ inter normalem ipſam, rectamque parabolen in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum eſt, quod ſubductione fieri dicitur.



Sit parabola AF, cujus axis AB, latus rectum AC; punctumque in parabola F, a quo ducatur FB ad AB normalis. Intelligatur autem ducta eſſe FG parabolen in F contingens, quæ ipſi AB productæ in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex FB ortum

tum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur ſubductione fieri.



Sumatur in parabola FA punctum quodvis E; junctiſque punctis E & F, recta EF, ea producatur ad partes G, deſcribaturque eadem figura quæ in Propoſitione I. Quoniam igitur ſpatium, quod ſub AC & AI continetur, æquale eſt quadrato, quod ab IE deſcribitur: & AI quidem æqualis eſt rectæ compoſitæ ex AB & BI; IE vero æqualis rectæ compoſitæ ex ID, ſive FB, & DE; erit utique ſpatium, quod continetur ſub AC, & recta compoſita ex AB & BI, æquale quadrato, quod deſcribitur a recta compoſita ex FB & DE. Æquale eſt autem ſpatium, quod diximus, cum ſpatio, quod ſub AC & AB continetur, tum ſpatio, quod continetur ſub AC & BI: &, quod diximus, quadratum æquale tum quadrato, quod a BF deſcribitur, tum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Igitur ſpatium, quod ſub AC & AB continetur, & ſpatium, quod continetur ſub AC & BI, æqualia ſunt tum quadrato, quod a BF deſcribitur, tum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Æquale eſt autem ſpatium, quod ſub AC & AB continetur, quadrato, quod a BF deſcribitur. Igitur æqualibus utrinque ablatis, ſpatium, quod continetur

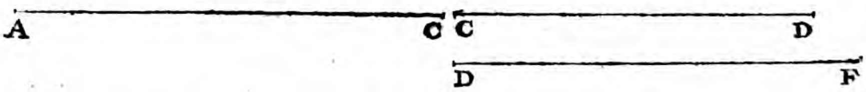
ſub

ſub AC & BI, æquale eſt cum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Æqualis eſt autem BI exceſſui, quo IH ipſam BH excedit; & DE exceſſui æqualis, quo IE excedit ipſam ID, ſive FB. Igitur ſpatium, quod continetur ſub AC & exceſſu, quo IH ipſam BH excedit, æquale eſt cum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & exceſſu, quo IE ipſam FB excedit, tum quadrato, quod deſcribitur ab exceſſu, quo IE excedit ipſam FB. Jam vero ſi intelligatur punctum E ſuper F cadere, ita ut convenientibus invicem rectis IE cum FB, IH cum BG, FH cum FG, recta EFH parabolen contingat; quippe quum illam antea duobus in punctis ſecaret, non ſecare amplius concipitur; exceſſus, quo IH ipſam BH excedit, æqualis tunc fit exceſſui, quo BG excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo ex BG orto; & exceſſus, quo IE ipſam FB excedit, æqualis exceſſui, quo BF excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo orto ex BF. Igitur factum, cujus alterum latus eſt AC, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt cum facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF, tum nihilo orto ex BF in ſemetipſum ducto. At vero comparatio facti, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ex BF ortum, cum nihilo orto ex BF in ſemetipſum ducto diverſi generis eſt: conferuntur enim ſecum invicem, ut unum aliquod eorum, quæ ſunt, cum uno aliquo eorum, quæ non ſunt, ejuſdem dimenſionis. Itaque, neglecto ab altera parte nihilo orto ex BF in ſemetipſum ducto, factum, cujus alterum latus eſt AC, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto,

cujus

cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur AC ad duplam ipſius BF ita ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Datæ autem ſunt cum AC, tum dupla ipſius BF. Data eſt igitur ratio, quam nihilum ex BF ortum habet ad nihilum ortum ex BG.

Problema autem hoc pacto demonſtrabitur.



Propoſitæ ſint duæ rectæ AC, CD, quarum altera CD ſit duplæ ipſius BF æqualis. Dico, ut AC ad CD, ita ſe habere nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

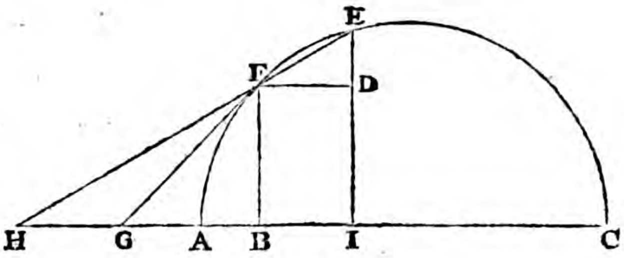
Si enim minus, ſe habebit utique AC ad rectam aliquam majorem, aut minorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Itaque ſe habeat primo AC ad rectam DF majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Quoniam igitur AC ad DF ſe habet ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG; erit utique factum, cujus alterum latus eſt AC, alterum nihilum ortum ex BG, æquale facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Et quoniam ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, factum, cujus alterum latus eſt AC, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ex BF ortum; erit utique, ſuffecto æquali, factum, cujus alterum latus

tus

tus est DF, alterum nihilum ex BF ortum, æquale facto, cujus alterum latus est dupla ipsius BF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur ut DF ad duplam ipsius BF, ita se habet nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum. Se habet autem nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum, ut BF ad BF. Se habet igitur DF ad duplam ipsius BF, ut BF ad BF; ideoque DF duplæ ipsius BF est æqualis. Quod fieri non potest. Dupla siquidem ipsius BF rectæ CD æqualis est, DF vero eadem est major. Non igitur se habet AC ad rectam majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Eodem modo demonstrabitur, neque ad rectam minorem quam CD se habere AC, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Igitur AC ad CD se habet ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

PROPOSITIO IV.

Dato puncto in circulo, & normali, quæ ab ipso ad diametrum ducitur, rationem invenire, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quæ inter normalem ipsam, rectamque circulum in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum est, quod subductione fieri dicitur.

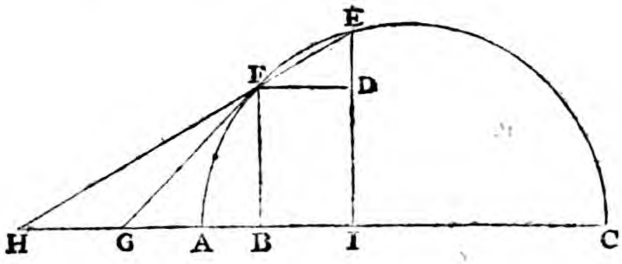


Sit circulus AFC, cujus diameter AC, punctumque in circulo F, a quo ducatur FB ad AC normalis. Intelligatur autem ducta esse FG circulum in F contingens, quæ ipsi AC productæ in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.

Sumatur in circulo AFC punctum quodvis E; junctisque punctis E & F, recta EF, ea producatur ad partes G; describaturque eadem figura quæ in Propositione I. Quoniam igitur spatium, quod sub AI & CI continetur, æquale est quadrato, quod ab IE describitur: & AI quidem æqualis est rectæ compositæ ex AB & BI; IC vero æqualis excessui, quo BC excedit ipsam BI; denique IE æqualis rectæ compositæ ex ID, sive FB, & DE; erit utique spatium, quod continetur sub recta composita ex AB & BI, & excessu, quo BC excedit ipsam BI, æquale quadrato, quod describitur a recta composita ex FB & DE. Æquale est autem spatium, quod diximus, cum spatio, quod sub AB & BC continetur, tum excessui, quo spatium, quod continetur sub excessu, quo BC excedit ipsam AB, & sub BI, excedit quadratum, quod describitur a BI: &, quod diximus, quadratum æquale tum quadrato, quod a BF describitur, tum

tum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Igitur ſpatium, quod ſub AB & BC continetur, & exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & ſub BI, excedit quadratum, quod deſcribitur a BI, æqualia ſunt tum quadrato, quod a BF deſcribitur, tum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Æquale eſt autem ſpatium, quod ſub AB & BC continetur, quadrato, quod a BF deſcribitur. Igitur, æqualibus utrinque ablatis, exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & ſub BI, excedit quadratum, quod deſcribitur a BI, æquale eſt cum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, tum quadrato, quod deſcribitur a DE. Æqualis eſt autem BI exceſſui, quo IH ipſam BH excedit; & DE exceſſui æqualis, quo IE excedit ipſam ID, ſive FB. Igitur exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & exceſſu, quo IH excedit ipſam BH; exceſſus, inquam, quo hujuſmodi ſpatium excedit quadratum, quod ab exceſſu deſcribitur, quo IH excedit ipſam BH, æqualis eſt cum ſpatio, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & exceſſu, quo IE ipſam FB excedit, tum quadrato, quod deſcribitur ab exceſſu, quo IE excedit ipſam FB. Jam vero ſi intelligatur punctum E ſuper F cadere, & cœtera, prorſus ut in parabola, exceſſus, quo IH ipſam BH excedit, æqualis tunc fit exceſſui, quo BG excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo ex BG orto: & exceſſus, quo IE ipſam FB excedit, æqualis exceſſui, quo BF excedit ſemetipſam, hoc

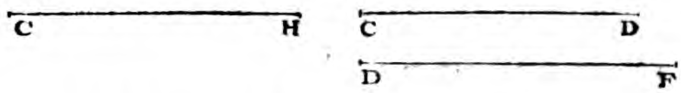
eſt



eſt nihilo orto ex BF. Igitur exceſſus, quo factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, excedit nihilum ortum ex BG in ſemetipſum ductum, æqualis eſt cum facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF, tum nihilo orto ex BF ducto in ſemetipſum. At vero comparatio diverſi generis eſt tam facti, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, cum nihilo orto ex BG in ſemetipſum ducto, quam facti, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ex BF ortum, cum nihilo orto ex BF ducto in ſemetipſum. Itaque neglecto ab altera quidem parte nihilo ex BG orto in ſemetipſum ducto, ex altera vero nihilo orto ex BF ducto in ſemetipſum; factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur exceſſus, quo BC ipſam AB excedit, ad duplam ipſius BF ita ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Datus eſt autem cum exceſſus, quem diximus, tum BF. Data eſt igitur ratio, quam nihilum ex BF ortum habet ad nihilum ortum ex BG.

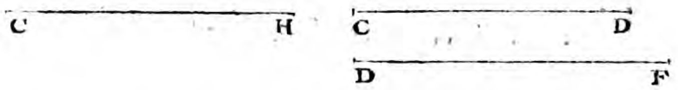
Pro-

Problema autem hoc pacto demonſtrabitur.



Propoſitæ ſint duæ rectæ CH, CD, quarum altera æqualis ſit exceſſui, quo BC excedit ipſam AB, altera duplæ ipſius BF. Dico, ut CH ad CD, ita ſe habere nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

Si enim minus, ſe habebit utique CH ad rectam aliquam majorem, aut minorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Itaque ſe habeat primo CH ad rectam DF majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Quoniam igitur CH ad DF ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG; erit utique factum, cujus alterum latus eſt CH, alterum nihilum ortum ex BG, æquale facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Et quoniam ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, hoc eſt CH, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ex BF ortum; erit utique, ſuffecto æquali, factum, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ex BF ortum, æquale facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur ut DF ad duplam ipſius BF, ita ſe habet nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum. Se habet au-



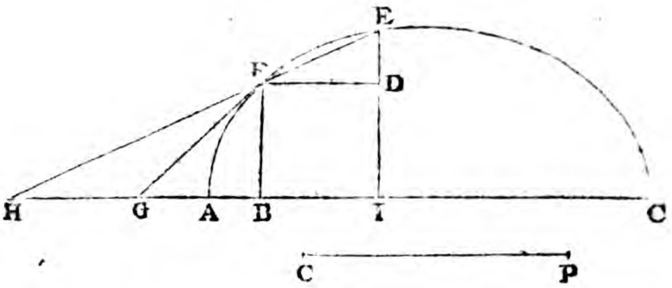
tem nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum, ut BF ad BF. Se habet igitur DF ad duplam ipſius BF, ut BF ad BF; ideoque DF duplæ ipſius BF eſt æqualis. Quod fieri non poteſt. Dupla ſiquidem ipſius BF rectæ CD æqualis eſt; DF vero eadem eſt major. Non igitur ſe habet CH ad rectam majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Eodem modo demonſtrabitur neque ad rectam minorem quam CD ſe habere CH, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Igitur CH ad CD ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

PROPOSITIO V.

Dato puncto in ellipſi, & normali, quæ ab ipſo ad ellipſis axem ducitur, rationem invenire, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quæ inter normalem ipſam, rectamque ellipſin in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum eſt, quod ſubductione fieri dicitur.

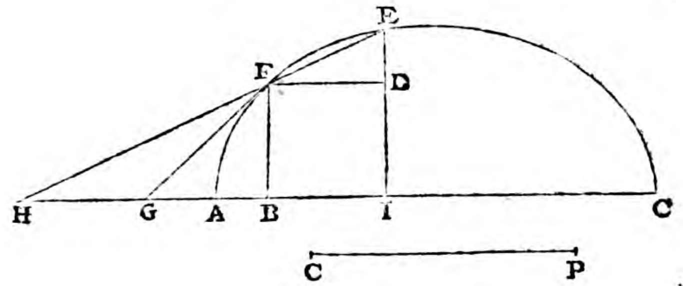
Sit ellipſis AFC, cujus axis AC, latus rectum CP, punctumque in ellipſi F, a quo ducatur FB ad AC normalis. Intelligatur autem ducta eſſe FG ellipſin in F contingens, quæ ipſi AC produ-

ctæ



ctæ in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.

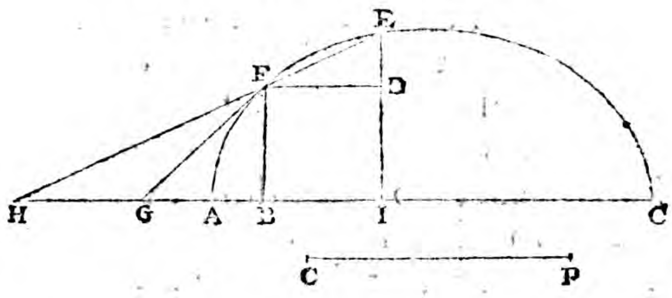
Sumatur in ellipsi AFC punctum quodvis E; junctisque punctis E & F, recta EF, ea producatur ad partes G; describaturque eadem figura quæ in Propositione I. Quoniam igitur spatium, quod sub AI & IC continetur, se habet ad quadratum, quod ab IE describitur, ut AC ad CP: & AI quidem æqualis est rectæ compositæ ex AB & BI; IC vero æqualis excessui, quo BC excedit ipsam BI; denique IE æqualis rectæ compositæ ex ID, sive FB, & DE; se habebit utique spatium, quod continetur sub recta composita ex AB & BI, & excessu, quo BC excedit ipsam BI, ad quadratum, quod describitur a recta composita ex FB & DE, ut AC ad CP. Æquale est autem spatium, quod diximus, cum spatio, quod sub AB & BC continetur, tum excessui, quo spatium, quod continetur sub excessu, quo BC excedit ipsam AB, & sub BI, excedit quadratum, quod describitur a BI: &, quod diximus, quadratum æquale tum quadrato, quod a BF describitur, tum spatio, quod continetur sub dupla ipsius BF & DE, tum quadrato, quod describitur a DE.



Igitur ſpatium, quod ſub AB & BC continetur, & exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & ſub BI, excedit quadratum, quod deſcribitur a BI, ſe habent ad quadratum, quod a BF deſcribitur, & ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, & quadratum quod deſcribitur a DE, ut AC ad CP. Se habet autem ſpatium, quod ſub AB & BC continetur, ad quadratum, quod a BF deſcribitur, ut AC ad CP. Se habet igitur & exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & ſub BI, excedit quadratum, quod deſcribitur a BI, ad ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, & quadratum, quod deſcribitur a DE, ut AC ad CP. Æqualis eſt autem BI exceſſui, quo IH ipſam BH excedit; & DE exceſſui æqualis, quo IE excedit ipſam ID, ſive FB. Igitur exceſſus, quo ſpatium, quod continetur ſub exceſſu, quo BC excedit ipſam AB, & exceſſu, quo IH excedit ipſam BH; exceſſus, inquam, quo hujuſmodi ſpatium excedit quadratum, quod ab exceſſu deſcribitur, quo IH excedit ipſam BH, ſe habet ad ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & exceſſu, quo IE ipſam FB excedit, & quadratum, quod deſcribitur ab exceſſu, quo IE excedit

ipſam

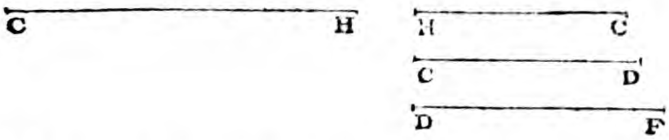
ipſam FB, ut AC ad CP. Jam vero ſi intelligatur punctum E ſuper F cadere, & cœtera, prorſus ut in parabola, exceſſus, quo IH ipſam BH excedit, æqualis tunc fit exceſſui, quo BG excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo ex BG orto; & exceſſus, quo IE ipſam FB excedit, æqualis exceſſui, quo FB excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo orto ex BF. Igitur exceſſus, quo factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, excedit nihilum ortum ex BG in ſemetipſum ductum, ſe habet ad factum, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF, & ad nihilum ortum ex BF in ſemetipſum ductum, ut AC ad CP. At vero comparatio diverſi generis eſt tam facti, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, cum nihilo orto ex BG in ſemetipſum ducto, quam facti, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ex BF ortum, cum nihilo orto ex BF ducto in ſemetipſum. Itaque neglecto ab altera quidem parte nihilo ex BG orto in ſemetipſum ducto, ab altera vero nihilo orto ex BF ducto in ſemetipſum; factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, alterum nihilum ex BG ortum, ſe habet ad factum, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, alterum nihilum ortum ex BF, ut AC ad CP. Ratio autem factorum, quæ diximus, alterius ad alterum, ex ratione componitur, quam habet exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, ad duplam ipſius BF, & nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF. Itaque diviſa ratione cum facti ad factum, tum ipſius AC



ad CP per rationem, quam habet excessus, quo BC excedit ipsam AB, ad duplam ipsius BF, se habebit nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF, ut AC ad CP, ratione hac per rationem divisa, quam habet excessus, quo BC excedit ipsam AB, ad duplam ipsius BF. Hæc autem ratio ex ratione componitur, quam habet AC ad CP, & dupla ipsius BF ad excessum, quo BC excedit ipsam AB. Igitur nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF se habet pro ratione, quæ componitur ex ratione, quam habet AC ad CP, & dupla ipsius BF ad excessum, quo BC excedit ipsam AB; nempe ut spatium, quod sub AC & dupla ipsius BF continetur, ad spatium, quod continetur sub CP, & excessu, quo BC excedit ipsam AB. Et invertendo. Datum est autem utrumque spatium, quod diximus; cum rectæ datæ sint AC, BC, AB, BF, & CP. Data est igitur ratio, quam nihilum ex BF ortum habet ad nihilum ortum ex BG.

Problema autem hoc pacto demonstrabitur.

Sit CH æqualis excessui, quo CB excedit ipsam AB. Propositæ autem sint duæ rectæ HL, CD, quarum altera æqualis sit quartæ proportionali rectis



rectis AC, CP, CH, altera duplæ ipſius BF. Dico, ut HL ad CD, ita ſe habere nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

Si enim minus, ſe habebit utique HL ad rectam aliquam majorem, aut minorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Itaque ſe habeat primo HL ad rectam DF, majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Quoniam igitur HL ad DF ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG; erit utique factum, cujus alterum latus eſt HL, alterum nihilum ortum ex BG, æquale facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Et quoniam ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, AC ad CP ſe habet ut factum, cujus alterum latus eſt exceſſus, quo BC excedit ipſam AB, hoc eſt CH, alterum nihilum ex BG ortum, ad factum, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, hoc eſt CD, alterum nihilum ex BF ortum: ſe habebit utique AC ad CP pro ratione, quæ ex ratione componitur, quam habet CH ad CD, & nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF. At vero ratio, quam CH habet ad CD, componitur ex ratione, quam habet CH ad HL, & HL ad CD: ratio autem, quam habet CH ad HL, eadem eſt atque ratio, quam habet AC ad CP; quoniam rectæ proportionales ſunt AC, CP, CH, HL. Igitur AC ad CP ſe habet pro ratione, quæ ex ratione componitur, quam habet & AC ad CP, & HL ad

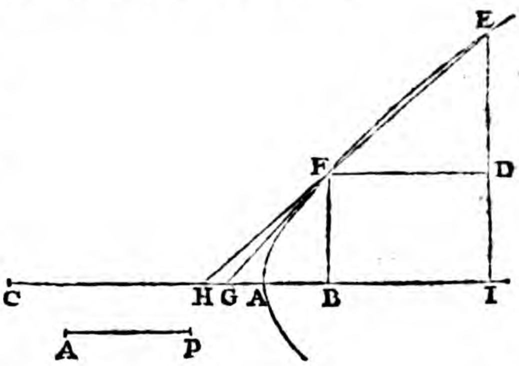
CD, & nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF. At vero ratio, quam habet HL ad CD, & nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF, eadem eſt atque ratio, quam DF habet ad CD, & nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum; quoniam factum, cujus alterum latus eſt HL, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſſe ponitur facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur AC ad CP ſe habet pro ratione, quæ ex ratione componitur, quam habet & AC ad CP, & DF ad CD, & nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum. Itaque diviſa utraque ratione, quam diximus, per rationem, quam habet AC ad CP, ſe habebit AC ad AC pro ratione, quæ ex ratione componitur, quam habet DF ad CD, & nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum; hoc eſt ut factum, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ex BF ortum, ad factum, cujus alterum latus eſt CD, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur factum facto æquale eſt: & propterea ut DF ad CD, ita ſe habet nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum. Se habet autem nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum, ut BF ad BF. Se habet igitur DF ad CD ut BF ad BF; ideoque DF ipſi CD æqualis eſt. Quod fieri non poteſt. Poſita enim eſt recta DF ipſa CD major eſſe. Non igitur ſe habet HL ad rectam majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Eodem modo demonſtrabitur neque ad

rectam

rectam minorem quam CD se habere HL, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Igitur HL ad CD se habet ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

PROPOSITIO VI.

Dato puncto in hyperbola, & normali, quæ ab ipso ad hyperbolæ axem ducitur, rationem invenire, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quæ inter normalem ipsam, rectamque hyperbolen in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum est, quod subductione fieri dicitur.

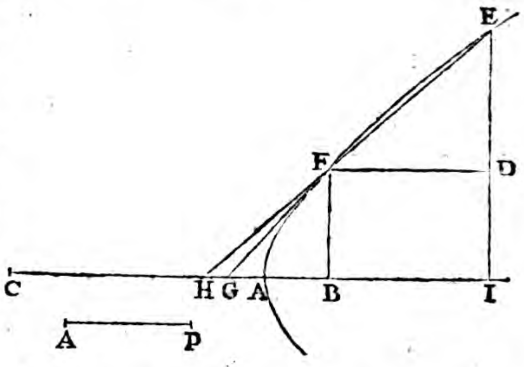


Sit hyperbola AF, cujus axis AB, latus transversum AC, rectum AP; punctūque in hyperbola F, a quo ducatur FB ad AB normalis. Intelligatur autem ducta esse FG hyperbolen in F contingens, quæ ipsi AB productæ in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.

Sumatur in hyperbola AF punctum quodvis E; junctisque punctis E & F recta EF, ea producatur ad partes G; describaturque eadem figura quæ

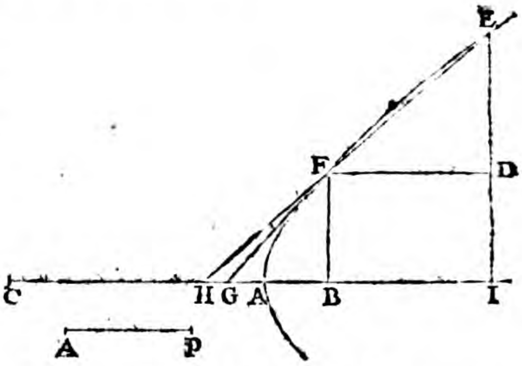
in

in Propositione I. Quoniam igitur spatium, quod sub AI & IC continetur, se habet ad quadratum, quod ab IE describitur, ut AC ad AP: & AI quidem æqualis est rectæ compositæ ex AB & BI; IC vero æqualis rectæ compositæ ex BC & BI; denique IE æqualis rectæ compositæ ex ID, sive FB, & DE; se habebit utique spatium, quod continetur sub recta composita ex AB & BI, & recta composita ex BC & BI, ad quadratum, quod describitur a recta composita ex BF & DE, ut AC ad AP. Æquale est autem spatium, quod diximus, tum spatio, quod sub AB & BC continetur; tum spatio, quod continetur sub recta composita ex BC & AB, & sub BI; tum quadrato, quod describitur a BI: &, quod diximus, quadratum æquale tum quadrato, quod a BF describitur; tum spatio, quod continetur sub dupla ipsius BF & DE; tum quadrato, quod describitur a DE. Igitur spatium, quod sub AB & BC continetur, & spatium, quod continetur sub recta composita ex BC & AB, & sub BI, & quadratum, quod describitur a BI, se habent ad quadratum, quod a BF describitur, & spatium, quod continetur sub dupla ipsius BF & DE, & quadratum, quod describitur a DE, ut AC ad AP. Se habet autem spatium, quod sub AB & BC continetur, ad quadratum, quod a BF describitur, ut AC ad AP. Se habent igitur spatium, quod continetur sub recta composita ex AB & BC,



&

& sub BI, & quadratum, quod describitur a BI, ad spatium, quod continetur sub dupla ipsius BF & DE, & quadratum, quod describitur a DE, ut AC ad AP. Æqualis est autem BI excessui, quo IH ipsam BH excedit; & DE excessui æqualis, quo IE excedit ipsam ID, sive FB. Igitur spatium, quod continetur sub recta composita ex AB & BC, & excessu, quo IH excedit ipsam BH, & quadratum, quod describitur ab excessu, quo IH excedit ipsam BH, se habent ad spatium, quod continetur sub dupla ipsius BF, & excessu, quo IE excedit ipsam FB, & quadratum, quod describitur ab excessu, quo IE excedit ipsam FB, ut AC ad AP. Jam vero si intelligatur punctum E super F cadere, & cœtera, prorsus ut in parabola, excessus, quo IH ipsam BH excedit, æqualis tunc fit excessui, quo BG excedit semetipsam, hoc est nihilo ex BG orto; & excessus, quo IE ipsam FB excedit, æqualis excessui, quo BF excedit semetipsam, hoc est nihilo orto ex BF. Igitur factum, quod continetur sub recta composita ex BC & AB, & nihilo ex BG orto, & nihilum ex BG ortum in semetipsum ductum se habent ad factum, cujus alterum latus est dupla ipsius BF, alterum nihilum ortum ex BF, & ad nihilum ortum ex BF, in semetipsum ductum, ut AC ad AP. At vero comparatio diversi generis est tam facti, cujus alterum latus est recta composita ex BC & AB, alterum nihilum ex BG ortum, cum nihilo orto ex BG in semetipsum ducto, quam facti, cujus alterum latus est dupla ipsius BF, alterum nihilum ex BF ortum, cum nihilo orto ex BF ducto in semetipsum. Itaque neglecto ab altera quidem parte nihilo ex BG orto in semetipsum ducto, ab altera vero nihilo



hilo orto ex BF ducto in semetipsum; factum, cujus alterum latus est recta composita ex BC & AB, alterum nihilum ex BG ortum, se habet ad factum, cujus alterum latus est dupla ipsius BF, alterum nihilum ortum ex BF, ut AC ad AP. Ratio autem factorum, quæ diximus, alterius ad alterum, ex ratione componitur, quam habet recta composita ex CB & AB ad duplam ipsius BF, & nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF. Itaque divisa ratione cum facti ad factum, tum ipsius AC ad AP per rationem, quam habet recta composita ex BC & AB ad duplam ipsius BF, se habebit nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF, ut AC ad AP, ratione hac per rationem divisa, quam habet recta composita ex BC & AB ad duplam ipsius BF. Hæc autem ratio ex ratione componitur, quam habet AC ad AP, & dupla ipsius BF ad rectam compositam ex BC & AB. Igitur nihilum ex BG ortum ad nihilum ortum ex BF se habet pro ratione, quæ componitur ex ratione, quam habet AC ad AP, & dupla ipsius BF ad rectam compositam ex BC & AB; nempe ut spatium, quod sub AC & dupla ipsius BF continetur, ad spatium, quod continetur sub AP & recta composita ex BC & AB. Et invertendo. Datum est autem utrumque spatium, quod diximus; cum rectæ datæ sint AC, BC, AB, BF, & AP. Data est igitur ratio,

quam

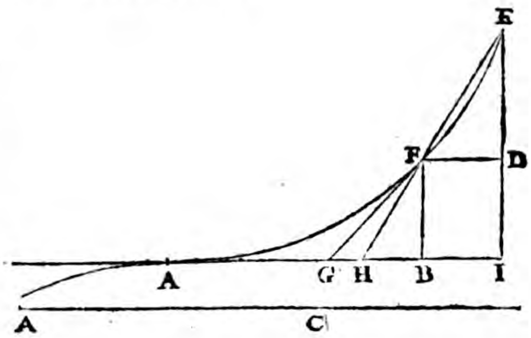
quam nihilum ex BF ortum habet ad nihilum ortum ex BG.

Problema autem eodem pacto demonstrabitur, quo in ellipsi.

Eadem enim in utraque curva argumentatio est; nisi quod CH æqualis est in ellipsi excessui, quo BC excedit ipsam AB, in hyperbola vero æqualis rectæ compositæ ex BC & AB.

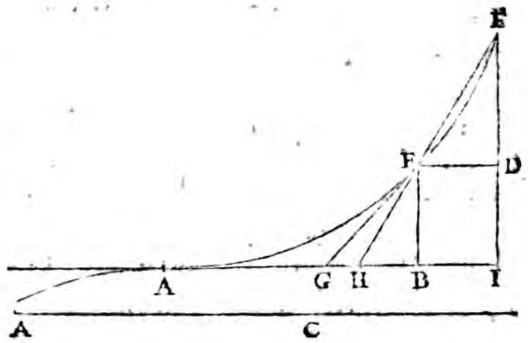
PROPOSITIO VII.

Dato puncto in parabola cubica, & normali, quæ ab ipso ad parabolæ axem ducitur, rationem invenire, quam nihilum ex normali ortum habet ad nihilum ortum ex recta, quæ inter normalem ipsam, rectamque parabolen in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum est, quod subductione fieri dicitur.



Sit parabola cubica AF, cujus axis AB, & AC ea recta, ad quam cubi exiguntur ab axis segmentis descripti, quæ inter rectas ad axem ordinate ductas, & parabolæ verticem interjiciuntur: sitque punctum in parabola F, a quo

duca-



ducatur FB ad AB normalis. Intelligatur autem ducta esse FG parabolen in F contingens, quæ ipsi AB in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex FB ortum habet ad nihilum ortum ex BG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.

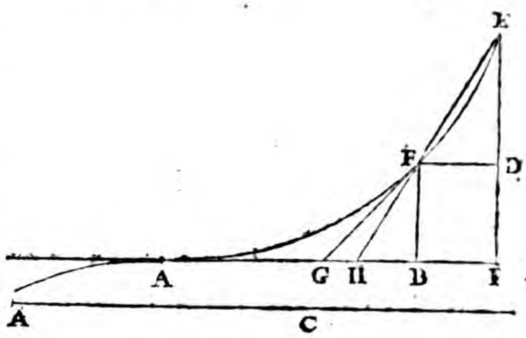
Sumatur in parabola AF punctum quodvis E; junctisque punctis E & F, recta EF, ea producatur ad partes G; describaturque eadem figura quæ in Propositione I. Quoniam igitur cubus, qui ab AI describitur, æqualis est solido, cujus basis est quadratum, quod ab IE describitur, altitudo AC: & AI quidem æqualis est rectæ compositæ ex AB & BI; IE vero æqualis rectæ compositæ ex ID, sive FB, & DE; erit utique cubus, qui describitur a recta composita ex AB & BI, æqualis solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a recta composita ex BF & DE, altitudo AC. Æqualis est autem cubus, quem diximus, tum cubo, qui ab AB describitur; tum solido, cujus basis est triplum quadrati, quod describitur ab AB, altitudo BI; tum solido, cujus basis est triplum quadrati, quod describitur a BI, altitudo AB; tum cubo, qui describitur a BI: &, quod diximus, solidum æquale tum solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a BF, altitudo AC; tum solido, cujus basis est spatium, quod continetur sub dupla ipsius BF & DE, altitudo AC; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DE, altitudo AC. Igitur cubus, qui ab AB deſcribitur; & ſolidum, cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, altitudo BI; & ſolidum cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur a BI, altitudo AB; & cubus, qui deſcribitur a BI, æqualia ſunt ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a BF, altitudo AC; & ſolido, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF & DE, altitudo AC; & ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DE, altitudo AC. Æqualis eſt autem cubus, qui ab AB deſcribitur, ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a BF, altitudo AC. Igitur æqualibus ab utraque parte ablatis, ſolidum, cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, altitudo BI; & ſolidum, cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur a BI, altitudo AB; & cubus, qui deſcribitur a BI, æqualia ſunt ſolido, cujus baſis eſt ſpatium, quod ſub dupla ipſius BF & DE continetur, altitudo AC; & ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DE, altitudo AC. Æqualis eſt autem BI exceſſui, quo IH ipſam BH excedit; & DE exceſſui æqualis, quo IE excedit ipſam ID, ſive FB. Igitur ſolidum, cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, altitudo exceſſus, quo IH excedit ipſam BH; & ſolidum, cujus baſis eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab exceſſu, quo IH excedit ipſam BH, altitudo AB; & cubus, qui deſcribitur ab exceſſu, quo IH excedit ipſam BH, æqualia ſunt ſolido, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & exceſſu, quo

IE

IE excedit ipſam BF, altitudo AC; & ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur ab exceſſu, quo IE excedit ipſam BF, altitudo AC. Jam vero ſi intelligatur punctum E ſuper F cadere, & cœtera, ut in parabola Apolloniana, exceſſus, quo IH ipſam BH excedit, æqualis tunc fit exceſſui, quo BG excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo ex BG orto; & exceſſus, quo IE excedit ipſam FB, æqualis exceſſui, quo BF excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilo orto ex BF. Igitur factum, cujus alterum latus eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, alterum nihilum ex BG ortum; & factum cujus alterum latus eſt triplum nihili orti ex BG in ſemetipſum ducti, alterum AB, & nihilum ex BG ortum in ſemetipſum ſemel atque iterum ductum, æqualia ſunt facto, cujus alterum latus eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF & AC, alterum nihilum ex BF ortum; & facto, cujus alterum latus eſt nihilum ortum ex BF ductum in ſemetipſum, alterum AC. At vero comparatio diverſi generis eſt tam facti, cujus alterum latus eſt triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, alterum nihilum ex BG ortum, cum facto, cujus alterum latus eſt triplum nihili orti ex BG in ſemetipſum ducti, alterum AB, atque adeo cum nihilo orto ex BG in ſemetipſum ducto ſemel atque iterum, quam facti, cujus alterum latus eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF & AC, alterum nihilum ex BF ortum, cum facto, cujus alterum latus eſt nihilum ortum ex BF, ductum in ſemetipſum, alterum AC. Itaque neglectis ab utraque parte, quæ negligenda ſunt, factum, cujus alterum latus eſt triplum

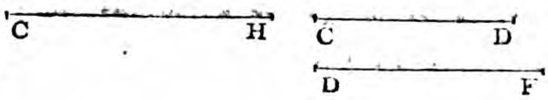
qua-

quadrati, quod deſcribitur ab AB, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & AC, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur triplum quadrati, quod deſcribitur ab AB, ſe habet ad ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & AC, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Datum eſt autem tum quadratum, tum ſpatium, quod diximus; cum rectæ datæ ſint AB, AC, & FB. Data eſt igitur ratio, quam nihilum ex BF ortum habet ad nihilum ortum ex BG.

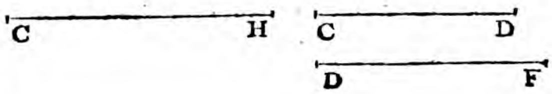


Problema autem hoc pacto demonſtrabitur.

Propoſitæ ſint duæ rectæ CH, CD, quarum altera æqualis ſit quartæ proportionali rectis AC, AB, & triplæ ipſius AB; ita ut triplum quadrati, quod ab AB deſcribitur, æquale ſit ſpatio, quod ſub AC & CH continetur; altera vero æqualis ſit duplæ ipſius BF. Dico, ut CH ad CD, ita ſe habere nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.



Si enim minus, ſe habebit utique CH ad rectam aliquam majorem, aut minorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Itaque ſe habeat primo



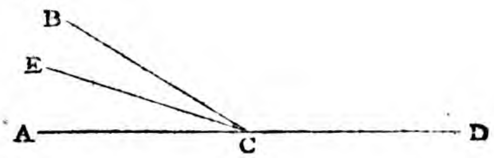
CH ad rectam DF majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Quoniam igitur CH ad DF ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG; erit utique factum, cujus alterum latus eſt CH, alterum nihilum ex BG ortum, æquale facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Et quoniam ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, factum, cujus alterum latus eſt triplum quadrati, quod ab AB deſcribitur, hoc eſt ſpatium, quod ſub AC, & CH continetur, alterum nihilum ex BG ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius BF, & AC, alterum nihilum ortum ex BF; erit utique & factum, cujus alterum latus eſt CH, alterum nihilum ex BG ortum, æquale facto, cujus alterum latus eſt dupla ipſius BF, hoc eſt CD, alterum nihilum ortum ex BF. Æquale eſt autem factum, cujus alterum latus eſt CH, alterum nihilum ex BG ortum, facto, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur, ſuffecto æquali, factum, cujus alterum latus eſt DF, alterum nihilum ex BF ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt CD, alterum nihilum ortum ex BF. Igitur ut DF ad CD, ita ſe habet nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum. Se habet autem nihilum ex BF ortum ad nihilum ex BF ortum, ut BF ad BF. Se habet igitur DF ad CD, ut BF ad BF; ideoque DF ipſi CD eſt æ-

qualis.

qualis. Quod fieri non poteſt. Poſita enim eſt recta DF ipſa CD major eſſe. Non igitur ſe habet CH ad rectam majorem quam CD, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Eodem modo demonſtrabitur neque ad rectam minorem quam CD ſe habere CH, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG. Igitur CH ad CD ſe habet, ut nihilum ex BF ortum ad nihilum ortum ex BG.

PROPOSITIO VIII.

Planorum angulorum rectilineorum maximus a duabus rectis lineis conſtituitur, quæ ſeſe invicem contingentes in directo jacent.

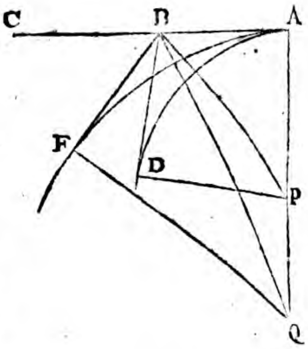


Sint duæ rectæ lineæ AC, CD ſeſe invicem cōtingentes in puncto C, jacenteſque in directo. Dico, rectas AC, CD maximum angulum conſtituere.

Si enim rectæ AC, CD in directo jacentes maximum angulum non conſtituunt, conſtituent utique duæ aliæ rectæ invicem inclinatæ, cujuſmodi ſunt BC, CD. Sumatur intra puncta A, B quodvis punctum E, ducaturque EC. Erit igitur angulus ECD major angulo BCD. Eſt autem BCD angulus maximus. Igitur angulus ECD major eſt angulo maximo. Quod fieri non poteſt. Planorum igitur angulorum &c.

PROPOSITIO IX.

Si duos circulos ſeſe intus contingentes recta linea contigerit: & a puncto quovis in ea ſumpto ducantur duæ rectæ, quæ eoſdem circulos contingant; quæ recta cum priore illa majorem angulum comprehendit, ea majorem circulum continget.



Contingat recta AC duos circulos AF, AD ſeſe intus contingentes in puncto A. Sumatur autem in AC quodvis punctum B, ducanturque ab ipſo rectæ BF, BD, quæ circulos AF, AD in punctis F, D contingant; ſitque angulus ABF major angulo ABD. Dico circulum AF majorem eſſe circulo AD.

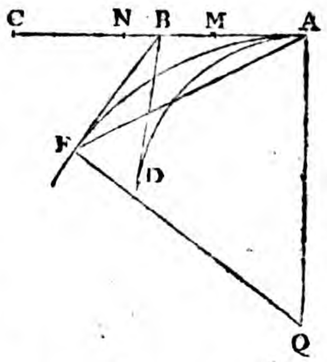
Ducantur enim a punctis A, F, D rectæ AQ, FQ, DP, ipſis AB, BF, BD normales. Quoniam igitur rectæ AQ, FQ normales ſunt ipſis AB, BF circulum AF contingentibus, erit in utraque centrum ejuſdem circuli, ideoque in puncto utrique communi, quod quidem ſit Q. Eadem ratione etiam in puncto P communi rectis AP, DP erit centrum circuli AD. Jungantur modo rectæ BQ, BP. Et quoniam in quadrilatero ABFQ angulus uterque BAQ, BFQ rectus eſt; erunt utique anguli oppoſiti ABF, AQF æquales duobus rectis. Eadem ratione in quadrilatero ABDP æquales erunt duobus rectis & anguli oppoſiti ABD, APD.

Quo-

Quoniam igitur anguli ABF, AQF æquales ſunt angulis ABD, APD, quorum angulus ABF major eſt angulo ABD, erit angulus AQF minor angulo APD. Eſt autem angulus AQF duplus anguli AQB; itemque angulus APD duplus anguli APB: quoniam in quadrilatero ABFQ rectæ æquales ſunt cum AB, BF, tum AQ, QF; & in quadrilatero ABDP rectæ ſunt æquales cum AB, DB, tum AP, PD. Igitur angulus AQB minor eſt angulo APB. Jam vero in triangulis BAQ, BAP cum angulus BAQ communis ſit, & angulus AQB minor angulo APB, erit angulus ABQ major angulo ABP. Recta igitur AQ major erit quam AP. Eſt autem altera circuli AF, altera circuli AD ſemidiameter. Igitur circulus AF major eſt circulo AD. Si igitur duos circulos &c.

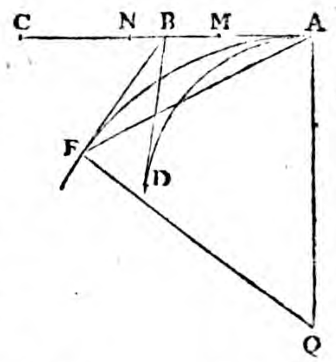
PROPOSITIO X.

Si ab uno eodemque puncto duæ rectæ lineæ circulum maximum contigerint, quem angulum comprehendent, is erit maximus.



Contingant a puncto B rectæ BA, BC maximum circulum, & quidem in punctis A & C. Dico, eas maximum angulum ABC comprehendere.

Si enim minus, comprehendant angulum ABD minorem quam maximũ ABC. Sumatur autem intra puncta C, D punctum quodvis F, ducaturque FB utrivis AB, BD æqualis. Tum vero jungatur AF; ducanturque a punctis A, F rectæ AQ, FQ ipſis AB, BF normales. Et quoniam æqua-



les invicem ſunt & recti anguli BAQ, BFQ, æqualeſque item anguli BAF, BFA, æquales invicem erunt, & recto uterque minor anguli FAQ, AFQ. Hinc rectæ AQ, FQ invicem concurrent, & erunt invicẽ æquales. Concurrant in puncto Q; centroque Q, atque intervallo QA circulus deſcribatur. Hic utique circulus per punctum F tranſibit, rectaſque continget BA, BF in punctis A, F. Jam vero recta linea CA circulos AF, AD ſeſe intus contingentes in puncto A contingit: ſumptoque in ea puncto B, rectæ ductæ ſunt BF, BD, quæ circulos eoſdem contingunt in punctis F, D; majorque eſt angulus ABF angulo ABD. Circulus igitur AF major eſt circulo AD. Eſt autem AD circulus maximus. Igitur circulus AF major eſt circulo maximo. Quod fieri non poteſt. Si igitur duæ rectæ lineæ &c.

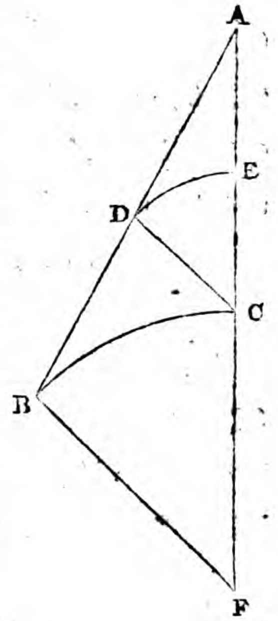
COROLLARIUM.

Quoniam igitur demonſtratum eſt rectas BA, BC maximum angulum comprehendentes maximum circulum in punctis A, C contingere; illud manifeſtum eſt, ſi ſumatur aliud quodvis punctum M, & fiat MN ipſi AM æqualis, futurum ut hæ quoque rectæ AM, MN, quæ maximum angulum comprehendunt, eundem circulum maximum contintingant in punctis A, & N. Quod quum de aliis quoque punctis argumentari liceat in recta AC eodem modo sumendis, patet maximi circuli circumferentiam esse rectam lineam.

PROPOSITIO XI.

Si duæ fuerint rectæ lineæ indefinitæ acutum angulum comprehendentes; describanturque duo circuli centra in earum altera habentes, quorum diametri se invicem habeant, ut pars ejus rectæ, in qua centra sunt, quæ inter convexam alterutrius circuli circumferentiam, &, quem diximus, angulum interjicitur, ad rectæ ejusdem partem, quæ interjicitur inter centrum ejusdem circuli, eundemque angulum, alter autem per alterius centrum transeat; si horum circulorum alteruter utrique rectæ indefinitæ occurrat, alter etiam occurret: & arcus, quos eædem hæ rectæ ab hisce circulis intra angulum abscindunt, erunt sibi invicem similes.

Sint duæ rectæ indefinitæ AB, AC acutum angulum comprehendentes BAC. Sumatur autem in AC punctum E; describaturque centro C, atque intervallo CE circulus DE utrique AB, AC occurrens. Deinde fiat, ut AE ad AC, ita CE



ad CF : centroque F, atque intervallo FC, describatur circulus BC. Dico, circulum BC rectæ utrique occurrere AB, AC : & arcum DE similem esse arcui BC.

Jungatur enim recta CD; ducaturque a puncto F recta FB ipsi CD parallela. Et quoniam AE ad AC se habet, ut CE ad CF, etiam permutando, AE ad CE se habet ut AC ad CF. Et componendo, AC ad CE, hoc est ad CD, se habet, ut AF ad CF. Se habet autem AC ad CD, ut AF ad BF. Se habet igitur AF ad CF, ut AF ad BF : ideoque CF ipsi BF est æqualis. Igitur circulus centro F, atque intervallo CF descriptus per punctum B transibit, quodque eodem redit, rectæ occurret AB. Et quoniam CD ipsi FB parallela est, angulus ACD angulo AFB est æqualis. At vero inæqualium circulorum arcus, qui æqualibus angulis subjiciuntur, sive ad centra positi fuerint, sive ad circumferentias, sunt similes. Arcus igitur DE similis est arcui BC. Si igitur duæ fuerint rectæ lineæ indefinitæ &c.

PROPOSITIO XII.

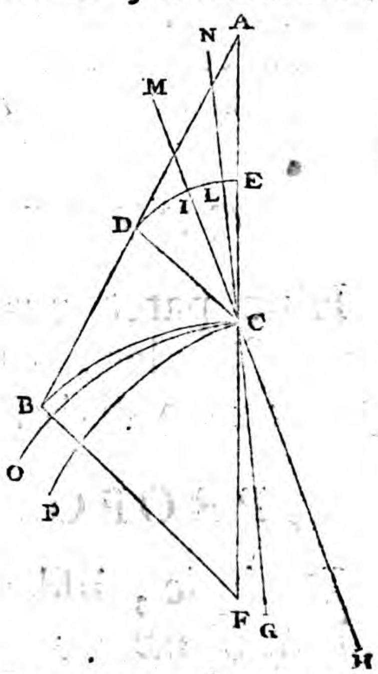
Iisdem positis, arcus DE ad arcum BC eam rationem habet, quam recta AE ad rectam AC.

Quoniam enim demonstratum est arcus DE, &

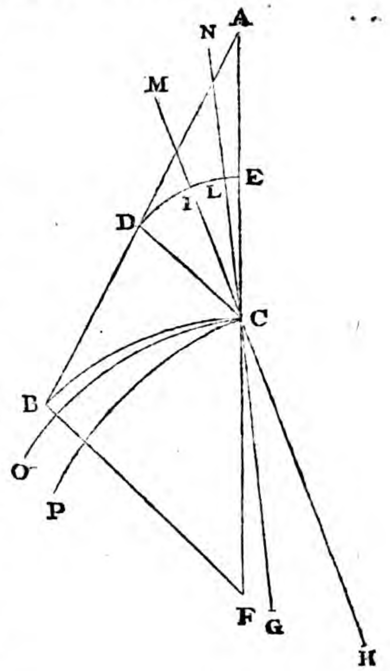
BC similes esse, se invicem habebunt ut circulorum, a quibus abscinduntur, semidiametri. Igitur DE ad BC se habet, ut EC ad CF. Se habet autem EC ad CF, ut AE ad AC. Se habet igitur DE ad BC, ut AE ad AC.

PROPOSITIO XIII.

Rursus, iisdem positis, si inter rectas DC, AC, & per punctum C rectæ aliæ quotcunque ducantur, a DC deinceps majores, cujusmodi sunt MC, NC, ita ut DC minima sit, AC maxima, eæque producantur: deinde fiat, ut MI ad MC, ita IC ad CH; & ut NL ad NC, ita LC ad CG; describanturque centro quidem H, atque intervallo CH, circulus CP; centro vero G, atque intervallo CG, circulus CO; circulus CP major est circulo CO, & circulus CO major circulo CB: nempe is circulus est continuo major, qui rectæ, minime propinquiori, respondet.



Quoniam enim MC minor est quam NC, & IC ipsi LC æqualis, erit utique MI minor quam NL. Itaque CI ad MI majorem



rem rationem habet, quam CL ad NL. Et componendo, CM ad MI majorem habet rationem, quam CN ad NL; ideſt invertendo, MI ad CM rationem minorem, quam NL ad CN. At vero ut MI ad CM, ita ſe habet IC ad CH; & ut NL ad GN, ita LC ad CG. Igitur IC ad CH minorem habet rationem quam LC ad CG. Æqualis eſt autem IC ipſi LC. Major eſt igitur CH quam CG; ideoque & circulus, cujus ſemidiameter eſt CH, nempe CP, major circulo, cujus eſt ſemidiameter CG, nempe CO. Eodem modo demonſtrabitur & CO majorem eſſe circulo CB. Circulus igitur CP major eſt quam CO, & CO quam CB.

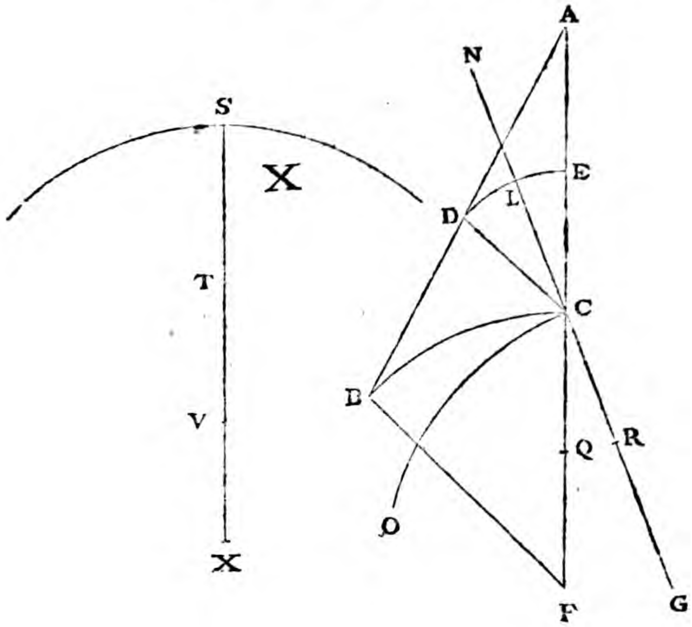
COROLLARIUM.

Hinc patet circulum, qui minimæ CD reſpondet, quolibet ex circulis, quos modo diximus, majorem eſſe.

PROPOSITIO XIV.

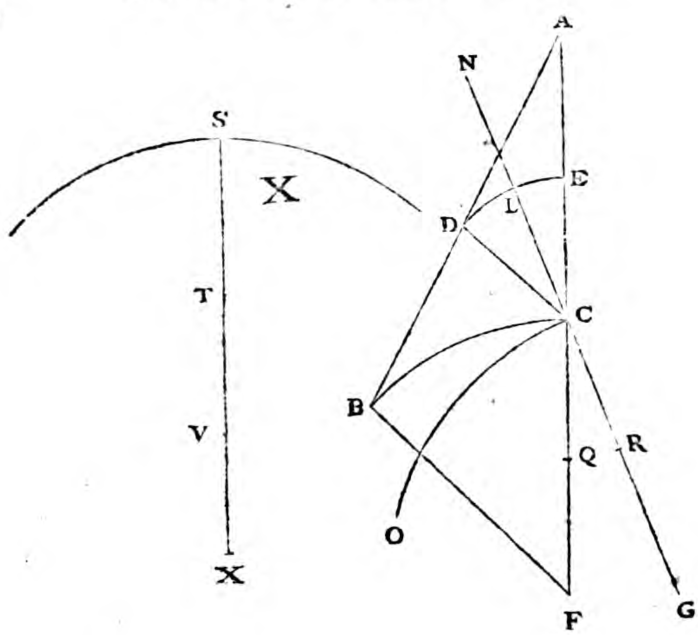
Denique, iiſdem poſitis, circulus, qui minimæ CD reſpondet, eſt maximus.

Si



Si enim minus, ſit alius quilibet circulus eodem major X, cujus ſemidiameter SV. Abſcindatur ab SV recta TV ipſi CE æqualis: & fiat, ut ST ad TV, ita TV ad VX. Tum vero inter rectas DC, AC, & per punctum C ducatur utcunque recta NC, ita ut NL ipſi VX ſit æqualis; eademque producta, fiat ut NL ad NC, ita LC ad CG; centroque G, atque intervallo CG deſcribatur circulus CO. Quoniam igitur TV ad VX ſe habet, ut ST ad TV, ſe habebit, etiam componendo, TX ad VX, ut SV ad TV. Et invertendo, VX ad TX, ut TV ad SV. Se habet autem NL, ſive VX eidem æqualis, ad NC, ſive ad eidem æqualem TX, ut LC ad CG. Se habet igitur TV ad SV, ut LC ad CG. Æqualis eſt autem TV ipſi LC. Æqualis eſt igitur & SV ipſi CG: & propterea circulus centro G, atque intervallo CG deſcriptus circulo X eſt æqualis. Abſcindatur modo a CG recta CR ipſi CL æqualis, itemque a CF recta CQ æqualis ipſi CE. Et quoniam NL ad NC ſe

ha-



habet, ut LC ad CG, se habebit etiam invertendo, NC ad NL, ut CG ad LC. Et dividendo, CL ad NL, ut GR ad RC. Eadem ratione CE ad AE se habet, ut FQ ad QC. Habet autem GR ad RC majorem rationem quam FQ ad QC; quippe CG major esse ponitur quam CF, & CR ipsi CQ est æqualis. Habet igitur & CL ad NL majorem rationem quam CE ad AE. Est autem CL æqualis ipsi CE. Igitur NL minor est quam AE: & propterea NC minor quam AC. Quoniam igitur tres sunt rectæ deinceps majores DC, NC, AC, quarum minima est DC, maxima AC; factumque est, ut NL ad NC, ita CL ad CG; centroque G, atque intervallo CG, circulus descriptus est CO; erit utique circulus, qui minimæ CD respondet, major circulo CO. Quod fieri non potest. Ponitur enim eodem hoc circulo esse minor. Non est igitur circulus CO, sive X, neque ullus alius major circulo, qui minimæ CD respondet. Circulus

lus igitur, qui minimæ CD respondet, est maximus.

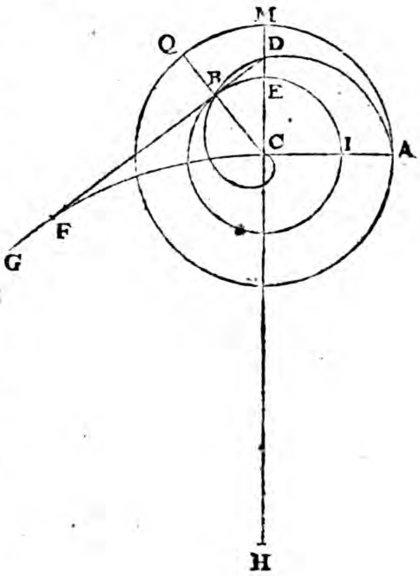
COROLLARIUM.

Quoniam circulorum CB, CO diametri in directo jacent rectis AC, CN, sequitur circuli, qui minimæ CD respondet, diametrum eidem CD in directo jacere. Quoniam vero circuli maximi circumferentia est recta linea, & circulorum circumferentiæ suæ quæque diametro ad æquales angulos insistunt, manifestum est circuli, qui minimæ CD respondet, circumferentiam esse rectam lineam eidem CD normalem.

PROPOSITIO XV.

Si duæ rectæ ab helicis principio in helicen incidant; junctisque punctis, in quæ incidunt, recta alia, ea indefinite producatur, ita ut cum majore duarum rectarum, quas diximus, acutum angulum comprehendat: deinde vero describantur duo circuli, ut in Propositione XI; quorum tamen alter centrum quidem habeat helicis principium, eam vero, quæ ex centro ducitur, rectæ minori æqualem; arcus mino-

minoris circuli, qui inter principium orbis, rectamque majorem interjicitur, æqualis est arcui circuli majoris, qui interjicitur inter principium helicis, & rectam indefinite productam, arcubus ad sequentia sumptis.



Sit helix CBDA: & helicis quidem principium punctum C, principium vero orbis recta CA. Incidant autem in helicen rectæ CB, CD; junctisque punctis D, & B, recta DB, ea indefinite producatur ad partes B, ita ut cum CD acutum angulũ comprehendat CDF. Describatur porro centro C, atque intervallo CB, circulus IBEI rectis CA, CD occurrens in punctis I, & E: deinde fiat, ut DE ad DC, ita EC ad CH; centroque H, atque intervallo CH, rursus describatur circulus CFG. Dico, arcum EBI circuli IBEI æqualem esse arcui CF circuli CFG.

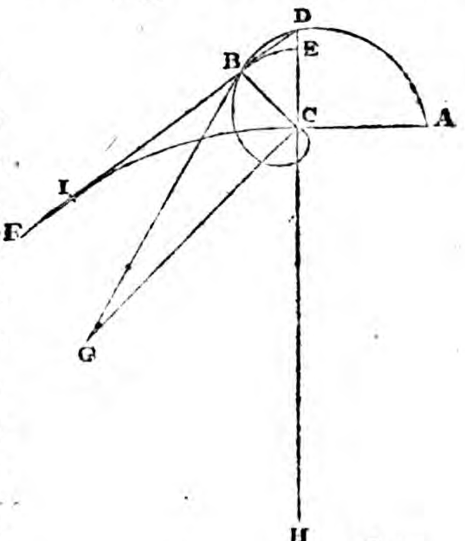
Describatur enim primus orbis AQMA, eique occurrant CD, CB, productæ in punctis M, & Q. Quoniam igitur DC ad CB, sive CE, se habet, ut AQM ad AQ; & AQM se habet ad AQ, ut IBE ad IB; ideo DC ad CE se habet, ut IBE ad IB. Et convertendo, DC ad DE se habet, ut IBE ad BE. Et invertendo, DE ad DC se habet, ut BE

ad

ad IBE. Se habet autem DE ad DC, ut BE ad CF. Se habet igitur BE ad IBE, ut BE ad CF. Æqualis est igitur IBE ipsi CF. Si igitur duæ rectæ ab helicis principio in helicen incidant &c.

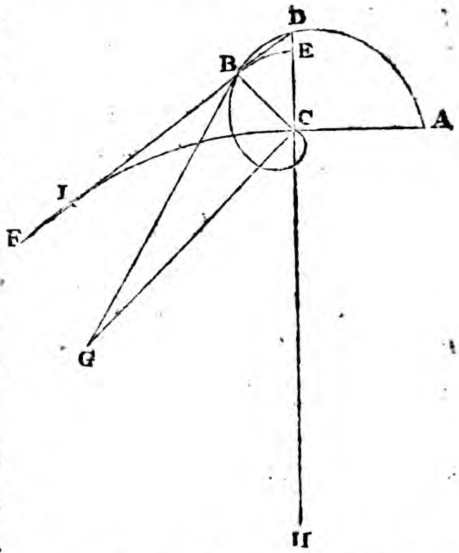
PROPOSITIO XVI.

Si a puncto aliquo, quod in helice sit, recta ducatur helicen contingens; ducanturque ab helicis principio duæ rectæ lineæ ad angulos invicem rectos, quarum altera in contactum incidat, altera contingenti occurrat; harum rectarum prima ad eam secundæ partem, quæ inter primam, & contingentem interjicitur, eam rationem habere deprehenditur, quam nihilum ex prima ortum habet ad nihilum ortum ex ea secundæ parte, quam diximus. Utrumque autem nihilum est, quod subductione fieri dicitur.



Sit helix CBA: & helicis quidem principium punctum C; principium vero orbis recta CA. Sit autem in helice punctum B, a quo ducatur BG helicen contingens. Ducantur item a puncto C ad angulos invicem rectos CB, CG, quarum alte-

altera incidat in B, altera ipsi BG in puncto G occurrat. Dico, BC ad CG eam rationē habere deprehendi, quam nihilum ex BC ortum habet ad nihilum ortum ex CG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.



Sumatur enim in helice CBA punctū quodvis D; junctisque punctis D & B rectis BD, DC, eæ producantur indefinite ad partes G. Describatur autem centro C, atque intervallo CB, circulus BE: deinde fiat, ut DE ad DC, ita CE ad CH; rursusque centro H, atque intervallo CH, describatur alius circulus CF. Quoniam igitur ut DC ad DE, ita se habet CF ad BE, etiam convertendo, ut DC ad excessum, quo DC ipsam DE excedit, hoc est ad CE, ita se habet CF ad excessum, quo CF excedit ipsam BE, qui quidem sit CI. Et dividendo, ut excessus, quo DC ipsam CE, sive BC, excedit, ad CE, sive BC, ita excessus, quo CF excedit ipsam CI, ad CI. Et invertendo, ut BC ad excessum, quo DC ipsam BC excedit, ita CI ad excessum, quo CF excedit ipsam CI. Et permutando, ut BC ad CI, ita excessus, quo DC ipsam BC excedit, ad excessum, quo CF excedit ipsam CI. Hoc autem semper continget, ubicunque tandem sumatur punctum D. Quod si intelligatur id punctum magis magisque accedere ad punctum B, quousque super ipsum cadat, cadent utique & DC su-

per

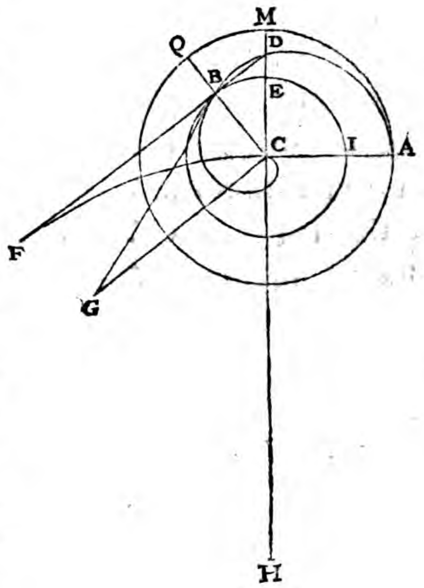
per BC, & DF ſuper BG, ipſe denique arcus CF ſuper CG, utpote qui arcus eſt maximi circuli. Atque id quum primum fiet, recta DF helicen continget; quippe quum antea illam duobus in punctis ſecaret, non ſecare amplius concipitur. At vero exceſſus, quo DC ipſam BC excedit, æqualis tunc fit exceſſui, quo BC excedit ſemetipſam; itemque exceſſus, quo CF ipſam CI excedit, exceſſui æqualis, quo CI, ſive CG, cum qua convenit, excedit ſemetipſam. Eſt enim CI exceſſus, quo CF excedit ipſam BE. Igitur ut BC ad CG, ita ſe habet exceſſus, quo BC ſemetipſam excedit, hoc eſt nihilum ex BC ortum, ad exceſſum, quo CG excedit ſemetipſam, hoc eſt nihilum ortum ex CG. Eſt enim comparatio ejuſdem generis, quum utrumque nihilum ſubductione dicatur fieri. Si igitur a puncto aliquo &c.

PROPOSITIO XVII.

Dato puncto in helice, & recta, quæ ab helicis principio in id punctum incidit, rationem invenire, quam habet nihilum ex hac recta ortum ad nihilum ortum ex recta eidem normali, quæ inter principium helicis, rectamque helicen in dato puncto contingentem interjicitur. Utrumque autem nihilum eſt, quod ſubductione fieri dicitur.

Sit helix CBA: & helicis quidem principium punctum C, principium vero orbis recta CA;

Sit autem punctum in helice B, in quod incidat a puncto C recta CB: ducaturque ipsi CB normalis recta CG. Intelligatur modo ducta esse BG helicen in B contingens, quæ ipsi CG in puncto G occurrat. Oportet rationem invenire, quam nihilum ex CB ortum habet ad nihilum ortum ex CG, quorum utrumque dicitur subductione fieri.



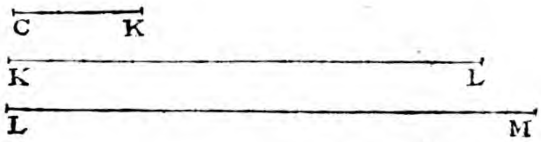
Sumatur in helice CBA punctum quodvis D; junctisque punctis D & B, recta DB, ea indefinite producatur ad partes G; describaturque eadem figura quæ in Propositione XV. Quoniam igitur CA ad CD se habet, ut AQMA ad AQM, hoc est ut IBEI ad IBE: & CD quidem æqualis est rectæ compositæ ex CE, sive CB, & DE; IBE vero æqualis lineæ compositæ ex IB & BE; se habebit utique CA ad rectam compositam ex CB & DE, ut IBEI ad lineam compositam ex IB & BE. Se habet autem CA ad CB, ut AQMA ad AQ, hoc est, ut IBEI ad IB. Se habet igitur & CA ad DE, ut IBEI ad BE. Æqualis est autem DE excessui, quo CD ipsam CB excedit; & BE excessui æqualis, quo IBE, sive CF, excedit ipsam IB. Igitur CA ad excessum, quo CD ipsam CB excedit, se habet, ut IBEI ad excessum, quo CF excedit ipsam BE. Et permutando, CA ad IBEI se

habet,

habet ut excessus, quo CD ipsam CB excedit, ad excessum, quo CF excedit ipsam BE. Jam vero si intelligatur punctum D super B cadere, ita ut convenientibus invicem lineis CD cum CB, CF cum CG, BF cum BG, recta DBF helicen contingat; quippe quum antea illam duobus in punctis secaret, non secare amplius concipitur; excessus, quo CD ipsam BC excedit, æqualis tunc fit excessui, quo CB excedit semetipsam, hoc est nihilo ex CB orto; & excessus, quo CF excedit ipsam BE, æqualis excessui, quo CG excedit semetipsam, hoc est, nihilo orto ex CG. Igitur CA ad IBEI se habet ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Datæ autem sunt cum CA, tum IBEI. Data est igitur ratio, quam nihilum ex CB ortum habet ad nihilum ortum ex CG.

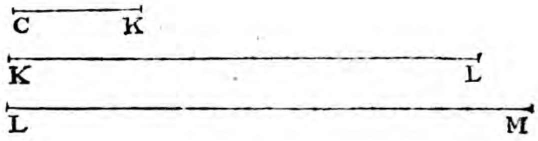
Problema autem hoc pacto demonstrabitur.

Propositæ sint duæ rectæ CK, KL, quarum altera æqualis sit semidiametro circuli AQMA, altera circumferentiæ circuli IBEI.



Dico, ut CK ad KL, ita se habere nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG.

Si enim minus, se habebit utique CK ad rectam aliquam majorem, aut minorem quam KL, ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Itaque se habeat primo CK ad rectam LM, majorem quam KL, ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Quoniam igitur CK ad LM se habet ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG, erit utique factum, cujus



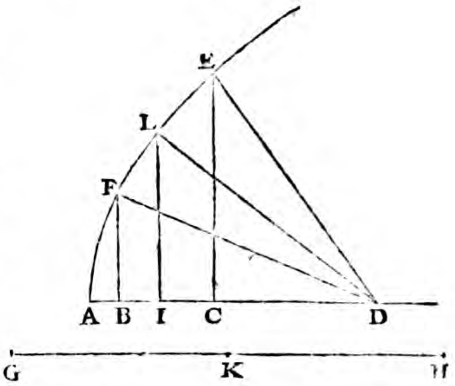
alterum latus eſt CK, alterum nihilum ortum ex CG, æquale facto, cujus alterum latus eſt LM, alterum nihilum ortum ex CB. Æquale eſt autem ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, factum, cujus alterum latus eſt CA, ſive CK, alterum nihilum ortum ex CG, facto, cujus alterum latus eſt IBEI, ſive KL, alterum nihilum ortum ex CG; quoniam CA, ſive CK, ad IBEI, ſive KL, ſe habet ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Igitur factum, cujus alterum latus eſt LM, alterum nihilum ex CB ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt KL, alterum nihilum ortum ex CB. Igitur ut LM ad KL, ita ſe habet nihilum ex CB ortum ad nihilum ex CB ortum. Se habet autem nihilum ex CB ortum ad nihilum ex CB ortum, ut CB ad CB. Se habet igitur LM ad KL, ut CB ad CB; ideoque LM ipſi KL eſt æqualis. Quod fieri non poteſt. Poſita enim eſt LM ipſa KL major eſſe. Non igitur ſe habet CK ad rectam majorem quam KL, ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Eodem modo demonſtrabitur, neque ad rectam minorem quam KL ſe habere CK, ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG. Igitur CK ad KL ſe habet ut nihilum ex CB ortum ad nihilum ortum ex CG.

PRO-

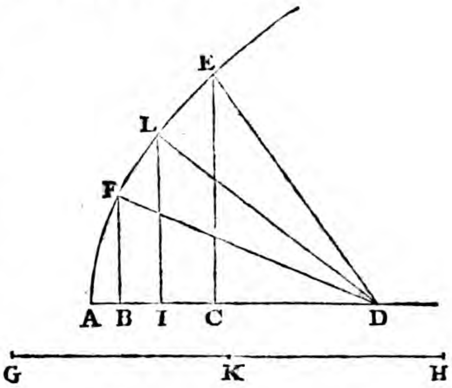
PROPOSITIO XVIII.

Data parabola, punctoque in ejus axe, rectam definire, in quam duæ rectæ continenter æquales, quæ ab eo puncto in parabolen incidunt, invicem conveniunt.

Sit parabola AE, cujus axis AD, & rectum latus GH; punctumque in AD, D. Incidant autem in parabolen AE a puncto D æquales rectæ DF, DE. Oportet rectam definire, in quã DF, DE continenter æquales invicem conveniunt.



Ducantur a punctis F, E ad axem AD normales FB, CE. Quoniam igitur æquales invicem sunt DF, DE, æqualia invicem erunt & quadrata, quæ ab ipsis describuntur; sive quadrata, quæ describuntur a BF & BD, quadratis erunt æqualia, quæ describuntur a CE, & CD. Æqualia autem sunt quadrata, quæ a BF & CE describuntur, spatiis, quæ continentur, alterum sub GH & AB, alterum sub GH, & recta composita ex AB & BC: & quadratum, quod a BD describitur, æquale quadrato, quod describitur a recta composita ex BC & CD. Igitur spatium, quod continetur sub GH & AB, & quadratum, quod describitur a recta composita ex BC & CD, æqualia sunt spatio, quod continetur sub GH, & recta composita ex AB & BC, & quadrato, quod describitur a CD. Æquale est autem quadratum, quod describitur a recta composita ex BC & CD, tum quadratis, quæ describuntur a BC & CD, tum duplo spatii, quod continetur sub CD & BC: & spatium, quod continetur sub GH, & recta composita ex AB & BC, æquale spatio, quod continetur sub GH & AB, & spatio, quod continetur sub GH & BC. Igitur spatium, quod continetur sub GH & AB, & quadrata, quæ describuntur a BC & CD, & duplum spatii, quod continetur sub CD & BC, æqualia sunt spatio, quod continetur sub GH & AB, & spatio, quod continetur sub GH & BC, & quadrato, quod describitur a CD. Et æqualibus ab utraque parte ablatis, quadratum, quod describitur a BC, & duplum spatii, quod continetur sub BC & CD, æqualia sunt spatio, quod continetur sub GH & BC. Hoc autem semper continget, quocumque tandem intervallo distent puncta E & F. Quod si intelligantur magis magisque invicem accedere, quousque alterum super alterum cadat, rectæ DF, DE continenter æquales in unam eandemque rectam convenient. At vero cadentibus punctis E & F super tertium quoddam punctum L, cadunt puncta quoque C & B super punctum I; æqualisque tunc fit BC nihilo ex BC orto. Igitur nihilum ex BC ortum in semetipsum ductum, & factum, cujus alterum latus est dupla ipsius CD,



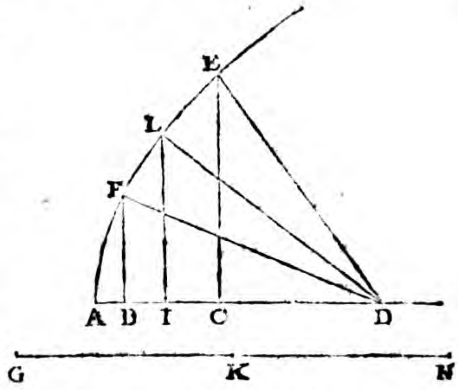
alte-

alterum nihilum ex BC ortum, æqualia sunt facto, cujus alterum latus est GH, alterum nihilum ortum ex BC. At vero comparatio nihili ex BC orti in semetipsum ducti cum facto, cujus alterum latus est dupla ipsius CD, alterum nihilum ortum ex BC, diversi generis est. Itaque neglecto ab altera parte nihilo ex BC orto in semetipsum ducto, factum, cujus alterum latus est dupla ipsius CD, alterum nihilum ortum ex BC, æquale est facto, cujus alterum latus est GH, alterum nihilum ortum ex BC. Igitur dupla ipsius CD ad GH se habet, ut nihilum ex BC ortum ad nihilum ex BC ortum. Se habet autem nihilum ex BC ortum ad nihilum ex BC ortum, ut BC ad BC. Se habet igitur dupla ipsius CD ad GH ut BC ad BC; ideoque dupla ipsius CD ipsi GH est æqualis. Quod quum ita sit, si secta GH in duas æquas partes in puncto K, fiat ID rectæ GK æqualis, ducaturque a puncto I ad AD normalis IL; recta DL, quæ puncta conjungit D & L, ea ipsa erit, in quam rectæ DF, DE continenter æquales invicem conveniunt.

PROPOSITIO XIX.

Hisce positis, dico rectam DL esse omnium minimam, quæ a puncto D ad parabolen AE duci possint.

Si enim minus, sit alia quævis recta minor quam DL, eaque primo cadat ad partes D, ut DE; ducaturque a puncto E ad AD normalis EC. Quoniam igitur DL major est quam DE, majus erit & quadratum, quod a DL describitur, quadrato, quod describitur a DE; sive quadrata, quæ ab IL & ID describuntur, majora erunt quadratis, quæ deſcribuntur a CE & CD. Æqualia autem ſunt quadrata, quæ ab IL & CE deſcribuntur, ſpatiis, quæ continentur, alterum quidem ſub GH & AI, alterum vero ſub GH,



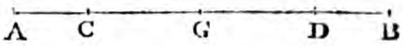
& recta compoſita ex AI & IC. Igitur ſpatium, quod continetur ſub GH & AI, & quadratum, quod deſcribitur ab ID, majora ſunt ſpatio, quod continetur ſub GH & AI, & ſpatio, quod continetur ſub GH & CI, & quadrato, quod deſcribitur a CD. Et æqualibus ab utraque parte ablatis, quadratum, quod deſcribitur ab ID, majus eſt ſpatio, quod continetur ſub GH, ſive dupla ipſius ID, & IC, & quadrato, quod deſcribitur a CD. Æqualia autem ſunt ſpatium, quod continetur ſub dupla ipſius ID, & IC, & quadratum quod deſcribitur a CD, quadratis, quæ deſcribuntur ab ID & IC. Igitur quadratum, quod deſcribitur ab ID, majus eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab ID, & IC. Quod fieri non poteſt. Non eſt igitur DE, quæ ad partes D cadit, minor quam DL. Haud ſecus demonſtrabitur neque rectam aliam, puta DF, quæ cadit ad partes A, minorem eſſe quam DL. Igitur DL eſt minima omnium, quæ a puncto D ad parabolen AE duci poſſint.

PROPOSITIO XX.

Si datæ rectæ lineæ æqualia duo ſpatia

tia applicentur, quæ figura quadrata deficiant, ſpatium definire, in quod duo, quæ diximus, ſpatia continenter æqualia invicem conveniunt.

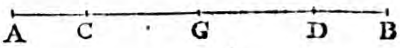
Sit data recta linea AB, eique applicentur duo ſpatia invicem æqualia; quorum quidem alterum baſim habeat AD, altitudinem DB, ac deficiat quadrata figura, quæ a DB deſcribitur; alterum vero baſim AC, & altitudinem CB, deficiatque figura quadrata, quæ deſcribitur a CB. Oportet ſpatium definire, in quod duo, quæ diximus, ſpatia continenter æqualia invicem conveniunt.



Quoniam ſpatium, quod ſub AD & DB continetur, æquale eſt ſpatio, quod continetur ſub AC & CB: & AD quidem æqualis eſt rectæ compoſitæ ex AC & CD; CB vero æqualis rectæ compoſitæ ex DB & CD; ideo ſpatium, quod ſub recta continetur compoſita ex AC & CD, & ſub DB, æquale eſt ſpatio, quod continetur ſub AC, & recta compoſita ex DB & CD. Æquale eſt autem ſpatium, quod ſub recta continetur compoſita ex AC & CD, & ſub DB, ſpatio, quod continetur ſub AC & DB, & ſpatio, quod continetur ſub DB & CD: & ſpatium, quod continetur ſub AC, & recta compoſita ex DB & CD, æquale ſpatio, quod continetur ſub AC & DB, & ſpatio, quod continetur ſub AC & CD. Igitur ſpatium, quod continetur ſub AC & DB, & ſpatium, quod continetur ſub DB & CD, æqualia ſunt ſpatio, quod continetur ſub AC & DB, & ſpatio, quod continetur ſub AC & CD. Et communi ab utraque parte ablato,

ſpa-

spatium, quod continetur sub DB & CD, aequale est spatio, quod



continetur sub AC & CD. Hoc autem semper continget, quocunque tandem intervallo distent puncta C & D. Quod si intelligantur magis magisque invicem accedere, quousque alterum super alterum cadat, duo spatia continenter aequalia, quorum alterum sub AD & DB, alterum sub AC & CB continetur, in unum idemque spatium convenient. At vero cadentibus punctis C & D super tertium quoddam punctum G, aequalis fit CD nihilo ex CD orto. Igitur factum, cujus alterum latus est BG, alterum nihilum ex CD ortum, aequale est facto, cujus alterum latus est AG, alterum nihilum ortum ex CD. Igitur BG ad AG se habet, ut nihilum ex CD ortum ad nihilum ex CD ortum. Se habet autem nihilum ex CD ortum ad nihilum ex CD ortum, ut CD ad CD. Se habet igitur BG ad AG, ut CD ad CD; ideoque BG ipsi AG est aequalis. Quod quum ita sit, si secetur AB in duas aequas partes in puncto G, spatium, quod rectae AG applicatur, quadrata figura deficiens, quae describitur a BG, id ipsum erit, in quod duo spatia continenter aequalia, quorum alterum sub AD & DB, alterum sub AC & CB continetur, invicem conveniunt.

PROPOSITIO XXI.

Hisce positis, dico spatiorum omnium, quae figura quadrata deficientia rectae AB applicantur, id esse maximum, quod dimidiae ejus AG applicatur.

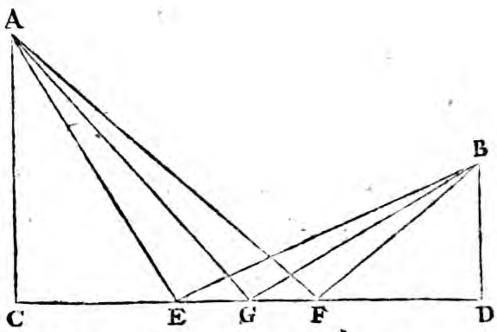
Si

Si enim minus, ſit ſpatium quod rectæ AD applicatur majori quam AG, quadrata figura deficiens, quæ deſcribitur a DB, majus ſpatio, quod applicatur ipſi AG, deficiente figura quadrata, quæ deſcribitur a BG. Quoniam igitur ſpatium, quod ſub AD & DB continetur, majus eſt ſpatio, quod continetur ſub AG & GB; atque eſt AG ipſi GB æqualis; ideo ſpatium, quod ſub AD & DB continetur, majus eſt quadrato, quod ab AG deſcribitur. Æquale eſt autem quadratum, quod ab AG deſcribitur, ſpatio, quod continetur ſub AD & DB, una cum quadrato, quod deſcribitur a GD. Igitur ſpatium, quod ſub AD & DB continetur, majus eſt ſpatio, quod continetur ſub AD & DB, una cum quadrato, quod deſcribitur a GD. Quod fieri non poteſt. Non eſt igitur ſpatium, quod rectæ AD applicatur majori quam AG, quadrata figura deficiens, quæ a BD deſcribitur, majus ſpatio, quod applicatur ipſi AG, deficiente figura quadrata, quæ deſcribitur a BG. Haud ſecus demonſtrabitur, neque ſpatium, quod rectæ applicatur minori quam AG, puta AC, quadrata figura deficiens, quæ deſcribitur a BC, eo, quod diximus, ſpatio majus eſſe. Igitur ſpatiorum omnium &c.

Vide figur. ſuperioris Propoſitionis.

PROPOSITIO XXII.

Si recta linea per planum agatur; & a duobus punctis, quæ in eodem fuerint plano, ad duo puncta ejus, quam diximus, lineæ duæ rectæ ita ducancantur, ut quadrata, quæ a binis describuntur, ad unum punctum coeuntibus, æqualia sint quadratis, quæ describuntur a binis coeuntibus ad alterum punctum; spatium definire, in quod duo, quæ diximus, quadrata duobus aliis continenter æqualia invicem conveniunt.



Si recta linea CD, & duo puncta in eodem, in quo ipsa est, plano A & B: ducanturque a punctis A & B ad puncta E & F lineæ CD duæ rectæ AE & EB, aliæque item duæ AF & FB, ita ut quadrata, quæ ab AE & EB describuntur, æqualia sint quadratis, quæ describuntur ab AF & FB. Oportet spatium definire, in quod duo, quæ diximus, quadrata duobus aliis continenter æqualia invicem conveniunt.

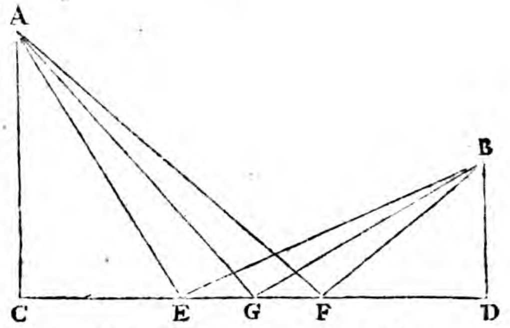
Ducantur a punctis A & B ad CD normales rectæ AC, BD. Quoniam igitur quadrata, quæ ab AE & EB describuntur, æqualia sunt quadradratis, quæ describuntur ab AF & FB: æquale est autem quadratum, quod ab AE describitur, quadratis, quæ describuntur ab AC & CE; & quadratum, quod describitur ab EB, æquale quadratis, quæ describuntur a DE, sive recta composita ex DF & FE, & a BD; & quadratum, quod describitur ab AF, æquale quadratis, quæ

descri-

deſcribuntur ab AC, & CF, ſive recta compoſita ex CE & EF; denique quadratum, quod deſcribitur ab FB, æquale quadratis, quæ deſcribuntur a DF & BD: ideo quadrata, quæ deſcribuntur tum ab AC, tum a CE, tum a recta compoſita ex DF & FE, tum a BD, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur tum ab AC, tum a recta compoſita ex CE & EF, tum ab FD, tum a BD. Æquale eſt autem quadratum, quod deſcribitur a recta compoſita ex DF & FE, quadratis, quæ deſcribuntur a DF & FE, & duplo ſpatii, quod continetur ſub DF & FE: & quadratum item, quod deſcribitur a recta compoſita ex CE & EF, æquale quadratis, quæ deſcribuntur a CE, & EF, & duplo ſpatii, quod continetur ſub CE & EF. Igitur quadrata, quæ deſcribuntur ab AC, & CE, & DF, & FE, & BD, una cum duplo ſpatii, quod continetur ſub DF & FE, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC, & CE, & FE, & DF, & BD, una cum duplo ſpatii, quod continetur ſub CE & FE. Et communibus ab utraque parte ablatis, duplum ſpatii, quod continetur ſub DF & FE, æquale eſt duplo ſpatii, quod continetur ſub CE & FE. Hoc autem ſemper continget, quocumque tandem intervallo diſtent puncta E & F. Quod ſi intelligantur magis magiſque invicem accedere, quouſque alterum ſuper alterum cadat, cadent utique AE ſuper AF, & BE ſuper BF; ideoque quadrata, quæ ab AE & EB, quæque ab AF & FB deſcribuntur, continenter æqualia in unum idemque ſpatium convenient. At vero cadentibus punctis E & F ſuper tertium quoddam punctum G, æqualis fit EF nihilo ex EF orto. Igitur factum, cujus al-

terum

terum latus est dupla ipsius DG, alterum nihilum ex EF ortum, æquale est facto, cujus alterum latus est dupla ipsius CG, alterum nihilum ortum ex EF. Igitur dupla ipsius DG ad duplam ipsius CG, sive DG ad CG, se habet ut nihilum ex EF ortum ad nihilum ex EF ortum. Se habet autem nihilum ex EF ortum ad nihilum ex EF ortum, ut EF ad EF. Se habet igitur DG ad CG, ut EF ad EF: ideoque DG ipsi CE est æqualis. Quod quum ita sit, si secetur CD in duas æquas partes in puncto G, ducanturque a punctis A & B ad G rectæ AG, BG; quæ ab ipsis describuntur quadrata, id spatium erunt, in quod quadrata, quæ ab AE & EB, quæque ab AF & FB describuntur, continenter æqualia invicem conveniunt.



PROPOSITIO XXIII.

Hisce positis, dico quadrata, quæ a rectis AG & GB describuntur, minima esse omnium, quæ describuntur a duabus aliis rectis a punctis A & B ad CD eodem modo ductis.

Si enim minus, sint quadrata, quæ ab AF & FB describuntur, minora quam quadrata, quæ describuntur ab AG & GB. Et primo quidem coeant ad partes D. Quoniam igitur quadrata, quæ ab AG & GB describuntur, æqualia sunt quadratis,

dratis, quæ deſcribuntur tum ab AC, tum a CG, tum a GD, tum a BD; quadrataque item, quæ ab AF & FB deſcribuntur, quadratis æqualia, quæ deſcribuntur tum ab AC, tum a CF, tum ab FD, tum a BD; ideo quadrata, quæ tum ab AC, tum a CG, tum a GD, tum a BD deſcribuntur, majora ſunt quadratis, quæ deſcribuntur tum ab AC, tum a CF, tum ab FD, tum a BD. Et communibus ab utraque parte ablatis, quadrata, quæ a CG & GD deſcribuntur, majora ſunt quadratis, quæ deſcribuntur a CF & FD. At vero æqualia ſunt quadrata, quæ a CG & GD deſcribuntur, duplo quadrati, quod a CG deſcribitur; quadrata vero, quæ deſcribuntur a CF & FD, æqualia duplo quadrati, quod deſcribitur a CG, una cum duplo quadrati, quod deſcribitur a GF. Igitur duplum quadrati, quod a CG deſcribitur, majus eſt quam duplum quadrati, quod deſcribitur a CG, una cum duplo quadrati, quod deſcribitur a GF. Quod fieri non poteſt. Non ſunt igitur quadrata, quæ ab AF & FB deſcribuntur, ſi eæ ad partes D coeant, minora quam quadrata, quæ deſcribuntur ab AG & GB. Haud ſecus demonſtrabitur, neque quadrata, quæ deſcribuntur ab AE & EB, quæ coeunt ad partes C, iis, quæ diximus, quadratis minora eſſe. Igitur quadrata &c.

Vide figur. ſuperioris Propoſitionis.

PROPOSITIO XXIV.

Si datæ rectæ lineæ æqualia duo ſolida applicentur, quæ cubica figura deficiant,

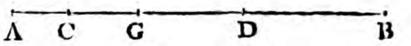
ficiant, ſolidum definire, in quod duo, quæ diximus, ſolida continenter æqualia invicem conveniunt.

Sit data recta linea AB; eique applicentur duo ſolida invicem æqualia, quorum quidem alterum baſim habeat quadratum, quod a CB deſcribitur, altitudinem AC, ac figura cubica deficiat, quæ a CB deſcribitur; alterum vero baſim habeat quadratum, quod deſcribitur a DB, & altitudinem AD, deficiatque figura cubica, quæ deſcribitur a DB. Oportet ſolidum definire, in quod duo, quæ diximus, ſolida continenter æqualia invicem conveniunt.

Quoniam ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod a CB deſcribitur, altitudo AC, æquale eſt ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, & altitudo AD: & CB quidem æqualis eſt rectæ compoſitæ ex DB & CD; AD vero æqualis rectæ compoſitæ ex AC & CD; ideo ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod a recta deſcribitur compoſita ex DB & CD, altitudo AC, æquale eſt ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, & altitudo recta compoſita ex AC & CD. Æquale eſt autem primum illud ſolidum tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod a DB deſcribitur, altitudo AC; tum ſolido, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub DB & CD, altitudo AC; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a CD, altitudo AC: hoc vero poſtremum æquale eſt tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod a

DB

DB deſcribitur, altitudo AC; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo CD. Igitur ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod a DB deſcribitur, altitudo AC; & ſolidum, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub DB & CD, altitudo AC; & ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a CD, altitudo AC, æqualia ſunt tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod a DB deſcribitur, altitudo AC; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo CD. Et communi ab utraque parte ablato, ſolidum, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub DB & CD, altitudo AC; & ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a CD, altitudo AC, æqualia ſunt ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo CD. Hoc autem ſemper continget, quocunque tandem intervallo diſtent puncta C & D. Quod ſi intelligantur magis magiſque invicem accedere, quouſque alterum ſuper alterum cadat, ut in puncto G, duo ſolida continenter æqualia, quorum alterum baſim habet quadratum, quod a CB deſcribitur, altitudinem AC; alterum baſim habet quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudinem AD, in unum idemque ſolidum convenient. At vero cadentibus punctis C & D ſuper tertium quoddam punctum G, æqualis fit CD nihilo ex CD orto. Igitur factum, cujus alterum latus eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub BG & AG, alterum nihilum ortum ex CD; & factum, cujus alterum latus eſt AG, alterum nihilum ortum ex CD in ſemetipſum ductum, æqualia ſunt facto, cujus alterum latus eſt quadratum, quod deſcribitur a BG, alterum nihilum ortum ex CD. At vero compa-



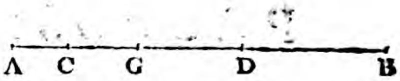
ratio facti, cujus alterum latus eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub BG & AG, alterum nihilum ex CD ortum, cum facto, cujus alterum latus eſt AG, alterum nihilum ortum ex CD in ſemetipſum ductum, diverſi generis eſt. Igitur neglecto ab altera parte facto, cujus alterum latus eſt AG, alterum nihilum ortum ex CD in ſemetipſum ductum, factum, cujus alterum latus eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub BG & AG, alterum nihilum ex CD ortum, æquale eſt facto, cujus alterum latus eſt quadratum, quod deſcribitur a BG, alterum nihilum ortum eſt CD. Igitur duplum ſpatii, quod continetur ſub BG & AG, ad quadratum, quod deſcribitur a BG, ſive dupla ipſius AG ad BG, ſe habet ut nihilum ex CD ortum ad nihilum ex CD ortum. Se habet autem nihilum ex CD ortum ad nihilum ex CD ortum, ut CD ad CD. Se habet igitur dupla ipſius AG ad BG, ut CD ad CD; ideoque dupla ipſius AG ipſi BG eſt æqualis. Quod quum ita ſit, ſi ſecetur AB in puncto G, ita ut GB dupla ſit ipſius AG, ſolidum, quod rectæ AG applicatur, cubica figura deficiens, quæ deſcribitur a BG, id ipſum erit, in quod duo ſolida continenter æqualia cubicis figuris eo, quo diximus, modo deficientia, quorum alterum baſim habet quadratum, quod a CB deſcribitur, altitudinem AC, alterum habet baſim quadratum, quod deſcribitur a DB, & altitudinem AD, invicem conveniunt.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

Hisce positis, dico solidorum omnium, quæ cubica figura deficientia rectæ AB applicantur, id esse maximum, quod parti ejusdem AB tertiæ, nempe ipsi AG, applicatur.

Si enim minus, sit solidum, quod rectæ AD applicatur majori quam AG, cubica figura deficiens, quæ a DB describitur, majus solido, quod applicatur ipsi AG, deficiente cubica figura, quæ describitur a GB. Quoniam igitur solidum, cujus basis est quadratum, quod a DB describitur, altitudo AD, majus est solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a GB, & altitudo AG: & æqualis quidem est AD rectæ compositæ ex AG & GD; GB vero æqualis rectæ compositæ ex DB & GD; ideo solidum, cujus basis est quadratum, quod a DB describitur, altitudo recta composita ex AG & GD, majus est solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a recta composita ex DB & GD, & altitudo AG. Æquale est autem primum illud solidum tum solido, cujus basis est quadratum, quod a DB describitur, altitudo AG; tum solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a DB, altitudo GD: hoc vero postremum æquale est tum solido, cujus basis est quadratum, quod a DB describitur, altitudo AG; tum solido, cujus basis est duplum spatii, quod continetur sub DB & GD, altitudo AG; tum solido, cujus basis est quadratum, quod describitur a GD, altitudo AG. Igitur solidum, cujus baſis eſt quadratum, quod a DB deſcribitur, altitudo AG; & ſoli-



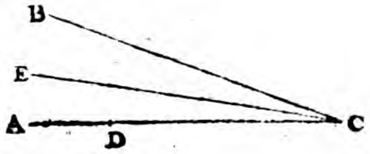
dum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo GD, majora ſunt tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod a DB deſcribitur, altitudo AG; tum ſolido, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub DB & GD, altitudo AG; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a GD, altitudo AG. Et communi ab utraque parte ablato, ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo GD, majus eſt tum ſolido, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod ſub DB & GD continetur, altitudo AG; tum ſolido, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a GD, altitudo AG. Eſt autem ſolidum, cujus baſis eſt duplum ſpatii, quod continetur ſub DB & GD, altitudo AG, æquale ſolido, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub DB & BG, altitudo GD: & ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a GD, altitudo AG, idem ac ſolidum, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub GD & AG, altitudo GD. Igitur ſolidum, cujus baſis eſt quadratum, quod deſcribitur a DB, altitudo GD, majus eſt utroque ſolido, tum illo, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub DB & BG, altitudo GD; tum illo, cujus baſis eſt ſpatium, quod continetur ſub GD & AG, altitudo GD. Quæ autem ſolida ſub eadem altitudine poſita ſunt, ea ſe invicem habent ut baſes. Igitur quadratum, quod deſcribitur a DB, majus eſt tum ſpatio, quod continetur ſub DB & BG, tum ſpatio, quod continetur ſub

GD

GD & AG. Æquale est autem spatium, quod continetur sub DB & BG, quadrato, quod describitur a DB, & spatio, quod continetur sub DB & GD. Igitur quadratum, quod a DB describitur, majus est tum quadrato, quod describitur a DB, tum spatio, quod continetur sub DB & GD, tum spatio, quod continetur sub GD & AG. Quod fieri non potest. Non est igitur solidum, quod rectæ AD applicatur majori quam AG, cubica figura deficiens, quæ a DB describitur, majus solido, quod applicatur ipsi AG, deficiente figura cubica, quæ describitur a GB. Haud secus demonstrabitur neque solidum, quod rectæ applicatur minori quam AG, puta AC, cubica figura deficiens, quæ a CB describitur, eo, quod diximus, solido majus esse. Igitur solidorum omnium &c.

PROPOSITIO XXVI.

Planorum angulorum rectilineorum minimus a duabus rectis lineis constituitur, quæ sese invicem contingentes altera super alteram cadunt.

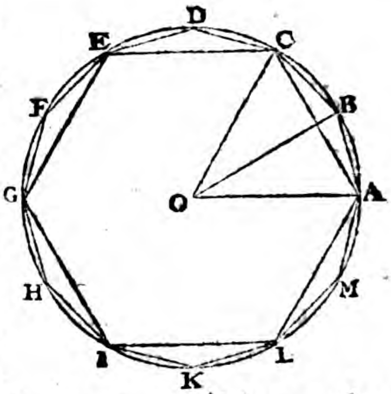


Sint duæ rectæ lineæ AC, CD sese invicem contingentes in puncto C, cadentesque altera super alteram. Dico rectas AC, CD minimum angulum constituere.

Si enim rectæ AC, CD minimum angulum non constituunt, constituent utique duæ aliæ rectæ, cujusmodi sunt AC, BC. Sumatur intra puncta A, B quodvis punctum E, ducaturque EC. Erit igitur angulus ACE minor angulo ACB. Est autem ACB angulus minimus. Est igitur ACE minor angulo minimo. Quod fieri non potest. Planorum igitur angulorum &c.

PROPOSITIO XXVII.

Si duo fuerint polygona æquilatera circulo inscripta: sumptoque latere in utroque polygono, ducantur ab ejus extremis ad centrum circuli duæ rectæ, quæ inæquales angulos ad idem centrum efficiant; id polygonum, in quo minor est angulus, plura habet latera quam polygonum, in quo est angulus major.



Sint duo polygona æquilatera circulo inscripta BDFHKM, ACEGIL. Et alterius quidem polygoni latus sit AB, alterius vero AC: ducanturque a punctis A, B, C rectæ AO, BO, CO, inæquales angulos efficientes, nempe angulum AOB angulo AOC minorem. Dico polygonum BDFHKM, in quo minor est angulus AOB, plura habere latera quam ACEGIL, in quo est angulus major AOC.

Quoniam enim circumferentiæ AB, AC angulis subjiciuntur ad centrum positis AOB, AOC, se invicem habebunt ut ipsi anguli. Itaque quum angu-

angulus AOB minor sit quam angulus AOC, minor erit & circumferentia AB quam circumferentia AC. At vero rectarum, quæ eidem circulo applicantur, quæ minori circumferentiæ subjicitur, minor est quam quæ subjicitur circumferentiæ majori. Igitur recta AB minor est quam AC. Est autem AB latus polygoni æquilateri BDFHKM; & AC latus polygoni æquilateri ACEGIL. Igitur polygonum BDFHKM plura habet latera quam polygonum ACEGIL. Si igitur duo fuerint polygona æquilatera &c.

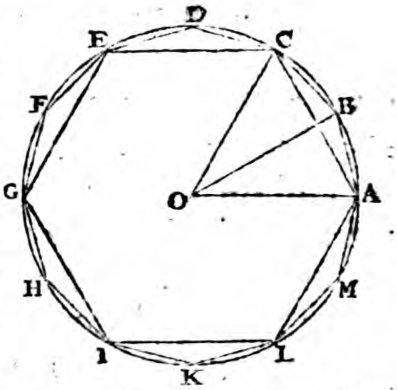
PROPOSITIO XXVIII.

Si circulo polygonum æquilaterum inscriptum fuerit, quod plura quam propositum aliud quodlibet latera habeat; quem angulum ad centrum circuli duæ rectæ comprehendunt, quæ ab extremis unius lateris hujus polygoni ad id centrum ducuntur, is erit minimus.

Vide figur. superioris Propositionis.

Sit circulus ADGK, cujus centrum O. Intelligatur autem huic circulo inscriptum esse polygonum æquilaterum, quale modo diximus, ductæque esse duæ rectæ ab extremis unius lateris ejusdem polygoni ad centrum O. Dico hasce rectas minimum angulum comprehendere.

Si enim minus, comprehendant angulum AOC majorem quam minimum; jungaturque AC. Erit igitur AC latus polygoni æquilateri circulo



ADGK inſcripti. Secetur circumferentia AC in duas æquas partes in puncto B, junganturque AB, BO. Et quoniam AC latus eſt polygoni æquilateri circulo inſcripti, cujuſmodi eſt ACEGIL, erit & AB latus polygoni ęquilateri inſcripti eidem circulo, cujuſmodi eſt BDFHKM. Duo ſunt igitur polygona æquilatera circulo ADGK inſcripta, BDFHKM, ACEGIL; ſumptiſque in primo polygono latere AB, in altero, latere AC, rectæ ab extremis A, B, C ductæ ſunt ad centrum circuli O, AO, BO, CO, quæ inæquales angulos efficiunt AOB, AOC, & quidem minorem angulum AOB quam AOC. Igitur polygonum BDFHKM plura habet latera quam polygonum ACEGIL. Habet autem polygonum ACEGIL plura latera quam aliud quodlibet propoſitum. Polygonum igitur BDFHKM plura adhuc habet latera, quam quod plura habet quam aliud quodlibet propoſitum. Quod fieri non poteſt. Si igitur circulo &c.

COROLLARIUM I.

Hinc manifeſtum eſt extrema lateris polygoni æquilateri, quod plura quam propoſitum aliud quodlibet latera habeat, invicem convenire. Ex quo illud ſequitur; hujuſmodi polygoni latus totum in ipſa circuli, in quo inſcriptum

ptum eſt, circumferentia cadere: ac propterea ejus perimetrum idem eſſe ac circuli circumferentiam.

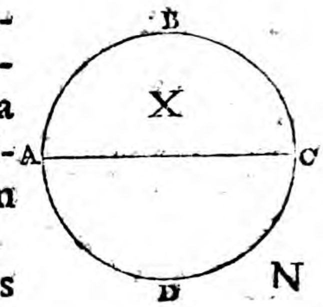
COROLLARIUM II.

Quoniam latus AC polygoni ACEGIL æquale eſt exceſſui, quo perimeter ACEGILA lineam excedit CEGILA; itemque latus AB polygoni ABCDEFGHIKLM æquale eſt exceſſui, quo perimeter ABCDEFGHIKLMA excedit lineam BCDEFGHIKLMA; patet latus polygoni æquilateri, quod plura quam aliud quodlibet propoſitum latera habeat, cujus extrema invicem conveniunt, exceſſui æquale eſſe, quo ejuſdem perimeter excedit ſemetipſam. Quare quum perimeter polygoni æquilateri, quod plura quam aliud quodlibet propoſitum latera habeat, eadem ſit ac circuli, in quo inſcriptum eſt, circumferentia, ejuſdem latus æquale erit exceſſui, quo circuli circumferentia ſemetipſam excedit, hoc eſt nihilo ex circuli circumferentia orto.

PRO-

PROPOSITIO XXIX.

Si circulo polygonum æquilaterum inſcriptum fuerit, quod plura quam propoſitum aliud quodlibet latera habeat, numerus laterum hujuſmodi polygoni erit infinitus.



Sit circulus ABCD, eique inſcriptum ſit polygonum æquilaterum X plura habens latera quam aliud quodlibet propoſitum. Dico numerum laterum polygoni X eſſe infinitum.

Si enim minus, ſit is finitus quilibet numerus N. Secetur autem circumferentia ABCD, ducta diametro AC, in duas æquas partes; & harum utraque in alias item duas; atque ita porro, donec harum partium numerus excedat numerum N (hoc enim ſemper fieri poterit); junganturque puncta, in quibus ſecta eſt circumferentia ABCD, rectis lineis. Erit igitur circulo ABCD inſcriptum polygonum æquilaterum plura habens latera quam polygonum X. At vero polygonum X plura habet latera quam aliud quodlibet propoſitum. Igitur polygonum æquilaterum, quod circulo ABCD inſcriptum eſt, plura adhuc habet latera quam quod plura habet quam aliud quodlibet propoſitum. Quod fieri non poteſt. Si igitur circulo &c.

CO-

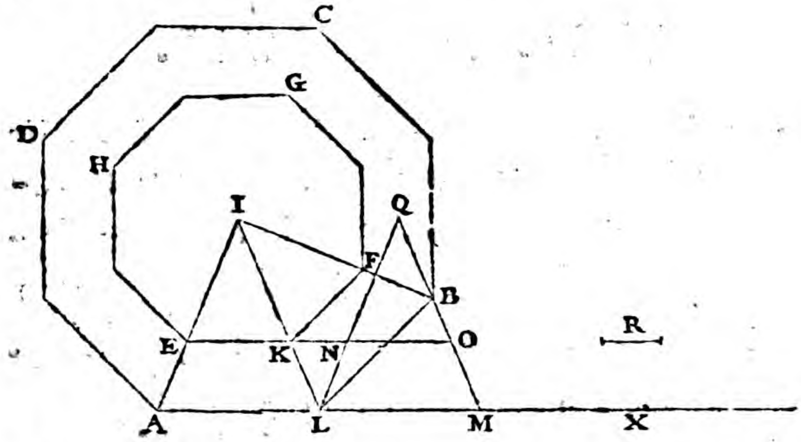
COROLLARIUM.

Quoniam vero demonſtratum eſt numerum infinitum eſſe $\frac{1}{1-1}$, numerus laterum polygoni æquilateri circulo inſcripti, quod plura quam propoſitum aliud quodlibet latera habeat, erit $\frac{1}{1-1}$.

PROPOSITIO XXX.

Si duo polygona æquilatera circa idem centrum deſcripta fuerint, ita ut latera parallela invicem habeant: majus autem polygonum uſque eo ſuper rectam lineam circumagatur, donec latera ejus omnia eidem applicuerit; minus polygonum rectam tranſmittet æqualem rectæ compoſitæ ex ejus perimetro, rectaque proportionali tum rectæ, quæ a communi polygonorum centro ad minoris polygoni angulum ducitur, tum exceſſui, quo rectæ ſeſe invicem excedunt, quæ ab eodem centro ducuntur ad angulos polygonorum, tum lateri minoris polygoni, atque hujuſmodi recta tam multiplici, quam multiplex eſt numerus laterum cujuſque polygoni.

Sint duo polygona æquilatera ABCD, EFGH de-



descripta circa idem centrum I, ita ut latera habeant invicem parallela AL, EK, LB, KF &c. ducaturque a centro I recta IL, quæ per punctum K transibit; & sit R æqualis rectæ proportionali ipsis IK, KL, EK. Circumagatur autem a puncto L polygonum LBCDA usque eo super rectam lineam LX lateri AL in directo jacentem, donec latera ejus omnia eidem applicuerit. Dico polygonum EFGH rectam transmittere æqualem rectæ compositæ ex sua perimetro, rectaque R tam multiplici, quam multiplex est numerus laterum ejusdem polygoni.

Ductis enim a centro I rectis IA, IB, quæ per puncta E & F transibunt, intelligatur polygonum ABCD latus LB rectæ LX applicuisse, ut locum id latus teneat LM. Et quoniam LB secum transfert triangulum LIB, istud quoque locum tenebit LQM: & propterea æquale erit & simile triangulo LIB, sive AIL. Producatur EK, eaque secet triangulum LQM in punctis N, O. Recta igitur KO ea ipsa est, quam polygonum EFGH transmittit, dum alterum polygonum ABCD latus LB rectæ applicat LX. Et quoniam angu-

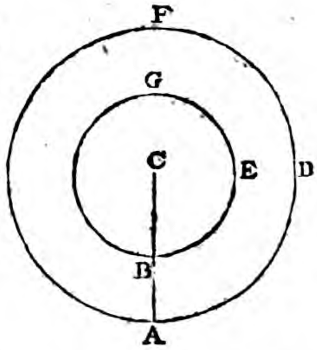
lus

lus NLM æqualis eſt angulo EAL, parallelæ ſibi invicem ſunt rectæ EA, NL. Sunt autem parallelæ ſibi invicem & rectæ AL, EN. Spatium igitur AN eſt parallelogrammum, ideoque EN æqualis eſt ipſi AL. Eodem modo demonſtrabitur & KO ipſi LM, ſive AL, æqualem eſſe. Æquales ſunt igitur inter ſe invicem rectæ EN, KO. Et communi ablata KN, æqualis eſt EK ipſi NO. Æqualis eſt autem EK ipſi KF. Æqualis eſt igitur ipſi KF etiam NO. Quoniam vero ſimilia invicem ſunt; propter rectas parallelas IE, NL, æqualeſque angulos ad verticem K poſitos; triangula EKI, NKL, ideo ut IK ad KL, ita ſe habebit EK ad KN: & propterea KN proportionalis erit rectis IK, KL, & EK. Eſt autem rectis iiſdem proportionalis etiam R. Eſt igitur KN ipſi R æqualis. Igitur KO æqualis eſt rectæ compoſitæ ex KF, rectaque R. At vero KO ea ipſa eſt, quam polygonum EFGH tranſmittit, dum alterum polygonum ABCD latus LB rectæ applicat LX. Quam igitur rectam polygonum EFGH eo, quo diximus, modo tranſmittit, ea æqualis eſt rectæ compoſitæ ex KF, rectaque R. Eadem ratione ſi polygonum ABCD rectæ LX latus applicuerit ipſi LB proximum, polygonum EFGH rectam tranſmittet ipſi KO æqualem. Quot ſunt igitur latera in polygono ABCD, totidem rectæ ipſi KO æquales tranſmittentur. At vero omnes hæ rectæ ſimul ſumptæ æquales ſunt perimetro polygoni EFGH, una cum recta R tam multiplici, quam multiplex eſt numerus laterum ejuſdem polygoni. Igitur polygonum EFGH rectam tranſmittit æqualem rectæ compoſitæ ex ſua perimetro, rectaque R tam multiplici, quam multiplex est numerus laterum ejusdem polygoni. Si duo igitur polygona æquilatera &c.

PROPOSITIO XXXI.

Si duo fuerint circuli inæquales; & fiat ut minoris circuli semidiameter ad ejus circumferentiam, ita excessus, quo semidiametri majoris minorisque circuli sese invicem excedunt, ad lineam quandam X; linea composita ex minoris circuli circumferentia, lineaque X æqualis erit circumferentiæ majoris circuli.

Sint duo circuli ADF, BEG, quorum centrum C; semidiametri, AC, BC. Fiat autem ut BC ad AB, ita circumferentia BEG ad X. Dico circumferentiam BEG, una cum X, æqualem esse circumferentiæ ADF.

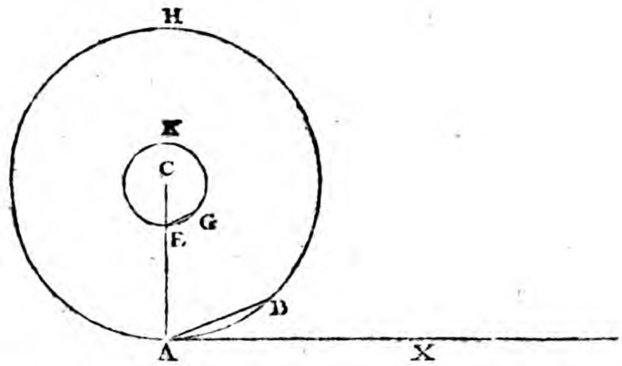


Quoniam enim BC se habet ad AB, ut BEG ad X, se habebit etiam invertendo, AB ad BC, ut X ad BEG. Et componendo, AC ad BC, ut X, una cum BEG, ad BEG. Se habet autem AC ad BC, ut ADF ad BEG. Se habet igitur ADF ad BEG, ut X, una cum BEG, ad BEG. Igitur X, una cum BEG, æqualis est ipsi ADF. Si igitur duo fuerint circuli &c.

PRO-

PROPOSITIO XXXII.

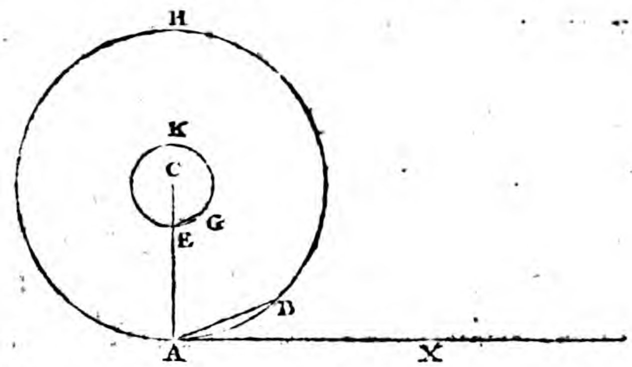
Si rota ſuper planum uſque eo circumagatur, donec quo ſui puncto id planum contingebat, eodem rurſus contingat, rotæ modiolus lineam deſcribet rotæ ipſius circumferentiæ æqualem.



Sit rota ABH, cujus centrum C, modiolus EGK; eaque contingat puncto ſui A planum AX. Circumagatur autem rota ABH uſque eo ſuper planum AX, donec eodem puncto A rurſus contingat idem planum AX. Dico modiolum EGK rectam deſcribere æqualem circumferentiæ ABH.

Intelligantur enim inſcripta eſſe circulis ABH, EGK polygona æquilatera, ita ut latera parallela invicem habeant, & ſit alterius quidem latus AB, alterius vero EG; ducaturque a centro C recta CEA. Conſtat utique ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt, ſi polygonum circulo ABH inſcriptum uſque eo ſuper rectam lineam circumagatur, donec latera ejus omnia eidem applicuerit, polygonum inſcriptum circulo EGK rectam

trans-



transmissurum æqualem lateri EG ducto in numerum compositum ex tot unitatibus, quot sunt latera ejusdem polygoni, rectæque proportionali ipsis CE, EA, EG ductæ in eundem numerum. Jam intelligantur circulis ABH, EGK inscripta esse duo hujusmodi polygona, quorum utrumque plura habeat latera quam aliud quodlibet propositum. Erit igitur numerus laterum utriusque polygoni infinitus: & polygonorum quidem perimetri æquales, altera circumferentiæ ABH, altera circumferentiæ EGK; latera vero æqualia unumquodque excessui, quo circumferentiæ ABH, EGK semetipsas excedunt. Itaque si polygonum circulo ABH inscriptum, hoc est circumferentia ABH, usque eo super rectam lineam circumagatur, donec quo sui puncto eandem lineam contingebat, eodem rursus contingat, polygonum inscriptum circulo EGK, hoc est circumferentia EGK, rectam transmittet, quæ quidem vocetur X, æqualem excessui, quo circumferentia EGK semetipsam excedit, ducto in numerum infinitum, & quarto proportionali ipsis CE, EA, & excessui, quem supra diximus. At vero excessus, quo circumferentia EGK semetipsam excedit, æqualis est nihilo ex eadem circumferentia

orto:

orto : numerus autem infinitus, $\frac{1}{1-1}$. Recta igitur x æqualis est nihilo orto ex circumferentia EGK, ducto in $\frac{1}{1-1}$, & quarto proportionali ipsis CE, AE, & nihilo orto ex circumferentia EGK, ducto in $\frac{1}{1-1}$. Æquale est autem nihilum ortum ex circumferentia EGK facto, cujus alterum latus est circumferentia ipsa EGK, alterum $1-1$. Igitur x æqualis est facto, cujus alterum latus est circumferentia EGK, alterum $1-1$, ducto in $\frac{1}{1-1}$, & quarto proportionali ipsis CE, AE, factoque, cujus alterum latus est circumferentia EGK, alterum $1-1$, ducto in $\frac{1}{1-1}$. At vero nihilum si semetipsum dividat, unitatem facit. Igitur x æqualis est circumferentiæ EGK, & quarto proportionali ipsis CE, AE, & circumferentiæ EGK. Æqualis est autem circumferentia EGK, & quarta, quam diximus, proportionalis circumferentiæ ABH. Igitur x circumferentiæ ABH est æqualis. Si igitur rota &c.

Ex his facile erit demonstrare, si rotæ modiolus super planum usque eo circumagatur, donec quo sui puncto id planum contingebat, eodem rursus contingat, rotæ circumferentiam rectam descripturam modioli circumferentiæ æqualem.

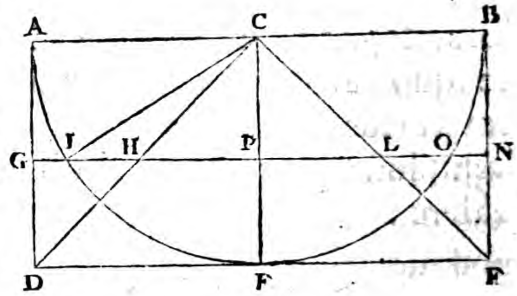
DEFINITIO.

Si parallelogrammum rectangulum, cui inscriptus sit semicirculus, atque triangulum in semicirculi centro verticem habens, circa rectam lineam, quæ majora parallelogrammi latera in duas æquas partes ſecat, tanquam axem circumagatur, quouſque eodem redeat, unde moveri cœpit; parallelogrammum utique ipſum cylindrum deſcribet; ſemicirculus, hemiſphærium; triangulum, conum. Quod ſi hemiſphærium a cylindro auferatur, relicto cono, quæ oritur, ſolida figura ſcutella vocetur.

PROPOSITIO XXXIII.

Si ſcutella plano ſecetur baſi parallelo, ſegmentorum baſes, tum ſcutellæ, tum coni, qui in ipſa eſt, ſibi invicem æquales ſunt.

Secetur enim ſcutella plano acto per axem CF. Et ſit cylindri quidem ſectio parallelogrammum ADEB; hemiſphærii vero, ſemicirculus AFB; denique coni, triangulum CDE. Communis autem planorum ſectio, tum ejus, quod per ſcutellæ axem agitur, tum ejus, quod agitur ſcutellæ baſi parallelum, ſit recta GN: quæ quidem & ſemicirculum AFB, & triangulum CDE, & axem CF in aliquo puncto ſecabit, quando hæ ſectiones, & ſcutellæ axis in eodem



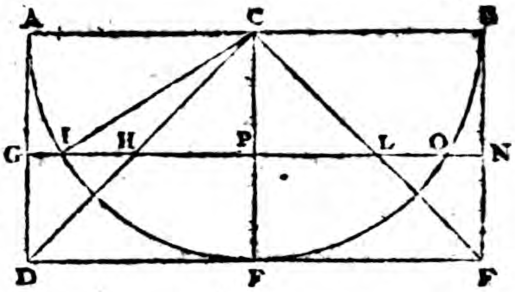
sunt

ſunt plano. Secet in punctis I, H, P. Dico baſim ſcutellæ ſegmenti, cujus ſectio eſt figura AGIONB æqualem eſſe baſi ſegmenti coni, cujus eſt ſectio figura CHL.

Jungantur enim puncta I, C recta IC. Et quoniam quadratum, quod ab IC deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ ab IP & CP deſcribuntur; rectæque IC æqualis eſt GP, & CP æqualis HP; ideo quadratum, quod a GP deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab IP & HP. Sit modo ratio, quam habet circulus quilibet ad quadratum, quod a ſua diametro deſcribitur, eadem atque ratio, quam M habet ad N. Atque erit quadratum, quod diximus, ductum in rationem, quam N habet ad M, quæ quidem vocetur X, ipſi circulo æquale. Itaque quadratum, quod a GP deſcribitur, in X ductum, nempe circulus, cujus ſemidiameter eſt GP, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab IP & HP, ductis item in X; nempe circulis, quorum ſunt ſemidiametri IP & HP. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab IP, in X ducto; nempe circulo, cujus ſemidiameter eſt IP; exceſſus, quo quadratum, quod a GP deſcribitur, quadratum excedit, quod deſcribitur ab IP, in X ductus; nempe exceſſus, quo circuli ſeſe invicem excedunt, quorum ſemidiametri ſunt GP & IP; æqualis eſt quadrato, quod deſcribitur ab HP, ducto in X, nempe circulo, cujus eſt ſemidiameter HP. Æqualis eſt autem alter exceſſus baſi ſcutellæ ſegmenti, alter baſi ſegmenti coni. Igitur baſis ſcutellæ ſegmenti æqualis eſt baſi ſegmenti coni. Si igitur ſcutella &c.

PROPOSITIO XXXIV.

Iisdem positis, si bases segmentorum scutellæ, & coni, altera in scutellæ oram, altera in coni verticem desinant, eæque secum invicem conferantur, comparatio est diversi generis.



Quoniam enim basis segmẽti scutellæ æqualis est excessui, quo quadratum, quod a GP describitur, quadratum excedit, quod describitur ab IP, in x ducto; si ea in scutellæ oram desinat, quando nimirum tam GP quam IP cum AC convenit, æqualis erit facto, cujus alterum latus est excessus, quo quadratum, quod a GP describitur, quadratum excedit, quod describitur a GP, alterum x. Rursus quoniam basis segmenti coni æqualis est quadrato, quod ab HP describitur, sive ab excessu, quo GP ipsam GH excedit, in x ducto; si ea in coni verticem desinat; quando nimirum tam GP quam GH cum AC convenit; æqualis erit facto, cujus alterum latus est excessus, quo GP excedit ipsam GP, in semetipsum ductus, alterum x. Itaque basis segmenti scutellæ, si in scutellæ oram desinat, ita confertur cum base segmenti coni, si desinat in coni verticem, ut factum, cujus alterum latus est excessus, quo quadratum, quod a GP descri-

bitur