IOSEPHI TORELLI
VERONENSIS
GEOMETRICA.

VERONÆ, MDCCLXIX.

Typis HEREDIS AVGVSTINI CARATTONI.

SUPERIORUM PERMISSU.

CAROLO GVILIELMO
CAR. BRVNSVICENSIVM DVCIS F.
NATV MAIORI

IOSEPHVS TORELLVS
S. P. D.

Cum Artaxerxes Persarum Rex, Carole Gvilielme optime Princeps, iter per ditionem suam aliquando faceret, eique omnes ex antiquo gentis instituto pro sua quisque facultate munera offerrent, ajunt pauperem nescio quem, cui forte obviam factus esset, haustam utraque manu è proximo *flumine aquam eidem obtulisse. Quo quidem munere adeo delectatus est, ut & illud sibi gratissimum fuisse statim significaverit, & regia mox liberalitate etiam rependerit. Nimirum is non tam rem sibi oblatam, quam ipsum offerentis studium voluntatemque spectavit. Hoc ego dum reputo, fieri non potest quin libellum hunc tuo nomini inscribens ad te alacer fidensque accedam, sperans fore ut tantula res tibi grata acceptaque sit. Quid ni enim sperem? cum inter tot ac tam singulares animi tui dotes humanitas & clementia maxime celebrentur. Nemo hercle ignorat quam præclara sit indoles tua, quamque excellens ingenium in arte præsertim, quæ te maxime digna est, idest homine ad imperandum nato. Artem bellicam dico, cujus haud ita pridem in Germania tot egregia specimina edidisti, cum sub* FERDINANDO *Principe patruo tuo, fortissimo duce, iuvenis adhuc ac prope puer stipendia faceres. Nam legionibus aliquot ab eodem præfectus, ut eam caussam, quam mox dii hominesque approbarunt, ipse quoque pro virili defenderes, duo munitissima oppida Boiam, & Mindam sub tuam potestatem redegisti, altero vi capto, altero ad dedi-*

tio-

tionem compulso, magnasque Saxonum Gallorumque copias parva interdum manu fudisti. Cum vero adversam aliquando fortunam expertus inferior ex acie discedere coactus es, non ita multo post in eandem rediisti, atque ita rediisti, ut victum non secus ac victorem tui te hostes metuerent. Attamen illi, cum oblata occasio est, rursus congressi, ac tunc quoque, ut sæpe antea, repulsi loco quidem cedebant, sed lenti ac prope minitabundi; cum repente nuncius allatus est te horrea occupasse, in quibus frumenta exercitui alendo necessaria condebantur. Tum vero demum fracti illorum animi, tantaque consternatione perculsi, ut in fugam se manifesto coniicerent, compluresque dies per montes ac silvas, eodem te mira illos celeritate insequente, fusi dispersique vagarentur. Hinc Mindensis regio, quæ jam diu Gallorum armis tenebatur, tua potissimum virtute liberata est, eorumque adeo accisæ vires, ut omnino desperata victoria nihil aliud postea cogitaverint quam quomodo in patrias sedes se tuto reciperent. Sane ex eo tempore nullum fere commiserunt prælium nisi lacessiti, ne illud quidem, quod ipsis prospere cessit, cum tu gravi saucius vulnere visus es *inter primos fortiter pugnans non Ducis solum, sed etiam militis officium implere. Hæc quidem talia ac tanta facinora in omnium ore ac sermone versantur; nihil tamen magis, quam animi tui moderatio, quod ob illa minime elatus quæsitam meritis superbiam non sumis. Cujus rei testes sunt cum exteræ nationes, tum præsertim Italia nostra, quam proximis annis sine ulla magnitudinis tuæ ostentatione peragrasti. Itaque cum Veronam primum accederes, nulli de tuo adventu; quippe vetaveras; nuncii præmissi sunt, urbemque ingressus es tacitus ac pene improvisus, sequentibus paucis, quos tibi privatum officium comites adjunxerat. Nec vero domus aliqua magnifice instructa te advenientem excepit, sed quamdiu apud nos commoratus es, in diversorio tanquam privatus egisti. Ex quo cum sæpius urbis lustrandæ gratia prodires, ita semper prodibas, ut unum te, non tuam dignitatem circumferres, omnium oculis expositus, nec aliis satellitibus quam tua majestate circumseptus. Scilicet nihil unquam tam superbum existimasti, quam tunc te hominibus subducere cum inter illos versaris. Itaque cuilibet*

libet de populo ſpectare licuit nobiliſſimum iuvenem, duorum maximorum Regum propinquum, armorumque gloria in ipſo ætatis flore vigentem, eoque avidius ſpectare, quod ex Ateſtina ortum familia non jam ut peregrinum aliquem contemplabantur, ſed ut proprium ac ſuum. Quod ſi quis propius accedere concupivit, teque ſecreto adire, quam non is facile prompteque eſt intromiſſus! Nul*lus illi janitor mercede exorandus fuit, nullus cubicularius prece blandiendus, nulla denique ex iis moleſtiis perferenda, quas homines ingenui in Principum aulis tantopere indignantur. Me quidem nullo commendabilem merito (juvat enim hoc quoque ad tuam laudem recenſere) ultro etiam ad te vocaſti, nec audentem multa loqui; quippe pudor prohibebat; blandiſſimis verbis compellando ad longiorem ſermonem pertraxiſti. Gaude igitur hoc tanto ſive naturæ, ſive doctrinæ, ſive potius utriuſque bono, humanitate, qua ut nulla virtus convenientior homini eſt, ita nulla etiam amabilior. Et quoniam hujus præcipua pars eſt, ut ait Plinius, honeſtiſſimum quemque complecti, accipe me in fidem &*

 clien-

clientelam tuam, vel potius, ut ipſe ſperare jubes, jam acceptum fac, ne ullo unquam tempore deſeras. Vale.

PRÆFATIO.

CVm aliquot ab hinc annis opusculum ederem de Nihilo Geometrico, videbar mihi non inutilem Geometriæ operam navasse, quod pulcherrimum sæculi superioris inventum, calculos scilicet differentialem, integralemque, adversus accusatores, quos adhuc habet, defendissem. Vt enim primo illo tempore, ita hodie quoque non desunt Geometræ non ignobiles, qui id principium, cui utrumque Leibnitius, ceu fundamento superstruxit, minime admittunt. Quocirca quæcumque illi inquirendo vestigant, ea nisi vera esse aliunde constet, si non falsa, certe dubia esse arbitrantur. Quorum in sententia cum ego quoque sim, & principium illud rejeci, & quod illi substitui aliud debeat, duobus libris demonstravi; sperans fore ut ab analyticæ artis studiosis gratia mihi aliqua referretur. Sed contra accidit. Nam hi duo libri non modo plausu excepti non sunt; quid enim mihi blandiar? sed ne digni quidem habiti, quorum mentio, nisi forte officii caussa, aliqua fieret. Ita factum est ut nullus mihi laboris atque industriæ fructus constiterit. Quid ego putem? contemptosne esse? Non video ita esse conscriptos, ut merito possint contemni. An nemo sibi persuasit, quod Leibnitius non viderit, id me longo intervallo minorem detexisse? Profecto; quando omnes fere præjudiciis ducimur, nec tam res, quam homines æstimamus. Quantulus ego sum, si cum illo comparer! Attamen sit suus veritati honos: quantitas infinite exigua, quam primus in Geometriam Leibnitius induxit, commentitia est, quatenus a nihilo est diversa, quod ego geometricum, opinor, haud absurde vocavi. Hinc principium illud omnino falsum: *duæ quælibet ejusdem generis magnitudines æquales invicem sunt, quæ quantitate infinite exigua inter se differunt*; cum ita verissime efferri debuisset: *duæ quælibet ejusdem generis magnitudi-*

tudi-

tudines æquales invicem ſunt, quæ inter ſe differunt nihilo. Hoc autem nihilum cujuſmodi ſit, & quomodo tractari debeat, iis libris, de quibus ſupra dixi, adeo diligenter oſtendi, ut ſi nunc aliquid adiicere velim, videar, quod proverbio dicitur, rem actam agere. Quoniam vero plerique ſunt, qui ſi quid paullo operoſius demonſtratum eſt, aſpernantur, nihilque pati poſſunt, quod diligentiam aliquam moramque requirat, horum ingenio, ne dicam deſidiæ, indulgendum putavi. Itaque cum per hos annos nonnulla problemata ſolverim, quæ ad rem maxime faciunt, ex his tria potiſſimum elegi, quibus ſpero me illis abunde poſſe ſatisfacere. Horum autem primum hujuſmodi eſt: *Datis in circulo duobus punctis, circulum deſcribere, qui per duo hæc puncta tranſiens eum, quem diximus, circulum contingat*. Alterum: *Datis duabus rectis lineis magnitudine ac poſitione, duo circuli ſegmenta ſimilia contrarioque modo poſita ſuper ipſas conſtituere, quæ ſeſe invicem contingant*. Tertium: *Dato in quadrataria ſcalena puncto aliquo, rectam lineam ducere, quæ*

qua-

quadratariam ſcalenam in eo puncto contingat. In hiſce omnibus quidam ſunt διορισμοὶ, ubi id, de quo quæritur, nihilum locum habet, quaſique ob oculos ponitur. Illud autem facile apparet, nihilum metaphyſicum, & geometricum; his enim nominibus utrumque diſtinxi; duo quædam eſſe longe inter ſe diverſa, ideoque non debere, quod hactenus factum eſt, ſimul confundi. Nimirum alterum generale eſt, alterum peculiare; illud unum ac ſimplex, hoc multiplex ac varium, atque ita varium, ut ſi duo hujuſmodi nihila invicem comparentur, modo reperiantur ejuſdem generis eſſe, modo diverſi. Sed quoniam parum erat hæc problemata ſolviſſe, niſi item demonſtrarem, utrumque feci, ingreſſus viam quam mihi analyſis præſcripſiſſet. Nam ita demum, quod propoſitum erat, conſequi poteram, ſi analyſeos veſtigiis inſiſterem. Quod quanti laboris fuerit, primum problema ſatis oſtendit, ſi cui illud libeat diligenter conſiderare. Ego quidem hac præſertim de cauſſa illud duobus modis demonſtravi. Præmittuntur

au-

autem demonſtrationes reſolutionibus ex veterum more atque inſtituto. Quas inter demonſtrationes tertium problema admonuit, ut pauca illa insererem, quæ de Dinoſtrati quadrataria affert Pappus ex quarto Collectionum Mathematicarum libro; præſertim cum Græca omnium primus edere poſſem ex Vaticanæ Bibliothecæ codice mſs. eaque a me diligenter emendata, addita inſuper latina verſione. Neque enim verſio Federici Commandini viſa eſt cum Græco textu in omnibus convenire, ut cuique facile apparebit, qui utramque ſimul contulerit. Quod de meo adjeci, a Dinoſtrato ac Pappo prætermiſſum, levius eſt quam ut memorari debeat. Poſtremo autem loco addere placuit theorema ſane pulcherrimum ad circulum pertinens, quod meus familiaris Franciſcus Ventrettus, vir in primis ſollers atque induſtrius, cum inveniſſet, mihi jam pridem demonſtrandum propoſuit. Atque hæc omnia in unum librum conjeci, eique, quod ita connexa non ſunt, ut unum ab altero pendeat, GEOMETRICA titulum feci. Sed jam nimis

mis multa præfati ſumus. Liber in veſtibulo adeſt, ſeque ultro legenti offert, ſatis ſuperque beatus, ſi cui placuerit ex illis,

quibus arte benigna
E meliore luto finxit præcordia Titan.

. . ὅ, τε γὰρ γνοὺς, κ̣ μὴ σαφῶς διδάξας, ἐν ἴσῳ εἰ κ̣ μὴ ἐνεθυμήθη. Thuc. de Bello Pelopon. Lib. II.

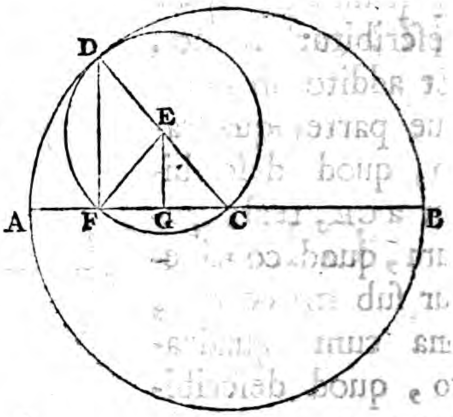
IOSEPHI TORELLI VERONENSIS GEOMETRICA.

PROPOSITIO I.

DAtis in circuli diametro duobus punctis, circulum describere, qui per duo hæc puncta transiens eum, quem diximus, circulum contingat. Hæc autem duo puncta aut ab alterutra centri parte cadent, aut ultra citraque centrum: & si quidem cadant ab alterutra centri parte, aut alterum in centrum incidet, aut neutrum; si vero cadant ultra citraque centrum, aut æqualiter ab eodem distabunt, aut inæqualiter.

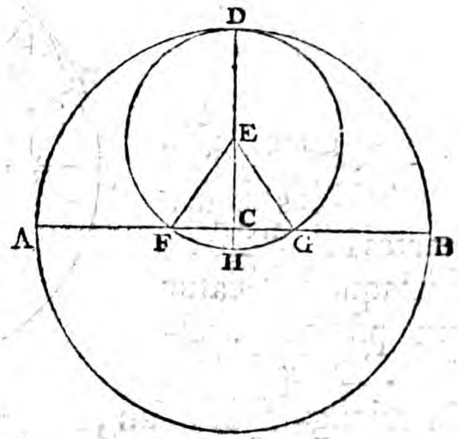
Sit circulus ADB, cujus diameter AB, centrum C, punctaque in eo data sint C & F, incidente utique puncto altero in centrum C. Oportet circulum describere, qui per puncta transiens C & F contingat circulum ADB.

Ducatur a puncto F ipsi AB ad rectos angulos recta DF, eaque occurrat circuli ADB circumferentiæ in puncto D; jungaturque recta CD. Secetur porro CF in duas æquas partes in puncto G, rectaque ducatur GE ipsi DF parallela. Et quoniam



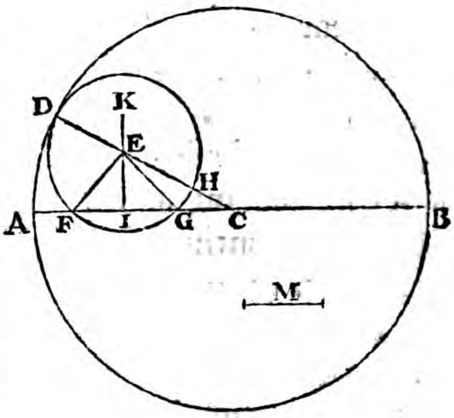
in triangulo CFD EG, DF parallelæ sibi invicem sunt, ut CG ad FG, ita se habet CE ad ED. Æqualis est autem CG ipsi FG. Æqualis est igitur & CE ipsi DE. Iungatur recta EF. Et quoniam in triangulis FGE, CGE latus FG æquale est lateri CG, & commune utrique latus EG, & adhuc anguli FGE, CGE uterque recti, erit utique & latus EF æquale lateri CE; ideoque rectæ etiam ED. Itaque si centro E, atque intervallo CE, circulus describatur, is per puncta F, D transibit. Describatur, isque sit circulus CDF. Qui quidem, ut infra demonstrabitur, circulum ADB in puncto D continget; quod semel monuisse sufficiat.

At vero data duo puncta F, G ultra citraque centrum C cadant, eaque a C æqualiter distent. Ducatur a centro C ipsi AB ad rectos angulos recta CD, eaque producta ad H, ita ut quam rationem habet CD ad CG, hanc habeat CG ad CH, secetur DH in duas æquas partes in puncto E, jungaturque recta EG. Quoniam igitur ut CD ad CG, ita se habet CG ad CH, erit utique rectangulum, quod continetur sub CD & CH, æquale le quadrato, quod deſcribitur a CG. Et addito ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur a CE, rectangulum, quod continetur ſub CD & CH, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a CG



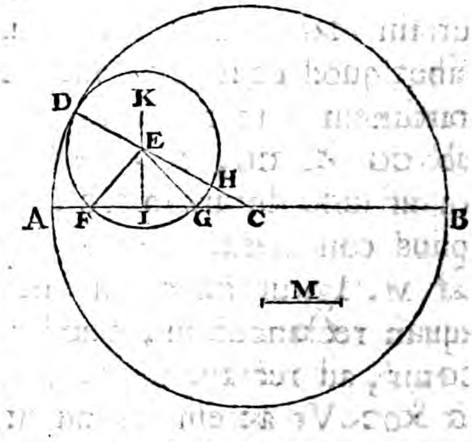
& CE. Æquale eſt autem rectangulum, quod continetur ſub CD & CH, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, quadrato, quod deſcribitur ab EH, ſive ED: æqualiaque item quadrata, quæ deſcribuntur a CG & CE, quadrato, quod deſcribitur ab EG. Æquale eſt igitur quadratum, quod ab ED deſcribitur, quadrato, quod deſcribitur ab EG; ideoque ED æqualis ipſi EG. Iungatur EF; quæ quidem, ut ſupra, demonſtrabitur ipſi EG æqualis. Itaque ſi centro E, atque intervallo EG, circulus deſcribatur, is per puncta F, D tranſibit. Deſcribatur, iſque ſit circulus FGD.

Cadant modo data duo puncta F, G ad centri C partes A, neutro in centrum incidente. Secetur FG in duas æquas partes in puncto I; ducaturque ab eodem ipſi FG ad rectos angulos recta infinita IK: & fiat ut rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CF &



CG, ita CG ad rectam aliquam, quæ vocetur M. Quoniam igitur AC major eſt quam CF, erit utique, ſumpta communi altitudine recta compoſita ex AC & CG, rectangulum, quod ſub AC rectaque compoſita ex AC & CG continetur, majus rectangulo, quod continetur ſub CF & recta compoſita ex AC & CG. Æquale eſt autem primum illud rectangulum quadrato, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub AC & CG; alterumque rectangulum æquale rectangulis, quæ continentur ſub AC & CF, & ſub CF & CG. Igitur quadratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub AC & CG, majus eſt rectangulis, quæ continentur ſub AC & CF, & ſub CF & CG. Auferantur utrinque rectangula, quæ continentur ſub AC & CG, & ſub CF & CG. Erit igitur exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CF & CG, major exceſſu, quo rectangula ſe ſe invicem excedunt, quæ continentur ſub AC & CF, & ſub AC & CG; hoc eſt rectangulo, quod continetur ſub AC & FG. Itaque ſumpto rectangulo, quod continetur ſub AB & CG, habebit rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod con-

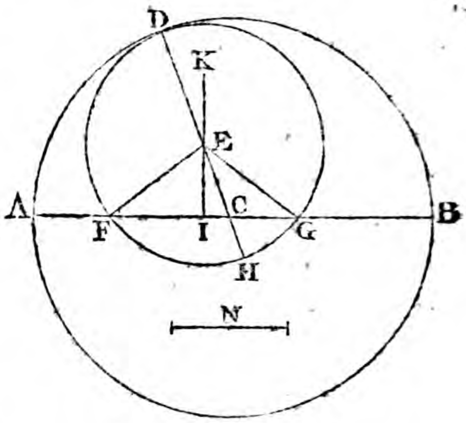
continetur ſub CF & CG, minorem rationem quam idem illud rectangulum habet ad rectangulum, quod continetur ſub AC & FG. Quam autem rationem habet rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetnr ſub CF & CG, hanc habet CG ad M. Igitur CG ad M minorem habet rationem quam rectangulum, quod ſub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AC & FG. Vt autem CG ad M, ita ſe habet rectangulum, quod ſub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AB & M, ſumpta communi altitudine AB. Igitur rectangulum, quod ſub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AB & M, minorem rationem habet quam rectangulum, quod ſub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AC & FG: ac propterea rectangulum, quod ſub AB & M continetur, majus eſt rectangulo, quod continetur ſub AC & FG. Igitur AB ad AC majorem rationem habet quam FG ad M. Eſt autem AB dupla ipſius AC. Eſt igitur FG minor quam dupla ipſius M; ideoque IG, quæ ipſius FG eſt dimidia, minor qnam M. Quod cum ita ſit, ſi centro G, atque intervallo recta linea ipſi M æquali, circulus deſcribatur, is rectam IK in puncto aliquo ſecabit. Secet in puncto E: ducaturque per id punctum circuli ADB ſemidiameter CD; & fiat ut CD ad CF, ita CG ad CH. Erit igitur rectangulum, quod ſub CH & CD continetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub CG & CF. Eſt autem quadratum, quod ab AC deſcribitur, qua-



drato æquale, quod deſcribitur a CD. Igitur æqualibus ab utraque parte ablatis, exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CG & CF, æqualis eſt exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur a CD, excedit rectangulum, quod continetur ſub CH & CD; hoc eſt rectangulo, quod continetur ſub DH & CD. Itaque ſumpto rectangulo, quod continetur ſub CG & CD, ut exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CG & CF, ad rectangulum, quod continetur ſub CG, & CD, ita ſe habet rectangulum, quod continetur ſub DH & CD, ad idem illud rectangulum. Se habet autem rectangulum, quod ſub DH & CD continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ut DH ad CG. Se habet igitur exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CG & CF, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ut DH ad CG. At vero rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub CG & CF, ſe habet ut CG ad EG. Eſt enim EG ipſi M æqualis. Igitur ex æqua eademque perturbata proportione, ut rectangulum, quod ſub AB &

CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ita ſe habet DH ad EG. Se habet autem rectangulum, quod ſub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ut AB ad CD. Se habet igitur AB ad CD, ut DH ad EG. Atqui AB dupla eſt ipſius CD. Igitur & DH ipſius EG eſt dupla. Iam vero cum quadratum, quod deſcribitur a CE, æquale ſit quadratis, quæ deſcribuntur ab EG & CG, & duplo rectanguli, quod continetur ſub IG & CG, hoc eſt rectangulo, quod continetur ſub CG & FG; erit utique quadratum, quod deſcribitur a CE, æquale quadratis, quæ deſcribuntur a dimidia ipſius DH & CG, rectanguloque, quod continetur ſub CG & FG. Æquale eſt autem quadratum, quod deſcribitur a CG, una cum rectangulo, quod continetur ſub CG & FG, rectangulo, quod continetur ſub CG & CF; hoc eſt ſub CH & CD. Quadratum igitur, quod deſcribitur a CE, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a dimidia ipſius DH, & rectangulo, quod continetur ſub CH & CD. Quare DH in puncto E in duas æquas partes ſecta eſt; ideoque rectæ DE, EH, EG ſunt inter ſe invicem æquales. Iungatur EF; quæ quidem, ut ſupra, demonſtrabitur æqualis ipſi EG. Itaque ſi centro E, atque intervallo EG, circulus deſcribatur, is per puncta F, D tranſibit. Deſcribatur, iſque ſit circulus FGD.

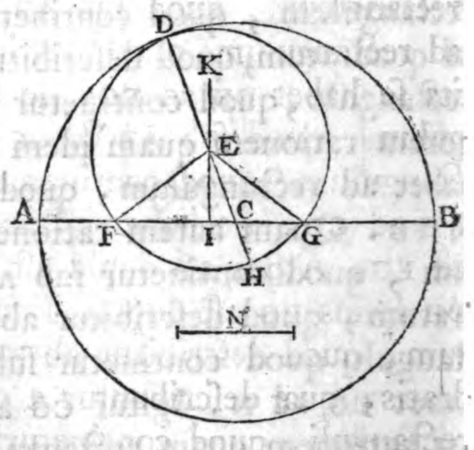
Cadant denique data duo puncta F, G ultra citraque centrum C, eademque a C inæqualiter diſtent. Secetur FG in duas æquas partes in puncto I; ducaturque ab eodem ipſi FG ad rectos angulos recta infinita IK: & fiat



ut rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad quadratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub CF & CG, ita CG ad rectam aliquam, quæ vocetur N. Quoniam igitur AC major eſt quam CF, erit utique, ſumpta communi altitudine BG, rectangulum, quod ſub AC & BG continetur, majus rectangulo, quod continetur ſub CF & BG. Æquale eſt autem primum illud rectangulum exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub AC & CG; alterumque rectangulum æquale item exceſſui, quo rectangula ſeſe invicem excedunt, quæ continentur ſub AC & CF; & ſub CF & CG. Igitur exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub AC & CG, major eſt exceſſu, quo rectangula ſeſe invicem excedunt, quæ continentur ſub AC & CF; & ſub CF & CG. Addantur ab utraque parte rectangula, quæ continentur ſub AG & CG; & ſub CF & CG. Erit igitur quadratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub CF & CG, majus rectangulis, quæ continentur ſub AC & CF; & ſub AC & CG, hoc eſt rectangulo, quod continetur ſub AC & FG. Itaque ſumpto rectangulo, quod continetur ſub AB & CG, habebit rectan-

rectangulum, quod continetur sub AB & CG, ad quadratum, quod describitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur sub CF & CG, minorem rationem quam idem illud rectangulum habet ad rectangulum, quod continetur sub AC & FG. Quam autem rationem habet rectangulum, quod continetur sub AB & CG, ad quadratum, quod describitur ab AC, una cum rectangulo quod continetur sub CF & CG, hanc habet CG ad N. Igitur CG ad N minorem habet rationem quam rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub AC & FG. Ut autem CG ad N, ita se habet rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub AB & N, sumpta communi altitudine AB. Igitur rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub AB & N, minorem rationem habet quam rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub AC & FG: ac propterea rectangulum, quod sub AB & N continetur, majus est rectangulo, quod continetur sub AC & FG. Igitur AB ad AC majorem rationem habet quam FG ad N. Est autem AB dupla ipsius AC. Est igitur FG minor quam dupla ipsius N; ideoque IG, quæ ipsius FG est dimidia, minor quam N. Quod cum ita sit, si centro G, atque intervallo recta linea ipsi N æquali, circulus describatur, is rectam IK in puncto aliquo secabit. Secet in puncto E: ducaturque per id punctum circuli ADB semidiameter CD; & fiat ut CD ad CF, ita CG ad CH. Erit igitur rectangulum, quod sub CH & CD

corcontinetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub CG & CF. Eſt autem quadratum, quod ab AC deſcribitur, quadrato æquale, quod deſcribitur a CD. Igitur æqualibus ab utraque parte additis, quadra-



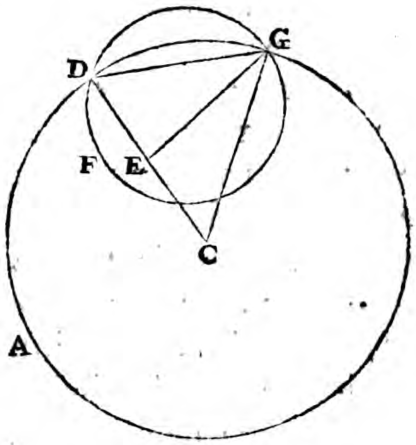
dratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub CG & CF, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a CD, una cum rectangulo, quod continetur ſub CH & CD; hoc eſt rectangulo, quod continetur ſub DH & CD. Itaque ſumpto rectangulo, quod continetur ſub CG & CD, ut quàdratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſnb CG & CF, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ita ſe habet rectangulum, quod continetur ſub DH & CD, ad idem illud rectangulum. Se habet autem rectangulum, quod ſub DH & CD continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ut DH ad CG. Se habet igitur quadratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub CG & CF, ad rectangulum, quod continetur ſub CG & CD, ut DH ad CG. At vero rectangulum, quod continetur ſub AB & CG, ad quadratum, quod deſcribitur ab AC, una cum rectangulo, quod continetur ſub CG & CF, ſe habet ut CG ad EG. Eſt enim EG ipſi N æqualis. Igitur ex æqua eademque perturbata proportione, ut re-

rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CG & CD, ita se habet DH ad EG. Se habet autem rectangulum, quod sub AB & CG continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CG & CD, ut AB ad CD. Se habet igitur AB ad CD, ut DH ad EG. Atqui AB dupla est ipsius CD. Igitur & DH ipsius EG est dupla. Iam vero cum quadratum, quod describitur ab EG, æquale sit quadratis, quæ describuntur a CE & CG, & duplo rectanguli, quod continetur sub IC & CG, erit utique quadratum, quod describitur a dimidia ipsius DH, æquale quadratis, quæ describuntur a CE & CG, & duplo rectanguli, quod continetur sub IC & CG. Æquale est autem quadratum, quod describitur a CG, una cum rectangulo, quod continetur sub dupla ipsius IC & CG, rectangulo, quod continetur sub CG & CF; hoc est sub CH & CD. Igitur quadratum, quod describitur a dimidia ipsius DH, æquale est quadrato, quod describitur a CE, & rectangulo, quod continetur sub CH & CD. Quare DH in punto E in duas æquas partes secta est; ideoque rectæ DE, EH, EG sunt inter se invicem æquales. Iungatur EF; quæ quidem, ut supra, demonstrabitur æqualis ipsi EG. Itaque si centro E, atque intervallo EG, circulus describatur, is per puncta F, D transibit. Describatur, isque sit circulus FGD. Datis igitur in circuli diametro duobus punctis; & quæ sequuntur. Quod oportebat facere.

LEM-

LEMMA.

Si duo circuli ſibi intus occurrant; & quæ recta linea eorum centra conjungit, producta, in occurſum incidat; hi duo circuli ſeſe invicem in occurſus puncto contingunt.



Occurrant ſibi intus duo circuli ADG, FDG; & recta CE, quæ eorum centra C, & E conjungit, producta incidat in D punctum occurſus. Dico circulos ADG, FDG in eodem occurſus puncto D ſeſe invicem contingere.

Si enim fieri poteſt, ſecent ſeſe invicem circuli ADG, FDG in punctis D & G; rectæque jungantur EG, CG, DG. Et quoniam CD æqualis eſt ipſi CG; erit utique in triangulo CDG angulus CDG æqualis angulo CGD. Eadem ratione quoniam ED ipſi EG eſt æqualis, erit itidem angulus EDG æqualis angulo EGD. Quare anguli CGD, EGD æquales ſibi invicem erunt, major minori; quod fieri non poteſt. Circuli igitur ADG, FDG ſeſe invicem non ſecant in punctis D, & G: ac propterea in occurſus puncto D ſeſe invicem contingunt. Si igitur duo circuli ſibi intus oc-

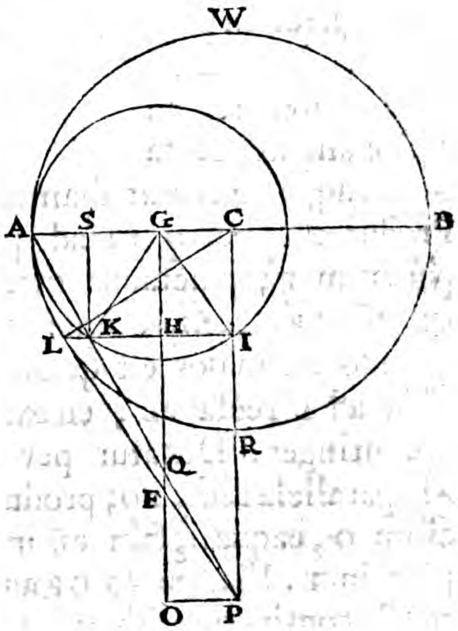
cur-

currant; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO II.

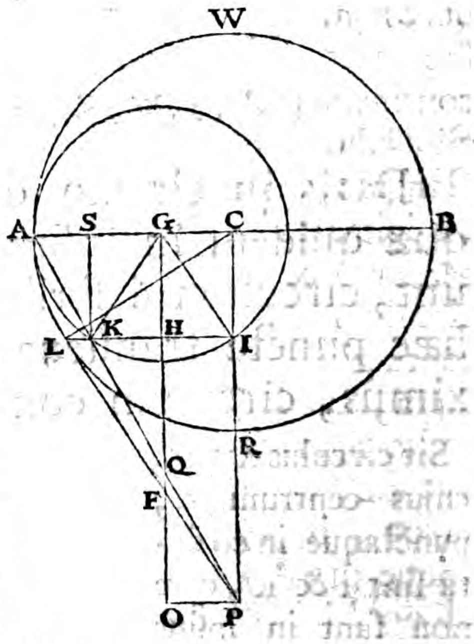
Datis in circulo duobus punctis, quæ quidem in ipsius diametro non sint, circulum describere, qui per duo hæc puncta transiens eum, quem diximus, circulum contingat.

Sit circulus AWBL, cujus centrum C, punctaque in eo data sint I & K, quæ non sunt in ipsius diametro. Oportet circulum describere, qui per puncta transiens I & K contingat circulum AWBL. Constat autem posse contingere ad partes sive W, sive L. Et primo ita describendus sit, ut contingat ad partes W.



Iungantur puncta I & K recta IK; actaque per centrum C diametro AB ipsi IK parallela, a punctis I & K ducantur eidem AB ad rectos angulos rectæ IC, KS. Cadent autem hæ rectæ aut ab alterutra centri parte, aut ultra citraque centrum: & si quidem cadant ab alterutra

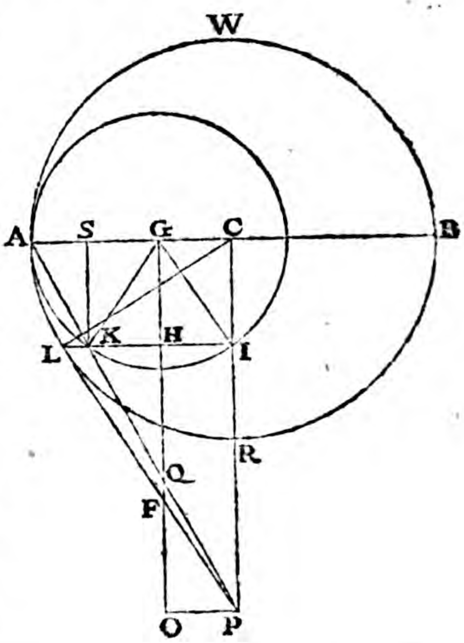
rutra centri parte, aut altera in centrum incidet, aut neutra; si vero cadant ultra citraque centrum, aut æqualiter ab eodem distabunt, aut inæqualiter. Incidat primo recta IC in centrum C; sectaque KI in duas æquas partes in puncto H, ducatur ab eodem ipsi KI ad rectos angulos recta



HG, eaque occurrat diametro AB in puncto G. Producatur porro KI ad punctum L, & CI ad punctum P; junctaque CL, fiat ut CI ad CL, ita CL ad CP. Erit utique CP major quam CR, quando CL major est quam CI; quæque a P ducitur ad L recta PL, circulum AWBL in puncto L continget. Ducatur per punctum P diametro AB parallela recta PO; producaturque GH ad punctum O, eaque ipsam PL in puncto aliquo secet, puta in F. Fiat modo OP ad OQ ut rectangulum, quod continetur sub CI & IK, ad quadratum, quod describitur ab IL. Et quoniam OF ad OP se habet ut IP ad IL, hoc est ut IL ad IC, aut sumpta communi altitudine IL, ut quadratum, quod describitur ab IL, ad rectangulum, quod continetur sub CI & IL; & OP ad OQ se habet ut rectangulum, quod continetur sub CI & IK, ad quadratum, quod describitur ab IL; ideo

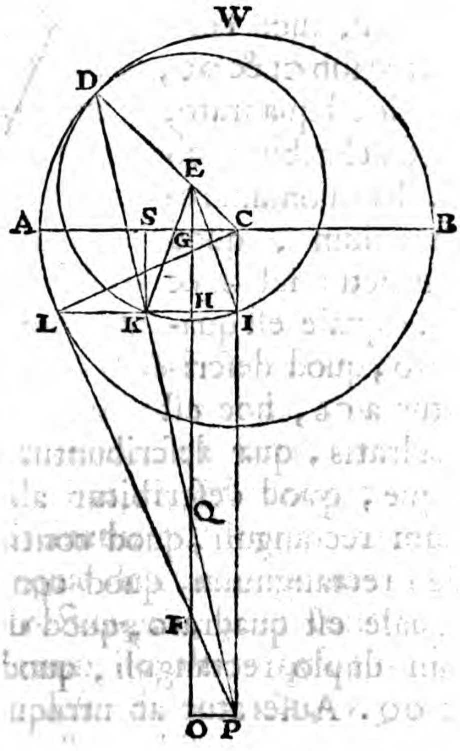
ideo ex æqua eademque perturbata proportione, ut OF ad OQ, ita se habet rectangulum, quod sub CI & IK continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CI & IL. Minus est autem rectangulum, quod sub CI & IK continetur, rectangulo, quod continetur sub CI & IL. Minor est igitur & OF quam OQ. Itaque si puncta jungantur P & Q recta linea, eaque producatur, circulum AWBL secabit, quando illum recta PL contingit. Cadet autem aut in puncto A, aut supra, aut infra. Cadat primo in A, ut in apposita figura; & jungatur GI. Et quoniam AC, sive CL, ad CP se habet ut OP ad OQ; & ut CL ad CP, ita CI ad CL, sive ad AC; se habebit utique CI ad AC ut OP ad OQ. At vero ut OP ad OQ, ita se habet rectangulum, quod continetur sub CI & IK, ad quadratum, quod describitur ab IL. Igitur CI ad AC se habet ut rectangulum, quod continetur sub CI & IK, ad quadratum, quod describitur ab IL. Vt autem CI ad AC, ita se habet, sumpta communi altitudine AC, rectangulum, quod continetur sub CI & AC, ad quadratum, quod describitur ab AC. Igitur rectangulum, quod continetur sub CI & AC, ad quadratum, quod describitur ab AC, se habet ut rectangulum, quod continetur sub CI & IK, ad quadratum, quod describitur ab IL. Et permutando, rectangulum, quod sub CI & AC continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CI & IK, hoc est AC ad IK, se habet ut quadratum, quod ab AC describitur, ad quadratum, quod describitur ab IL. Igitur IL media est proportionalis inter AC & IK; ideoque rectangulum, quod continetur sub AC & IK,

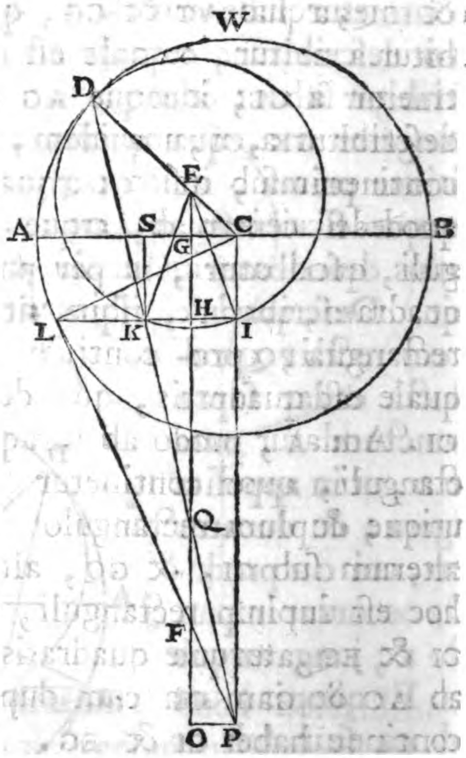
æqua-



æquale eſt quadrato, quod deſcribitur ab IL. Quoniam igitur quadratum, quod deſcribitur a CL, ſive ab AC, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab IL & CI; quadratoque, quod deſcribitur ab IL, æquale eſt rectangulum, quod continetur ſub AC & IK, hoc eſt duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & CG; ideo quadratum, quod deſcribitur ab AC, æquale eſt duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, una cum quadrato, quod deſcribitur a CI. Addatur ab utraque parte quadratum, quod deſcribitur a CG. Erunt utique quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CG, æqualia duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, una cum quadratis, quæ deſcribuntur a CI & CG, hoc eſt quadrato, quod deſcribitur a GI. At vero quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CG, æqualia ſunt duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, una cum quadrato, quod deſcribitur ab AG. Igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, una cum quadrato, quod deſcribitur ab AG, æquale eſt duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, una cum quadrato, quod deſcribitur a GI. Et ablato ab utraque parte duplo rectanguli, quod con-

continetur ſub AC & CG, quadratum, quod ab AG deſcribitur, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a GI; ideoque AG ipſi GI eſt æqualis. Iungatur GK, quæ quidem, ut ſupra in Propoſitione prima, ipſi GI æqualis demonſtrabitur. Itaque ſi centro G, atque intervallo GI, circulus deſcribatur, is per puncta K, A tranſibit. Deſcribatur, iſque ſit circulus IKA. At vero recta PQ producta cadat ſupra punctum A, puta in D, ut in appoſita figura; & ducatur CD, cui GH producta occurrat in puncto E; jungaturque EI. Et quoniam CI ad CL ſe habet ut CL ad CP, æqualiſque eſt CL ipſi CD; ſe habebit utique CI ad CD, ut CD ad CP. Se habet autem CD ad CP, ut DE ad EQ. Se habet igitur CI ad CD, ut DE ad EQ: ac propterea rectangulum, quod ſub CI & EQ continetur, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub CD & DE. Et quoniam dupla ipſius OP, hoc eſt IK, ad duplam ipſius OQ ſe habet ut rectangulum, quod continetur ſub CI & IK, ad quadratum, quod deſcribitur ab IL, ſe habebit utique, ſumpta communi altitudine CI, rectangulum, quod contine-

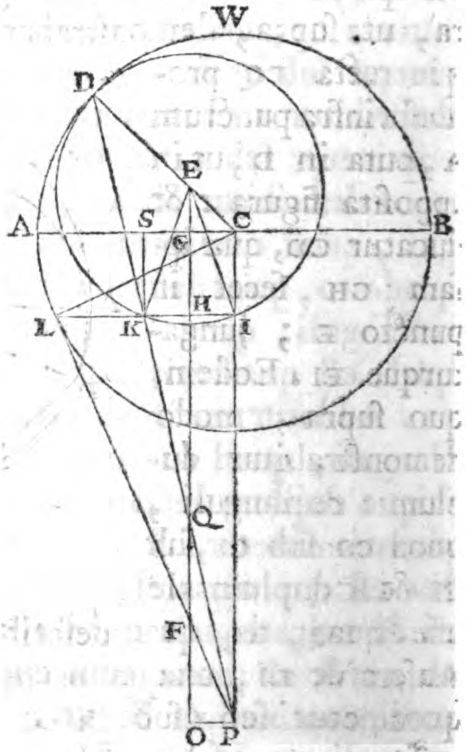




tur ſub CI & IK, ad duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & OQ, ut rectangulum, quod continetur ſub CI & IK, ad quadratum, quod deſcribitur ab IL. Igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & OQ, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur ab IL. Et quoniam rectangulum, quod continetur ſub CI & CP, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a CL, hoc eſt quadratis, quæ deſcribuntur a CI & IL; quadratoque, quod deſcribitur ab IL, æquale eſt duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & OQ; ideo rectangulum, quod continetur ſub CI & CP, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur ſub CI & OQ. Auferatur ab utraque parte rectangulum, quod continetur ſub CI & OQ. Erit utique exceſſus, quo rectangulum, quod ſub CI & CP continetur, excedit rectangulum, quod continetur ſub CI & OQ, hoc eſt rectangulum, quod continetur ſub CI & GQ, æqualis quadrato, quod deſcribitur a CI, una cum rectangulo, quod continetur ſub CI & OQ. Et ſumptis eorum duplis, duplum rectanguli, quod continetur ſub CI

& GQ,

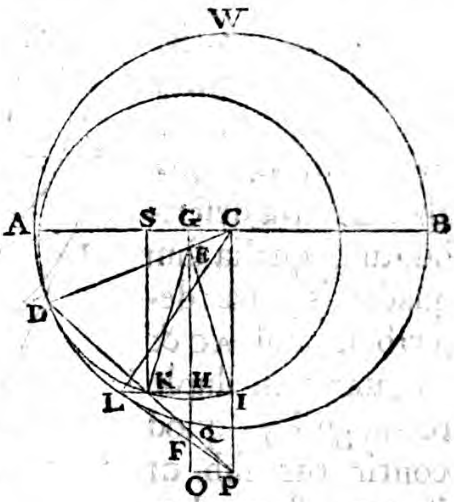
& GQ, æquale erit duplo quadrati, quod describitur a CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & OQ. At vero quadratum, quod describitur a CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub GI & OQ, æquale est quadrato, quod describitur ab AC; quando duplum rectanguli, quod continetur sub CI & OQ, æquale est quadrato, quod describitur ab JL. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, æquale est quadratis, quæ describuntur ab AC & CI. Addatur modo ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EG. Erit utique duplum rectangulorum, quæ continentur alterum sub CI, & GQ, alterum sub GI & EG, hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EQ, æquale quadratis, quæ describuntur ab AC & CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG. At vero duplum rectanguli, quod sub CI & EQ continetur, æquale est duplo rectanguli, quod continetur sub CD & DE; hoc enim supra demonstratum est. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, æquale est quadratis, quæ describuntur ab AC & CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG. Addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CE; ab altera vero quadrata eidem æqualia, quæ describuntur ab EG & CG. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CD, & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale quadratis, quæ describuntur ab AC & CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG, & quadratis, quæ describuntur ab EG & CG. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub



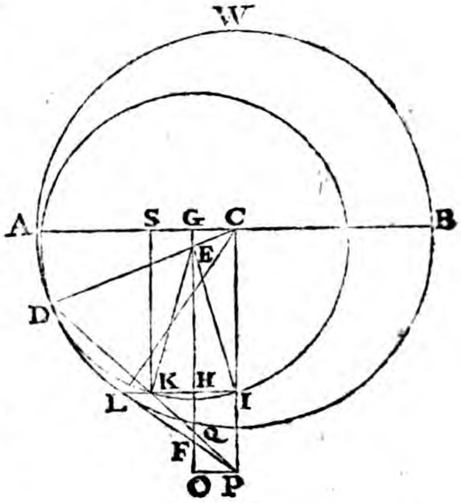
CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale est quadratis, quæ describuntur ab AC & DE. Igitur quadrata, quæ ab AC & DE describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur ab AC & CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG, & quadratis, quæ describuntur ab EG & CG. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur ab AC, quadratum, quod a DE describitur, æquale est quadrato, quod describitur a CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG, & quadratis, quæ describuntur ab EG & CG. At vero quadratum, quod describitur a CI, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CI & EG, & quadrato, quod describitur ab EG, æquale est quadrato, quod describitur ab EH. Igitur quadratum, quod a DE describitur, æquale est quadrato, quod describitur ab EH, quadratoque, quod describitur a CG, sive IH. Hæc autem quadrata quadrato æqualia sunt, quod describitur ab EI. Igitur quadratum, quod a DE describitur, æquale est quadrato, quod describitur ab EI; ideoque

DE

DE ipsi EI est æqualis. Iungatur EK; & cætera, ut supra, demonstrabuntur. Cadat denique recta PQ producta infra punctum A, puta in D, ut in apposita figura: & ducatur CD, quæ ipsam GH secet in puncto E; jungaturque EI. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, æquale



esse quadratis, quæ describuntur ab AC & CI. Auferatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EG. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CI & GQ continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EG, hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EQ, æquale excessui, quo quadrata, quæ describuntur ab AC & CI, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EG. At vero duplum rectanguli, quod sub CI & EQ continetur, æquale est duplo rectanguli, quod continetur sub CD & DE. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, æquale est excessui, quo quadrata, quæ describuntur ab AC & CI, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CI & EG. Addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CE; ab altera vero quadrata eidem æqualia, quæ describuntur ab

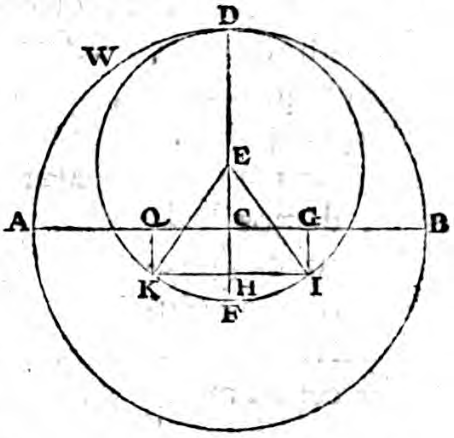


EG & CG. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur ſub CD & DE, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale exceſſui, quo quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CI, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & EG, una cum quadratis, quæ deſcribuntur ab EG & CG. At vero duplum rectanguli, quod continetur ſub CD & DE, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC & DE. Igitur quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & DE, æqualia ſunt exceſſui, quo quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CI, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & EG, una cum quadratis, quæ deſcribuntur ab EG & CG. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab AC, quadratum. quod a DE deſcribitur, æquale eſt exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur a CI, excedit duplum rectanguli, quod continetur ſub EI & CG, una cum quadratis, quæ deſcribuntur ab EG & CG. At vero exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur a CI, excedit duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & EG, una cum quadrato, quod deſcribitur ab EG, æqualis eſt quadrato, quod deſcribitur ab EH. Igitur quadratum, quod a DE deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur

ab

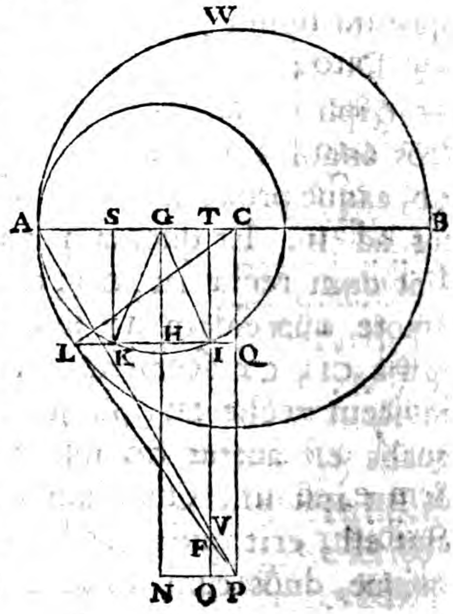
ab EH & CG, ſive IH, hoc eſt quadrato, quod deſcribiturab EI; ideoque DE ipſi EI eſt æqualis. Iungatur EK; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur.

At vero rectæ IG, KQ ultra citraque centrum C cadant, eædemque a C æqualiter diſtent, cujuſmodi ſunt in appoſita figura IG, KQ. Ducatur a centro C ipſi AB ad rectos angulos recta CD, eaque producatur ad H.



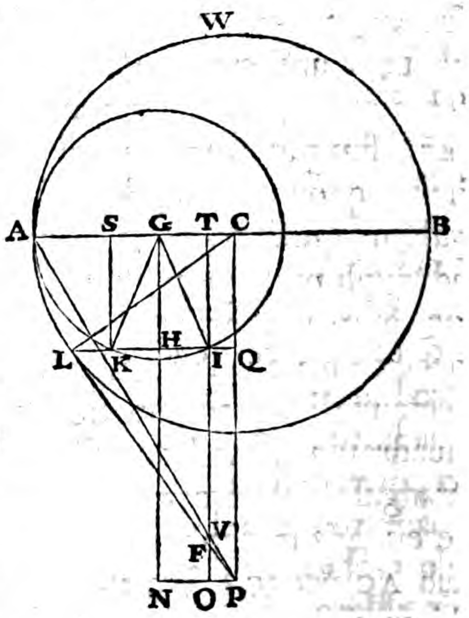
Et quoniam parallelæ ſibi invicem ſunt cum rectæ IK, GQ, tum rectæ IG, CH, KQ, utpote quæ eidem AB ſunt perpendiculares, ideo ſpatia CI, CK ſunt parallelogramma, æqualeſque invicem rectæ CQ ipſi HK, & CG ipſi HI. Æqualis eſt autem CQ ipſi CG. Æqualis eſt igitur & HK ipſi HI. Quoniam vero angulus HCG rectus eſt, erit quoque rectus eidem æqualis CHI, quique duos cum eo rectos facit CHK. Producatur modo recta CH ad F, ita ut quam rationem habet DH ad HI, hanc habeat HI ad HF; ſeceturque DF in duas æquas partes in puncto E, & jungatur EI. Quoniam igitur DH ad HI ſe habet ut HI ad HF, erit utique rectangulum, quod continetur ſub DH & HF, æquale quadrato, quod deſcribitur ab HI. Addatur ab utraque parte quadratum, quod deſcribitur ab EH; eritque rectangulum, quod continetur ſub DH, & HF, una cum quadrato, quod deſcribitur ab EH, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab HI, & EH. Æquale eſt autem rectangulum, quod continetur sub DH & HF, una cum quadrato, quod describitur ab EH, quadrato, quod describitur ab EF, sive ED: æqualiaque item quadrata, quæ describuntur ab HI & EH, quadrato, quod describitur ab EI. Æquale est igitur quadratum, quod ab ED describitur, quadrato, quod describitur ab EI; ideoque ED æqualis ipsi EI. Iungatur EK; & cætera, ut supra, demonstrabuntur.

Cadant modo rectæ IC, KS ad centri C partes A, neutra in centrum incidente, cujusmodi sunt in apposita figura IT, KS. Secetur IK in duas æquas partes in puncto H; ducaturque ab eodem ipsi IK ad rectos angulos recta HG, eaque occurrat diametro AB in puncto G; & rectæ HG



parallela ducatur a centro C recta CP. Producatur porro IK ab utraque parte ad puncta L & Q: junctaque CL, fiat ut CQ ad CL, ita CL ad CP; & recta ducatur PL, quæ quidem circulum AWBL in puncto L continget. Denique ducatur per punctum P diametro AB parallela recta PN; producanturque GH, IT ad puncta N, O, quarum altera IT ipsam PL in puncto aliquo secet, puta in F. Fiat modo OP ad OV, ut duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad quadradratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Et quoniam LH major est quam HK, æqualisque HK ipsi IH, erit utique LH major quam IH. Igitur quadratum, quod ab LH describitur, majus est quadrato, quod describitur ab IH. Et quoniam quadrata, quæ describuntur ab LQ & HQ, æqualia sunt duplo rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, & quadrato, quod describitur ab LH; quadratumque, quod describitur ab LH, majus est quadrato, quod describitur ab IH; ideo quadrata, quæ describuntur ab LQ & HQ, majora sunt quadrato, quod describitur ab IH, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur ab IH, quadratum, quod describitur ab LQ, una cum excessu, quo quadratum, quod ab HQ describitur, excedit quadratum, quod describitur ab IH, majus est duplo rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ. Æqualis est autem excessus, quo quadratum, quod ab HQ describitur, excedit quadratum, quod describitur ab IH, rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Igitur quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, majus est duplo rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ. Quoniam igitur OF ad OP se habet ut LQ ad CQ; & ut LQ ad CQ, ita, sumpta communi altitudine HQ, rectangulum, quod sub LQ & HQ continetur, ad rectangulum, quod continetur sub HQ & CQ, & duplum ad duplum; ideo OF ad OP se habet ut duplum rectanguli, quod sub LQ & HQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & CQ.

At



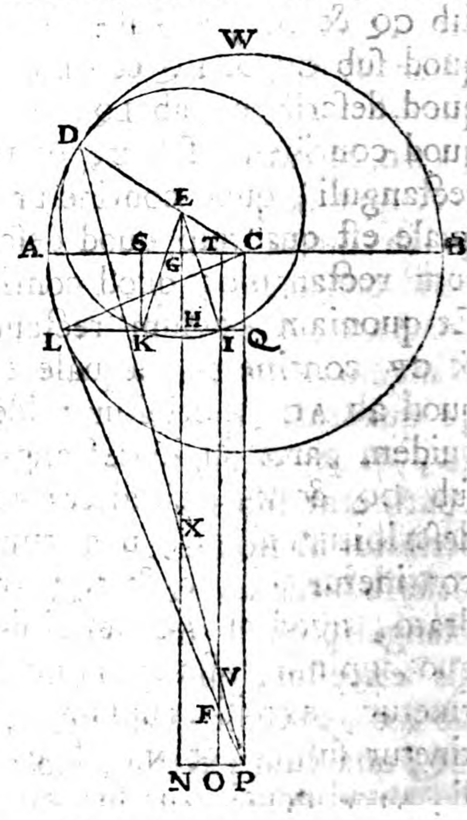
At vero OP ad OV se habet ut duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Igitur ex æqua eademque ordinata proportione, ut OF ad OV, ita se habet duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Minus est autem duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ quam quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Minor est igitur OF quam OV. Itaque si puncta jungantur P & V recta linea, eaque producatur, circulum AWBL secabit. Cadet autem aut in puncto A, aut supra, aut infra. Cadat primo in A, ut in apposita figura; & jungatur GI. Et quoniam AC, sive CL, ad CP se habet ut OP ad OV; & ut CL ad CP, ita CQ ad CL, sive ad AC; se habebit utique CQ ad AC ut OP ad OV. At vero OP ad OV se habet ut duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Igitur CQ ad AC se habet ut duplum rectanguli, quod continetur

sub

ſub CQ & HQ, ad quadratum, quod deſcribitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Vt autem CQ ad AC, ita ſe habet, ſumpta communi altitudine HQ, rectangulum, quod ſub CQ & HQ continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AC & HQ; & duplum ad duplum. Igitur duplum rectanguli, quod ſub CQ & HQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & HQ, ſe habet ut duplum rectanguli, quod ſub CQ & HQ continetur, ad quadratum, quod deſcribitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Æquale eſt igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & HQ, ſive CG, quadrato, quod deſcribitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Quoniam igitur quadrata, quæ ab AC & CG deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC & HQ, ideo ablato ab altera quidem parte duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, ab altera vero quadrato, quod deſcribitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ; nempe quadrato, quod deſcribitur ab LQ, a quadrato, quod deſcribitur ab AC; & rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, a quadrato, quod deſcribitur ab HQ; erit exceſſus, quo quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CG, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, æqualis exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit quadratum, quod deſcribitur ab LQ, una cum exceſſu, quo quadratum, quod deſcribitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero exceſſus, quo quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & CG, exce-

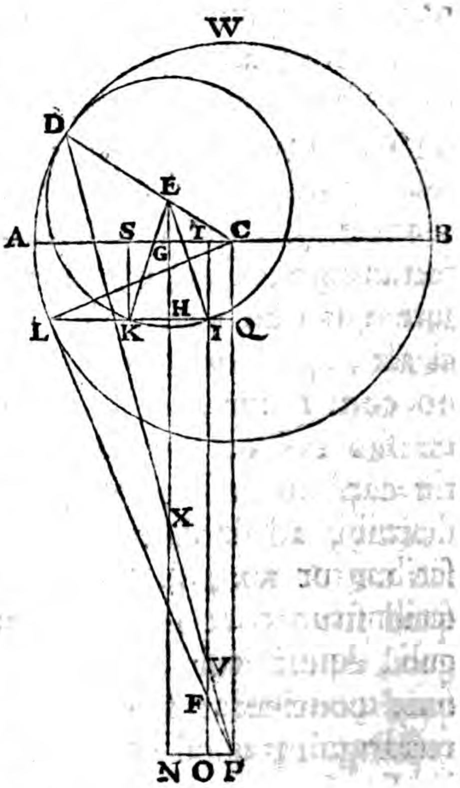
dunt

dunt duplum rectanguli, quod continetur sub AC & CG, æqualis est quadrato, quod describitur ab AG; & excessus, quo quadratum, quod ab AC describitur, excedit quadratum, quod describitur ab LQ, æqualis quadrato, quod describitur a CQ, sive a GH; denique excessus, quo quadratum, quod describitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ, æqualis quadrato, quod describitur ab IH. Igitur quadratum, quod ab AG describitur, æquale est quadratis, quæ describuntur a GH & IH, hoc est quadrato, quod describitur a GI; ideoque AG ipsi GI est æqualis. Iungatur GK; & cætera, ut supra, demonstrabuntur. At vero recta PV producta cadat supra punctum A, puta in D, ut in apposita figura: & ducatur CD, cui GH producta occurrat in puncto E; jungaturque EI. Et quoniam CQ ad CD se habet ut CD ad CP; & ut CD ad CP, ita DE ad EX; se habebit utique CQ ad CD ut DE ad EX: ac propterea rectangulum, quod sub CQ & EX continetur, æquale est rectangulo, quod continetur sub CD & DE. Quoniam vero NP, sive HQ, ad NX se habet ut OP ad OV; & ut OP ad



OV,

OV, ita duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ; ideo HQ ad NX se habet ut duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Ut autem HQ ad NX, ita se habet, sumpta communi altitudine CQ, rectangulum, quod sub CQ & HQ continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CQ & NX; & duplum ad duplum. Igitur duplum rectanguli, quod sub CQ & HQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, se habet ut duplum rectanguli, quod sub CQ & HQ continetur, ad quadratum, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ; ideoque duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, æquale est quadrato, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Et quoniam duplum rectanguli, quod sub CQ & CP continetur, æquale est duplo quadrati, quod ab AC describitur; ideo ablato ab altera quidem parte duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, ab altera vero quadrato, quod describitur ab LQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ; utroque scilicet a quadrato, quod ab AC describitur; erit excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & CP continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & NX; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX; æqualis excessui, quo quadratum, quod ab AC describitur, excedit quadratum, quod describitur ab LQ, hoc est



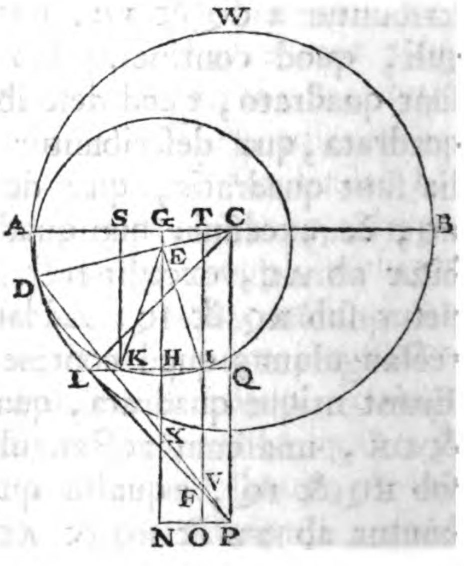
est quadrato, quod describitur a CQ, una cum excessu, quo idem illud quadratum, quod ab AC describitur, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Addatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & EG. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & EG; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & EX; æquale quadrato, quod describitur a CQ, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & EG, atque excessu, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod sub CQ & EX continetur, æquale est duplo rectanguli, quod continetur sub CD & DE. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, æquale est quadrato, quod describitur a CQ, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & EG, atque excessu, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Addantur rursus ab altera quidem

par-

parte quadratum, quod deſcribitur a CE, ab altera vero quadrata, quæ deſcribuntur ab EG & CG, ſive HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur ſub CD & DE, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale tum quadratis, quæ deſcribuntur a CQ & EG, tum duplo rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG, tum quadrato, quod deſcribitur ab HQ, tum exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur ſub CD & DE, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC & DE: & quadrata, quæ deſcribuntur a CQ & EG, una cum duplo rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG, æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur ab EH. Igitur quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & DE, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & HQ, & exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Addatur ab utraque parte rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Erunt utique qnadrata, quæ deſcribuntur ab AC & DE, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æqualia quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & HQ & AC. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab AC, erit quadratum, quod deſcribitur a DE, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & HQ. Addatur rurſus ab utraque parte quadratum, quod deſcribitur ab IH: eritque quadratum, quod deſcribitur a DE, una cum rectangulo, quod conti-

tine-

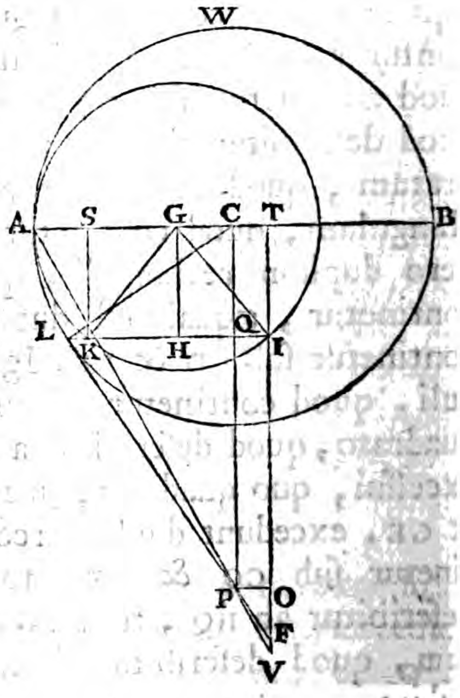
tinetur sub KQ & IQ, quadratoque, quod describitur ab IH, æquale quadratis, quæ describuntur ab EH & HQ & IH. Æquale est autem rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ, una cum quadrato, quod describitur ab IH, quadrato, quod describitur ab HQ. Igitur quadrata, quæ a DE, & HQ describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur ab EH & HQ & IH. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur ab HQ, quadratum, quod describitur a DE, æquale est quadratis, quæ describuntur ab EH & IH, hoc est quadrato, quod describitur ab EI; ideoque DE ipsi EI est æqualis. Iungatur EK; & cætera, ut supra, demonstrabuntur. Cadat denique recta PV producta infra punctum A, puta in D, ut in apposita figura: & ducatur CD, quæ ipsam GH secet in puncto E; jungaturque EI. Eodem, quo supra, modo demonstrabitur duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, æquale esse quadrato, quod describitur a CQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CE, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a GE & CG, sive HQ. Erit utique du-



duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum quadrato quod describitur a CE, æquale quadratis, quæ describuntur a CQ & GE & HQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Auferatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, ab altera quidem a duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, ab altera vero a quadratis, quæ a CQ & GE describuntur. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & EX, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum excessui, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod sub CQ & EX continetur, æquale est duplo rectanguli, quod continetur sub GD & DE. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale est tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum excessui, quo quadratum, quod describitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub GD & DE, una cum quadrato, quod describitur a

CE, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC & DE: & exceſſus, quo quadrata, quæ deſcribuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GE, æqualis eſt quadrato, quod deſcribitur ab EH. Igitur quadrata, quæ deſcribuntur ab AC & DE, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & HQ, & exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab AC, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Demonſtrabitur autem, ut paullo ante, quadratum, quod a DE deſcribitur, æquale eſſe quadrato, quod deſcribitur ab EI; ideoque DE ipſi EI eſſe æqualem. Iungatur EK; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur.

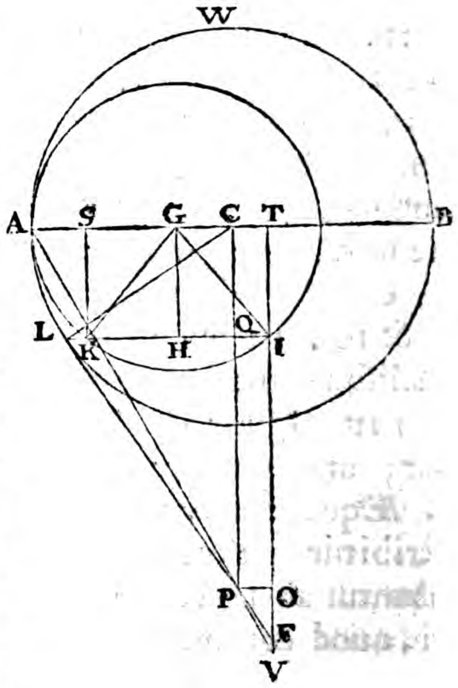
Cadant denique rectæ IC, KS ultra citraque centrum C, eædemque a C inæqualiter diſtent, cujuſmodi ſunt IT, KS in appoſita figura. Secetur IK in duas æquas partes in puncto H; ducaturque ab eodem ipſi IK ad rectos angulos recta HG, quæ quidem occurrat diametro AB in puncto G; rectæque HG parallela ducatur a centro C recta CP. Producatur



porro IK ad punctum L: junctaque CL, fiat ut CQ ad CL, ita CL ad CP; & recta ducatur PL, quæ

quæ quidem circulum AWBL in puncto L continget. Denique ducatur per punctum P diametro AB parallela recta PO, quæ ipsi IT productæ occurrat in puncto O; producaturque PL ad punctum F. Fiat modo OP ad OV ut duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HQ, ad excessum, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Et quoniam LH major est quam HK, æqualisque HK ipsi IH, erit utique LH major quam IH. Igitur quadratum, quod ab LH describitur, majus est quadrato, quod describitur ab IH. Æquale est autem quadratum, quod ab LH describitur, excessui, quo quadrata, quæ describuntur ab LQ & HQ, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ. Igitur excessus, quo quadrata, quæ describuntur ab LQ & HQ, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, majus est quadrato, quod describitur ab IH. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur ab HQ, excessus, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, major est excessu, quo quadratum, quod ab IH describitur, excedit quadratum, quod describitur ab HQ. Æqualis est autem excessus, quo quadratum, quod ab IH describitur, excedit quadratum, quod describitur ab HQ, rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Igitur excessus, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, major est rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Et addito ab utraque parte duplo rectanguli, quod continetur sub HQ & LQ, quadratum, quod de-

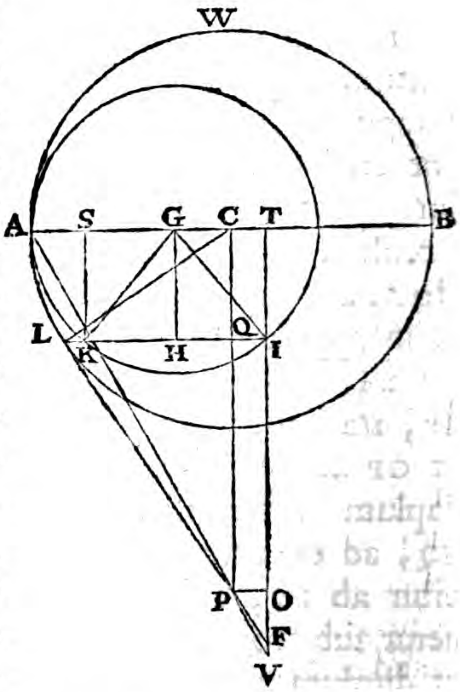
 scri-



ſcribitur ab LQ, majus eſt rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, una cum duplo rectanguli, quod continetur ſub HQ & LQ. Et ablato ab utraque parte rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ, majus eſt duplo rectanguli, quod continetur ſub HQ & LQ. Quoniam igitur OF ab OP ſe habet ut LQ ad CQ; & ut LQ ad CQ, ita ſumpta communi altitudine HQ, rectangulum, quod ſub HQ & LQ continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub CQ & HQ; & duplum ad duplum; ideo OF ad OP ſe habet ut duplum rectanguli, quod ſub HQ & LQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ. At vero OP ad OV ſe habet ut duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Igitur ex æqua eademque ordinata proportione, ut OF ad OV, ita ſe habet duplum rectanguli, quod continetur ſub HQ & LQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ.

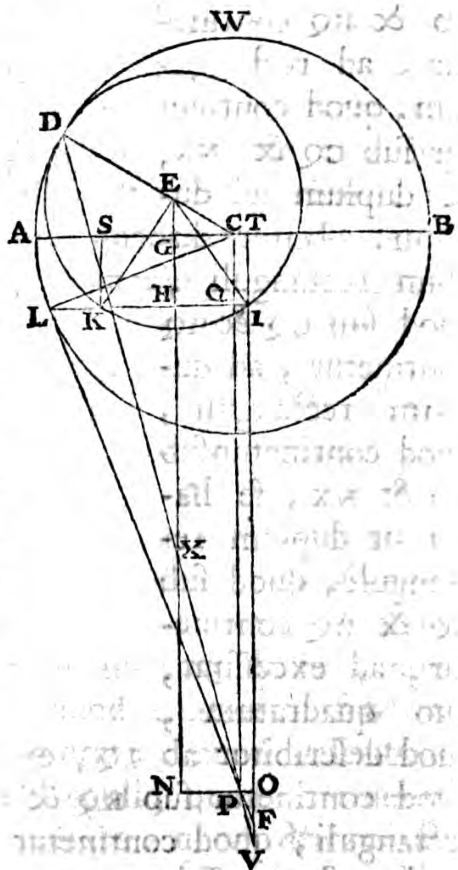
Mi

Minus eſt autem duplum rectanguli, quod continetur ſub HQ & LQ, quam exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Minor eſt igitur & OF quam OV. Itaque ſi puncta jungantur P & V recta linea, eaque producatur, circulum AWBL ſecabit. Cadet autem aut in puncto A, aut ſupra, aut infra. Cadat primo in A, ut in appoſita figura; & jungatur GI. Et quoniam AC ad CP ſe habet ut OP ad OV; & ut AC ad CP, ita CQ ad AC; ſe habebit utique CQ ad AC ut OP ad OV. At vero OP ad OV ſe habet ut duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Igitur CQ ad AC ſe habet ut duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Vt autem CQ ad AC, ita ſe habet, ſumpta communi altitudine HQ, rectangulum, quod continetur ſub CQ & HQ, ad rectangulum, quod continetur ſub AC & HQ; & duplum ad duplum. Igitur duplum rectanguli, quod ſub CQ & HQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & HQ, ſe habet ut duplum rectanguli, quod ſub CQ & HQ continetur, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Æquale eſt igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & HQ, ſive CG, exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Quoniam igitur quadra-

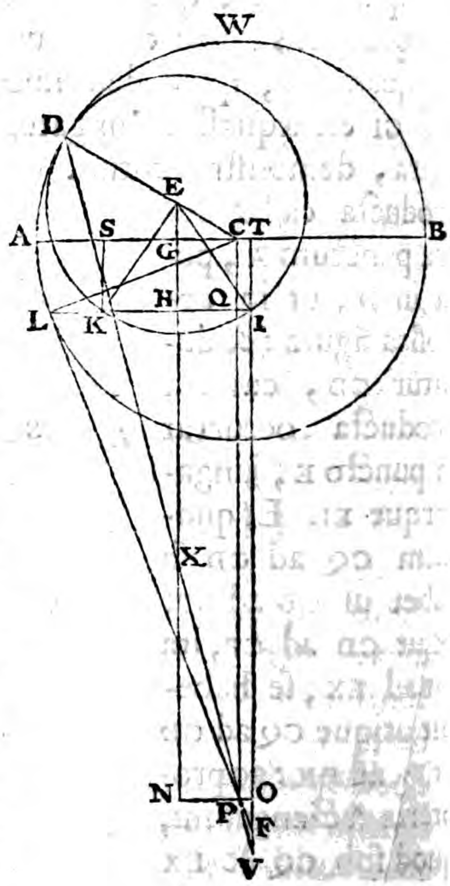


ta, quæ ab AC & CG deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab AC & HQ, ideo ablato ab altera quidem parte duplo rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, ab altera vero exceſſu, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ; erit exceſſus, quo quadrata, quæ ab AC & CG deſcribuntur, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, æqualis tum exceſſui, quo quadratum, quod ab AC deſcribitur, excedit quadratum, quod deſcribitur ab LQ, tum quadrato, quod deſcribitur ab HQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero exceſſus, quo quadrata, quæ ab AC & CG deſcribuntur, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub AC & CG, æqualis eſt quadrato, quod deſcribitur ab AG; & exceſſus, quo quadratum, quod ab AC deſcribitur, excedit quadratum, quod deſcribitur ab LQ, æqualis quadrato, quod deſcribitur a CQ, ſive a GH; denique quadratum, quod deſcribitur ab HQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æquale quadrato, quod deſcribitur ab IH. Igitur

tur quadratum, quod ab AG deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a GH & IH; hoc eſt quadrato, quod deſcribitur a GI; ideoque AG ipſi GI eſt æqualis. Iungatur GK; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur. At vero recta PV producta cadat ſupra punctum A, puta in D, ut in appoſita figura: & ducatur CD, cui GH producta occurrat in puncto E; jungaturque EI. Et quoniam CQ ad CD ſe habet ut CD ad CP; & ut CD ad CP, ita DE ad EX; ſe habebit utique CQ ad CD ut DE ad EX: ac propterea rectangulum, quod ſub CQ & EX continetur, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub CD & DE. Quoniam vero NP, ſive HQ, ad NX

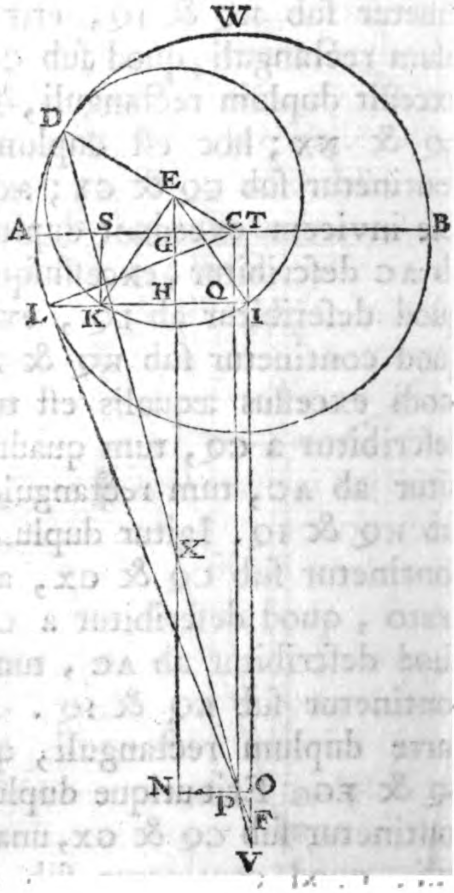


ſe habet ut OP ad OV; & ut OP ad OV, ita duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ; ideo HQ ad NX ſe habet ut duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & HQ, ad exceſſum, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ.



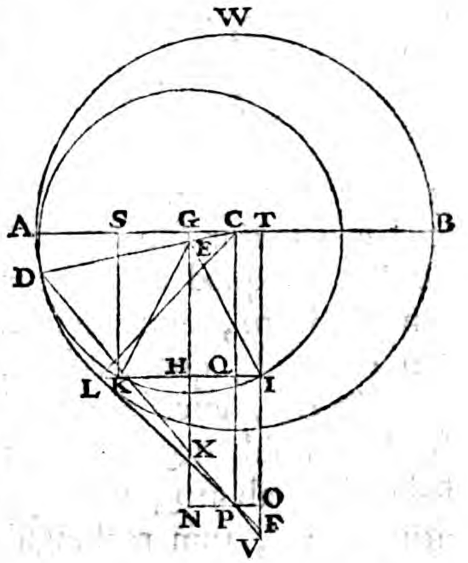
Vt autem HQ, ad NX, ita se habet, sumpta communi altitudine CQ, rectangulum, quod sub CQ & HQ continetur, ad rectangulum, quod continetur sub CQ & NX; & duplum ad duplum. Igitur duplum rectanguli, quod sub CQ & HQ continetur, ad duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, se habet ut duplum rectanguli, quod sub CQ & HQ continetur, ad excessum, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ, ideoque duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, æquale est excessui, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Et quoniam duplum rectanguli, quod sub CQ & CP continetur, æquale est duplo quadrati, quod ab AC describitur, ideo ablato ab altera quidem parte duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & NX, ab altera vero excessu, quo quadratum, quod describitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur-tinetur ſub KQ & IQ, erit exceſſus, quo duplum rectanguli, quod ſub CQ & CP continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & NX; hoc eſt duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX; æqualis exceſſui, quo ſeſe invicem excedunt duplum quadrati, quod ab AC deſcribitur, exceſſuſque, quo quadratum, quod deſcribitur ab LQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero hujuſmodi exceſſus æqualis eſt tum quadrato, quod deſcribitur a CQ, tum quadrato, quod deſcribibitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX, æquale eſt tum quadrato, quod deſcribitur a CQ, tum quadrato, quod deſcribitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Addatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX, una cum duplo rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG; hoc eſt duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & EX; æquale tum quadrato, quod deſcribitur a CQ, tum duplo rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG, tum quadrato, quod deſcribitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod ſub CQ & EX continetur, æquale eſt duplo rectanguli, quod continetur ſub CD & DE. Igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub CD & DE, æquale eſt tum quadrato, quod deſcribitur a CQ, tum duplo rectanguli, quod continetur ſub CQ & EG, tum quadrato, quod deſcribitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ

&

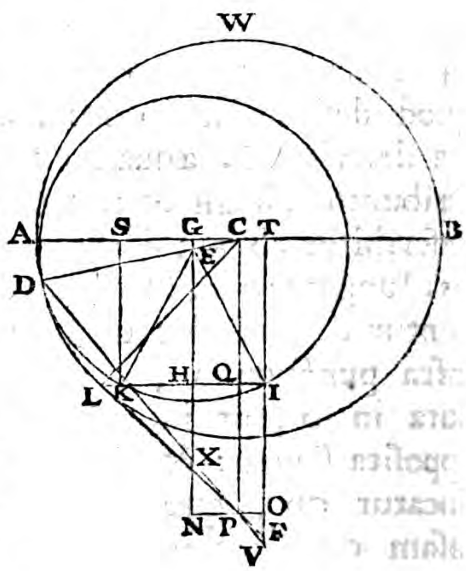


& IQ. Addantur rursus ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CE, ab altera vero quadrata, quæ describuntur ab EG & CG, sive HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale tum quadratis, quæ describuntur a CQ & EG, tum duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & EG, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum quadrato, quod describitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale est quadratis, quæ describuntur ab AC & DE; & quadrata, quæ describuntur a CQ & EG, una cum duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & EG, æqualia sunt quadrato, quod describitur ab EH; denique quadratum, quod describitur ab HQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, æquale est quadrato, quod describitur ab IH. Igitur qua-

quadrata, quæ ab AC & DE deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & IH & AC. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab AC, quadratum, quod a DE deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab EH & IH; hoc eſt quadrato, quod deſcribitur ab EI; ideoque DE ipſi EI eſt æqualis. Iungatur EK; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur. Cadat denique recta PV producta infra punctum A, puta in D, ut in appoſita figura: & ducatur CD, quæ ipſam GH ſecet in puncto E; jungaturque EI. Eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX, æquale eſſe tum quadrato, quod deſcribitur a CQ, tum quadrato, quod deſcribitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Addantur ab altera quidem parte quadratum, quod deſcribitur a CE, ab altera vero quadrata, quæ deſcribuntur ab EG & CG, ſive HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX, una cum quadrato, quod deſcribitur a CE, æquale tum quadratis, quæ deſcribuntur a CQ & GE & HQ & AC, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. Auferatur ab utraque parte



te



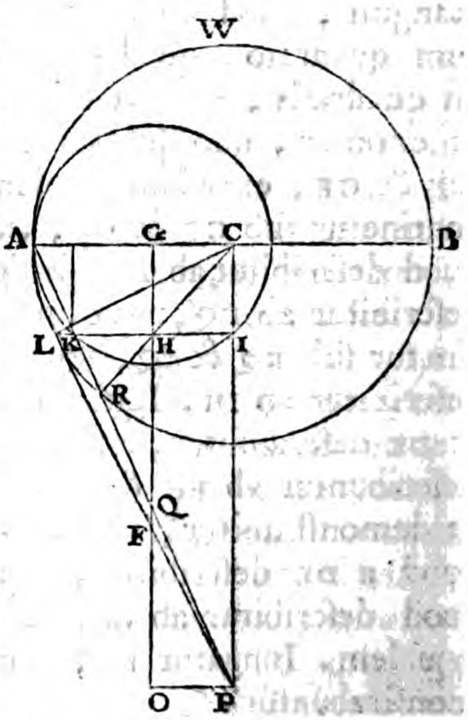
te duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, ab altera quidem a duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, ab altera vero a quadratis, quæ a CQ & GE describuntur. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & EX; una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur snb CQ & GE, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum quadrato, quod describitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & EX, æquale est duplo rectanguli, quod continetur sub CD & DE. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale est tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum quadrato, quod describitur ab AC, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum re-

ctan-

ctanguli, quod continetur sub CD & DE, una cum quadrato, quod describitur a CE, æquale est quadratis, quæ describuntur ab AC & DE; & excessus, quo quadrata, quæ describuntur a CQ & GE, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GE, æqualis est quadrato, quod describitur ab EH; denique quadratum, quod describitur ab HQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, æquale est quadrato, quod describitur ab IH. Igitur quadrata, quæ ab AC & DE describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur ab EH & IH & AC. Quod cum ita sit demonstrabitur, ut paullo ante, quadratum, quod a DE describitur, æquale esse quadrato, quod describitur ab EI; ideoque DE ipsi EI esse æqualem. Iungatur EK; & cætera, ut supra, demonstrabuntur.

Iam vero circulus per puncta transiens I & K ita describendus sit, ut circulum AWBL contingat ad partes L; & rectarum, quæ ab hisce punctis ad diametrum AB ad rectos angulos ducuntur, altera incidat in centrum C, ut in apposita figura. Eadem præparentur, quæ supra, in hujusmodi positione; jungaturque recta CR, quæ quidem sive per punctum H transibit, sive cadet infra, sive supra. Transeat primo per punctum H. Et quoniam CI ad CL se habet ut CL ad CP; & ut CL ad CP, ita RH ad NQ; ideo se habebit CI ad CL ut RH ad HQ: ac propterea rectangulum, quod sub CI & HQ continetur, æquale erit rectangulo, quod continetur sub CL & RH. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, æquale est quadratis,

quæ

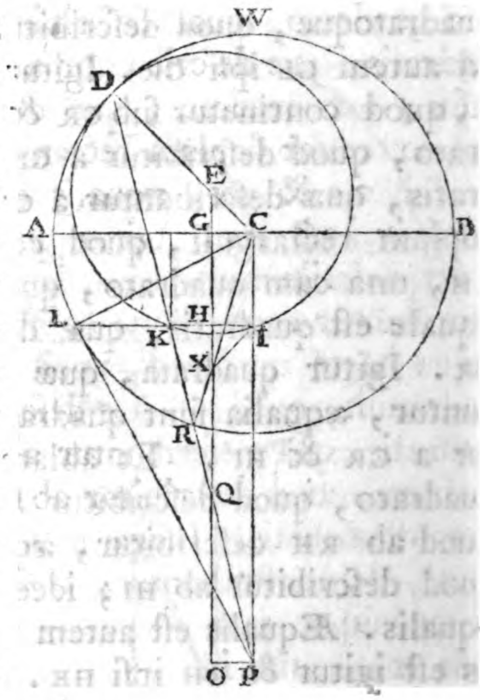


quæ deſcribuntur a CL & CI : hoc enim ſupra in hujuſmodi poſitione demonſtratum eſt; auferatur ab altera quidem parte duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & GH, ab altera vero duplum quadrati, quod deſcribitur a CI. Erit utique exceſſus, quo duplum rectanguli, quod ſub CI & GQ continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & GH; hoc eſt duplum rectanguli, quod continetur ſub CI & HQ; æquale exceſſui, quo quadrata, quæ a CL & CI deſcribuntur, excedunt duplum quadrati, quod deſcribitur a CI; hoc eſt quadrato, quod deſcribitur ab IL. Æquale eſt autem duplum rectanguli, quod ſub CI & HQ continetur, duplo rectanguli, quod continetur ſub CL & RH. Igitur duplum rectanguli, quod continetur ſub CL & RH, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur ab IL. Addantur ab altera quidem parte quadratum, quod deſcribitur a CH, ab altera vero quadrata, quæ deſcribuntur a CI & HI. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur ſub CL & RH, una cum quadrato, quod deſcribitur a CH, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab IL & CI; hoc eſt quadrato, quod deſcribitur a CL,

qua-

quadratoque, quod describitur ab HI. Æqualis est autem CL ipsi CR. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RH, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & HI. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RH, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & HR. Igitur quadrata, quæ a CR & HR describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur a CR & HI. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur a CR, quadratum, quod ab RH describitur, æquale est quadrato, quod describitur ab HI; ideoque RH ipsi HI est æqualis. Æqualis est autem HI ipsi HK. Æqualis est igitur & RH ipsi HK. Itaque si centro H, atque intervallo HI, circulus describatur, is per puncta K, R transibit. Describatur, isque sit circulus IKA, qui quidem circulum AWBL in puncto R continget. At vero recta CR cadat infra punctum H, puta in X, ut in apposita figura; jungaturque recta IX. Erit igitur rectangulum, quod sub CI & QX continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub CR & RX. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & GH, addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CX, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a GX & HI. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, una cum quadrato, quod describitur a CX, quadratis æquale, quæ describuntur a CR & GH & GX & HI. Auferatur ab utraque parte duplum rectanguli,

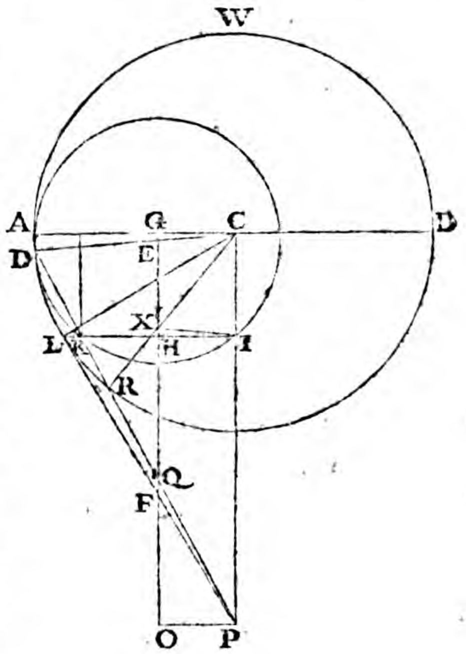
guli,



guli, quod continetur sub CI & GX, ab altera quidem a duplo rectanguli, quod continetur sub CI & GQ, ab altera vero a quadratis, quæ describuntur a GH, & GX. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CI & GQ continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CI & GX; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CI & QX; una cum quadrato, quod describitur a CX, æquale tum quadrato, quod describitur a CR, tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GX, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CI, sive GH, & GX, tum quadrato, quod describitur ab HI. Æquale est autem duplum rectanguli, quod sub CI & QX continetur, duplo rectanguli, quod continetur sub CR & RX. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RX, una cum quadrato, quod describitur a CX, æquale est tum quadrato, quod describitur a CR, tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GX, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub GH & GX, tum quadrato, quod describitur ab HI. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RX, una

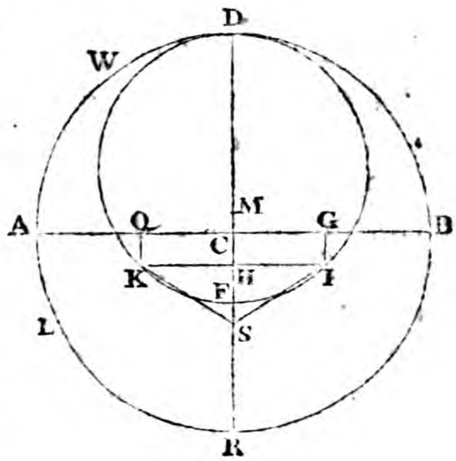
cum

cum quadrato, quod describitur a CX, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & RX; & excessus, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GX, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub GH & GX, æqualis est quadrato, quod describitur ab HX. Igitur quadrata, quæ a CR & RX describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur a CR & HX & HI. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur a CR, quadratum, quod ab RX describitur, æquale est quadratis, quæ describuntur ab HX & HI; hoc est quadrato, quod describitur ab IX; ideoque RX ipsi IX est æqualis. Iungatur KX; & cætera, ut supra, demonstrabuntur. Cadat denique recta CR supra punctum H, puta in X, ut in apposita figura; jungaturque IX. Demonstratio eadem prorsus erit atque illa quæ modo allata est.



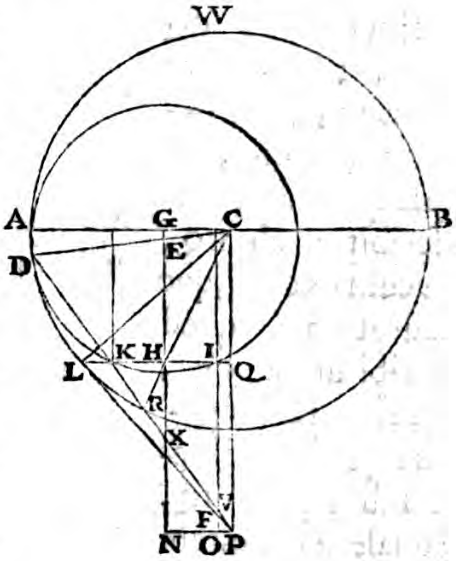
At vero rectæ, quæ a punctis I & K ad diametrum AB ad rectos angulos ducuntur, ultra citraque centrum C cadant, eædemque a C æqualiter distent, ut in apposita figura. Eadem præparentur, quæ supra, in hujusmodi positione: & producatur DF usque ad R; & fiat DH ad HR, ut MH ad HF;

 sece-

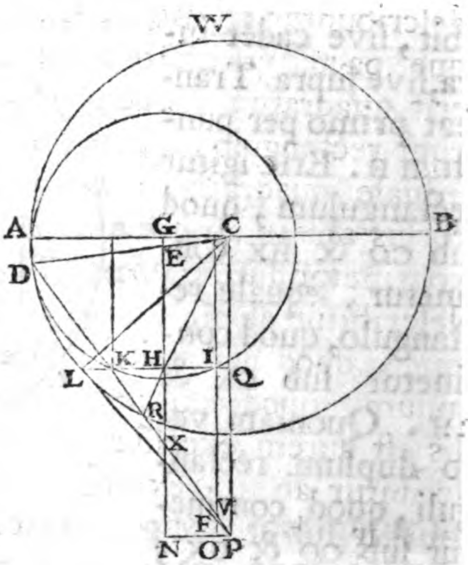


feceturque MR in duas æquas partes in puncto S. Et quoniam ut DH ad HR, ita se habet MH ad FH; & ut HI ad DH, ita FH ad HI; ideo ex æqua eademque perturbata proportione, ut HI ad HR, ita se habet MH ad HI. Igitur rectangulum, quod continetur sub HR & MH, æquale est quadrato, quod describitur ab HI. Et addito ab utraque parte quadrato, quod describitur ab HS, rectangulum, quod continetur sub RH & MH, una cum quadrato, quod describitur ab HS, æquale est quadratis, quæ describuntur ab HI & HS. Æquale est autem rectangulum, quod continetur sub HR & MH, una cum quadrato, quod describitur ab HS, quadrato, quod describitur ab RS: æqualiaque item sunt quadrata, quæ describuntur ab HI & HS, quadrato, quod describitur ab IS. Æquale est igitur quadratum, quod ab RS describitur, quadrato, quod describitur ab IS; ideoque RS ipsi IS est æqualis. Iungatur KS; & cætera, ut supra, demonstrabuntur.

Cadant modo rectæ, quæ a punctis I & K ad diametrum AB ad rectos angulos ducuntur, ad centri C partes A, neutra in centrum incidente, ut in apposita figura. Eadem præparentur, quæ supra, in hujusmodi positione; jungaturque recta CR, quæ quidem sive per punctum H transibit,



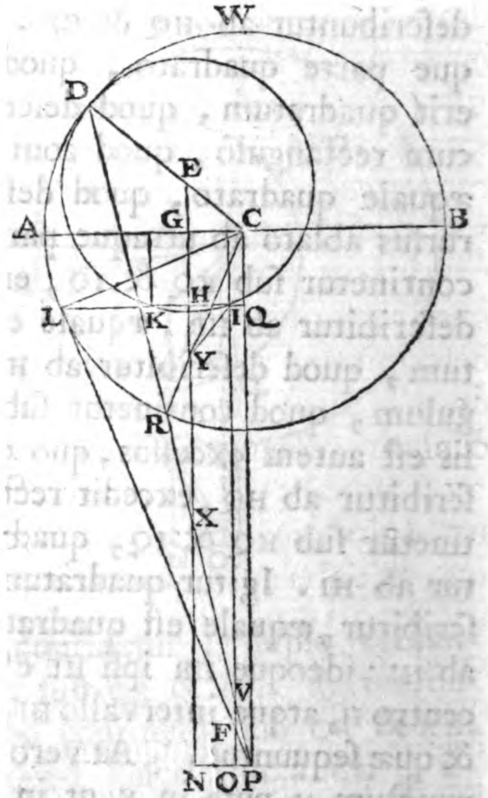
sibit, sive cadet infra, sive supra. Transeat primo per punctum H. Erit igitur rectangulum, quod sub CQ & HX continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub CR & RH. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, æquale est quadrato, quod describitur a CQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ (hoc enim supra in hujusmodi positione demonstratum est) addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CH, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a CQ & HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale tum duplo quadrati, quod describitur a CQ, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum excessui, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Auferatur ab altera quidem parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GH, ab altera vero duplum quadrati, quod describitur a CQ. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GH; hoc est duplum rectanguli, quod



continetur sub CQ & HX ; una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale quadrato, quod describitur ab HQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Æquale est autem duplum rectanguli, quod sub CQ & HX continetur, duplo rectanguli, quod continetur sub CR & RH. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RH, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale est quadrato, quod describitur ab HQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RH, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & HR. Igitur quadrata, quæ describuntur a CR & HR, æqualia sunt quadrato, quod describitur ab HQ, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Addatur ab utraque parte rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Erunt utique quadrata, quæ a CR & HR describuntur, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, æqualia quadratis, quæ descri-

describuntur ab HQ & CR. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur a CR, erit quadratum, quod describitur ab HR, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, æquale quadrato, quod describitur ab HQ. Et rursus ablato ab utraque parte rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, erit quadratum, quod describitur ab HR, æquale excessui, quo quadratum, quod describitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Æqualis est autem excessus, quo quadratum, quod describitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ, quadrato, quod describitur ab HI. Igitur quadratum, quod ab HR describitur, æquale est quadrato, quod describitur ab HI; ideoque HR ipsi HI est æqualis. Itaque si centro H, atque intervallo HI, circulus describatur; & quæ sequuntur. At vero recta CR cadat infra punctum H, puta in Y, ut in apposita figura; jungaturque recta IY. Erit igitur rectangulum, quod sub CQ & XY continetur, æquale rectangulo, quod continetur sub CR & RY. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, æquale est quadrato, quod describitur a GH, una cum excessu, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ; addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CY, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a GY & HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum quadrato, quod describitur a CY, æquale quadratis, quæ describuntur a GH & GY & HQ, & adhuc excessui, quo quadratum, quod descri-

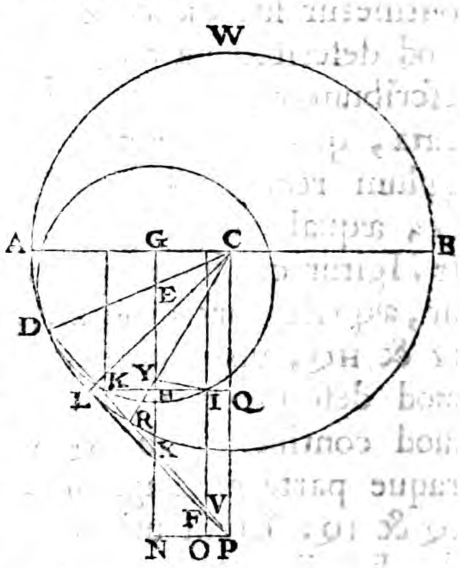
 bitur



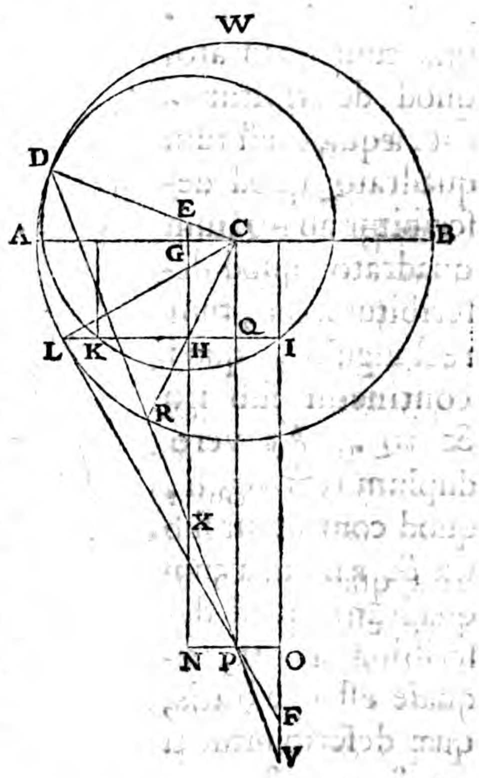
bitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Auferatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GY; ab altera quidem a duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, ab altera vero a quadratis, quæ describuntur a GH & GY. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GY; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & XY; una cum quadrato, quod describitur a CY, æqualis tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ, sive GH, & GY, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum excessui, quo quadratum, quod describitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur sub KQ & IQ. Æquale est autem duplum rectanguli, quod sub CQ & XY continetur, duplo rectanguli, quod continetur sub CR & RY. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RY, una cum quadrato, quod describibitur a CY, æquale est tum excessui, quo quadra-

dra-

drata, quæ deſcribuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub GH & GY, tum quadrato, quod deſcribitur ab HQ, tum exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur ſub CR & RY, una cum quadrato, quod deſcribitur a CY, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a CR & RY: & exceſſus, quo quadrata, quæ deſcribuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur ſub GH & GY, æqualis eſt quadrato, quod deſcribitur ab HY. Igitur quadrata, quæ a CR & RY deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & HQ, una cum exceſſu, quo quadratum, quod deſcribitur a CR, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Addatur ab utraque parte rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Erunt utique quadrata, quæ a CR & RY deſcribuntur, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & HQ & CR. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur a CR, erit quadratum, quod deſcribitur ab RY, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & HQ. Et rurſus ablato ab utraque parte rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, erit quadratum, quod deſcribitur ab RY, æquale tum quadrato, quod deſcribitur ab HY, tum exceſſui, quo quadratum, quod deſcribitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ. Æqualis eſt autem exceſſus, quo quadratum, quod deſcribitur ab HQ, excedit rectangulum, quod continetur ſub KQ & IQ, quadrato, quod deſcribitur ab HI. Igitur quadratum, quod ab RY deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & HI; hoc eſt quadrato, quod deſcribitur ab IY; ideoque RY ipſi IY eſt æqualis. Iungatur KY; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur. Cadat denique recta CR ſupra punctum H, puta in Y, ut in appoſita figura; jungaturque IY. Demonſtratio eadem prorſus erit atque illa quæ modo allata eſt.

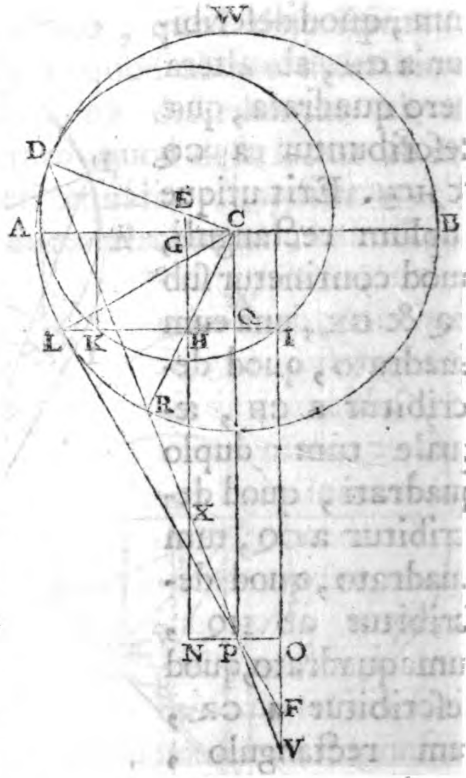


Cadant denique rectæ, quæ a punctis I & K ad diametrum AB ad rectos angulos ducuntur, ultra citraque centrum I, eædemque a C inæqualiter diſtent, ut in appoſita figura. Eadem præparentur, quæ ſupra, in hujuſmodi poſitione; jungaturque recta CR: quæ quidem ſive per punctum H tranſibit, ſive cadet infra, ſive ſupra. Tranſeat primo per punctum H. Erit igitur rectangulum, quod ſub GQ & HX continetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub CR & RH. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur ſub CQ & GX, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a CQ & CR, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ (hoc enim ſupra in hujuſmodi poſitione demonſtratum eſt) addantur ab altera quidem parte quadratum,



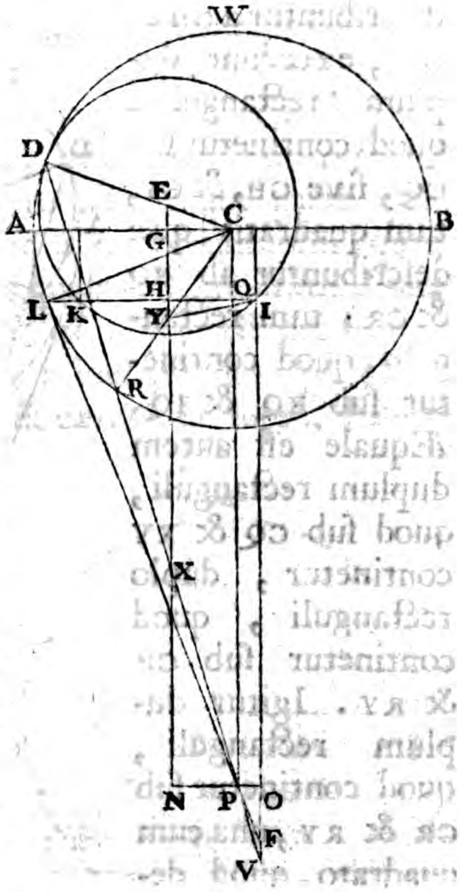
tum, quod describitur a CH, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a CQ & HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale tum duplo quadrati, quod describitur a CQ, tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum quadrato, quod describitur a CR, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Auferatur ab altera quidem parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GH, ab altera vero duplum quadrati, quod describitur a CQ. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GH; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & HX; una cum quadrato, quod describitur a CH, æquale tum quadrato, quod describitur ab HQ, tum quadrato, quod describitur a CR, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Æquale est autem duplum rectanguli, quod sub CQ & HX, continetur, duplo rectanguli, quod continetur sub CR & RH. Igitur duplum rectanguli, quod conti-

netur

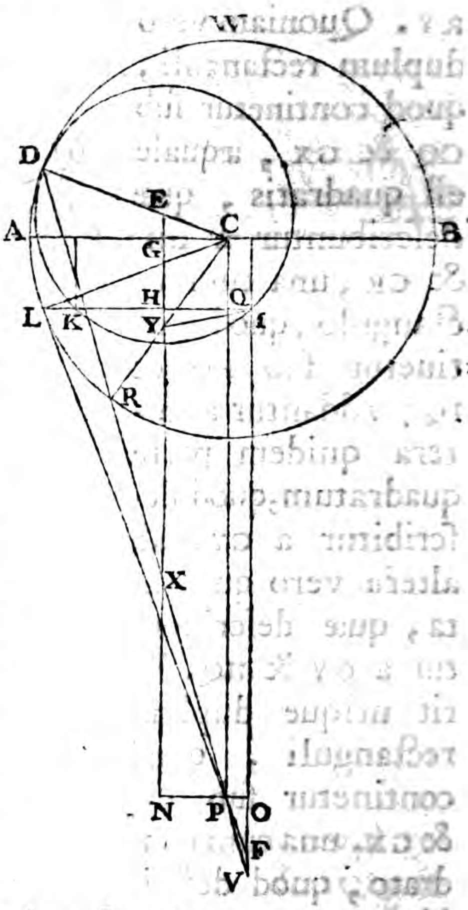


netur ſub CR & RH, una cum quadrato, quod deſcribitur a CH, æquale eſt tum quadrato, quod deſcribitur ab HQ, tum quadrato, quod deſcribitur a CR, tum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur ſub CR & RH, una cum quadrato, quod deſcribitur a CH, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur a CR & HR; & quadratum, quod deſcribitur ab HQ, una cum rectangulo, quod continetur ſub KQ & IQ, æquale quadrato, quod deſcribitur ab HI. Igitur quadrata, quæ a CR & HR deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur a CR & HI. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur a CR, quadratum, quod ab HR deſcribitur, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur ab HI; ideoque HR ipſi HI eſt æqualis. Itaque ſi centro H, atque intervallo HI, circulus deſcribatur; & quæ ſequuntur. At vero recta CR cadat infra punctum H, puta in Y, ut in appoſita figura; jungaturque recta IY. Erit igitur rectangulum, quod ſub CQ & XY continetur, æquale rectangulo, quod continetur ſub CR &

RY.



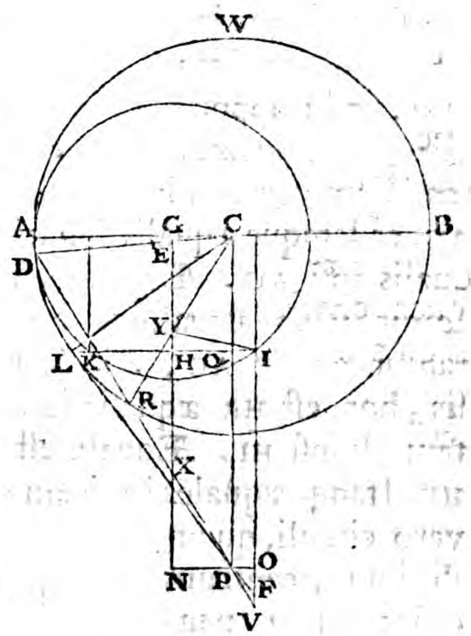
RY. Quoniam vero duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, æquale est quadratis, quæ describuntur a GH & CR, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ; addantur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur a CY, ab altera vero quadrata, quæ describuntur a GY & HQ. Erit utique duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, una cum quadrato, quod describitur a CY, æquale tum quadratis, quæ describuntur a GH & GY & HQ & CR, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Auferatur ab utraque parte duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GY, ab altera quidem a duplo rectanguli, quod continetur sub CQ & GX, ab altera vero a quadratis, quæ describuntur a GH & GY. Erit utique excessus, quo duplum rectanguli, quod sub CQ & GX continetur, excedit duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & GY; hoc est duplum rectanguli, quod continetur sub CQ & XY; una cum quadrato, quod describitur a CY, æquale tum excessui, quo quadrata, quæ descri-



describuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub CQ, sive GH, & GY, tum quadratis, quæ describuntur ab HQ & CR, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. Æquale est autem duplum rectanguli, quod sub CQ & XY continetur, duplo rectanguli, quod continetur sub CR & RY. Igitur duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RY, una cum quadrato, quod describitur a CY, æquale est tum excessui, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub GH & GY, tum quadratis, quæ describuntur ab HQ & CR, tum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ. At vero duplum rectanguli, quod continetur sub CR & RY, una cum quadrato, quod describitur a CY, æquale est quadratis, quæ describuntur a CR & RY: & excessus, quo quadrata, quæ describuntur a GH & GY, excedunt duplum rectanguli, quod continetur sub GH & GY, æqualis est quadrato, quod describitur ab HY: denique quadratum, quod describitur ab

HQ,

HQ, una cum rectangulo, quod continetur sub KQ & IQ, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur ab HI. Igitur quadrata, quæ a CR & RY deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & CR & HI. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur a CR, quadratum, quod ab RY deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab HY & HI, hoc eſt quadrato, quod deſcribitur ab IY; ideoque RY ipſi IY eſt æqualis. Iungatur KY; & cætera, ut ſupra, demonſtrabuntur. Cadat denique recta CR ſupra punctum H, puta in Y, ut in appoſita figura; jungaturque IY. Demonſtratio eadem prorſus erit atque illa quæ modo allata eſt. Datis igitur in circulo duobus punctis, quæ quidem in ipſius diametro non ſint; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

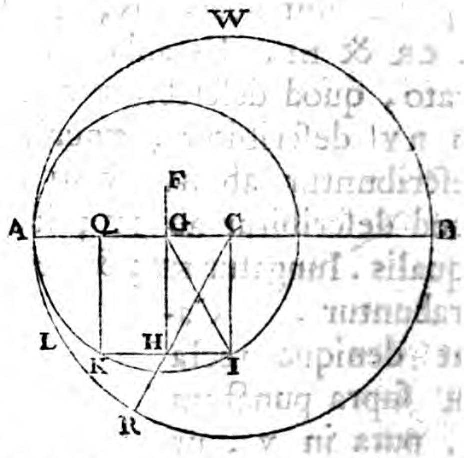


ALITER IN PRIMA POSITIONE.

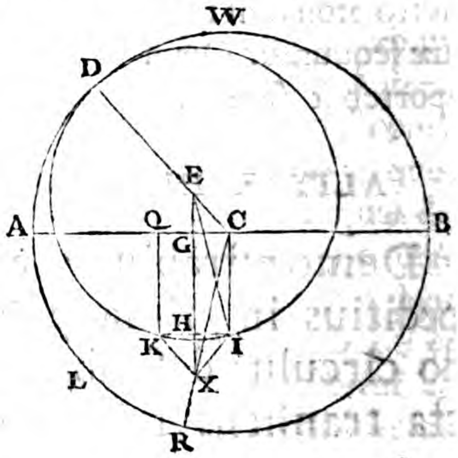
Demonſtrabimus autem multo expeditius in prima poſitione, quomodo circulus deſcribatur, qui per puncta tranſiens I & K circulum AWBL con-

contingat ad partes L, hoc quidem pacto.

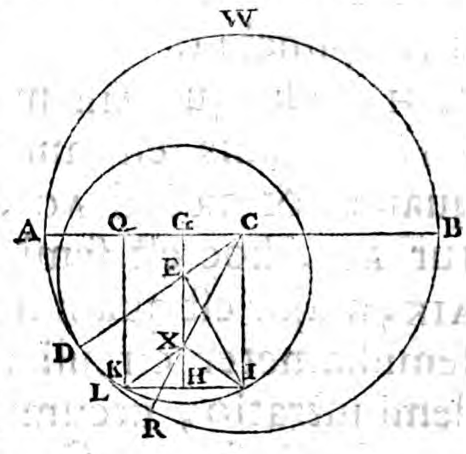
Describatur circulus transiens per puncta I & K, circulumque AWBL contingens ad partes W, cujus quidem centrum sive cadet in puncto G, sive supra, sive infra. Cadat primo in G, ut in apposita figura; ducaturque a centro C per punctum H semidiameter CR. Et quoniam GI æqualis est ipsi AG, eademque æqualis ipsi CH; erit utique & CH æqualis ipsi AG. Æqualis est autem CR ipsi AC. Igitur si ab æqualibus CR & AC æquales auferantur CH & AG, erit & reliqua reliquæ æqualis, hoc est HR æqualis ipsi CG. Æqualis est autem CG ipsi HI. Æqualis est igitur HR ipsi HI, sive HK. Itaque æquales invicem sunt HI, HK, HR. At



vero circuli, quem diximus, centrum cadat supra punctum G, puta in E, ut in apposita figura. Producatur GH usque ad X, ita ut HX æqualis sit ipsi GE; ducaturque a centro C per punctum

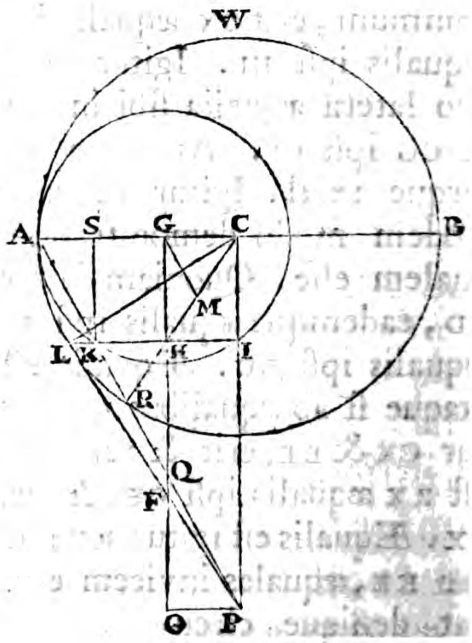


X se-x semidiameter CR, & jungatur IX. Et quoniam HX æqualis est ipsi GE, ideo addita GH utrique communi, erit GX æqualis ipsi EH. Est autem CG æqualis ipsi HI. Igitur in triangulis CGX, EHI duo latera æqualia sibi invicem sunt, GX ipsi EH, & CG ipsi HI. Atqui anguli CGX, EHI sunt uterque recti. Igitur & CX æqualis est ipsi EI. Eodem modo demonstrabitur & CE ipsi IX æqualem esse. Quoniam igitur EI æqualis est ipsi ED, eademque æqualis ipsi CX; erit utique & CX æqualis ipsi ED. Æqualis est autem CR ipsi CD. Itaque si ab æqualibus CR & CD æquales auferantur CX & DE, erit & reliqua reliquæ æqualis, hoc est RX æqualis ipsi CE. Æqualis est autem CE ipsi IX. Æqualis est igitur RX ipsi IX. Itaque si jungatur KX, æquales invicem erunt IX, KX, RX. Cadat denique circuli, quem diximus, centrum infra punctum G, puta in E, ut in apposita figura. Auferatur ab HE recta HX ipsi GE æqualis; ducaturque a centro C per punctum X semidiameter CR, & jungatur IX. Demonstrabitur eodem modo, quo supra, æquales invicem esse cum CX & EI, tum CE & IX. Ex quo sequitur RX ipsi IX esse æqualem. Itaque si jungatur KX, æquales invicem erunt IX, KX, RX.



CO-

COROLLARIUM.

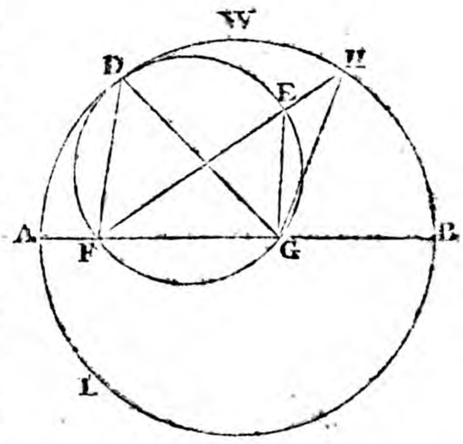


Quoniam angulus ARC, recta CR per punctum H transeunte, major est angulo RHQ, sive angulo GHC; si per punctum G ducatur recta GM ipsi AR parallela, ea occurret rectæ CH inter puncta C & H; ideoque MR major erit quam RH. Æqualis est autem MR ipsi AG; quando & CR ipsi AC est æqualis. Igitur AG, hoc est semidiameter circuli AIK, major est quam HR, hoc est quam semidiameter circuli RIK. Eadem est demonstratio, utcumque cadat recta CR, sive infra punctum H, sive supra, tam in hac positione, quam in duabus reliquis. Hinc generaliter manifestum est, descriptis per duo puncta in circulo data duobus circulis eum, quem modo diximus, circulum contingentibus, ſemidiametrum ejus circuli, qui ad partes W contingit, majorem eſſe alterius ſemidiametro, qui contingit ad partes L.

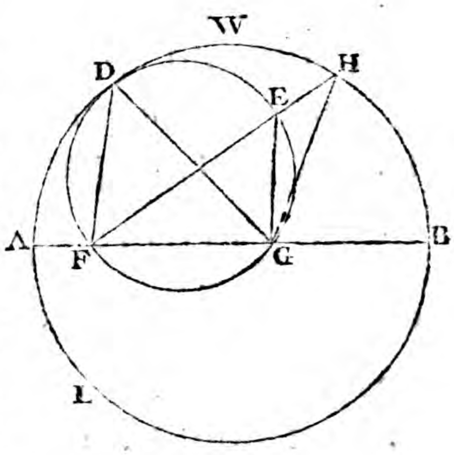
PROPOSITIO III.

Si circulus aliquis in duo ſegmenta ſectus fuerit; dataque ſint in recta linea, quæ communis eſt ſegmentorum baſis, duo puncta; rectas duas lineas ab iiſdem ad utriuſque ſegmenti circumferentiam ducere angulum conſtituentes majorem alio quolibet angulo, qui ad eandem circumferentiam in ſuo quiſque ſegmento eodem modo conſtituitur.

Sit circulus ADBL ſectus in duo ſegmenta ADB, BLA, quorum baſis recta AB: dataque ſint in AB puncta F & G. Oportet a punctis F, & G ad circumferentiam ſegmentorum tum ADB, tum BLA rectas duas lineas ducere angulum conſtituentes, qualem modo diximus. Hæc autem ſegmenta aut æqualia ſunt, aut inæqualia.

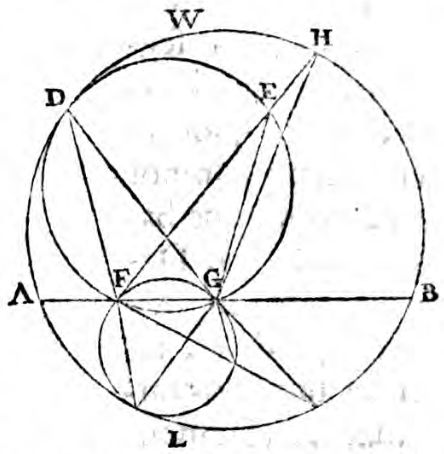


E Sint



Sint primo æqualia, ita ut recta AB sit circuli ADBL semidiameter: describaturque, per Propositionem primam, per puncta F & G circulus FDG circulum ABD contingens ad partes D, velut in puncto D; ducanturque a punctis iisdem ad D rectæ lineæ FD & GD angulum constituentes FDG. Dico angulum FDG majorem esse alio quolibet angulo, qui a punctis F & G constituitur ad circumferentiam segmenti ADB.

Constituatur enim ad eandem circumferentiam alius quilibet angulus FHG; & a puncto E, in quo FH circuli FGD circumferentiam secat, ad G recta ducatur EG. Quoniam igitur anguli FDG, FEG in eodem sunt circuli segmento, ii sunt inter se invicem æquales. Major est autem angulus FEG angulo FHG. Major est igitur angulus FDG eodem angulo FHG. Idem de alio quolibet angulo demonstrare licet. Quare angulus FDG major est alio quolibet angulo, cujusmodi est FHG, qui ad circumferentiam segmenti ADB eodem modo constituitur. Quod si per puncta F & G circulus describatur circulum ADBL contingens ad partes L, eademque fiant quæ in segmento ADB, ductæ utique fuerint ad circumferentiam segmenti BLA duæ rectæ lineæ angulum constituentes majorem alio quolibet angulo, qui ad eandem circumferentiam eodem modo

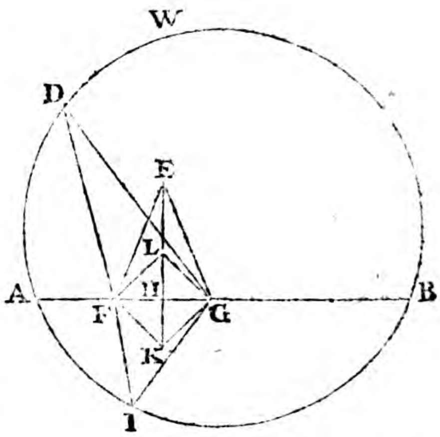


do constituitur. At vero segmenta ADB, BLA sint inæqualia, ita ut recta AB circuli ADBL diameter non sit: describanturque, per secundam Propositionem, per puncta F & G duo circuli circulum ADBL contingentes alter ad partes D, alter ad partes L; eademque fiant quæ supra. Equidem quod de angulis demonstratum est ad æqualium segmentorum circumferentias constitutis, demonstrabitur etiam de angulis constitutis ad circumferentias segmentorum inæqualium. Si igitur circulus aliquis in duo segmenta sectus fuerit; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO IV.

Si circulus aliquis in inæqualia duo segmenta sectus fuerit, datisque in recta linea, quæ communis est segmentorum basis, duobus punctis, super rectam, quæ inter hæc duo puncta interiicitur, angulus constituatur in utroque segmento maximus; qui angulus in minore segmento constituitur, major est angulo, qui constituitur in segmento majore.

 Sit



Sit circulus ADBI sectus in duo segmenta inæqualia ADB, BIA, quorum major ADB, minor BIA; eorumque basis sit recta AB. Datis autem in AB punctis F & G, super rectam FG constituatur in segmento ADB angulus maximus FDG; & in segmento BIA angulus item maximus GIF. Dico angulum GIF majorem esse angulo FDG.

Intelligantur descripti esse duo circuli, qui per puncta F & G transeuntes circulum ADBI contingant, alter ad partes D, alter ad partes I. Contingant autem in puntis D & I: ac sint eorum centra puncta E & K; junganturque rectæ FE, EG, GK, KF, EK. Quoniam igitur in triangulis FEK, GEK æquales sunt FE & EK ipsis GE & EK, altera alteri; æqualisque item FK ipsi KG; ideo angulus FEK æqualis est angulo KEG. Et quoniam in triangulis FEH, GEH æquales sunt FE & EH ipsis GE & EH, altera alteri; & angulus FEH æqualis angulo GEH; ideo etiam FH æqualis est ipsi HG. Quoniam igitur in circulo FDG recta EH per centrum ducta rectam FG non ductam per centrum in duas æquas partes secat, eandem etiam ad angulos rectos secabit. Igitur angulus EHG rectus est; ideoque etiam rectus, qui deinceps est positus, GHK. Et quoniam EG major est quam GK, erit etiam quadratum, quod ab EG describitur, ma-

jus

jus quadrato, quod deſcribitur a GK. At vero quadratum, quod ab EG deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ ab EH & HG deſcribuntur; & quadratum, quod deſcribitur a GK, æquale quadratis, quæ deſcribuntur ab HK & HG. Igitur quadrata, quæ ab EH & HG deſcribuntur, majora ſunt quadratis, quæ deſcribuntur ab HK & HG. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab HG, quadratum, quod ab EH deſcribitur, majus eſt quadrato, quod deſcribitur ab HK. Igitur EH major eſt quam HK. Auferatur a majore EH recta HL minori HK æqualis; rectæque jungantur FL, LG. Et quoniam in triangulis FLG, GKF æquales ſunt FL, LG ipſis GK, KF; & FG utrique communis; ideo angulus FLG æqualis eſt angulo GKF. Maior eſt autem angulus FLG angulo FEG. Major eſt igitur etiam angulus GKF angulo FEG. At vero angulus GIF dimidius eſt anguli GKF; anguluſque FDG dimidius anguli FEG. Igitur etiam angulus GIF major eſt angulo FDG. Si igitur circulus aliquis in inæqualia duo ſegmenta ſectus fuerit; & quæ ſequuntur. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIVM.

Quoniam igitur angulus FDG major eſt alio quolibet angulo, qui ſuper rectam FG in ſegmento ADB conſtituitur; & angulus GIF item major alio quolibet angulo, qui ſuper rectam FG conſtituitur in ſegmento BIA; majorque eſt angulus GIF angulo FDG : manifeſtum utique eſt angulum GIF omnium eſſe angulorum maximum, qui ſuper rectam FG ad circuli ADBI circumferentiam conſtituuntur.

ALITER.

Demonſtrabimus autem facilius, & brevius, quomodo datis in circulo duobus punctis, circulus deſcribi poſſit, qui per duo hæc puncta tranſiens eum, quem diximus, circulum contingat.

LEMMA I.

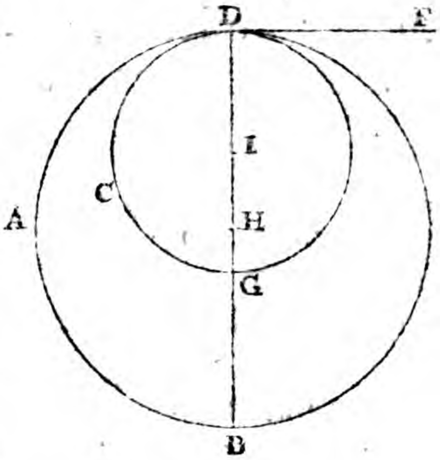
Si duo circuli ſibi intus occurrant; & quæ recta linea eorum centra conjungit, producta in occurſum incidat; hi duo circuli ſeſe intus in occurſus puncto contingunt.

Hoc autem ſupra demonſtratum eſt.

LEMMA II.

Si duo circuli ſibi intus occurrant, & quæ recta linea ab occurſu ducitur alterum eorum contingens, contingat & alterum; hi duo circuli ſeſe invicem in occurſus puncto contingunt.

Oc-

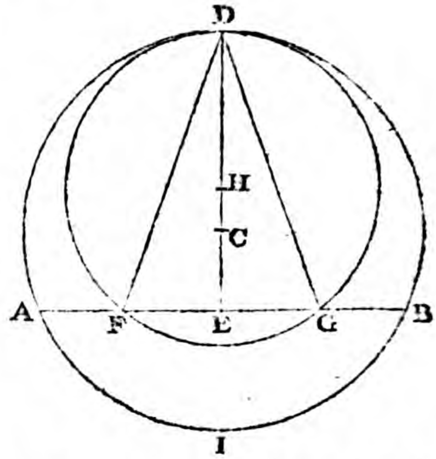


Occurrant ſibi intus duo circuli ADB, CDG, quorum centra H, I; ducaturque a puncto occurſus D recta linea DF contingens circulum ADB, eademque contingat & circulum CDG. Dico circulos ADB, CDG in eodem occurſus puncto D ſeſe invicem contingere.

Ducatur a puncto D ipſi DF ad rectos angulos recta DB. Quoniam igitur recta DF circulum ADB contingit in puncto D, ductaque eſt a puncto D ad rectos angulos ipſi DF recta DB, erit utique in DB centrum circuli ADB. Eadem ratione in DG erit centrum circuli CDG. Recta igitur HI, quæ circulorum ADB, CDG centra conjungit, producta incidit in occurſum D. Quod ſi duo circuli ſibi intus occurrant; & quæ recta linea eorum centra conjungit, producta in occurſum incidat; hi duo circuli ſeſe invicem in occurſus puncto contingunt. Igitur circuli ADB, CDG ſeſe invicem contingunt in occurſus puncto D. Si igitur duo circuli ſibi intus occurrant; & quæ ſequuntur. Quod oportebat demonſtrare.

PROPOSITIO.

Datis in circulo duobus punctis, circulum deſcribere, qui per duo hæc punſta tranſiens eum, quem diximus, circulum contingat.



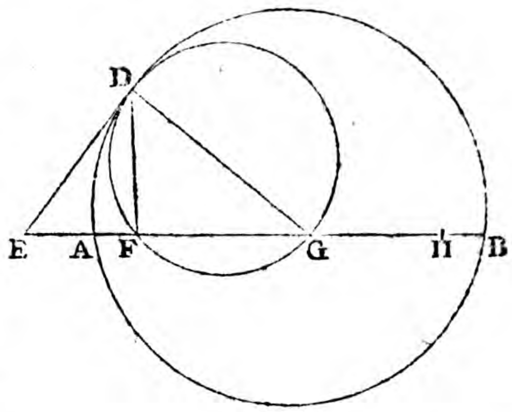
Sit circulus ADB, cujus centrum C, punſtaque in eo data ſint F & G. Oportet circulum deſcribere, qui per punſta tranſiens F & G contingat circulum ADB. Conſtat autem poſſe contingere ad partes ſive D, ſive I. Et primo ita deſcribendus ſit, ut contingat ad partes D.

Iungantur punſta F & G reſta FG, eaque producatur ab utraque parte ad punſta A & B. Erunt utique AF, GB vel æquales, vel inæquales. Sit primo AF ipſi GB æqualis, ut in appoſita figura. Secetur autem FG in duas æquas partes in punſto E; ducaturque ab eodem, ipſi FG ad reſtos angulos, reſta ED, eaque occurrat circuli ADB circumferentiæ in punſto D. Tum vero junſtis reſtis DF, DG, triangulo DFG circulus circumſcribatur, cujus ſit centrum H. Et quoniam AF æqualis eſt ipſi GB, & EF ipſi EG, erit etiam AE æqualis ipſi EB. Quoniam igitur in circulo ADB reſta DE reſtam AB in duas æquas partes, & ad reſtos angulos ſecat, erit utique in DE centrum circuli ADB. Eadem ratione in eadem DE erit centrum circuli FDG. Reſta igitur CH, quæ circulorum ADB, FDG centra conjungit, produſta incidit in occurſum D.

Quod

Quod si duo circuli sibi intus occurrant; & quæ recta linea eorum centra conjungit, in occursum incidat; hi duo circuli sese invicem in occursus puncto contingunt. Igitur circulus FDG circulum ADB contingit in puncto D.

At vero AF & GB sint inæquales; hoc est GB major sit quam AF, ut in apposita figura. Auferatur a GB BH ipsi AF æqualis: & fiat ut GH ad HB, ita



AG ad AE; ducaturque a puncto E recta ED circulum ADB contingens in puncto D. Tum vero junctis rectis DF, DG, triangulo DFG circulus circumscribatur. Igitur circulus DFG circulo ADB occurrens per puncta F & G transibit. Et quoniam ut GH ad HB, ita se habet AG ad AE, se habebit utique etiam componendo, ut GB ad HB, hoc est ad AF, ita GE ad AE. Et permutando, ut GB ad GE, ita AF ad AE. Et componendo, ut BE ad GE, ita FE ad AE. Igitur rectangulum, quod continetur sub BE & AE, æquale est rectangulo, quod continetur sub GE & FE. Æquale est autem rectangulum, quod continetur sub BE & AE, quadrato, quod describitur ab ED. Æquale est igitur & rectangulum, quod continetur sub GE & FE, quadrato, quod describitur ab ED. Quare ED cum circulum ADB contingat, contingit & circulum FDG.

Quod

Quod ſi duo circuli ſibi intus occurrant; & quæ recta linea ab occurſu ducitur alterum eorum contingens contingat & alterum, hi duo circuli ſeſe invicem in occurſus puncto contingunt. Igitur circulus FDG circulum ADB contingit in puncto D.

Jam vero circulus per puncta tranſiens F & G ita deſcribendus ſit, ut circulum ADB contingat ad partes I. Problema eodem modo conficitur, ac demonſtratur. Datis igitur in circulo duobus punctis; & quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

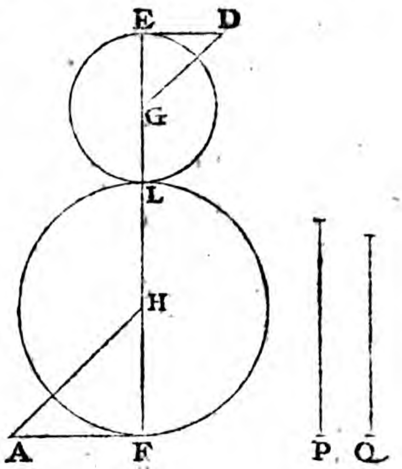
PROPOSITIO.

Datis duabus rectis lineis parallelis magnitudine ac poſitione, duos circulos deſcribere, qui ſeſe invicem contingant, & rectas, quas diximus, alter alteram in alterutro earum extremo; ita ut quæ duæ rectæ lineæ ad contactum, & alterum parallelarum extremum ab utriuſque centro ducuntur, angulos contineant invicem æquales.

Sint datæ duæ rectæ lineæ parallelæ magnitudine ac poſitione AF, DE. Oportet duos circulos deſcribere rectas AF, DE contingentes in punctis F & E, quales modo diximus.

Iungantur puncta E, F recta EF; quæ quidem cum AF producta aut duos rectos angulos faciet, aut duobus rectis æquales. Faciat primo duos

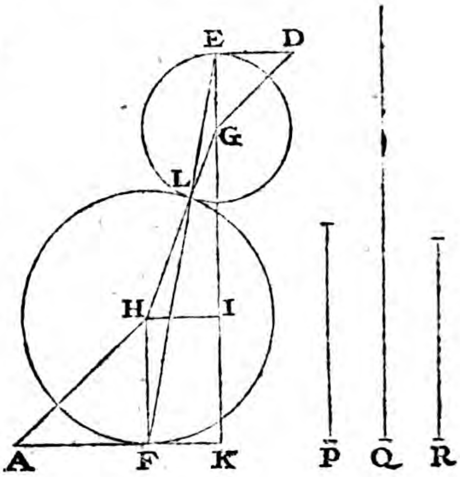
duos rectos angulos, ut in apposita figura. Sit autem P æqualis rectæ compositæ ex AF, & DE; & fiat ut dupla ipsius P ad EF, ita tum AF ad FH, tum DE ad EG; sitque Q æqualis rectæ compositæ ex FH & GE. Erit igitur ut dupla ipsius P ad EF, ita P ad Q;



ideoque rectangulum, quod sub dupla ipsius P, & Q continetur, æquale est rectangulo, quod continetur sub EF & P. Quoniam vero recta EF æqualis est rectis FH, & GE, sive Q, & GH, erit utique, sumpta communi altitudine dupla ipsius P, rectangulum, quod continetur sub EF & dupla ipsius P, æquale rectangulo, quod continetur sub Q, & dupla ipsius P, nempe rectangulo, quod continetur sub EF & P, & rectangulo, quod continetur sub GH & dupla ipsius P. Et ablato ab utraque parte rectangulo, quod continetur sub EF & P, rectangulum, quod continetur sub EF & P, æquale erit rectangulo, quod continetur sub GH & dupla ipsius P. Igitur EF ad GH se habet ut dupla ipsius P ad P; ideoque EF æqualis est duplæ ipsius GH. Æqualis est autem EF rectis Q & GH. Igitur rectæ Q & GH duplæ sunt ipsius GH. Et ablata ab utraque parte GH, recta Q, sive recta composita ex FH & GE, æqualis est ipsi GH.

At vero recta EF cum AF producta angulos faciat duobus rectis æquales, ut in apposita figura;

gura; ducaturque a puncto E ipsi AF productæ perpendicularis recta EK, quæ quidem perpendicularis erit ipsi quoque ED. Sit autem P æqualis rectæ compositæ ex AF, & DE; & fiat ut P ad EF, ita EF ad Q. Erit igitur rectangulum, quod continetur sub P & Q, æquale quadrato, quod describitur ab EF. Fiat modo ut dupla ipsius EK ad Q, ita tum AF ad FH ipsi EK parallelam, tum DE ad EG; sitque R æqualis rectæ compositæ ex FH, & EG; jungaturque GH; & a puncto H ducatur recta HI ipsi AK parallela. Igitur rectangula, quæ continentur sub dupla ipsius EK & FH; & sub dupla ipsius EK & EG, æqualia sunt alterum rectangulo, quod continetur sub AF & Q, alterum rectangulo, quod continetur sub DE & Q; ideoque rectangulum, quod continetur sub dupla ipsius EK, rectaque composita ex FH, & EG, sive eidem æquali R, æquale est rectangulo, quod continetur sub Q, rectaque composita ex AF, & DE, sive P eidem æquali, nempe quadrato, quod describitur ab EF. Quoniam vero quadrata, quæ describuntur ab EK, & R, æqualia sunt duplo rectanguli, quod continetur sub EK & R, quadratoque, quod describitur a GI, addatur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur ab FK, ab altera vero quadra-



tum,

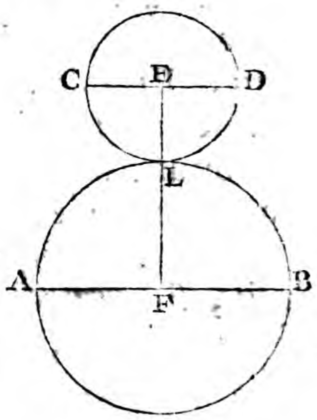
tum, quod deſcribitur ab HI. Atque erunt quadrata, quæ deſcribuntur ab EK, FK, & R, æqualia tum duplo rectanguli, quod continetur ſub EK & R, tum quadratis, quæ deſcribuntur a GI, & HI. At vero æqualia ſunt quadrata, quæ deſcribuntur ab EK, & FK, quadrato, quod deſcribitur ab EF; duplum rectanguli, quod continetur ſub EK & R, quadrato, quod deſcribitur ab EF; & quadrata, quæ deſcribuntur a GI & HI, quadrato, quod deſcribitur a GH. Igitur quadrata, quæ ab EF & R deſcribuntur, quadratis æqualia ſunt, quæ deſcribuntur ab EF & GH. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab EF, quadratum, quod ab R deſcribitur, æquale eſt quadrato, quod deſcribitur a GH; ideoque R, ſive recta compoſita ex FH & GE, æqualis eſt ipſi GH. Quod cum ita ſit, ſi in utraque figura a GH auferatur HL ipſi FH æqualis, erit quæ relinquitur LG, æqualis ipſi GE. Itaque ſi duo circuli deſcribantur, alter quidem centro H, atque intervallo recta linea ipſi HF æquali, alter vero centro G, atque intervallo recta linea æquali ipſi GE, hi utique circuli per punctum L tranſibunt. Deſcribantur, iique ſint circuli FL, LE; qui quidem ſeſe invicem in puncto L contingent. Et quoniam in utraque figura ut AF ad FH, ita ſe habet DE ad EG, ideo ſi rectæ iungantur AH, & DG, duo erunt triangula AFH, DEG unum angulum AFH æqualem habentia angulo DEG, & circum æquales angulos latera proportionalia. Triangula igitur ſunt æquiangula, æqualeſque habent angulos FAH ipſi EDG, & AHF ipſi DGE. Datis igitur duabus rectis lineis parallelis; &

quæ

quæ ſequuntur. Quod oportebat facere.

PROPOSITIO.

Datis duabus rectis lineis parallelis magnitudine ac poſitione, ſuper iiſdem duo circuli ſegmenta conſtituere ſimilia contrarioque modo poſita, quæ ſeſe invicem contingant.

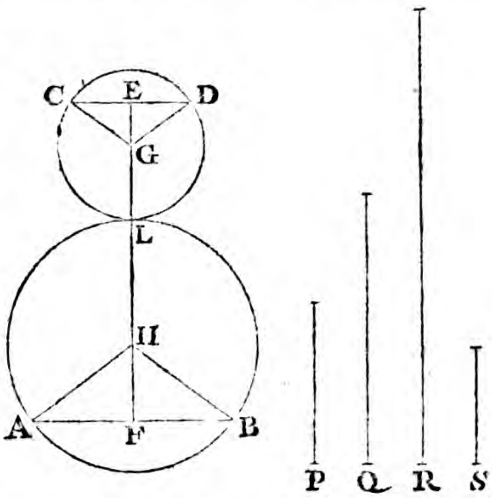


Sint datæ duæ rectæ lineæ parallelæ magnitudine ac poſitione AB & CD. Oportet ſuper AB, & CD conſtituere duo circuli ſegmenta, qualia modo diximus.

Secentur rectæ AB, CD in duas æquas partes in punctis F, E; jungaturque recta EF. Hæc utique cum recta AB aut duos rectos angulos faciet, aut duobus rectis æquales; eademque erit aut æqualis rectæ compoſitæ ex AF & DE, aut eadem major, aut minor. Faciat primo EF cum AB duos angulos rectos, eademque æqualis ſit rectæ compoſitæ ex AF & DE, ut in appoſita figura. Quoniam igitur EF æqualis eſt rectæ compoſitæ ex AF & DE, ſi ab EF auferatur FL ipſi AF æqualis, erit quæ relinquitur LE, æqualis ipſi DE. Itaque ſi duo circuli deſcribantur, alter quidem centro F, atque intervallo recta linea ipſi AF æquali, alter vero centro E, atque intervallo recta linea æquali ipſi DE; hi utique circuli per punctum L tranſibunt.

De-

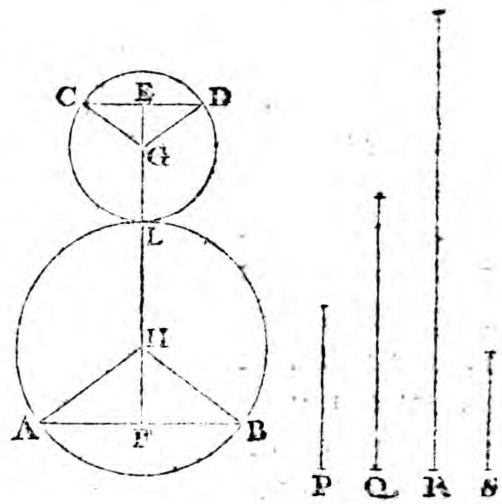
Describantur, iique sint circuli ABL, CLD; qui quidem sese invicem in puncto L contingent. Manifestum est autem segmenta ALB, CLD similia esse; quando utrumque est semicirculus. Sit modo EF major recta composita ex AF & DE, ut in apposita figura. Ac sint P, & Q, altera quidem æqualis rectæ compositæ ex AF & DE, altera vero ejusmodi, ut quadratum, quod ab ipsa describitur, æquale sit



excessui, quo quadrata sese invicem excedunt, quæ describuntur ab EF & P. Fiat autem ut P ad Q, ita Q ad R. Erit igitur rectangulum, quod continetur sub P & R, æquale quadrato, quod describitur a Q. Fiat modo ut dupla ipsius EF ad R, ita tum AF ad FH, tum DE ad EG; sitque S æqualis rectæ compositæ ex FH, & EG. Igitur rectangula, quæ continentur sub dupla ipsius EF, & FH; & sub dupla ipsius EF & EG, æqualia sunt alterum rectangulo, quod continetur sub AF & R, alterum rectangulo, quod continetur sub DE & R; ideoque rectangulum, quod continetur sub dupla ipsius EF rectaque composita ex FH & EG, sive eidem æquali S, æquale est rectangulo, quod continetur sub R rectaque composita ex AF & DE, sive P eidem æquali. Quoniam igitur quadrata, quæ describuntur ab EF

&

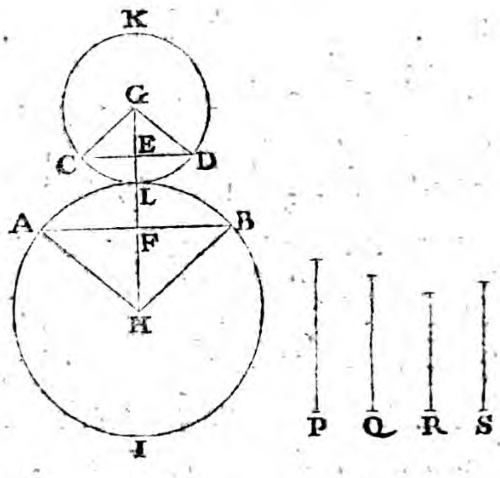
& s, æqualia sunt duplo rectanguli, quod continetur sub EF & s, quadratoque, quod describitur a GH; & duplum rectanguli, quod continetur sub EF & s, æquale est rectangulo, quod continetur sub R & P; hoc est quadrato, quod describitur a Q; ideo quadrata, quæ describuntur ab EF & s, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur a Q, & GH. Et addito ab utraque parte quadrato, quod describitur a P, quadrata, quæ ab EF & P & s describuntur, æqualia sunt quadratis, quæ describuntur a Q & P, sive ab EF, & GH. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod describitur ab EF, quadrata, quæ describuntur a P & s, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH. Æquales sunt autem P & s rectis compositis altera ex AF & DE, altera ex FH & EG. Igitur quadrata, quæ describuntur a rectis compositis altera ex AF & DE, altera ex FH & EG, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH. At vero quadratum, quod describitur a recta composita ex AF & DE, æquale est quadratis, quæ describuntur ex AF & DE, duploque rectanguli, quod continetur sub AF & DE; & quadratum, quod describitur a recta composita ex FH & EG, æquale est quadratis, quæ describuntur



tur

tur ab FH & EG, duploque rectanguli, quod continetur sub FH & EG. Igitur quadrata, quæ describuntur ab AF & DE & FH & EG; & duplum utriusque rectanguli, tum ejus, quod continetur sub AF & DE, tum ejus, quod continetur sub FH & EG, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH. At vero quadrata, quæ describuntur ab AF & FH, æqualia sunt quadrato, quod describitur ab AH; & quadrata, quæ describuntur a DE, & EG, æqualia quadrato, quod describitur a DG; & adhuc duplum utriusque rectanguli, tum ejus, quod continetur sub AF & DE, tum ejus, quod continetur sub FH & EG, æquale duplo rectanguli, quod continetur sub AH & DG; hoc enim infra demonstrabitur. Igitur quadrata, quæ describuntur ad AH & DG; & duplum rectanguli, quod continetur sub AH & DG, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH. Æqualia sunt autem quadrata, quæ describuntur ab AH & DG; & duplum rectanguli, quod continetur sub AH & DG, quadrato, quod describitur a recta composita ex AH & DG. Igitur quadratum, quod describitur a recta composita ex AH & DG, æquale est quadrato, quod describitur a GH; ideoque recta composita ex AH & DG ipsi GH est æqualis. Sit denique EF minor recta composita ex AF & DE, ut in apposita figura. Ac sint P & Q altera quidem æqualis rectæ compositæ ex AF & DE, altera vero ejusmodi, ut quadratum, quod ab ipsa describitur, æquale sit excessui, quo quadrata sese invicem excedunt, quæ describuntur a P & EF. Fiat autem ut P ad Q, ita Q ad R. Erit igitur rectangulum, quod continetur sub P & R, æ-

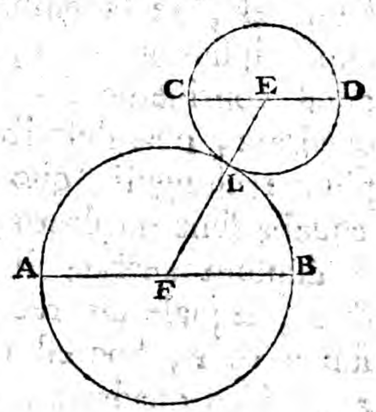
F quale



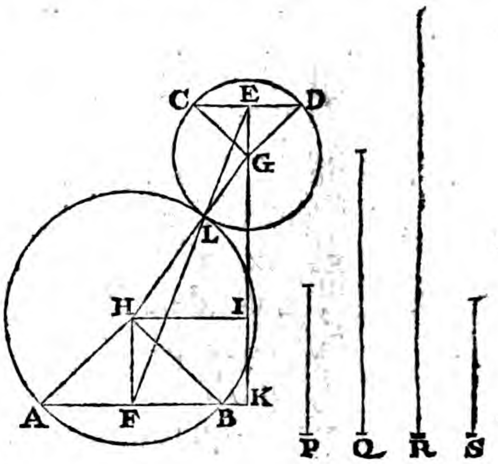
quale quadrato, quod describitur a Q. Fiat modo ut dupla ipsius EF ad R, ita tum AF ad FH, tum DE ad EG; sitque S æqualis rectæ compositæ ex FH & EG. Demonstrabitur haud secus ac supra factum est, rectangulum, quod continetur sub dupla ipsius EF & S, æquale esse rectangulo, quod continetur sub R & P. Quoniam igitur quadrata, quæ describuntur ab EF & S, & duplum rectanguli, quod continetur sub EF & S, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH; & duplum rectanguli, quod continetur sub EF & S, æquale est rectangulo, quod continetur sub R & P, hoc est quadrato, quod describitur a Q; ideo quadrata, quæ describuntur ab EF & Q, sive quadratum, quod describitur a P; & quadratum, quod describitur ab S, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GH. Quod cum ita sit, eodem, quo supra, modo demonstrabitur, rectam ex AH & DG compositam ipsi GH æqualem esse. Si igitur in utraque figura a GH auferatur HL ipsi AH æqualis, erit quæ relinquitur GL, æqualis ipsi DG. Itaque si duo circuli describantur, alter quidem centro H, atque intervallo recta linea ipsi AH æquali; alter vero centro G, atque intervallo recta linea æquali ipsi DG, hi utique circuli per punctum L

tran-

transfibunt. Defcribantur, iique fint circuli ABL, CLD; qui quidem fefe invicem in puncto L contingent. Iungantur rectæ AH, HB, CG, GD. Et quoniam in utraque figura ut AF ad FH, ita fe habet DE ad EG, ideo in triangulis rectangulis AFH, DFG angulus AHF æqualis eft angulo CGE; angulufque AHB æqualis angulo CGD, duplus duplo. Æquales funt igitur inter fe invicem & horum dimidii, hoc eft anguli qui funt ad circumferentias AIB, CKD: ac propterea circulorum fegmenta AIB, CKD fimilia funt. Ex quo fequitur fimilia effe etiam fegmenta ALB, CLD.



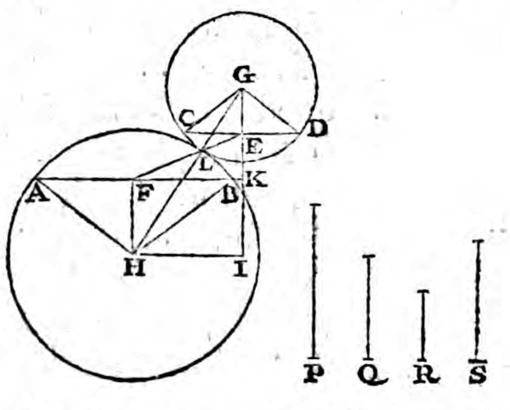
At vero recta EF cum AB angulos faciat duobus rectis æquales, eademque æqualis fit rectæ compofitæ ex AF & DE, ut in appofita figura. Quoniam igitur EF æqualis eft rectæ compofitæ ex AF & DE, fi ab EF auferatur FL ipfi AF æqualis, erit quæ relinquitur LE, æqualis ipfi DE. Sit modo EF major recta compofita ex AF & DE, ut in appofita figura; ducaturque a puncto E ipfi AB, fi oportuerit, productæ perpendicularis recta EK, quæ quidem perpendicularis erit ipfi quoque CD. Ac fint P, & Q altera quidem æqualis rectæ compofitæ ex AF & DE, altera vero ejufmodi, ut quadratum, quod ab ipfa defcribitur, æquale fit exceffui, quo quadrata fefe invicem excedunt, quæ defcribuntur ab EF & P. Fiat autem ut P ad Q, ita Q ad R. Erit igitur rectangulum quod con-



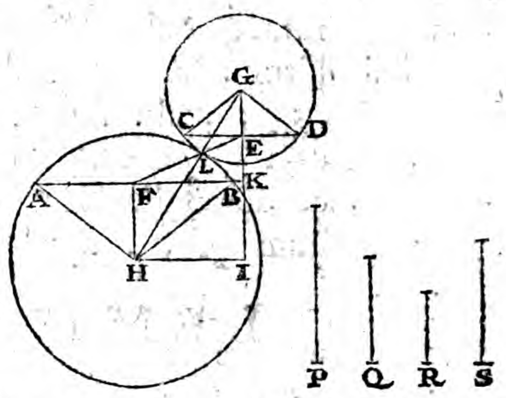
tinetur ſub P & R, æquale quadrato, quod deſcribitur a Q. Fiat modo ut dupla ipſius EK ad R, ita tum AF ad FH ipſi EK parallelam, tum DE ad EG; ſitque S æqualis rectæ compoſitæ ex FH & EG; jungaturque GH, & a puncto H ducatur HI ipſi AK parallela. Igitur rectangula, quæ continentur ſub dupla ipſius EK & FH, & ſub dupla ipſius EK & EG, æqualia ſunt alterum rectangulo, quod continetur ſub AF & R, alterum rectangulo, quod continetur ſub DE & R; ideoque rectangulum, quod continetur ſub dupla ipſius EK rectaque compoſita ex FH & EG, ſive eidem æquali S, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub R rectaque compoſita ex AF & DE, ſive P eidem æquali. Quoniam igitur quadrata, quæ deſcribuntur ab EK & S, æqualia ſunt duplo rectanguli, quod continetur ſub EK & S, quadratoque, quod deſcribitur a GI; & duplum rectanguli, quod continetur ſub EK & S, æquale eſt rectangulo, quod continetur ſub R & P, hoc eſt quadrato, quod deſcribitur a Q; ideo quadrata, quæ deſcribuntur ab EK & S, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur a Q & GI. Addatur ab altera quidem parte quadratum, quod deſcribitur ab FK, ab altera vero quadratum, quod deſcribitur ab HI. Atque erunt quadrata, quæ ab EK & FK

& S

& S deſcribuntur, æqualia quadratis, quæ deſcribuntur a Q & GI & HI. At vero quadrata, quæ deſcribuntur ab EK & FK, æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur ab EF; quadrataque, quæ deſcribuntur a GI & HI, æqualia quadrato, quod deſcribitur a GH. Igitur quadrata, quæ ab EF & S deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur a Q & GH. Et addito ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur a P, quadrata, quæ ab EF & P & S deſcribuntur, æqualia ſunt quadratis, quæ deſcribuntur a Q & P, ſive ab EF, & a GH. Et ablato ab utraque parte quadrato, quod deſcribitur ab EF, quadrata, quæ a P & S deſcribuntur, æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur a GH. Quod cum ita ſit, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur rectam ex AH & DG compoſitam ipſi GH æqualem eſſe. Sit denique EF minor recta compoſita ex AF & DE, ut in appoſita figura; ducaturque a puncto E ipſi AB, ſi oportuerit, productæ perpendicularis recta EK, quæ quidem perpendicularis erit ipſi quoque CD. Ac ſint P, & Q altera quidem æqualis rectæ compoſitæ ex AF & DE, altera vero ejuſmodi, ut quadratum, quod ab ipſa deſcribitur, æquale ſit exceſſui, quo quadrata ſeſe invicem excedunt, quæ deſcribuntur a P & EF. Fiat autem ut P ad Q,



ita Q ad R. Erit igitur rectangulum, quod continetur sub P & R, æquale quadrato, quod describitur a Q. Fiat modo ut dupla ipsius EK ad R, ita tum AF ad



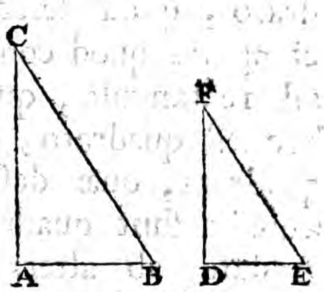
FH ipsi EK parallelam, tum DE ad EG; sitque S æqualis rectæ compositæ ex FH & EG; jungaturque GH; & a puncto H ducatur HI ipsi AK parallela, quæ cum GK producta concurrat in I. Demonstrabitur haud secus ac supra factum est, duplum rectanguli, quod continetur sub EK & S, æquale esse rectangulo, quod continetur sub R & P. Quoniam igitur quadrata, quæ describuntur ab EK & S; & duplum rectanguli, quod continetur sub EK & S, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GI; & duplum rectanguli, quod continetur sub EK & S, æquale est rectangulo, quod continetur sub R & P, hoc est quadrato, quod describitur a Q; ideo quadrata, quæ describuntur ab EK & Q & S, æqualia sunt quadrato, quod describitur a GI. Addatur ab altera quidem parte quadratum, quod describitur ab FK, ab altera vero quadratum, quod describitur ab HI. Atque erunt quadrata, quæ ab EK & FK & Q & S describuntur, æqualia quadratis, quæ describuntur a GI & HI. At vero quadrata, quæ describuntur ab EK & FK, æqualia sunt quadrato, quod describitur ab EF; quadrataque, quæ describuntur a GI

&

& HI, æqualia quadrato, quod deſcribitur a GH. Igitur quadrata, quæ ab EF & Q, ſive quadratum, quod deſcribitur a P; & quadratum, quod deſcribitur ab S, æqualia ſunt quadrato, quod deſcribitur a GH. Quod cum ita ſit, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur rectam ex AH & DG compoſitam ipſi GH æqualem eſſe.

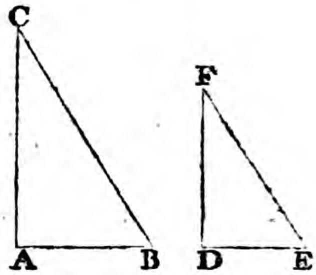
LEMMA.

Si duo fuerint triangula rectangula latera habentia circa rectum angulum proportionalia, erunt rectangula, quæ continentur ſub lateribus utriuſque trianguli, quæ circa rectum angulum ſunt, ſumptis altero in altero, iiſdemque homologis, æqualia rectangulo, quod continetur ſub lateribus, quæ recto angulo in utroque ſubiiciuntur.



Sint duo triangula rectangula ABC, DEF angulos habentia CAB, FDE rectos, & circa eoſdem latera CA, AB, FD, DE proportionalia, ita ut quemadmodum CA ad AB, ita ſe habeat FD ad DE. Dico rectangula, quæ continentur ſub AC & DF; & ſub AB & DE, æqualia eſſe rectangulo, quod continetur ſub CB & FE.

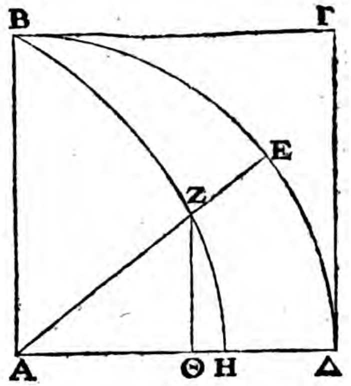
Quoniam enim duo triangula ABC, DEF ſunt rectangula, & circa rectos angulos latera habent proportionalia, ea erunt similia; ac propterea proportionalia sunt eorum latera homologa. Similia igitur erunt etiam rectangula, quæ continentur tum sub CB & FE, tum sub



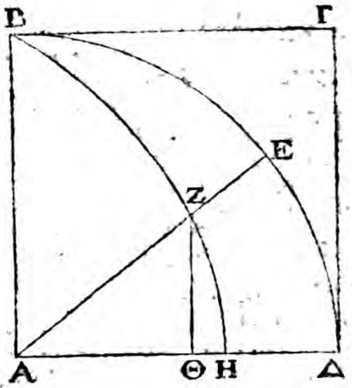
AC & DF, tum sub AB & DE. At vero in triangulis rectangulis, quæ figura describitur a latere, quod recto angulo subiicitur, ea figuris æqualis est, quæ describuntur a lateribus rectum angulum comprehendentibus, similibus similiterque descriptis. Igitur rectangula, quæ continentur sub AC & DF; & sub AB & DE, æqualia sunt rectangulo, quod continetur sub CB & FE. Si igitur duo fuerint triangula rectangula; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

Ἐκ τῶν ΠΑΠΠΟΥ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΩΣ Μαθηματικῶν Συναγωγῶν βιβλίου δ'.

Εἰς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου παρελήφθη τις ὑπὸ Δεινοστράτου, καὶ Νικομήδου γραμμὴ, καὶ τινῶν ἄλλων νεωτέρων ἀπὸ τοῦ περὶ αὐτὴν συμπτώματος λαβοῦσα τοὔνομα. καλεῖται γὰρ ὑπ' αὐτῶν τετραγωνίζουσα· καὶ γένεσιν ἔχει τοιαύτην. Ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ (1. καὶ) περὶ κέντρον τὸ Α περιφέρεια γεγράφθω ΒΕΔ, καὶ κινείσθω ἡ μὲν ΑΒ οὕτως, ὥστε τὸ μὲν Α σημεῖον μένειν, τὸ δὲ Β φέρεσθαι κατὰ τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν· ἡ δὲ ΒΓ παράλληλος ἀεὶ διαμένουσα τῇ ΑΔ τῷ Β (2. σημείῳ φερομένῳ) κατὰ τῆς (3. ΒΑ συνακολουθείτω, καὶ) ἐν ἴσῳ χρόνῳ ἥτε ΑΒ κινουμένη ὁμαλῶς τὴν ὑπὸ ΒΑΔ γωνίαν, τουτέστιν τὸ Β σημεῖον τὴν ΒΕΔ (4. περιφέρειαν) διανυέτω, καὶ ἡ ΒΓ τὴν ΒΑ εὐθεῖαν (5. παραβαινέτω)· τουτέστιν τὸ Β σημεῖον κατὰ τῆς ΒΑ φερέσθω. συμβήσεται δῆλον τῇ ΑΔ εὐθείᾳ ἅμα ἐφαρμόζειν (6. ἑκατέραν) τήν τε ΑΒ, καὶ τὴν ΒΓ. τοιαύτης δὴ γινομένης



1. In Codice Vaticano deest conjunctio copulativa καὶ.
2. Codex Vaticanus ita habet: σημεῖον φέρον ἐν ᾧ.
3. Cod. Vat. B συνακολουθεῖ τῷ. 4. In Cod. Vat. deest vox περιφέρειαν. 5. Cod. Vat. παραβεβέτω. 6. Cod. Vat. ἑκάτερα.



μένης κινήσεως τέμνουσιν ἀλλήλας ἐν τῇ φορᾷ αἱ ΒΓ, ΒΑ εὐθεῖαι κατά τι σημεῖον αἰεὶ συμμεθιστάμενον αὐταῖς, ὑφ᾽ οὗ σημείου γράφεταί τις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τε ΒΑΔ εὐθειῶν, καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας γραμμὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη, οἵα ἐστιν ἡ ΒΖΗ. καὶ (1. χρειώδης) εἶναι δοκεῖ πρὸς τὸ τῷ δοθέντι κύκλῳ τετράγωνον ἴσον εὑρεῖν. τὸ δὲ ἀρχικὸν αὐτῆς σύμπτωμα (2. τοιοῦτό ἐστιν.) (3. Εἴτις γὰρ ἂν διαχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα πρὸς τὴν περιφέρειαν, ὡς ἡ ΒΖΕ, ἔσται ὅλη ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, ὡς ἡ ΒΓ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΘ.) τοῦτο γὰρ ἐκ τῆς γενέσεως τῆς γραμμῆς φανερόν ἐστιν. Δυσαρεστεῖται δὲ αὐτῇ ὁ Σπόρος εὐλόγως διὰ ταῦτα. πρῶτον μὲν γὰρ πρὸς ὃ δοκεῖ χρειώδης εἶναι πρᾶγμα, τοῦτ᾽ ἐν ὑποθέσει λαμβάνει. πῶς γὰρ δυνατὸν (4. φησὶ) δύο σημείων ἀρξαμένων ἀπὸ τοῦ Β κινεῖσθαι, τὸ μὲν κατ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Α, τὸ δὲ κατὰ περιφερείας ἐπὶ τὸ (5. Δ, ἐν) ἴσῳ χρόνῳ συναποκαταστῆναι μὴ πρότερον (6. τὸν λόγον) τῆς ΑΒ εὐθείας πρὸς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν ἐπιστάμενον; ἐν γὰρ τούτῳ τῷ λόγῳ καὶ τὰ τάχη τῶν κινήσεων ἀναγκαῖον (7. εἶναι). πῶς οἴονται (8. γὰρ) συναποκαταστῆναι τάχεσιν ἀκράτοις χρώμενα; πλὴν εἰ

μὴ

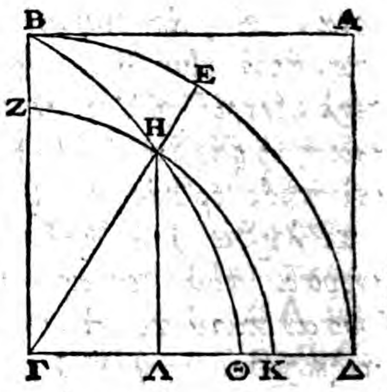
1. Cod. Vat. χρειῶδες. 2. Cod. Vat. τοιοῦτόν ἐστιν.
3. Codex Vat. ἥτις γὰρ ἂν διαχθῇ τυχοῦσα περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, ἡ ΒΑ περιφέρεια εὐθεῖα πρὸς τὴν ΖΘ.
4. In Cod. Vat. deest verbum φησί. 5. Cod. Vat. ΔΕΗ.
6. Cod. Vat. τὸ ὅλον. 7. Cod. Vat. ἐπεὶ. 8. In Cod. Vat. deest γάρ.

μὴ κατὰ τύχην (1. ποτὲ) συμβῇ. τοῦτο δὲ πῶς οὐκ ἄλογον; ἔπειτα δὲ τὸ πέρας αὐτῆς, ᾧ χρῶνται πρὸς τὸν τετραγωνισμὸν τοῦ κύκλου, τουτέστιν καθ' ὃ τέμνει σημεῖον τὴν ΑΔ εὐθεῖαν, οὐχ εὑρίσκεται. νοείσθω δὲ ἐπὶ τῆς προκειμένης τὰ λεγόμενα (2. καταγραφῆς). Οπότ' ἂν αἱ ΓΒ, ΒΑ φερόμεναι συναποκατασταθῶσιν, ἐφαρμόσουσιν (3. ἐπὶ) τὴν ΑΔ, καὶ (4. τομὴν) οὐκέτι ποιήσουσιν ἐν ἀλλήλαις. παύεται γὰρ ἡ τομὴ (5. πρὸ) τῆς ἐπὶ τὴν ΑΔ ἐφαρμογῆς, ἥπερ τομὴ πέρας ἂν ἐγένετο τῆς γραμμῆς, καθ' ὃ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ συνέπιπτεν, πλὴν εἰ μὴ λέγοι τις ἐπινοεῖσθαι προσεκβαλλομένην τὴν γραμμὴν, ὡς ὑποτιθέμεθα τὰς εὐθείας, ἕως τῆς ΑΔ. τοῦτο δ' οὐχ ἕπεται ταῖς ὑποκειμέναις (6. αὐτῶν) ἀρχαῖς· ἀλλ' ὡς δ' ἂν ληφθείη τὸ Η σημεῖον, προειλημμένου τοῦ τῆς περιφερείας πρὸς τὴν εὐθεῖαν λόγου· χωρὶς δὲ τοῦ δοθῆναι τὸν λόγον τοῦτον, (7. ἀδύνατον). ἢ χρὴ τῇ τῶν εὑρόντων ἀνδρῶν δόξῃ πιστεύοντας παραδέχεσθαι τὴν γραμμὴν μηχανικωτέραν πως οὖσαν, καὶ εἰς πολλὰ προβλήματα χρησιμεύουσαν τοῖς Μηχανικοῖς; πολὺ πρότερον (8. δὲ) παραδεκτεόν ἐστι τὸ δι' αὐτῆς δεικνύμενον πρόβλημα.

Τετραγώνου γὰρ ὄντος τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ τῆς μὲν περὶ τὸ κέντρον τὸ Γ περιφερείας τῆς ΒΕΔ, τῆς δὲ ΒΗΘ τετραγωνιζούσης γινομένης, ὡς προείρηται, δείκνυται ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕ-

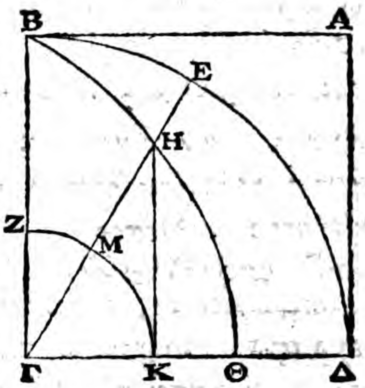
τως

1. Cod.Vat. πότε. 2. Cod. Vat. κατὰ γραφῆς. 3. In Cod. Vat. deest præpositio ἐπὶ. 4. Cod. Vat. τὸ μὴν. 5. Cod. Vat. πρὸς. 6. In Cod. Vat. deest αὐτῶν. 7. In Cod. Vat. deest vox hæc, ἀδύνατον. 8. In Cod. Vat. deest conjunctio subjunctiva δὲ.



τως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΘ εὐθεῖαν. Εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἤτοι πρὸς μείζονα ἔσται τῆς (1. ΓΘ, ἢ) πρὸς ἐλάσσονα. ἔστω πρότερον, εἰ δυνατὸν, πρὸς μείζονα τὴν ΓΚ· καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια ἡ ΖΗΚ γεγράφθω τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ τὸ Η, καὶ κάθετος (2. ἤχθω) ἡ ΗΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔΕΒ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ, τουτέστιν ἡ ΓΔ, πρὸς τὴν ΓΚ· ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΚ, ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΖΗΚ περιφέρειαν· ὡς γὰρ ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον (3. οὕτως) ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου πρὸς τὴν περιφέρειαν· φανερὸν (4. ἄρα) ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ. καὶ ἐπειδὴ, διὰ τὸ σύμπτωμα τῆς γραμμῆς, ἔστιν ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΗΚ πρὸς τὴν ΗΚ περιφέρειαν, οὕτως ἡ ΒΓ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΗΛ. καὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΖΗΚ περιφέρεια τῇ ΒΓ εὐθείᾳ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΚ περιφέρεια τῇ ΗΛ εὐθείᾳ. ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστιν, ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς μείζονα τῆς ΓΘ. Λέγω δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα.

1. Cod. Vat. ΓΘΗ. 2. In Cod. Vat. deest verbum ἤχθω. 3. In Cod. Vat. deest adverbium οὕτως. 4. In Cod. Vat. deest ἄρα.



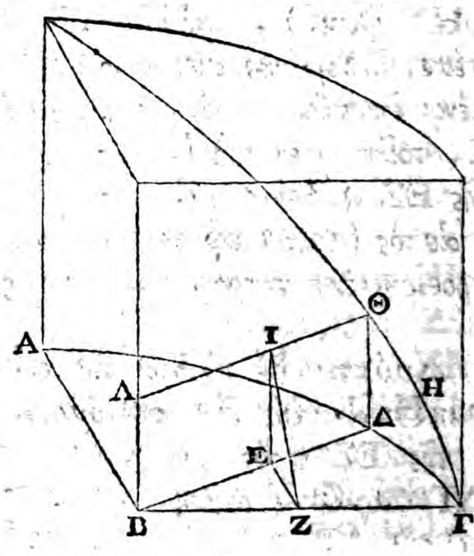
σονα. εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς τὴν ΚΓ. καὶ περὶ κέντρον τὸ Γ περιφέρεια γεγράφθω ἡ ΖΜΚ, καὶ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΓΔ (1. ἤχθω) ἡ ΚΗ τέμνουσα τὴν τετραγωνίζουσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΗ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε. ὁμοίως δὲ τοῖς προγεγραμμένοις δείξομεν καὶ τὴν ΖΜΚ περιφέρειαν τῇ ΒΓ εὐθείᾳ ἴσην· καὶ ὡς τὴν ΒΕΔ περιφέρειαν πρὸς τὴν ΕΔ, τουτέστιν ὡς τὴν ΖΜΚ πρὸς τὴν ΜΚ, οὕτω τὴν ΒΓ εὐθεῖαν πρὸς τὴν ΗΚ. ἐξ ὧν φανερὸν ὅτι ἴση ἔσται ἡ ΜΚ περιφέρεια τῇ ΚΗ εὐθείᾳ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ἡ ΒΕΔ περιφέρεια πρὸς τὴν ΒΓ εὐθεῖαν, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΓΘ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζονα. πρὸς αὐτὴν ἄρα τὴν ΓΘ.

Ἐστι δὲ καὶ τοῦτο φανερὸν ὅτι ἡ τῶν ΘΓ, ΓΒ εὐθειῶν τρίτη ἀνάλογον λαμβανομένη εὐθεῖα ἴση ἔσται τῇ ΒΕΔ περιφερείᾳ, καὶ ἡ τετραπλασίων αὐτῆς τῇ τοῦ ὅλου κύκλου περιφερείᾳ. εὑρημένης δὲ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ ἴσης εὐθείας, πρόδηλον ὡς δεῖ καὶ αὐτῷ τῷ κύκλῳ (2. ῥᾳδίως) ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. τὸ γὰρ ὑπὸ τῆς περιμέτρου τοῦ κύκλου, καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου διπλάσιόν ἐστι τοῦ κύ-

1. In Cod. Vat. deest verbum ἤχθω.
2. Cod. Vat. ῥᾷδιον.

κύκλου, ὡς Ἀρχιμήδης (1. ἀπέδειξεν).

Αυτη μὲν οὖν ἡ γένεσις τῆς γραμμῆς ἐστιν, ὡς εἴρηται, μηχανικωτέρα· γεωμετρικῶς δὲ διὰ τῶν πρὸς ἐπιφανείαις τόπων ἀναλύεσθαι δύναται τὸν τρόπον τοῦτον. Θέσει (.2 δεδόσθω) κύκλου τεταρτημόριον τὸ ΑΒΓ· καὶ διήχθω, ὡς (3. ἔτυχεν) ἡ ΒΔ· καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΕΖ λόγον ἔχουσα δοθέντα πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν. (4. λέγω) ὅτι πρὸς γραμμὴν τὸ Ε. νοείσθω γὰρ

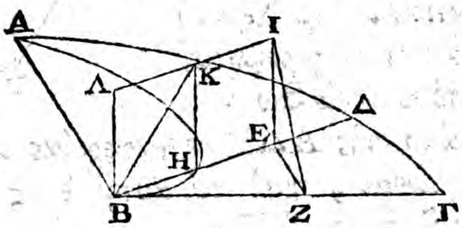


ἀπὸ τῆς ΑΔΓ περιφερείας ὀρθοῦ κυλίνδρου ἐπιφάνεια, καὶ ἐν αὐτῇ ἕλιξ γεγραμμένη δεδομένη τῇ θέσει ἡ ΓΗΘ, καὶ (5. πλευρὰ) τοῦ κυλίνδρου ἡ ΘΔ· καὶ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθαὶ ἤχθωσαν αἱ ΕΙ, ΒΛ (6. ἀνεσταμέναι ὀρθαὶ)· διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ ΒΔ παράλληλος ἡ ΘΛ. (7. ἐπεὶ οὖν ὁ λόγος τῆς ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ΕΙ, τουτέστι τῆς ΔΘ, πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν, διὰ τὴν ἕλικα, καὶ δοθείς ἐστι ὁ τῆς ΕΖ λόγος πρὸς τὴν ΔΓ, ἔσται καὶ τῆς ΕΙ πρὸς ΔΓ λόγος

1. Cod.Vat. ἐπέδειξεν. 2. In Cod. Vat. deeſt verbum δεδόσθω. 3. Cod. Vat. ἐτύχην. 4. In Cod. Vat. deeſt verbum λέγω. 5. Cod. Vat. ΠΛ. 6. Duo hæc verba ἀνεσταμέναι ὀρθαὶ omnino ſunt ſupervacua. Ideo videntur a Sciolo aliquo margini adjecta fuiſſe ad explicandum, indeque in textum migraſſe. 7. Cod. Vat. ἐπίλογος τῆς

λόγος δοθείς). καὶ εἰσὶν αἱ ΖΕ, ΕΙ παραθέσει. καὶ ἡ ΖΙ ἄρα ἐπιζευχθεῖσα παραθέσει. καὶ ἐστὶν κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. (8. ἔστι δὲ] ἐν) ἐπιπέδῳ ἡ ΖΙ. ὥστε καὶ τὸ Ι. ἔστι δὲ καὶ ἐν (9. κυλινδροειδῆ) ἐπιφανείᾳ. φέρεται γὰρ ἡ ΘΛ διὰ (10. τε) τῆς ΘΗΓ ἕλικος, καὶ τῆς ΑΒ εὐθείας, καὶ αὐτῆς τῇ θέσει δεδομένης, αἰεὶ παράλληλος οὖσα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. πρὸς γραμμὴν ἄρα τὸ Ι· ὥστε καὶ τὸ Ε. τοῦτο μὲν οὖν (11. ἀνελύθη) καθόλου. αὖ δ' ὁ τῆς ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΔΓ περιφέρειαν λόγος ὁ αὐτὸς (12. ἢ) τῷ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν (13. ΑΔΓ, ἡ) προειρημένη τετραγωνίζουσα γίνεται γραμμή.

Δύναται δὲ καὶ διὰ τῆς ἐν ἐπιπέδῳ γραφομένης ἕλικος ἀναλύεσθαι τὸν ὅμοιον τρόπον. ἔστω γὰρ ὁ τῆς ΕΖ πρὸς τὴν ΔΓ λόγος ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΑΔΓ περιφέρειαν· καὶ ἐν ᾧ ἡ ΑΒ εὐθεῖα περὶ τὸ Β κινουμένη



παροδεύει τὴν (14. ΑΔΓ) περιφέρειαν, σημεῖον ἐπ' αὐτῆς ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ Γ (15. παραγενέσθω), θέσιν λαβούσης τὴν ΑΒ· καὶ ποιείτω τὴν ΒΗΑ ἕλικα. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΗ, ἡ ΑΔΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΔ· καὶ ἐναλλάξ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΖ πρὸς ΔΓ. ἴση ἄρα ἡ ΒΗ τῇ ΖΕ. ἤχθω τῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἡ ΚΗ ἴση τῇ ΒΗ. ἐν κυλιν-

ΕΖ εὐθείας πρὸς τὴν ΑΓ περιφέρειαν τῆς ΔΕΔΓ. διὰ τὴν ἕλικα λόγος πρὸς τὴν ΔΘ ἔσται, καὶ τῆς ΕΖ πρὸς Η λόγος δοθείς. 8. In Cod. Vat. desunt tria hæc verba, ἔστι δὲ ἐν. 9. In Cod. Vat. deest vox hæc, κυλινδροειδεῖ. 10. Cod. Vat. δέ. 11. Cod. Vat. ἀνελύθη. 12. Cod. Vat. ἡ. 13. Cod. Vat. ΑΔΓΗ. 14. Cod. Vat. ΑΔ. 15. Cod.

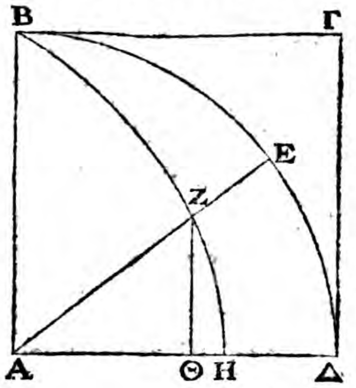
κυλινδροειδῆ ἄρα ἐπιφανείᾳ τῇ ἀπὸ τῆς ἕλικος τὸ Κ. ἀλλὰ καὶ ἐν κωνικῇ. ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΒΚ ἐν κωνικῇ γίνεται ἐπιφανείᾳ ἡμίσειαν ὀρθῆς (1. κεκλιμένη πρὸς τὸ ὑποκείμενον), καὶ ἠγμένη διὰ δοθέντος τοῦ Β. πρὸς γραμμῇ ἄρα τὸ Κ. ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΕΒ παράλληλος ἡ ΛΚΙ· καὶ ὀρθαὶ τῷ ἐπιπέδῳ αἱ ΒΛ, ΕΙ. ἐν (2. κυλινδροειδῆ) ἄρα ἐπιφανείᾳ ἡ ΛΚΙ. φέρεται γὰρ διά τε τῆς ΒΛ εὐθείας θέσει οὔσης, καὶ διὰ θέσει γραμμῆς, πρὸς ᾗ τὸ Κ. καὶ τὸ Ι ἄρα (3. ἐν) ἐπιφανείᾳ. ἀλλὰ καὶ ἐν ἐπιπέδῳ. ἴση γὰρ ἡ ΖΕ τῇ ΕΙ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΒΗ. καὶ γίνεται παραθέσει ἡ ΖΙ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΒΓ. πρὸς γραμμῇ ἄρα (4. τὸ Ι)· ὥστε καὶ τὸ Ε. καὶ (5. δῆλον, ὅτι) ἂν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, ἡ προειρημένη τετραγωνίζουσα γραμμὴ γίνεται.

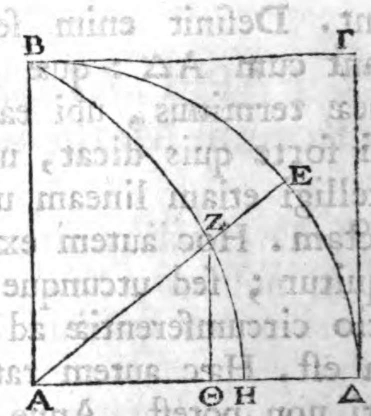
Ex

Vat. *παραγινέσθω*. 1. Cod. Vat. *κεκλιμένης πρὸς τὸ ὑποκείμενον*. Deſit fortaſſe *ἐπίπεδον*. 2. Cod. Vat. *πληκτοειδεῖ*, quæ quidem vox nulla eſt. Legendum fortaſſe *πλεκτοειδεῖ*; quod ſi probas, pro *cylindroidea*, verte *pleƈtiloidea*. 3. In Cod. Vat. deeſt præpoſitio *ἐν*. 4. Cod. Vat. *τὸ ἴσον*. 5. Cod. Vat. *δηλονότι*.

Ex PAPPI ALEXANDRINI Collectionum Mathematicarum libro IV.

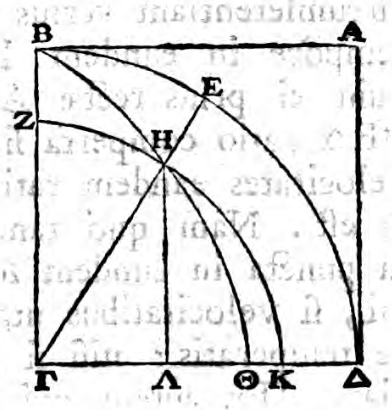
AD circuli quadraturam assumpta est a Dinostrato, Nicomede, nonnullisque aliis recentioribus quædam linea, quæ ex quadam ipsius proprietate nomen accepit. Vocatur enim ab ipsis quadrataria, ejusque ortus hujusmodi est. Exponatur quadratum ΑΒΓΔ, describaturque circa centrum A circumferentia ΒΕΔ: & AB quidem ita moveatur, ut punctum A maneat, B feratur per circumferentiam ΒΕΔ; ΒΓ vero ipsi ΑΔ continuo parallela punctum B, quod fertur per BA, comitetur; æqualique tempore tum AB æquabiliter mota angulum ΒΑΔ; hoc est punctum B circumferentiam ΒΕΔ conficiat, tum ΒΓ rectam BA; hoc est punctum B feratur per BA. Ita equidem fiet, ut cum recta ΑΔ utraque simul conveniant AB, & ΒΓ. Itaque, dum hujusmodi motus peragitur, secabunt sese invicem in ipso motu rectæ ΒΓ BA in puncto aliquo, quod cum ipsis continuo transfertur, a quo puncto in loco, qui inter rectas ΒΑΔ, & circumferentiam ΒΕΔ interiicitur, linea quædam describitur ad easdem partes cava, cujusmodi est BZH; eaque ad hoc utilis esse



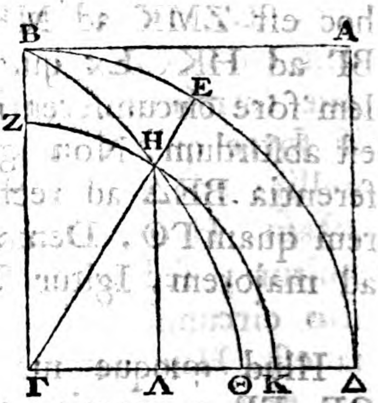


videtur, ut dato circulo æquale quadratum inveniatur. Præcipua autem ejus proprietas ejusmodi est. Si recta aliqua ducta utcunque fuerit ad circumferentiam, ut AZE, se habebit tota circumferentia BEΔ ad EΔ ut recta BΓ ad ZΘ. Hoc enim ex ipso lineæ ortu manifestum est. Hæc autem linea Sporo merito displicet hisce de caussis. Primum enim, ad quod utilis esse videtur, id in ipsa positione sumit. Qui enim, inquit, fieri potest, si duo puncta a B moveri incipiant, alterum per rectam versus A, alterum per circumferentiam versus Δ, ut ea quis eodem tempore in eundem locum simul restituat, quin ei prius rectæ AB ad circumferentiam BEΔ ratio comperta sit? quippe & motuum velocitates eandem rationem habeant, necesse est. Nam quo tandem pacto arbitrantur ea puncta in eundem locum posse simul restitui, si velocitatibus utantur nulla certa ratione temperatis? nisi si id casu aliquando eveniat. Hoc autem quis absurdum esse neget? Præterea lineæ terminus, quo ipsi ad circuli quadraturam utuntur; punctum scilicet, in quo rectam AΔ eadem secat; minime invenitur. Intelligantur enim, quæ dicta sunt, in proposita figura. Quando ΓB, BΓ motæ in eundem locum simul restitutæ fuerint, eæ cum AΔ convenient, neque sese invicem amplius secabunt.

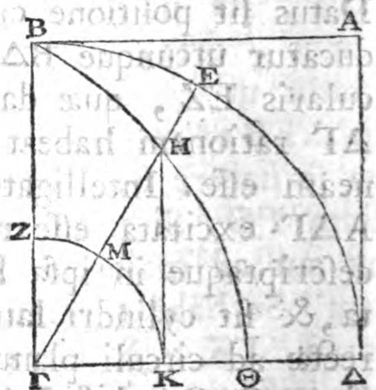
bunt. Desinit enim sectio antequam conveniant cum ΑΔ : quæ quidem sectio facta est lineæ terminus, ubi ea rectæ ΑΔ occurrit; nisi forte quis dicat, ut rectas posuimus, ita intelligi etiam lineam usque ad ΑΔ fuisse productam. Hoc autem ex eorum principiis non sequitur; sed utcunque sumatur punctum Η, ratio circumferentiæ ad rectam utique præsumpta est. Hæc autem ratio si data non sit, id fieri non potest. Anne oportet nos eos, qui ejusmodi lineam invenerunt, auctores secutos ipsam admittere, ut quæ mechanica quodammodo sit, & ad multa problemata Mechanicis non inutilis? Verum id problema multo magis admittendum est, quod per ipsam demonstratur.



Quadratum cum sit ΑΒΓΔ, & quæ circa centrum Γ descripta est, circumferentia ΒΕΔ; & adhuc ΒΗΘ quadrataria, ita ut supra diximus, orta, demonstratur ut circumferentia ΔΕΒ ad rectam ΒΓ, ita se habere ΒΓ ad rectam ΓΘ. Si enim minus, ea utique se habebit aut ad majorem quam ΓΘ, aut ad minorem. Se habeat primo, si fieri potest, ad majorem ΓΚ: & circa centrum Γ describatur circumferentia ΖΗΚ secans lineam in puncto Η; & ducatur perpendicularis ΗΛ; junctaque ΓΗ producatur ad punctum Ε. Quoniam igi-



igitur ut circumferentia ΔEB ad rectam BΓ, ita se habet BΓ, hoc est ΓΔ, ad ΓK; & ut ΓΔ ad ΓK, ita circumferentia BEΔ ad circumferentiam ZHK: ut enim circuli diameter ad diametrum, ita se habet circuli circumferentia ad circumferentiam; manifestum utique est circumferentiam ZHK rectæ BΓ esse æqualem. Et quoniam propter lineæ proprietatem, ut circumferentia BEΔ ad EΔ, ita se habet recta BΓ ad HΛ; ideo etiam ut circumferentia ZHK ad HK, ita se habet recta BΓ ad HΛ. Demonstrata autem est circumferentia ZHK æqualis rectæ BΓ. Æqualis est igitur etiam circumferentia HK rectæ HΛ; quod est absurdum. Non igitur se habet ut circumferentia BEΔ ad rectam BΓ, ita BΓ ad majorem quam ΓΘ. Dico autem neque ad minorem. Si enim fieri potest, se habeat ad KΓ: & circa centrum Γ describatur circumferentia ZMK; & ad rectos angulos ipsi ΓΔ ducatur KH secans quadratariam in puncto H; junctaque ΓH producatur ad punctum E. Demonstrabimus autem, haud secus ac supra scriptum est, etiam circumferentiam ZMK rectæ BΓ æqualem

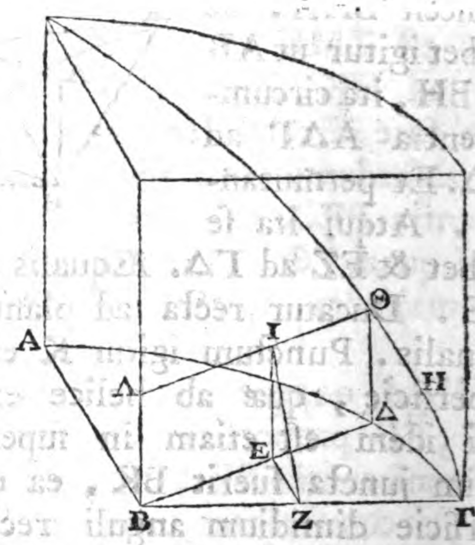


lem

lem esse, & ut circumferentia ΒΕΔ ad ΕΔ, hoc est ΖΜΚ ad ΜΚ, ita se habere rectam ΒΓ ad ΗΚ. Ex quibus manifestum est æqualem fore circumferentiam ΜΚ rectæ ΚΗ; quod est absurdum. Non igitur se habebit ut circumferentia ΒΕΔ ad rectam ΒΓ, ita ΒΓ ad minorem quam ΓΘ. Demonstratum autem est neque ad majorem. Igitur se habebit ad ipsam ΓΘ.

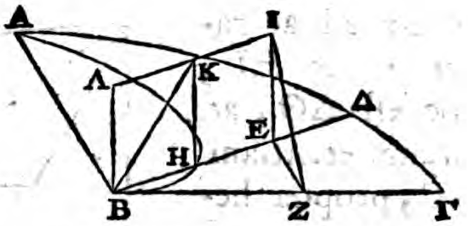
Illud quoque manifestum est rectam ipsis ΘΓ, ΓΒ proportionalem tertiam æqualem fore circumferentiæ ΒΕΔ, &, quæ ipsius est quadrupla, circumferentiæ totius circuli. Porro inventa recta linea circuli circumferentiæ æquali, satis constat quomodo oporteat ipsi quoque circulo æquale quadratum nullo negotio constituere. Quod enim spatium sub circuli ambitu, & ea quæ ex centro, continetur, id duplum est ipsius circuli, quemadmodum Archimedes demonstravit.

Hic igitur lineæ ortus est, ut dictum fuit, mechanicus: geometrice vero per locos, qui ad superficies dicuntur, resolvi potest hoc pacto. Datus sit positione circuli quadrans ΑΒΓ; & ducatur utcunque ΒΔ, ipsique ΒΓ perpendicularis ΕΖ, quæ datam ad circumferentiam ΔΓ rationem habeat. Dico punctum Ε ad lineam esse. Intelligatur enim a circumferentia ΑΔΓ excitata esse recti cylindri superficies, descriptaque in ipsa helix ΓΗΘ positione data, & sit cylindri latus ΘΔ. Ducantur autem rectæ ad circuli planum ΕΙ, ΒΛ; & per punctum Θ ΘΛ ipsi ΒΔ parallela. Quoniam igitur ratio rectæ ΕΖ ad circumferentiam ΔΓ



eadem eſt ac ratio ipſius EI, hoc eſt ΔΘ, ad circumferentiam ΔΓ, propter helicen, dataque eſt ratio ipſius EZ ad ΔΓ; ideo data erit & ratio ipſius EI ad ΔΓ. Dantur autē ZE, EI poſitione. Datur igitur poſitione, & quæ juncta fuit, ZI; eademque eſt ipſi BΓ perpendicularis. At vero ZI eſt in plano. Igitur & punctum I. Atque eſt etiam in cylindrica ſuperficie. Fertur enim ΘΛ tum per helicen ΘΗΓ, tum per rectam ΛB, quæ & ipſa poſitione datur, ei, quod ſubiicitur, plano continuo parallela. Ad lineam igitur eſt punctum I. Quare etiam E. Hoc quidem generaliter reſolutum eſt. Quod ſi rectæ EZ ratio ad circumferentiam ΔΓ eadem ſit ac ratio ipſius BA ad circumferentiam AΔΓ, oritur, quæ ſupra dicta eſt, linea quadrataria.

Poteſt autem & per helicen in plano deſcriptam reſolvi ſimili ratione. Sit enim ratio ipſius EZ ad ΔΓ eadem ac ratio rectæ AB ad circumferentiam AΔΓ; & quo tempore recta AB circa B mota pertranſit circumferentiam AΔΓ, eodem punctum, quod in ipſa eſt, a B incipiens perveniat ad Γ, quando ea ſecundum AB fuerit poſita; & faciat heli-

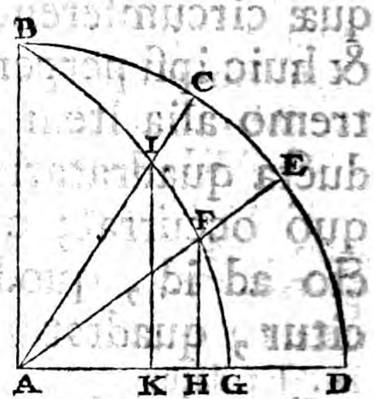


helicen BHA. Se habet igitur ut AB ad BH, ita circumferentia AΔΓ ad ΓΔ. Et permutando. Atqui ita se habet & EZ ad ΓΔ. Æqualis est igitur BH ipsi ZE. Ducatur recta ad planum KH ipsi BH æqualis. Punctum igitur K est in cylindroidea superficie, quæ ab helice excitata est. Atqui idem est etiam in superficie conica. Si enim juncta fuerit BK, ea erit in conica superficie dimidium anguli recti ad planum inclinata, eademque ducta a dato puncto B. Ad lineam est igitur punctum K. Ducantur per K ipsi EB parallela ΛKI, & rectæ ad planum BΛ, EI. In cylindroidea igitur superficie est ΛKI. Fertur enim per rectam BΛ positione datam, & per lineam positione item datam, ad quam est K. Igitur etiam I est in superficie. Atqui idem est etiam in plano. Æqualis est enim ZE ipsi EI, quoniam & ipsi BH. Et datur etiam positione ZI ipsi BΓ perpendicularis. Ad lineam igitur est punctum I. Quare etiam E. Atque illud constat, si rectus fuerit angulus ABΓ, eam, quam diximus, quadratariam lineam oriri.

Hactenus Pappus.

PROPOSITIO I.

Si duo in quadrataria puncta sumantur; ducanturque a centro per ea puncta duæ rectæ ad circumferentiam, & ab iisdem aliæ item duæ ad quadratariæ basim perpendiculares; circumferentiæ, quæ ab iis, quas diximus, rectis basim versus abscinduntur, se habebunt inter se invicem, ut perpendiculares.



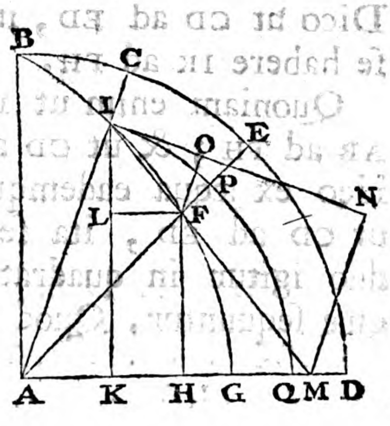
Sit quadrataria BFG, cujus basis AG: sumptisque in eadem punctis I, & F, ducantur per ipsa a centro A ad circumferentiam BED rectæ AC, & AE, & ab iisdem punctis ad basim AG perpendiculares rectæ IK, & FH. Dico ut CD ad ED, ita se habere IK ad FH.

Quoniam enim ut BED ad ED, ita se habet AB ad FH; & ut CD ad BED, ita IK ad AB; ideo ex æqua eademque ordinata proportione, ut CD ad ED, ita se habebit IK ad FH. Si duo igitur in quadrataria puncta sumantur; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

PRO-

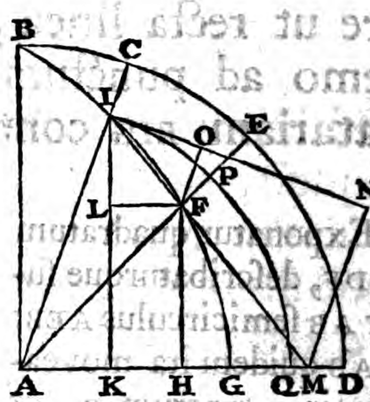
PROPOSITIO II.

Si in quadrataria ſumatur punctum aliquod, ducaturque a centro ad id punctum recta linea; centroque eo, quod diximus, atque intervallo eadem hac recta, deſcribatur circumferentia uſque ad quadratariæ baſim productam: tum vero a puncto, quod ſumptum eſt, recta ducatur rectæ a centro ductæ perpendicularis, æqualiſquæ circumferentiæ, quam diximus; & huic ipſi perpendicularis ab ejus extremo alia item recta, quæ cum producta quadratariæ baſi in puncto aliquo occurrat; quæ recta ab hoc puncto ad id, quod ſumptum fuit, ducitur, quadratariam continget.



Sit quadrataria BIG, cujus baſis AG; ſumaturque in ea punctum I, & ducatur a centro A ad I recta AI; & centro A, atque intervallo AI, deſcribatur circumferentia IPQ: tum vero ab I ducatur IN ipſi AI perpendicularis, æqualiſque circumferentiæ IPQ, ipſique IN perpendicularis ab N re-

N recta NM, quæ basi AG productæ occurrat in puncto M. Dico rectam, quæ ab M ad I ducitur, contingere quadratariam BIG.



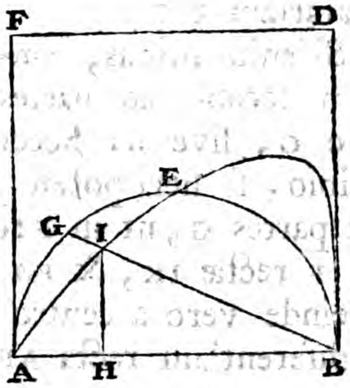
Si enim minus, eandem secabit ad partes sive G, sive B. Secet primo, si fieri potest, ad partes G, ut in F: ducanturque a punctis I, & F rectæ IK, & FH basi AG perpendiculares. Deinde vero a centro A ducatur per F ad circumferentiam recta AFE; producaturque AI ad C, eique parallela ducatur FO. Et quoniam ut CD ad ED, ita se habet IK ad FH, se habebit etiam convertendo, invertendoque, ut CE ad CD, ita IL ad IK. Se habet autem CE ad CD, ut IP ad IQ. Se habet igitur ut IP ad IQ, ita IL ad IK. At vero IP ad IQ se habet ut IP ad IN; & IL ad IK, ut IF ad IM, hoc est ut IO ad IN. Igitur ut IP ad IN, ita se habet IO ad IN; ideoque IP ipsi IO est æqualis; quod est absurdum. Non igitur secat IM quadratariam BIG ad partes G. Eodem modo demonstrabitur neque secare ad partes B. Quare contingit. Si igitur in quadrataria sumatur punctum aliquod; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

COROLLARIUM.

Hinc manifestum est, si AD producatur, abscindaturque ab eadem recta linea æqualis circumferentiæ BCD,

fore

fore ut recta linea, quæ ab ejus extremo ad punctum B ducitur, quadratariam BIG contingat.

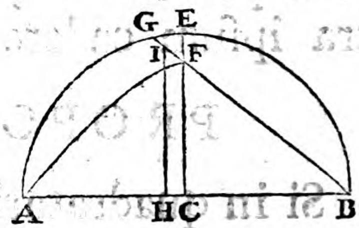


Exponatur quadratum ABDF, describaturque super AB semicirculus AEB: & AB quidem ita moveatur circa centrum B, ut punctum B maneat, A feratur per AB, & semicirculum AEB; AF vero ipsi BD continuo parallela punctum A, quod fertur per AB, comitetur; æqualique tempore tum AB æquabiliter mota angulum ABD, hoc est punctum A semicirculum AEB, conficiat, tum AF rectam AB, hoc est punctum A feratur per AB. Itaque dum hujusmodi motus peragitur, secabunt sese invicem in ipso motu rectæ AF, & AB in puncto aliquo, quod cum ipsis continuo transfertur, a quo puncto in quadrato ABDF linea quædam describitur ad easdem partes cava, cujusmodi est AEB. Vocetur autem hæc linea quadrataria scalena. Cujus præcipua proprietas hujusmodi est. Si recta aliqua a puncto B ducta utcunque fuerit ad semicirculum, ut BG, se habebit ut circumferentia AEB ad BEG, ita recta AB ad BH. Hoc enim ex ipso lineæ ortu manifestum est.

PRO-

PROPOSITIO I.

Quadrataria ſcalena per id punctum tranſit, quod ſemicirculum genitorem in duas æquas partes ſecat.



Sit ſemicirculus genitor AEB, ſeceturque AEB in duas æquas partes in puncto E. Dico quadratariam ſcalenam tranſire per punctum E.

Si enim minus, jungatur recta EC. Secabit utique quadrataria ſcalena rectam hanc aut infra punctum E, aut ſupra. Secet infra in puncto F; ducaturque a puncto B per F ad ſemicirculum genitorem recta BFG. Circumferentia igitur BG major erit quam BE, hoc eſt quam dimidium circumferentiæ AEB. Itaque ſi fiat ut circumferentia AEB ad BG, ita recta AB ad BH, erit & BH ex ipſo lineæ ortu major quam BC, hoc eſt quam dimidium rectæ AB; ideoque punctum H in puncto C non cadit. Ducatur a puncto H HI ipſi CF parallela. Erit igitur punctum I in quadrataria ſcalena. Sunt autem in eadem etiam puncta B, & F. Tria igitur puncta B, F, I ſunt in recta linea, eademque in quadrataria ſcalena; quod fieri non poteſt. Ea ſiquidem linea ad eaſdem partes eſt cava. Igitur quadrataria ſcalena rectam CE non ſecat infra punctum E. Eodem modo demonſtrabitur neque ſecare ſupra idem punctum. Tranſit igitur per punctum E. Quod oportebat demonſtrare.

CO-

COROLLARIUM.

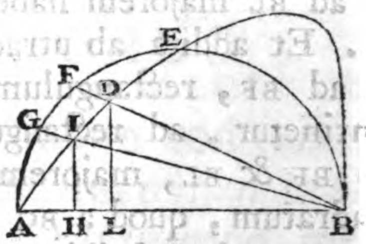
Ex hoc manifeſtum eſt quadratariam ſcalenam ſemicirculum genitorem permutare ; hoc eſt partim intra ipſum cadere, partim extra.

PROPOSITIO II.

Si in quadrataria ſcalena duo puncta ſumantur, ducanturque per ea puncta ab extremo baſis circuli genitoris ad circulum genitorem, qua parte quadrataria ſcalena extra ipſum cadit, duæ rectæ, & ab iiſdem aliæ item duæ ad baſim perpendiculares ; circumferentiæ, quæ ab iis, quas diximus, rectis baſim verſus abſcinduntur, ſe habebunt inter ſe invicem, ut rectæ, quæ interiiciuntur inter perpendiculares, & alterum baſis extremum, ſumptis circumferentiis, rectiſque ad eaſdem partes.

Sit quadrataria ſcalena AEB, cujus ſemicirculus genitor AFEB : ſumptiſque in eadem punctis D, & I, ducantur per ipſa a puncto B ad ſemicirculum AFEB rectæ BF, & BG, & ab iiſdem punctis ad AB perpendiculares rectæ DL, & IH. Dico ut BEF ad BFG, ita ſe habere

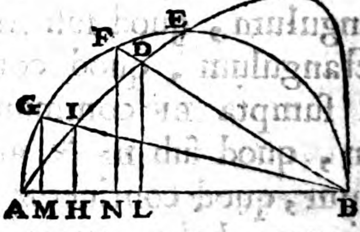
bere BL ad BH.



Quoniam enim ut AFEB ad BFG, ita se habet AB ad BH; & ut BEF ad AFEB, ita BL ad AB; ideo ex æqua eademque ordinata proportione, ut BEF ad BFG, ita se habebit BL ad BH. Si igitur in quadrataria scalena duo puncta sumantur; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO III.

Si ab extremo basis semicirculi genitoris duæ ad quadratariam scalenam rectæ ducantur; quæ basi proximior est, ea est major remotiore.

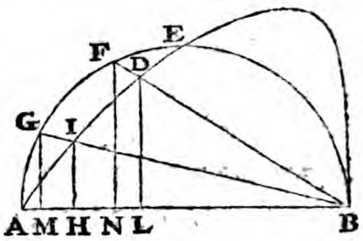


Sit quadrataria scalena AEB, cujus semicirculus genitor AFEB; ducanturque a puncto B ad AEB rectæ BD, BI. Dico rectam BI recta BD majorem esse.

Producantur BI, & BD ad puncta G, & F; atque ab I, D, G, F ad basim AB perpendiculares ducantur rectæ IH, DL, GM, FN. Quoniam igitur circumferentia BFG ad circumferentiam BEF majorem habet rationem quam recta BG ad rectam BF; hoc enim in primo Magnæ Constructionis libro Ptolemæus demonstravit; & ut BFG ad BEF, ita se habet BH ad BL; ideo

BH ad BL majorem habet rationem quam BG ad BF. Et addita ab utraque parte ratione ipsius BG ad BF, rectangulum, quod sub BG & BH continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BF & BL, majorem rationem habet quam quadratum, quod a BG describitur, ad quadratum, quod describitur a BF. At vero quadratum, quod a BG describitur, ad quadratum, quod describitur a BF, se habet ut rectangulum, quod sub AB & BM continetur, ad rectangulum, quod continetur sub AB & BN; hoc est ut BM ab BN. Igitur rectangulum, quod sub BG & BH continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BF & BL, majorem rationem habet quam BM ad BN. Habet autem rectangulum ad rectangulum rationem, quæ componitur ex BG ad BF, & BH ad BL. Igitur ab altera quidem parte ablata ratione ipsius BG ad BF, ab altera vero addita ratione ipsius BF ad BG; BH ad BL majorem rationem habet quam rectangulum, quod sub BF & BM continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN. Et sumpta BF communi altitudine, rectangulum, quod sub BF & BH continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BF & BL, majorem rationem habet quam rectangulum, quod sub BF & BM continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN. Et permutando, rectangulum, quod sub BF & BH continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BF & BM, hoc est BH ad BM, majorem rationem habet quam rectangulum, quod sub BF & BL continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN. At vero BH ad BM se habet ut BI ad BG;

&



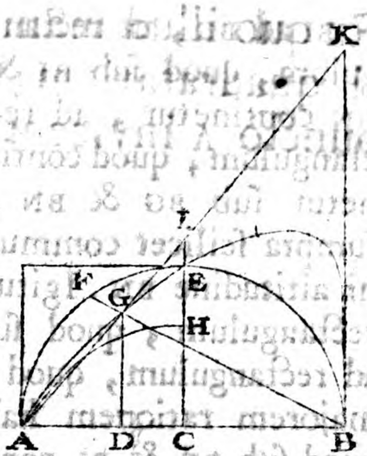
& BI ad BG, ut rectangulum, quod sub BI & BN continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN, sumpta scilicet communi altitudine BN. Igitur rectangulum, quod sub BI & BN continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN, majorem rationem habet quam rectangulum, quod sub BF & BL continetur, ad rectangulum, quod continetur sub BG & BN. Majus est igitur rectangulum, quod sub BI & BN continetur, rectangulo, quod continetur sub BF & BL; ideoque BN ad BL majorem rationem habet quam BF ad BI. Vt autem BN ad BL, ita se habet BF ad BD. Igitur BF ad BD majorem rationem habet quam BF ad BI; ideoque BI major est quam BD. Si igitur ab extremo basis circuli genitoris; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

PROPOSITIO IV.

Si ab extremo basis semicirculi genitoris, qua parte quadrataria scalena extra ipsum cadit, recta linea ducatur eidem basi perpendicularis, æqualisque semicirculo genitori; quæ recta ab ejus extremo ad alterum basis extremum ducitur, quadratariam scalenam continget.

Sit

Sit quadrataria scalena AEB, cujus semicirculus genitor AFEB: ducaturque a puncto B ipsi AB perpendicularis BK, eademque æqualis semicirculo AFEB. Dico rectam, quæ a puncto K ad A ducitur, contingere quadratariam scalenam AEB.



Secet enim AK, si fieri potest, quadratariam scalenam AEB in puncto G; ducaturque a puncto B per G recta BF; & a puncto G ipsi AB perpendicularis recta GD. Quoniam igitur ut BEFA ad FA, ita se habet AB ad AD; & ut AB ad AD, ita BK, sive eidem æqualis BEFA, ad GD; ideo BEFA se habet ad FA, ut BEFA ad GD: ac propterea FA æqualis est ipsi GD; quod est absurdum. Non igitur secat AK quadratariam scalenam AEB. Quare contingit. Si igitur ab extremo basis semicirculi genitoris; & quæ sequuntur. Quod oportebat demonstrare.

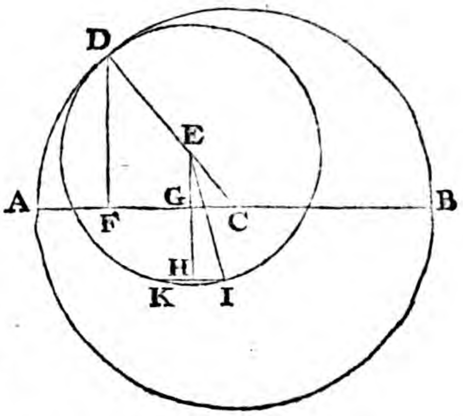
COROLLARIUM.

Quod si per punctum C, quod basim AB in duas æquas partes secat, ducatur CI ipsi BK parallela, erit CI æqualis circumferentiæ AFE. Itaque si in quadrato AE descripta esse intelligatur quadrataria Dinostrati, cujus sit basis CH, recta AI ipsam continget.

Ex quo illud manifeſtum eſt, Dinoſtrati quadratariam, & ſcalenam ſeſe in puncto A invicem contingere.

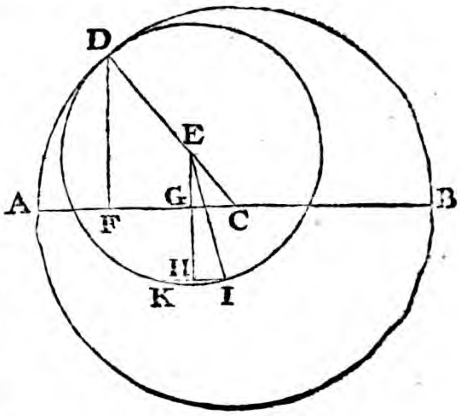
RE-

RESOLVTIO.



Sit circulus ADBA, cujus centrum C, punctaque in eo data sint I & K. Oportet circulum describere, qui per puncta transiens I & K contingat circulum ADBA.

Ponatur factum id esse, quod quaeritur; circulusque DIK per puncta transiens I & K circulum ADBA contingat in puncto D. Iungantur autem puncta I & K recta IK, eaque secta in duas aequas partes in puncto H, ducatur ab eodem ipsi IK ad rectos angulos recta indefinita EH; jungaturque recta CD. Quoniam igitur in circulo DIK recta EH rectam HI in duas aequas partes, & ad rectos angulos secat, erit utique in EH centrum circuli DIK. Et quoniam duo circuli ADBA, DIK sese intus contingunt in puncto D; ductaque est a C, centro circuli ADBA, ad punctum D recta CD, ea utique per alterius circuli DIK centrum transibit; ideoque centrum circuli DIK erit in recta CD. Est autem ejusdem circuli centrum etiam in recta EH. Igitur centrum circuli DIK erit in puncto rectae utrique

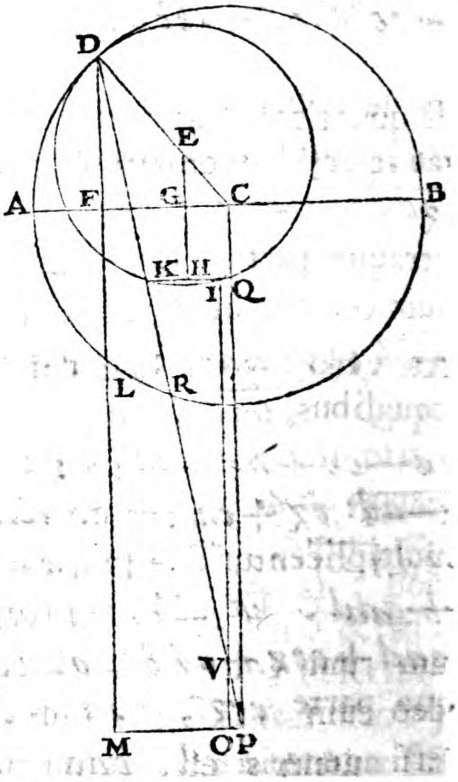


communi, quod quidem esse intelligatur punctum E. Agatur modo per punctum C circuli ADBA diameter AB ipsi IK parallela, quæ ipsam EH secet in puncto G; ducaturque a puncto D ipsi AB ad rectos angulos recta DF: & vocentur AC, a; HI, ipsi HK æqualis, b; GH, c; CG, d; EG, y; DE, x; CF, z; DF, u. Quoniam igitur punctum E centrum est circuli DIK, erit utique, si recta jungatur EI, DE ipsi EI æqualis, quadratumque, quod a DE describitur, æquale quadrato, quod describitur ab EI; hoc est quadratis, quæ describuntur ab EH, & HI. Est autem & quadratum, quod ab EC describitur, æquale quadratis, quæ describuntur a GE, & CG. Duæ igitur æquationes habentur: $xx = yy + 2cy + cc + bb$; & $aa - 2ax + xx = yy + dd$. Quarum altera si a prima auferatur, erit $2ax - aa = bb + cc - dd + 2cy$. Et addito ab utraque parte aa, $2ax = aa + bb + cc - dd + 2cy$; sive $\frac{\overline{aa + bb + cc - dd} + y.2c}{2c}$ $= 2ax$. Et facto $\frac{aa + bb + cc - dd}{2c} = e$, $\overline{e + y}.2c = 2ax$; sive $\overline{e + y}.c = ax$. Itaque instituta proportione, erit $c : a :: x : e + y$.

Quo-

Quoniam vero CF ad FG ſe habet ut CD ad DE, erit utique $z : z - d :: a : \frac{az - ad}{z}$. Igitur DE, nempe $x, = \frac{az - ad}{z}$. Rurſus quoniam CF ad DF ſe habet ut CG ad GE, erit utique $z : u :: d : \frac{du}{z}$. Igitur GE, nempe $y, = \frac{du}{z}$. Et addito ab utraque parte e, $e + y = e + \frac{du}{z}$, ſive $\frac{ez + du}{z}$. At vero $c : a :: x : e + y$. Igitur, ſubſtitutis æqualibus, $c : a :: \frac{az - ad}{z} : \frac{ez + du}{z}$, ſive $az - ad : ez + du$. Iam vero media extremaque multiplicentur; atque erit $cez + cdu = aaz - aad$. Et addito ab utraque parte aad, $aad + cez + cdu = aaz$. Et ablato ab utraque parte cez, $aad + cdu = aaz - cez$. Eſt autem $aad + cdu = \overline{\frac{aa}{c} + u}.\, cd$; & $aaz - cez = \overline{aa - ce}.\, z$. Igitur $\overline{\frac{aa}{c} + u}.\, cd = \overline{aa - ce}.\, z$. Et inſtituta proportione, $cd : aa - ce :: z : \frac{aa}{c} + u$. At vero $cd : aa - ce :: 2cd : aa - cc + dd - bb$; quando $aa - ce = \frac{aa - cc + dd - bb}{2}$. Igitur $2cd : aa$

$-cc+dd-bb :: z : \frac{aa}{c}+u$. Quod cum ita sit, facile apparet quomodo problema confici possit. Describatur enim figura, quæ hic apposita est, in qua CP $= \frac{aa}{c}$; & OP : OV :: $2cd : aa-cc+dd-bb$; & per puncta P, & V ducta esse intelligatur recta PD, quæ circulum ADBA in duobus punctis secabit, puta D & R. Quoniam igitur triangula POV, PMD similia inter se invicem sunt, erit utique OP : OV :: PM : MD. At vero OP : OV :: $2cd : aa-cc+dd-bb$; & PM : MD :: $z : \frac{aa}{c}+u$. Igitur



$$2cd : aa-cc+dd-bb :: z : \frac{aa}{c}+u.$$

Hæc autem proportio locum habet, quando circulus per puncta transiens I & K circulum ABDL contingit. Ex quo colligitur punctum D, in quo recta PD circulum ADBA secat, ad rem facere. Idem concluditur de puncto altero R; quod argumento est duos circulos describi pos-

se

se per puncta I, K circulum ADBL contingentes, alterum ad partes D, alterum ad partes L. Si punctum Q cadat inter puncta H & I, quoniam b major est quam d, erit $2cd : aa - cc + dd - bb :: z : \frac{aa}{c} + u$, ubi $dd - bb$ est quantitas negativa. Si vero punctum I cadat in Q, quoniam b ipsi d est æqualis, erit $2cd : aa - cc :: z : \frac{aa}{c} + u$. Quod si punctum Q cadat in C, proportio $2cd : aa - cc + dd - bb :: z : \frac{aa}{c} + u$, in hanc vertitur: $2cd : cz :: aa - cc + dd - bb : aa + cu$; in qua fit $c = c.\overline{1-1}$; & $cc = cc.\overline{1-1}^2$. Erit igitur $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: aa - cc.\overline{1-1}^2 + dd - bb : aa + cu.\overline{1-1}$. At vero comparatio factorum tum $aa + dd - bb$ cum $cc.\overline{1-1}$, atque adeo cum $cc.\overline{1-1}^2$, tum aa cum $cu.\overline{1-1}$, diversi generis est. Igitur neglectis $cc.\overline{1-1}^2$ & $cu.\overline{1-1}$, erit $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: aa + dd - bb : aa$. At vero $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: 2cd : cz$, sive $2d : z$. Igitur $2d : z :: aa + dd - bb : aa$. Et mediis extremisque multiplicatis, $2aad = aa + dd - bb.z$. Et divisa æquatione per $aa + dd - bb$, $z = \frac{2aad}{aa + dd - bb}$. Quæ quidem æquatio, si punctum C cadat inter puncta H & I, eadem est; nisi quod $dd - bb$ sit quantitas negativa. At si punctum I

per Prop. 5. & 8. lib. 1. de Nihilo Geometrico.

per Prop. 7. & 9. lib. 1. de Nihi. Geom.

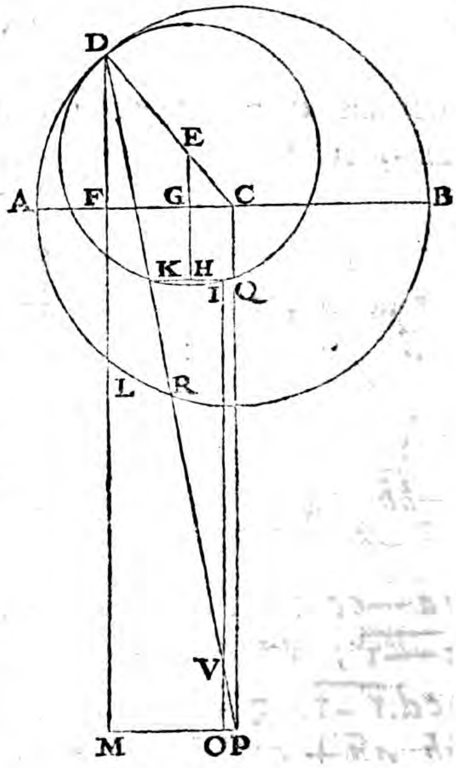
per Prop. 5. lib. 1. de Nihi. Geom.

cadat in C, in hanc vertitur: $z = 2b$. Si denique punctum H cadat in Q, quando & punctum F cadit in C, tunc vero fit $d = d.\overline{1-1}$; $dd = dd.\overline{1-1}^2$; $z = z.\overline{1-1}$; $u = a$. Itaque erit $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: aa - cc + dd.\overline{1-1}^2 - bb : aa + ac$. At vero comparatio facti $aa - cc - bb$ cum facto $dd.\overline{1-1}$, atque adeo cum facto $dd.\overline{1-1}^2$, diversi generis est. Igitur neglecto $dd.\overline{1-1}^2$, erit $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: aa - cc - bb : aa + ac$. At vero $2cd.\overline{1-1} : cz.\overline{1-1} :: 2cd : cz$, sive $2d.\ z$; & $2d : z :: 2CG\ (= 2HQ) : CF$, sive $2CE : CD$. Igitur $2CE : CD$, sive $2CE : a :: aa - cc - bb : aa + ac$. Et mediis, extremisque multiplicatis, $2CE : \overline{aa + ac} = a.\overline{aa - cc - bb}$. Et divisa æquatione per $aa + ac$, $2CE = \frac{aa - cc - bb}{a + c}$. Quæ quidem æquatio, si punctum H cadat in C, in hanc vertitur :

per Prop. 5. & 8. lib. 1. de Nihi. Geom.

per Prop. 7. & 9. lib. 1. de Nihi. Geom.

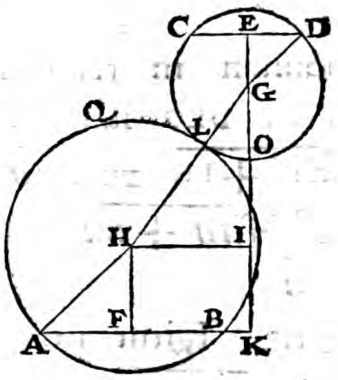
per Prop. 6. lib. 1. de Nihi. Geom.



tur :

tur: $2CE = \frac{aa - bb}{a}$. Hæc autem omnia ita se habere manifestum est ex iis, quæ supra demonstrata sunt.

RESOLUTIO.



Datæ sint magnitudine ac positione duæ rectæ lineæ AB & CD. Oportet super AB & CD constituere duo circuli segmenta similia contrarioque modo posita, quæ sese invicem contingant.

Ponatur factum id esse, quod quæritur; constitutaque sint super AB & CD circuli segmenta AQB, COD, qualia modo diximus. Secentur autem AB & CD in duas æquas partes in punctis F & E; ducanturque ab iisdem ad rectos angulos ipsis AB & CD rectæ FH & EG. Erit utique in FH centrum circuli, in quo est segmentum AQB; & in EG centrum circuli, in quo est segmentum COD. Iungatur GH, quæ quidem per punctum contactus L transibit; describaturque figura, quæ hic apposita est. Quoniam igitur segmentum AQB simile est segmento COD; hoc siquidem ponitur; ideo angulus AHF æqualis est angulo DGE. Æqualis est autem angulus AFH angulo DEG; quippe uterque est rectus. Æqualis est igitur & angulus FAH angulo EDG; ideoque triangulum AHF simile est triangulo DGE. Vocentur modo AF, a; DE, b; FK c; EK, d; HF, x. Quoniam igitur triangula AHF, DGE similia sibi invicem sunt, ideo ut AF ad FH, ita se habet DE ad EG; idest $a : x :: b : \frac{bx}{a}$; ac propterea EG $= \frac{bx}{a}$. Et quoniam in triangulis AHF, DGE, anguli AFH, DEG sunt uterque recti, ideo AH $= \sqrt{AF^2 + FH^2} = \sqrt{aa + xx}$; & DG $= \sqrt{DE^2 + EG^2} = \frac{b}{a}\sqrt{aa + xx}$. At vero AH $=$ HL; & DG $=$ GL. Igitur HG $=$ HL $+$ LG $= \sqrt{aa + xx} + \frac{b}{a}\sqrt{aa + xx}$, sive $= \frac{\overline{a + b}}{a}\sqrt{aa + xx}$. Est autem GI $=$ EK — IK — EG: & EK $= d$; IK $=$ HF $= x$; EG $= \frac{bx}{a}$. Igitur GI $= \frac{ad - ax - bx}{a}$, sive $= (ad - \overline{a + b}.x) : a$. Quoniam igitur triangulum HIG est rectangulum, ideo $HG^2 = IG^2 + HI^2$; sive, analyticis quantitatibus substitutis, $\overline{\frac{a + b}{a}\sqrt{aa + xx}}^2 = \overline{\frac{ad - \overline{a + b}.x}{a}}^2 + cc$. Nimirum $\frac{\overline{a + b}^2.\overline{aa + xx}}{aa} = (aadd - 2ad.\overline{a + b}.x + \overline{a + b}^2.xx + aacc) : aa$. Et multiplicata æquatione per $\frac{aa}{\overline{a + b}^2}$,

$\overline{a+b}^2 aa + \overline{a+b}.xx = aadd - 2ad.\overline{a+b}.x + \overline{a+b}^2 xx + aacc$. Et ablato ab utraque parte $\overline{a+b}^2.xx$, $\overline{a+b}^2.aa = aadd - 2ad.\overline{a+b}.x + aacc$. Et divisa æquatione per a, $\overline{a+b}^2 a = add - 2d.\overline{a+b}.x + acc$. Et addito ab utraque parte, $2d.\overline{a+b}.x$, $\overline{a+b}^2.a + 2d.\overline{a+b}.x = add - acc$. Et ablato ab utraque parte $\overline{a+b}^2.a$, $2d.\overline{a+b}.x = add + acc - \overline{a+b}^2.a$. Et divisa æquatione per $2d.\overline{a+b}$, $x = \dfrac{add + acc - \overline{a+b}^2 a}{2d.\overline{a+b}}$; sive $\dfrac{\overline{dd+cc}.a - \overline{a+b}^2 a}{2d.\overline{a+b}}$. Quod si intelligatur rectas AB, CD circulos ABQ, CDO contingere, id quidem fieri non potest, quin utraque abeat in nihilum geometricum. Tunc vero fit $a = a.\overline{1-1}$, & $\overline{a+b}^2 = \overline{a+b}^2\,\overline{1-1}^2$; & quæ modo reperta æquatio est, in hanc vertitur: $x = (\overline{dd+cc}.a.\overline{1-1} - \overline{a+b}^2\,\overline{1-1}^2.a.\overline{1-1}) : 2d.\overline{a+b}.\overline{1-1} = (\overline{dd+cc}.a.\overline{1-1} - \overline{a+b}^2.a.\overline{1-1}^3) : 2d.\overline{a+b}.\overline{1-1}$. At vero comparatio facti $\overline{dd+cc}.a.\overline{1-1}$ cum facto $\overline{a+b}^2.a.\overline{1-1}^2$, atque adeo cum facto $\overline{a+b}^2.a.\overline{1-1}^3$, diversi generis est. Igitur neglecto $\overline{a+b}^2.a.\overline{1-1}^3$, erit $x = \dfrac{\overline{dd+cc}.a.\overline{1-1}}{2d.\overline{a+b}.\overline{1-1}}$

per Prop. 5. & 8. lib. 1. de Nihi. Geom.

per Prop. 2. & 11. lib. 1. de Nihi. Geom.

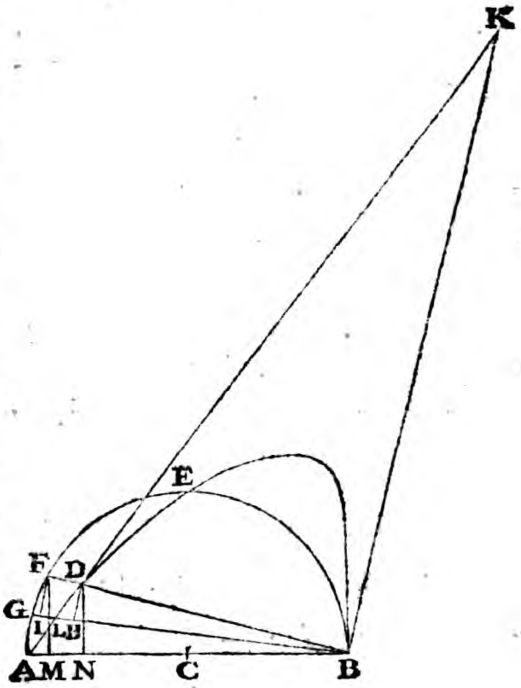
At

At vero nihilum ſi ſemetipſum dividat, unitatem facit. Igitur $x = \frac{\overline{dd+cc}.a}{2d.\overline{a+b}}$. Hæc autem ita ſe habere manifeſtum eſt ex iis, quæ ſupra demonſtrata ſunt.

per 5. defin. lib. 1. de Nihi. Geom.

RESOLVTIO.

Data ſit quadrataria ſcalena AEB, cujus ſemicirculus genitor AFEB, datumque item in ea punctum D. Oportet a puncto D rectam lineam ducere, quæ quadratariam ſcalenam contingat.



Ponatur factum id eſſe, quod quæritur; & recta linea DK contingat quadratariam ſcalenam AEB; ducaturque a puncto B per D recta BF, eidemque perpendicularis BK ipſi DK occurrens in puncto K. Intelligantur autem ipſi BF infinite te propinqua ducta esse BG; descriptæque centro B, atque intervallis BD, BF circulorum infinite parvæ circumferentiæ DH, FI. Erunt utique, ex principiis calculi differentialis, triangula FIG, DHL rectangula rectilinea, horumque postremum simile triangulo DBK. Itaque secta AB in duas æquas partes in puncto C, ductisque a punctis D, F rectis DN, FM, vocentur AB, $2a$; AFEB, $2b$; FE, s; CM, x, ut sit BF $= b + s$, & BM $= a + x$. Et quoniam quadratum, quod describitur a BF, æquale est rectangulo, quod continetur sub AB & BM, erit utique, analyticis quantitatibus substitutis, $BF^2 = 2aa + 2ax$; ideoque BF $= \sqrt{2aa + 2ax}$. Rursus quoniam ut AFEB ad BEF, ita se habet AB ad BN, erit BN $= \frac{ab + as}{b}$.

Quoniam igitur ut BM ad BN, ita se habet BF ad BD, erit $a + x : \frac{ab + as}{b} :: \sqrt{2aa + 2ax} :$ BD; ideoque BD $= \frac{ab + as}{ab + bx}\sqrt{2aa + 2ax}$.

Quærantur modo FG & GI, quarum quidem alteram invenias $\frac{adx}{\sqrt{aa - xx}}$, alteram $\frac{adx}{\sqrt{2aa + 2ax}}$. Et quoniam $FI^2 = FG^2 - GI^2$, erit $FI^2 = \frac{aadxx}{aa - xx} - \frac{aadxx}{2aa + 2ax}$, sive $\frac{\overline{a^4 + 2a^3x + aaxx} \cdot dxx}{\overline{aa - xx} \cdot \overline{2aa + 2ax}}$

Et sumpta ab utraque parte radice quadrata, FI $= \dfrac{\overline{aa+ax}.\,dx}{\sqrt{aa-xx}.\,\overline{2aa+2ax}}$. Quoniam igitur ut BF ad FI, ita se habet BD ad DH, erit, analyticis quantitatibus substitutis, $\sqrt{2aa+2ax} : \dfrac{\overline{aa+ax}.dx}{\sqrt{\overline{aa-xx}.\overline{2aa+2ax}}} :: \dfrac{\overline{ab+as}\sqrt{2aa+2ax}}{ab+bx} :$ DH; ideoque DH $= \dfrac{\overline{aa+ax}.\,\overline{ab+as}.dx}{\overline{ab+bx}\sqrt{\overline{aa-xx}.\overline{2aa+2ax}}}$; sive $\dfrac{\overline{abdx+asdx}.\sqrt{aa+ax}}{\overline{ab+bx}\sqrt{2aa-2xx}}$. Quæratur denique, LH, quam quidem invenias $(\overline{a^3bdx+aabxdx-abb-abs}\,dx\sqrt{\overline{aa-xx}.}$ $\overline{2aa+2ax} + \overline{aabdx+abxdx}.\overline{ab+as}.$ $\sqrt{aa-xx}):\overline{ab+bx}^2.\sqrt{aa-xx}.\sqrt{2aa+2ax}.$ Iam vero propter triangulorum LHD, DBK similitudinem, ut LH ad HD, ita se habet DB ad BK. Itaque instituta proportione per modo inventas analyticas quantitates, mediisque inter se invicem multiplicatis, & per primam divisis, erit BK $=(\overline{ab+as}^2.\overline{2aa+2ax}.\sqrt{\overline{aa+ax}.\overline{aa-xx}}):$ $((\overline{a^3b+aabx-abb-abs}.\sqrt{aa-xx}).(2aa$ $+2ax) + \overline{aab+abx}.\overline{ab+as}.\sqrt{aa-xx}).$ $\sqrt{2aa-2xx}$. Igitur BK hoc pacto inventa, si ab ejus extremo K ad datum punctum D recta ducatur, ea quadratariam scalenam continget. Quod si punctum D cum A convenire intelligatur, quando ſcilicet BK quadratariam ſcalenam in A contingit, convenient utique cum eodem A puncta etiam F, & N; æqualiſque erit EF ipſi EA, & CN ipſi CA; hoc eſt $\int = b$, & $x = a$. Tunc vero fit $2aa + 2ax = 4aa$; $\sqrt{\overline{aa + ax}.\overline{aa - xx}} = aa.\sqrt{2-2}$; $a^3b + aabx = 2a^3b$; $\sqrt{aa - xx} = a\sqrt{1-1}$; $aab + abx = 2aab$; $\sqrt{2aa - 2xx} = a\sqrt{2-2}$; & quæ modo reperta æquatio eſt, in hanc vertitur: $(4aabb.4aa.aa.\sqrt{2-2}) : ((2a^3b - \overline{abb - abb.a\sqrt{1-1}}).\overline{4aa + \overline{2aab.2ab.a\sqrt{1-1}}})a\sqrt{2-2}$; five $(16a^6bb\sqrt{2-2}) : (8a^6b\sqrt{2-2} - 4a^5bb.\sqrt{2.\overline{1-1}^4} + 4a^5bb\sqrt{2.\overline{1-1}^2})$. At vero comparatio facti $8a^6b\sqrt{2-2}$ cum facto $4a^5bb\sqrt{2.\overline{1-1}^2}$, atque adeo cum facto $4a^5bb\sqrt{2.\overline{1-1}^4}$, diverſi generis eſt. Igitur neglectis $4a^5bb\sqrt{2.\overline{1-1}^2}$, & $4a^5bb\sqrt{2.\overline{1-1}^4}$. erit BK $= \dfrac{16a^6bb\sqrt{2-2}}{8a^6b\sqrt{2-2}}$; five $\dfrac{2b\sqrt{2-2}}{\sqrt{2-2}}$,

At vero nihilum ſi ſemetipſum dividat, unitatem facit. Igitur BK $= 2b$. Si cui libeat circumferentiæ BEF, rectæque BN denominationem immutare, ut ſit earum altera $\int$, pro $b + \int$, altera x, pro $a + x$, inveniet, calculo eodem modo inſtituto, BK $= \dfrac{a\int\int\sqrt{2ax}}{2abx - b\int\sqrt{2ax - xx}}$

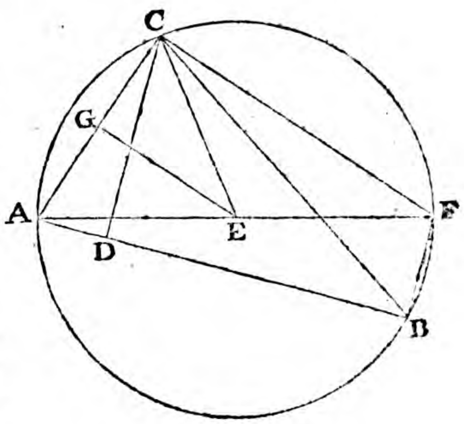
Quæ

Quæ quidem æquatio longe eſt ſimplicior, quam quæ ſupra allata eſt, eademque vertitur in BK $= 2b$; ita nimirum, ſi fiat $s = 2b$; & $x = 2a$, hoc pacto : BK $= \frac{4abb\sqrt{4aa}}{4aab - 2bb\sqrt{4aa - 4aa}} = \frac{8aabb}{4aab} = 2b$. Quod ſane argumento eſſe poteſt, rectam BK paullo ſupra abſque ullo errore fuiſſe definitam. Verum hoc ita ſe habere ſuo loco demonſtratum eſt.

PRO-

PROPOSITIO.

Cujuſcumque trianguli quadruplum ad rectangulum, quod ſub duobus ejuſdem lateribus continetur, eam rationem habet, quam tertium latus ad ſemidiametrum circuli, cui triangulum inſcriptum ſit.



Sit triangulum ABC inſcriptum circulo ABFC, cujus centrum E, & ſemidiameter CE. Dico quadruplum trianguli ABC ad rectangulum, quod continetur ſub AB & BC, eam rationem habere, quam AC ad CE.

Ducatur enim ab angulo A per centrum E recta linea AF, junganturque CF, & FB: & ab angulo C ad AB, itemque a centro E ad AC perpendiculares ducantur CD, & EG. Quoniam igitur angulus CBF æqualis eſt angulo CAF; ſunt enim uterque in eodem ſegmento; anguluſque CAE æqualis angulo ACE; ideo angulus CBF æqualis eſt angulo ACE. Æqualis eſt autem angulus CBF angulo BCD; quoniam rectæ CD, BF parallelæ ſibi invicem ſunt, utpote quæ rectæ eidem AB ſunt perpendiculares

res

res. Æqualis eſt igitur angulus BCD angulo ACE. At vero etiam angulus CDB æqualis eſt angulo CGE. Igitur duo triangula CDB, CGE ſunt ſimilia: ac ptopterea ut CD ad CB, ita ſe habet CG ad CE. Et ſumptis antecedentium duplis, ut dupla ipſius CD ad CB, ita dupla ipſius CG, hoc eſt AC, ad CE. Et ſumpta AB communi altitudine, ut rectangulum, quod ſub AB & dupla ipſius CD continetur, ad rectangulum, quod continetur ſub AB & BC, ita AC ad CE. At vero rectangulum, quod ſub AB & dupla ipſius CD continetur, æquale eſt quadruplo trianguli ABC. Igitur quadruplum trianguli ABC ad rectangulum, quod continetur ſub AB & BC, ſe habet ut AC ad CE. Cujuſcumque igitur trianguli quadruplum; & quæ ſequuntur. Quod oportebat demonſtrare.

FINIS.

V E R O N Æ

Typis Heredis Augustini Carattoni

KAL. QVINCT. MDCCLXIX.